CROISEMENTS D’OUTILS POUR ANALYSER LES APPRENTISSAGES DES ELEVES SUR LA PREUVE

Marie-Line Gardes[*], Christophe Hache[**], Zoé Mesnil[**]

RÉSUMÉ
La preuve présente de nombreux aspects qui font de sa pratique, de son enseignement et de son apprentissage des activités riches mais complexes. Dans le TD que nous avons proposé, nous nous sommes attaché·es particulièrement à l’articulation processus / produit (Gandit, 2011), et à l’articulation syntaxe / sémantique des preuves (Deloustal-Jorrand *et al.*, 2020). Nous avions donc en toile de fond pour les trois séances du TD la question suivante : comment la manipulation des objets ou des énoncés mathématiques participe-t-elle à l’élaboration d’une preuve, de la recherche d’arguments convaincants à l’élaboration d’un texte répondant aux attendus de la communauté mathématique ? Les résultats présentés dans le TD sont issus d’anciennes recherches que nous avons menées, ou de données récoltées pour illustrer notre propos.

Mots-clefs : preuve, processus de recherche, dimensions syntaxique et sémantique, langage.

ABSTRACT
Proof presents many aspects that transform its practice, its teaching and its learning into rich but complex activities. In the proposed working group, we focused particularly on the process / product articulation (Gandit, 2011), and the syntax / semantics articulation (Deloustal-Jorrand *et al.*, 2020) of proofs. The background of this session was therefore the following question: how the manipulation of mathematical objects or statements participates in the elaboration of a proof, from the search for convincing arguments to the elaboration of a text that meets the expectations of the mathematical community. The results presented in this text come from previous research that we have conducted, or from data collected to illustrate our point.

Keywords: proof, proving, syntactic and semantic aspects, language.

INTRODUCTION

Le thème de la preuve n’avait pas été traité à l’École d’Été de Didactique des Mathématiques depuis 1999. C’est pourtant un thème qui est important et riche en productions dans la recherche en didactique, comme en témoignent la 19^{e} étude ICMI sur la preuve en 2008 (Hannah & De Villiers, 2012) et la synthèse des travaux du groupe sur la preuve des conférences CERME (Mariotti *et al.*, 2018). Dans nos travaux respectifs, nous nous inspirons de travaux fondateurs, comme ceux de Balacheff (1987) et Durand-Guerrier (1996), et nous nous intéressons plus particulièrement à l’articulation processus / produit (Gandit, 2011) d’une part et à l’usage de la logique mathématique dans nos grilles d’analyse d’autre part (Barrier *et al.*, 2019, Hache, 2015). Nous avons également en commun d’explorer les pratiques des mathématiciens et des mathématiciennes expert·es : dans leurs processus d’élaboration de preuve (Gardes, 2017) et dans leurs pratiques langagières (Hache & Mesnil, 2015). Nous nous sommes retrouvé·es pour élaborer ce TD autour de la question suivante : comment la manipulation des objets ou des énoncés mathématiques participe-t-elle à l’élaboration d’une preuve, de la recherche d’arguments convaincants à l’élaboration d’un texte répondant aux attendus de la communauté mathématique ?

Dans la première séance du TD, nous avons plus particulièrement exploré l’articulation des dimensions syntaxique et sémantique de la preuve, à partir d’un travail sur des conjectures d’arithmétique. Dans la deuxième séance du TD, cette articulation syntaxe / sémantique a été mise en relation avec la dimension expérimentale dans l’élaboration d’une preuve, en utilisant notamment la notion de gestes de recherche pour analyser à une échelle plus fine des extraits de vidéos sur ces conjectures d'arithmétique. Dans la troisième séance du TD, nous avons plutôt

[*] Haute Ecole Pédagogique du canton de Vaud, Lausanne
[**] Université Paris Cité, LDAR

Vandebrouck, F., Emprin, F., Ouvrier-Buffet, C. & Vivier, L. (dir.) (2023). Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques - Preuve, Modélisation et Technologies Numériques. Volume des ateliers des actes de EE21.

cherché à analyser le langage utilisé dans le texte écrit de la preuve, toujours en lien avec nos conjectures d'arithmétique. Nous avons présenté des outils de l'analyse logique qui permettent de faire des liens avec les pratiques langagières usuelles de la communauté mathématique.

À PROPOS DES DIMENSIONS SYNTAXIQUE ET SÉMANTIQUE

Pour introduire les dimensions syntaxique et sémantique, nous avons repris un exemple proposé dans Durand-Guerrier et Mesnil (2022). L'énoncé $\forall x \in \mathbb{R}, \exists h \in \mathbb{R}_+^* \; (|x| < h \Rightarrow x = 0)$ est écrit dans un registre symbolique qui permet de repérer sa structure très facilement : il s'agit d'une implication, précédée qu'une quantification existentielle sur une variable dont on peut remarquer qu'elle n'apparaît que dans la prémisse de l'implication, et d'une quantification universelle sur une variable qui apparaît dans la prémisse et dans la conclusion. Ce premier regard est d'ordre syntaxique. Adopter un regard sémantique consiste à se demander ce que signifie cet énoncé, et à se poser la question de sa valeur de vérité. Nous pouvons expliciter la signification des symboles et reformuler l'énoncé ainsi : « pour tout réel x, il existe un réel strictement positif h tel que si valeur absolue de *x* est strictement inférieur à h, alors *x* est égal à 0 ». Cette reformulation n'est généralement pas suffisante pour que cet énoncé prenne sens et que nous puissions répondre à la question de sa valeur de vérité. Nous pouvons cependant, pour y réfléchir, essayer de le démontrer en nous laissant guider par sa structure : il commence par une quantification universelle, considérons alors un réel *x*. Avec notre habitude de la pratique des mathématiques, une telle action est automatisée, nous pouvons alors parler d'une démarche que nous qualifierons de syntaxique : pour démontrer un énoncé de la forme $\forall x \in E, P[x]$, on considère un élément x de E, et on démontre $P[x]$. Si l'on continue avec notre démarche syntaxique, il faudrait ensuite trouver un terme $t > 0$ pour lequel il resterait à prouver $|x| < t \Rightarrow x = 0$, ce que l'on fait généralement en supposant $|x| < t$ et en démontrant $x = 0$. Mais le fait que le terme *t* intervienne dans la prémisse de l'implication et pas dans la conclusion créé un malaise : cela semble étrange de déterminer *t* puis de faire une hypothèse dessus. Le malaise peut être levé en cherchant plutôt à montrer la contraposée $x \neq 0 \Rightarrow |x| \geq t$, démarche qui articule alors la syntaxe (règles pour former la contraposée) et la sémantique (équivalence entre une implication et sa contraposée). D'autres transformations syntaxiques de l'énoncé initial permettent de statuer plus rapidement sur sa valeur de vérité : par exemple, il est plus immédiat que sa négation, $\exists x \in \mathbb{R}, \forall h \in \mathbb{R}_+^* \; (|x| < h \; et \; x \neq 0)$, est fausse, ou encore plus immédiat que l'énoncé équivalent $\forall x \in \mathbb{R} \left[(\forall h \in \mathbb{R}_+^* \; |x| < h) \Rightarrow x = 0\right]$ est vrai (mais les règles permettant de transformer l'énoncé initial en ce troisième énoncé sont moins connues). On peut donner du sens à ce dernier énoncé en le reformulant de la façon suivante : « 0 est le seul réel dont la valeur absolue est strictement inférieure à n'importe quel réel strictement positif ».

Cet exemple permet non seulement de voir ce qui relève de la syntaxe et ce qui relève de la sémantique, mais aussi de voir que l'expression « dimensions syntaxique et sémantique » recouvre finalement deux points de vue : la dimension syntaxique ou sémantique d'un énoncé mathématique (ou plus généralement d'un objet mathématique), la dimension syntaxique ou sémantique de la démarche effectuée par une personne en train de faire des mathématiques. Nous voyons aussi dans cet exemple que dans les deux cas ces deux dimensions sont à articuler au sein de l'activité mathématique.

1. Syntaxe et sémantique dans la logique mathématique

Pour continuer sur ces deux dimensions, reprenons comme l'a fait Durand-Guerrier (2005) la caractérisation de Eco (1980)[1] :

> Sémantique : le signe est ici conçu dans sa relation à ce qu'il signifie ;
>
> Syntaxique : le signe est abordé en ce qu'il peut être inséré dans des séquences d'autre signes selon certaines règles de combinaisons ; (Eco, cité dans Durand-Guerrier, 2005, p. 114)

La logique mathématique modélise la « métamathématique naïve, qui s'occupe non pas des objets mathématiques mais de ce qu'on fait lorsque l'on traite des objets mathématiques » (Lacombe, 2007). Elle manipule ainsi notamment des formules qui modélisent les énoncés mathématiques, et des preuves formelles qui modélisent les preuves. Les signes des lettres de variables, des quantificateurs, du connecteur IMPLIQUE et du connecteur ÉQUIVAUT À, utilisés dans le modèle élaboré par les logiciens et logiciennes, sont également utilisés dans l'activité mathématique. La logique mathématique définit les règles d'utilisation de ces signes (par exemple en définissant ce qu'est une formule) et leur donne du sens (par exemple en définissant quand est-ce qu'une formule est vraie).

Depuis Aristote, les logiciens et les logiciennes cherchent à attester la validité des raisonnements en s'appuyant sur leur structure et celle des propositions qui y interviennent, c'est-à-dire par des arguments d'ordre syntaxique. Dans l'*Organon*, Aristote modélise les raisonnements sous forme de syllogismes, qui font intervenir trois propositions, deux prémisses et une conclusion, par exemple « Nul M n'est N, tout P est M donc nul P n'est N ». Ce syllogisme, décrit ici non pas comme le fait Aristote, mais comme cela a été fait plus tard au Moyen-Âge, fait partie de la première figure, il se distingue du syllogisme « Nul N n'est M, tout P est M donc nul P n'est N », qui fait partie de la deuxième figure, par la place des termes dans les prémisses. Voici comment Aristote justifie la validité de ce deuxième syllogisme :

> Soit, en effet, le terme M, qui n'est affirmé de nul N, mais est affirmé de tout. Puisque la négative est convertible, N n'appartiendra à nul M. Mais M était supposé appartenir à tout P. En conséquence, N n'appartiendra à nul P. Cela a déjà été démontré plus haut. (Aristote, 2007, pp.37-38)

Par la transformation de l'une des prémisses, Aristote se ramène à un syllogisme dont la validité a déjà été attestée. Nous pouvons faire un parallèle entre cette démarche et celle que nous mobilisons quand nous résolvons une équation à une inconnue x : nous cherchons à transformer une égalité en une autre égalité de la forme $x = a$. Une telle démarche peut être mise en œuvre sans se soucier du sens des expressions (propositions ou égalité), mais seulement en appliquant des règles de transformation de celles-ci. Il faut souligner que les règles utilisées sont établies par des arguments de préservation de la vérité : dire par exemple que la négative est convertible, c'est dire que lorsque la proposition « Nul N n'est M » est vraie, alors la proposition « Nul M n'est N » est vraie. Lorsque l'on résout une équation, dans le cas où l'on peut raisonner par équivalence, les transformations que nous faisons sont celles qui transforment une égalité vérifiée par certaines valeurs en une autre égalité vérifiée exactement par les mêmes valeurs. Nous voyons ainsi apparaître ici des arguments d'ordre sémantique permettant un travail d'ordre syntaxique.

