

# NOUVELLES PERSPECTIVES EN DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

## PREUVE, MODÉLISATION ET TECHNOLOGIES NUMÉRIQUES

XXI<sup>e</sup> école d'été de didactique des mathématiques  
SAINTE MARIE DE RÉ – DU 18 AU 24 OCTOBRE 2021

### Volume des ateliers

*Coordonné par*

Fabrice Vandebrouck, Fabien Emprin,  
Cécile Ouvrier-Bufferet et Laurent Vivier

*Avec la participation des membres du CSO*

Lalina Coulange  
Marie-Line Gardes  
Sébastien Jolivet  
Rahim Kouki  
Sara Presutti  
Avenilde Romo

## **Imprimé par l'IREM de Paris – Université de Paris**

Exemplaire **téléchargeable** sur notre site dans la section Publication

<https://irem.u-paris.fr/>

### **Coordonnées de l'IREM**

Pour venir à l'IREM (il est possible de consulter et d'acheter les publications sur place):

Université de Paris, Bâtiment Sophie-Germain,  
8 place Aurélie Nemours (sur l'avenue de France), huitième étage,  
75013 Paris 13ème arrondissement  
(métro 14 -Bibliothèque François Mitterrand ou tramway ligne T3a – Avenue de France )

### **Nous Contacter**

Pour téléphoner: 01 57 27 91 93

Pour écrire à l'IREM concernant les publications:

*par voie postale:*

**Locufier Nadine**  
**IREM de Paris – Case 7018**  
**Université Paris Diderot**  
**75205 Paris cedex 13**

*par voie électronique:*

**nlocufier@irem.univ-paris-diderot.fr**

La liste des publications de l'IREM est mise à jour sur notre site web :

**<https://irem.u-paris.fr/>** (en bas à gauche de la page d'accueil)

Pour rester informé:

inscription à la liste de diffusion de l'IREM de Paris également sur le site de l'IREM

**NOUVELLES PERSPECTIVES  
EN DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES  
PREUVE, MODÉLISATION ET TECHNOLOGIES NUMÉRIQUES**

*XXI<sup>e</sup> école d'été de didactique des mathématiques  
SAINTE MARIE DE RÉ – DU 18 AU 24 OCTOBRE 2021*

*Volume des ateliers*

*Coordonné par*

*Fabrice Vandebrouck, Fabien Emprin,  
Cécile Ouvrier-Bufferet et Laurent Vivier*

*Avec la participation des membres du CSO*

*Lalina Coulange*

*Marie-Line Gardes*

*Sébastien Jolivet*

*Rahim Kouki*

*Sara Presutti*

*Avenilde Romo*



## INTRODUCTION

Fabrice Vandebrouck\*, Fabien Emprin, Cécile Ouvrier-Bufferet, Laurent Vivier

Depuis quarante ans, la communauté française de chercheurs en didactique de mathématiques organise tous les deux ans une école d'été. Cet ouvrage constitue les actes de la 21<sup>ème</sup> école d'été de didactique des mathématiques, organisée par l'Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques (ARDM). L'école s'est tenue au camping Les Grenettes, à Sainte Marie de Ré, sur l'Ile de Ré, du 18 au 24 octobre 2021.

Le comité scientifique et d'organisation (CSO) était constitué de :

- Fabrice Vandebrouck, Université Paris Cité, Faculté des Sciences, UFR de Mathématiques et IREM de Paris, LDAR
- Lalina Coulange, Université de Bordeaux, INSPE d'Aquitaine, Lab E3D
- Fabien Emprin, Université de Reims Champagne Ardenne, CEREP, INSPE de l'académie de Reims, IREM de Reims
- Marie-Line Gardes, Haute Ecole Pédagogique du canton de Vaud, Lausanne
- Sébastien Jolivet, Université de Genève
- Rahim Kouki, IPEIM, Université Tunis El Manar
- Cécile Ouvrier-Bufferet, Université Paris-Est Créteil, INSPE de Créteil, LDAR
- Sara Presutti, Haute Ecole Pédagogique du canton de Vaud, Lausanne
- Avenilde Romo, Instituto Politécnico Nacional - CICATA, México
- Laurent Vivier, Université Paris Cité, Faculté des Sciences, UFR de Mathématiques et IREM de Paris, LDAR

L'école a regroupé, pendant 7 jours, 99 inscrits dont 83 de France, 5 de Suisse, 3 d'Espagne, 3 Tunisiens qui n'ont pas eu leur visa malgré toutes les démarches entreprises, 1 de Belgique, 1 du Canada, 1 de Hongrie, 1 d'Italie, 1 d'Uruguay.

Les trois thèmes de l'école étaient :

- La preuve

Cécile Ouvrier-Bufferet, responsable pour le CSO

Viviane Durand-Guerrier, Université de Montpellier, en responsable externe  
avec 2 cours et 3 TD/ateliers

- La modélisation

Laurent Vivier, responsable pour le CSO

Marianna Bosch, Université Ramon Llull, en responsable externe  
avec 2 cours et 2 TD/ateliers

- Les technologies numériques

Fabien Emprin, responsable pour le CSO

Sophie Soury-Lavergne, Université Grenoble Alpes en responsable externe  
avec 2 cours, 1 table ronde et 3 TD/ateliers.

Les textes scientifiques des cours associés à ces thèmes font l'objet de publications séparées. Dans ce volume, nous avons rassemblé les textes des TD/ateliers, ainsi que ceux de la table ronde. On utilise indistinctement les termes TD ou atelier selon les textes.

---

\* Université Paris Cité, LDAR

Durant l'école un dispositif spécifique à destination des jeunes chercheurs a été mis en place, avec des demi-journées et plages spécifiques, sous la responsabilité de Lalina Coulange et Sarah Présutti, avec Mickaël Da Ronch (Université Grenoble Alpes) et Yahyaoui Zine el Abidine (Université de Tunis) en co responsables externes.

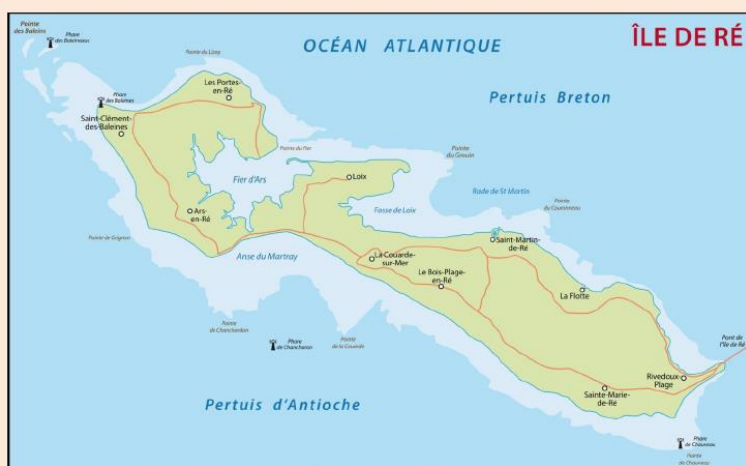
## REMERCIEMENTS

L'ARDM et le comité d'organisation de l'école tiennent à remercier les institutions et organismes qui ont apporté des soutiens financiers, notamment la région Nouvelle Aquitaine, Texas Instrument, l'ED623 Savoirs Sciences Éducation, le LDAR, les projets de recherche Persévérans et MindMath.

21<sup>ème</sup> Ecole d'Été de Didactique des Mathématiques

Ile de Ré, Camping Les Grenettes de Sainte Marie de Ré

18 au 24 octobre 2021



La preuve, la modélisation, les technologies numériques - avec les cours de Maha Abboud, Nicolas Balacheff, Berta Barquero, Alain Kuzniak, Maria Alessandra Mariotti et Jana Trgalova. Interventions complémentaires de Ernesto Esposito, Philippe Richard et Vanda Luengo. Dispositif spécial pour les jeunes chercheurs avec Michèle Artigue et Nicolas Balacheff. Ateliers. Communications...

Inscriptions et informations complémentaires sur le site <https://eedm21.sciencesconf.org/>



## SOMMAIRE DU VOLUME

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
Fabrice Vandebrouck, Fabien Emprin, Cécile Ouvrier-Bufferet, Laurent Vivier	3
<b>Remerciements</b>	<b>5</b>
<b>Sommaire du volume</b>	<b>6</b>
<b>Croisements d'outils pour analyser les apprentissages des élèves sur la preuve</b>	<b>7</b>
Marie-Line Gardes, Christophe Hache, Zoé Mesnil	7
<b>Analyse didactique des raisonnements en classe de mathématiques par l'usage d'un modèle spécifique Exemples d'études de situations à différents niveaux de scolarité</b>	<b>29</b>
Bloch I., Front M., Gibel P.	29
<b>Portée et influence des artefacts dans le développement du travail mathématique à l'aune de la Modélisation</b>	<b>53</b>
Macarena Flores González, Blandine Masselin, Claudia G. Reyes Avendaño	53
<b>Dépasser les praxéologies muettes de modélisation : Un parcours d'étude et de recherche pour la formation des enseignants</b>	<b>73</b>
Floriane Wozniak, Berta Barquero, Marianna Bosch, Danielly Kaspariy	73
<b>Les technologies dans l'enseignement : activité de l'enseignant en classe et en formation</b>	<b>91</b>
Maha Abboud, Fabien Emprin, Janine Rogalski, Fabrice Vandebrouck	91
<b>Ressources numériques pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques</b>	<b>112</b>
Xavier Nicolas, Christian Mercat, Sébastien Jolivet, Jana Trgalová	112
<b>Mindmath : didactique des mathématiques et intelligence artificielle dans un eiah</b>	<b>133</b>
Brigitte Grugeon-Allys , Sébastien Jolivet , Elann Lesnes , Vanda Luengo , Amel Yessad	133
<b>Table ronde : l'intelligence artificielle</b>	<b>153</b>
Fabien Emprin	153
<b>Table ronde : intervention de philippe richard</b>	<b>161</b>

# CROISEMENTS D'OUTILS POUR ANALYSER LES APPRENTISSAGES DES ELEVES SUR LA PREUVE

Marie-Line Gardes\*, Christophe Hache\*\*, Zoé Mesnil\*\*

## RÉSUMÉ

La preuve présente de nombreux aspects qui font de sa pratique, de son enseignement et de son apprentissage des activités riches mais complexes. Dans le TD que nous avons proposé, nous nous sommes attaché·es particulièrement à l'articulation processus / produit (Gandit, 2011), et à l'articulation syntaxe / sémantique des preuves (Deloustal-Jorrand *et al.*, 2020). Nous avons donc en toile de fond pour les trois séances du TD la question suivante : comment la manipulation des objets ou des énoncés mathématiques participe-t-elle à l'élaboration d'une preuve, de la recherche d'arguments convaincants à l'élaboration d'un texte répondant aux attendus de la communauté mathématique ? Les résultats présentés dans le TD sont issus d'anciennes recherches que nous avons menées, ou de données récoltées pour illustrer notre propos.

Mots-clefs : preuve, processus de recherche, dimensions syntaxique et sémantique, langage.

## ABSTRACT

Proof presents many aspects that transform its practice, its teaching and its learning into rich but complex activities. In the proposed working group, we focused particularly on the process / product articulation (Gandit, 2011), and the syntax / semantics articulation (Deloustal-Jorrand *et al.*, 2020) of proofs. The background of this session was therefore the following question: how the manipulation of mathematical objects or statements participates in the elaboration of a proof, from the search for convincing arguments to the elaboration of a text that meets the expectations of the mathematical community. The results presented in this text come from previous research that we have conducted, or from data collected to illustrate our point.

Keywords: proof, proving, syntactic and semantic aspects, language.

## INTRODUCTION

Le thème de la preuve n'avait pas été traité à l'École d'Été de Didactique des Mathématiques depuis 1999. C'est pourtant un thème qui est important et riche en productions dans la recherche en didactique, comme en témoignent la 19<sup>e</sup> étude ICMI sur la preuve en 2008 (Hannah & De Villiers, 2012) et la synthèse des travaux du groupe sur la preuve des conférences CERME (Mariotti *et al.*, 2018). Dans nos travaux respectifs, nous nous inspirons de travaux fondateurs, comme ceux de Balacheff (1987) et Durand-Guerrier (1996), et nous nous intéressons plus particulièrement à l'articulation processus / produit (Gandit, 2011) d'une part et à l'usage de la logique mathématique dans nos grilles d'analyse d'autre part (Barrier *et al.*, 2019, Hache, 2015). Nous avons également en commun d'explorer les pratiques des mathématiciens et des mathématiciennes expert·es : dans leurs processus d'élaboration de preuve (Gardes, 2017) et dans leurs pratiques langagières (Hache & Mesnil, 2015). Nous nous sommes retrouvés pour élaborer ce TD autour de la question suivante : comment la manipulation des objets ou des énoncés mathématiques participe-t-elle à l'élaboration d'une preuve, de la recherche d'arguments convaincants à l'élaboration d'un texte répondant aux attendus de la communauté mathématique ?

Dans la première séance du TD, nous avons plus particulièrement exploré l'articulation des dimensions syntaxique et sémantique de la preuve, à partir d'un travail sur des conjectures d'arithmétique. Dans la deuxième séance du TD, cette articulation syntaxe / sémantique a été mise en relation avec la dimension expérimentale dans l'élaboration d'une preuve, en utilisant notamment la notion de gestes de recherche pour analyser à une échelle plus fine des extraits de vidéos sur ces conjectures d'arithmétique. Dans la troisième séance du TD, nous avons plutôt

---

\* Haute Ecole Pédagogique du canton de Vaud, Lausanne

\*\* Université Paris Cité, LDAR

cherché à analyser le langage utilisé dans le texte écrit de la preuve, toujours en lien avec nos conjectures d'arithmétique. Nous avons présenté des outils de l'analyse logique qui permettent de faire des liens avec les pratiques langagières usuelles de la communauté mathématique.

### À PROPOS DES DIMENSIONS SYNTAXIQUE ET SÉMANTIQUE

Pour introduire les dimensions syntaxique et sémantique, nous avons repris un exemple proposé dans Durand-Guerrier et Mesnil (2022). L'énoncé  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists h \in \mathbb{R}_+^* (|x| < h \Rightarrow x = 0)$  est écrit dans un registre symbolique qui permet de repérer sa structure très facilement : il s'agit d'une implication, précédée qu'une quantification existentielle sur une variable dont on peut remarquer qu'elle n'apparaît que dans la prémisse de l'implication, et d'une quantification universelle sur une variable qui apparaît dans la prémisse et dans la conclusion. Ce premier regard est d'ordre syntaxique. Adopter un regard sémantique consiste à se demander ce que signifie cet énoncé, et à se poser la question de sa valeur de vérité. Nous pouvons expliciter la signification des symboles et reformuler l'énoncé ainsi : « pour tout réel  $x$ , il existe un réel strictement positif  $h$  tel que si valeur absolue de  $x$  est strictement inférieur à  $h$ , alors  $x$  est égal à 0 ». Cette reformulation n'est généralement pas suffisante pour que cet énoncé prenne sens et que nous puissions répondre à la question de sa valeur de vérité. Nous pouvons cependant, pour y réfléchir, essayer de le démontrer en nous laissant guider par sa structure : il commence par une quantification universelle, considérons alors un réel  $x$ . Avec notre habitude de la pratique des mathématiques, une telle action est automatisée, nous pouvons alors parler d'une démarche que nous qualifierons de syntaxique : pour démontrer un énoncé de la forme  $\forall x \in E, P[x]$ , on considère un élément  $x$  de  $E$ , et on démontre  $P[x]$ . Si l'on continue avec notre démarche syntaxique, il faudrait ensuite trouver un terme  $t > 0$  pour lequel il resterait à prouver  $|x| < t \Rightarrow x = 0$ , ce que l'on fait généralement en supposant  $|x| < t$  et en démontrant  $x = 0$ . Mais le fait que le terme  $t$  intervienne dans la prémisse de l'implication et pas dans la conclusion crée un malaise : cela semble étrange de déterminer  $t$  puis de faire une hypothèse dessus. Le malaise peut être levé en cherchant plutôt à montrer la contraposée  $x \neq 0 \Rightarrow |x| \geq t$ , démarche qui articule alors la syntaxe (règles pour former la contraposée) et la sémantique (équivalence entre une implication et sa contraposée). D'autres transformations syntaxiques de l'énoncé initial permettent de statuer plus rapidement sur sa valeur de vérité : par exemple, il est plus immédiat que sa négation,  $\exists x \in \mathbb{R}, \forall h \in \mathbb{R}_+^* (|x| < h \text{ et } x \neq 0)$ , est fautive, ou encore plus immédiat que l'énoncé équivalent  $\forall x \in \mathbb{R} [(\forall h \in \mathbb{R}_+^* |x| < h) \Rightarrow x = 0]$  est vrai (mais les règles permettant de transformer l'énoncé initial en ce troisième énoncé sont moins connues). On peut donner du sens à ce dernier énoncé en le reformulant de la façon suivante : « 0 est le seul réel dont la valeur absolue est strictement inférieure à n'importe quel réel strictement positif ».

Cet exemple permet non seulement de voir ce qui relève de la syntaxe et ce qui relève de la sémantique, mais aussi de voir que l'expression « dimensions syntaxique et sémantique » recouvre finalement deux points de vue : la dimension syntaxique ou sémantique d'un énoncé mathématique (ou plus généralement d'un objet mathématique), la dimension syntaxique ou sémantique de la démarche effectuée par une personne en train de faire des mathématiques. Nous voyons aussi dans cet exemple que dans les deux cas ces deux dimensions sont à articuler au sein de l'activité mathématique.

### 1. Syntaxe et sémantique dans la logique mathématique

Pour continuer sur ces deux dimensions, reprenons comme l'a fait Durand-Guerrier (2005) la caractérisation de Eco (1980)<sup>1</sup> :

Sémantique : le signe est ici conçu dans sa relation à ce qu'il signifie ;

Syntaxique : le signe est abordé en ce qu'il peut être inséré dans des séquences d'autres signes selon certaines règles de combinaisons ; (Eco, cité dans Durand-Guerrier, 2005, p. 114)

La logique mathématique modélise la « métamathématique naïve, qui s'occupe non pas des objets mathématiques mais de ce qu'on fait lorsque l'on traite des objets mathématiques » (Lacombe, 2007). Elle manipule ainsi notamment des formules qui modélisent les énoncés mathématiques, et des preuves formelles qui modélisent les preuves. Les signes des lettres de variables, des quantificateurs, du connecteur IMPLIQUE et du connecteur ÉQUIVAUT À, utilisés dans le modèle élaboré par les logiciens et logiciennes, sont également utilisés dans l'activité mathématique. La logique mathématique définit les règles d'utilisation de ces signes (par exemple en définissant ce qu'est une formule) et leur donne du sens (par exemple en définissant quand est-ce qu'une formule est vraie).

Depuis Aristote, les logiciens et les logiciennes cherchent à attester la validité des raisonnements en s'appuyant sur leur structure et celle des propositions qui y interviennent, c'est-à-dire par des arguments d'ordre syntaxique. Dans l'*Organon*, Aristote modélise les raisonnements sous forme de syllogismes, qui font intervenir trois propositions, deux prémisses et une conclusion, par exemple « Nul M n'est N, tout P est M donc nul P n'est N ». Ce syllogisme, décrit ici non pas comme le fait Aristote, mais comme cela a été fait plus tard au Moyen-Âge, fait partie de la première figure, il se distingue du syllogisme « Nul N n'est M, tout P est M donc nul P n'est N », qui fait partie de la deuxième figure, par la place des termes dans les prémisses. Voici comment Aristote justifie la validité de ce deuxième syllogisme :

Soit, en effet, le terme M, qui n'est affirmé de nul N, mais est affirmé de tout. Puisque la négative est convertible, N n'appartiendra à nul M. Mais M était supposé appartenir à tout P. En conséquence, N n'appartiendra à nul P. Cela a déjà été démontré plus haut. (Aristote, 2007, pp.37-38)

Par la transformation de l'une des prémisses, Aristote se ramène à un syllogisme dont la validité a déjà été attestée. Nous pouvons faire un parallèle entre cette démarche et celle que nous mobilisons quand nous résolvons une équation à une inconnue  $x$  : nous cherchons à transformer une égalité en une autre égalité de la forme  $x = a$ . Une telle démarche peut être mise en œuvre sans se soucier du sens des expressions (propositions ou égalité), mais seulement en appliquant des règles de transformation de celles-ci. Il faut souligner que les règles utilisées sont établies par des arguments de préservation de la vérité : dire par exemple que la négative est convertible, c'est dire que lorsque la proposition « Nul N n'est M » est vraie, alors la proposition « Nul M n'est N » est vraie. Lorsque l'on résout une équation, dans le cas où l'on peut raisonner par équivalence, les transformations que nous faisons sont celles qui transforment une égalité vérifiée par certaines valeurs en une autre égalité vérifiée exactement par les mêmes valeurs. Nous voyons ainsi apparaître ici des arguments d'ordre sémantique permettant un travail d'ordre syntaxique.

Bien sûr, une proposition obtenue comme conclusion d'un raisonnement valide dont les prémisses sont vraies doit nécessairement être vraie. C'est comme cela qu'Aristote établit la validité des syllogismes de la première figure :

Si A est affirmé de tout B, et B de tout  $\Gamma$ , nécessairement A est affirmé de tout  $\Gamma$  [...] De même, si A n'est affirmé de nul B, et si B est affirmé de tout  $\Gamma$ , il en résulte que A n'appartiendra à nul  $\Gamma$ . (Aristote, 2007, p. 27)

<sup>1</sup> Eco, U. (1980). *Segno*. A. Mondadori. *Le signe*, 1988 pour la traduction française. Labor.

Cette rapide présentation de la logique d'Aristote illustre comment dans les travaux des logiciens et des logiciennes, syntaxe et sémantique sont clairement distinguées mais ne se conçoivent pas l'une sans l'autre. L'articulation entre les deux dimensions se retrouvent dans tous les développements ultérieurs de la logique mathématique : la sémantique guide la syntaxe, la syntaxe permet d'enrichir la sémantique.

## 2. Syntaxe et sémantique dans l'activité mathématique et notamment dans la production de preuve.

Dans l'activité mathématique, nous ne sommes jamais complètement dans le monde des symboles vides de sens. Pour revenir à un exemple déjà utilisé, quand nous manipulons des expressions algébriques, par exemple quand nous écrivons  $2(x + 1) = 2x + 2$ , les symboles d'opération sont interprétés, les symboles de constante également et même si nous avons l'impression de seulement manipuler des lettres de variables, nous avons en tête un ensemble auquel elles sont astreintes (généralement  $\mathbb{R}$ ). Nous pouvons donner du sens à cette égalité en la reformulant ainsi : « ajouter 1 à  $x$  et prendre le double, c'est comme prendre le double de  $x$  et ajouter 2 », nous pouvons reconnaître l'application de la règle de distributivité de la multiplication sur l'addition. Kouki (2018) montre que des élèves de l'enseignement secondaire tunisien (élèves de 14 à 16 ans) sont capables de mobiliser et d'articuler des techniques syntaxiques et sémantiques dans le cas de la résolution de tâches élémentaires, mais que certains et certaines persistent dans des techniques syntaxiques alors même qu'elles sont inopérantes pour des tâches plus complexes. Ici, ce ne sont plus les objets mathématiques qui ont un aspect syntaxique ou sémantique, mais bien des démarches mises en œuvre par des élèves en train de résoudre des tâches mathématiques.

Lors de la première séance de TD, nous avons présenté l'article de Weber et Alcock (2004) dans lequel sont définies les deux dimensions syntaxique et sémantique pour caractériser la production de preuve :

We define a syntactic proof production as one which is written solely by manipulating correctly stated definitions and other relevant facts in a logically permissible way. In a syntactic proof production, the prover does not make use of diagrams or other intuitive and non-formal representations of mathematical concepts. In the mathematics community, a syntactic proof production can be colloquially defined as a proof in which all one does is “unwrap the definitions” and “push symbols”.

We define a semantic proof production to be a proof of a statement in which the prover uses instantiation(s) of the mathematical object(s) to which the statement applies to suggest and guide the formal inferences that he or she draws. By an instantiation, we refer to a systematically repeatable way that an individual thinks about a mathematical object, which is internally meaningful to that individual. (Weber & Alcock, 2004, p. 210)

Dans cette définition que nous reprenons dans nos outils, il y a une ambiguïté sur ce que recouvre l'expression « proof production » : concerne-t-elle bien l'ensemble de la production, du processus au produit ? Cet article est commenté par Barrier (2016), qui confirme qu'il est bien question de regarder l'ensemble du processus d'élaboration d'une preuve, et qui parle plus largement d'approches syntaxique et sémantique, en intégrant d'autres activités liées à la preuve :

Cette distinction est issue d'un travail portant sur les processus d'élaboration des démonstrations, les auteurs parlent donc de *semantic* (resp. *syntactic*) *proof production* mais il est possible d'étendre le domaine d'application de l'outil à des activités de lecture ou d'évaluation de preuve, c'est pourquoi je parle dans ce texte de manière plus large d'approches sémantique et syntaxique. Le critère de distinction entre les deux approches reste le même : y a-t-il ou non une contribution observable des objets mathématiques dans le processus ? (Barrier, 2016, p. 96)

Nous avons notamment proposé dans le TD un rapide aperçu de la deuxième expérimentation présentée dans l'article de Weber et Alcock (2004). Deux étudiants, qui suivent leur premier cours d'analyse dans une université du Royaume-Uni, sont invités à se prononcer sur des conjectures concernant la convergence de suites (Figure 1) :

**Table IV**  
Task set for students in week 7 of analysis study

---

Consider a sequence  $(a_n)$ . Which of the following is true?

(a)  $(a_n)$  is bounded  $\Rightarrow (a_n)$  is convergent,  
 (b)  $(a_n)$  is convergent  $\Rightarrow (a_n)$  is bounded,  
 (c)  $(a_n)$  is convergent  $\Leftrightarrow (a_n)$  is bounded,  
 (d) none of the above.

Justify your answer.

---

*Figure 1. – Énoncés proposés à Adam et Ben, extraits de Weber & Alcock (2004)*

Les deux étudiants sont rapidement d'accord sur l'énoncé qui est vrai, Adam a éliminé ceux qui sont faux par la production de contre-exemples. Ensuite, Ben donne l'argument qui est à l'origine de la preuve, en donnant tout de suite la définition (pour une suite qui converge vers 0) :

B : Right, (b)...is convergent. Right, our definition of convergence is that...well, there exists an  $N$  such that when  $n$  is greater than  $N$ , there...modulus of  $a$  is less than epsilon. So that leads to epsilon being a bound...plus or minus epsilon being a bound, about  $a_n$ . Is it ? (Weber & Alcock, 2004, p. 223)

Adam élargit ensuite au cas de n'importe quelle suite convergente, puis Ben explique la preuve complète. S'ensuit une discussion avec l'interviewer, dans laquelle Adam dit faire une différence entre la définition formelle de la convergence et la façon dont il comprend le concept (qu'il décrit avec mots et gestes), alors que Ben dit ne pas voir un tel contraste entre les deux. Weber et Alcock concluent alors que Ben, qui semble penser à la convergence uniquement en termes de définition formelle, est engagé dans une production syntaxique de preuve, alors qu'Adam, qui rapporte qu'il pense à la convergence à la fois en termes de définition et en utilisant d'autres représentations intuitives, est engagé dans une production sémantique de preuve.

Ce qui distingue Adam et Ben dans cette résolution de tâche n'est pas à proprement parler l'utilisation d'objets, puisque dans la partie sur la preuve de l'énoncé vrai, aucune suite particulière n'est utilisée. Ce qui fonde la distinction syntaxe/sémantique c'est d'avoir une représentation du concept de convergence autre que la définition formelle. Mais quand au tout début Ben dit « so that leads epsilon being a bound », cela montre bien aussi une interprétation de la définition, il ne se contente pas d'une manipulation syntaxique mobilisant les règles de logiques pour passer d'un énoncé à un autre. Son premier geste, par contre, dérouler la définition (« unwrap the definition »), présenté comme un geste « qu'il faut faire », est propre, selon Weber et Alcock (2004), de la démarche syntaxique : c'est une action qui n'est pas guidée par ce que signifie l'énoncé à démontrer.

