ANALYSE DIDACTIQUE DES RAISONNEMENTS EN CLASSE DE MATHEMATIQUES PAR L'USAGE D'UN MODELE SPECIFIQUE

EXEMPLES D'ETUDES DE SITUATIONS A DIFFERENTS NIVEAUX DE SCOLARITE

Bloch I.*, Front M.**, Gibel P.*

RÉSUMÉ

En trois séances de deux heures, cet atelier/séance de travaux dirigés a proposé aux participants de découvrir, de s'approprier et de mettre en œuvre un modèle d'analyse des raisonnements des élèves, modèle basé sur la prise en compte de plusieurs dimensions : les conditions de l'élaboration d'un raisonnement en situation, les modalités et fonctions des raisonnements (justifier, expliquer, argumenter, prouver, démontrer, etc.) et leurs dimensions syntaxique et sémantique. Ce modèle a été appliqué dans trois contextes différents : les fonctions au début du lycée, les nombres au primaire, et les pavages du plan au secondaire.

Mots clefs : modélisation, raisonnement, argumentation, preuve.

ABSTRACT

During three slots of two hours the participants were invited to discover and apply a model to analyse mathematical arguments in a classroom session where a problem is submitted to students. This model is based on different dimensions: conditions in which students elaborate reasoning when they solve in a situation, functions of reasoning (justify explain, argument, prove, demonstrate, etc.) and the syntactic and semantic dimensions. The model has been applied in three different contexts: the teaching of numeric functions at the beginning of secondary school, the numbers in primary school and the Archimedean tilings in secondary school.

Keywords : modeling, reasoning, argumentation, proof.

ANALYSE DES SITUATIONS ET DES RAISONNEMENTS

La modalité choisie pour cet atelier est un travail d'étude de trois situations d'argumentation et de preuve relevant des niveaux de scolarité (primaire, secondaire et supérieur) pour lesquels nous mettrons à l'épreuve l'adéquation du modèle (Bloch et Gibel, 2011) à une analyse détaillée des différentes formes de raisonnements. Les situations à l'étude ont été choisies dans différents domaines des mathématiques : arithmétique, analyse et géométrie. Il s'agit d'étudier les raisonnements produits par les élèves, et la capacité de ceux-ci à résoudre le problème posé et à comprendre les concepts mathématiques en jeu dans la situation. Nous présentons brièvement ci-dessous notre modèle d'analyse des raisonnements en situation.

1. L'analyse des raisonnements

La méthodologie de l'analyse de la résolution de problèmes nous amène à prendre en compte la dimension sémiotique du raisonnement dans ses différentes formes : orale, écrite et formelle. Une attention particulière est portée aux différentes formes du langage permettant d'exprimer les mathématiques. Une première séance est donc consacrée à l'étude des raisonnements, et vise à justifier la nécessité de prendre en compte :

- L'identification de leurs différentes formes par le recours à une analyse sémiotique ;
- Les conditions d'utilisation en classe de mathématiques ;
- L'identification des différentes fonctions ;
- La complexité conceptuelle propre au contenu à enseigner (aspects historiques et épistémologiques).

Pour rendre compte des différentes formes de raisonnements en classe de mathématiques, nous avons choisi de définir le raisonnement en choisissant une définition plus large que celle utilisée habituellement en mathématiques :

* Équipe E3D, laboratoire CHANGES, Université de Bordeaux
** Laboratoire S2HEP, Université de Lyon

« Un raisonnement est un enchaînement, une combinaison ou une confrontation d'énoncés ou de représentations respectant des contraintes susceptibles d'être explicitées, et conduits en fonction d'un but. » (Oléron, 1977, p.9).

Notre travail de recherche, en amont, avait consisté à construire un cadre théorique afin de :

- Éclairer le raisonnement du point de vue de ses fonctions dans la situation et du statut des représentations sémiotiques produites ;
- Prendre en compte les raisonnements – valides et erronés – des élèves en précisant les conditions dans lesquelles ils ont été élaborés et le niveau de preuve associé ;
- Élaborer un modèle multidimensionnel qui permette une visibilité des différentes formes de raisonnements : schéma, langage oral, langage écrit,…

2. Différents types de justifications en situation de validation, de décision ou de preuve

Lors de la mise en œuvre de situations dans les classes, et plus généralement dans la pratique des mathématiques, nous observons les types suivants de justification :

- Justification syntaxique : l'argumentation se réfère à des règles formelles ; l'élève établit la validité du discours à l'aide des règles permises – c'est l'objectif final de l'apprentissage, afin que l'apprenant pratique des mathématiques de façon experte.
- Justification sémantique : argumentation de la pertinence et de la validité des modèles. Cette pertinence est établie en se référant aux objets mathématiques (via leurs représentations) pris en compte pour l'argumentation ;
- Justification pragmatique : justification de la validité et de l'intérêt de la procédure par référence à l'adéquation au modèle.

3. Les niveaux de milieux, une référence pour construire et étudier des situations

Rappelons que les situations adidactiques ou à dimension adidactique sont organisées suivant des niveaux de milieux : ces niveaux permettent un travail différent pour les élèves, à savoir, identification de la question posée (milieu matériel M_{-2}) ; recherche pragmatique de solution (milieu objectif M_{-1}) ; formalisation des résultats (milieu de référence M_0), puis, sous la responsabilité du professeur, synthèse et conclusion : institutionnalisation, apprentissage des savoirs associés (cf. Bloch et Gibel, 2011).

Dans l'article cité ci-dessus, nous avions proposé un tableau permettant de relier les raisonnements aux milieux, ces milieux décrivant les *étapes* de résolution de la situation. Ce tableau intègre la nature sémantique et/ou syntaxique des raisonnements.

	Milieu M-2	Milieu M-1	Milieu M0
Fonctions des raisonnements	R1.1 SEM - Intuition sur un dessin - Décision de calcul - Moyen heuristique - Exhibition d'un exemple ou d'un contre-exemple	R1.2 SYNT/SEM - Calculs génériques - Formulation de conjectures étayées - Décision sur un objet mathématique	R1.3 SYNT - Formalisation des preuves dans la théorie mathématique requise (avec aide du P éventuellement)
Niveaux d'utilisation des symboles	R2.1 SEM Icônes ou indices dépendant du contexte (schémas, intuitions…)	R2.2 SYNT/SEM Arguments 'locaux' ou plus génériques : indices, calculs	R2.3 SYNT Arguments formels spécifiques : ici symboles de l'Analyse
Niveau d'actualisation du répertoire	R3.1 SYNT/SEM - Utilisation ponctuelle de connaissances anciennes - Enrichissement au niveau heuristique : calculs, conjectures ponctuelles	R3.2 SYNT/SEM Enrichissement au niveau argumentaire : - des énoncés - du système organisateur	R3.3 SYNT - Formalisation des preuves - Introduction d'ostensifs organisés - Intégration des éléments théoriques du domaine mathématique

Tableau 1. *– milieux et raisonnements*

Ce tableau s'est révélé efficace pour étudier le pilotage de la situation proposée, et les fonctions des raisonnements mis en œuvre par les élèves ; il permet aussi de comprendre comment les raisonnements produits par les élèves en situation d'action et de formulation sont réutilisés en situation de validation ; il est possible d'identifier les connaissances et les savoirs mobilisés, valides et erronés, et leurs évolutions au cours de la séquence.

Le tableau donne accès à la nature, la modalité et la fonction des raisonnements utilisés en fonction de l'objectif de preuve. Les axes du tableau réfèrent à des niveaux de modélisation différents des raisonnements, soit une modélisation *globale* relative aux niveaux de milieux en lien avec les fonctions des raisonnements, soit une modélisation *locale* au niveau des arguments produits dans le travail et les échanges en classe. Signalons que les productions de signes (des élèves et de l'enseignant) peuvent être des énoncés « écrits », des éléments scripturaux (graphiques, schémas, dessins), et des calculs (liés aux différents domaines des mathématiques) ; mais aussi des énoncés « oraux », et des éléments gestuels.

Ce modèle doit permettre d'affiner et de prolonger l'analyse a priori de la situation en lien étroit avec les niveaux de milieux, d'identifier les situations de décision, de formulation ou validation, en les reliant aux phases didactiques et aux phases d'institutionnalisation lors de l'analyse a posteriori. Il doit aussi conduire à analyser les signes produits en situation et à les lier aux niveaux des raisonnements élaborés par les élèves et au répertoire didactique de la classe (répertoire de représentation).

Nous utilisons aussi une version « simplifiée » de la sémiotique de Peirce pour analyser le niveau des signes employés par les élèves, selon le milieu (pour une description de cet usage, voir Bloch et Gibel, 2011).

Ainsi, nous n'utilisons que de trois distinctions : icône, indice et symbole/argument :

- Une interprétation iconique est de l'ordre de l'intuition, éventuellement sur un schéma, une figure ;
- Un signe indiciel est de l'ordre d'une proposition ;
- Un symbole-argument est de l'ordre d'une preuve mathématique.

LES SITUATIONS PRESENTEES ET LEUR ANALYSE A PRIORI

La Théorie des Situations Didactiques (TSD) et l'étude des situations comprennent une composante incontournable : c'est l'analyse a priori de la situation proposée, à un niveau donné, aux élèves. Cette analyse a priori se fait sur des critères également rigoureux, dont nous donnons un résumé ci-dessous. Ces éléments ont été transmis aux personnes assistant à l'atelier, et exemplifiés sur les trois situations présentées.

Ces éléments permettent d'avoir une anticipation du déroulement de la séance en classe, et ils permettent au professeur qui a fait cette analyse de réagir conformément aux attentes de la situation et du travail des élèves.

1. Les situations présentées

Durant la première séance, ce modèle a été exposé aux participants ; puis la situation « Graphiques et fonctions » leur a été donnée afin qu'ils effectuent l'analyse a priori et soient conscients des savoirs en jeu (voir Annexe 1 ; cf. aussi Bloch, 2002).