Bien sûr, une proposition obtenue comme conclusion d'un raisonnement valide dont les prémisses sont vraies doit nécessairement être vraie. C'est comme cela qu'Aristote établit la validité des syllogismes de la première figure :

> Si A est affirmé de tout B, et B de tout Γ, nécessairement A est affirmé de tout Γ […] De même, si A n'est affirmé de nul B, et si B est affirmé de tout Γ, il en résulte que A n'appartiendra à nul Γ. (Aristote, 2007, p. 27)

[1] ECO, U. (1980). *Segno*. A. Mondatori. *Le signe*, 1988 pour la traduction française. Labor.

Cette rapide présentation de la logique d’Aristote illustre comment dans les travaux des logiciens et des logiciennes, syntaxe et sémantique sont clairement distinguées mais ne se conçoivent pas l’une sans l’autre. L’articulation entre les deux dimensions se retrouvent dans tous les développements ultérieurs de la logique mathématique : la sémantique guide la syntaxe, la syntaxe permet d’enrichir la sémantique.

2. Syntaxe et sémantique dans l’activité mathématique et notamment dans la production de preuve.

Dans l’activité mathématique, nous ne sommes jamais complètement dans le monde des symboles vides de sens. Pour revenir à un exemple déjà utilisé, quand nous manipulons des expressions algébriques, par exemple quand nous écrivons $2\,(x + 1) = 2x + 2$, les symboles d'opération sont interprétés, les symboles de constante également et même si nous avons l'impression de seulement manipuler des lettres de variables, nous avons en tête un ensemble auquel elles sont astreintes (généralement R). Nous pouvons donner du sens à cette égalité en la reformulant ainsi : « ajouter 1 à x et prendre le double, c’est comme prendre le double de x et ajouter 2 », nous pouvons reconnaître l’application de la règle de distributivité de la multiplication sur l’addition. Kouki (2018) montre que des élèves de l’enseignement secondaire tunisien (élèves de 14 à 16 ans) sont capables de mobiliser et d’articuler des techniques syntaxiques et sémantiques dans le cas de la résolution de tâches élémentaires, mais que certains et certaines persistent dans des techniques syntaxiques alors même qu’elles sont inopérantes pour des tâches plus complexes. Ici, ce ne sont plus les objets mathématiques qui ont un aspect syntaxique ou sémantique, mais bien des démarches mises en œuvre par des élèves en train de résoudre des tâches mathématiques.

Lors de la première séance de TD, nous avons présenté l’article de Weber et Alcock (2004) dans lequel sont définies les deux dimensions syntaxique et sémantique pour caractériser la production de preuve :

> We define a syntactic proof production as one which is written solely by manipulating correctly stated definitions and other relevant facts in a logically permissible way. In a syntactic proof production, the prover does not make use of diagrams or other intuitive and non-formal representations of mathematical concepts. In the mathematics community, a syntactic proof production can be colloquially defined as a proof in which all one does is “unwrap the definitions” and “push symbols”.
> We define a semantic proof production to be a proof of a statement in which the prover uses instantiation(s) of the mathematical object(s) to which the statement applies to suggest and guide the formal inferences that he or she draws. By an instantiation, we refer to a systematically repeatable way that an individual thinks about a mathematical object, which is internally meaningful to that individual. (Weber & Alcock, 2004, p. 210)

Dans cette définition que nous reprenons dans nos outils, il y a une ambiguité sur ce que recouvre l’expression « proof production » : concerne-t-elle bien l’ensemble de la production, du processus au produit ? Cet article est commenté par Barrier (2016), qui confirme qu’il est bien question de regarder l’ensemble du processus d’élaboration d’une preuve, et qui parle plus largement d’approches syntaxique et sémantique, en intégrant d’autres activités liées à la preuve :

> Cette distinction est issue d'un travail portant sur les processus d'élaboration des démonstrations, les auteurs parlent donc de *semantic* (resp. *syntactic*) *proof production* mais il est possible d'étendre le domaine d'application de l'outil à des activités de lecture ou d'évaluation de preuve, c'est pourquoi je parle dans ce texte de manière plus large d'approches sémantique et syntaxique. Le critère de distinction entre les deux approches reste le même : y a-t-il ou non une contribution observable des objets mathématiques dans le processus ? (Barrier, 2016, p. 96)

Nous avons notamment proposé dans le TD un rapide aperçu de la deuxième expérimentation présentée dans l'article de Weber et Alcock (2004). Deux étudiants, qui suivent leur premier cours d'analyse dans une université du Royaume-Uni, sont invités à se prononcer sur des conjectures concernant la convergence de suites (Figure 1) :

Table IV
Task set for students in week 7 of analysis study

Consider a sequence (a_n). Which of the following is true?

(a) (a_n) is bounded $\Rightarrow$ (a_n) is convergent,

(b) (a_n) is convergent $\Rightarrow$ (a_n) is bounded,

(c) (a_n) is convergent $\Leftrightarrow$ (a_n) is bounded,

(d) none of the above.

Justify your answer.

Figure 1. *– Énoncés proposés à Adam et Ben, extraits de Weber & Alcock (2004)*

Les deux étudiants sont rapidement d'accord sur l'énoncé qui est vrai, Adam a éliminé ceux qui sont faux par la production de contre-exemples. Ensuite, Ben donne l'argument qui est à l'origine de la preuve, en donnant tout de suite la définition (pour une suite qui converge vers 0) :

> B : Right, (b)…is convergent. Right, our definition of convergence is that…well, there exists an *N* such that when *n* is greater than *N*, there…modulus of *a* is less than epsilon. So that leads to epsilon being a bound…plus or minus epsilon being a bound, about *a*. a_n. Is it ? (Weber & Alcock, 2004, p. 223)

Adam élargit ensuite au cas de n'importe quelle suite convergente, puis Ben explique la preuve complète. S'ensuit une discussion avec l'interviewer, dans laquelle Adam dit faire une différence entre la définition formelle de la convergence et la façon dont il comprend le concept (qu'il décrit avec mots et gestes), alors que Ben dit ne pas voir un tel contraste entre les deux. Weber et Alcock concluent alors que Ben, qui semble penser à la convergence uniquement en termes de définition formelle, est engagé dans une production syntaxique de preuve, alors qu'Adam, qui rapporte qu'il pense à la convergence à la fois en termes de définition et en utilisant d'autres représentations intuitives, est engagé dans une production sémantique de preuve.

Ce qui distingue Adam et Ben dans cette résolution de tâche n'est pas à proprement parler l'utilisation d'objets, puisque dans la partie sur la preuve de l'énoncé vrai, aucune suite particulière n'est utilisée. Ce qui fonde la distinction syntaxe/sémantique c'est d'avoir une représentation du concept de convergence autre que la définition formelle. Mais quand au tout début Ben dit « so that leads epsilon being a bound », cela montre bien aussi une interprétation de la définition, il ne se contente pas d'une manipulation syntaxique mobilisant les règles de logiques pour passer d'un énoncé à un autre. Son premier geste, par contre, dérouler la définition (« unwrap the definition »), présenté comme un geste « qu'il faut faire », est propre, selon Weber et Alcock (2004), de la démarche syntaxique : c'est une action qui n'est pas guidée par ce que signifie l'énoncé à démontrer.

Cela pose la question de ce qu'on peut qualifier de syntaxique ou de sémantique, du niveau de granularité de l'analyse : doit-on se placer au niveau du geste, ou d'un comportement plus global (avec d'autres indicateurs que la somme des gestes) ?

Weber et Alcock (2004) terminent leur article par quelques commentaires sur les différences entre production syntaxique et sémantique de preuves, en reliant cette distinction avec d'autres catégories présentes dans la recherche sur la preuve. Weber et Alcock suggèrent que les compétences et connaissances nécessaires pour une production syntaxique de preuve sont relativement modestes, là où celles nécessaires pour une production sémantique de preuve sont plus complexes. Pourtant, on sait depuis l'article de A. Selden et J. Selden (1995) la difficulté qu'ont les étudiants et les étudiantes à déplier la structure logique d'un énoncé, et à faire le lien entre structure d'un énoncé et structure d'une preuve de cet énoncé.

Weber et Alcock (2004) poursuivent la discussion en reliant la production syntaxique de preuve à la fonction de validation et au *concept définition*, et la production sémantique à la fonction d'explication (De Villiers, 1990), et au *concept image* (Tall & Vinner, 1981). Selon nous, Weber et Alcock n'insistent pas assez sur le fait que, comme dans ces autres recherches proposant différents aspects de la preuve, les dimensions syntaxique et sémantique de la production de preuve ne sont pas des catégories disjointes, l'activité de chacun et chacune se positionnant dans l'une ou dans l'autre, mais sont plutôt des aspects à articuler pour une activité de production de preuve féconde.

3. Appui sur des conjectures d'arithmétique pour alimenter les discussions

De notre côté, nous avons recueilli pour le TD de l'École d'Été des données autour de preuves d'arithmétique auprès d'élèves de Terminale option Maths expertes, d'élèves de classe préparatoire, d'étudiant·es de L1 Chimie, de collègues mathématicien·nes de l'Université de Paris. Pour les trois mathématicien·nes et les trois d'élèves de classe préparatoire, il s'agissait de discussions individuelles filmées (avec tableau noir pour les mathématicien·nes , feuille blanche pour les élèves), pour les étudiant·es de L1 chimie et les d'élèves de Terminale, il s'agissait de discussions avec tout le groupe (une dizaine d'étudiant·es de L1, une dizaine d'élèves de Terminale, une feuille précisant la propriété à prouver était donnée, sur laquelle nous leur demandions de noter leurs idées, leur recherche, et finalement, ils et elles devaient rédiger individuellement une démonstration dans une partie explicitement réservée à cet effet) Les conjectures proposées sont également étudiées dans l'article de Barrier (2016) déjà cité, qui emprunte quant à lui les données à Alcock et Inglis (2008).