Cela pose la question de ce qu'on peut qualifier de syntaxique ou de sémantique, du niveau de granularité de l'analyse : doit-on se placer au niveau du geste, ou d'un comportement plus global (avec d'autres indicateurs que la somme des gestes) ?

Weber et Alcock (2004) terminent leur article par quelques commentaires sur les différences entre production syntaxique et sémantique de preuves, en reliant cette distinction avec d'autres catégories présentes dans la recherche sur la preuve. Weber et Alcock suggèrent que les compétences et connaissances nécessaires pour une production syntaxique de preuve sont

relativement modestes, là où celles nécessaires pour une production sémantique de preuve sont plus complexes. Pourtant, on sait depuis l'article de A. Selden et J. Selden (1995) la difficulté qu'ont les étudiants et les étudiantes à déplier la structure logique d'un énoncé, et à faire le lien entre structure d'un énoncé et structure d'une preuve de cet énoncé.

Weber et Alcock (2004) poursuivent la discussion en reliant la production syntaxique de preuve à la fonction de validation et au *concept définition*, et la production sémantique à la fonction d'explication (De Villiers, 1990), et au *concept image* (Tall & Vinner, 1981). Selon nous, Weber et Alcock n'insistent pas assez sur le fait que, comme dans ces autres recherches proposant différents aspects de la preuve, les dimensions syntaxique et sémantique de la production de preuve ne sont pas des catégories disjointes, l'activité de chacun et chacune se positionnant dans l'une ou dans l'autre, mais sont plutôt des aspects à articuler pour une activité de production de preuve féconde.

### 3. Appui sur des conjectures d'arithmétique pour alimenter les discussions

De notre côté, nous avons recueilli pour le TD de l'École d'Été des données autour de preuves d'arithmétique auprès d'élèves de Terminale option Maths expertes, d'élèves de classe préparatoire, d'étudiant·es de L1 Chimie, de collègues mathématicien·nes de l'Université de Paris. Pour les trois mathématicien·nes et les trois d'élèves de classe préparatoire, il s'agissait de discussions individuelles filmées (avec tableau noir pour les mathématicien·nes, feuille blanche pour les élèves), pour les étudiant·es de L1 chimie et les d'élèves de Terminale, il s'agissait de discussions avec tout le groupe (une dizaine d'étudiant·es de L1, une dizaine d'élèves de Terminale, une feuille précisant la propriété à prouver était donnée, sur laquelle nous leur demandions de noter leurs idées, leur recherche, et finalement, ils et elles devaient rédiger individuellement une démonstration dans une partie explicitement réservée à cet effet) Les conjectures proposées sont également étudiées dans l'article de Barrier (2016) déjà cité, qui emprunte quant à lui les données à Alcock et Inglis (2008).

Dans un premier temps de l'expérimentation, nous donnons les définitions de « nombre abondant » et de « nombre parfait » en laissant à chaque fois un temps de discussion et d'appropriation de ces définitions (Figure 2) :

**Définition 1** : un entier  $n \in \mathbb{N}^*$  est **abondant** lorsque la somme des diviseurs de  $n$  est strictement supérieure à  $2n$ .

**Définition 2** : un entier  $n \in \mathbb{N}^*$  est **parfait** lorsque la somme des diviseurs de  $n$  est égale à  $2n$ .

*Figure 2. – Définitions nombres abondants et parfaits*

Nous avons également proposé pendant le TD aux collègues participant·es de prendre ce temps d'appropriation de ces définitions. Comme les collègues mathématicien·nes et comme les élèves ou étudiant·es, ce temps a été mis à profit pour explorer des exemples, avec en plus pour les collègues mathématicien·nes et certain·es collègues pendant le TD l'énonciation de certaines propriétés plus ou moins démontrées (par exemple, le fait qu'un nombre premier n'est ni parfait ni abondant). Durant cette phase, le travail est essentiellement sémantique.

Puis, dans un second temps de l'expérimentation, nous proposons de réfléchir à des énoncés concernant ces notions (Figure 3). Nous avons proposé des conjectures différentes selon le public : les mathématicien·nes et les élèves de classe préparatoire ont réfléchi aux conjectures 1, 2 et 3, lors d'entretiens individuels filmés, les élèves de Terminale option Maths expertes et les étudiant·es de L1 ont dû rédiger une démonstration de la conjecture 2bis après une discussion collective dans laquelle les arguments de la démonstration étaient élaborés.

Conjecture 1 : un entier strictement positif est abondant si et seulement si c'est un multiple de 6.

Conjecture 2 : pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ , si  $n$  est parfait, alors pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $kn$  est abondant.

Conjecture 2bis : pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ , si  $n$  est parfait, alors pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , si  $k \geq 2$  alors  $kn$  est abondant.

Conjecture 3 : quels que soient les entiers  $n, m \in \mathbb{N}^*$ , si  $n$  et  $m$  sont abondants, alors  $nm$  est abondant.

*Figure 3. – Conjectures sur les nombres abondants et parfaits*

Les participants et participantes au TD ont été invité·es à réfléchir aux conjectures 1, 2bis et 3. Comme dans les expérimentations effectuées préalablement au TD, dans ces temps de travail, nous avons pu constater une articulation des dimensions syntaxique et sémantique de l'activité : par exemple, à certains moments, nous observons juste une manipulation d'énoncés, de symboles, d'écritures, à d'autres moments, nous observons un retour aux exemples pour guider ou contrôler la recherche. Nous reviendrons plus loin et plus finement sur l'analyse de certaines productions montrant cette articulation. Cependant, si ces dimensions semblent bien pertinentes pour analyser l'activité de preuve, il est difficile de bien les séparer quand nous regardons non plus seulement les énoncés mathématiques mais aussi l'activité de celui ou celle qui les manipule, cherche à les démontrer ou à les infirmer.

Nous avons conclu la première séance du TD en montrant deux extraits des expérimentations.

Dans le premier extrait, M., maîtresse de conférence en mathématiques, explore la conjecture 2 bis. M. est chercheuse en théorie des nombres, et les notions en jeu lui sont familières. Elle commence la résolution de la conjecture en disant « Je vais essayer de montrer que c'est vrai et on verra bien si on a un problème », ce qui peut être décrit comme caractéristique d'une démarche syntaxique : on va dérouler les définitions, les propriétés, et on verra si ça ne se fait pas facilement. Mais elle commente ensuite son travail en disant « je ne vais pas pouvoir calculer exactement la somme de ses diviseurs [elle a considéré un entier  $n$  parfait et cherche à montrer que pour  $k \geq 2$ ,  $kn$  est abondant], mais j'ai bon espoir de la minorer ». Il est difficile de savoir ce qui lui permet d'affirmer ça : elle sait qu'une minoration est suffisante vue la forme de la définition d'un nombre abondant, mais l'espoir vient peut-être de quelques exemples explorés mentalement sans que nous n'ayons de trace de cette exploration. Tout au long de sa preuve, M. ne s'appuie pas sur des exemples, mais la rédaction de sa preuve semble guidée par des propriétés des nombres entiers qu'elle connaît.

Dans le deuxième extrait, A., élève de classe préparatoire, explore cette même conjecture 2 bis en prenant un temps d'exploration d'un exemple : « pour 6, moi j'aimerais bien me convaincre que ça marche pour 6 quand même », ce qui par contre est caractéristique d'une démarche sémantique. Dans son exploration, il cherche cependant une représentation des objets en jeu qu'il peut manipuler de façon syntaxique, notamment en utilisant des propriétés des sommes notée avec le symbole  $\Sigma$ .

Ces deux extraits et le travail des participant·es au TD, ainsi que la réflexion sur l'article de Weber et Alcock (2004), mettent en évidence la nécessité d'avoir d'autres outils d'analyse, nous permettant de décrire l'articulation entre les dimensions syntaxiques et sémantiques dans la production de preuve en prenant en compte non seulement la production, mais également à un niveau d'analyse plus fin, les gestes de la recherche.

## DES OUTILS POUR ANALYSER LE PROCESSUS D'ELABORATION DE PREUVE

La seconde séance du TD avait ainsi pour objectif d'analyser plus en détails l'articulation entre les dimensions syntaxique et sémantique dans le processus d'élaboration de preuves. Nous avons proposé d'effectuer cette analyse en utilisant une grille d'analyse s'appuyant sur deux outils, issus de nos travaux (Gardes, 2013, 2017) : la dimension expérimentale des mathématiques et les gestes de la recherche. Après les avoir présentés, nous avons proposé aux participant·es de les utiliser pour analyser deux processus d'élaboration de preuves, menés par un chercheur et par un étudiant, sur les conjectures sur les nombres parfaits et abondants (Figure 3).

Dans cette partie, nous rendons compte de cette séance de TD. Nous présentons tout d'abord les notions de dimension expérimentale et geste de la recherche puis nous explicitons en quoi ce sont des outils permettant de décrire et analyser le processus d'élaboration de preuve. Enfin, nous détaillons la grille d'analyse construite grâce à ces outils et nous la mettons à l'épreuve pour décrire et analyser le processus de recherche du chercheur et de l'étudiant.

### 1. Dimension expérimentale<sup>2</sup>

La question du caractère expérimental des mathématiques et son intérêt pour l'apprentissage a fait l'objet de plusieurs études didactiques (Bkouche, 1982, 2008 ; Chevallard, 1991 ; Dias, 2008 ; Durand-Guerrier, 2010 ; Gardes, 2013 ; Giroud, 2011 ; Perrin, 2007).

Bkouche (1982) reconnaît un caractère expérimental aux mathématiques dans la mesure où elles relèvent des sciences expérimentales qu'il définit selon deux principes : d'une part, l'origine empirique des objets étudiés et des concepts ainsi mis en jeu et d'autre part, la méthode (ou les méthodes) qui participe à la fois de l'observation empirique et du raisonnement rationnel. Il ajoute que « c'est l'articulation de l'empirique et du rationnel qui constitue la science expérimentale » (*Ibid.* p. 307).

Concernant le premier principe, en prenant l'exemple du concept de nombre (dont l'origine remonte aux pratiques de comptage dans l'Antiquité<sup>3</sup>), Bkouche (1982) met en évidence que certains concepts mathématiques naissent de la manipulation des objets conformément à une théorie, manipulation rendue possible par la représentation sous forme symbolique des objets mathématiques. On retrouve ici l'articulation entre les dimensions syntaxique et sémantique des objets mathématiques présentée plus haut.

D'un point de vue didactique, Durand-Guerrier caractérise cette élaboration spécifique de certains concepts mathématiques par la mise en œuvre d'une dimension expérimentale qu'elle définit par « un va-et-vient entre un travail avec les objets que l'on essaye de définir [...] et l'élaboration [...] d'une théorie, le plus souvent locale, visant à rendre compte des propriétés de ces objets » (Durand-Guerrier, 2010, p.1). Il s'agit donc d'une articulation entre expérience et théorie qui s'appuie également sur les dimensions syntaxique et sémantique des objets mathématiques en jeu grâce à des allers et retours entre des objets naturalisés et des objets en cours de conceptualisation.

<sup>2</sup> Cette partie du texte reprend des passages de (Gardes, 2018).

<sup>3</sup> Voir par exemple (Giusti, 2000).

Concernant le second principe, Bkouche (1982) précise que ce qui fonde le caractère expérimental d'une méthode, c'est la définition et le rôle de l'expérimentation. C'est en effet elle qui est porteuse de l'articulation entre l'empirique et le théorique. En effet, l'expérimentation s'appuie sur un double raisonnement, en amont pour élaborer une expérience pertinente et en aval pour la lecture des résultats. Son rôle est de vérifier l'adéquation entre la théorie et l'expérience dans le but de créer de nouveaux objets mathématiques. Perrin (2007) définit l'expérimentation en mathématiques comme « une méthode d'investigation systématique » qu'il n'hésite pas à « désigner sous le nom de méthode expérimentale » pour résoudre des problèmes mathématiques. Pour cet auteur, l'adéquation entre théorie et expérience se réalise dans un processus itératif composé de plusieurs étapes à renouveler éventuellement :

Expérience, observation de l'expérience, formulation de conjectures, tentative de preuve, contre-expérience, production éventuelle de contre-exemples, formulation de nouvelles conjectures, nouvelles tentatives de preuve, *etc.* (Perrin, 2007, p.10).

Dans cette description de « la méthode expérimentale », l'expérimentation (faire une expérience, observer l'expérience et en tirer des conclusions) s'articule avec des phases de formulation de conjectures et de tentative de preuves. Dias (2008) prolonge cette idée en pensant l'expérimentation comme un processus dialectique empirique/théorique qui n'a de sens que par ses articulations avec la formulation et la validation. Nous définissons alors une démarche de type expérimental de résolution de problèmes par des va-et-vient constants entre la théorie et l'expérience se réalisant par des rétroactions de trois processus : expérimentation, formulation et validation. Une démarche de type expérimental s'appuie donc sur la mise en œuvre d'une dimension expérimentale portant sur les objets mathématiques en jeu (i.e. des allers et retours entre des objets naturalisés et des objets en cours de conceptualisation) et favorise ainsi les liens entre dimensions syntaxique et sémantique de l'activité de recherche, notamment en permettant de pallier les limites de l'une ou de l'autre. De même, lorsque les deux dimensions sont articulées, cela peut favoriser en retour la mise en œuvre d'une démarche de type expérimental dans la recherche d'un problème.

## 2. *Geste de la recherche*<sup>4</sup>

Nous avons emprunté la notion de « geste » à la philosophie des mathématiques (Cavaillès, 1938, 1994 ; Châtelet, 1993, et Bailly & Longo, 2003) et nous l'avons développée pour analyser l'activité effective de recherche d'un problème mathématique. Dans les travaux de Cavaillès (1938), repris par Cassou-Noguès (2001), on trouve trois gestes de nature différente. Le geste naturel est une manipulation de signes mathématiques (par exemple, des chiffres, des symboles algébriques ou encore des figures géométriques). Lorsque ce geste s'effectue dans un milieu propre au travail mathématique, il devient un geste combinatoire, c'est-à-dire soumis à des règles d'emploi de ces signes. Il relève de la dimension syntaxique. Le geste opératoire, quant à lui, renvoie à l'acte de pensée associé au geste combinatoire. Il est défini comme un procédé ou une opération sur des objets mathématiques. Il relève de la dimension sémantique. Voici un exemple pour illustrer ces trois gestes : imaginons un enfant qui joue avec des magnets représentant des chiffres et les signes + et =. Par un geste naturel, l'enfant utilise ces magnets, sans intentionnalité mathématique, et juxtapose par exemple les signes  $3 = 2 +$ . Le geste devient combinatoire si l'enfant respecte les règles d'utilisation des signes mathématiques, par exemple le signe + doit être complété à gauche et à droite, de même que le signe =. L'enfant peut alors écrire  $2 + 3 = 7$ . Enfin, le geste est qualifié d'opératoire si la mise en relation des trois nombres par l'opération est correcte mathématiquement, ce qui conduit l'enfant à écrire  $2 + 3 = 5$ .

---

<sup>4</sup> Cette partie reprend des passages de (Gardes, 2013) et (Gardes, 2017).

Cavaillès définit ensuite l'expérience comme un système de gestes et Cassou-Noguès précise alors que « l'expérience mathématique serait un double système de gestes : gestes combinatoires dans les espaces combinatoires, gestes opératoires dans les théories mathématiques » (Cassou-Noguès, 2001, p. 13). Ce ne sont pas deux actes distincts mais un seul acte qui se déploie comme combinatoire et opératoire. Cette double facette donnée au geste unifie et articule les dimensions sémantique et syntaxique de l'activité mathématique. Enfin, il met en évidence le pouvoir de créer de nouveaux objets mathématiques au moyen de l'expérience, donc au moyen de gestes.

Cette étude nous a amené à la notion de geste de la recherche que nous définissons comme suit : un geste est un acte de mise en relation d'objets mathématiques dans une intentionnalité. Il possède un pouvoir de créer (de nouveaux objets mathématiques) dans sa possibilité d'ouvrir le champ des possibles dans le travail mathématique, en saisissant l'intuition au moyen d'une expérience (Gardes, 2013, p.155). Dans nos travaux, nous avons identifié sept gestes de la recherche (Gardes, 2013, pp.162-165). Nous choisissons de présenter les trois gestes qui seront utilisés dans la suite des analyses :

- Désigner un objet, il s'agit de représenter cet objet par le langage ou par un signe. Ce geste permet d'articuler les dimensions syntaxique et sémantique d'un objet : en représentant un objet par un signe, on peut ensuite effectuer des opérations sur les signes sans toujours se référer aux objets qu'ils désignent ;
- Construire des exemples et les questionner, il s'agit de déterminer une méthode de construction des exemples à partir de manipulations des objets mathématiques et un questionnement de ces différents exemples dans le but d'en dégager des informations. Ce geste est porteur de l'articulation syntaxe/sémantique dans la mesure où le travail mathématique s'appuyant sur des exemples est un moyen de construire une syntaxe sur les objets ;
- Effectuer des contrôles locaux, il s'agit de vérifier les différentes étapes des manipulations et combinaisons de signes dans les écritures mathématiques. Ce geste favorise une articulation syntaxe/sémantique car il s'agit de faire référence aux objets désignés par les signes en les positionnant au premier plan.

### *3. Des outils pour décrire et analyser le processus d'élaboration de preuve*

Nous étudions le processus d'élaboration de preuve dans le cadre d'une activité de recherche de problème. Il s'agit donc d'une partie du processus (plus global) de recherche de problème. La notion de dimension expérimentale est un outil permettant de décrire et analyser ce processus de recherche en montrant comment la preuve s'élabore en appui sur un travail sur les objets mathématiques en jeu. Il s'agit ici de mettre en évidence les allers et retours entre les manipulations sur les objets mathématiques en jeu et la mise au jour d'éléments théoriques rendant compte des propriétés de ces objets. La notion de geste de la recherche est un outil permettant, d'une part de caractériser la nature de l'activité mathématique relative aux manipulations d'objets et aux élaborations théoriques, et d'autre part d'identifier les éléments déclencheurs des allers et retours entre ces activités. Il permet ainsi de mettre en évidence les éléments moteurs dans l'avancée de la recherche du problème et l'élaboration de la preuve. Ces deux outils combinés donnent la grille d'analyse présentée en Figure 4.

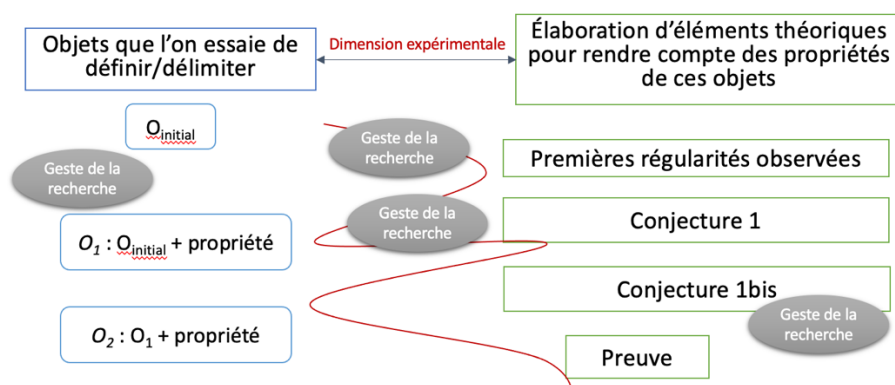


Figure 4. – Grille d'analyse du processus d'élaboration de preuve combinant les deux outils : la dimension expérimentale et les gestes de la recherche

#### 4. Mise à l'épreuve de la grille d'analyse

Le corpus analysé est constitué d'un extrait vidéo de la recherche menée par un chercheur au tableau noir et d'un extrait vidéo de la recherche menée par un élève de classe préparatoire sur une feuille. Le recueil de données s'est effectué sous la forme d'un entretien semi-guidé individuel filmé, selon le déroulement décrit page 12 ci-dessus (les conjectures proposées sont les conjectures 1, 2 et 3, proposées dans trois phases successives). Pendant les différentes phases de recherche, nous avons parfois interagi avec le chercheur (respectivement l'étudiant), en posant des questions, reformulant ses propositions ou en lui confirmant qu'un nombre était bien parfait ou abondant.

##### Analyse de la recherche du chercheur

L'extrait soumis à l'analyse des participant·es au TD concerne la première phase de la recherche, c'est-à-dire l'exploration et l'appropriation des définitions de nombres abondants et parfaits. Le chercheur cherche à se faire une représentation de ces nombres en commençant à les étudier. Il procède de manière structurée, avec un crible pour les nombres de 1 à 12. L'étude de chaque nombre l'amène à formuler des conjectures et parfois à les prouver (Figure 5).

La démarche de recherche du chercheur est de type expérimental, il commence par manipuler les objets mathématiques en jeu (nombres, nombres abondants, nombres parfaits) pour essayer d'en dégager des propriétés. Le premier geste de la recherche qu'il effectue c'est de construire des exemples de nombres parfaits et / ou abondants en considérant les entiers un par un (1 et ses diviseurs, 2 et ses diviseurs, etc.). Rapidement, il questionne ces exemples, c'est-à-dire qu'il cherche à les mettre en relation entre eux pour en extraire des régularités ou des généralisations. Cela le conduit à formuler une première conjecture : les nombres premiers ne sont ni parfaits ni abondants. Ce résultat lui paraissant assez évident, il ne cherche pas à le prouver. Puis il continue son exploration des exemples, trouve un premier nombre parfait (6) puis s'arrête sur les puissances de 2 (via 8) et formule une seconde conjecture : les puissances de 2 ne sont ni des nombres parfaits ni des nombres abondants. Ici, il cherche à prouver cette conjecture. Il utilise alors un autre geste de la recherche, celui de désigner les objets. Il désigne les puissances de 2 par  $2^n$  et leurs diviseurs par  $2^i$  pour pouvoir opérer sur ces nombres, c'est-à-dire faire la somme des diviseurs et la comparer à  $2^n$ . Une fois ce résultat prouvé, il fait un bilan puis continue l'exploration des exemples et formule une nouvelle conjecture : les nombres parfaits et abondants ne sont pas une puissance d'un nombre premier. Il élabore ensuite la preuve de cette conjecture, en s'appuyant sur le même geste que dans la preuve précédente, désigner des objets. Il désigne ainsi les puissances d'un nombre premier par  $p^n$  ( $p$  premier) et leurs diviseurs par  $p^i$  pour en faire la somme et la comparer à  $2p^n$ . Nous pouvons ici identifier un nouveau geste de la recherche : dérouler les définitions (au sens de Weber et Alcock (2004)

comme mentionné p.5). Ce geste est d'ordre syntaxique mais émerge d'un travail sémantique. Ensuite, il termine cette phase de recherche en se donnant une caractéristique des nombres parfaits : « c'est le nombre de diviseurs mais aussi peut-être la variété des diviseurs » qui lui semble suffisante pour commencer à chercher les conjectures proposées ensuite.

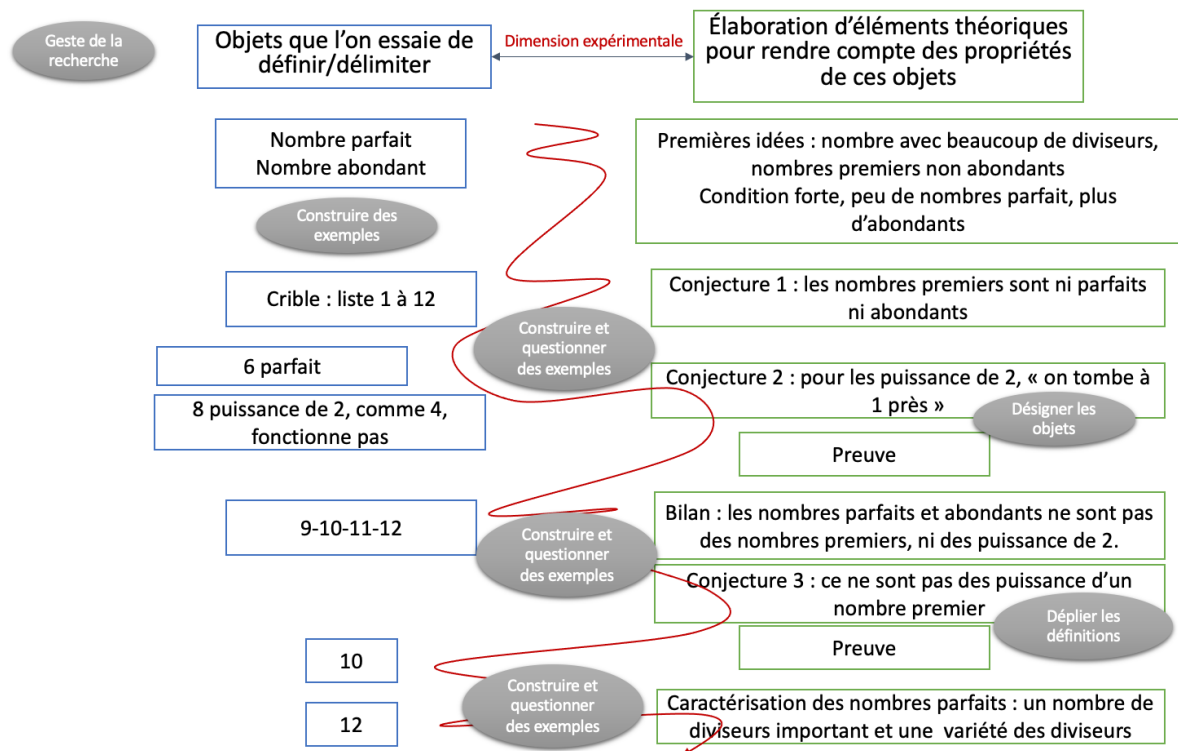


Figure 5. – Analyse du processus d'élaboration de preuve du chercheur

### Analyse de la recherche de l'étudiant

L'extrait soumis à l'analyse des participant·es au TD concerne la première phase de la recherche (l'exploration et l'appropriation des définitions de nombres abondants et parfaits), ainsi que la seconde phase de la recherche, c'est-à-dire la recherche des conjectures 1 et 2. L'étudiant commence par s'approprier les définitions en cherchant des exemples de nombres abondants et parfaits. Pour cela, il procède de manière structurée, avec l'étude des nombres de 1 à 12.

La démarche de recherche de l'étudiant est alors de type expérimental (Figure 6), il commence par manipuler les objets mathématiques en jeu (nombres, nombres abondants, nombres parfaits) pour essayer d'en dégager des propriétés. Le premier geste de la recherche qu'il effectue c'est de construire des exemples de nombres parfaits et/ou abondants en considérant les entiers un par un. Il trouve ainsi que 6 est un nombre parfait et 12 un nombre abondant. En construisant ces exemples, il formule rapidement une première conjecture : les nombres premiers ne sont ni parfaits ni abondants. Ce résultat lui paraissant assez évident, il ne cherche pas à le prouver. Il cherche ensuite un autre nombre abondant, il propose 100 et montre rapidement qu'il est abondant. Cet exemple semble jouer le rôle d'une expérience cruciale (Balacheff, 1987) pour l'étudiant, pour se convaincre de sa compréhension des définitions et de sa première impression : « il n'y en a pas beaucoup » et « il faut beaucoup de diviseurs ».