Des extraits d'échanges avec les élèves ont été présentés aux participants ; dans ces extraits, les élèves cherchent un critère pour pouvoir affirmer qu'un graphique est bien celui d'une fonction ; puis les notions de majorant, fonction bornée, etc. ont été discutées.

Nous avons débuté la deuxième séance par la présentation de la situation « Le nombre le plus grand » mise en œuvre au C.O.R.E.M. dans une classe de CM2. Après avoir construit l'analyse a priori de la situation, nous avons effectué avec les participants une analyse de différentes formes de raisonnements produits par les élèves et par l'enseignant au cours de différentes phases de la séquence (Gibel, 2015).

Lors de la troisième séance, la situation des pavages archimédiens du plan (voir annexe 3 et Front, 2015) a été travaillée et les remarques des participants prises en compte dans la conclusion.

LES RAISONNEMENTS OBSERVES EN SITUATION

1. Les fonctions

Cette première situation donne à voir une alternative à dimension adidactique pour l'introduction des fonctions 'quelconques' au lycée. Pour les détails de la situation, et les schémas qui la composent, voir l'Annexe 1. La situation est détaillée dans l'article Bloch (2002) accessible sur le site de la revue *Petit x*.

L'introduction d'un concept par une situation à dimension adidactique vise à articuler connaissances des élèves, et savoirs mathématiques. Ainsi que le dit F. Conne :

> « Enseigner, c'est travailler le savoir, pour induire dans un cadre situationnel choisi, un processus cognitif supportant l'apprentissage, dont le produit sera en retour institué en savoir » (Conne, 1992)

Or, l'évolution de l'enseignement des mathématiques a montré des modifications de programmes souvent peu pertinentes, ainsi :

— les années 70 tentaient d'organiser l'enseignement autour de la présentation formelle du savoir (les « mathématiques modernes »), en supposant ce savoir suffisant pour traiter les problèmes qui en relèveraient, et en négligeant la construction nécessaire de connaissances relatives à ces problèmes ;

— l'enseignement des années 80, quant à lui, présentait des problèmes à traiter avec très peu de savoirs institués, mais chaque cas nouveau nécessitait la mise en œuvre de connaissances importantes relatives à l'algèbre et aux majorations ; ces connaissances se sont révélées trop locales pour être instituées facilement afin de pouvoir être ensuite décontextualisées et réinvesties, donc le temps didactique ne pouvait avancer de façon raisonnable ;

— l’enseignement du début des années 2000, sous couleur de baser l’approche de l’analyse sur l’intuition graphique, ne donnait à l’élève aucun outil lui permettant de traiter des cas différents de ceux qui lui étaient présentés. On pourrait dire qu’il tentait de se baser sur des connaissances, mais ces connaissances, si elles se construisent effectivement (ce qui resterait à prouver) sont de l’ordre des connaissances privées et non opérationnelles dans le travail mathématique : un enseignement uniquement ostensif ne permet pas aux élèves de travailler sur des critères mathématiques ;

— les programmes de 2019 ont institué une version assez satisfaisante et ont corrigé ces défauts de conception ; de ce fait, la situation *Graphiques et Fonctions* est très compatible avec la philosophie de ces nouveaux programmes.

Il s’agit de construire une situation comportant un milieu propice à la construction de connaissances sur les fonctions, mais aussi permettant l’institutionnalisation de savoirs et la validation des propriétés. Cette situation doit favoriser le raisonnement sur les fonctions, et pas uniquement des connaissances ponctuelles isolées.

La situation « Graphiques et Chemins » vise à introduire les propriétés des fonctions, notamment autres que les fonctions affines, en se basant sur des constructions par les élèves de RGC (Représentations Graphiques Cartésiennes), en identifiant les fonctions et leurs propriétés, et en construisant des fonctions ‘quelconques’ définies avec des relations par exemple numériques ou algébriques. Ceci définit un milieu d’apprentissage initiant les concepts visés en Analyse.

Dans Bloch (2002), le milieu est analysé comme suit :

« Un préalable à la construction d’un tel milieu est l’étude des caractéristiques des registres disponibles pour les notions d’analyse, et des possibilités de construire des tâches accessibles dans ces différents registres.
Les registres disponibles sont a priori :
— Le registre numérique (tableaux de valeurs)
— Le registre algébrique (équations de droites, de fonctions)
— Le registre géométrique (grandeurs géométriques variables)
— Le registre graphique (courbes dans un repère)
— Le registre formel (notations f, f^{-1}, fog , $f(x)$, etc…)

L'infini, et les représentations qui lui sont liées, ont un statut à part, ils sont utilisés pour l'heuristique, mais pas pour valider au niveau du début de l'enseignement secondaire.

Non seulement ces registres n'ont pas tous les mêmes fonctionnalités de représentation, mais ils n'outillent pas de la même manière pour valider et ils ne "montrent" pas les mêmes propriétés des fonctions. On dira qu'un ostensif pris dans un registre donné est un *représentant* d'un objet mathématique, et il en rend manifeste ou non certaines propriétés. »

La construction de ce milieu suppose aussi que l’on s’interroge sur les outils de validation possibles ; à ce niveau, on ne dispose pas du système de validation de l’Analyse. On accepte donc des outils pragmatiques, lesquels fourniront des arguments ‘locaux’ ensuite basculés vers des théorèmes plus généraux. Les tâches proposées aux élèves sont décrites dans Bloch (2002) :
« Ainsi dans le registre graphique :
— trouver des images et des antécédents, et valider ainsi des propriétés ;
— élargir la fenêtre ou faire un zoom ;
— changer le repère et savoir ce qui est préservé ou non ;
— changer d'échelle, reconnaître que la concavité est préservée, etc…

C'est dans la conversion entre registres (pour une même fonction, changer de représentant) que l'on voit surtout apparaître des tâches non routinières dans l'enseignement secondaire, ainsi :

— Trouver sur une courbe des informations sur les propriétés d'une (classe de) fonction ;
— Reconstituer l'équation algébrique à partir de données graphiques, numériques, et d'une typologie (fonction de degré 2 ou 3, ou…) ;
— Construire des courbes sous contraintes (fonction bornée ou non, racines données…) ;
— Interpréter des équations comme celles de fonctions composées ;
— Composer des fonctions données par leur graphique ; trouver des réciproques ;
— Déduire d'un graphique des propriétés générales des fonctions, et les écrire sous forme de chaînes de symboles formels. »

L'originalité de cette situation est que le graphique y est utilisé comme un outil de raisonnement, de preuve et de construction, et non seulement comme une 'image' de fonction ; et, ce graphique est traité de façon globale – pour les propriétés – et non simplement ponctuelle. Ainsi les élèves sont en mesure de raisonner sur des graphiques comme étant des représentants de fonctions, d'en déduire des propriétés de ces fonctions – ils sont donc aux niveaux R1.2 et R2.2 du tableau des raisonnements, dans le milieu M_{-1}.

Des extraits de transcription de la situation ont été proposés aux participants à l'atelier. Ainsi, l'on a pu observer les discussions sur le fait qu'un graphique représente une fonction ou non (« Un cercle n'est pas une fonction ! Il faut qu'il y ait une seule image… ») ; sur la nature des fonctions (« Le produit de deux fonctions affines est une fonction affine ? »), sur la fonction réciproque d'une fonction donnée, son existence et son unicité, etc. (voir le détail dans l'article de *Petit x*).

Le graphique n'est alors plus le but rituel d'un travail qui se passe dans un autre registre. Il est devenu outil de preuve dans un questionnement où les objets problématiques sont des concepts : fonctions et propriétés des fonctions. Cette situation contribue à créer un milieu fonctionnel pour poser des questions d'analyse, un "herbier" de fonctions plus riche que les fonctions de référence algébriques (fonctions affines, carré, cube, inverse...).

Cet apport au niveau de l'organisation d'une notion et des raisonnements s'avère essentiel : en effet, dans l'organisation classique de l'enseignement sur les fonctions, les connaissances associées aux savoirs de l'analyse sont parfois manquantes dans l'enseignement secondaire, et donc les professeurs de niveau post-bac n'ont d'autre ressource que d'introduire simultanément les objets de la théorie, les modes de raisonnement, les preuves et le formalisme, et les questions sur la validité des énoncés : d'où un échec massif des étudiants, encore constaté aujourd'hui. L'expérimentation menée a prouvé qu'il existe des situations permettant de faire travailler, dans le secondaire, les connaissances et les raisonnements nécessaires à la transition avec le supérieur : la situation "Graphiques et chemins" donne des possibilités pour ce travail, sans aborder directement le formalisme, mais en construisant des outils pour l'entrée dans ce type de validation, et en s'appuyant sur des connaissances des élèves.

2. La situation « Le Nombre le plus grand »

Lors de la deuxième séance, nous avons pris comme objet d'étude les raisonnements élaborés par les élèves et l'enseignant au cours d'une séquence " Le nombre le plus grand ", proposée en CM2 au Centre d'Observation et de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (C.O.R.E.M.). La mise en œuvre de cette séquence est liée à la rencontre de Brousseau et de Glaeser. Le problème de mathématiques a été initialement proposé par Glaeser (1999), l'énoncé est le suivant :

Soient cinq nombres naturels quelconques a, b, c, d, e. Quel est le nombre le plus grand que l'on peut obtenir à partir des quatre opérations élémentaires {+ ;- ; × ; :} appliquées à ces nombres qui ne seront pris dans le calcul qu'une seule fois, une même opération pouvant être utilisée plusieurs fois.

L'idée de G. Brousseau est de faire débattre les élèves sur des déclarations mathématiques suivant des règles qui les conduisent à produire des preuves, plus précisément leur faire chercher des contre-exemples.