Dans un premier temps de l'expérimentation, nous donnons les définitions de « nombre abondant » et de « nombre parfait » en laissant à chaque fois un temps de discussion et d'appropriation de ces définitions (Figure 2) :

Définition 1 : un entier $n \in \mathbb{N}^*$ est **abondant** lorsque la somme des diviseurs de n est strictement supérieure à $2n$.
Définition 2 : un entier $n \in \mathbb{N}^*$ est **parfait** lorsque la somme des diviseurs de n est égale à $2n$.

Figure 2. *– Définitions nombres abondants et parfaits*

Nous avons également proposé pendant le TD aux collègues participant·es de prendre ce temps d'appropriation de ces définitions. Comme les collègues mathématicien·nes et comme les élèves ou étudiant·es, ce temps a été mis à profit pour explorer des exemples, avec en plus pour les collègues mathématicien·nes et certain·es collègues pendant le TD l'énonciation de certaines propriétés plus ou moins démontrées (par exemple, le fait qu'un nombre premier n'est ni parfait ni abondant). Durant cette phase, le travail est essentiellement sémantique.

Puis, dans un second temps de l'expérimentation, nous proposons de réfléchir à des énoncés concernant ces notions (Figure 3). Nous avons proposé des conjectures différentes selon le public : les mathématicien·nes et les élèves de classe préparatoire ont réfléchi aux conjectures 1, 2 et 3, lors d'entretiens individuels filmés, les élèves de Terminale option Maths expertes et les étudiant·es de L1 ont dû rédiger une démonstration de la conjecture 2bis après une discussion collective dans laquelle les arguments de la démonstration étaient élaborés.

Conjecture 1 : un entier strictement positif est abondant si et seulement si c'est un multiple de 6.

Conjecture 2 : pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, si n est parfait, alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, kn est abondant.

Conjecture 2bis : pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, si n est parfait, alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, si $k \geq 2$ alors kn est abondant.

Conjecture 3 : quels que soient les entiers $n, m \in \mathbb{N}^*$, si n et m sont abondants, alors nm est abondant.

Figure 3. *– Conjectures sur les nombres abondants et parfaits*

Les participants et participantes au TD ont été invité·es à réfléchir aux conjectures 1, 2bis et 3. Comme dans les expérimentations effectuées préalablement au TD, dans ces temps de travail, nous avons pu constater une articulation des dimensions syntaxique et sémantique de l'activité : par exemple, à certains moments, nous observons juste une manipulation d'énoncés, de symboles, d'écritures, à d'autres moments, nous observons un retour aux exemples pour guider ou contrôler la recherche. Nous reviendrons plus loin et plus finement sur l'analyse de certaines productions montrant cette articulation. Cependant, si ces dimensions semblent bien pertinentes pour analyser l'activité de preuve, il est difficile de bien les séparer quand nous regardons non plus seulement les énoncés mathématiques mais aussi l'activité de celui ou celle qui les manipule, cherche à les démontrer ou à les infirmer.

Nous avons conclu la première séance du TD en montrant deux extraits des expérimentations.

Dans le premier extrait, M., maîtresse de conférence en mathématiques, explore la conjecture 2 bis. M. est chercheure en théorie des nombres, et les notions en jeu lui sont familières. Elle commence la résolution de la conjecture en disant « Je vais essayer de montrer que c'est vrai et on verra bien si on a un problème », ce qui peut être décrit comme caractéristique d'une démarche syntaxique : on va dérouler les définitions, les propriétés, et on verra si ça ne se fait pas facilement. Mais elle commente ensuite son travail en disant « je ne vais pas pouvoir calculer exactement la somme de ses diviseurs [elle a considéré un entier n parfait et cherche à montrer que pour $k \geq 2$, kn est abondant], mais j'ai bon espoir de la minorer ». Il est difficile de savoir ce qui lui permet d'affirmer ça : elle sait qu'une minoration est suffisante vue la forme de la définition d'un nombre abondant, mais l'espoir vient peut-être de quelques exemples explorés mentalement sans que nous n'ayons de trace de cette exploration. Tout au long de sa preuve, M. ne s'appuie pas sur des exemples, mais la rédaction de sa preuve semble guidée par des propriétés des nombres entiers qu'elle connaît.

Dans le deuxième extrait, A., élève de classe préparatoire, explore cette même conjecture 2 bis en prenant un temps d'exploration d'un exemple : « pour 6, moi j'aimerais bien me convaincre que ça marche pour 6 quand même », ce qui par contre est caractéristique d'une démarche sémantique. Dans son exploration, il cherche cependant une représentation des objets en jeu qu'il peut manipuler de façon syntaxique, notamment en utilisant des propriétés des sommes notée avec le symbole $\sum$.

Ces deux extraits et le travail des participant·es au TD, ainsi que la réflexion sur l'article de Weber et Alcock (2004), mettent en évidence la nécessité d'avoir d'autres outils d'analyse, nous permettant de décrire l'articulation entre les dimensions syntaxiques et sémantiques dans la production de preuve en prenant en compte non seulement la production, mais également à un niveau d'analyse plus fin, les gestes de la recherche.

DES OUTILS POUR ANALYSER LE PROCESSUS D'ELABORATION DE PREUVE

La seconde séance du TD avait ainsi pour objectif d'analyser plus en détails l'articulation entre les dimensions syntaxique et sémantique dans le processus d'élaboration de preuves. Nous avons proposé d'effectuer cette analyse en utilisant une grille d'analyse s'appuyant sur deux outils, issus de nos travaux (Gardes, 2013, 2017) : la dimension expérimentale des mathématiques et les gestes de la recherche. Après les avoir présentés, nous avons proposé aux participant·es de les utiliser pour analyser deux processus d'élaboration de preuves, menés par un chercheur et par un étudiant, sur les conjectures sur les nombres parfaits et abondants (Figure 3).

Dans cette partie, nous rendons compte de cette séance de TD. Nous présentons tout d'abord les notions de dimension expérimentale et geste de la recherche puis nous explicitons en quoi ce sont des outils permettant de décrire et analyser le processus d'élaboration de preuve. Enfin, nous détaillons la grille d'analyse construite grâce à ces outils et nous la mettons à l'épreuve pour décrire et analyser le processus de recherche du chercheur et de l'étudiant.

1. Dimension expérimentale[2]

La question du caractère expérimental des mathématiques et son intérêt pour l'apprentissage a fait l'objet de plusieurs études didactiques (Bkouche, 1982, 2008 ; Chevallard, 1991 ; Dias, 2008 ; Durand-Guerrier, 2010 ; Gardes, 2013 ; Giroud, 2011 ; Perrin, 2007).

Bkouche (1982) reconnaît un caractère expérimental aux mathématiques dans la mesure où elles relèvent des sciences expérimentales qu'il définit selon deux principes : d'une part, l'origine empirique des objets étudiés et des concepts ainsi mis en jeu et d'autre part, la méthode (ou les méthodes) qui participe à la fois de l'observation empirique et du raisonnement rationnel. Il ajoute que « c'est l'articulation de l'empirique et du rationnel qui constitue la science expérimentale » (*Ibid*. p. 307).

Concernant le premier principe, en prenant l'exemple du concept de nombre (dont l'origine remonte aux pratiques de comptage dans l'Antiquité[3]), Bkouche (1982) met en évidence que certains concepts mathématiques naissent de la manipulation des objets conformément à une théorie, manipulation rendue possible par la représentation sous forme symbolique des objets mathématiques. On retrouve ici l'articulation entre les dimensions syntaxique et sémantique des objets mathématiques présentée plus haut.

D'un point de vue didactique, Durand-Guerrier caractérise cette élaboration spécifique de certains concepts mathématiques par la mise en œuvre d'une dimension expérimentale qu'elle définit par « un va-et-vient entre un travail avec les objets que l'on essaye de définir […] et l'élaboration […] d'une théorie, le plus souvent locale, visant à rendre compte des propriétés de ces objets » (Durand-Guerrier, 2010, p.1). Il s'agit donc d'une articulation entre expérience et théorie qui s'appuie également sur les dimensions syntaxique et sémantique des objets mathématiques en jeu grâce à des allers et retours entre des objets naturalisés et des objets en cours de conceptualisation.

[2] Cette partie du texte reprend des passages de (Gardes, 2018).
[3] Voir par exemple (Giusti, 2000).

Concernant le second principe, Bkouche (1982) précise que ce qui fonde le caractère expérimental d'une méthode, c'est la définition et le rôle de l'expérimentation. C'est en effet elle qui est porteuse de l'articulation entre l'empirique et le théorique. En effet, l'expérimentation s'appuie sur un double raisonnement, en amont pour élaborer une expérience pertinente et en aval pour la lecture des résultats. Son rôle est de vérifier l'adéquation entre la théorie et l'expérience dans le but de créer de nouveaux objets mathématiques. Perrin (2007) définit l'expérimentation en mathématiques comme « une méthode d'investigation systématique » qu'il n'hésite pas à « désigner sous le nom de méthode expérimentale » pour résoudre des problèmes mathématiques. Pour cet auteur, l'adéquation entre théorie et expérience se réalise dans un processus itératif composé de plusieurs étapes à renouveler éventuellement :

> Expérience, observation de l'expérience, formulation de conjectures, tentative de preuve, contre-expérience, production éventuelle de contre-exemples, formulation de nouvelles conjectures, nouvelles tentatives de preuve, *etc*. (Perrin, 2007, p.10).

Dans cette description de « la méthode expérimentale », l'expérimentation (faire une expérience, observer l'expérience et en tirer des conclusions) s'articule avec des phases de formulation de conjectures et de tentative de preuves. Dias (2008) prolonge cette idée en pensant l'expérimentation comme un processus dialectique empirique/théorique qui n'a de sens que par ses articulations avec la formulation et la validation. Nous définissons alors une démarche de type expérimental de résolution de problèmes par des va-et-vient constants entre la théorie et l'expérience se réalisant par des rétroactions de trois processus : expérimentation, formulation et validation. Une démarche de type expérimental s'appuie donc sur la mise en œuvre d'une dimension expérimentale portant sur les objets mathématiques en jeu (i.e. des allers et retours entre des objets naturalisés et des objets en cours de conceptualisation) et favorise ainsi les liens entre dimensions syntaxique et sémantique de l'activité de recherche, notamment en permettant de pallier les limites de l'une ou de l'autre. De même, lorsque les deux dimensions sont articulées, cela peut favoriser en retour la mise en œuvre d'une démarche de type expérimental dans la recherche d'un problème.