Suite à l'étude des définitions, l'étudiant cherche à prouver la conjecture 1 (Figure 3). Il donne rapidement un contre-exemple (100) pour démontrer qu'un entier strictement positif abondant n'est pas nécessairement un multiple de 6. Il cherche ensuite un multiple de 6 non abondant et trouve 6. La preuve de cette conjecture s'appuie donc sur son exploration préalable des exemples. Suite à une question de notre part, il regarde si 12 et 18 - deux multiples de 6

(différents de 6) - sont abondants ou pas et il formule une nouvelle conjecture : « tout multiple de 6 sauf 6 est abondant ». Il ne cherche pas à la prouver mais donne l'argument suivant, utilisé pour 18 : « il y a tous les diviseurs de 6 et lui-même ». La seconde conjecture lui est ensuite présentée comme une généralisation de cette conjecture (Figure 3). L'étudiant énonce qu'il pense que la conjecture est vraie et propose l'argument suivant : « il y aura les diviseurs de  $n$  et  $k$  fois les diviseurs de  $n$ , pour ceux qui ne sont pas déjà comptés (i.e. dans les diviseurs de  $n$ ) ». Pour vérifier cet argument, il effectue un geste de la recherche, un contrôle local, en revenant à l'étude d'un exemple : « pour 12, on aura 3 mais aussi  $2 \times 3$  ». Il explique ainsi que pour  $n = 6$  et  $k = 2$ , la liste des diviseurs de 12 s'obtient par la réunion de la liste des diviseurs de 6 et deux fois la liste des diviseurs de 6 non comptés. En effet, certains nombres peuvent se retrouver dans les deux listes, comme 6, qui est un diviseur de 6 et 2 fois un diviseur de 6 (car il est égal à  $2 \times 3$  et 3 est un diviseur de 6). Mais il mentionne que certains nombres ne sont que dans l'une des deux listes, comme 12 (qui est égal à  $2 \times 6$ ) ou 4 (qui est égal à  $2 \times 2$ ). Il revient alors au cas général et essaie d'écrire une preuve. Il effectue alors deux autres gestes de la recherche : il désigne les diviseurs de  $n$  par  $\sigma(n)$  et déroule la définition d'un nombre parfait en écrivant  $\sigma(n) = 2n$ . Il cherche ensuite à écrire  $\sigma(kn)$ . Il propose alors de faire un raisonnement par récurrence sur  $k$  et essaie de l'initialiser pour  $k = 2$ . Il cherche alors à démontrer que  $\sigma(2n)$  est supérieur strict à  $2n$ . Il a  $\sigma(2n) \geq \sigma(2) + 2n$ . Il cherche donc un autre diviseur. Suite à une discussion avec nous, il parvient à passer de l'identification des diviseurs de  $kn$  pour trouver leur nombre à l'identification (directe) du nombre (minimal) des diviseurs de  $kn$  : c'est  $k$  fois la liste des diviseurs de  $n$  à laquelle on ajoute 1. Il écrit alors  $\sigma(2kn) \geq k\sigma(n) + 1 > 2kn$ .

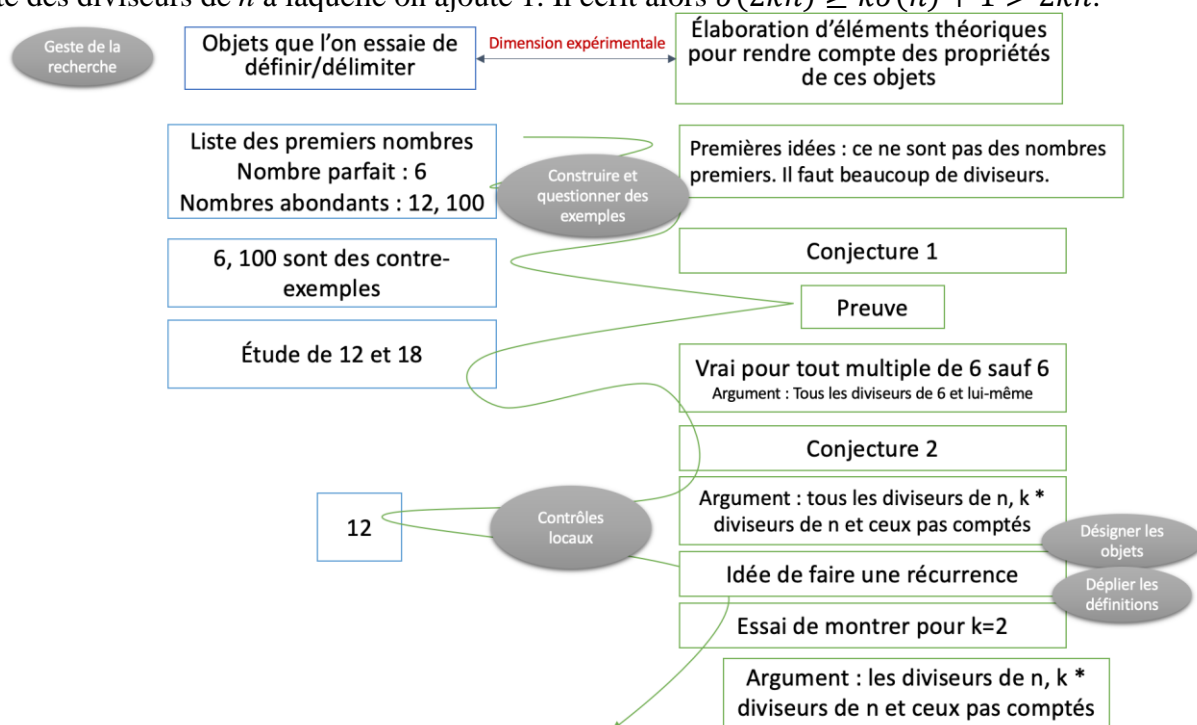


Figure 6. – Analyse du processus d'élaboration de preuve de l'étudiant

L'analyse de ces deux processus de recherche met en évidence, tant chez le chercheur que chez l'étudiant, que les moments d'élaboration de preuve prennent ici naissance dans l'exploration et le questionnement des exemples. Ce geste de la recherche déclenche les allers et retours entre les manipulations d'objets mathématiques en jeu et l'élaboration d'éléments théoriques qui conduisent ensuite à la formulation de conjectures. Ce travail prend essentiellement appui sur la dimension sémantique des objets mathématiques dont ils cherchent à en comprendre le sens. L'articulation avec leur dimension syntaxique est rendue possible par l'utilisation de deux

autres gestes (désigner les objets et dérouler les définitions) lors de l'écriture de la preuve des conjectures. Notons également que ce qui différencie les processus de recherche du chercheur et de l'étudiant est le nombre d'allers et retours dans la mise en œuvre d'une dimension expérimentale d'une part, et le recours au geste de contrôle local d'autre part. En effet, le chercheur fait davantage d'allers et retours entre les manipulations d'objets et les élaborations théoriques, notamment grâce au questionnement systématique des exemples qu'il étudie. Cela est présent dans la recherche de l'étudiant mais moins fréquent. Un geste de la recherche est effectué par l'étudiant et pas chez le chercheur, celui d'effectuer des contrôles locaux. L'étudiant semble en avoir besoin pour contrôler ses élaborations théoriques par un retour sur les objets. Il y a là le recours à la dimension sémantique pour contrôler le travail syntaxique.

Ces analyses mettent en évidence l'apport des outils « dimension expérimentale » et « gestes de la recherche » pour décrire et analyser les processus de recherche et d'élaboration de preuves. Ils permettent une analyse fine de l'apport d'articuler les dimensions syntaxique et sémantique dans l'élaboration de preuve, tant chez le chercheur que chez l'étudiant, même si leurs processus sont différents.

### APPREHENDER L'OBJET « TEXTE DE DEMONSTRATION »

Lors de la troisième séance du TD nous avons étudié davantage le « produit » : la formulation des preuves. Après une présentation de la façon dont on peut analyser les formulations de preuves et les usages classiques de la langue dans ce contexte, nous retrouverons des préoccupations proches des précédentes en analysant d'une part des formulations de mathématiciens et mathématiciennes, et d'autre part des formulations d'élèves.

#### *1. Formulation, formuler*

L'apprentissage de la preuve en mathématiques passe aussi par l'apprentissage des usages en matière de rédaction et de formulation.

L'activité langagière est à la fois individuelle et sociale. Fondamentalement elle est individuelle : lors d'une production orale, une personne produit des bruits, des gestes avec son corps, mobilise des ressources cognitives. On ne peut séparer agir, parler et penser (par exemple Rebière, 2013).

Cette activité individuelle ne prend sens que socialement, il y a un auditoire (éventuellement potentiel ou imaginé), le sens attribué aux sons est partagé par un groupe social (langue commune, usages de la langue), il peut bien sûr ne pas être partagé, mais ce fait engendrera alors des réactions de l'auditoire et du locuteur ou de la locutrice, des interactions. De façon générale les réactions des acteurs et des actrices en situation participent également à la construction du sens.

Les activités sociales se stabilisent pour chaque groupe social en pratiques sociales, usages habituels en lente évolution. On se rend compte de ces pratiques en découvrant un groupe constitué : on peut par exemple imaginer un jeune chercheur venant pour la première fois à l'école d'été de didactique, il va entrer à la « cantine » pour son premier repas, certaines tables sont déjà en partie occupées, est-il attendu qu'il complète une telle table ? Ou au contraire doit-il s'installer sur une table encore vide ? Doit-il s'asseoir avec des « jeunes » ? Ou bien peut-il s'asseoir avec tel chercheur ou telle chercheuse expérimenté·e ? Est-ce sans importance pour les personnes concernées ? Ce type d'usage peut être non-dit (parfois même non pensé), ils sont aussi parfois explicites. Les groupes sociaux stabilisent ainsi leurs pratiques, il en va de même des pratiques langagières (le terme « jeune » ci-dessus a ainsi un sens très particulier dans cette communauté de recherche, il n'évoque pas un âge particulier, ou alors l'âge dans la recherche). On parle ainsi des pratiques langagières des mathématiciens et mathématiciennes.

De par ce caractère à la fois individuel, cognitif et social, l'activité langagière est donc une composante centrale des activités d'enseignement et d'apprentissage. Les mathématiciens et les mathématiciennes disent des mathématiques oralement ou par écrit, ils et elles sont amenés à évoquer divers objets mathématiques (conjectures, théorèmes, définition, preuves, *etc.*), nous allons nous centrer ici sur l'écriture de preuves. Nous l'avons vu dans les parties précédentes de ce TD (et dans les autres TD et cours de cette École d'Été), l'apprentissage de l'activité de preuve comporte énormément de dimensions, y compris cette entrée dans certaines pratiques langagières, cette intégration des façons d'écrire une démonstration (quels mots utilise-t-on ? Quelles expressions ? Quelle formulation est acceptable ? Ou originale ? Quelle formulation ne sera pas recevable ? *etc.*).

L'analyse de la dimension langagière de l'activité de preuve, et notamment des formulations des preuves, prend de cette façon toute son importance. Nous allons nous y pencher à partir de deux questions : comment décrire les pratiques langagières des mathématiciens et des mathématiciennes ? Comment les élèves s'approprient-ils ces pratiques ?

## 2. Analyse logique, déduction naturelle de Gentzen

Une première question concerne donc les pratiques langagières des mathématiciens et des mathématiciennes (en termes de preuve ici). Comment caractériser le fait qu'on a affaire à un texte de démonstration ? Quels sont les usages de la langue française dans une démonstration mathématique ?

Nous allons décrire un type d'analyse particulier : les analyses logiques. L'idée principale est de comparer les formulations produites, le texte, à un référent logique formel permettant de prendre une certaine distance avec la langue utilisée. Plusieurs chercheurs et chercheuses en didactique des mathématiques en France travaillent avec des analyses de ce type (Barrier, 2016 ; Durand Guerrier & Arsac, 2003 ; Hache, 2015 ; Hache & Mesnil, 2015). La comparaison avec un référent formel permet et facilite une distanciation entre le texte et une description du contenu évoqué par le texte.

Pour analyser les formulations de théorèmes, il est par exemple courant d'utiliser la logique des prédicats (exemple de référence pour la phrase « les nombres divisibles par 4 sont pairs » :  $\forall x [4|x \Rightarrow x \text{ est pair}]$ ).

Nous allons ici utiliser la déduction naturelle de Gentzen<sup>5</sup>. Elle s'appuie sur la logique des prédicats. Les preuves sont décomposées en une succession de pas de déduction. Nous prenons ci-dessous trois exemples.

$$\frac{P, Q}{P \wedge Q} \wedge$$

Figure 7.

$$\frac{P \vee Q \quad \left[ \begin{array}{c} P \\ \vdots \\ R \end{array} \right] \quad \left[ \begin{array}{c} Q \\ \vdots \\ R \end{array} \right]}{R} \vee$$

Figure 8.

$$\frac{\begin{array}{c} \textcircled{a} \\ \vdots \\ P(a) \end{array}}{\forall x P(x)} \forall$$

Figure 9.

La Figure 7 représente le pas de déduction décrivant la preuve d'une conjonction. Il a deux niveaux séparés par une ligne horizontale, la partie haute énonce « ce que je sais prouver avant d'utiliser la règle », la partie basse énonce ce que cette règle permet de prouver (le petit symbole sur la droite rappelle juste que ce pas de déduction correspond à « l'introduction », la preuve ici, d'une conjonction).

<sup>5</sup> Pour une présentation détaillée se reporter à (Hache & Mesnil, 2015).

La preuve elle-même est donc un arbre. Cet arbre est en général difficile à représenter car très vite il occupe une très grande surface. En référence à la première partie, la formulation obtenue sous forme d'arbre est plutôt syntaxique, mais le signe a été conçu pour porter le sens.

Un autre exemple de règle, Figure 8, correspond à une preuve à partir d'un énoncé sous forme de disjonction ( $P \vee Q$ ). C'est un pas de déduction appelé couramment « disjonction des cas » : on sait que  $P \vee Q$  est vraie, si on suppose temporairement que  $P$  est vrai on arrive à montrer  $R$ , si on suppose temporairement  $Q$  vrai on sait également montrer  $R$ , on déduit de ces trois éléments que  $R$  est vrai. Le caractère temporaire des preuves intermédiaires est symbolisé par les crochets (le petit symbole à droite rappelle que cette ligne horizontale correspond à la mise en œuvre d'une règle d'élimination d'une disjonction).

Enfin, nous indiquons en Figure 9 une troisième présentation de pas de déduction : la preuve d'une propriété universellement quantifiée (beaucoup de propriétés courantes sont de ce type, celle servant de support à l'exposé y compris : « quel que soit  $n$ , si  $n$  parfait alors, quel que soit  $k$ ,  $kn$  abondant »). Cette preuve nécessite l'introduction d'une variable « fraîche » (non encore utilisée dans le contexte, on dit par exemple « Soient  $k$  et  $n$  deux entiers... »). Nous avons ajouté dans la notation de Gentzen l'introduction de cette variable (deux petits cercles concentriques) et l'endroit dans l'arbre de la preuve où cette variable est utilisée (pointillé entre son introduction et la conclusion du pas correspondant). On peut noter que, dans la conclusion  $\forall x P(x)$ , la variable  $x$  est muette. Même si c'est ce qui est fait en général dans la rédaction d'un tel pas de déduction, il n'y a aucune raison d'écrire la conclusion  $\forall a P(a)$ , ce qui peut même compliquer la compréhension du statut de la variable  $a$ . Nous verrons que la conclusion d'un tel pas de déduction n'est souvent simplement pas formulée.

Le nombre de connecteurs dans la logique des prédicats est limité (conjonction, disjonction, implication, négation... disjonction et négation peuvent même suffire, les deux autres pouvant se construire à partir de ces deux-là), le nombre de quantificateurs également (existentiel, universel). Le nombre de pas de déduction élémentaires de la déduction naturelle est donc lui aussi limité (deux pas par connecteur ou quantificateur).

Avant de donner un exemple, nous allons présenter le pas de déduction correspondant à la preuve d'une implication. Les implications que nous rencontrons dans l'activité mathématique sont toujours quantifiées universellement, aussi plutôt que de considérer l'implication  $P \Rightarrow Q$  (considérée par Gentzen par exemple), nous nous intéressons à l'implication quantifiée :  $\forall x [P(x) \Rightarrow Q(x)]$ .

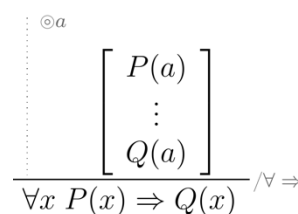


Figure 10.

Le pas de déduction est représenté ci-contre (Figure 10). Tous les éléments techniques ont été introduits ci-dessus : pour établir une preuve de  $\forall x [P(x) \Rightarrow Q(x)]$  on introduit une variable  $a$  et on suppose temporairement la propriété  $P(a)$ , si on a une preuve de  $Q(a)$  sous cette hypothèse, alors on a une preuve de  $\forall x [P(x) \Rightarrow Q(x)]$ .

Nous allons maintenant nous intéresser à la façon de représenter avec les éléments introduits la trame de preuve de la Figure 11a. Nous nous limiterons dans ce texte à une partie de la preuve. Globalement cette preuve est la preuve d'une implication (preuve de  $\forall n [n \text{ parfait} \Rightarrow \forall k > 1 \text{ } kn \text{ abondant}]$ ). Une première ébauche de l'arbre de la preuve sera donc celle de la Figure 11b.

**Conjecture 2 :** Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ , si  $n$  est parfait, alors pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , si  $k > 1$  alors  $kn$  est abondant.

**Trame d’une preuve :**

Soit  $n$  un entier, on suppose  $n$  parfait, on liste ses diviseurs  $d_i$ . On a  $\sum d_i = 2n$ .

Soit  $k$  un entier, parmi les diviseurs de  $kn$  il y a 1 et tous les  $kd_i$ . Tous ces nombres sont distincts.

La somme des diviseurs de  $kn$  est plus grande que  $1 + \sum kd_i = 1 + k \sum d_i = 1 + k 2n > 2kn$ . CQFD

Figure 11a.

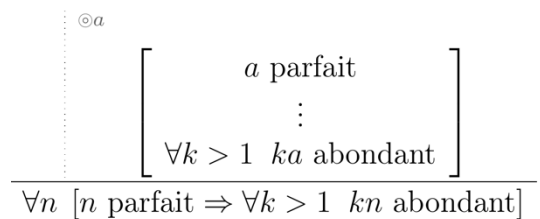


Figure 11b.

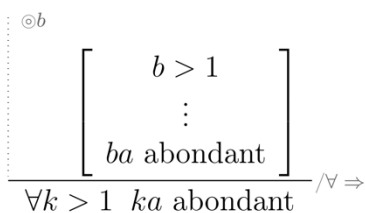


Figure 11c.

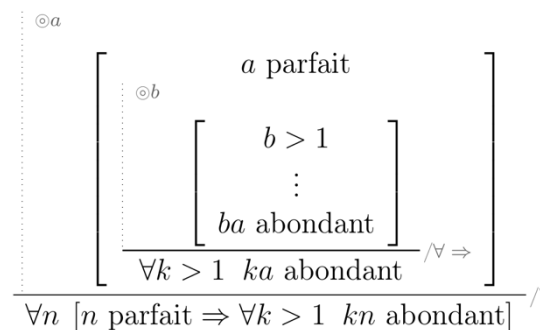


Figure 11d.

La partie de l’arbre représentée dans la Figure 11b par un pointillé vertical est une preuve de «  $\forall k > 1 ka$  abondant » qui est une abréviation de «  $\forall k [k > 1 \Rightarrow ka$  abondant] » (2<sup>e</sup> implication universellement quantifiée). Cette partie sera représentée par la Figure 11c.

On arrive ainsi à la Figure 11d. Cette figure ne représente qu’une petite partie de la preuve, mais faute de place nous nous en tiendrons à cette partie. Nous allons rechercher dans les preuves rédigées les formulations relatives en nous centrant sur deux parties (en général les premiers mots de la preuve et les derniers) :

- Premier focus : introductions de la variable  $a$ , hypothèse temporaire «  $a$  parfait », introduction de la variable  $b$ , hypothèse temporaire «  $b > 1$  » ;
- Second focus : affirmation du fait que la propriété «  $ba$  abondant » a été prouvée, déduction de  $\forall k > 1 kn$  abondant (conclusion du pas de déduction représenté par la Figure 11c), déduction de  $\forall n [n$  parfait  $\Rightarrow \forall k > 1 kn$  abondant] (conclusion du pas de déduction représenté par la Figure 11b), et ainsi conclusion de la preuve.

Pendant l’atelier, les participants et les participantes ont travaillé sur les trois preuves de mathématiciens ou mathématiciennes, quatre preuves d’étudiants ou étudiantes volontaires parmi ceux de première année de licence de chimie, et trois copies d’élèves de terminale (trois copies sélectionnées sur une quinzaine rédigée lors d’une séance de travail spécifique avec l’enseignante de la classe, une sélection avait été faite pour les preuves de terminale, car peu d’élèves avait réussi dans le temps imparti à produire une preuve exploitable).

Notre méthode consiste donc à mettre en regard la description obtenue à l’aide de la déduction naturelle (Figure 11d) et les formulations correspondantes choisies par les personnes interrogées.

3. Textes de mathématiciens et mathématiciennes (M)

Concernant la gestion des variables, une première remarque est valable pour tous les textes M : le nom des variables est systématiquement celui suggéré par la consigne. Toutes les preuves parlent d’un nombre  $n$  (le nombre qui est parfait), d’un nombre  $k$  (on s’interroge sur les propriétés de  $kn$ ). Il n’y a pas de distinction entre le nom des variables (muettes ici) de la

consigne, les variables fraîches introduites et les variables muettes utilisées pour énoncer les propriétés évoquées dans la preuve. On sait que c'est un point délicat, il est souvent évoqué lors de l'apprentissage de la preuve par récurrence par exemple (Grenier *et al.*, 2016).

Dans tous les textes M, la première apparition d'une variable correspond à une présentation (l'auteur·e annonce qu'il ou elle introduit une variable). Trois précisions :

- Les premiers mots de ces textes correspondent à une telle présentation, sauf pour un des textes qui commence par une phrase qui relève du commentaire explicatif « La propriété d'être abondant (ou parfait) se lit sur les diviseurs du nombre » avant de présenter les variables  $n$  et  $k$ . Quand ils et elles introduisent la variable  $n$  ils et elles utilisent la formulation « Soit  $n$  ».
- Les variables  $n$  et  $k$  peuvent être introduites en même temps (exemple « Soit  $n$  un nombre parfait,  $k \in \mathbb{N}^*$  », « Soit  $n, k \in \mathbb{N}^*$  ») ou non ( $k$  étant alors introduit au moment de la preuve où sa présence est nécessaire), entre les deux introductions les rédacteurs et les rédactrices évoquent alors des propriétés connues de  $n$  et de ses diviseurs (exemple : « Soit  $n$  un nombre parfait, la somme de ses diviseurs est  $2n$  (que l'on note  $S$ ). Soit  $k \geq 2$  »),
- Les quatre textes M formulent dans la même expression la présentation de la variable (début de la preuve d'une propriété universellement quantifiée) et la propriété liée (supposition de la prémisse pour la preuve de l'implication). Exemple : « Soit  $k$  un entier strictement supérieur à 1 » (les citations précédentes illustrent aussi ce point).

Concernant la phase de conclusion des deux pas de déduction considérés, dans les quatre textes M, un calcul est fait pour montrer que la somme des diviseurs de  $kn$  est strictement supérieure à  $2kn$ . Après ce calcul, une seule phrase conclue la preuve : quatre fois le texte se termine par l'affirmation que  $kn$  est abondant (« ce qui montre que l'entier  $kn$  est abondant », « On en déduit que  $kn$  est abondant », et « donc  $kn$  abondant » qui apparaît deux fois).

On retrouve là un phénomène classique : les conclusions des pas de déduction liés aux implications (et aux quantifications liées) ne sont pas explicitement énoncées. C'est au lecteur ou à la lectrice de comprendre que la preuve de «  $kn$  abondant » permet de conclure à la preuve de l'implication «  $\forall k [k > 1 \Rightarrow kn \text{ abondant}]$  » (Figure 11b), et que cette dernière suffit à prouver la conjecture (Figure 11c).

Ce point concernant l'implicite des conclusions est très récurrent dans les analyses de formulations de preuve.

Ces constats rejoignent des résultats plus généraux sur l'écriture des preuves par les mathématiciens et les mathématiciennes : les formulations sont denses, souvent plusieurs éléments logiques sont agglomérés dans une seule formulation, c'est au lecteur ou à la lectrice de « déplier » ces formulations (Chesnais, 2018).

On retrouve également l'implicite connu relatif à la quantification universelle des implications : la quantification est souvent non-dite dans la formulation d'une implication (la formulation suivante de la conjecture 2 serait tout à fait acceptée dans un contexte arithmétique : « Si  $n$  est parfait, alors, si  $k > 1$ ,  $kn$  est abondant »), elle l'est aussi dans la formulation de la preuve, ou tout au moins dans la formulation de la conclusion : dans les preuves observées ici, la seule trace du pas de déduction concernant les quantifications universelles présentes dans la conjecture est la présentation des variables en début de preuve.

#### 4. Analyses de textes de preuves d'élèves (E et T)

Le statut des variables est bien moins clair dans les textes d'élèves (E et T) que dans les textes M. Nous allons pointer ici deux phénomènes :

- Les élèves peuvent considérer que l'utilisation d'une variable (même muette) dans la consigne vaut présentation de variable dans la preuve. Cela peut être lié à la propriété à prouver (formulée dans la consigne) : un des textes E commence ainsi par « On pose  $\sum$  diviseurs de  $n = D$  » sans présenter  $n$  (de même, la première apparition de la variable  $k$  dans ce texte vient deux lignes en dessous sans préalable : «  $k \times 2n = k \times D$  »). Cela peut également être lié à une propriété énoncée par l'élève : un texte commence ainsi par « Nous savons que  $\forall n \in \mathbb{N}$ , si (...) alors  $n$  est parfait » (la variable  $n$  est muette), cette formulation de propriété est suivie de la formulation d'une autre propriété qui utilise la variable  $n$  non quantifiée.<sup>6</sup>
- De même, le fait que la consigne demande de prouver une implication semble pouvoir sous-entendre pour certains élèves que la prémisse est vraie, ainsi un texte T commence par « Soit  $(k, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , tout d'abord on sait que », ce début de phrase est suivi par des affirmations sur les diviseurs de  $n$  et  $kn$ , la dernière propriété ainsi énoncée est justifiée par « car  $n$  est parfait » (affirmation dont la justification ne semble pouvoir être reliée à ce moment-là qu'à l'énoncé de la consigne). Un texte T précise « Montrons que si  $n$  est parfait, alors  $kn$  est abondant tel que  $k \geq 2$  », l'élève utilise juste en dessous le fait que la somme des diviseurs de  $n$  vaut  $2n$ .

Certaines formulations montrent également une grande confusion dans cette gestion des variables et des propriétés que l'on suppose vraies. Par exemple, un texte T commence par «  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\forall k \in [2, +\infty[[$ , Soit  $n$  un entier parfait ». Comment interpréter ces quantifications de  $n$  et  $k$  ? Les variables muettes utilisées dans la formulation d'une propriété peuvent être utilisées par la suite (en portant avec elles tout ou partie des propriétés énoncées). On perçoit également des difficultés quant au statut des propriétés formulées : une propriété qui apparaît dans la prémisse d'une implication à prouver, peut être considérée comme vraie sans commentaire.

Concernant les conclusions des deux pas de déduction considérés (la fin des textes), les choix sont plus variés que dans les textes M. On retrouve plusieurs fois l'enchaînement du calcul montrant que la somme des diviseurs de  $kn$  est strictement supérieure à  $2kn$  avec la phrase « donc  $kn$  est abondant » qui termine le texte. Mais on peut également repérer plusieurs autres situations : un texte passe du calcul précédent à la propriété à prouver « Ainsi  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , si  $n$  est parfait, alors  $\forall k \in \mathbb{N}_{k \geq 2}$ ,  $kn$  est abondant », un texte qui se termine par le calcul suivi de « CQFD ». Globalement on retrouve bien ici les usages constatés dans les textes M : le détail des conclusions intermédiaires concernant les implications et les quantifications n'est pas donné (tout juste trouve-t-on une allusion dans certaines productions).