La situation d'argumentation, telle qu'elle a été conçue par Brousseau, est une situation à dimension adidactique : en effet il est possible et même probable que l'enseignant sera conduit à intervenir de manière à assurer le maintien de l'engagement des élèves dans le processus de preuve. La situation de validation est assimilable à une situation à dimension adidactique (Bloch, 1999) ; afin de pallier l'absence d'arguments produits par les élèves pour valider ou invalider une méthode permettant de gagner, l'enseignant sera amené à confronter les élèves à un nouveau jeu dans le but d'éprouver la validité de la méthode objet d'étude. Par conséquent l'analyse de cette séquence, à partir de notre modèle, devrait nous permettre d'apporter des éléments de réponse aux questions suivantes :

Quelles sont les différentes formes de raisonnements qui apparaissent lors des différentes phases de cette séquence ? Quelles fonctions recouvrent-ils ? À quel(s) niveau(x) de milieu(x) réfèrent-ils ? Comment évolue, au cours de la séance, le répertoire didactique de la classe ?

Nous souhaitons effectuer une analyse en théorie des situations de la complexité didactique des raisonnements produits ; pour cela nous allons utiliser le schéma de la structuration du milieu didactique, afin d'expliciter d'une part les différentes formes et les différentes fonctions des raisonnements, d'autre part les conditions qui définissent chacune des situations dans laquelle les élèves ont produit les raisonnements.

L'utilisation de notre modèle au cours de l'atelier a eu pour finalités :

1) d'approfondir l'analyse *a priori* de la séquence, en explicitant, pour chacune des situations emboîtées du schéma, les différentes formes de raisonnements susceptibles d'apparaître dans la relation didactique en regard des principaux objectifs de l'enseignant et des conditions qui définissent la situation.

2) D'analyser *a posteriori* dans la séquence « Le nombre le plus grand »

- les raisonnements produits par les élèves en situation d'action,
- les conditions dans lesquelles ils ont été élaborés,
- les transformations de ces mêmes raisonnements lorsque les élèves sont conduits à les utiliser en situation de formulation ou de validation.

L'un des principaux objectifs de cette séquence est de permettre aux élèves de passer progressivement, au cours des différentes phases de la séquence, de raisonnements arithmétiques à l'élaboration et à l'étude d'énoncés généraux, que nous nommerons *méthode,* illustrant d'une certaine façon l'entrée dans l'Algèbre.

Ce qui est visé dans cette séquence, outre la mise en œuvre des propriétés des opérations, c'est principalement l'enseignement des règles du jeu de la preuve : il s'agit d'une leçon sur le vrai et le faux, mais également sur la manière de l'établir. L'objectif principal de la séquence est de mettre les élèves en situation de débattre des méthodes permettant d'obtenir le nombre le plus grand, quelle que soit la suite de nombres proposée.

Pour qu'il soit envisageable de demander aux élèves d'élaborer des méthodes, il faut dans un premier temps envisager des répétitions de calculs, c'est-à-dire plusieurs jeux successifs sur des 5-uplets donnés par l'enseignant afin que les élèves élaborent des programmes de calcul. Pour qu'une mise en débat de la validité des méthodes soit envisageable, c'est-à-dire pour que la situation de validation puisse être à dimension adidactique, il est nécessaire que : les méthodes étudiées aient été produites par les élèves, et donc qu'elles résultent d'un travail fondé sur l'écriture de méthode ; qu'elles aient fait l'objet d'une reconnaissance formelle par l'enseignant et appartiennent ainsi au *répertoire didactique* de la classe, de sorte qu'elles soient utilisables par les élèves ; qu'ils parviennent à se les approprier, c'est-à-dire à faire le lien entre leurs formulations et leurs usages en situation de jeu ; qu'elles soient assimilables à des assertions dans le sens où elles sont correctement formées et consistantes.

La première étape de l’élaboration du modèle d’analyse des raisonnements associé à l’analyse de la situation a conduit les participants de l’atelier à effectuer l’analyse a priori de cette situation et ensuite à identifier chacun des niveaux de milieux.

✓ La situation objective : l’acteur objectif et le milieu matériel

La situation objective, objet de notre étude, est fondée sur le problème de mathématiques proposé par G. Glaeser. C’est donc une situation de jeu pour un 5-uplet donné. Le milieu matériel est constitué par les entiers naturels. Les connaissances du *répertoire didactique,* que les élèves vont devoir utiliser, relèvent principalement des opérations sur les entiers et de leurs propriétés.

✓ La situation de référence : l'élève agissant et le milieu objectif

Les élèves doivent décider de la suite de calculs à effectuer afin de produire le nombre le plus grand à partir du 5-uplet proposé. Ils doivent choisir les opérations arithmétiques à appliquer aux nombres proposés en respectant la règle : chacun des nombres ne peut être utilisé qu'une seule fois. Les élèves doivent ensuite formuler le nombre obtenu et sa justification, autrement dit le programme de calcul associé. La validité du programme de calcul est examinée par les élèves, sous couvert de l'enseignant, du point de vue de la validité des calculs effectués et du point de vue du respect des règles du jeu.

✓ La situation d’apprentissage : l'élève apprenant et le milieu de référence

L'élève en situation d'apprentissage est amené à produire des formulations de méthodes générales et à s'interroger sur la validité de chacune d'elles. Les situations de formulation et de validation sont étroitement liées ; en effet l'étude de la validité d'une méthode repose sur la capacité des élèves à construire un contre-exemple.

✓ L'élève apprenant en situation de formulation d'une méthode

L'élève apprenant doit prendre en compte les objets, les règles, mais également les conditions dans lesquelles chacun des programmes de calcul ont été produits. L’élève considère maintenant ses actions sur les objets en regard des conditions nécessaires ou suffisantes à la réussite. Pour le dire autrement, il ne s’agit plus de jouer au jeu du « nombre le plus grand » pour gagner, mais de savoir pourquoi et à quelles conditions on est sûr de gagner. Les élèves doivent relever le défi consistant à élaborer une méthode dont le domaine de validité soit le plus étendu possible.

La phase de formulation des méthodes vise à permettre aux élèves une prise de position sur l’action, et donc une prise de conscience des décisions sur lesquelles reposent leurs actions, afin qu’ils puissent produire des procédures dont la validité pourra être mise en débat. En situation de formulation, les élèves doivent écrire une méthode permettant d’obtenir le nombre le plus grand quelle que soit la suite de nombres proposée.

✓ L'élève apprenant en situation de validation

Le domaine de validité d'une méthode est lié aux connaissances des conditions dans lesquelles son usage s’avère adéquat. La prise de conscience par le sujet du domaine de validité du raisonnement produit, permet d’envisager l’usage de ce raisonnement dans des situations d’argumentation et de preuve. Les élèves se positionnent en tant que « proposant » ou « opposant » et débattent de la validité des méthodes proposées par les différents groupes.

L’élève en situation de validation, ayant le statut d’opposant ou de proposant, arrive avec une culture, des connaissances étroitement liées au répertoire didactique dont il dispose, et peut éventuellement, en situation de débat, formuler des exigences ou des interrogations qui ne sont pas nécessairement celles de la situation de preuve telle qu'elle a été conçue initialement par Brousseau.

✓ La situation didactique : L'élève et la situation d'apprentissage

La situation didactique repose d'une part sur la reconnaissance par l'enseignant du statut des énoncés proposés en tant que méthode et d'autre part sur la reconnaissance par l'enseignant, si cela s'avère nécessaire, de la validité des arguments produits par un élève ou un groupe d'élève dans le but d'invalider une méthode.

La deuxième étape de l'étude a amené les participants à prendre en compte, pour chaque niveau de milieu M_{-2}, M_{-1}, M_0, définis précédemment les trois dimensions (fonctions des raisonnements ; niveaux d'utilisation des signes : icône, indice, symbole-argument ; répertoire didactique), nous parvenons au tableau présenté ci-dessous. Les niveaux matriciels indiqués (R1.1, R1.2, R1.3, etc.) servent de référence lors de l'analyse du corpus : la progression des indices matriciels va en principe de pair avec la sophistication et la formalisation croissantes des raisonnements et des signes.

Le tableau ci-dessous indique pour chacun des niveaux de milieu M_{-2}, M_{-1} et M_0 les formes de raisonnement susceptibles d'être produites par les élèves en spécifiant leurs fonctions, les niveaux d'utilisation des signes et l'évolution du répertoire de représentation (en précisant l'usage et l'actualisation des connaissances et des savoirs).

	Milieu M_{-2}	**Milieu M_{-1}**	**Milieu M_0**
Fonctions des raisonnements	R1.1 SEM - Décision de calcul - Moyen heuristique - Exhibition d'un exemple ou d'un contre-exemple	R1.2 SYNT/SEM - Calculs génériques - Formulation de conjectures étayées - Décision sur un objet mathématique - Comparaison de méthodes - Élaboration de contre-exemple	R1.3 SYNT - Explications, justifications visant à définir les règles du jeu de la preuve et leurs usages.
Niveaux d'utilisation des signes	R2.1 SEM Icônes ou indices dépendant du contexte (schémas, intuitions, modèle implicite d'action,…)	R2.2 SYNT/SEM Symboles-arguments « locaux » ou génériques	R2.3 SYNT Symboles-arguments formels
Usage et actualisation du répertoire didactique	R3.1 SYNT/SEM - Utilisation ponctuelle de connaissances anciennes - Enrichissement au niveau heuristique : calculs, conjectures ponctuelles.	R3.2 SYNT/SEM Enrichissement des énoncés au niveau argumentaire	R3.3 SYNT Formulation de preuve(s)

Tableau 2. *– Les axes de l'analyse des raisonnements en fonction des niveaux de milieux associés à la situation « Le nombre le plus grand »*

En utilisant le modèle d'analyse des raisonnements définis précédemment, lors de la troisième étape de l'atelier, nous avons proposé aux participants d'effectuer une analyse de plusieurs épisodes de la phase de validation. Certains des épisodes, analysés au cours de l'atelier, sont proposés en Annexe 2.