2. Geste de la recherche[4]

Nous avons emprunté la notion de « geste » à la philosophie des mathématiques (Cavaillès, 1938, 1994 ; Châtelet, 1993, et Bailly & Longo, 2003) et nous l'avons développée pour analyser l'activité effective de recherche d'un problème mathématique. Dans les travaux de Cavaillès (1938), repris par Cassou-Noguès (2001), on trouve trois gestes de nature différente. Le geste naturel est une manipulation de signes mathématiques (par exemple, des chiffres, des symboles algébriques ou encore des figures géométriques). Lorsque ce geste s'effectue dans un milieu propre au travail mathématique, il devient un geste combinatoire, c'est-à-dire soumis à des règles d'emploi de ces signes. Il relève de la dimension syntaxique. Le geste opératoire, quant à lui, renvoie à l'acte de pensée associé au geste combinatoire. Il est défini comme un procédé ou une opération sur des objets mathématiques. Il relève de la dimension sémantique. Voici un exemple pour illustrer ces trois gestes : imaginons un enfant qui joue avec des magnets représentant des chiffres et les signes + et =. Par un geste naturel, l'enfant utilise ces magnets, sans intentionnalité mathématique, et juxtapose par exemple les signes 3 = 2 +. Le geste devient combinatoire si l'enfant respecte les règles d'utilisation des signes mathématiques, par exemple le signe + doit être complété à gauche et à droite, de même que le signe =. L'enfant peut alors écrire 2 + 3 = 7. Enfin, le geste est qualifié d'opératoire si la mise en relation des trois nombres par l'opération est correcte mathématiquement, ce qui conduit l'enfant à écrire 2 + 3 = 5.

[4] Cette partie reprend des passages de (Gardes, 2013) et (Gardes, 2017).

Cavaillès définit ensuite l'expérience comme un système de gestes et Cassou-Noguès précise alors que « l'expérience mathématique serait un double système de gestes : gestes combinatoires dans les espaces combinatoires, gestes opératoires dans les théories mathématiques » (Cassou-Noguès, 2001, p. 13). Ce ne sont pas deux actes distincts mais un seul acte qui se déploie comme combinatoire et opératoire. Cette double facette donnée au geste unifie et articule les dimensions sémantique et syntaxique de l'activité mathématique. Enfin, il met en évidence le pouvoir de créer de nouveaux objets mathématiques au moyen de l'expérience, donc au moyen de gestes.

Cette étude nous a amené à la notion de geste de la recherche que nous définissons comme suit : un geste est un acte de mise en relation d'objets mathématiques dans une intentionnalité. Il possède un pouvoir de créer (de nouveaux objets mathématiques) dans sa possibilité d'ouvrir le champ des possibles dans le travail mathématique, en saisissant l'intuition au moyen d'une expérience (Gardes, 2013, p.155). Dans nos travaux, nous avons identifié sept gestes de la recherche (Gardes, 2013, pp.162-165). Nous choisissons de présenter les trois gestes qui seront utilisés dans la suite des analyses :

- Désigner un objet, il s'agit de représenter cet objet par le langage ou par un signe. Ce geste permet d'articuler les dimensions syntaxique et sémantique d'un objet : en représentant un objet par un signe, on peut ensuite effectuer des opérations sur les signes sans toujours se référer aux objets qu'ils désignent ;
- Construire des exemples et les questionner, il s'agit de déterminer une méthode de construction des exemples à partir de manipulations des objets mathématiques et un questionnement de ces différents exemples dans le but d'en dégager des informations. Ce geste est porteur de l'articulation syntaxe/sémantique dans la mesure où le travail mathématique s'appuyant sur des exemples est un moyen de construire une syntaxe sur les objets ;
- Effectuer des contrôles locaux, il s'agit de vérifier les différentes étapes des manipulations et combinaisons de signes dans les écritures mathématiques. Ce geste favorise une articulation syntaxe/sémantique car il s'agit de faire référence aux objets désignés par les signes en les positionnant au premier plan.

3. Des outils pour décrire et analyser le processus d'élaboration de preuve

Nous étudions le processus d'élaboration de preuve dans le cadre d'une activité de recherche de problème. Il s'agit donc d'une partie du processus (plus global) de recherche de problème. La notion de dimension expérimentale est un outil permettant de décrire et analyser ce processus de recherche en montrant comment la preuve s'élabore en appui sur un travail sur les objets mathématiques en jeu. Il s'agit ici de mettre en évidence les allers et retours entre les manipulations sur les objets mathématiques en jeu et la mise au jour d'éléments théoriques rendant compte des propriétés de ces objets. La notion de geste de la recherche est un outil permettant, d'une part de caractériser la nature de l'activité mathématique relative aux manipulations d'objets et aux élaborations théoriques, et d'autre part d'identifier les éléments déclencheurs des allers et retours entre ces activités. Il permet ainsi de mettre en évidence les éléments moteurs dans l'avancée de la recherche du problème et l'élaboration de la preuve. Ces deux outils combinés donnent la grille d'analyse présentée en Figure 4.

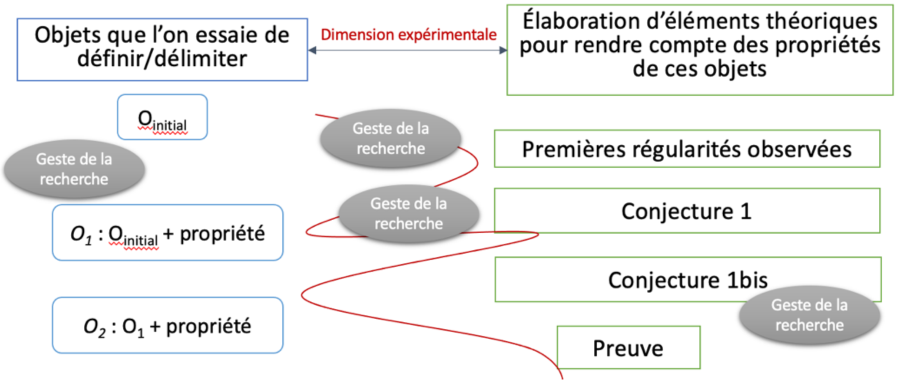

Figure 4. *– Grille d'analyse du processus d'élaboration de preuve combinant les deux outils : la dimension expérimentale et les gestes de la recherche*

4. Mise à l'épreuve de la grille d'analyse

Le corpus analysé est constitué d'un extrait vidéo de la recherche menée par un chercheur au tableau noir et d'un extrait vidéo de la recherche menée par un élève de classe préparatoire sur une feuille. Le recueil de données s'est effectué sous la forme d'un entretien semi-guidé individuel filmé, selon le déroulement décrit page 12 ci-dessus (les conjectures proposées sont les conjectures 1, 2 et 3, proposées dans trois phases successives). Pendant les différentes phases de recherche, nous avons parfois interagi avec le chercheur (respectivement l'étudiant), en posant des questions, reformulant ses propositions ou en lui confirmant qu'un nombre était bien parfait ou abondant.

Analyse de la recherche du chercheur

L'extrait soumis à l'analyse des participant·es au TD concerne la première phase de la recherche, c'est-à-dire l'exploration et l'appropriation des définitions de nombres abondants et parfaits. Le chercheur cherche à se faire une représentation de ces nombres en commençant à les étudier. Il procède de manière structurée, avec un crible pour les nombres de 1 à 12. L'étude de chaque nombre l'amène à formuler des conjectures et parfois à les prouver (Figure 5).

La démarche de recherche du chercheur est de type expérimental, il commence par manipuler les objets mathématiques en jeu (nombres, nombres abondants, nombres parfaits) pour essayer d'en dégager des propriétés. Le premier geste de la recherche qu'il effectue c'est de construire des exemples de nombres parfaits et / ou abondants en considérant les entiers un par un (1 et ses diviseurs, 2 et ses diviseurs, *etc.*). Rapidement, il questionne ces exemples, c'est-à-dire qu'il cherche à les mettre en relation entre eux pour en extraire des régularités ou des généralisations. Cela le conduit à formuler une première conjecture : les nombres premiers ne sont ni parfaits ni abondants. Ce résultat lui paraissant assez évident, il ne cherche pas à le prouver. Puis il continue son exploration des exemples, trouve un premier nombre parfait (6) puis s'arrête sur les puissances de 2 (via 8) et formule une seconde conjecture : les puissances de 2 ne sont ni des nombres parfaits ni des nombres abondants. Ici, il cherche à prouver cette conjecture. Il utilise alors un autre geste de la recherche, celui de désigner les objets. Il désigne les puissances de 2 par 2^n et leurs diviseurs par 2^i pour pouvoir opérer sur ces nombres, c'est-à-dire faire la somme des diviseurs et la comparer à 2^n. Une fois ce résultat prouvé, il fait un bilan puis continue l'exploration des exemples et formule une nouvelle conjecture : les nombres parfaits et abondants ne sont pas une puissance d'un nombre premier. Il élabore ensuite la preuve de cette conjecture, en s'appuyant sur le même geste que dans la preuve précédente, désigner des objets. Il désigne ainsi les puissances d'un nombre premier par p^n (p premier) et leurs diviseurs par p^i pour en faire la somme et la comparer à $2p^n$. Nous pouvons ici identifier un nouveau geste de la recherche : dérouler les définitions (au sens de Weber et Alcock (2004) comme mentionné p.5). Ce geste est d'ordre syntaxique mais émerge d'un travail sémantique. Ensuite, il termine cette phase de recherche en se donnant une caractéristique des nombres parfaits : « c'est le nombre de diviseurs mais aussi peut-être la variété des diviseurs » qui lui semble suffisante pour commencer à chercher les conjectures proposées ensuite.