## CONCLUSION

Reprenons la définition de démonstration de Balacheff (1987, p.148) : « suite d'énoncés organisée suivant des règles déterminées : un énoncé est connu comme étant vrai, ou bien est déduit de ceux qui le précèdent à l'aide d'une règle de déduction prise dans un ensemble de règles bien défini. ». Une telle définition pourrait amener à penser que la production de preuve peut se faire uniquement de façon syntaxique, les règles permettraient de manipuler les énoncés sans se poser la question de leur signification. L'article de Weber et Alcock (2004) présenté dans le TD montre bien qu'une telle démarche a rapidement des limites, et que ce n'est pas celle mobilisée par les mathématiciens et des mathématiciennes. Ce n'est pas non plus la démarche mise en œuvre par les participant·es, ni la démarche que nous souhaitons enseigner,

<sup>6</sup> Ces confusions de statuts peuvent engendrer des difficultés de lecture et de compréhension. Un texte E utilise ainsi la lettre  $k$  comme l'indice d'une notation  $\sum$ , plus loin comme indice maximal de la suite des diviseurs ( $d_1, d_2, \dots, d_k$ ), et comme nombre par lequel on multiplie le nombre  $n$  (parfait).

les travaux de Gandit (2011) ayant bien montré les risques d'une approche trop formelle de l'enseignement de la démonstration. L'interprétation des énoncés, la manipulation des objets en jeu, génériques ou singuliers, sont essentiels à la fois pour orienter et contrôler la preuve. Il est cependant parfois confortable d'agir en suivant des « règles » qui dépendent de la forme des énoncés et pas de leur sens : par exemple, confronté-es à la démonstration d'un énoncé de la forme « pour tout  $x$  de  $E$ ,  $P[x] \Rightarrow Q[x]$  », il est possible d'écrire « soit  $x$  dans  $E$ , supposons  $P[x]$  » avant de se demander ce que signifie  $P[x]$ . Il s'agit alors d'un geste syntaxique, mais qui n'est pertinent que s'il ouvre des possibles représentations sur lesquelles on peut travailler.

Nous avons montré que ce qui est fécond pour la production de preuve c'est bien l'articulation des dimensions syntaxique et sémantique. En étudiant les gestes de recherche, nous avons pu analyser cette articulation à un niveau plus local, notamment lors du processus de recherche. En nous référant ensuite à une théorie de la démonstration comme la déduction naturelle, nous avons analysé les démonstrations comme produit, en décrivant certains gestes en lien avec la manipulation du langage, et avec les pratiques langagières.

Cette distinction des dimensions syntaxique et sémantique permet aussi d'enrichir la réflexion sur l'enseignement de la démonstration, et amène de nouvelles perspectives de recherche autour de la question suivante : comment amener les élèves et les étudiant-es à acquérir certains gestes, dont la maîtrise permettrait une approche parfois syntaxique, tout en ayant recours parfois à une démarche plus sémantique pour faire avancer les idées ?

#### RÉFÉRENCES

- ALCOCK, L., INGLIS, M. (2008). Doctoral students use of examples in evaluating and proving conjectures. *Educational Studies in Mathematics*, 69, 111-129.
- ARISTOTE, (2007). *Organon. iii. Premiers Analytiques* (Traduit par J.Tricot). Vrin.
- BAILLY, F., LONGO, G. (2003). *Incomplétude et incertitude en Mathématiques et en Physique*. Consulté le 29 octobre 2022 sur <http://www.di.ens.fr/users/longo/files/PhilosophyAndCognition/incompl-incert.pdf>
- BALACHEFF, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, 18, 147-176.
- BARRIER, T. (2016). Les exemples dans l'élaboration des démonstrations mathématiques : une approche sémantique et dialogique. *Recherches en Éducation*, 27, 94-117.
- BARRIER, T, DURAND-GUERRIER, V. ET MESNIL, Z. (2019). L'analyse logique comme outil pour les études didactiques en mathématiques. *Éducation et Didactique*, 13.1, 61-81.
- BKOUICHE, R. (1982). Les mathématiques comme science expérimentale. *Bulletin APMEP*, 333, 306-324.
- BKOUICHE, R. (2008). Du caractère expérimental des mathématiques. *Repères IREM*, 70, 33-76.
- CASSOU-NOGUES, P. (2001). *De l'expérience mathématique. Essai sur la philosophie des sciences de J. Cavaillès*. Vrin.
- CAVAILLES, J. (1938). *Méthode axiomatique et Formalisme*. Hermann.
- CAVAILLES, J. (1994). *Œuvres complètes de philosophie des sciences*. Hermann.
- CHATELET, G. (1993). *Les enjeux du mobile. Mathématique, physique, philosophie*. Seuil.
- CHESNAIS A. (2018). *Un point de vue de didactique des mathématiques sur les inégalités scolaires et le rôle du langage dans l'apprentissage et l'enseignement*. Note de synthèse HdR. Université de Montpellier.
- CHEVALLARD, Y. (1991). Le caractère expérimental de l'activité mathématique. *Petit x*, 30, 5-15.
- DELOUSTAL-JORRAND, V., GANDIT, M., MESNIL, Z., DA RONCH, M. (2020). Utilisation de l'articulation entre les points de vue syntaxique et sémantique dans l'analyse d'un cours sur le raisonnement. Dans T. HAUSBERGER, M. BOSCH, ET F. CHELLOUGHI (eds.), *Proceedings of the Third Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics, INDRUM 2020, 12-19 September 2020. Bizerte, Tunisia* (pp. 378-387). University of Carthage and INDRUM.
- DE VILLIERS, M. (1990). The role and function of proof in mathematics, *Pythagoras*, 24, 17-24.
- DIAS, T. (2008). *La dimension expérimentale des mathématiques : un levier pour l'enseignement et l'apprentissage*. Thèse de doctorat, Université Claude Bernard Lyon 1.
- DURAND-GUERRIER, V. (1996). *Logique et raisonnement mathématique. Défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication*. Thèse de doctorat, Université Claude Bernard Lyon 1.
- DURAND-GUERRIER, V. (2005). *Recherches sur l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique*. Note de synthèse, Université Claude Bernard Lyon 1.
- DURAND-GUERRIER, V. (2010). La dimension expérimentale en mathématiques : Enjeux épistémologiques et didactiques. Dans *Expérimenter des problèmes de recherche innovants en mathématiques à l'école*. INRP.

Vandebrouck, F., Emprin, F., Ouvrier-Buffer, C. & Vivier, L. (dir.) (2023). Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques - Preuve, Modélisation et Technologies Numériques. Volume des ateliers des actes de EE21.

- DURAND-GUERRIER, V., ARSAC, G. (2003). Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Spécificité de l'analyse. Quelles implications didactiques ? *Recherches en didactique des mathématiques*, 23(3), 295-342.
- DURAND-GUERRIER, V., MESNIL, Z. (2022). Quelques pistes pour améliorer l'usage de l'implication mathématique en début d'université, *EpiDEMES*, 1.
- GANDIT, M. (2011). Etude épistémologique et didactique de la preuve en mathématiques et de son enseignement. Une ingénierie de formation. Dans M. ABBOUD-BLANCHARD, A. FLÜCKIGER (eds.) *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*, 2010 (pp. 175-197). IREM de Paris.
- GARDES, M.-L. (2013). *Étude de processus de recherche de chercheurs, élèves et étudiants, engagés dans la recherche d'un problème non résolu en théorie des nombres*. Thèse de doctorat, Université de Lyon.
- GARDES, M.-L. (2017). Une étude d'épistémologie contemporaine sur l'activité de recherche mathématique de chercheurs : intérêt pour l'étude didactique. Dans M. BÄCHOLD, V. DURAND-GUERRIER, V. MUNIER, *Epistémologie et Didactique, Synthèses et études de cas en mathématiques et en sciences expérimentales* (pp.177-192). Presses universitaires de Franche-Comté.
- GARDES, M.-L. (2018). Démarches d'investigation et recherche de problèmes. Dans G. ALDON, *Le Rallye mathématique, un jeu très sérieux !* (pp. 73-96). Canopé Editions.
- GIROUD, N. (2011). *Étude de la démarche expérimentale dans les situations de recherche pour la classe*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier Grenoble.
- GIUSTI, E. (2000). *La naissance des objets mathématiques*. Ellipses.
- HACHE, C. (2015). Pratiques langagières des mathématiciens, une étude de cas avec « avec ». *Petit x*, 97, 27-43.
- HACHE, C., MESNIL, Z. (2015) Pratiques Langagières et preuves. *Actes du 22e colloque de la CORFEM, Nîmes, juin 2015*. Adirem
- HANNA, G. DE VILLIERS, M. (eds.) (2012). *Proof and proving in mathematics education*. Springer.
- KOUKI, R. (2018). L'articulation des dimensions syntaxique et sémantique en algèbre du secondaire. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 38(1), 43-78.
- LACOMBE, D. (2007). Tout ce que vous avez toujours voulu savoir sur la logique et qu'on n'a jamais voulu vous révéler. Dans *Séminaire de l'IREM de Paris*. Vidéo en ligne. <https://video.irem.univ-paris-diderot.fr/videos/watch/3cfc4823-71a2-4b78-b565-7b4e6199275b> (consulté le 29 octobre 2022)
- MARIOTTI, M., DURAND-GUERRIER, V., STYLIANIDES., G. (2018). Argumentation and proof. Dans T. DREYFUS, M. ARTIGUE, D. POTARI., S. PREDIGER, K. RUTHVEN (eds) *Developing research in mathematics education - twenty years of communication, cooperation and collaboration in Europe* (pp.75-89, 2018). Routledge.
- PERRIN, D. (2007). L'expérimentation en mathématiques. *Petit x*, 7, 6-34.
- REBIERE, M. (2013). S'intéresser au langage dans l'enseignement des mathématiques, pour quoi faire ? Présentation de quelques concepts développés par le groupe de didacticiens du français de Bordeaux, dans A. BRONNER et al. (2013) *Questionsvives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage*. La pensée Sauvage
- SELDEN, A., SELDEN, J. (1995). Unpacking the logic of mathematical statements. *Educational Studies in Mathematics*, 29 (2), 123-151.
- TALL, D., VINNER, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.
- WEBER, K., ALCOCK, L. (2004). Semantic and syntactic proof productions. *Educational Studies in Mathematics*, 56, 209-234.



## ANALYSE DIDACTIQUE DES RAISONNEMENTS EN CLASSE DE MATHÉMATIQUES PAR L'USAGE D'UN MODÈLE SPÉCIFIQUE EXEMPLES D'ÉTUDES DE SITUATIONS À DIFFÉRENTS NIVEAUX DE SCOLARITÉ

Bloch I. \*, Front M.\*\*, Gibel P.\*

### RÉSUMÉ

En trois séances de deux heures, cet atelier/séance de travaux dirigés a proposé aux participants de découvrir, de s'approprier et de mettre en œuvre un modèle d'analyse des raisonnements des élèves, modèle basé sur la prise en compte de plusieurs dimensions : les conditions de l'élaboration d'un raisonnement en situation, les modalités et fonctions des raisonnements (justifier, expliquer, argumenter, prouver, démontrer, etc.) et leurs dimensions syntaxique et sémantique. Ce modèle a été appliqué dans trois contextes différents : les fonctions au début du lycée, les nombres au primaire, et les pavages du plan au secondaire.

Mots clefs : modélisation, raisonnement, argumentation, preuve.

### ABSTRACT

During three slots of two hours the participants were invited to discover and apply a model to analyse mathematical arguments in a classroom session where a problem is submitted to students. This model is based on different dimensions: conditions in which students elaborate reasoning when they solve in a situation, functions of reasoning (justify explain, argument, prove, demonstrate, etc.) and the syntactic and semantic dimensions. The model has been applied in three different contexts: the teaching of numeric functions at the beginning of secondary school, the numbers in primary school and the Archimedean tilings in secondary school.

Keywords : modeling, reasoning, argumentation, proof.

## ANALYSE DES SITUATIONS ET DES RAISONNEMENTS

La modalité choisie pour cet atelier est un travail d'étude de trois situations d'argumentation et de preuve relevant des niveaux de scolarité (primaire, secondaire et supérieur) pour lesquels nous mettrons à l'épreuve l'adéquation du modèle (Bloch et Gibel, 2011) à une analyse détaillée des différentes formes de raisonnements. Les situations à l'étude ont été choisies dans différents domaines des mathématiques : arithmétique, analyse et géométrie. Il s'agit d'étudier les raisonnements produits par les élèves, et la capacité de ceux-ci à résoudre le problème posé et à comprendre les concepts mathématiques en jeu dans la situation. Nous présentons brièvement ci-dessous notre modèle d'analyse des raisonnements en situation.

### *1. L'analyse des raisonnements*

La méthodologie de l'analyse de la résolution de problèmes nous amène à prendre en compte la dimension sémiotique du raisonnement dans ses différentes formes : orale, écrite et formelle. Une attention particulière est portée aux différentes formes du langage permettant d'exprimer les mathématiques. Une première séance est donc consacrée à l'étude des raisonnements, et vise à justifier la nécessité de prendre en compte :

- L'identification de leurs différentes formes par le recours à une analyse sémiotique ;
- Les conditions d'utilisation en classe de mathématiques ;
- L'identification des différentes fonctions ;
- La complexité conceptuelle propre au contenu à enseigner (aspects historiques et épistémologiques).

Pour rendre compte des différentes formes de raisonnements en classe de mathématiques, nous avons choisi de définir le raisonnement en choisissant une définition plus large que celle utilisée habituellement en mathématiques :

---

\* Équipe E3D, laboratoire CHANGES, Université de Bordeaux

\*\* Laboratoire S2HEP, Université de Lyon

« Un raisonnement est un enchaînement, une combinaison ou une confrontation d'énoncés ou de représentations respectant des contraintes susceptibles d'être explicitées, et conduits en fonction d'un but. » (Oléron, 1977, p.9).

Notre travail de recherche, en amont, avait consisté à construire un cadre théorique afin de :

- Éclairer le raisonnement du point de vue de ses fonctions dans la situation et du statut des représentations sémiotiques produites ;
- Prendre en compte les raisonnements – valides et erronés – des élèves en précisant les conditions dans lesquelles ils ont été élaborés et le niveau de preuve associé ;
- Élaborer un modèle multidimensionnel qui permette une visibilité des différentes formes de raisonnements : schéma, langage oral, langage écrit,...

## 2. Différents types de justifications en situation de validation, de décision ou de preuve

Lors de la mise en œuvre de situations dans les classes, et plus généralement dans la pratique des mathématiques, nous observons les types suivants de justification :

- Justification syntaxique : l'argumentation se réfère à des règles formelles ; l'élève établit la validité du discours à l'aide des règles permises – c'est l'objectif final de l'apprentissage, afin que l'apprenant pratique des mathématiques de façon experte.
- Justification sémantique : argumentation de la pertinence et de la validité des modèles. Cette pertinence est établie en se référant aux objets mathématiques (via leurs représentations) pris en compte pour l'argumentation ;
- Justification pragmatique : justification de la validité et de l'intérêt de la procédure par référence à l'adéquation au modèle.

## 3. Les niveaux de milieux, une référence pour construire et étudier des situations

Rappelons que les situations adidactiques ou à dimension adidactique sont organisées suivant des niveaux de milieux : ces niveaux permettent un travail différent pour les élèves, à savoir, identification de la question posée (milieu matériel  $M_{-2}$ ) ; recherche pragmatique de solution (milieu objectif  $M_{-1}$ ) ; formalisation des résultats (milieu de référence  $M_0$ ), puis, sous la responsabilité du professeur, synthèse et conclusion : institutionnalisation, apprentissage des savoirs associés (cf. Bloch et Gibel, 2011).

Dans l'article cité ci-dessus, nous avons proposé un tableau permettant de relier les raisonnements aux milieux, ces milieux décrivant les *étapes* de résolution de la situation. Ce tableau intègre la nature sémantique et/ou syntaxique des raisonnements.

	Milieu M-2	Milieu M-1	Milieu M0
<b>Fonctions des raisonnements</b>	R1.1 SEM - Intuition sur un dessin - Décision de calcul - Moyen heuristique - Exhibition d'un exemple ou d'un contre-exemple	R1.2 SYNT/SEM - Calculs génériques - Formulation de conjectures étayées - Décision sur un objet mathématique	R1.3 SYNT - Formalisation des preuves dans la théorie mathématique requise (avec aide du P éventuellement)
<b>Niveaux d'utilisation des symboles</b>	R2.1 SEM Icônes ou indices dépendant du contexte (schémas, intuitions...)	R2.2 SYNT/SEM Arguments 'locaux' ou plus génériques : indices, calculs	R2.3 SYNT Arguments formels spécifiques : ici symboles de l'Analyse
<b>Niveau d'actualisation du répertoire</b>	R3.1 SYNT/SEM - Utilisation ponctuelle de connaissances anciennes - Enrichissement au niveau heuristique : calculs, conjectures ponctuelles	R3.2 SYNT/SEM Enrichissement au niveau argumentaire : - des énoncés - du système organisateur	R3.3 SYNT - Formalisation des preuves - Introduction d'ostensifs organisés - Intégration des éléments théoriques du domaine mathématique

*Tableau 1. – milieux et raisonnements*

Ce tableau s'est révélé efficace pour étudier le pilotage de la situation proposée, et les fonctions des raisonnements mis en œuvre par les élèves ; il permet aussi de comprendre comment les raisonnements produits par les élèves en situation d'action et de formulation sont réutilisés en situation de validation ; il est possible d'identifier les connaissances et les savoirs mobilisés, valides et erronés, et leurs évolutions au cours de la séquence.

Le tableau donne accès à la nature, la modalité et la fonction des raisonnements utilisés en fonction de l'objectif de preuve. Les axes du tableau réfèrent à des niveaux de modélisation différents des raisonnements, soit une modélisation *globale* relative aux niveaux de milieux en lien avec les fonctions des raisonnements, soit une modélisation *locale* au niveau des arguments produits dans le travail et les échanges en classe. Signalons que les productions de signes (des élèves et de l'enseignant) peuvent être des énoncés « écrits », des éléments scripturaux (graphiques, schémas, dessins), et des calculs (liés aux différents domaines des mathématiques) ; mais aussi des énoncés « oraux », et des éléments gestuels.

Ce modèle doit permettre d'affiner et de prolonger l'analyse a priori de la situation en lien étroit avec les niveaux de milieux, d'identifier les situations de décision, de formulation ou validation, en les reliant aux phases didactiques et aux phases d'institutionnalisation lors de l'analyse a posteriori. Il doit aussi conduire à analyser les signes produits en situation et à les lier aux niveaux des raisonnements élaborés par les élèves et au répertoire didactique de la classe (répertoire de représentation).

Nous utilisons aussi une version « simplifiée » de la sémiotique de Peirce pour analyser le niveau des signes employés par les élèves, selon le milieu (pour une description de cet usage, voir Bloch et Gibel, 2011).

Ainsi, nous n'utilisons que de trois distinctions : icône, indice et symbole/argument :

- Une interprétation iconique est de l'ordre de l'intuition, éventuellement sur un schéma, une figure ;
- Un signe indiciel est de l'ordre d'une proposition ;
- Un symbole-argument est de l'ordre d'une preuve mathématique.

## LES SITUATIONS PRESENTEES ET LEUR ANALYSE A PRIORI

La Théorie des Situations Didactiques (TSD) et l'étude des situations comprennent une composante incontournable : c'est l'analyse a priori de la situation proposée, à un niveau donné, aux élèves. Cette analyse a priori se fait sur des critères également rigoureux, dont nous donnons un résumé ci-dessous. Ces éléments ont été transmis aux personnes assistant à l'atelier, et exemplifiés sur les trois situations présentées.

Ces éléments permettent d'avoir une anticipation du déroulement de la séance en classe, et ils permettent au professeur qui a fait cette analyse de réagir conformément aux attentes de la situation et du travail des élèves.

### 1. Les situations présentées

Durant la première séance, ce modèle a été exposé aux participants ; puis la situation « Graphiques et fonctions » leur a été donnée afin qu'ils effectuent l'analyse a priori et soient conscients des savoirs en jeu (voir Annexe 1 ; cf. aussi Bloch, 2002).

Des extraits d'échanges avec les élèves ont été présentés aux participants ; dans ces extraits, les élèves cherchent un critère pour pouvoir affirmer qu'un graphique est bien celui d'une fonction ; puis les notions de majorant, fonction bornée, etc. ont été discutées.

Nous avons débuté la deuxième séance par la présentation de la situation « Le nombre le plus grand » mise en œuvre au C.O.R.E.M. dans une classe de CM2. Après avoir construit l'analyse a priori de la situation, nous avons effectué avec les participants une analyse de différentes formes de raisonnements produits par les élèves et par l'enseignant au cours de différentes phases de la séquence (Gibel, 2015).

Lors de la troisième séance, la situation des pavages archimédiens du plan (voir annexe 3 et Front, 2015) a été travaillée et les remarques des participants prises en compte dans la conclusion.

## LES RAISONNEMENTS OBSERVES EN SITUATION

### 1. Les fonctions

Cette première situation donne à voir une alternative à dimension adidactique pour l'introduction des fonctions 'quelconques' au lycée. Pour les détails de la situation, et les schémas qui la composent, voir l'Annexe 1. La situation est détaillée dans l'article Bloch (2002) accessible sur le site de la revue *Petit x*.

L'introduction d'un concept par une situation à dimension adidactique vise à articuler connaissances des élèves, et savoirs mathématiques. Ainsi que le dit F. Conne :

« Enseigner, c'est travailler le savoir, pour induire dans un cadre situationnel choisi, un processus cognitif supportant l'apprentissage, dont le produit sera en retour institué en savoir » (Conne, 1992)

Or, l'évolution de l'enseignement des mathématiques a montré des modifications de programmes souvent peu pertinentes, ainsi :

— les années 70 tentaient d'organiser l'enseignement autour de la présentation formelle du savoir (les « mathématiques modernes »), en supposant ce savoir suffisant pour traiter les problèmes qui en relèveraient, et en négligeant la construction nécessaire de connaissances relatives à ces problèmes ;

— l'enseignement des années 80, quant à lui, présentait des problèmes à traiter avec très peu de savoirs institués, mais chaque cas nouveau nécessitait la mise en œuvre de connaissances importantes relatives à l'algèbre et aux majorations ; ces connaissances se sont révélées trop

locales pour être instituées facilement afin de pouvoir être ensuite décontextualisées et réinvesties, donc le temps didactique ne pouvait avancer de façon raisonnable ;

— l'enseignement du début des années 2000, sous couleur de baser l'approche de l'analyse sur l'intuition graphique, ne donnait à l'élève aucun outil lui permettant de traiter des cas différents de ceux qui lui étaient présentés. On pourrait dire qu'il tentait de se baser sur des connaissances, mais ces connaissances, si elles se construisent effectivement (ce qui resterait à prouver) sont de l'ordre des connaissances privées et non opérationnelles dans le travail mathématique : un enseignement uniquement ostensif ne permet pas aux élèves de travailler sur des critères mathématiques ;

— les programmes de 2019 ont institué une version assez satisfaisante et ont corrigé ces défauts de conception ; de ce fait, la situation *Graphiques et Fonctions* est très compatible avec la philosophie de ces nouveaux programmes.

Il s'agit de construire une situation comportant un milieu propice à la construction de connaissances sur les fonctions, mais aussi permettant l'institutionnalisation de savoirs et la validation des propriétés. Cette situation doit favoriser le raisonnement sur les fonctions, et pas uniquement des connaissances ponctuelles isolées.

La situation « Graphiques et Chemins » vise à introduire les propriétés des fonctions, notamment autres que les fonctions affines, en se basant sur des constructions par les élèves de RGC (Représentations Graphiques Cartésiennes), en identifiant les fonctions et leurs propriétés, et en construisant des fonctions 'quelconques' définies avec des relations par exemple numériques ou algébriques. Ceci définit un milieu d'apprentissage initiant les concepts visés en Analyse.

Dans Bloch (2002), le milieu est analysé comme suit :

« Un préalable à la construction d'un tel milieu est l'étude des caractéristiques des registres disponibles pour les notions d'analyse, et des possibilités de construire des tâches accessibles dans ces différents registres.

Les registres disponibles sont a priori :

- Le registre numérique (tableaux de valeurs)
- Le registre algébrique (équations de droites, de fonctions)
- Le registre géométrique (grandeurs géométriques variables)
- Le registre graphique (courbes dans un repère)
- Le registre formel (notations  $f$ ,  $f'$ ,  $f \circ g$ ,  $f(x)$ , etc...)

L'infini, et les représentations qui lui sont liées, ont un statut à part, ils sont utilisés pour l'heuristique, mais pas pour valider au niveau du début de l'enseignement secondaire.

Non seulement ces registres n'ont pas tous les mêmes fonctionnalités de représentation, mais ils n'outillent pas de la même manière pour valider et ils ne "montrent" pas les mêmes propriétés des fonctions. On dira qu'un ostensif pris dans un registre donné est un *représentant* d'un objet mathématique, et il en rend manifeste ou non certaines propriétés. »

La construction de ce milieu suppose aussi que l'on s'interroge sur les outils de validation possibles ; à ce niveau, on ne dispose pas du système de validation de l'Analyse. On accepte donc des outils pragmatiques, lesquels fourniront des arguments 'locaux' ensuite basculés vers des théorèmes plus généraux. Les tâches proposées aux élèves sont décrites dans Bloch (2002) :

« Ainsi dans le registre graphique :

- trouver des images et des antécédents, et valider ainsi des propriétés ;
- élargir la fenêtre ou faire un zoom ;
- changer le repère et savoir ce qui est préservé ou non ;
- changer d'échelle, reconnaître que la concavité est préservée, etc...

C'est dans la conversion entre registres (pour une même fonction, changer de représentant) que l'on voit surtout apparaître des tâches non routinières dans l'enseignement secondaire, ainsi :

- Trouver sur une courbe des informations sur les propriétés d'une (classe de) fonction ;
- Reconstituer l'équation algébrique à partir de données graphiques, numériques, et d'une typologie (fonction de degré 2 ou 3, ou...) ;
- Construire des courbes sous contraintes (fonction bornée ou non, racines données...) ;
- Interpréter des équations comme celles de fonctions composées ;
- Composer des fonctions données par leur graphique ; trouver des réciproques ;
- Dédire d'un graphique des propriétés générales des fonctions, et les écrire sous forme de chaînes de symboles formels. »

L'originalité de cette situation est que le graphique  $y$  est utilisé comme un outil de raisonnement, de preuve et de construction, et non seulement comme une 'image' de fonction ; et, ce graphique est traité de façon globale – pour les propriétés – et non simplement ponctuelle. Ainsi les élèves sont en mesure de raisonner sur des graphiques comme étant des représentants de fonctions, d'en déduire des propriétés de ces fonctions – ils sont donc aux niveaux R1.2 et R2.2 du tableau des raisonnements, dans le milieu  $M_1$ .

Des extraits de transcription de la situation ont été proposés aux participants à l'atelier. Ainsi, l'on a pu observer les discussions sur le fait qu'un graphique représente une fonction ou non (« Un cercle n'est pas une fonction ! Il faut qu'il y ait une seule image... ») ; sur la nature des fonctions (« Le produit de deux fonctions affines est une fonction affine ? »), sur la fonction réciproque d'une fonction donnée, son existence et son unicité, etc. (voir le détail dans l'article de *Petit x*).

Le graphique n'est alors plus le but rituel d'un travail qui se passe dans un autre registre. Il est devenu outil de preuve dans un questionnement où les objets problématiques sont des concepts : fonctions et propriétés des fonctions. Cette situation contribue à créer un milieu fonctionnel pour poser des questions d'analyse, un "herbier" de fonctions plus riche que les fonctions de référence algébriques (fonctions affines, carré, cube, inverse...).