L'analyse de la séquence, réalisée à partir du modèle, a permis de mettre en évidence la production de nombreux raisonnements dans des fonctions très diverses telles que : prendre des décisions afin de produire une réponse, justifier la validité d'un programme de calcul, élaborer une méthode générale lors de la situation de formulation, produire des conjectures, organiser les tâches au sein d'un groupe, argumenter, débattre de la validité des méthodes, de manière à formuler une méthode dont le domaine de validité soit le plus étendu possible. De plus elle a permis d'étudier la nature des raisonnements et de mettre en évidence la capacité des élèves de primaire à produire des raisonnements sous la forme de raisonnements par disjonction de cas.

Le modèle met en évidence la richesse des raisonnements produits en les reliant aux connaissances et aux savoirs antérieurs du répertoire didactique concernant les opérations élémentaires et les propriétés de la multiplication (commutativité, élément neutre et distributivité de la multiplication sur l'addition). Du point de vue des formulations, le modèle donne à voir l'évolution des énoncés en lien avec les différentes situations : on passe de la formulation de suites de calculs arithmétiques à la rédaction de méthodes générales, de nature algébrique, pour parvenir à la production d'arguments sémantiques et syntaxiques.

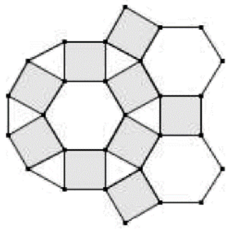
Cette évolution est observable en situation de formulation et en situation de validation. L'analyse sémiotique montre également le décalage effectif entre le formalisme introduit par l'enseignant et le répertoire didactique effectivement mobilisé par les élèves tout au long de la séquence. Ceci conforte l'analyse a priori : la situation « finale » étant algébrique, il était difficile pour les élèves de ce niveau de parvenir à une formulation de cette nature.

Nous avons souhaité mettre en évidence la robustesse de notre modèle pour analyser les différentes formes de raisonnements, en situation à dimension adidactique, en illustrant son utilisation à un niveau d'enseignement (CM2) assez éloigné de celui illustré initialement en classe de Première scientifique (Bloch et Gibel, 2011). L'intérêt du modèle est lié au fait qu'il permet l'étude du raisonnement produit, qu'il soit ou non valide, de différents points de vue : la fonction du raisonnement en lien avec le niveau de milieu correspondant, la nature et le statut du raisonnement produit d'un point de vue sémiotique et qu'il permet également de déterminer l'usage et le niveau d'actualisation du répertoire didactique. Cette étude, selon les trois axes définis précédemment, permet de déterminer l'efficacité des situations du point de vue de la pratique du raisonnement, mais aussi du point de vue de l'utilisation du répertoire de connaissances de l'élève. Cette étude très fine des raisonnements permet également d'envisager un aménagement de l'ingénierie dans le but de permettre aux élèves de concevoir les mathématiques, et plus précisément les situations de validation, comme un moyen d'étudier précisément le domaine de validité des énoncés.

3. Pavages archimédiens

Le troisième temps proposé, en appui sur la situation « Pavages archimédiens du plan » (cf. annexe 3), interroge particulièrement l'identification et l'étude des raisonnements dans les phases adidactiques. Le modèle d'analyse des raisonnements mobilisé doit là encore mettre en évidence le potentiel de la situation pour l'émergence de sémioses, l'élaboration des raisonnements, en identifiant les différentes formes et les fonctions.

Le problème proposé est la recherche des pavages archimédiens du plan, c'est-à-dire des recouvrements du plan par des polygones réguliers satisfaisant aux conditions suivantes :



- si deux polygones du recouvrement ont un point commun unique, il est sommet de l'un et de l'autre (un tel point sera dit un nœud du pavage) ;

- si deux polygones du recouvrement ont plus d'un point commun, leur intersection est un côté de l'un et de l'autre ;

- la configuration locale en chaque nœud est la même à une symétrie près.

Dans la situation didactique proposée, il s'agit de faire entrer les élèves dans un jeu où le projet commun de l'enseignant et des élèves est avant tout l'engagement dans la résolution du problème proposé et l'élaboration de résultats au moins partiels, la genèse de savoirs sur des objets mathématiques nouveaux.

Les élèves confrontés au problème produisent des exemples nombreux (Front, 2015), formulent des conjectures étayées, sont amenés à prendre des décisions sur les objets explorés. Ces résultats partiels sont en lien avec plusieurs conditions nécessaires, mais non suffisantes des pavages archimédiens, dont :

- Les côtés des polygones du pavage ont même longueur
- La somme des angles autour d'un nœud est égal à 4 droits
- On ne peut assembler autour d'un nœud moins de 3 et plus de 6 polygones réguliers.
- On ne peut assembler autour d'un nœud des polygones de plus de 3 types distincts.

Les registres mobilisés sont le registre géométrique, le registre numérique (mesures des angles des polygones réguliers), le registre algébrique en particulier dans l'élaboration et l'étude des relations entre les mesures des angles des polygones réguliers et les nombres de côtés des polygones.

Le troisième moment de l'atelier de cette école d'été a permis de travailler particulièrement deux corpus pour observer le changement de niveau de milieux, l'évolution des fonctions des raisonnements, l'évolution des niveaux d'utilisation des symboles, l'évolution de la conceptualisation de l'objet à savoir. Nous reprenons ici les éléments produits à partir de quelques extraits du corpus.

Exemple 1 : Timothée : de l'icône au symbole-argument

L'analyse de la production de Timothée (cf. annexe 3) amène à observer un sujet apprenant en phase d'action (M-2), mobilisant des connaissances anciennes pour matérialiser une intuition (tout d'abord geste de la main dessinant un nœud de pavage), exhiber des exemples puis formulant une conjecture plus ou moins étayée. L'avancée vers M-1 se poursuit avec une évolution du signe. Initialement icone, puis possible questionné (présence d'un point d'interrogation dans le cahier de recherche), le signe $\boxed{\Sigma \text{ angl} = 360}$ (la somme des angles vaut 360°) devient tour à tour indice puis symbole-argument. La valeur de vérité du signe se fixe et le signe devient le cadre potentiel d'une action sur les objets familiers. Plus précisément, l'action, s'inscrit dans la théorie portée par le signe, et peut être régie par ce signe. Il est notable que dans cette dimension de recherche du sens, la syntaxe soit initialement mixte et non encore complètement mathématique. Le signe prend sa dimension formelle sous la forme α n = 360 et devient outil théorique de prise de décision pour la recherche des pavages réguliers (avec un raisonnement en partie erroné).

Exemple 2 : Romain : l'élève apprenant en situation de formulation pour la minoration du nombre de polygones autour d'un nœud.

Après la production d'exemples de plusieurs pavages régulier, Romain et un camarade échangent sur le nombre minimal de polygones réguliers autour d'un nœud. On observe un échange entre un sujet proposant (Romain) et un sujet opposant. Le passage de M-2 à M-1 se traduit par une décision sur un objet mathématique :

392 : Romain : ... parce que genre tu peux pas mettre que 2 tr... que deux figures à côté pour remplir. T'es obligé d'en mettre 3 minimum.

395 : Ben non, c'est juste qu'il faut au moins trois côtés pour faire un polygone.

396 : Romain : non, mais c'est pas ça. C'est là r'garde, ici, t'es obligé d'avoir une deux trois figures. Une deux trois. Pour pas qu'il y ait de trou au milieu.

397 : Tu peux pas remplir en même temps que ... ?

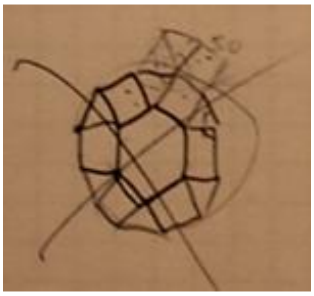
398 : Romain : non tu peux pas.

On observe ainsi le passage d'un usage indiciel de la propriété à une dimension d'argument local avec enrichissement du répertoire au niveau des arguments, des énoncés, du système organisateur

Exemple 3 : L'élève apprenant en situation de validation … assembler localement ne suffit pas (1)

Dans un débat de validation d'une proposition de pavage (3,4,6,4) deux élèves sont confrontés à la contingence :

- E5 : Donc là du coup ça voudrait dire ... Ouais non, mais attends, en gros, là faut remettre un carré, et là si on fait notre hexagone ...



- E15 : Faut regarder si ... 1, 2, 3, 4, 5. 1, 2, 3, 4. Ça va pas.
- E5 : Pourquoi ?
- E15 : Ici, on a 1, 2, 3, 4, 5 polygones sur un point. Et là, si tu regardes ici, t'en as 1, 2, 3, 4, sur point aussi. Et il faut qu'il y ait le même nombre de polygones.
- E5 : Ah ça [?]. J'avais oublié ce détail. Heu, mais ...
- [?]
- E5 : J'avais oublié ce détail en fait. Du coup ça fait chier.

Le candidat pavage est écarté, la condition « locale » sur la somme des angles autour d'un nœud se révèle insuffisante. Nous observons, à partir de la production d'un contre-exemple dans le milieu heuristique, la décision sur un objet mathématique,

Exemple 4 : L'élève apprenant en situation de validation … assembler localement ne suffit pas (2)

(E15) échange cette fois avec (E5) et (E8) sur le candidat pavage (5,5,10) :

- E5 : tu mets 10 ... Là tu seras obligé d'mettre un 5, et après ...
- E8 : Tu mets un 10
- E5 : Ça va laisser un trou ...
- E5 : Là y'a un trou, et donc là ça, si tu ren... Ça marchera pas.
- E15 : Donc notre condition, elle est nécessaire, mais pas suffisante.
- E8 : C'est-à-dire ?
- E15 : Ben faut qu'il y ait ça d'validé pour que ça fonctionne, mais si y'a ça d'validé ça fonctionne pas à tous les coups.
- E8 : Ahaha.

Un échange tripartite qui permet à nouveau la décision sur un objet (candidat pavage 5,5,10) et la formulation d'une proposition au niveau du groupe. Le système organisateur s'étoffe.