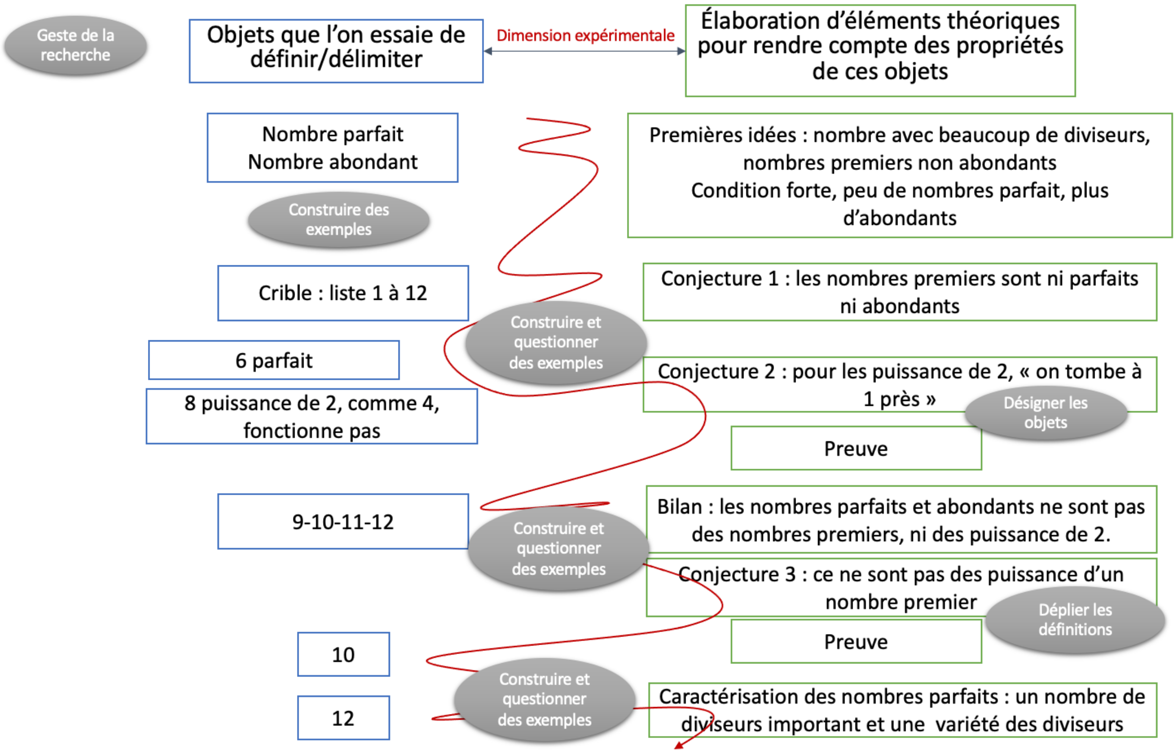

Figure 5. *– Analyse du processus d'élaboration de preuve du chercheur*

Analyse de la recherche de l'étudiant

L'extrait soumis à l'analyse des participant·es au TD concerne la première phase de la recherche (l'exploration et l'appropriation des définitions de nombres abondants et parfaits), ainsi que la seconde phase de la recherche, c'est-à-dire la recherche des conjectures 1 et 2. L'étudiant commence par s'approprier les définitions en cherchant des exemples de nombres abondants et parfaits. Pour cela, il procède de manière structurée, avec l'étude des nombres de 1 à 12.
La démarche de recherche de l'étudiant est alors de type expérimental (Figure 6), il commence par manipuler les objets mathématiques en jeu (nombres, nombres abondants, nombres parfaits) pour essayer d'en dégager des propriétés. Le premier geste de la recherche qu'il effectue c'est de construire des exemples de nombres parfaits et/ou abondants en considérant les entiers un par un. Il trouver ainsi que 6 est un nombre parfait et 12 un nombre abondant. En construisant ces exemples, il formule rapidement une première conjecture : les nombres premiers ne sont ni parfaits ni abondants. Ce résultat lui paraissant assez évident, il ne cherche pas à le prouver. Il cherche ensuite un autre nombre abondant, il propose 100 et montre rapidement qu'il est abondant. Cet exemple semble jouer le rôle d'une expérience cruciale (Balacheff, 1987) pour l'étudiant, pour se convaincre de sa compréhension des définitions et de sa première impression : « il n'y en a pas beaucoup » et « il faut beaucoup de diviseurs ».

Suite à l'étude des définitions, l'étudiant cherche à prouver la conjecture 1 (Figure 3). Il donne rapidement un contre-exemple (100) pour démontrer qu'un entier strictement positif abondant n'est pas nécessairement un multiple de 6. Il cherche ensuite un multiple de 6 non abondant et trouve 6. La preuve de cette conjecture s'appuie donc sur son exploration préalable des exemples. Suite à une question de notre part, il regarde si 12 et 18 - deux multiples de 6 (différents de 6) - sont abondants ou pas et il formule une nouvelle conjecture : « tout multiple de 6 sauf 6 est abondant ». Il ne cherche pas à la prouver mais donne l'argument suivant, utilisé pour 18 : « il y a tous les diviseurs de 6 et lui-même ». La seconde conjecture lui est ensuite présentée comme une généralisation de cette conjecture (Figure 3). L'étudiant énonce qu'il pense que la conjecture est vraie et propose l'argument suivant : « il y aura les diviseurs de *n* et *k* fois les diviseurs de *n*, pour ceux qui ne sont pas déjà comptés (i.e. dans les diviseurs de *n*) ». Pour vérifier cet argument, il effectue un geste de la recherche, un contrôle local, en revenant à l'étude d'un exemple : « pour 12, on aura 3 mais aussi 2×3 ». Il explique ainsi que pour $n = 6$ et $k = 2$, la liste des diviseurs de 12 s'obtient par la réunion de la liste des diviseurs de 6 et deux fois la liste des diviseurs de 6 non comptés. En effet, certains nombres peuvent se retrouver dans les deux listes, comme 6, qui est un diviseur de 6 et 2 fois un diviseur de 6 (car il est égal à 2×3 et 3 est un diviseur de 6). Mais il mentionne que certains nombres ne sont que dans l'une des deux listes, comme 12 (qui est égal à 2×6) ou 4 (qui est égal à 2×2). Il revient alors au cas général et essaie d'écrire une preuve. Il effectue alors deux autres gestes de la recherche : il désigne les diviseurs de n par $\sigma(n)$ et déroule la définition d'un nombre parfait en écrivant $\sigma(n) = 2n$. Il cherche ensuite à écrire $\sigma(kn)$. Il propose alors de faire un raisonnement par récurrence sur *k* et essaie de l'initialiser pour $k = 2$. Il cherche alors à démontrer que $\sigma(2n)$ est supérieur strict à $2n$. Il a $\sigma(2n) \geq \sigma(2) + 2n$. Il cherche donc un autre diviseur. Suite à une discussion avec nous, il parvient à passer de l'identification des diviseurs de kn pour trouver leur nombre à l'identification (directe) du nombre (minimal) des diviseurs de kn : c'est *k* fois la liste des diviseurs de *n* à laquelle on ajoute 1. Il écrit alors $\sigma(2kn) \geq k\sigma(n) + 1 > 2kn$.

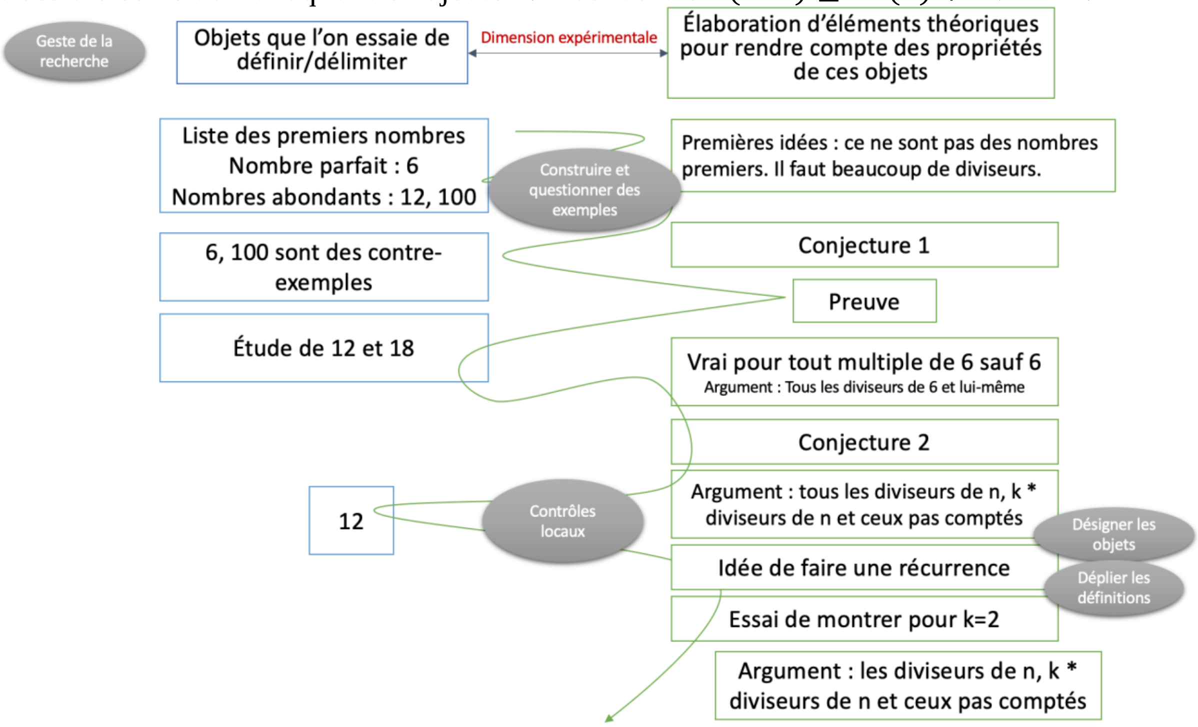

Figure 6. *– Analyse du processus d'élaboration de preuve de l'étudiant*

L'analyse de ces deux processus de recherche met en évidence, tant chez le chercheur que chez l'étudiant, que les moments d'élaboration de preuve prennent ici naissance dans l'exploration et le questionnement des exemples. Ce geste de la recherche déclenche les allers et retours entre les manipulations d'objets mathématiques en jeu et l'élaboration d'éléments théoriques qui conduisent ensuite à la formulation de conjectures. Ce travail prend essentiellement appui sur la dimension sémantique des objets mathématiques dont ils cherchent à en comprendre le sens. L'articulation avec leur dimension syntaxique est rendue possible par l'utilisation de deux autres gestes (désigner les objets et dérouler les définitions) lors de l'écriture de la preuve des conjectures. Notons également que ce qui différencie les processus de recherche du chercheur et de l'étudiant est le nombre d'allers et retours dans la mise en œuvre d'une dimension expérimentale d'une part, et le recours au geste de contrôle local d'autre part. En effet, le chercheur fait davantage d'allers et retours entre les manipulations d'objets et les élaborations théoriques, notamment grâce au questionnement systématique des exemples qu'il étudie. Cela est présent dans la recherche de l'étudiant mais moins fréquent. Un geste de la recherche est effectué par l'étudiant et pas chez le chercheur, celui d'effectuer des contrôles locaux. L'étudiant semble en avoir besoin pour contrôler ses élaborations théoriques par un retour sur les objets. Il y a là le recours à la dimension sémantique pour contrôler le travail syntaxique.