Cet apport au niveau de l'organisation d'une notion et des raisonnements s'avère essentiel : en effet, dans l'organisation classique de l'enseignement sur les fonctions, les connaissances associées aux savoirs de l'analyse sont parfois manquantes dans l'enseignement secondaire, et donc les professeurs de niveau post-bac n'ont d'autre ressource que d'introduire simultanément les objets de la théorie, les modes de raisonnement, les preuves et le formalisme, et les questions sur la validité des énoncés : d'où un échec massif des étudiants, encore constaté aujourd'hui. L'expérimentation menée a prouvé qu'il existe des situations permettant de faire travailler, dans le secondaire, les connaissances et les raisonnements nécessaires à la transition avec le supérieur : la situation "Graphiques et chemins" donne des possibilités pour ce travail, sans aborder directement le formalisme, mais en construisant des outils pour l'entrée dans ce type de validation, et en s'appuyant sur des connaissances des élèves.

## 2. La situation « Le Nombre le plus grand »

Lors de la deuxième séance, nous avons pris comme objet d'étude les raisonnements élaborés par les élèves et l'enseignant au cours d'une séquence " Le nombre le plus grand ", proposée en CM2 au Centre d'Observation et de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (C.O.R.E.M.). La mise en œuvre de cette séquence est liée à la rencontre de Brousseau et de Glaeser. Le problème de mathématiques a été initialement proposé par Glaeser (1999), l'énoncé est le suivant :

*Soient cinq nombres naturels quelconques  $a, b, c, d, e$ . Quel est le nombre le plus grand que l'on peut obtenir à partir des quatre opérations élémentaires  $\{+; -; \times; :\}$  appliquées à ces nombres qui ne seront pris dans le calcul qu'une seule fois, une même opération pouvant être utilisée plusieurs fois.*

L'idée de G. Brousseau est de faire débattre les élèves sur des déclarations mathématiques suivant des règles qui les conduisent à produire des preuves, plus précisément leur faire chercher des contre-exemples.

La situation d'argumentation, telle qu'elle a été conçue par Brousseau, est une situation à dimension adidactique : en effet il est possible et même probable que l'enseignant sera conduit à intervenir de manière à assurer le maintien de l'engagement des élèves dans le processus de preuve. La situation de validation est assimilable à une situation à dimension adidactique (Bloch, 1999) ; afin de pallier l'absence d'arguments produits par les élèves pour valider ou invalider une méthode permettant de gagner, l'enseignant sera amené à confronter les élèves à un nouveau jeu dans le but d'éprouver la validité de la méthode objet d'étude. Par conséquent l'analyse de cette séquence, à partir de notre modèle, devrait nous permettre d'apporter des éléments de réponse aux questions suivantes :

Quelles sont les différentes formes de raisonnements qui apparaissent lors des différentes phases de cette séquence ? Quelles fonctions recouvrent-ils ? À quel(s) niveau(x) de milieu(x) réfèrent-ils ? Comment évolue, au cours de la séance, le répertoire didactique de la classe ?

Nous souhaitons effectuer une analyse en théorie des situations de la complexité didactique des raisonnements produits ; pour cela nous allons utiliser le schéma de la structuration du milieu didactique, afin d'explicitier d'une part les différentes formes et les différentes fonctions des raisonnements, d'autre part les conditions qui définissent chacune des situations dans laquelle les élèves ont produit les raisonnements.

L'utilisation de notre modèle au cours de l'atelier a eu pour finalités :

1) d'approfondir l'analyse *a priori* de la séquence, en explicitant, pour chacune des situations emboîtées du schéma, les différentes formes de raisonnements susceptibles d'apparaître dans la relation didactique en regard des principaux objectifs de l'enseignant et des conditions qui définissent la situation.

2) D'analyser *a posteriori* dans la séquence « Le nombre le plus grand »

- les raisonnements produits par les élèves en situation d'action,
- les conditions dans lesquelles ils ont été élaborés,
- les transformations de ces mêmes raisonnements lorsque les élèves sont conduits à les utiliser en situation de formulation ou de validation.

L'un des principaux objectifs de cette séquence est de permettre aux élèves de passer progressivement, au cours des différentes phases de la séquence, de raisonnements arithmétiques à l'élaboration et à l'étude d'énoncés généraux, que nous nommerons *méthode*, illustrant d'une certaine façon l'entrée dans l'Algèbre.

Ce qui est visé dans cette séquence, outre la mise en œuvre des propriétés des opérations, c'est principalement l'enseignement des règles du jeu de la preuve : il s'agit d'une leçon sur le vrai et le faux, mais également sur la manière de l'établir. L'objectif principal de la séquence est de mettre les élèves en situation de débattre des méthodes permettant d'obtenir le nombre le plus grand, quelle que soit la suite de nombres proposée.

Pour qu'il soit envisageable de demander aux élèves d'élaborer des méthodes, il faut dans un premier temps envisager des répétitions de calculs, c'est-à-dire plusieurs jeux successifs sur des 5-uplets donnés par l'enseignant afin que les élèves élaborent des programmes de calcul. Pour qu'une mise en débat de la validité des méthodes soit envisageable, c'est-à-dire pour que la situation de validation puisse être à dimension adidactique, il est nécessaire que : les méthodes étudiées aient été produites par les élèves, et donc qu'elles résultent d'un travail fondé sur l'écriture de méthode ; qu'elles aient fait l'objet d'une reconnaissance formelle par l'enseignant et appartiennent ainsi au *répertoire didactique* de la classe, de sorte qu'elles soient utilisables par les élèves ; qu'ils parviennent à se les approprier, c'est-à-dire à faire le lien entre leurs formulations et leurs usages en situation de jeu ; qu'elles soient assimilables à des assertions dans le sens où elles sont correctement formées et consistantes.

La première étape de l'élaboration du modèle d'analyse des raisonnements associé à l'analyse de la situation a conduit les participants de l'atelier à effectuer l'analyse a priori de cette situation et ensuite à identifier chacun des niveaux de milieu.

✓ La situation objective : l'acteur objectif et le milieu matériel

La situation objective, objet de notre étude, est fondée sur le problème de mathématiques proposé par G. Glaeser. C'est donc une situation de jeu pour un 5-uplet donné. Le milieu matériel est constitué par les entiers naturels. Les connaissances du *répertoire didactique*, que les élèves vont devoir utiliser, relèvent principalement des opérations sur les entiers et de leurs propriétés.

✓ La situation de référence : l'élève agissant et le milieu objectif

Les élèves doivent décider de la suite de calculs à effectuer afin de produire le nombre le plus grand à partir du 5-uplet proposé. Ils doivent choisir les opérations arithmétiques à appliquer aux nombres proposés en respectant la règle : chacun des nombres ne peut être utilisé qu'une seule fois. Les élèves doivent ensuite formuler le nombre obtenu et sa justification, autrement dit le programme de calcul associé. La validité du programme de calcul est examinée par les élèves, sous couvert de l'enseignant, du point de vue de la validité des calculs effectués et du point de vue du respect des règles du jeu.

✓ La situation d'apprentissage : l'élève apprenant et le milieu de référence

L'élève en situation d'apprentissage est amené à produire des formulations de méthodes générales et à s'interroger sur la validité de chacune d'elles. Les situations de formulation et de validation sont étroitement liées ; en effet l'étude de la validité d'une méthode repose sur la capacité des élèves à construire un contre-exemple.

✓ L'élève apprenant en situation de formulation d'une méthode

L'élève apprenant doit prendre en compte les objets, les règles, mais également les conditions dans lesquelles chacun des programmes de calcul ont été produits. L'élève considère maintenant ses actions sur les objets en regard des conditions nécessaires ou suffisantes à la réussite. Pour le dire autrement, il ne s'agit plus de jouer au jeu du « nombre le plus grand » pour gagner, mais de savoir pourquoi et à quelles conditions on est sûr de gagner. Les élèves doivent relever le défi consistant à élaborer une méthode dont le domaine de validité soit le plus étendu possible.

La phase de formulation des méthodes vise à permettre aux élèves une prise de position sur l'action, et donc une prise de conscience des décisions sur lesquelles reposent leurs actions, afin qu'ils puissent produire des procédures dont la validité pourra être mise en débat. En situation de formulation, les élèves doivent écrire une méthode permettant d'obtenir le nombre le plus grand quelle que soit la suite de nombres proposée.

✓ L'élève apprenant en situation de validation

Le domaine de validité d'une méthode est lié aux connaissances des conditions dans lesquelles son usage s'avère adéquat. La prise de conscience par le sujet du domaine de validité du raisonnement produit, permet d'envisager l'usage de ce raisonnement dans des situations d'argumentation et de preuve. Les élèves se positionnent en tant que « proposant » ou « opposant » et débattent de la validité des méthodes proposées par les différents groupes.

L'élève en situation de validation, ayant le statut d'opposant ou de proposant, arrive avec une culture, des connaissances étroitement liées au répertoire didactique dont il dispose, et peut éventuellement, en situation de débat, formuler des exigences ou des interrogations qui ne sont pas nécessairement celles de la situation de preuve telle qu'elle a été conçue initialement par Brousseau.

✓ La situation didactique : L'élève et la situation d'apprentissage

La situation didactique repose d'une part sur la reconnaissance par l'enseignant du statut des énoncés proposés en tant que méthode et d'autre part sur la reconnaissance par l'enseignant, si

cela s'avère nécessaire, de la validité des arguments produits par un élève ou un groupe d'élève dans le but d'invalider une méthode.

La deuxième étape de l'étude a amené les participants à prendre en compte, pour chaque niveau de milieu  $M_{-2}$ ,  $M_{-1}$ ,  $M_0$ , définis précédemment les trois dimensions (fonctions des raisonnements ; niveaux d'utilisation des signes : icône, indice, symbole-argument ; répertoire didactique), nous parvenons au tableau présenté ci-dessous. Les niveaux matriciels indiqués (R1.1, R1.2, R1.3, etc.) servent de référence lors de l'analyse du corpus : la progression des indices matriciels va en principe de pair avec la sophistication et la formalisation croissantes des raisonnements et des signes.

Le tableau ci-dessous indique pour chacun des niveaux de milieu  $M_{-2}$ ,  $M_{-1}$  et  $M_0$  les formes de raisonnement susceptibles d'être produites par les élèves en spécifiant leurs fonctions, les niveaux d'utilisation des signes et l'évolution du répertoire de représentation (en précisant l'usage et l'actualisation des connaissances et des savoirs).

	Milieu $M_{-2}$	Milieu $M_{-1}$	Milieu $M_0$
<b>Fonctions des raisonnements</b>	R1.1 SEM - Décision de calcul - Moyen heuristique - Exhibition d'un exemple ou d'un contre-exemple	R1.2 SYNT/SEM - Calculs génériques - Formulation de conjectures étayées - Décision sur un objet mathématique - Comparaison de méthodes - Élaboration de contre-exemple	R1.3 SYNT - Explications, justifications visant à définir les règles du jeu de la preuve et leurs usages.
<b>Niveaux d'utilisation des signes</b>	R2.1 SEM Icônes ou indices dépendant du contexte (schémas, intuitions, modèle implicite d'action,...)	R2.2 SYNT/SEM Symboles-arguments « locaux » ou génériques	R2.3 SYNT Symboles-arguments formels
<b>Usage et actualisation du répertoire didactique</b>	R3.1 SYNT/SEM - Utilisation ponctuelle de connaissances anciennes - Enrichissement au niveau heuristique : calculs, conjectures ponctuelles.	R3.2 SYNT/SEM Enrichissement des énoncés au niveau argumentaire	R3.3 SYNT Formulation de preuve(s)

**Tableau 2.** – Les axes de l'analyse des raisonnements en fonction des niveaux de milieux associés à la situation « Le nombre le plus grand »

En utilisant le modèle d'analyse des raisonnements définis précédemment, lors de la troisième étape de l'atelier, nous avons proposé aux participants d'effectuer une analyse de plusieurs épisodes de la phase de validation. Certains des épisodes, analysés au cours de l'atelier, sont proposés en Annexe 2.

L'analyse de la séquence, réalisée à partir du modèle, a permis de mettre en évidence la production de nombreux raisonnements dans des fonctions très diverses telles que : prendre des décisions afin de produire une réponse, justifier la validité d'un programme de calcul, élaborer une méthode générale lors de la situation de formulation, produire des conjectures, organiser les tâches au sein d'un groupe, argumenter, débattre de la validité des méthodes, de manière à formuler une méthode dont le domaine de validité soit le plus étendu possible. De plus elle a permis d'étudier la nature des raisonnements et de mettre en évidence la capacité des élèves de primaire à produire des raisonnements sous la forme de raisonnements par disjonction de cas.

Le modèle met en évidence la richesse des raisonnements produits en les reliant aux connaissances et aux savoirs antérieurs du répertoire didactique concernant les opérations élémentaires et les propriétés de la multiplication (commutativité, élément neutre et distributivité de la multiplication sur l'addition). Du point de vue des formulations, le modèle donne à voir l'évolution des énoncés en lien avec les différentes situations : on passe de la formulation de suites de calculs arithmétiques à la rédaction de méthodes générales, de nature algébrique, pour parvenir à la production d'arguments sémantiques et syntaxiques.

Cette évolution est observable en situation de formulation et en situation de validation. L'analyse sémiotique montre également le décalage effectif entre le formalisme introduit par l'enseignant et le répertoire didactique effectivement mobilisé par les élèves tout au long de la séquence. Ceci conforte l'analyse a priori : la situation « finale » étant algébrique, il était difficile pour les élèves de ce niveau de parvenir à une formulation de cette nature.

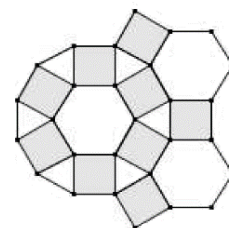
Nous avons souhaité mettre en évidence la robustesse de notre modèle pour analyser les différentes formes de raisonnements, en situation à dimension adidactique, en illustrant son utilisation à un niveau d'enseignement (CM2) assez éloigné de celui illustré initialement en classe de Première scientifique (Bloch et Gibel, 2011). L'intérêt du modèle est lié au fait qu'il permet l'étude du raisonnement produit, qu'il soit ou non valide, de différents points de vue : la fonction du raisonnement en lien avec le niveau de milieu correspondant, la nature et le statut du raisonnement produit d'un point de vue sémiotique et qu'il permet également de déterminer l'usage et le niveau d'actualisation du répertoire didactique. Cette étude, selon les trois axes définis précédemment, permet de déterminer l'efficacité des situations du point de vue de la pratique du raisonnement, mais aussi du point de vue de l'utilisation du répertoire de connaissances de l'élève. Cette étude très fine des raisonnements permet également d'envisager un aménagement de l'ingénierie dans le but de permettre aux élèves de concevoir les mathématiques, et plus précisément les situations de validation, comme un moyen d'étudier précisément le domaine de validité des énoncés.

### 3. Pavages archimédiens

Le troisième temps proposé, en appui sur la situation « Pavages archimédiens du plan » (cf. annexe 3), interroge particulièrement l'identification et l'étude des raisonnements dans les phases adidactiques. Le modèle d'analyse des raisonnements mobilisé doit là encore mettre en évidence le potentiel de la situation pour l'émergence de sémoses, l'élaboration des raisonnements, en identifiant les différentes formes et les fonctions.

Le problème proposé est la recherche des pavages archimédiens du plan, c'est-à-dire des recouvrements du plan par des polygones réguliers satisfaisant aux conditions suivantes :

- si deux polygones du recouvrement ont un point commun unique, il est sommet de l'un et de l'autre (un tel point sera dit un nœud du pavage) ;
- si deux polygones du recouvrement ont plus d'un point commun, leur intersection est un côté de l'un et de l'autre ;
- la configuration locale en chaque nœud est la même à une symétrie près.



Dans la situation didactique proposée, il s'agit de faire entrer les élèves dans un jeu où le projet commun de l'enseignant et des élèves est avant tout l'engagement dans la résolution du problème proposé et l'élaboration de résultats au moins partiels, la genèse de savoirs sur des objets mathématiques nouveaux.

Les élèves confrontés au problème produisent des exemples nombreux (Front, 2015), formulent des conjectures étayées, sont amenés à prendre des décisions sur les objets explorés. Ces résultats partiels sont en lien avec plusieurs conditions nécessaires, mais non suffisantes des pavages archimédiens, dont :

- Les côtés des polygones du pavage ont même longueur
- La somme des angles autour d'un nœud est égal à 4 droits
- On ne peut assembler autour d'un nœud moins de 3 et plus de 6 polygones réguliers.
- On ne peut assembler autour d'un nœud des polygones de plus de 3 types distincts.

Les registres mobilisés sont le registre géométrique, le registre numérique (mesures des angles des polygones réguliers), le registre algébrique en particulier dans l'élaboration et l'étude

des relations entre les mesures des angles des polygones réguliers et les nombres de côtés des polygones.

Le troisième moment de l'atelier de cette école d'été a permis de travailler particulièrement deux corpus pour observer le changement de niveau de milieux, l'évolution des fonctions des raisonnements, l'évolution des niveaux d'utilisation des symboles, l'évolution de la conceptualisation de l'objet à savoir. Nous reprenons ici les éléments produits à partir de quelques extraits du corpus.

Exemple 1 : Timothée : de l'icône au symbole-argument

L'analyse de la production de Timothée (cf. annexe 3) amène à observer un sujet apprenant en phase d'action (M-2), mobilisant des connaissances anciennes pour matérialiser une intuition (tout d'abord geste de la main dessinant un nœud de pavage), exhiber des exemples puis formulant une conjecture plus ou moins étayée. L'avancée vers M-1 se poursuit avec une évolution du signe. Initialement icône, puis possible questionné (présence d'un point d'interrogation dans le cahier de recherche), le signe  $\boxed{\sum \text{angl} = 360}$  (la somme des angles vaut  $360^\circ$ ) devient tour à tour indice puis symbole-argument. La valeur de vérité du signe se fixe et le signe devient le cadre potentiel d'une action sur les objets familiers. Plus précisément, l'action, s'inscrit dans la théorie portée par le signe, et peut être régie par ce signe. Il est notable que dans cette dimension de recherche du sens, la syntaxe soit initialement mixte et non encore complètement mathématique. Le signe prend sa dimension formelle sous la forme  $\alpha n = 360$  et devient outil théorique de prise de décision pour la recherche des pavages réguliers (avec un raisonnement en partie erroné).

Exemple 2 : Romain : l'élève apprenant en situation de formulation pour la minoration du nombre de polygones autour d'un nœud.

Après la production d'exemples de plusieurs pavages régulier, Romain et un camarade échangent sur le nombre minimal de polygones réguliers autour d'un nœud. On observe un échange entre un sujet proposant (Romain) et un sujet opposant. Le passage de M-2 à M-1 se traduit par une décision sur un objet mathématique :

392 : Romain : ... parce que genre tu peux pas mettre que 2 tr... que deux figures à côté pour remplir. T'es obligé d'en mettre 3 minimum.

395 : Ben non, c'est juste qu'il faut au moins trois côtés pour faire un polygone.

396 : Romain : non, mais c'est pas ça. C'est là r'garde, ici, t'es obligé d'avoir une deux trois figures. Une deux trois. Pour pas qu'il y ait de trou au milieu.

397 : Tu peux pas remplir en même temps que ... ?

398 : Romain : non tu peux pas.

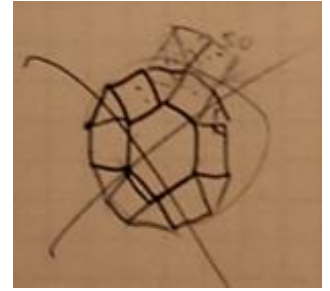
On observe ainsi le passage d'un usage indicial de la propriété à une dimension d'argument local avec enrichissement du répertoire au niveau des arguments, des énoncés, du système organisateur

Exemple 3 : L'élève apprenant en situation de validation ... assembler localement ne suffit pas (1)

Dans un débat de validation d'une proposition de pavage (3,4,6,4) deux élèves sont confrontés à la contingence :

- E5 : Donc là du coup ça voudrait dire ... Ouais non, mais attends, en gros, là faut remettre un carré, et là si on fait notre hexagone ...

- E15 : Faut regarder si ... 1, 2, 3, 4, 5. 1, 2, 3, 4. Ça va pas.
- E5 : Pourquoi ?
- E15 : Ici, on a 1, 2, 3, 4, 5 polygones sur un point. Et là, si tu regardes ici, t'en as 1, 2, 3, 4, sur point aussi. Et il faut qu'il y ait le même nombre de polygones.
- E5 : Ah ça [ ?]. J'avais oublié ce détail. Heu, mais ...
- [ ?]
- E5 : J'avais oublié ce détail en fait. Du coup ça fait chier.



Le candidat pavage est écarté, la condition « locale » sur la somme des angles autour d'un nœud se révèle insuffisante. Nous observons, à partir de la production d'un contre-exemple dans le milieu heuristique, la décision sur un objet mathématique,

Exemple 4 : L'élève apprenant en situation de validation ... assembler localement ne suffit pas (2)

(E15) échange cette fois avec (E5) et (E8) sur le candidat pavage (5,5,10) :

- E5 : tu mets 10 ... Là tu seras obligé d'mettre un 5, et après ...
- E8 : Tu mets un 10
- E5 : Ça va laisser un trou ...
- E5 : Là y'a un trou, et donc là ça, si tu ren... Ça marchera pas.
- E15 : Donc notre condition, elle est nécessaire, mais pas suffisante.
- E8 : C'est-à-dire ?
- E15 : Ben faut qu'il y ait ça d'validé pour que ça fonctionne, mais si y'a ça d'validé ça fonctionne pas à tous les coups.
- E8 : Ahaha.

Un échange tripartite qui permet à nouveau la décision sur un objet (candidat pavage 5,5,10) et la formulation d'une proposition au niveau du groupe. Le système organisateur s'étouffe.

Ce travail dans le groupe de Timothée permettra une institutionnalisation dans le milieu d'apprentissage (M0), avec P, l'enseignante :

- P : Alors l'équation on peut supposer que vous l'avez vérifiée comme il faut, chacun, donc la somme de tous les angles fait bien 360 pour ceux-ci. Qu'est-ce qui reste à vérifier ? Timothée ?
- Timothée ...
- Un élève du groupe C : la longueur des côtés
- P : Pour être sûr que ce soit un pavage archimédien, qu'est-ce qui reste à vérifier ?
- Le même élève du groupe C : Faut pas que ça se superpose
- Timothée : Que ça puisse se continuer
- P : Que ça puisse se continuer à l'infini, parce que rien ne dit que puisque ça marche bien autour d'un sommet quand on veut l'étendre ça fonctionne bien donc d'ailleurs, vous nous en avez pas parlé, mais vous aviez fait un dessin qui posait un problème à ce niveau-là ...

Les analyses suivantes montrent l'enrichissement du répertoire quand explorant au-delà du cas des pavages réguliers, les élèves mobilisent le registre algébrique et introduisent d'autres degrés de liberté. Les premières expressions, très ancrées dans la dimension sémantique permettront à E15 et E5 d'initier une étude systématique, dépassant le cadre des exemples « tests ».

$$360 - 20 \text{ angle} = 30/60/100/11$$

De nature tout d'abord indicielle les expressions de type  $\alpha x + \alpha'x' = 360$  ou  $360 - \alpha x = \alpha'x'$  passe au statut d'argument structurant le système organisateur. Elles traduisent à nouveau une évolution du signe et de la fonction des raisonnements, tour à tour exemple, moyen heuristique, élément de la formalisation des preuves.

Le travail lors de l'atelier a permis une sensibilisation aux différents potentiels de la situation, autant mathématiques, que du point de vue des raisonnements. La mobilisation du système d'analyse précise l'évolution de la situation, la progression du répertoire, les ajouts de briques dans le système organisateur. De l'intuition à la formalisation de preuve, du geste de la main, icône du nœud d'un pavage, aux arguments formalisés permettant de déterminer des candidats pavage, l'étude de la situation des pavages archimédiens du plan permet d'illustrer l'intérêt d'une analyse des raisonnements dans la compréhension de l'évolution du concept en construction.

## CONCLUSION

Le travail effectué dans cet atelier a permis aux participants de découvrir et d'utiliser les outils d'analyse des situations et des raisonnements, et de voir que les situations présentées permettaient d'aboutir à des savoirs mathématiques structurés, en accord avec les attentes du programme au niveau concerné. En bref, cela signifie que ces situations débouchent sur des éléments de preuve mathématique des propriétés des concepts en jeu, et des outils sur lesquels s'appuyer, ceci visant à favoriser les démonstrations de problèmes faisant intervenir les mêmes notions (fonctions, géométrie, nombres entiers...). Nous pouvons aussi noter que l'analyse des situations a permis de mettre en évidence la robustesse du modèle pour des usages relevant de différents domaines des mathématiques et à des niveaux de scolarité variés. Ainsi les participants ont pu se confronter aux savoirs de ces niveaux différents, et comprendre le modèle de situations qui permet de construire pour les élèves des questions pertinentes relatives à ces savoirs. En faisant connaître ces situations, nous insistons sur la nécessité de permettre aux élèves de se confronter à des recherches sur des objets et des questions mathématiques, avant de recevoir un enseignement formalisé des savoirs. Cette étape est essentielle pour la compréhension de ces concepts, mais aussi pour que les élèves se motivent en mathématiques.

Il faut noter qu'une large variété de situations existe actuellement pour tous les domaines des mathématiques et pour tous les niveaux d'enseignement, de la maternelle à l'université ! La TSD a d'abord été construite pour l'enseignement primaire, mais depuis les années 1980-1990 cette théorie, et les situations qui en dépendent, ont diffusé à tous les niveaux. Des situations de transition entre le secondaire et l'université pour les concepts de limite et d'intégrale, par exemple, ont ainsi été expérimentées ; certaines sont disponibles dans Bloch & Gibel (2019).

L'objectif de cet atelier était donc de former les participants afin qu'ils puissent accéder ensuite à la maîtrise des situations, au niveau qu'ils visent dans leur travail de recherche.

## RÉFÉRENCES

- BLOCH, I. (2002). Un milieu graphique pour l'étude de la notion de fonction au lycée. *Petit x*, 58, 25-46.
- BLOCH, I. (2005). *Didactique des mathématiques et théories sémiotiques : Vers une analyse des processus de production et d'interprétation des signes mathématiques dans les situations d'apprentissage*, SFIDA 24 (Séminaire Franco-Italien de Didactique de l'Algèbre) : Université de Turin.
- BLOCH, I., & GIBEL, P. (2019). A model to analyse the complexity of calculus knowledge at the beginning of University course – presentation and examples, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 24, 183-205.
- BLOCH, I., & GIBEL, P. (2011). Un modèle d'analyse des raisonnements dans les situations didactiques : étude des niveaux de preuves dans une situation d'enseignement de la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 31(2), 191-227.
- BROUSSEAU, G., & GIBEL, P. (2005). Didactical Handling of Students' Reasoning Processes in Problem Solving Situations. *Educational Studies in Mathematics*, 59, 13-58.
- CONNE F., (1992). Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(2/3), 221-270.
- FRONT, M., & LEGRAND, P. (2010). Pavages semi-réguliers du plan. *Bulletin vert de l'APMEP*, 486, 60-66.

<sup>1</sup> On trouve ces situations dans les revues de didactique et dans les actes des colloques et écoles d'été, notamment.