Ce travail dans le groupe de Timothée permettra une institutionnalisation dans le milieu d'apprentissage (M0), avec P, l'enseignante :

- P : Alors l'équation on peut supposer que vous l'avez vérifiée comme il faut, chacun, donc la somme de tous les angles fait bien 360 pour ceux-ci. Qu'est-ce qui reste à vérifier ? Timothée ?
- Timothée ...
- Un élève du groupe C : la longueur des côtés
- P : Pour être sûr que ce soit un pavage archimédien, qu'est-ce qui reste à vérifier ?
- Le même élève du groupe C : Faut pas que ça se superpose
- Timothée : Que ça puisse se continuer
- P : Que ça puisse se continuer à l'infini, parce que rien ne dit que puisque ça marche bien autour d'un sommet quand on veut l'étendre ça fonctionne bien donc d'ailleurs, vous nous en avez pas parlé, mais vous aviez fait un dessin qui posait un problème à ce niveau-là ...

Les analyses suivantes montrent l'enrichissement du répertoire quand explorant au-delà du cas des pavages réguliers, les élèves mobilisent le registre algébrique et introduisent d'autres degrés de liberté. Les premières expressions, très ancrées dans la dimension sémantique permettront à E15 et E5 d'initier une étude systématique, dépassant le cadre des exemples « tests ».

De nature tout d'abord indicielle les expressions de type $\alpha x + \alpha' x' = 360$ ou $360 - \alpha x = \alpha' x$ passe au statut d'argument structurant le système organisateur. Elles traduisent à nouveau une évolution du signe et de la fonction des raisonnements, tour à tour exemple, moyen heuristique, élément de la formalisation des preuves.

Le travail lors de l'atelier a permis une sensibilisation aux différents potentiels de la situation, autant mathématiques, que du point de vue des raisonnements. La mobilisation du système d'analyse précise l'évolution de la situation, la progression du répertoire, les ajouts de briques dans le système organisateur. De l'intuition à la formalisation de preuve, du geste de la main, icône du nœud d'un pavage, aux arguments formalisés permettant de déterminer des candidats pavage, l'étude de la situation des pavages archimédiens du plan permet d'illustrer l'intérêt d'une analyse des raisonnements dans la compréhension de l'évolution du concept en construction.

CONCLUSION

Le travail effectué dans cet atelier a permis aux participants de découvrir et d'utiliser les outils d'analyse des situations et des raisonnements, et de voir que les situations présentées permettaient d'aboutir à des savoirs mathématiques structurés, en accord avec les attentes du programme au niveau concerné. En bref, cela signifie que ces situations débouchent sur des éléments de preuve mathématique des propriétés des concepts en jeu, et des outils sur lesquels s'appuyer, ceci visant à favoriser les démonstrations de problèmes faisant intervenir les mêmes notions (fonctions, géométrie, nombres entiers…). Nous pouvons aussi noter que l'analyse des situations a permis de mettre en évidence la robustesse du modèle pour des usages relevant de différents domaines des mathématiques et à des niveaux de scolarité variés. Ainsi les participants ont pu se confronter aux savoirs de ces niveaux différents, et comprendre le modèle de situations qui permet de construire pour les élèves des questions pertinentes relatives à ces savoirs. En faisant connaitre ces situations, nous insistons sur la nécessité de permettre aux élèves de se confronter à des recherches sur des objets et des questions mathématiques, avant de recevoir un enseignement formalisé des savoirs. Cette étape est essentielle pour la compréhension de ces concepts, mais aussi pour que les élèves se motivent en mathématiques.

Il faut noter qu'une large variété de situations existe actuellement pour tous les domaines des mathématiques et pour tous les niveaux d'enseignement, de la maternelle à l'université ![1] La TSD a d'abord été construite pour l'enseignement primaire, mais depuis les années 1980-1990 cette théorie, et les situations qui en dépendent, ont diffusé à tous les niveaux. Des situations de transition entre le secondaire et l'université pour les concepts de limite et d'intégrale, par exemple, ont ainsi été expérimentées ; certaines sont disponibles dans Bloch & Gibel (2019).

L'objectif de cet atelier était donc de former les participants afin qu'ils puissent accéder ensuite à la maitrise des situations, au niveau qu'ils visent dans leur travail de recherche.

RÉFÉRENCES

BLOCH, I. (2002). Un milieu graphique pour l'étude de la notion de fonction au lycée. *Petit x*, *58*, 25-46.

BLOCH, I. (2005). *Didactique des mathématiques et théories sémiotiques : Vers une analyse des processus de production et d'interprétation des signes mathématiques dans les situations d'apprentissage*, SFIDA 24 (Séminaire Franco-Italien de Didactique de l'Algèbre) : Université de Turin.

BLOCH, I., & GIBEL, P. (2019). A model to analyse the complexity of calculus knowledge at the beginning of University course – presentation and examples, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *24*, 183-205.

BLOCH, I., & GIBEL, P. (2011). Un modèle d'analyse des raisonnements dans les situations didactiques : étude des niveaux de preuves dans une situation d'enseignement de la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 31*(2), 191-227.

BROUSSEAU, G., & GIBEL, P. (2005). Didactical Handling of Students' Reasoning Processes in Problem Solving Situations. *Educational Studies in Mathematics*, *59*, 13-58.

CONNE F., (1992). Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques, 12*(2/3), 221-270.

FRONT, M., & LEGRAND, P. (2010). Pavages semi-réguliers du plan. *Bulletin vert de l'APMEP*, *486*, 60-66.

[1] On trouve ces situations dans les revues de didactique et dans les actes des colloques et écoles d'été, notamment.

FRONT, M. (2015). *Émergence et évolution des objets mathématiques en Situation Didactique de Recherche de Problème : le cas des pavages archimédiens du plan.* Thèse de doctorat en didactique des mathématiques. Université de Lyon. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01312266

GARDES, M.-L. (2013). *Étude de processus de recherche de chercheurs, élèves et étudiants, engagés dans la recherche d'un problème non résolu en théorie des nombres.* Thèse de doctorat, Université de Lyon.

GIBEL, P. (2020). Analyse en théorie des situations didactiques d'une ingénierie visant une première approche de la notion de limite finie d'une suite. *Revue Québécoise De Didactique Des Mathématiques*, *1*, 153-189.

GIBEL, P. (2018). *Elaboration et usages d'un modèle multidimensionnel d'analyse des raisonnements en classe de mathématiques.* Note de synthèse de l'Habilitation à Diriger les Recherches soutenue à l'Université de Pau et des Pays de l'Adour. https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01919188

GIBEL, P. (2015). Mise en œuvre d'un modèle d'analyse des raisonnements en classe de mathématiques à l'école primaire. *Éducation et Didactique*, 9(2), 51-72.

OLERON, P. (1977) *Le raisonnement*. Paris, PUF, coll. « Que sais-je ? » (no1671).

ANNEXES

Annexe 1 : situation graphiques et fonctions

Devant les difficultés d'enseignement du début de l'analyse et des fonctions, les situations construites tentent de prendre en compte les trois niveaux d'organisation du savoir : action / connaissances, formulation / ostensifs, validation / savoir. Elles tentent aussi de pointer ce qu'il est nécessaire de modifier, si l'on veut parvenir à faire exister ces différents niveaux dans les activités présentées aux élèves sur les fonctions, et à activer les connaissances que les élèves sont invités à prendre en charge dans l'ingénierie expérimentale.

Dans les années 90, (et globalement jusqu'à maintenant) l'enseignement organise le travail en conformité sur des objets supposés représentatifs : il s'agit pour l'élève de réaliser une tâche standard (déjà réalisée en classe sous la conduite du professeur), avec des outils immuables (par exemple un tableau de variations d'une fonction) dont la fonctionnalité n'est que peu interrogée. Ainsi les propriétés sont illustrées par un calcul, un graphique, un tableau numérique, “ données à voir ” sans justification de leur nécessité ni outils de validation ou d'invalidation, et à reproduire à l'identique pour l'élève.

Cette illustration des propriétés est supposée s'appuyer sur l'intuition graphique. Elle questionne peu le rapport graphique / fonction, supposé transparent : les élèves étaient supposés *voir* dans le dessin - graphique ce qu'y voyait le professeur. Or un graphique n'est pas une fonction, et donc il est important de questionner la définition de ce qu'est une fonction, et de ce qui se voit – ou pas – sur le graphique.

Cependant le nouveau programme de Seconde 2019 invite à questionner les représentations, et les rapports entre registres de représentation des objets mathématiques. Il propose aussi des fonctions autres qu'affines – carré, cube – ce qui va enrichir les représentations des élèves. Ceci se poursuit en Première et Terminale, avec un travail sur la nature des fonctions (p ex e^x) leurs réciproques, etc.

Il s'agit donc de construire une situation qui propose à l'élève des questions, questions qu'il résoudra dans un milieu de représentations fonctionnelles : des ostensifs de fonctions. Ces questions doivent être fortement liées à des objets de l'analyse (fonctions diverses, et leurs propriétés), et l'élève doit pouvoir interagir avec le milieu proposé : ce milieu doit pouvoir offrir des rétroactions, c'est-à-dire que le travail de l'élève doit recevoir des validations pertinentes.

De plus cette construction obéit à des impératifs relatifs au savoir :

— il est nécessaire de pouvoir instituer en savoir le produit des interactions dans la situation

— il faut que l'action, les connaissances produites et formulées soient intelligibles et utilisables pour le savoir (du professeur).

Au niveau envisagé (élèves de 16-17 ans) le milieu comporte déjà des représentations des objets mathématiques ; comment les choisir et les organiser ?

Le programme 2019 propose de faire chercher aux élèves des fonctions dans la modélisation de phénomènes, ce qui est un progrès manifeste.