Ces analyses mettent en évidence l'apport des outils « dimension expérimentale » et « gestes de la recherche » pour décrire et analyser les processus de recherche et d'élaboration de preuves. Ils permettent une analyse fine de l'apport d'articuler les dimensions syntaxique et sémantique dans l'élaboration de preuve, tant chez le chercheur que chez l'étudiant, même si leurs processus sont différents.

APPREHENDER L'OBJET « TEXTE DE DEMONSTRATION »

Lors de la troisième séance du TD nous avons étudié davantage le « produit » : la formulation des preuves. Après une présentation de la façon dont on peut analyser les formulations de preuves et les usages classiques de la langue dans ce contexte, nous retrouverons des préoccupations proches des précédentes en analysant d'une part des formulations de mathématiciens et mathématiciennes, et d'autre part des formulations d'élèves.

1. Formulation, formuler

L'apprentissage de la preuve en mathématiques passe aussi par l'apprentissage des usages en matière de rédaction et de formulation.

L'activité langagière est à la fois individuelle et sociale. Fondamentalement elle est individuelle : lors d'une production orale, une personne produit des bruits, des gestes avec son corps, mobilise des ressources cognitives. On ne peut séparer agir, parler et penser (par exemple Rebière, 2013).

Cette activité individuelle ne prend sens que socialement, il y a un auditoire (éventuellement potentiel ou imaginé), le sens attribué aux sons est partagé par un groupe social (langue commune, usages de la langue), il peut bien sûr ne pas être partagé, mais ce fait engendrera alors des réactions de l'auditoire et du locuteur ou de la locutrice, des interactions. De façon générale les réactions des acteurs et des actrices en situation participent également à la construction du sens.

Les activités sociales se stabilisent pour chaque groupe social en pratiques sociales, usages habituels en lente évolution. On se rend compte de ces pratiques en découvrant un groupe constitué : on peut par exemple imaginer un jeune chercheur venant pour la première fois à l'école d'été de didactique, il va entrer à la « cantine » pour son premier repas, certaines tables sont déjà en partie occupées, est-il attendu qu'il complète une telle table ? Ou au contraire doit-il s'installer sur une table encore vide ? Doit-il s'asseoir avec des « jeunes » ? Ou bien peut-il s'asseoir avec tel chercheur ou telle chercheuse expérimenté·e ? Est-ce sans importance pour les personnes concernées ? Ce type d'usage peut être non-dit (parfois même non pensé), ils sont aussi parfois explicites. Les groupes sociaux stabilisent ainsi leurs pratiques, il en va de même des pratiques langagières (le terme « jeune » ci-dessus a ainsi un sens très particulier dans cette communauté de recherche, il n'évoque pas un âge particulier, ou alors l'âge dans la recherche). On parle ainsi des pratiques langagières des mathématiciens et mathématiciennes.

De par ce caractère à la fois individuel, cognitif et social, l'activité langagière est donc une composante centrale des activités d'enseignement et d'apprentissage. Les mathématiciens et les mathématiciennes disent des mathématiques oralement ou par écrit, ils et elles sont amené·es à évoquer divers objets mathématiques (conjectures, théorèmes, définition, preuves, *etc.*), nous allons nous centrer ici sur l'écriture de preuves. Nous l'avons vu dans les parties précédentes de ce TD (et dans les autres TD et cours de cette École d'Été), l'apprentissage de l'activité de preuve comporte énormément de dimensions, y compris cette entrée dans certaines pratiques langagières, cette intégration des façons d'écrire une démonstration (quels mots utilise-t-on ? Quelles expressions ? Quelle formulation est acceptable ? Ou originale ? Quelle formulation ne sera pas recevable ? *etc.*).

L'analyse de la dimension langagière de l'activité de preuve, et notamment des formulations des preuves, prend de cette façon toute son importance. Nous allons nous y pencher à partir de deux questions : comment décrire les pratiques langagières des mathématiciens et des mathématiciennes ? Comment les élèves s'approprient-ils ces pratiques ?

2. Analyse logique, déduction naturelle de Gentzen

Une première question concerne donc les pratiques langagières des mathématiciens et des mathématiciennes (en termes de preuve ici). Comment caractériser le fait qu'on a affaire à un texte de démonstration ? Quels sont les usages de la langue française dans une démonstration mathématique ?

Nous allons décrire un type d'analyse particulier : les analyses logiques. L'idée principale est de comparer les formulations produites, le texte, à un référent logique formel permettant de prendre une certaine distance avec la langue utilisée. Plusieurs chercheurs et chercheuses en didactique des mathématiques en France travaillent avec des analyses de ce type (Barrier, 2016 ; Durand Guerrier & Arsac, 2003 ; Hache, 2015 ; Hache & Mesnil, 2015). La comparaison avec un référent formel permet et facilite une distanciation entre le texte et une description du contenu évoqué par le texte.

Pour analyser les formulations de théorèmes, il est par exemple courant d'utiliser la logique des prédicats (exemple de référence pour la phrase « les nombres divisibles par 4 sont pairs » : $\forall x\ [4|x \Rightarrow x \text{ est pair}]$).

Nous allons ici utiliser la déduction naturelle de Gentzen[5. Elle s'appuie sur la logique des prédicats]. Les preuves sont décomposées en une succession de pas de déduction. Nous prenons ci-dessous trois exemples.

$$\frac{P\ ,\ Q}{P \wedge Q}\,/\wedge$$

Figure 7.

$$\frac{P \vee Q \quad \begin{bmatrix} P \\ \vdots \\ R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q \\ \vdots \\ R \end{bmatrix}}{R}\,\vee/$$

Figure 8.

$$\frac{\begin{matrix} \circledcirc a \\ \vdots \\ P(a) \end{matrix}}{\forall x\, P(x)}\,/\forall$$

Figure 9.

La Figure 7 représente le pas de déduction décrivant la preuve d'une conjonction. Il a deux niveaux séparés par une ligne horizontale, la partie haute énonce « ce que je sais prouver avant d'utiliser la règle », la partie basse énonce ce que cette règle permet de prouver (le petit symbole sur la droite rappelle juste que ce pas de déduction correspond à « l'introduction », la preuve ici, d'une conjonction).

[5] Pour une présentation détaillée se reporter à (Hache & Mesnil, 2015).

La preuve elle-même est donc un arbre. Cet arbre est en général difficile à représenter car très vite il occupe une très grande surface. En référence à la première partie, la formulation obtenue sous forme d'arbre est plutôt syntaxique, mais le signe a été conçu pour porter le sens.

Un autre exemple de règle, Figure 8, correspond à une preuve à partir d'un énoncé sous forme de disjonction ($P \vee Q$). C'est un pas de déduction appelé couramment « disjonction des cas » : on sait que $P \vee Q$ est vraie, si on suppose temporairement que P est vrai on arrive à montrer R, si on suppose temporairement Q vrai on sait également montrer R, on déduit de ces trois éléments que R est vrai. Le caractère temporaire des preuves intermédiaires est symbolisé par les crochets (le petit symbole à droite rappelle que cette ligne horizontale correspond à la mise en œuvre d'une règle d'élimination d'une disjonction).

Enfin, nous indiquons en Figure 9 une troisième présentation de pas de déduction : la preuve d'une propriété universellement quantifiée (beaucoup de propriétés courantes sont de ce type, celle servant de support à l'exposé y compris : « *quel que soit n,* si n parfait alors, quel que soit k, kn abondant »). Cette preuve nécessite l'introduction d'une variable « fraîche » (non encore utilisée dans le contexte, on dit par exemple « Soient k et n deux entiers… »). Nous avons ajouté dans la notation de Gentzen l'introduction de cette variable (deux petits cercles concentriques) et l'endroit dans l'arbre de la preuve où cette variable est utilisée (pointillé entre son introduction et la conclusion du pas correspondant). On peut noter que, dans la conclusion $\forall x\, P(x)$, la variable x est muette. Même si c'est ce qui est fait en général dans la rédaction d'un tel pas de déduction, il n'y a aucune raison d'écrire la conclusion $\forall a\, P(a)$, ce qui peut même compliquer la compréhension du statut de la variable a. Nous verrons que la conclusion d'un tel pas de déduction n'est souvent simplement pas formulée.

Le nombre de connecteurs dans la logique des prédicats est limité (conjonction, disjonction, implication, négation… disjonction et négation peuvent même suffire, les deux autres pouvant se construire à partir de ces deux-là), le nombre de quantificateurs également (existentiel, universel). Le nombre de pas de déduction élémentaires de la déduction naturelle est donc lui aussi limité (deux pas par connecteur ou quantificateur).

Avant de donner un exemple, nous allons présenter le pas de déduction correspondant à la preuve d'une implication. Les implications que nous rencontrons dans l'activité mathématique sont toujours quantifiées universellement, aussi plutôt que de considérer l'implication $P \Rightarrow Q$ (considérée par Gentzen par exemple), nous nous intéressons à l'implication quantifiée : $\forall x\, [P(x) \Rightarrow Q(x)]$.

$$\dfrac{\circledcirc a \quad \begin{bmatrix} P(a) \\ \vdots \\ Q(a) \end{bmatrix}}{\forall x\ P(x) \Rightarrow Q(x)}\ {\scriptstyle /\forall \Rightarrow}$$

Figure 10.

Le pas de déduction est représenté ci-contre (Figure 10). Tous les éléments techniques ont été introduits ci-dessus : pour établir une preuve de $\forall x\, [P(x) \Rightarrow Q(x)]$ on introduit une variable a et on suppose temporairement la propriété $P(a)$, si on a une preuve de $Q(a)$ sous cette hypothèse, alors on a une preuve de $\forall x\, [P(x) \Rightarrow Q(x)]$.