- FRONT, M. (2015). *Émergence et évolution des objets mathématiques en Situation Didactique de Recherche de Problème : le cas des pavages archimédiens du plan*. Thèse de doctorat en didactique des mathématiques. Université de Lyon. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01312266>
- GARDES, M.-L. (2013). *Étude de processus de recherche de chercheurs, élèves et étudiants, engagés dans la recherche d'un problème non résolu en théorie des nombres*. Thèse de doctorat, Université de Lyon.
- GIBEL, P. (2020). Analyse en théorie des situations didactiques d'une ingénierie visant une première approche de la notion de limite finie d'une suite. *Revue Québécoise De Didactique Des Mathématiques*, 1, 153-189.
- GIBEL, P. (2018). *Elaboration et usages d'un modèle multidimensionnel d'analyse des raisonnements en classe de mathématiques*. Note de synthèse de l'Habilitation à Diriger les Recherches soutenue à l'Université de Pau et des Pays de l'Adour. <https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01919188>
- GIBEL, P. (2015). Mise en œuvre d'un modèle d'analyse des raisonnements en classe de mathématiques à l'école primaire. *Éducation et Didactique*, 9(2), 51-72.
- OLERON, P. (1977) *Le raisonnement*. Paris, PUF, coll. « Que sais-je ? » (no1671).

## ANNEXES

*Annexe 1 : situation graphiques et fonctions*

Devant les difficultés d'enseignement du début de l'analyse et des fonctions, les situations construites tentent de prendre en compte les trois niveaux d'organisation du savoir : action / connaissances, formulation / ostensifs, validation / savoir. Elles tentent aussi de pointer ce qu'il est nécessaire de modifier, si l'on veut parvenir à faire exister ces différents niveaux dans les activités présentées aux élèves sur les fonctions, et à activer les connaissances que les élèves sont invités à prendre en charge dans l'ingénierie expérimentale.

Dans les années 90, (et globalement jusqu'à maintenant) l'enseignement organise le travail en conformité sur des objets supposés représentatifs : il s'agit pour l'élève de réaliser une tâche standard (déjà réalisée en classe sous la conduite du professeur), avec des outils immuables (par exemple un tableau de variations d'une fonction) dont la fonctionnalité n'est que peu interrogée. Ainsi les propriétés sont illustrées par un calcul, un graphique, un tableau numérique, " données à voir " sans justification de leur nécessité ni outils de validation ou d'invalidation, et à reproduire à l'identique pour l'élève.

Cette illustration des propriétés est supposée s'appuyer sur l'intuition graphique. Elle questionne peu le rapport graphique / fonction, supposé transparent : les élèves étaient supposés *voir* dans le dessin - graphique ce qu'y voyait le professeur. Or un graphique n'est pas une fonction, et donc il est important de questionner la définition de ce qu'est une fonction, et de ce qui se voit – ou pas – sur le graphique.

Pendant le nouveau programme de Seconde 2019 invite à questionner les représentations, et les rapports entre registres de représentation des objets mathématiques. Il propose aussi des fonctions autres qu'affines – carré, cube – ce qui va enrichir les représentations des élèves. Ceci se poursuit en Première et Terminale, avec un travail sur la nature des fonctions (p ex  $e^x$ ) leurs réciproques, etc.

Il s'agit donc de construire une situation qui propose à l'élève des questions, questions qu'il résoudra dans un milieu de représentations fonctionnelles : des ostensifs de fonctions. Ces questions doivent être fortement liées à des objets de l'analyse (fonctions diverses, et leurs propriétés), et l'élève doit pouvoir interagir avec le milieu proposé : ce milieu doit pouvoir offrir des rétroactions, c'est-à-dire que le travail de l'élève doit recevoir des validations pertinentes.

De plus cette construction obéit à des impératifs relatifs au savoir :

- il est nécessaire de pouvoir instituer en savoir le produit des interactions dans la situation
- il faut que l'action, les connaissances produites et formulées soient intelligibles et utilisables pour le savoir (du professeur).

Au niveau envisagé (élèves de 16-17 ans) le milieu comporte déjà des représentations des objets mathématiques ; comment les choisir et les organiser ?

Le programme 2019 propose de faire chercher aux élèves des fonctions dans la modélisation de phénomènes, ce qui est un progrès manifeste.

Des tâches peuvent être investies par l'enseignement secondaire actuellement, par exemple dans l'utilisation d'outils numériques. GeoGebra est un outil qui peut être utilisé sans limites. Ainsi dans le registre graphique :

- trouver des images et des antécédents, et valider ainsi des propriétés ;
- élargir la fenêtre ou faire un zoom ;
- changer le repère et savoir ce qui est préservé ou non ;
- changer d'échelle, reconnaître que la concavité est préservée, etc...

On peut lister des tâches non routinières dans l'enseignement secondaire, comme :

- Trouver sur une courbe des informations sur les propriétés d'une (classe de) fonction ;
- Reconstituer l'équation algébrique à partir de données graphiques, numériques, et d'une typologie (fonction de degré 2 ou 3, ou...) ;

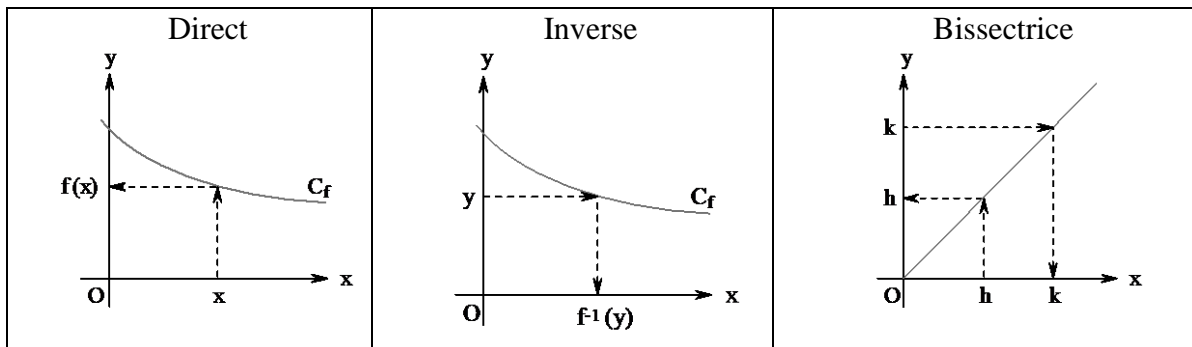
- Construire des courbes sous contraintes (fonction bornée ou non, racines données...);
- Interpréter des équations comme celles de fonctions composées;
- Composer des fonctions données par leur graphique; trouver des réciproques;
- Dédire d'un graphique des propriétés générales des fonctions, et les écrire sous forme de chaînes de symboles formels

Le but est que le registre graphique offre des possibilités de tâches portant sur les fonctions comme objets, et sur les propriétés des fonctions, c'est ce qui a amené à choisir un milieu graphique pour la conception et l'expérimentation d'une ingénierie didactique sur la notion de fonction en Seconde et en Première (élèves de 17 ans). Couplé au registre formel, d'une façon qui apparaîtra dans l'ingénierie, il permet un large éventail de tâches pertinentes de l'analyse. Ces tâches visent à instaurer des *raisonnements* – pragmatiques, plus génériques, ou des décisions globales.

### Les chemins, outils de construction et de décision

Suivant l'axe dont on part, un chemin est un chemin *aller* ou *retour*. La figure ci-dessous représente les trois chemins fondamentaux :

1. Aller 2. Retour 3. Bissectrice



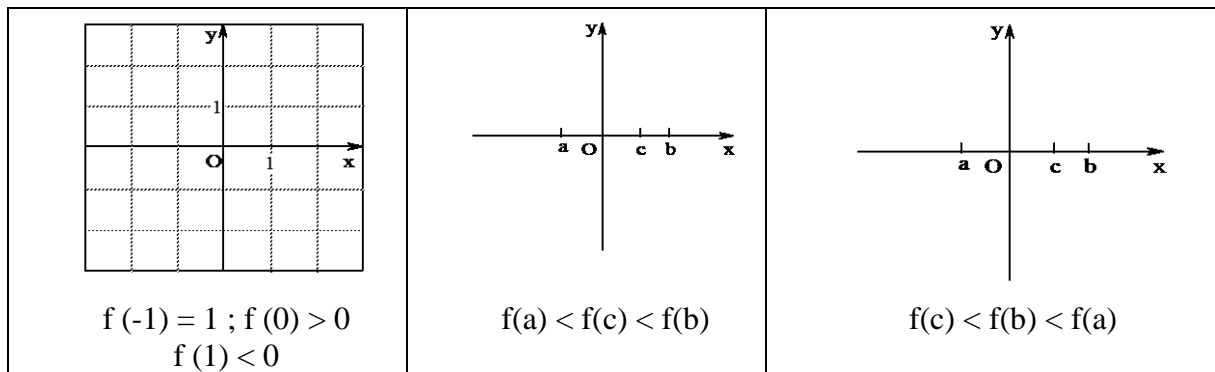
Un chemin aller permet d'identifier un nombre et son image; il est noté par le point de départ et le point auquel il aboutit, à savoir  $(x, f(x))$ .

Un chemin retour permet d'identifier un nombre et son antécédent; il est codé :  $(y, f^{-1}(y))$ .

Un chemin qui passe par la bissectrice est particulier en ce sens que les chemins aller, retour ne se distinguent que par le sens de parcours, ils sont codés h ou k et correspondent aux trajets :  $(h, h)$  ou  $(k, k)$  dans les deux sens.

Le but du jeu est de :

- Disposer d'un certain nombre de représentations graphiques cartésiennes (RGC) de fonctions, et pouvoir dire si ces fonctions possèdent, ou non, certaines propriétés.
- Construire un 'stock' de fonctions sur lesquelles tester les propriétés énoncées.
- Ce stock de fonctions sera assimilé, dans le milieu prévu, à un stock de RGC, ce qui permettra de le faire en grande partie construire par les élèves.
- Les élèves devront alors vérifier les propriétés dans d'autres registres : numérique, algébrique.
- Le professeur institutionnalisera les résultats trouvés graphiquement et vérifiés.

*RGC sous contraintes : exemples*

Les moyens de la validation sont :

- des moyens graphiques / formels avec les RGC et les chemins ;
- éventuellement des moyens numériques, algébriques si les données (le choix des variables) le permettent.

La situation comporte une dimension adidactique si :

- des questions nouvelles, sur les fonctions, ou sur les contraintes, peuvent émerger à partir des contraintes identifiées
- le milieu fournit une rétroaction à ces questions
- il y a interaction de connaissances : élève / milieu et professeur / élève

On propose ensuite la recherche de fonctions sous contrainte d'inégalités, puis de tracer directement le graphique d'une somme et d'un produit de fonctions, et d'une fonction réciproque.

Pour le détail des tâches proposées aux élèves, des graphiques avec les consignes, et des connaissances visées, voir l'article Bloch (2002) sur le site de Petit x :

<https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/petit-x/consultation/numero-58-petit-x/numero-058-petit-x-2002--451950.kjsp?RH=1541685528129>

*Annexe 2 : situation le nombre le plus grand*

Nous avons analysé les raisonnements apparaissant dans plusieurs épisodes de la séquence « Le nombre le plus grand » en indiquant les différentes phases de la séance dont ils sont extraits. Notre modèle d'analyse nous a permis d'étudier les différentes formes de raisonnements en relation avec le niveau de milieu correspondant en spécifiant (a) leur(s) fonction(s), (b) en analysant la nature des signes (langagiers et scripturaux), pour cela nous nous réfèrerons (c) au répertoire didactique utilisé par les élèves afin d'identifier les connaissances et les savoirs mobilisés.

Pour une analyse plus complète des épisodes le lecteur pourra se référer à Gibel (2015).

**Épisode 1** extrait de la phase 4 de la séance 1. Les élèves présentent le nombre le plus grand obtenu à partir de la suite 3-4-5-7-8 et justifient la validité de la procédure ayant permis de l'obtenir. L'enseignant interroge Myriam sur son résultat et sur la manière dont elle l'a obtenu.

- (1.1) M : (en désignant Myriam) : A toi.  
 (1.2) Myriam : Moi j'ai trouvé 3360 !  
 (1.3) E : Moi, aussi !  
 (1.4) E : Non pas moi, j'ai trouvé plus grand.  
 (1.5) M : 3360, tu expliques. Attention, je t'écoute.  
 0.09.00  
 (1.6) Myriam : 8 fois 7, 56  
 (1.7) M : Alors, tu as fait 8 fois 7, oui.  
 (1.8) Myriam : Après j'ai fait 5 fois 4, ça fait 20

La maîtresse écrit au tableau 3360.

L'enseignant écrit au tableau le programme de calcul au fur et à mesure

(1.9)	<i>M : Hum ! (ton approbateur)</i>	<i>que l'élève lui dicte</i>
(1.10)	<i>Myriam : Après j'ai additionné 56 et ...</i>	$(8 \times 7) \times (5 \times 4) \times 3$
0.09.20		(1) (2)
		$56 \times 20$
(1.11)	<i>E : Additionné ?</i>	(3)
0.09.22		1120
		(4)
(1.12)	<i>Myriam : Non multiplié ; 56 fois 20</i>	3360
(1.13)	<i>M : C'est-à-dire tu as multiplié ces deux-là !</i>	
0.09.27		
(1.14)	<i>Myriam : 56 fois 20, 1120 et après j'ai fait fois 3 et j'ai trouvé</i>	
	3360	
(1.15)	<i>M : Et après tu as fait fois 3 pour trouver 3360.</i>	
0.09.40		

L'analyse détaillée de la phase 4, séance 1 montre que les élèves ont produit des raisonnements en situation d'action. La diversité des programmes de calcul, produits par les élèves, illustre les choix auxquels les élèves ont été confrontés, tant du point de vue des opérations utilisées que du point de vue de l'ordre dans lequel ils les ont effectuées. Les actions effectives des élèves sont reliées à des décisions de calculs (R1.1) en référence au tableau 2.

Identification du niveau de milieu correspondant : L'épisode ci-dessus relève de la situation de référence (S-2). Il est associé à la description d'un programme de calcul suite à la confrontation du sujet agissant, Myriam, au milieu objectif (M-2).

(a) Du point de vue des fonctions des raisonnements : Dans cet épisode l'enseignant traduit la dénotation des calculs de Myriam par l'écriture d'un arbre de calculs, rédigé par paliers successifs de (1.6) à (1.14), comme schématisé ci-dessus. Chaque étape de la formulation de Myriam peut être considérée comme une assertion dont la validité par rapport au calcul, mais également par rapport aux règles du jeu, est examinée par les élèves. Myriam parvient ainsi à produire, par la dénotation de son programme de calcul, le résultat annoncé (3360). L'enseignant et l'ensemble des élèves de la classe valident le résultat proposé du point de vue de sa conformité aux règles du jeu, mais aussi du point de vue de la validité des calculs. La présentation de son programme a pour fonction d'apporter la preuve de la validité de son résultat.

(b) Du point de vue de l'analyse sémiotique : Le programme de calcul rédigé par Myriam s'apparente à un indice (R2.1), en effet le modèle implicite d'action (M.I.A) qui sous-tend son programme de calcul est : le produit de deux nombres (strictement supérieur à 1) est supérieur à la somme de ces 2 nombres. L'analyse sémiotique nous conduit ici à analyser les observables du point de vue de leur nature et ainsi à identifier le M.I.A correspondant basé sur l'expérience, le fait observé donc assimilable à un indice.

La formulation produite par Myriam, sur sa feuille, est une suite de calculs rédigés linéairement sur le mode « machine » (mode opératoire).

$$7 \times 8 = 56 \quad 5 \times 4 = 20 \quad 56 \times 20 = 1120 \quad 1120 \times 3 = 3360$$

Les calculs rédigés par l'enseignant au tableau sont très éloignés du formalisme initialement utilisé par les élèves. L'enseignant essaie, par ce biais, d'introduire un formalisme basé sur l'utilisation des parenthèses pour rendre compte des étapes.

(c) Du point de vue de l'usage du répertoire didactique : Myriam s'est appuyée sur ses connaissances antérieures afin de décider d'utiliser exclusivement la multiplication ; ceci s'apparente à une conjecture ponctuelle (R3.1) pour produire le nombre le plus grand à partir du 5-uplet. Cette élève a utilisé ses connaissances des tables de multiplication, la règle des zéros ainsi que l'algorithme de la multiplication pour effectuer les différentes opérations. Il traduit l'usage de connaissances anciennes (R3.1).

### Présentation des méthodes produites à l'issue de la séance 1

L'enseignant, à l'issue de la séance 1, a noté au tableau les méthodes proposées par différents groupes d'élèves :

Méthode 1 (groupe d'Hélène) : Je prends les deux plus grands nombres et je les multiplie. Après je refais pareil avec les deux plus petits. Le dernier nombre, qui me reste, je le multiplie.

Méthode 2 (groupe de David et Marc) : On multiplie les deux plus grands nombres, on multiplie les deux plus petits ensemble. On multiplie les résultats entre eux et on multiplie avec celui qui reste.

La méthode suivante a été approuvée par plusieurs groupes à l'issue de la séance 1, l'enseignant a choisi de la nommer « Méthode d'Aline et les douze »

Méthode 3 ( Méthode d'Aline et les douze ) : On multiplie tous les nombres entre eux.

Ces énoncés, élaborés par les différents groupes d'élèves, font l'objet d'une reconnaissance par l'enseignant et ils font désormais partie du répertoire didactique de la classe.

### Épisode 2 : Discussion sur la formulation d'une nouvelle méthode

Cet épisode est extrait de la séance 2, phase 2.

Les trois énoncés produits à l'issue de la séance 1 correspondent à des méthodes équivalentes à la Méthode d'Aline et les douze. Des élèves s'interrogent sur la validité des méthodes proposées précédemment dans le cas où la suite de nombres comporte un 0 ou un 1.

- (2.1) *Sylvie: Si tu multiplies 5 par 0 ça fait 0, si tu fais 5 plus 0 ça fait 5.*  
 (2.2) *Anne : Eh 0 je ne crois pas qu'elle le mettrait dans les chiffres !*  
 (2.3) *Sylvie : Et Aline, elle disait que quand on avait les numéros il fallait tous les multiplier. Et si on fait 1 fois 5, ça fait 5 et si tu fais 1 plus cinq ça fait 6.*  
 (2.4) *Anne : Bon ça c'est ce que j'avais dit la dernière fois. Bon eh bien la méthode à Aline, ça ne marche pas !*

Identification du (des) niveau(x) de milieu correspondant(s) : Cet épisode s'inscrit dans le cadre de la situation d'apprentissage, il met principalement en lumière la confrontation du sujet apprenant au milieu de référence. Le sujet apprenant, Sylvie, effectue une comparaison de deux méthodes dans un cas particulier où la suite, réduite à 2 nombres, comporte un zéro. On constate ici que Sylvie, pour comparer les deux méthodes, revient au niveau (M-2) en effectuant les calculs arithmétiques correspondants (situation d'action). Ceci permet d'illustrer le caractère emboîté des situations de référence et d'apprentissage.

(a) Du point de vue des fonctions des raisonnements : Son raisonnement vise à invalider la méthode d'Aline et les douze - « Le nombre le plus grand est obtenu en effectuant le produit de tous les nombres » - institutionnalisée précédemment. Ce contre-exemple est refusé par Anne ; selon cette dernière, la présence d'un 0 dans la suite de nombres n'est pas envisageable. Le raisonnement produit ne remplit pas la fonction souhaitée par son auteure. Sylvie propose alors une suite, réduite à deux nombres et comportant un 1, elle apporte la preuve de la non validité de la méthode d'Aline par une comparaison des méthodes et emporte l'adhésion de l'ensemble des élèves du groupe d'Anne. Les propositions de Sylvie contribuent à l'enrichissement du milieu (M-1). La production par Sylvie d'une suite de nombres et d'une nouvelle procédure, non encore répertoriée, s'apparente à la production d'une conjecture ponctuelle étayée (R1.2).

(b) Du point de vue de la nature des signes : Son énoncé s'apparente à la production d'un symbole-argument, il s'agit d'un argument local (R2.2). L'élève fait ici référence à des suites restreintes (comportant seulement deux termes) particulières dans le sens où la première proposition de suite comporte un 0 et la deuxième proposition de suite comporte un 1. Cependant cette conjecture étayée pourrait jouer un rôle décisif dans l'avancée de la situation en effet l'enrichissement du milieu (M-1) permet à présent d'envisager l'élaboration d'une nouvelle méthode prenant en compte le cas particulier d'une suite comportant un 1.

(c) Du point de vue de l'utilisation du répertoire didactique : on constate la mise en œuvre implicite des propriétés « 0 est un élément absorbant » et l'utilisation de la propriété « 1 est

élément neutre pour la multiplication » qui illustre l'utilisation de connaissances anciennes (R3.1).

### Suite de l'épisode 2

- (2.5) Une élève : Qu'est-ce qu'on fait comme méthode ?  
 (2.6) Anne: Il faut multiplier tous les nombres sauf quand il y a des 1, on les additionne.  
 (2.7) Anne : Cédric tu fais la méthode d'Aline, toi aussi et nous on fait la méthode celle-là pour voir ceux qui ont la mieux.  
 (2.8) Anne : Alors 5,8,1,2,6 allez 5,8,1,2,6...5,8,1,2,6 ; Alors vous deux vous faites la méthode d'Aline et toi tu fais ma méthode, il faut trouver le nombre le plus grand avec cette méthode.  
 (2.9) M : Alors vous faites des essais.  
 (2.10) Une élève : Oui on fait des essais  
 (2.11) Anne : Eux ils font la méthode d'Aline et nous ma méthode.

Identification du niveau de milieu correspondant : Cet épisode transcrit de (2.5) à (2.11) relève aussi de la situation d'apprentissage, il illustre la confrontation du sujet apprenant au milieu de référence.

Cet épisode met en lumière la proposition d'un contre-exemple sous la forme de l'énonciation d'une nouvelle méthode d'un 5-uplet (5,8,1,2,6). La formulation de cette nouvelle méthode (2.8) est en partie implicite puisque l'auteure, Anne, ne précise pas à quel nombre il faut ajouter le 1.

Anne, en proposant une nouvelle méthode dans le cas où la suite comporte un 1, contribue à l'enrichissement du milieu (M-1). Sa proposition apparaît comme un prolongement de la proposition de Sylvie formulée précédemment en (2.5).

(a) Les fonctions des raisonnements : La suite produite par Anne est en adéquation avec son projet visant à mettre en défaut la méthode d'Aline : établir la preuve de la validité de sa méthode (R1.2) par l'expérimentation dans le cas particulier d'une suite de nombres comportant un 1.

L'épisode donne aussi à voir un raisonnement d'organisation des tâches ; il vise à définir une répartition des rôles au sein du groupe afin de confronter les résultats obtenus par les 2 méthodes. Il s'agit là très clairement d'une mise en projet dont la finalité est explicitée : établir par le calcul l'obtention, par la nouvelle méthode, d'un nombre plus grand que celui obtenu par la méthode d'Aline.

L'épisode étudié illustre précisément la définition du raisonnement (Oléron, 1977, p.10) énoncée dans la première section de cet écrit En effet cet épisode révèle une confrontation de méthodes, respectant des contraintes, et conduite en fonction d'un but qui n'est autre que l'écriture d'une nouvelle méthode dont la validité doit être prouvée dans un domaine plus étendu, celui des 5-uplets comportant un 1, que celui lié aux précédentes méthodes.

### *Annexe 3 : situation « Pavages archimédiens du plan »*

#### *Éléments pour une étude a priori des milieux épistémologique et expérimental*

En dehors des pavages réguliers bien connus que l'on obtient à partir d'un carré, d'un triangle équilatéral ou d'un hexagone régulier, il en existe une très grande variété à base de polygones réguliers. La situation didactique envisagée ici s'appuie sur la détermination des pavages archimédiens du plan (Front & Legrand, 2010).

Il apparaît que les pavages archimédiens du plan, aussi simples apparaissent-ils aujourd'hui, ont eu une vie mathématique mouvementée. L'étude des travaux des quelques mathématiciens qui se sont penchés sur la question, Kepler, Badoureau, Lévy, Sommerville, ... montrent la difficulté des genèses successives. Il est par ailleurs à noter que le fait qu'il existe 11 pavages archimédiens du plan est un résultat peu connu de la communauté des enseignants de l'Éducation Nationale. Ce résultat mathématique n'a pas su trouver, jusqu'à ce jour, sa « niche

écologique », au sens de Chevallard, dans l'enseignement mathématique secondaire. Avec des représentations par différents registres l'objet pavages archimédiens du plan est pourtant un bon candidat pour l'élaboration de situations didactiques propices aux apprentissages.

**La situation didactique proposée :** il s'agit d'engager les élèves dans un jeu où le projet commun de l'enseignant et des élèves est avant tout l'engagement dans la résolution du problème proposé et l'élaboration de résultats au moins partiels, la genèse de savoirs sur des objets mathématiques nouveaux, où la dimension expérimentale est fortement présente (Gardes, 2013). Dans ce projet le problème est l'essence et non le moyen. Il n'est pas construit dans une visée d'apprentissage. Il est, comme témoin d'un questionnement régulier dans les mathématiques en élaboration dans l'exploration des pavages du plan. Pour autant l'activité qu'il génère doit permettre le développement de connaissances, l'émergence de raisonnements et de savoirs mathématiques.

**Le scénario :** il doit permettre la construction de la tâche, du problème, les phases d'actions, de formulations, de validations, les institutionnalisations. Il comprend donc :

Des temps de dévolution individuelle et collective des enjeux et du problème. Ces temps doivent permettre a minima la dévolution des concepts de pavages réguliers et archimédiens.

Des phases didactiques nombreuses et longues favorisées par la robustesse du problème (pour des actants du secondaire et du supérieur) et la possibilité de s'appuyer sur la dimension expérimentale des mathématiques

Des temps de formulation et de validation des raisonnements, d'institutionnalisation des savoirs nouveaux.

**Les objets potentiellement en jeu :** A l'interface entre différents registres de représentation, registres géométrique, numérique et algébrique l'objet pavage archimédien du plan a de nombreuses potentialités pour la mise en œuvre de situations de recherche de problème visant le développement de connaissances sur les polygones réguliers ou non, les angles, les nombres entiers, décimaux, fractionnaires, les suites de nombres entiers, les assemblages de polygones, les pavages. Il est à noter que certains objets ont un statut singulier (pentagone par exemple) et que les relations entretenues par les élèves peuvent être aussi bien des obstacles que des leviers dans la construction des théories.

**Le milieu :** il doit pouvoir offrir des rétroactions, c'est-à-dire que le travail de l'élève doit pouvoir recevoir des validations pertinentes. Il favorise la réalisation et le recueil des productions qui permettent de caractériser les raisonnements grâce à leurs manifestations tangibles. Il contient initialement :

Papier, règle, crayon, compas, rapporteur, calculatrice, ciseaux

Un énoncé initiant la dévolution

Un ensemble de connaissances naturalisées sur les polygones, les angles, les nombres

Eventuellement des polygones en papier facilitant la manipulation des objets concrets

Il s'agit de s'assurer de la mise en place d'un milieu objectif fertile, d'un champ d'expérience fécond. Si nécessaire, il peut être enrichi (en étant vigilant à la préservation des enjeux essentiels de la situation) pour permettre l'évolution des raisonnements, par des questions, des apports d'informations maîtrisés. Un apport possible, après un temps de recherche suffisant, consiste en la mise à disposition de planches d'A. Dürer (cf. Front, 2015) et permettant l'étude de propositions de l'artiste dont la validité est à discuter au regard des contraintes retenues.

**Premières anticipations des actions sur les objets et des raisonnements :**

La situation permet les indispensables recherches initiales sous forme de dessins, d'esquisses, de croquis éventuellement mentaux pour les élèves les plus familiers avec les pavages. C'est le premier temps de l'intuition des objets nouveaux qui peuvent être d'ordre très divers. Le sujet peut aisément prendre conscience que l'on peut assembler des polygones réguliers, bords à bords. Se pose alors rapidement la question des trous et celle plus complexe des nœuds. Plus globalement les élèves vont questionner la portée et la



validation des faits expérimentaux, étudier des cas limites, formuler des lemmes, des conjectures, des sous problèmes :

Congruence des longueurs des côtés des polygones.