Des tâches peuvent être investies par l'enseignement secondaire actuellement, par exemple dans l'utilisation d'outils numériques. GeoGebra est un outil qui peut être utilisé sans limites. Ainsi dans le registre graphique :

— trouver des images et des antécédents, et valider ainsi des propriétés ;

— élargir la fenêtre ou faire un zoom ;

— changer le repère et savoir ce qui est préservé ou non ;

— changer d'échelle, reconnaître que la concavité est préservée, etc…

On peut lister des tâches non routinières dans l'enseignement secondaire, comme :

— Trouver sur une courbe des informations sur les propriétés d'une (classe de) fonction ;

— Reconstituer l'équation algébrique à partir de données graphiques, numériques, et d'une typologie (fonction de degré 2 ou 3, ou…) ;

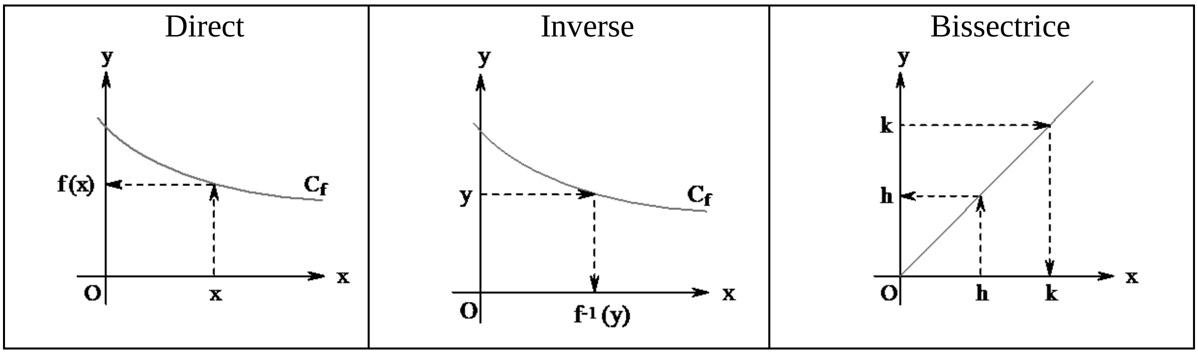
— Construire des courbes sous contraintes (fonction bornée ou non, racines données…) ;
— Interpréter des équations comme celles de fonctions composées ;
— Composer des fonctions données par leur graphique ; trouver des réciproques ;
— Déduire d'un graphique des propriétés générales des fonctions, et les écrire sous forme de chaînes de symboles formels

Le but est que le registre graphique offre des possibilités de tâches portant sur les fonctions comme objets, et sur les propriétés des fonctions, c’est ce qui a amené à choisir un milieu graphique pour la conception et l'expérimentation d'une ingénierie didactique sur la notion de fonction en Seconde et en Première (élèves de 17 ans). Couplé au registre formel, d'une façon qui apparaîtra dans l'ingénierie, il permet un large éventail de tâches pertinentes de l'analyse. Ces tâches visent à instaurer des *raisonnements* – pragmatiques, plus génériques, ou des décisions globales.

Les chemins, outils de construction et de décision

Suivant l’axe dont on part, un chemin est un chemin *aller* ou *retour*. La figure ci-dessous représente les trois chemins fondamentaux :

1. Aller 2. Retour 3. Bissectrice



Un chemin aller permet d’identifier un nombre et son image ; il est noté par le point de départ et le point auquel il aboutit, à savoir *(x,f(x)).*

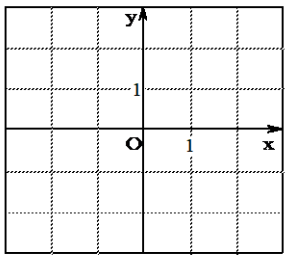
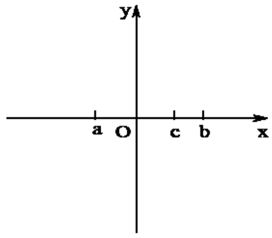
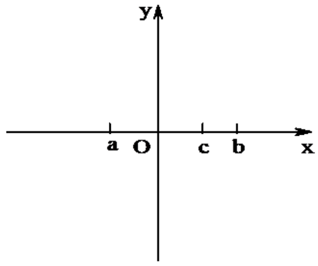
Un chemin retour permet d’identifier un nombre et son antécédent ; il est codé : $(y, f^{-1}(y))$.

Un chemin qui passe par la bissectrice est particulier en ce sens que les chemins aller, retour ne se distinguent que par le sens de parcours, ils sont codés h ou k et correspondent aux trajets : (h, h) ou (k, k) dans les deux sens.

Le but du jeu est de :

- Disposer d’un certain nombre de représentations graphiques cartésiennes (RGC) de fonctions, et pouvoir dire si ces fonctions possèdent, ou non, certaines propriétés.
- Construire un ‘stock’ de fonctions sur lesquelles tester les propriétés énoncées.
- Ce stock de fonctions sera assimilé, dans le milieu prévu, à un stock de RGC, ce qui permettra de le faire en grande partie construire par les élèves.
- Les élèves devront alors vérifier les propriétés dans d’autres registres : numérique, algébrique.
- Le professeur institutionnalisera les résultats trouvés graphiquement et vérifiés.

RGC sous contraintes : exemples

		
f (-1) = 1 ; f (0) > 0 f (1) < 0	f(a) < f(c) < f(b)	f(c) < f(b) < f(a)

Les moyens de la validation sont :

— des moyens graphiques / formels avec les RGC et les chemins ;

— éventuellement des moyens numériques, algébriques si les données (le choix des variables) le permettent.

La situation comporte une dimension adidactique si :

— des questions nouvelles, sur les fonctions, ou sur les contraintes, peuvent émerger à partir des contraintes identifiées

— le milieu fournit une rétroaction à ces questions

— il y a interaction de connaissances : élève / milieu et professeur / élève

On propose ensuite la recherche de fonctions sous contrainte d'inégalités, puis de tracer directement le graphique d'une somme et d'un produit de fonctions, et d'une fonction réciproque.

Pour le détail des tâches proposées aux élèves, des graphiques avec les consignes, et des connaissances visées, voir l'article Bloch (2002) sur le site de Petit x :

https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/petit-x/consultation/numero-58-petit-x/numero-058-petit-x-2002--451950.kjsp?RH=1541685528129

Annexe 2 : situation le nombre le plus grand

Nous avons analysé les raisonnements apparaissant dans plusieurs épisodes de la séquence « Le nombre le plus grand » en indiquant les différentes phases de la séance dont ils sont extraits. Notre modèle d'analyse nous a permis d'étudier les différentes formes de raisonnements en relation avec le niveau de milieu correspondant en spécifiant (a) leur(s) fonction(s), (b) en analysant la nature des signes (langagiers et scripturaux), pour cela nous nous référerons (c) au répertoire didactique utilisé par les élèves afin d'identifier les connaissances et les savoirs mobilisés.

Pour une analyse plus complète des épisodes le lecteur pourra se référer à Gibel (2015).

<u>Épisode 1</u> extrait de la phase 4 de la séance 1. Les élèves présentent le nombre le plus grand obtenu à partir de la suite 3-4-5-7-8 et justifient la validité de la procédure ayant permis de l'obtenir. L'enseignant interroge Myriam sur son résultat et sur la manière dont elle l'a obtenu.

(1.1)	*M : (en désignant Myriam) : A toi.*	
(1.2)	*Myriam : Moi j'ai trouvé 3360 !*	
(1.3)	*E : Moi, aussi !*	
(1.4)	*E : Non pas moi, j'ai trouvé plus grand.*	
(1.5) *0.09.00*	*M : 3360, tu expliques. Attention, je t'écoute.*	*La maîtresse écrit au tableau 3360.*
(1.6)	*Myriam : 8 fois 7 , 56*	*L'enseignant écrit au tableau le programme de calcul au fur et à mesure*
(1.7)	*M : Alors, tu as fait 8 fois 7, oui.*	
(1.8)	*Myriam : Après j'ai fait 5 fois 4 , ça fait 20*	

(1.9)	*M : Hum ! (ton approbateur)*	*que l'élève lui dicte*
(1.10) 0.09.20	*Myriam : Après j'ai additionné 56 et …*	*(8×7)×(5×4)×3* ***(1) (2)*** *56 × 20*
(1.11) 0.09.22	*E : Additionné ?*	***(3)*** *1120* ***(4)*** *3360*
(1.12)	*Myriam : Non multiplié ; 56 fois 20*	
(1.13) 0.09.27	*M : C'est-à-dire tu as multiplié ces deux-là !*	
(1.14)	*Myriam : 56 fois 20, 1120 et après j'ai fait fois 3 et j'ai trouvé 3360*	
(1.15) 0.09.40	*M : Et après tu as fait fois 3 pour trouver 3360.*	

L'analyse détaillée de la phase 4, séance 1 montre que les élèves ont produit des raisonnements en situation d'action. La diversité des programmes de calcul, produits par les élèves, illustre les choix auxquels les élèves ont été confrontés, tant du point de vue des opérations utilisées que du point de vue de l'ordre dans lequel ils les ont effectuées. Les actions effectives des élèves sont reliées à des décisions de calculs (R1.1) en référence au tableau 2.

Identification du niveau de milieu correspondant : L'épisode ci-dessus relève de la situation de référence (S-2). Il est associé à la description d'un programme de calcul suite à la confrontation du sujet agissant, Myriam, au milieu objectif (M-2).