Nous allons maintenant nous intéresser à la façon de représenter avec les éléments introduits la trame de preuve de la Figure 11a. Nous nous limiterons dans ce texte à une partie de la preuve. Globalement cette preuve est la preuve d'une implication (preuve de $\forall n$ [n parfait $\Rightarrow \forall k>1\ kn$ abondant]). Une première ébauche de l'arbre de la preuve sera donc celle de la Figure 11b.

Conjecture 2 : Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, si n est parfait, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, si $k > 1$ alors kn est abondant.

Trame d'une preuve :
Soit n un entier, on suppose n parfait, on liste ses diviseurs d_i. On a $\Sigma d_i = 2n$.

Soit k un entier, parmi les diviseurs de kn il y a 1 et tous les kd_i. Tous ces nombres sont distincts.

La somme des diviseurs de kn est plus grande que $1 + \Sigma\, kd_i = 1 + k\,\Sigma d_i = 1 + k\,2n > 2\,kn$. CQFD

Figure 11a.

$$\circledcirc a \quad \dfrac{\left[\begin{array}{c} a \text{ parfait} \\ \vdots \\ \forall k > 1 \;\; ka \text{ abondant} \end{array}\right]}{\forall n \;\; [n \text{ parfait} \Rightarrow \forall k > 1 \;\; kn \text{ abondant}]}\;/$$

Figure 11b.

$$\circledcirc b \quad \dfrac{\left[\begin{array}{c} b > 1 \\ \vdots \\ ba \text{ abondant} \end{array}\right]}{\forall k > 1 \;\; ka \text{ abondant}}\;/\forall \Rightarrow$$

Figure 11c.

$$\circledcirc a \quad \dfrac{\left[\begin{array}{c} a \text{ parfait} \\ \circledcirc b \quad \dfrac{\left[\begin{array}{c} b > 1 \\ \vdots \\ ba \text{ abondant} \end{array}\right]}{\forall k > 1 \;\; ka \text{ abondant}}\;/\forall \Rightarrow \end{array}\right]}{\forall n \;\; [n \text{ parfait} \Rightarrow \forall k > 1 \;\; kn \text{ abondant}]}\;/\forall$$

Figure 11d.

La partie de l'arbre représentée dans la Figure 11b par un pointillé vertical est une preuve de « $\forall k$>1 *ka* abondant » qui est une abréviation de « $\forall k$ [k>1 $\Rightarrow$ *ka* abondant] » (2^{e} implication universellement quantifiée). Cette partie sera représentée par la Figure 11c.

On arrive ainsi à la Figure 11d. Cette figure ne représente qu'une petite partie de la preuve, mais faute de place nous nous en tiendrons à cette partie. Nous allons rechercher dans les preuves rédigées les formulations relatives en nous centrant sur deux parties (en général les premiers mots de la preuve et les derniers) :

- Premier focus : introductions de la variable *a*, hypothèse temporaire « *a* parfait », introduction de la variable *b*, hypothèse temporaire « *b* > 1 » *;*
- Second focus : affirmation du fait que la propriété « *ba* abondant » a été prouvée, déduction de $\forall k$>1 *kn* abondant (conclusion du pas de déduction représenté par la Figure 11c), déduction de $\forall n$ [*n* parfait $\Rightarrow$ $\forall k$>1 *kn* abondant] (conclusion du pas de déduction représenté par la Figure 11b), et ainsi conclusion de la preuve.

Pendant l'atelier, les participants et les participantes ont travaillé sur les trois preuves de mathématiciens ou mathématiciennes, quatre preuves d'étudiants ou étudiantes volontaires parmi ceux de première année de licence de chimie, et trois copies d'élèves de terminale (trois copies sélectionnées sur une quinzaine rédigée lors d'une séance de travail spécifique avec l'enseignante de la classe, une sélection avait été faite pour les preuves de terminale, car peu d'élèves avait réussi dans le temps imparti à produire une preuve exploitable).

Notre méthode consiste donc à mettre en regard la description obtenue à l'aide de la déduction naturelle (Figure 11d) et les formulations correspondantes choisies par les personnes interrogées.

3. Textes de mathématiciens et mathématiciennes (M)

Concernant la gestion des variables, une première remarque est valable pour tous les textes M : le nom des variables est systématiquement celui suggéré par la consigne. Toutes les preuves parlent d'un nombre *n* (le nombre qui est parfait), d'un nombre *k* (on s'interroge sur les propriétés de *kn*). Il n'y a pas de distinction entre le nom des variables (muettes ici) de la consigne, les variables fraîches introduites et les variables muettes utilisées pour énoncer les propriétés évoquées dans la preuve. On sait que c'est un point délicat, il est souvent évoqué lors de l'apprentissage de la preuve par récurrence par exemple (Grenier *et al.*, 2016).

Dans tous les textes M, la première apparition d'une variable correspond à une présentation (l'auteur·e annonce qu'il ou elle introduit une variable). Trois précisions :

- Les premiers mots de ces textes correspondent à une telle présentation, sauf pour un des textes qui commence par une phrase qui relève du commentaire explicatif « La propriété d'être abondant (ou parfait) se lit sur les diviseurs du nombre » avant de présenter les variables n et k. Quand ils et elles introduisent la variable n ils et elles utilisent la formulation « Soit n ».
- Les variables n et k peuvent être introduites en même temps (exemple « Soit n un nombre parfait, $k\in\mathbb{N}^*$», « Soit n, $k\in\mathbb{N}^*$ ») ou non (k étant alors introduit au moment de la preuve où sa présence est nécessaire), entre les deux introductions les rédacteurs et les rédactrices évoquent alors des propriétés connues de n et de ses diviseurs (exemple : « Soit n un nombre parfait, la somme de ses diviseurs est $2n$ (que l'on note S). Soit $k \geq 2$ »),
- Les quatre textes M formulent dans la même expression la présentation de la variable (début de la preuve d'une propriété universellement quantifiée) et la propriété liée (supposition de la prémisse pour la preuve de l'implication). Exemple : « Soit k un entier strictement supérieur à 1 » (les citations précédentes illustrent aussi ce point).

Concernant la phase de conclusion des deux pas de déduction considérés, dans les quatre textes M, un calcul est fait pour montrer que la somme des diviseurs de kn est strictement supérieure à $2kn$. Après ce calcul, une seule phrase conclue la preuve : quatre fois le texte se termine par l'affirmation que kn est abondant (« ce qui montre que l'entier kn est abondant », « On en déduit que kn est abondant », et « donc kn abondant » qui apparaît deux fois).

On retrouve là un phénomène classique : les conclusions des pas de déduction liés aux implications (et aux quantifications liées) ne sont pas explicitement énoncées. C'est au lecteur ou à la lectrice de comprendre que la preuve de « kn abondant » permet de conclure à la preuve de l'implication « $\forall k$ [k>1 $\Rightarrow$ kn abondant] » (Figure 11b), et que cette dernière suffit à prouver la conjecture (Figure 11c).

Ce point concernant l'implicite des conclusions est très récurrent dans les analyses de formulations de preuve.

Ces constats rejoignent des résultats plus généraux sur l'écriture des preuves par les mathématiciens et les mathématiciennes : les formulations sont denses, souvent plusieurs éléments logiques sont agglomérés dans une seule formulation, c'est au lecteur ou à la lectrice de « déplier » ces formulations (Chesnais, 2018).

On retrouve également l'implicite connu relatif à la quantification universelle des implications : la quantification est souvent non-dite dans la formulation d'une implication (la formulation suivante de la conjecture 2 serait tout à fait acceptée dans un contexte arithmétique : « Si n est parfait, alors, si $k > 1$, kn est abondant »), elle l'est aussi dans la formulation de la preuve, ou tout au moins dans la formulation de la conclusion : dans les preuves observées ici, la seule trace du pas de déduction concernant les quantifications universelles présentes dans la conjecture est la présentation des variables en début de preuve.

4. Analyses de textes de preuves d'élèves (E et T)

Le statut des variables est bien moins clair dans les textes d'élèves (E et T) que dans les textes M. Nous allons pointer ici deux phénomènes :

- Les élèves peuvent considérer que l'utilisation d'une variable (même muette) dans la consigne vaut présentation de variable dans la preuve. Cela peut être lié à la propriété à prouver (formulée dans la consigne) : un des textes E commence ainsi par « On pose $\sum$ diviseurs de $n = D$ » sans présenter n (de même, la première apparition de la variable k dans ce texte vient deux lignes en dessous sans préalable : « $k\times 2n = k\times D$ »). Cela peut également être lié à une propriété énoncée par l'élève : un texte commence ainsi par « Nous savons que $\forall n\in\mathbb{N}$, si (…) alors n est parfait » (la variable n est muette), cette formulation de propriété est suivie de la formulation d'une autre propriété qui utilise la variable n non quantifiée.[6]
- De même, le fait que la consigne demande de prouver une implication semble pouvoir sous-entendre pour certains élèves que la prémisse est vraie, ainsi un texte T commence par « Soit $(k,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, tout d'abord on sait que », ce début de phrase est suivi par des affirmations sur les diviseurs de n et kn, la dernière propriété ainsi énoncée est justifiée par « car n est parfait » (affirmation dont la justification ne semble pouvoir être reliée à ce moment-là qu'à l'énoncé de la consigne). Un texte T précise « Montrons que si n est parfait, alors kn est abondant tel que $k\geq 2$ », l'élève utilise juste en dessous le fait que la somme des diviseurs de n vaut $2n$.

Certaines formulations montrent également une grande confusion dans cette gestion des variables et des propriétés que l'on suppose vraies. Par exemple, un texte T commence par « $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall k\in[[2,+\infty[[$, Soit n un entier parfait ». Comment interpréter ces quantifications de n et k ? Les variables muettes utilisées dans la formulation d'une propriété peuvent être utilisées par la suite (en portant avec elles tout ou partie des propriétés énoncées). On perçoit également des difficultés quant au statut des propriétés formulées : une propriété qui apparaît dans la prémisse d'une implication à prouver, peut être considérée comme vraie sans commentaire.