Somme des angles des polygones autour d'un nœud, qui vaut un plein.

Valeur des angles des polygones et éventuelle divisibilité de 360.

Nombre de pavages réguliers

Nombre de polygones possible autour d'un nœud

Nombre de types de polygone possible autour d'un nœud

Des premières propositions dans l'élaboration des théories permettant de réduire le problème

Etude des pavages réguliers

Encadrement du nombre  $n$  de polygones autour d'un nœud ( $2 < n < 7$ )

Encadrement du nombre  $e$  de types de polygones autour d'un nœud ( $0 < e < 4$ )

Etude locale des nœuds vs validité pour l'ensemble du plan

Elaboration d'expressions ;  $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 2\pi$  ;  $\alpha_i = \left(1 - \frac{2}{n_i}\right)\pi$  ;  $\sum_{i=1}^k \frac{1}{n_i} = \frac{k}{2} - 1$  ... où  $n_i$  est

le nombre de côtés du polygone régulier  $P_i$ ,  $\alpha_i$  l'angle de ce polygone,  $k$  l'ordre d'un nœud c'est-à-dire le nombre de polygones du pavage l'ayant pour sommet.

**Enrichissement du répertoire** : notion de pavages, notion de nœud, de type d'un nœud (liste des nombres de côtés des polygones l'ayant pour sommet, énumérés en tournant autour de ce nœud dans le sens direct ou dans le sens rétrograde, par exemple  $(m, n, p, q)$ ), d'ordre d'un nœud (nombre de polygones du pavage l'ayant pour sommet), ordre et type du pavage, ...

Il sera ainsi possible d'observer lors des phases de formulation et de validation :

La production d'exemples (pavages réguliers, pavages avec deux types de polygones, ...) pour prouver une existence

La production de contre-exemples pour préciser un domaine de validité (assemblage autour d'un nœud qui ne peut s'étendre à l'infini)

L'élaboration de conditions nécessaires (il y a au moins trois polygones autour d'un nœud, ...) pour décider d'une stratégie

La production de conjectures (la somme des angles autour d'un nœud est égal à un plein, il existe 3 pavages réguliers, on ne peut associer plus de 3 types de polygones, ...)

L'apparition des premiers symboles (dessin d'un nœud, dessins d'assemblages de polygones réguliers, « formule » exprimant que la somme des angles autour d'un nœud vaut un angle plein, formule algébrique représentant des assemblages de deux types de polygone, ...)

L'émergence de preuves pragmatiques

L'émergence de preuves syntaxiques

La fonction des symboles dans les raisonnements (traduction d'une intuition, support pour argumenter, pour prouver, ...) et leur niveau d'utilisation

L'évolution du répertoire de représentation (lexique mieux maîtrisé, notations précisées, ...)

- ...

Production de Timothée (E15)

$\Sigma \text{ angles} = 360^\circ$  2 


$60^\circ$   $6x$  *grand angle*  3


chaque angle =  $\frac{360}{\text{nombre de côtés}}$  4


1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	15	18	20	24	30
360	180	120	90	72	60	45	36	30	27	24	22.5	20	18	16	15	14.4

5 

Productions de l'ensemble des membres du groupe et d'autres groupes dans (Front, 2015)

1800   $360 \quad 360 \times 4 = 1440$

$\frac{360}{5} = 72$    $4 \dots$

  $180 \times 6 = 1080$

$\alpha \times n = 360$

$\alpha$  et  $n$  diviseurs de 360 6

$\alpha = 180 = \frac{360}{2}$   $2 \times 180 = 360$

$\alpha = 90, 60, 720$

$360 - \alpha \times n = 0 \Rightarrow \alpha \times n = 360$

$360 - x \times x = 0$

$360 - x^2 = 0$

$360 - x^2 = 0$

$360 - x^2 = 0$

$360 - 5 \times (72) = 0$

$360 - 5 \times (72) = 0$

$360 - 2 \times (180) = 0$

$(x+x) = 180$

$12 \text{ cot.}$

$360 - 2 \times (180) = 0$

$(x+x) = 180$



## PORTEE ET INFLUENCE DES ARTEFACTS DANS LE DEVELOPPEMENT DU TRAVAIL MATHÉMATIQUE A L'AUNE DE LA MODELISATION

Macarena Flores González\*, Blandine Masselin\*\*, Claudia G. Reyes Avendaño\*\*\*

### RÉSUMÉ

Deux ateliers ont été associés au cours d'Alain Kuzniak. Le premier est dédié à l'étude d'une situation de modélisation, issue du travail de thèse de Reyes Avendaño (2020), concernant le mouvement circulaire uniforme (MCU) avec l'utilisation d'artefacts technologiques. Cette situation a été expérimentée avec des élèves mexicains susceptibles de poursuivre une licence scientifique. Dans cet atelier nous avons analysé le travail des élèves : les processus de modélisation et les éléments cognitifs et épistémologiques qui intervenaient. Aussi, nous avons introduit l'Espace de Travail en Cinématique (ETC) en lien avec le cycle de modélisation de Blum et Leiss (2007), deux outils qui permettent une analyse fine des situations de modélisation avec l'utilisation d'artefacts technologiques. Le second atelier est issu d'un extrait de corpus de la thèse de Masselin (2019) sur la modélisation en probabilité. Nous nous sommes focalisés sur l'influence d'une enseignante sur le travail de modélisation lors de la résolution d'une tâche mathématique. Notre étude a permis de dégager des outils méthodologiques permettant l'étude d'ETM idoines intégrant le travail d'élèves en groupe. Après un questionnement sur le cycle de modélisation, nous avons abordé la modélisation dans le cadre de la formation des enseignants. À partir d'un retour d'expérimentation en classe décrite par un enseignant en formation, nous avons dégagé des éléments de son ETM personnel qui conditionnent la prise en charge de la modélisation.

Mots-clés : modélisation, Espace de Travail Mathématique, cycle de modélisation, mouvement circulaire uniforme, probabilité.

### ABSTRACT

Two workshops were assigned to Alain Kuzniak's lecture. The first one was dedicated to the study of a modeling situation, from the thesis work of Reyes Avendaño (2020), concerning the uniform circular motion (UCM) with the use of technological artifacts. This situation has been experimented with Mexican students who are likely to pursue a science degree. In this workshop we analyzed the work of the students: the processes of modeling and the cognitive and epistemological elements that were involved. Also, we introduced the Cinematic Workspace (CWS) in connection with the modeling cycle of Blum and Leiss (2007) that allow a complete analysis of modeling situations with the use of technological artifacts. The second workshop is from a corpus extracted from Masselin's (2019) thesis, on modeling in probability. We focused on the influence of a teacher on the modeling work when solving the task called "the hare and the tortoise". Our study allowed us to identify methodological tools for the study of suitable MTEs integrating students' work in groups. After questioning the modeling cycle, we addressed modeling in the context of teacher training. Based on feedback from a classroom experiment described by a teacher in training, we have identified elements of his personal MTE that condition the assumption of responsibility for modeling.

Keywords: modelling, Mathematical Working Space, modelling cycle, uniform circular motion, probability.

## INTRODUCTION

La recherche en didactique des mathématiques s'intéresse aux situations de modélisation du point de vue de l'enseignement et de l'apprentissage. L'analyse des processus sous-jacents lors de la réalisation de tâches de modélisation est devenue l'un des points centraux de l'analyse. En effet, ces processus sont complexes car ils impliquent des éléments épistémologiques propres des mathématiques en lien avec ceux d'autres disciplines, l'utilisation d'artefacts (matériels, symboliques et/ou technologiques), différentes représentations, des processus de construction, de visualisation, et différents types de preuves. Ainsi, une analyse précise des situations de modélisation peut devenir très complexe. Les ateliers que nous présentons ont pour but de proposer des analyses aussi complètes que possible, en lien avec le cours proposé par A. Kuzniak. Ces ateliers s'appuient sur les travaux doctoraux de Claudia Reyes Avendaño (2020) et de Blandine Masselin (2019). La première thèse porte sur l'enseignement et apprentissages des fonctions numériques dans un contexte de modélisation et de travail

---

\* Macarena Flores González, CY Cergy Paris Université, Université Paris Cité, Univ Paris Est Créteil, UNIROUEN, Univ. Lille, LDAR, 95000 Cergy, France

\*\* Blandine Masselin, Académie de Normandie, IREM de Rouen, LDAR, Université Paris Cité, France

\*\*\* Claudia Gabriela Reyes Avendaño, Instituto de Física, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chili

mathématique et s'intéresse au mouvement circulaire uniforme en cinématique. La seconde thèse porte sur l'étude du travail de l'enseignant autour de la simulation en probabilité, en classe de troisième et de seconde, et la tâche à analyser est la situation « Le lièvre et la tortue ».

Les ateliers prennent appui sur deux situations impliquant la modélisation avec le point de vue de la théorie des Espaces de Travail Mathématique (ETM). Ainsi, les objectifs des ateliers sont de décrire, caractériser et construire le travail mathématique autour de la modélisation grâce à des outils en lien avec la théorie des ETM. Il s'agit également de partager des outils théoriques de recherche produits par nos études qui permettent de caractériser le travail mathématique entourant la modélisation. Pour ce faire, les ateliers ont été conçus avec des données variées : l'extrait d'un corpus de production d'étudiants mexicains, le corpus du travail d'une enseignante avec ses élèves dans le but de préparer une formation, et celui d'un enseignant ayant vécu la formation.

Deux points de vue sont abordés en rapport avec le thème de la modélisation : celui du travail des élèves et le travail de référence à travers de l'analyse de l'Espace de Travail Cinématique - ETC (Reyes Avendaño) et celui des enseignants à travers l'ETM idoïne (Masselin). Les deux ateliers traitent de l'importance et de l'influence des artefacts dans le développement du travail mathématique.

## PREMIER ATELIER : MOUVEMENT CIRCULAIRE UNIFORME

### *1. Étude des ETC personnels des élèves avec des artefacts technologiques*

Dans ce premier atelier, nous avons travaillé avec des productions d'élèves mexicains en fin d'école secondaire (entre 17 et 18 ans) qui visaient à suivre des études en ingénierie ou en sciences. Ces élèves ont participé à un atelier de modélisation de trois mois où ils ont étudié le mouvement rectiligne uniforme (MRU), le mouvement circulaire uniforme (MCU) et aussi une combinaison d'un MRU et d'un MCU (cycloïde), à l'aide de situations différentes. Au moment d'étudier le MRU, comme il s'agissait d'un mouvement maîtrisé par les élèves, ils ont pu se familiariser avec les sept phases du cycle de modélisation proposé par Blum et Leiss (2007) avec l'utilisation du logiciel Tracker (souvent utilisé dans les cours de physique pour analyser des mouvements enregistrés en vidéo) et GeoGebra. En ce qui concerne le MCU et la situation que nous avons analysée dans cet atelier, il s'agit d'un mouvement identifié par les élèves, mais ils connaissent seulement les formules de vitesse centripète et d'accélération (car elles sont utilisées dans les cours de physique). Cette situation avait pour but d'approfondir le processus de mathématisation du mouvement grâce aux deux mêmes logiciels. Enfin, le troisième mouvement (que nous n'analysons pas ici) n'était pas connu des élèves.

Les données à utiliser par les participants de l'atelier sont composées des captures d'images effectuées par un groupe d'élèves lors de :

- effectuer le choix d'un artefact matériel pour réaliser un MCU (temps 1) ;
- l'utilisation du logiciel Tracker pour analyser le MCU effectué (temps 2) ;
- l'utilisation du logiciel GeoGebra après l'utilisation de Tracker (temps 3).

Ces élèves savaient dériver, ils s'étaient déjà confrontés au processus de modélisation de manière pragmatique grâce à la réalisation d'autres activités de modélisation qu'ils ont effectué auparavant<sup>2</sup>, et ils savaient utiliser les deux logiciels Tracker et GeoGebra. Aussi, les élèves étaient libres de choisir l'artefact matériel pour réaliser le MCU ; ils devaient enregistrer les mouvements obtenus et choisir celui qui était le plus adapté ; ils devaient analyser la vidéo avec Tracker pour obtenir la table de valeurs et les graphiques du mouvement ; utiliser les données

<sup>2</sup> Cela sans connaître le cycle à sept phases qui a été utilisé pour caractériser du point de vue théorique le travail en cinématique effectué par eux.

obtenues avec Tracker et les importer dans GeoGebra pour avoir des ajustements avec de nouveaux graphiques et des équations. Ils devaient ensuite donner une signification à chacune des représentations obtenues.

## 2. Travail demandé aux participants de l'atelier

Les trois temps de cet atelier correspondent aux processus de modélisation observés dans l'expérimentation réalisée par les élèves. Ainsi, à partir des productions des élèves comme données proposées (voir Annexe 1), les participants doivent répondre, pour chacun des temps, aux indications suivantes :

1. Indiquez les registres de représentation mobilisés par les élèves. Précisez de quelle façon ils sont mobilisés.
2. Indiquez les différents artefacts utilisés par les élèves. Précisez de quelle façon ils sont mis en œuvre.
3. Précisez les modèles qui apparaissent. Donnez les objets mathématiques ou physiques qui constituent ces modèles.
4. Décrivez le travail mathématique développé par les élèves à l'aide du diagramme. Précisez la circulation du travail.

## 3. Mise en commun temps 1

Dans ce premier temps, les participants ont analysé les données proposées en Annexe 1 (premier temps). Nous avons explicité aux participants de l'atelier que les élèves ont choisi le diabololo chinois comme première option d'artefact matériel pour réaliser un MCU. Au moment de réaliser le mouvement, les élèves se sont rendu compte que l'artefact ne restait pas centré au moment de le faire tourner. Pour cette raison, ils ont changé cet artefact par une balle attachée à une corde, ce qui leur a permis de réaliser un MCU qu'ils ont considéré plus adéquat.



**Figure 1.** – élève avec le diabolo chinois



**Figure 2.** – élève avec la balle attachée à une corde

La mise en commun des quatre indications données a permis une discussion autour de la façon dont les élèves ont fait leur choix d'artefact et les raisons de rejeter le diabolo chinois pour réaliser un MCU. En effet, les élèves n'ont pas réussi à obtenir les caractéristiques du MCU en cohérence avec leur référentiel théorique.

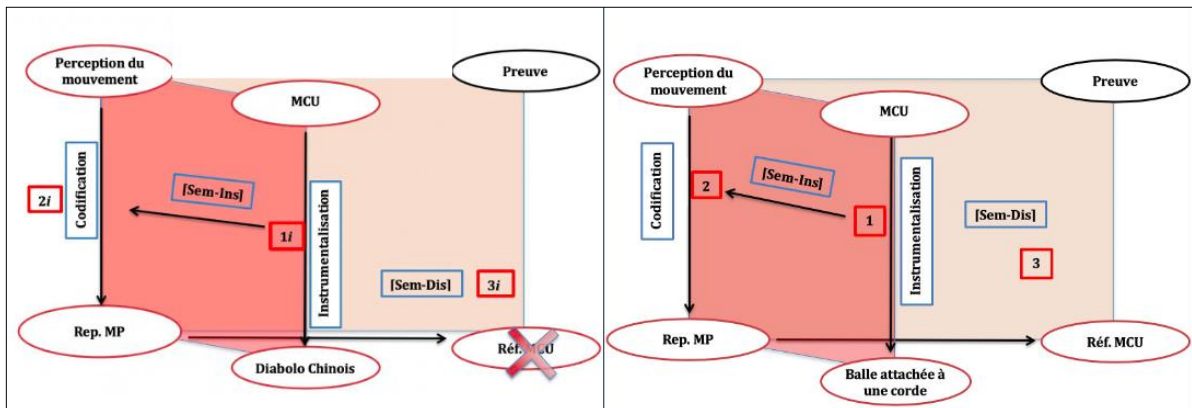


Figure 3. – Diagrammes de l'ETC pour le travail avec le diabolos chinois (gauche) et pour celui d'une balle attachée à une corde (droite).

À l'aide du diagramme de l'ETC (voir figure 3), les participants ont mentionné qu'ils observaient l'activation de la dimension instrumentale au moment d'utiliser le diabolos chinois (artefact matériel). Cette activation permettait la construction du mouvement à l'aide de leur perception en lien avec le référentiel théorique, ce qui permettait enfin de dire si la représentation obtenue était en cohérence avec les caractéristiques d'un MCU (voir figure 4).

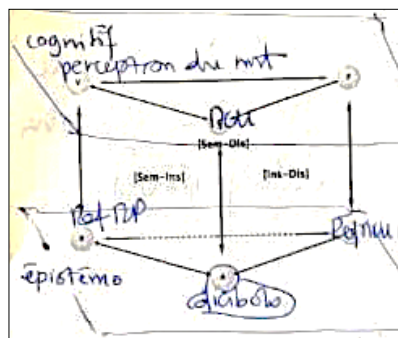


Figure 4. – Production d'un groupe de participants à l'ateliers lors du premier temps

Dans le cas du mouvement réalisé avec le diabolos chinois, les participants de l'atelier étaient d'accord sur le fait que les élèves ont rejeté ce mouvement car la représentation obtenue n'est pas cohérente avec le référentiel théorique des élèves, ce qui motive le changement d'artefact matériel par une balle attachée à une corde. Sur ce dernier point, les participants affirment que ce deuxième artefact permet de percevoir la représentation du MCU, ce qui est maintenant en cohérence avec le référentiel théorique des élèves et, donc, ils peuvent poursuivre avec l'analyse sur Tracker.

Lors de cette mise en commun, plusieurs réflexions quant aux registres de représentation sémiotique ont émergé. Selon R. Duval, les registres sémiotiques sont bien définis en mathématiques. Or, dans cette situation avec des artefacts matériels pour réaliser un MCU, on obtient une représentation physique qui n'a pas nécessairement toutes les caractéristiques d'un registre de représentation dans le sens de Duval (1995). Néanmoins, la représentation physique d'un MCU amène de façon implicite la relation des variables de positions horizontale et verticale par rapport au temps, lesquelles sont d'abord perçues par les sens et après elles sont transformées en représentations (en accord avec la définition utilisée par Duval).

#### 4. Mise en commun temps 2

Dans ce deuxième temps, les participants ont analysé les résultats obtenus par les élèves lors de l'analyse de la vidéo du MCU avec l'utilisation de Tracker<sup>3</sup> (voir Annexe 1, deuxième temps). La figure 5 montre une vue générale de la fenêtre principale du logiciel Tracker avec la vidéo analysée, les quatre graphiques ( $x$  en fonction de  $t$ ,  $y$  en fonction de  $t$ ,  $x$  en fonction de  $\theta$  et  $y$  en fonction de  $\theta$ ) et la table de valeurs.

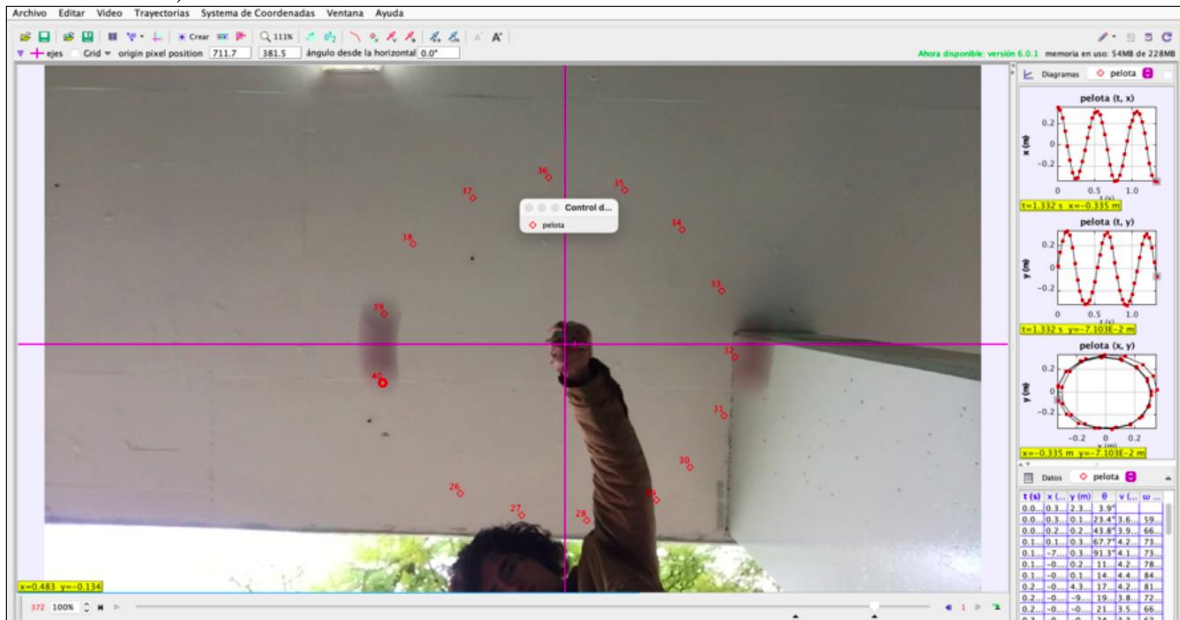


Figure 5. – Fenêtre principale logiciel Tracker

Les données analysées par les participants montrent les réponses des élèves quant à la signification des variables données par Tracker dans la table de valeurs, les raisons du changement des signes  $x$  et  $y$ , et la différence des quatre graphiques  $x$  vs  $t$ ,  $y$  vs  $t$ ,  $x$  vs  $\theta$  et  $y$  vs  $\theta$ .

Lors de la mise en commun nous avons discuté (comme dans le temps 1) sur les quatre indications données aux participants de l'atelier. En ce qui concerne les registres de représentation observés dans les données, les participants ont mentionné que l'on pouvait dégager clairement la table de valeurs, ainsi que les quatre graphiques. À cet effet, l'un des participants de l'atelier a remarqué que c'est l'artefact technologique Tracker qui fait mobiliser cette phase de modélisation, en activant la dimension instrumentale vers la dimension sémiotique de l'ETC (voir figures 6 et 7). Nous remarquons que le schéma d'ETC amène les participants de l'atelier à caractériser le travail des élèves, c'est-à-dire, ils écrivent, sur le schéma, que Tracker aide les élèves à établir une relation entre le MCU et ses variables (telles que la position et la vitesse par exemple). De plus, ils interprètent que les élèves perçoivent le mouvement physique (à partir du film) qui mène finalement aux représentations graphiques et aux valeurs du tableau dans Tracker. Cette reproduction des participants nous amène à penser que le dispositif permet de caractériser le travail des élèves qu'ils observent dans les activités proposées.

<sup>3</sup> Tracker est un logiciel utilisé principalement en physique pour analyser des mouvements enregistrés en vidéo. Il est capable de compter la quantité de pixels et faire une conversion dans les unités de mesure souhaitées. Autrement dit, il permet de générer des représentations telles que la table de valeurs et son graphique à partir d'une représentation physique.

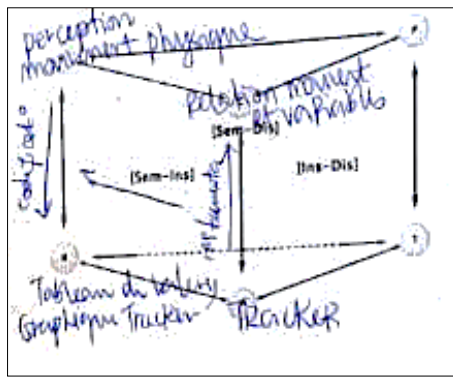


Figure 6. – Analyse de participants de l'atelier dans le temps 2.

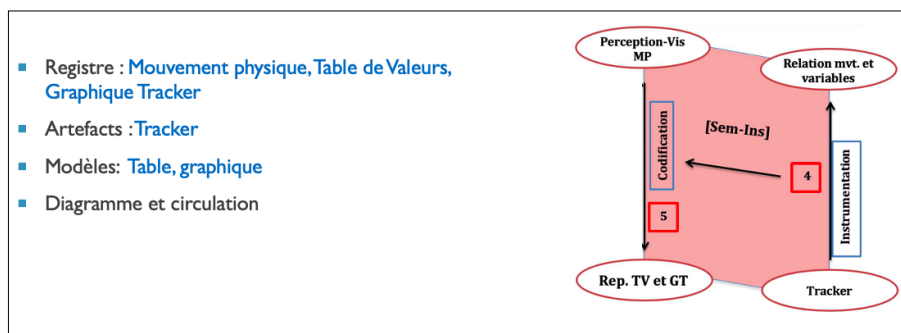


Figure 7. – Plan sémiotico-instrumental de l'ETC activé lors de l'utilisation de Tracker (extrait de diapositive de l'atelier).

Dans la même discussion, les participants de l'atelier remarquent que le côté discursif est induit par le type des questions posées aux élèves dans la situation proposée. En effet, ces questions font réfléchir les élèves sur les représentations graphiques, les variables de la table de valeurs, et les paramètres temporel et angulaire. Il est mentionné aussi que c'est peut-être grâce à ces questions et réflexions que les élèves pensent aux différents modèles du mouvement tel que le numérique et graphique, car chacun de ces modèles peut donner des informations différentes du même mouvement.

### 5. Mise en commun temps 3

Dans cette dernière partie, nous avons travaillé avec les mêmes types de questions que dans les deux temps précédents, mais cette fois à partir des productions des élèves avec l'utilisation du logiciel GeoGebra (voir Annexe 1, troisième temps).

Du point de vue des élèves, cette situation avait pour but d'introduire le processus de mathématisation du mouvement physique MCU. Cette introduction amenait l'utilisation d'une notation et des procédures algébriques plus formelles tout en gardant la signification du MCU. Dans les données analysées, les élèves ont dû transposer la table de valeurs obtenue grâce à Tracker vers GeoGebra, pour générer une liste de points et des ajustements sinusoidaux aux points expérimentaux, pour obtenir des représentations graphiques et algébriques (figure 8).

Lors de la mise en commun, les participants de l'atelier ont remarqué plusieurs éléments importants. Le premier est un questionnement sur l'usage des artefacts technologiques : pourquoi utiliser les deux artefacts si seul Tracker peut aussi faire des ajustements ? La réponse à cette question est directement liée à la nature de chacun de ces deux artefacts et à l'objectif recherché à travers la situation proposée aux élèves. En effet, Tracker est un logiciel souvent utilisé en physique qui utilise des variables physiques directement liées au mouvement

physique. Dans la fenêtre principale (voir par exemple la figure 5), nous pouvons observer que dans la vidéo, la table de valeurs et les graphiques sont en fonction du temps et des positions horizontales et verticales. Par ailleurs, GeoGebra utilise une notation mathématique : des graphiques et des représentations algébriques d'abscisse  $x$  et d'ordonnée  $y$ , ce qui induit les élèves vers un travail plus abstrait et l'obtention de différents modèles tout au long du processus de modélisation.

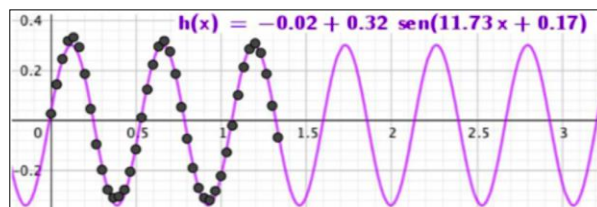


Figure 8. – Exemple représentations obtenues avec GeoGebra

Enfin, le collectif des participants a discuté autour d'une analyse d'un des participants de l'atelier montrée dans la figure 9 :

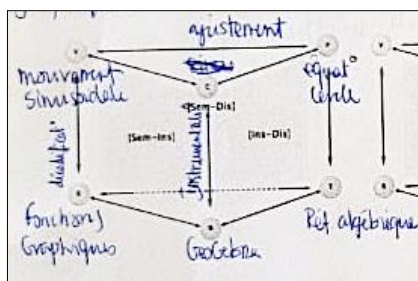


Figure 9. – Analyse de participants de l'atelier dans le temps 3

Cette analyse montre que c'est GeoGebra l'artefact technologique qui déclenche le travail mathématique dans cette phase. Cela se fait à travers la construction des ajustements des points expérimentaux lors de l'activation de la dimension instrumentale. En effet, ces ajustements activent un processus de visualisation des graphiques sinusoïdaux.