(a) Du point de vue des fonctions des raisonnements : Dans cet épisode l'enseignant traduit la dénotation des calculs de Myriam par l'écriture d'un arbre de calculs, rédigé par paliers successifs de (1.6) à (1.14), comme schématisé ci-dessus. Chaque étape de la formulation de Myriam peut être considérée comme une assertion dont la validité par rapport au calcul, mais également par rapport aux règles du jeu, est examinée par les élèves. Myriam parvient ainsi à produire, par la dénotation de son programme de calcul, le résultat annoncé (3360). L'enseignant et l'ensemble des élèves de la *classe valident le résultat proposé du point de vue de sa conformité aux règles du jeu, mais aussi du point de vue de la validité des calculs. La présentation de son programme a pour fonction d'apporter la preuve de la validité de son résultat.*

(b) Du point de vue de l'analyse sémiotique : Le programme de calcul rédigé par Myriam s'apparente à un indice (R2.1), en effet le modèle implicite d'action (M.I.A) qui sous-tend son programme de calcul est : le produit de deux nombres (strictement supérieur à 1) est supérieur à la somme de ces 2 nombres. L'analyse sémiotique nous conduit ici à analyser les observables du point de vue de leur nature et ainsi à identifier le M.I.A correspondant basé sur l'expérience, le fait observé donc assimilable à un indice.

La formulation produite par Myriam, sur sa feuille, est une suite de calculs rédigés linéairement sur le mode « machine » (mode opératoire).

7x8= 56 5x4=20 56x20=1120 1120x3=3360

Les calculs rédigés par l'enseignant au tableau sont très éloignés du formalisme initialement utilisé par les élèves. L'enseignant essaie, par ce biais, d'introduire un formalisme basé sur l'utilisation des parenthèses pour rendre compte des étapes.

(c) Du point de vue de l'usage du répertoire didactique : Myriam s'est appuyée sur ses connaissances antérieures afin de décider d'utiliser exclusivement la multiplication ; ceci s'apparente à une conjecture ponctuelle (R3.1) pour produire le nombre le plus grand à partir du 5-uplet. Cette élève a utilisé ses connaissances des tables de multiplication, la règle des zéros ainsi que l'algorithme de la multiplication pour effectuer les différentes opérations. Il traduit l'usage de connaissances anciennes (R3.1).

Présentation des méthodes produites à l'issue de la séance 1

L'enseignant, à l'issue de la séance 1, a noté au tableau les méthodes proposées par différents groupes d'élèves :

Méthode 1 (groupe d'Hélène) : Je prends les deux plus grands nombres et je les multiplie. Après je refais pareil avec les deux plus petits. Le dernier nombre, qui me reste, je le multiplie.

Méthode 2 (groupe de David et Marc) : On multiplie les deux plus grands nombres, on multiplie les deux plus petits ensemble. On multiplie les résultats entre eux et on multiplie avec celui qui reste.

La méthode suivante a été approuvée par plusieurs groupes à l'issue de la séance 1, l'enseignant a choisi de la nommer « Méthode d'Aline et les douze »

Méthode 3 (Méthode d'Aline et les douze) : On multiplie tous les nombres entre eux.

Ces énoncés, élaborés par les différents groupes d'élèves, font l'objet d'une reconnaissance par l'enseignant et ils font désormais partie du répertoire didactique de la classe.

Épisode 2 : Discussion sur la formulation d'une nouvelle méthode

Cet épisode est extrait de la séance 2, phase 2.

Les trois énoncés produits à l'issue de la séance 1 correspondent à des méthodes équivalentes à la Méthode d'Aline et les douze. Des élèves s'interrogent sur la validité des méthodes proposées précédemment dans le cas où la suite de nombres comporte un 0 ou un 1.

(2.1)	*Sylvie: Si tu multiplies 5 par 0 ça fait 0, si tu fais 5 plus 0 ça fait 5.*
(2.2)	*Anne : Eh 0 je ne crois pas qu'elle le mettrait dans les chiffres !*
(2.3)	*Sylvie : Et Aline, elle disait que quand on avait les numéros il fallait tous les multiplier. Et si on fait 1 fois 5, ça fait 5 et si tu fais 1 plus cinq ça fait 6.*
(2.4)	*Anne : Bon ça c'est ce que j'avais dit la dernière fois. Bon eh bien la méthode à Aline, ça ne marche pas !*

Identification du (des) niveau(x) de milieu correspondant(s) : Cet épisode s'inscrit dans le cadre de la situation d'apprentissage, il met principalement en lumière la confrontation du sujet apprenant au milieu de référence. Le sujet apprenant, Sylvie, effectue une comparaison de deux méthodes dans un cas particulier où la suite, réduite à 2 nombres, comporte un zéro. On constate ici que Sylvie, pour comparer les deux méthodes, revient au niveau (M-2) en effectuant les calculs arithmétiques correspondants (situation d'action). Ceci permet d'illustrer le caractère emboîté des situations de référence et d'apprentissage.

(a) Du point de vue des fonctions des raisonnements : Son raisonnement vise à invalider la méthode d'Aline et les douze - « Le nombre le plus grand est obtenu en effectuant le produit de tous les nombres » - institutionnalisée précédemment. Ce contre-exemple est refusé par Anne ; selon cette dernière, la présence d'un 0 dans la suite de nombres n'est pas envisageable. Le raisonnement produit ne remplit pas la fonction souhaitée par son auteure. Sylvie propose alors une suite, réduite à deux nombres et comportant un 1, elle apporte la preuve de la non validité de la méthode d'Aline par une comparaison des méthodes et emporte l'adhésion de l'ensemble des élèves du groupe d'Anne. Les propositions de Sylvie contribuent à l'enrichissement du milieu (M-1). La production par Sylvie d'une suite de nombres et d'une nouvelle procédure, non encore répertoriée, s'apparente à la production d'une conjecture ponctuelle étayée (R1.2).

(b) Du point de vue de la nature des signes : Son énoncé s'apparente à la production d'un symbole-argument, il s'agit d'un argument local (R2.2). L'élève fait ici référence à des suites restreintes (comportant seulement deux termes) particulières dans le sens où la première proposition de suite comporte un 0 et la deuxième proposition de suite comporte un 1. Cependant cette conjecture étayée pourrait jouer un rôle décisif dans l'avancée de la situation en effet l'enrichissement du milieu (M-1) permet à présent d'envisager l'élaboration d'une nouvelle méthode prenant en compte le cas particulier d'une suite comportant un 1.

(c) Du point de vue de l'utilisation du répertoire didactique : on constate la mise en œuvre implicite des propriétés « 0 est un élément absorbant » et l'utilisation de la propriété « 1 est élément neutre pour la multiplication » qui illustre l'utilisation de connaissances anciennes (R3.1).

<u>Suite de l'épisode 2</u>

(2.5)	Une élève : Qu'est-ce qu'on fait comme méthode ?
(2.6)	Anne: Il faut multiplier tous les nombres sauf quand il y a des 1, on les additionne.
(2.7)	Anne : Cédric tu fais la méthode d'Aline, toi aussi et nous on fait la méthode celle-là pour voir ceux qui ont la mieux.
(2.8)	Anne : Alors 5,8,1,2,6 allez 5,8,1,2,6…5,8,1,2,6 ; Alors vous deux vous faites la méthode d'Aline et toi tu fais ma méthode, il faut trouver le nombre le plus grand avec cette méthode.
(2.9)	M : Alors vous faites des essais.
(2.10)	Une élève : Oui on fait des essais
(2.11)	Anne : Eux ils font la méthode d'Aline et nous ma méthode.

Identification du niveau de milieu correspondant : Cet épisode transcrit de (2.5) à (2.11) relève aussi de la situation d'apprentissage, il illustre la confrontation du sujet apprenant au milieu de référence.

Cet épisode met en lumière la proposition d'un contre-exemple sous la forme de l'énonciation d'une nouvelle méthode d'un 5-uplet (5,8,1,2,6). La formulation de cette nouvelle méthode (2.8) est en partie implicite puisque l'auteure, Anne, ne précise pas à quel nombre il faut ajouter le 1.

Anne, en proposant une nouvelle méthode dans le cas où la suite comporte un 1, contribue à l'enrichissement du milieu (M-1). Sa proposition apparaît comme un prolongement de la proposition de Sylvie formulée précédemment en (2.5).

(a) Les fonctions des raisonnements : La suite produite par Anne est en adéquation avec son projet visant à mettre en défaut la méthode d'Aline : établir la preuve de la validité de sa méthode (R1.2) par l'expérimentation dans le cas particulier d'une suite de nombres comportant un 1.

L'épisode donne aussi à voir un raisonnement d'organisation des tâches ; il vise à définir une répartition des rôles au sein du groupe afin de confronter les résultats obtenus par les 2 méthodes. Il s'agit là très clairement d'une mise en projet dont la finalité est explicitée : établir par le calcul l'obtention, par la nouvelle méthode, d'un nombre plus grand que celui obtenu par la méthode d'Aline.

L'épisode étudié illustre précisément la définition du raisonnement (Oléron, 1977, p.10) énoncée dans la première section de cet écrit En effet cet épisode révèle une confrontation de méthodes, respectant des contraintes, et conduite en fonction d'un but qui n'est autre que l'écriture d'une nouvelle méthode dont la validité doit être prouvée dans un domaine plus étendu, celui des 5-uplets comportant un 1, que celui lié aux précédentes méthodes.

Annexe 3 : situation « Pavages archimédiens du plan »

Éléments pour une étude a priori des milieux épistémologique et expérimental

En dehors des pavages réguliers bien connus que l'on obtient à partir d'un carré, d'un triangle équilatéral ou d'un hexagone régulier, il en existe une très grande variété à base de polygones réguliers. La situation didactique envisagée ici s'appuie sur la détermination des pavages archimédiens du plan (Front & Legrand, 2010).

Il apparaît que les pavages archimédiens du plan, aussi simples apparaissent-ils aujourd'hui, ont eu une vie mathématique mouvementée. L'étude des travaux des quelques mathématiciens qui se sont penchés sur la question, Kepler, Badoureau, Lévy, Sommerville, … montrent la difficulté des genèses successives. Il est par ailleurs à noter que le fait qu'il existe 11 pavages archimédiens du plan est un résultat peu connu de la communauté des enseignants de l'Éducation Nationale. Ce résultat mathématique n'a pas su trouver, jusqu'à ce jour, sa « niche écologique », au sens de Chevallard, dans l'enseignement mathématique secondaire. Avec des représentations par différents registres l'objet pavages archimédiens du plan est pourtant un bon candidat pour l'élaboration de situations didactiques propices aux apprentissages.