Concernant les conclusions des deux pas de déduction considérés (la fin des textes), les choix sont plus variés que dans les textes M. On retrouve plusieurs fois l'enchaînement du calcul montrant que la somme des diviseurs de kn est strictement supérieure à $2kn$ avec la phrase « donc kn est abondant » qui termine le texte. Mais on peut également repérer plusieurs autres situations : un texte passe du calcul précédent à la propriété à prouver « Ainsi $\forall n\in\mathbb{N}^*$, si n est parfait, alors $\forall k\in\mathbb{N}_{k\geq 2}$, kn est abondant », un texte qui se termine par le calcul suivi de « CQFD ». Globalement on retrouve bien ici les usages constatés dans les textes M : le détail des conclusions intermédiaires concernant les implications et les quantifications n'est pas donné (tout juste trouve-t-on une allusion dans certaines productions).

CONCLUSION

Reprenons la définition de démonstration de Balacheff (1987, p.148) : « suite d'énoncés organisée suivant des règles déterminées : un énoncé est connu comme étant vrai, ou bien est déduit de ceux qui le précèdent à l'aide d'une règle de déduction prise dans un ensemble de règles bien défini. ». Une telle définition pourrait amener à penser que la production de preuve peut se faire uniquement de façon syntaxique, les règles permettraient de manipuler les énoncés sans se poser la question de leur signification. L'article de Weber et Alcock (2004) présenté dans le TD montre bien qu'une telle démarche a rapidement des limites, et que ce n'est pas celle mobilisée par les mathématiciens et des mathématiciennes. Ce n'est pas non plus la démarche mise en œuvre par les participant·es, ni la démarche que nous souhaitons enseigner,

[6] Ces confusions de statuts peuvent engendrer des difficultés de lecture et de compréhension. Un texte E utilise ainsi la lettre k comme l'indice d'une notation $\sum$, plus loin comme indice maximal de la suite des diviseurs (d_1, d_2, … d_k), et comme nombre par lequel on multiplie le nombre n (parfait).

les travaux de Gandit (2011) ayant bien montré les risques d'une approche trop formelle de l'enseignement de la démonstration. L'interprétation des énoncés, la manipulation des objets en jeu, génériques ou singuliers, sont essentiels à la fois pour orienter et contrôler la preuve. Il est cependant parfois confortable d'agir en suivant des « règles » qui dépendent de la forme des énoncés et pas de leur sens : par exemple, confronté·es à la démonstration d'un énoncé de la forme « pour tout x de E, $P[x] \Rightarrow Q[x]$ », il est possible d'écrire « soit x dans E, supposons $P[x]$ » avant de se demander ce que signifie $P[x]$. Il s'agit alors d'un geste syntaxique, mais qui n'est pertinent que s'il ouvre des possibles représentations sur lesquelles on peut travailler.

Nous avons montré que ce qui est fécond pour la production de preuve c'est bien l'articulation des dimensions syntaxique et sémantique. En étudiant les gestes de recherche, nous avons pu analyser cette articulation à un niveau plus local, notamment lors du processus de recherche. En nous référant ensuite à une théorie de la démonstration comme la déduction naturelle, nous avons analysé les démonstrations comme produit, en décrivant certains gestes en lien avec la manipulation du langage, et avec les pratiques langagières.

Cette distinction des dimensions syntaxique et sémantique permet aussi d'enrichir la réflexion sur l'enseignement de la démonstration, et amène de nouvelles perspectives de recherche autour de la question suivante : comment amener les élèves et les étudiant·es à acquérir certains gestes, dont la maîtrise permettrait une approche parfois syntaxique, tout en ayant recours parfois à une démarche plus sémantique pour faire avancer les idées ?

RÉFÉRENCES

ALCOCK, L., INGLIS, M. (2008). Doctoral students use of examples in evaluating and proving conjectures. *Educational Studies in Mathematics*, *69*, 111-129.

ARISTOTE, (2007). *Organon. iii. Premiers Analytiques* (Traduit par J.Tricot). Vrin.

BAILLY, F., LONGO, G. (2003). *Incomplétude et incertitude en Mathématiques et en Physique*. Consulté le 29 octobre 2022 sur http://www.di.ens.fr/users/longo/files/PhilosophyAndCognition/incompl-incert.pdf

BALACHEFF, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics, 18*, 147–176.

BARRIER, T. (2016). Les exemples dans l'élaboration des démonstrations mathématiques : une approche sémantique et dialogique. *Recherches en Éducation, 27*, 94-117.

BARRIER, T, DURAND-GUERRIER, V. ET MESNIL, Z. (2019). L'analyse logique comme outil pour les études didactiques en mathématiques. *Éducation et Didactique, 13.1*, 61-81.

BKOUCHE, R. (1982). Les mathématiques comme science expérimentale. *Bulletin APMEP, 333*, 306-324.

BKOUCHE, R. (2008). Du caractère expérimental des mathématiques. *Repères IREM*, *70*, 33-76.

CASSOU-NOGUES, P. (2001). *De l'expérience mathématique. Essai sur la philosophie des sciences de J. Cavaillès*. Vrin.

CAVAILLES, J. (1938). *Méthode axiomatique et Formalisme*. Hermann.

CAVAILLES, J. (1994). *Œuvres complètes de philosophie des sciences*. Hermann.

CHATELET, G. (1993). *Les enjeux du mobile. Mathématique, physique, philosophie*. Seuil.

CHESNAIS A. (2018). *Un point de vue de didactique des mathématiques sur les inégalités scolaires et le rôle du langage dans l'apprentissage et l'enseignement*. Note de synthèse HdR. Université de Montpellier.

CHEVALLARD, Y. (1991). Le caractère expérimental de l'activité mathématique. *Petit x, 30*, 5-15.

DELOUSTAL-JORRAND, V., GANDIT, M., MESNIL, Z., DA RONCH, M. (2020). Utilisation de l'articulation entre les points de vue syntaxique et sémantique dans l'analyse d'un cours sur le raisonnement. Dans T. HAUSBERGER, M. BOSCH, ET F. CHELLOUGHI (eds.), *Proceedings of the Third Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics, INDRUM 2020, 12-19 September 2020. Bizerte, Tunisia* (pp. 378-387).University of Carthage and INDRUM.

DE VILLIERS, M. (1990). The role and function of proof in mathematics, *Pythagoras, 24*, 17–24.

DIAS, T. (2008). *La dimension expérimentale des mathématiques : un levier pour l'enseignement et l'apprentissage*. Thèse de doctorat, Université Claude Bernard Lyon 1.

DURAND-GUERRIER, V. (1996). *Logique et raisonnement mathématique. Défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication.* Thèse de doctorat, Université Claude Bernard Lyon 1.

DURAND-GUERRIER, V. (2005). *Recherches sur l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique*. Note de synthèse, Université Claude Bernard Lyon 1.

DURAND-GUERRIER, V. (2010). La dimension expérimentale en mathématiques : Enjeux épistémologiques et didactiques. Dans *Expérimenter des problèmes de recherche innovants en mathématiques à l'école*. INRP.

DURAND-GUERRIER, V., ARSAC, G. (2003). Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Spécificité de l'analyse. Quelles implications didactiques ? *Recherches en didactique des mathématiques, 23(3),* 295-342.

DURAND-GUERRIER, V., MESNIL, Z. (2022). Quelques pistes pour améliorer l'usage de l'implication mathématique en début d'université, *EpiDEMES, 1*.

GANDIT, M. (2011). Etude épistémologique et didactique de la preuve en mathématiques et de son enseignement. Une ingénierie de formation. Dans M. ABBOUD-BLANCHARD, A. FLÜCKIGER (eds.) *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques, 2010* (pp. 175-197). IREM de Paris.

GARDES, M.-L. (2013). *Étude de processus de recherche de chercheurs, élèves et étudiants, engagés dans la recherche d'un problème non résolu en théorie des nombres*. Thèse de doctorat, Université de Lyon.

GARDES, M.-L. (2017). Une étude d'épistémologie contemporaine sur l'activité de recherche mathématique de chercheurs : intérêt pour l'étude didactique. Dans M. BÄCHOLD, V. DURAND-GUERRIER, V. MUNIER, *Epistémologie et Didactique, Synthèses et études de cas en mathématiques et en sciences expérimentales* (pp.177-192). Presses universitaires de Franche-Comté.

GARDES, M.-L. (2018). Démarches d'investigation et recherche de problèmes. Dans G. ALDON, *Le Rallye mathématique, un jeu très sérieux !* (pp. 73-96). Canopé Editions.

GIROUD, N. (2011). *Étude de la démarche expérimentale dans les situations de recherche pour la classe.* Thèse de doctorat, Université Joseph Fourrier Grenoble.

GIUSTI, E. (2000). *La naissance des objets mathématiques*. Ellipses.

HACHE, C. (2015). Pratiques langagières des mathématiciens, une étude de cas avec « avec ». *Petit x, 97*, 27-43.

HACHE, C., MESNIL, Z. (2015) Pratiques Langagières et preuves. *Actes du 22e colloque de la CORFEM, Nîmes, juin 2015*. Adirem

HANNA, G. DE VILLIERS, M. (eds.) (2012). *Proof and proving in mathematics education.* Springer.

KOUKI, R. (2018). L'articulation des dimensions syntaxique et sémantique en algèbre du secondaire. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, *38(1)*, 43–78.

LACOMBE, D. (2007). Tout ce que vous avez toujours voulu savoir sur la logique et qu'on n'a jamais voulu vous révéler. Dans *Séminaire de l'IREM de Paris*. Vidéo en ligne. https://video.irem.univ-paris-diderot.fr/videos/watch/3cfc4823-71a2-4b78-b565-7b4e6199275b (consulté le 29 octobre 2022)

MARIOTTI, M., DURAND-GUERRIER, V., STYLIANIDES., G. (2018). Argumentation and proof. Dans T. DREYFUS, M. ARTIGUE, D. POTARI., S. PREDIGER, K. RUTHVEN (eds) *Developing research in mathematics education - twenty years of communication, cooperation and collaboration in Europe* (pp.75-89, 2018). Routledge.

PERRIN, D. (2007). L'expérimentation en mathématiques. *Petit x, 7*, 6-34.

REBIERE, M. (2013). S'intéresser au langage dans l'enseignement des mathématiques, pour quoi faire ? Présentation de quelques concepts développés par le groupe de didacticiens du français de Bordeaux, dans A. BRONNER et al. (2013) *Questionsvives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage*. La pensée Sauvage

SELDEN, A., SELDEN, J. (1995). Unpacking the logic of mathematical statements. *Educational Studies in Mathematics*, *29* (2), 123-151.

TALL, D., VINNER, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 151-169.

WEBER, K., ALCOCK, L. (2004). Semantic and syntactic proof productions. Educational Studies in Mathematics, 56, 209-234.