La situation didactique proposée : il s'agit d'engager les élèves dans un jeu où le projet commun de l'enseignant et des élèves est avant tout l'engagement dans la résolution du problème proposé et l'élaboration de résultats au moins partiels, la genèse de savoirs sur des objets mathématiques nouveaux, où la dimension expérimentale est fortement présente (Gardes, 2013). Dans ce projet le problème est l'essence et non le moyen. Il n'est pas construit dans une visée d'apprentissage. Il est, comme témoin d'un questionnement régulier dans les mathématiques en élaboration dans l'exploration des pavages du plan. Pour autant l'activité qu'il génère doit permettre le développement de connaissances, l'émergence de raisonnements et de savoirs mathématiques.

Le scénario : il doit permettre la construction de la tâche, du problème, les phases d'actions, de formulations, de validations, les institutionnalisations. Il comprend donc :

Des temps de dévolution individuelle et collective des enjeux et du problème. Ces temps doivent permettre a minima la dévolution des concepts de pavages réguliers et archimédiens.

Des phases adidactiques nombreuses et longues favorisées par la robustesse du problème (pour des actants du secondaire et du supérieur) et la possibilité de s'appuyer sur la dimension expérimentale des mathématiques

Des temps de formulation et de validation des raisonnements, d'institutionnalisation des savoirs nouveaux.

Les objets potentiellement en jeu : A l'interface entre différents registres de représentation, registres géométrique, numérique et algébrique l'objet pavage archimédien du plan a de nombreuses potentialités pour la mise en œuvre de situations de recherche de problème visant le développement de connaissances sur les polygones réguliers ou non, les angles, les nombres entiers, décimaux, fractionnaires, les suites de nombres entiers, les assemblages de polygones, les pavages. Il est à noter que certains objets ont un statut singulier (pentagone par exemple) et que les relations entretenues par les élèves peuvent être aussi bien des obstacles que des leviers dans la construction des théories.

Le milieu : il doit pouvoir offrir des rétroactions, c'est-à-dire que le travail de l'élève doit pouvoir recevoir des validations pertinentes. Il favorise la réalisation et le recueil des productions qui permettent de caractériser les raisonnements grâce à leurs manifestations tangibles. Il contient initialement :

Papier, règle, crayon, compas, rapporteur, calculatrice, ciseaux

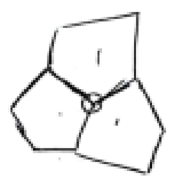
Un énoncé initiant la dévolution

Un ensemble de connaissances naturalisées sur les polygones, les angles, les nombres

Eventuellement des polygones en papier facilitant la manipulation des objets concrets

Il s'agit de s'assurer de la mise en place d'un milieu objectif fertile, d'un champ d'expérience fécond. Si nécessaire, il peut être enrichi (en étant vigilant à la préservation des enjeux essentiels de la situation) pour permettre l'évolution des raisonnements, par des questions, des apports d'informations maitrisés. Un apport possible, après un temps de recherche suffisant, consiste en la mise à disposition de planches d'A. Dürer (cf. Front, 2015) et permettant l'étude de propositions de l'artiste dont la validité est à discuter au regard des contraintes retenues.

Premières anticipations des actions sur les objets et des raisonnements :



La situation permet les indispensables recherches initiales sous forme de dessins, d'esquisses, de croquis éventuellement mentaux pour les élèves les plus familiers avec les pavages. C'est le premier temps de l'intuition des objets nouveaux qui peuvent être d'ordre très divers. Le sujet peut aisément prendre conscience que l'on peut assembler des polygones réguliers, bords à bords. Se pose alors rapidement la question des trous et celle plus complexe des nœuds. Plus globalement les élèves vont questionner la portée et la validation des faits expérimentaux, étudier des cas limites, formuler des lemmes, des conjectures, des sous problèmes :

Congruence des longueurs des côtés des polygones.

Somme des angles des polygones autour d'un nœud, qui vaut un plein.

Valeur des angles des polygones et éventuelle divisibilité de 360.

Nombre de pavages réguliers

Nombre de polygones possible autour d'un nœud

Nombre de types de polygone possible autour d'un nœud

Des premières propositions dans l'élaboration des théories permettant de réduire le problème

Etude des pavages réguliers

Encadrement du nombre n de polygones autour d'un nœud ($2<n<7$)

Encadrement du nombre e de types de polygones autour d'un nœud ($0<e<4$)

Etude locale des nœuds vs validité pour l'ensemble du plan

Elaboration d'expressions ; $\sum_{i=1}^{k}\alpha_i = 2\pi$; $\alpha_i = (1-\frac{2}{n_i})\pi$; $\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n_i} = \frac{k}{2}-1$… où n_i est le nombre de côtés du polygone régulier P_i , α_i l'angle de ce polygone, k l'ordre d'un nœud c'est-à-dire le nombre de polygones du pavage l'ayant pour sommet.

Enrichissement du répertoire : notion de pavages, notion de nœud, de type d'un nœud (liste des nombres de côtés des polygones l'ayant pour sommet, énumérés en tournant autour de ce nœud dans le sens direct ou dans le sens rétrograde, par exemple *(m,n,p,q)*), d'ordre d'un nœud (nombre de polygones du pavage l'ayant pour sommet), ordre et type du pavage, ...

Il sera ainsi possible d'observer lors des phases de formulation et de validation :

La production d'exemples (pavages réguliers, pavages avec deux types de polygones, …) pour prouver une existence

La production de contre-exemples pour préciser un domaine de validité (assemblage autour d'un nœud qui ne peut s'étendre à l'infini)

L'élaboration de conditions nécessaires (il y a au moins trois polygones autour d'un nœud, …) pour décider d'une stratégie

La production de conjectures (la somme des angles autour d'un nœud est égal à un plein, il existe 3 pavages réguliers, on ne peut associer plus de 3 types de polygones, …)

L'apparition des premiers symboles (dessin d'un nœud, dessins d'assemblages de polygones réguliers, « formule » exprimant que la somme des angles autour d'un nœud vaut un angle plein, formule algébrique représentant des assemblages de deux types de polygone, …)

L'émergence de preuves pragmatiques

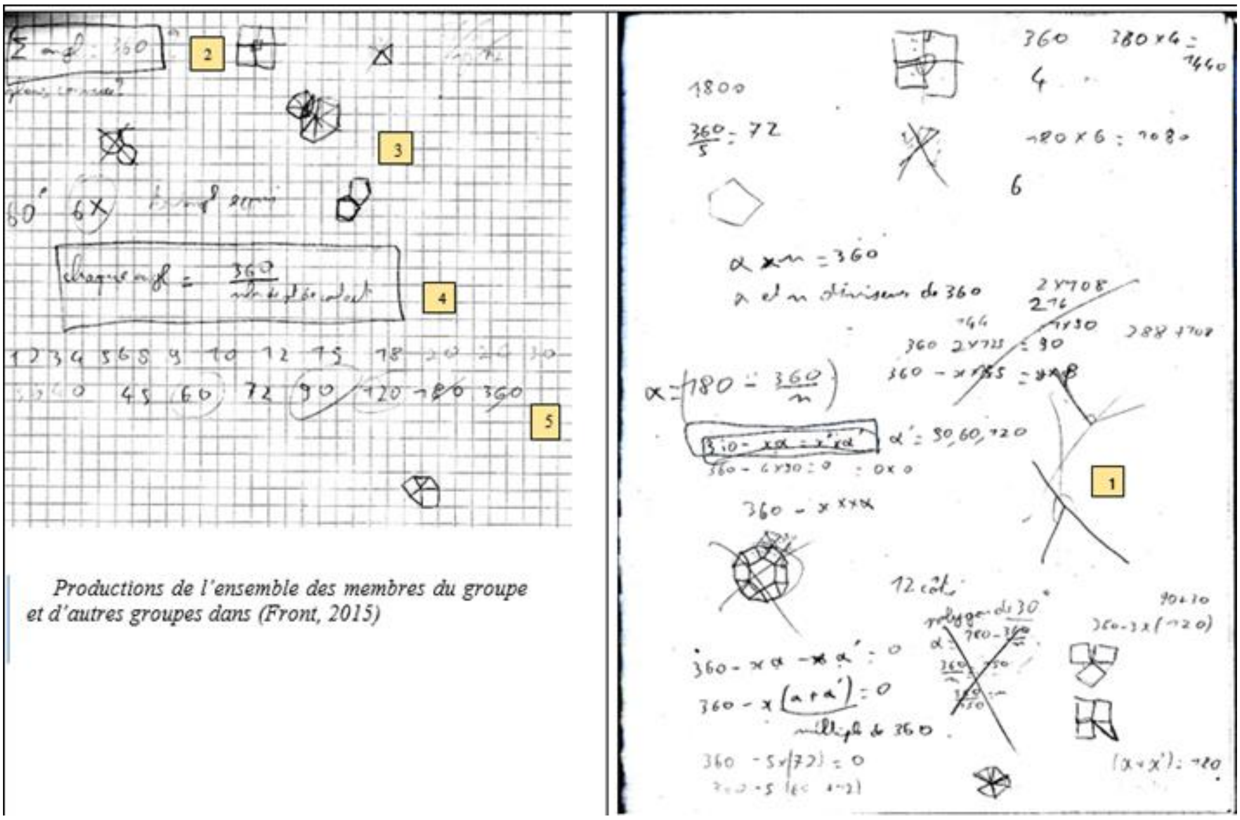
L'émergence de preuves syntaxiques

La fonction des symboles dans les raisonnements (traduction d'une intuition, support pour argumenter, pour prouver, …) et leur niveau d'utilisation

L'évolution du répertoire de représentation (lexique mieux maitrisé, notations précisées, …)

- ...

Production de Timothée (E15)



Productions de l'ensemble des membres du groupe et d'autres groupes dans (Front, 2015)