D'autre part, le collectif de participants était d'accord quant aux registres de représentation : il s'agit des graphiques produits par GeoGebra qui ont une nature différente des graphiques de Tracker et des représentations algébriques. Par ailleurs les participants ont discuté sur l'activation de la dimension discursive grâce au référentiel théorique mobilisé, qui a servi pour arriver à l'équation du cercle avec des équations paramétriques  $x(t)$  et  $y(t)$ , ce qui valide l'équation de trajectoire à l'aide de GeoGebra (voir figure 10).

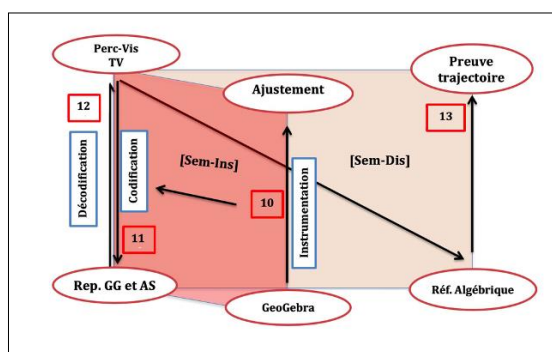


Figure 10. – Diagramme de l'ETC pour le travail avec GeoGebra (extrait de diapositive de l'atelier)

Enfin, les participants ont noté que, tout au long de l'atelier et dans les trois temps, les dimensions sémiotique, instrumentale et discursive ont été activées de façon différente : au fur

et à mesure que les élèves avançaient dans les phases de modélisation de la situation proposée, l'utilisation des artefacts et les processus cognitifs sous-jacents étaient chaque fois plus complexes et avec des bases épistémologiques plus solides du point de vue mathématique. Cela a fait apparaître la notion de paradigme à l'intérieur des ETM. En même temps, on a pu remarquer que les ETM sont un modèle théorique pertinent permettant d'analyser les processus cognitifs impliqués dans les processus de modélisation.

## SECOND ATELIER : PROBABILITE ET FORMATION

### 1. Étude de l'ETM idoine de la situation proposée par Lucie enseignante experte

Les données sur la situation « le lièvre et la tortue » proposées en atelier sont précisées en annexe 2. Elles sont issues d'un groupe de trois élèves (G6) constitué par l'enseignante Lucie dans sa classe de troisième du cursus français (élèves de 14-15 ans).

Les données proposées en atelier sont composées de :

- la production collective du groupe d'élèves à la fin de la première heure de travail sur la situation (temps 1) ;
- d'un extrait vidéo (temps 2) et son script. Cet extrait correspond au début de la seconde heure de travail sur la situation. Les élèves appellent l'enseignante après avoir rallumé l'ordinateur ;
- la production collective (temps 3) du groupe d'élèves à la fin de la seconde heure.

Les élèves de Lucie avaient à disposition des dés, un ordinateur, et pouvaient choisir de réaliser une simulation (à partir d'un fichier tableur vierge) s'ils le souhaitaient.

### 2. Le travail demandé aux participants de l'atelier

A partir de ces données, les participants ont travaillé avec les deux consignes suivantes :

- *Question 1 : Quels sont les modèles qui émergent ? Et quelles sont les conséquences sur le travail mathématique des élèves ?*
- *Question 2 : Décrire chronologiquement le travail mathématique développé dans la classe entre professeur et élèves (ETM idoine effectif). On pourra utiliser les plans verticaux du diagramme des ETM.*

### Mise en commun

Lors de la mise en commun de la question 1, les participants repèrent deux modèles émergents dans la classe : celui de la loi géométrique tronquée ainsi que celui de la loi binomiale (ces modèles sont identifiés par l'enseignante de la classe). Les participants identifient dans la première production la mobilisation par les élèves du théorème en acte de la loi faible des grands nombres quand les élèves mentionnent dès le début la méthode fréquentiste. Ici, la simulation contient une part de modélisation qui agit comme un système avec un premier modèle (la loi géométrique tronquée) plutôt descriptif et congruent sémantiquement à la règle du jeu. Un des participants précise que Varenne parle à ce propos de modèle algorithmique et il distingue deux cas :

- une simulation assumée sans modèle mathématique ;
- un algorithme qui s'appuie sur un modèle mathématique.

Avec le tableur, un premier choix de modèle peut être fait avec une simulation proche de l'expérience aléatoire (modèle implicite de la loi géométrique tronquée).

A	B	C	D	E	F	G	H	I
course	1er lancer	2e éventuel	3e éventuel	4e éventuel	5e éventuel	6e éventuel	gagnant	fréquence L
1	4	1	6				lièvre	1
2	3	5	6				lièvre	1
3	1	3	4	2	1	6	lièvre	1
4	6						lièvre	1
5	1	4	2	5	5	5	tortue	0,8
6	1	3	6				lièvre	0,83333333
7	6						lièvre	0,85714286
8	5	6					lièvre	0,875

Figure 11.

Chaque course nécessite au maximum 6 lancers et s’arrête dès qu’un six apparaît, et donc un test d’arrêt à chaque lancer avec la condition « A-t-on obtenu 6 ? » de type =SI(A3<6 ;ALEA.ENTRE.BORNES(1;6) ; « »).

Un second choix de modèle est la loi binomiale. L’expérience aléatoire suit alors la loi binomiale avec des lancers pour rien. L’implémentation de formules est facilitée par la saisie de six fois =ALEA.ENTRE.BORNES(1;6).

B16 =ALEA.ENTRE.BORNES(1;6)											
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
	Lancer	Lancer 1	Lancer 2	Lancer 3	Lancer 4	Lancer 5	Lancer 6	Nombre de 6	Gagnant	Fréquence lièvre	Fréquence tortue
1	course 1	2	3	3	2	4	1	0	tortue	0,59925	0,40075
2	course 2	6	1	1	5	1	4	1	lièvre		
3	course 3	5	2	2	6	2	3	1	lièvre		
4	course 4	6	4	2	4	1	1	1	lièvre		
5	course 5	3	4	2	6	4	4	1	lièvre		
6	course 6	3	3	3	2	1	6	0	tortue		
7	course 7	2	4	1	2	5	6	0	tortue		
8	course 8	5	3	1	3	1	1	0	tortue		

Figure 12.

Les élèves ne comprennent pas que ce modèle différent puisse prétendre donner une solution au problème posé.

Concernant la deuxième partie de la question 1, les participants de l’atelier ont également indiqué que ces deux choix de modèles possibles pouvaient avoir des conséquences sur le travail mathématique des élèves. Ils ont également repéré que si le modèle de la loi géométrique est le plus congruent à l’énoncé de la règle du jeu, pour autant aucun des deux modèles probabilistes n’est dans l’ETM de référence des élèves de ce niveau de classe. De plus, un autre participant pense qu’un des obstacles peut venir de l’indépendance des lancers supposées dans le modèle binomial. La question de changement de modèle n’est pas expliquée par l’enseignante au groupe d’élèves. Les élèves, lors du troisième temps, deviennent tâcherons au sens de Nechache (2017) et se questionnent entre eux sur le modèle imposé par l’enseignante. Un glissement vers un travail algorithmique s’opère.

S’agissant de la question 2, les participants ont tenté de décrire chronologiquement le travail mathématique développé dans la classe entre professeur et élèves (ETM idoine effectif). Pour cela, ils pouvaient utiliser les plans verticaux du diagramme des ETM.

Lors de la mise en commun, nous avons distingué deux niveaux d’activation des plans : les plans activés par l’enseignant (en bas : plan [Sem-Ins], dimension Instrumentale, puis plan [Ins-Dis]) et ceux par les groupes d’élèves lors du travail mathématique développé en classe (en haut : plan [Sem-Ins], plan [Ins-Dis] puis plan [Sem-Ins]), et ce, durant le temps 2 (extrait-vidéo et script, voir figure 13).

Les participants de l’atelier ont enrichi l’analyse en identifiant comme élément déclencheur du travail des élèves la méthode fréquentiste située sur la dimension discursive dans le plan [Sem-Ins].

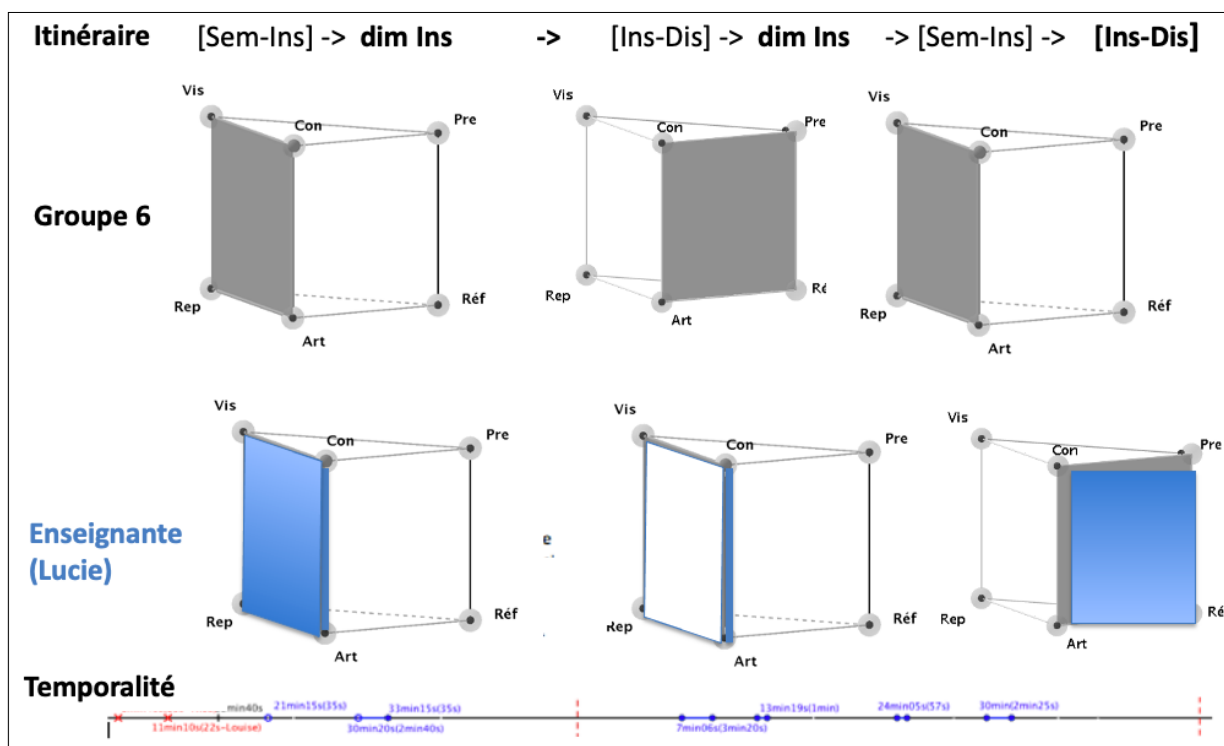


Figure 13. – Extrait du diaporama projeté lors de l'atelier 2 (Diapositive 17)

Concernant la conséquence sur le travail mathématique des élèves du changement de modèle suggéré par l'enseignante Lucie, nous avons indiqué le repérage de moments critiques dans la circulation du travail mathématique quand les élèves travaillent en groupe.

Nous avons partagé de nouveaux apports théoriques comme les concepts de blocage et de rebond (Masselin, 2019, p.95). Un blocage dans l'ETM idoine est la manifestation d'un arrêt de la circulation du travail sur une tâche par l'élève empêché de le poursuivre. Un rebond est le développement nouveau du travail d'un individu ou d'un collectif après un arrêt momentané. En cela il permet d'éviter que l'arrêt ne se transforme en blocage. L'extrait-vidéo du corpus de l'atelier illustre un blocage lié au fichier tableur dont les valeurs ont changé après relance de l'ordinateur (suite à la pause repas), puis un rebond dans l'ETM idoine pour le groupe, impulsé par l'enseignant lors de sa demande de faire six lancers systématiques pour chaque course.

Ensuite, une des participants à l'atelier a alors questionné la gestion des modèles par l'enseignante dans les autres groupes d'élèves de la classe. Pour y répondre, nous avons présenté un chronogramme (figure 14) qui permet de considérer le travail dans son ensemble et pas uniquement pour un groupe d'élèves. Les huit groupes ont chacun une ligne horizontale en pointillé. Les segments en trait plein correspondent aux interventions de l'enseignante dans chacun des groupes. Leur longueur est proportionnelle au temps passé également. Cet outil méthodologique permet d'interroger la circulation du travail mathématique dans chaque groupe d'élèves et de mieux comprendre ainsi le travail de l'enseignante et les ajustements des modèles qu'elle entreprend de manière répétée dans plusieurs des groupes.

Nous avons ainsi mis en évidence ce que nous avons défini comme un *monitoring* didactique indirect (Masselin, 2019, p.340) du modèle exercé par l'enseignante qui modifie le travail des élèves.

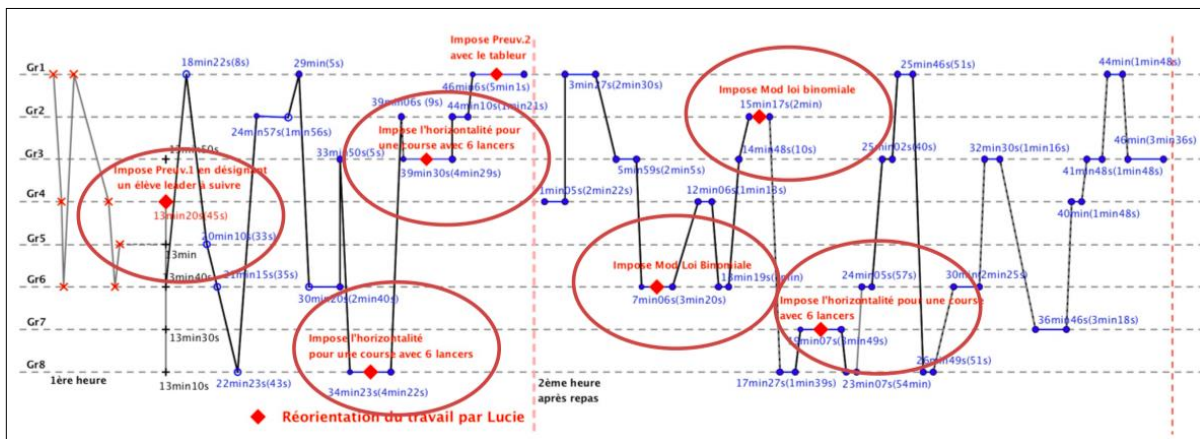


Figure 14. – Rebonds, Chronogramme, 1ère et 2e heure, Lucie, (Masselin, 2019, p. 129, Figure 3.24)

Pour conclure, nous avons donné des éléments sur l’ETM idoine potentiel de Lucie car il permet de mieux comprendre le changement de modèle probabiliste qu’elle effectue. Les trois fichiers de simulation tableur préparés par l’enseignante en amont de sa séance de classe sont quasi identiques et comportent tous le modèle binomial. Les fichiers présentent systématiquement six lancers de dé pour chaque course même si un six est sorti (figure 15).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
	1er manche	2eme manche	3eme manche	4eme manche	5eme manche	6eme manche	Nombre de 6	Tortue	Lievre	Nombre victoire	Fréquence
1							2			170s	0,341
2	6	4	1	6	2	4	4				
3	2	4	1	5	0	4	1				
4	3	2	3	4	3	4	0				
5	5	1	5	3	5	2	0				
6	4	1	3	5	6	3	1				
7	2	6	5	6	2	5	2				
8	1	3	2	6	5	1	1				

Figure 15. – Tableur 3, Lucie, 09/05/2016 (Masselin, 2019, Fig. 3.20, p.127)

### 3. Un premier bilan concernant Lucie

Les modèles émergents créent des blocages et rebonds dans l’ETM idoine, mais aussi des confinements (Masselin, 2019, p.95). Le choix de l’artefact, ici le tableur, a influencé le choix du modèle envisagé dans l’ETM idoine. Il nous paraît nécessaire d’étudier d’autres types d’ETM idoines de plusieurs enseignants.

La relation entre la simulation et la modélisation est complexe et notre atelier a permis d’avancer sur cette question.

### 4. La question de la validation mathématique

Un autre cycle de modélisation, alternatif au cycle de Blum & Leiss (2007), a été ensuite présenté dans l’atelier. Il est issu des travaux de Nechache (2016) et Lagrange (2022). Ce cycle fait figurer une validation externe.

Le débat en atelier a alors porté sur la question de la formation des enseignants sur, et par, la modélisation et de la question du temps nécessaire de formation.

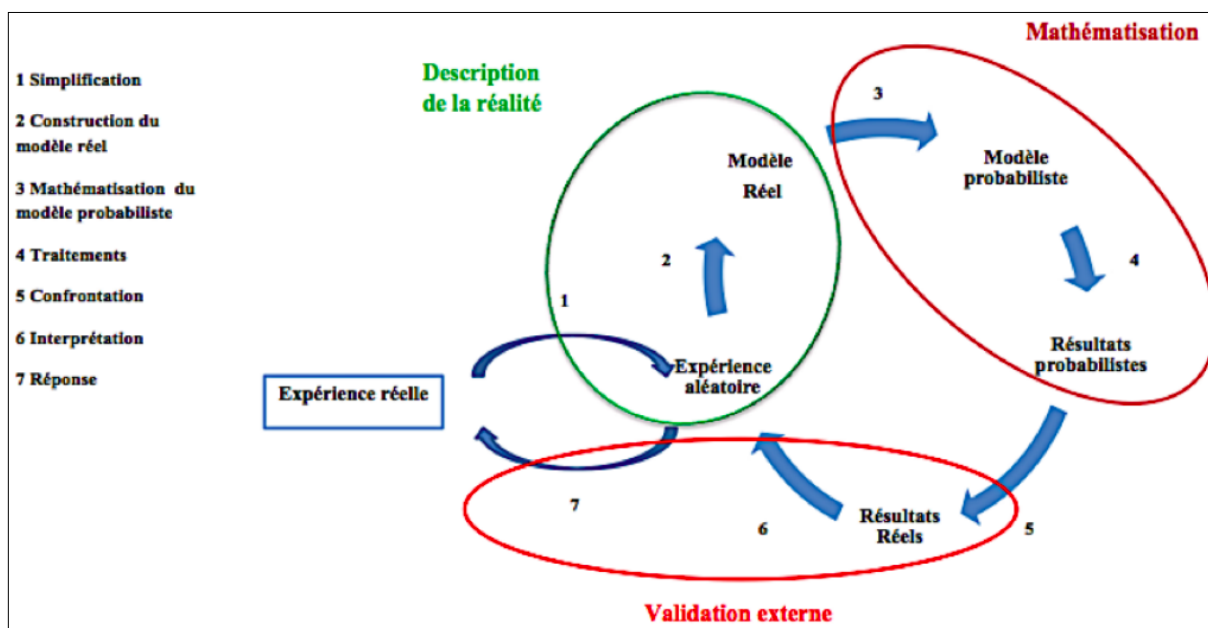


Figure 16. – A modeling cycle, (Lagrange, 2022, Fig. 1, p. 249) d'après Nechache (2016)

### 5. La modélisation en formation des enseignants : enseigner la modélisation ou par la modélisation ?

Pour essayer de répondre à cette question, nous sommes revenus sur la tâche du jeu du lièvre et de la tortue (Annexe 3). Nous avons indiqué dans l'atelier avoir mené une double analyse *a priori* :

- l'analyse épistémologique de la situation ;
- la description d'un ETM idoine qui pourrait être attendu avec ce que nous avons appelés des itinéraires épistémologico-cognitifs d'une tâche dans l'ETM.

Un itinéraire épistémologico-cognitif d'une tâche est défini par un ensemble de phases visant à résoudre cette tâche et permettant de la traiter. Il correspond à une organisation prévue dans l'ETM par l'enseignant (pour une classe ou effective dans une classe) avec une visée d'apprentissage. L'enseignant possède de multiples choix dans l'organisation de différentes phases de travail sur une tâche. Ces choix impactent les plans de circulation dans l'ETM idoine de la classe. La diapositive en figure 20 reprend les différentes phases possibles de ces itinéraires.

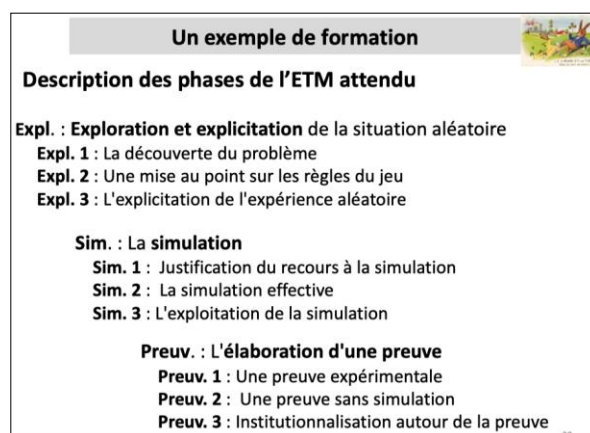


Figure 17. – Description des phases de l'ETM attendu, diapositive 29, atelier 2.

## 6. Le cas de l'enseignant Christian

Christian est un enseignant ayant suivi une formation de type *lesson study* avec Lucie comme formatrice. La situation proposée en formation était le « jeu du lièvre et de la tortue » dont l'énoncé était celui présenté en annexe 3.

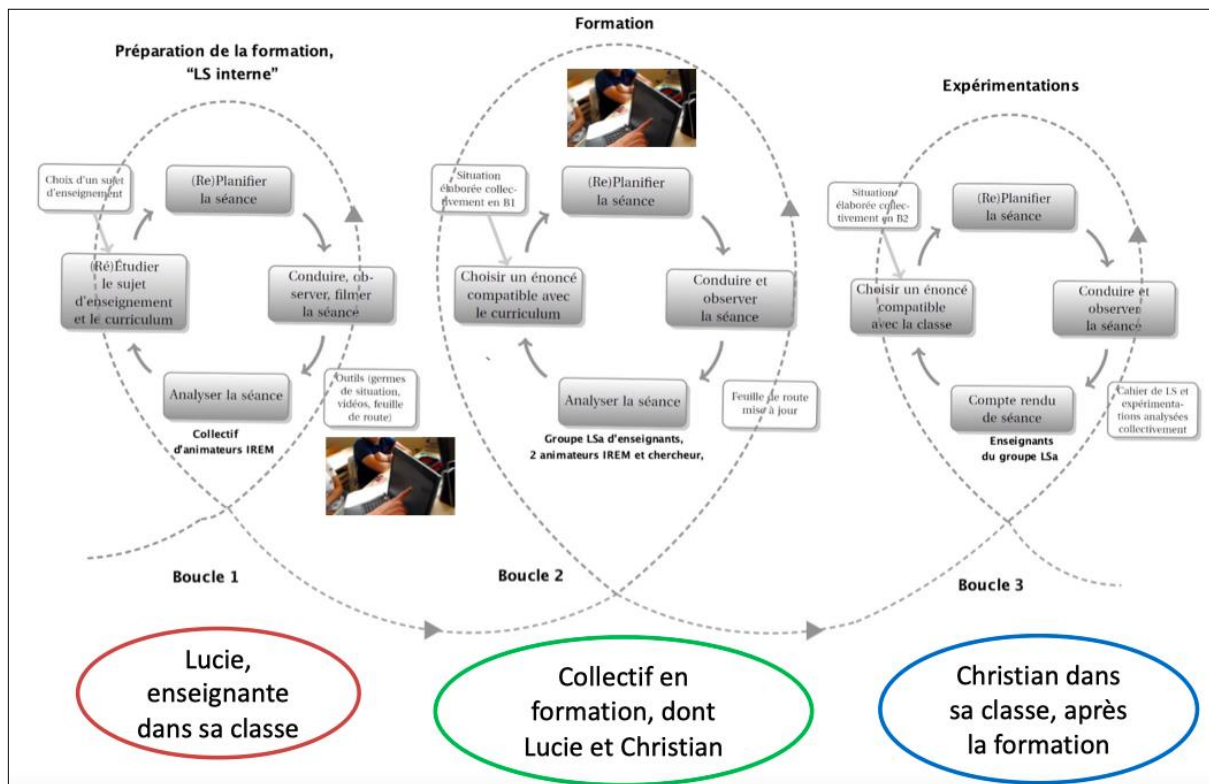


Figure 18. – Trajectoire en trois boucles du dispositif LSa (adaptée de Masselin, 2019, Masselin & al., à paraître)

Nous avons précisé aux participants que Christian, lors de la formation, avait découvert l'extrait-vidéo du groupe G6 étudié dans l'atelier 2, montrant des blocages et rebonds autour du modèle lors de la simulation. Nous avons ensuite partagé l'énoncé que l'enseignant Christian a proposé à ses élèves (figure 22) après avoir vécu la formation.

Je lance cinq fois un dé à six faces.

- Si je n'obtiens pas de « six », alors j'ai gagné.
- Si j'obtiens au moins un « six », alors j'ai perdu.

Ai-je plus de chances de gagner ou de perdre ?

Figure 19. – Énoncé de Christian

Des données complémentaires en appui, et partagées rapidement faute de temps, montrent que Christian est un enseignant qui veut tout contrôler. Il anticipe tous les blocages éventuels, dont celui du choix de modèle et privilégie la dimension instrumentale dans l'ETM idoine.

## 7. Pour conclure sur Lucie et Christian

Lors de la simulation, l'artefact numérique couplé aux interventions de Lucie uniformisent le modèle en finissant par imposer la loi binomiale. Les élèves de Lucie élaborent un « model of »

et Lucie apporte un « *model for* » (non assumé au départ)<sup>4</sup>. Sous l'influence de la formation, l'enseignant Christian a dénaturé la tâche et rendu le modèle unique (ceci est repéré grâce aux itinéraires de tâche dans l'ETM) (« *model for* » assumé). Chez Christian, nous avons noté une tension entre sa gestion de classe et l'ouverture de la situation en termes de modèle décelée grâce au cadre des ETM.

## CONCLUSION GENERALE DES DEUX ATELIERS

Tout au long du cours, nous avons observé que le rôle des artefacts était central dans le travail des élèves. Dans le cas du premier atelier, nous avons vu comment la nature des artefacts conduit les élèves à différents types de réflexion et de processus cognitifs. Par exemple, les artefacts matériels (balle attachée à une corde) amènent les élèves à exécuter le mouvement de manière pragmatique, à utiliser leurs perceptions pour diriger le mouvement et à en obtenir des représentations physiques. Avec Tracker l'abstraction du mouvement commence par une approche physique, pour parvenir à des représentations de tableaux de valeurs et de graphiques (en gardant une notation et une approche physiques) ce qui produit une transition du monde réel vers le monde plus mathématique de la part des élèves. Le travail est validé à travers des perceptions et des éléments du référentiel théorique des élèves venant du cours de cinématique. Avec GeoGebra, l'abstraction est davantage dans le sens mathématique avec des équations paramétriques et des développements algébriques où les variables physiques sont implicites et les processus de pensée sont abstraits dans le sens mathématique. Le deuxième atelier a eu une dynamique différente du premier, et nous avons vu comment l'artefact tableur amène les élèves à des processus déductifs dans la situation du lièvre et la tortue. De plus, nous avons constaté que l'enseignante a joué un rôle important au moment d'utiliser cet artefact provoquant l'activation de certains plans par les élèves dans l'ETM idoine, ainsi que le modèle utilisé pour résoudre la tâche.

Ainsi, nous pouvons parler des différents types de modèles obtenus à partir des artefacts de différente nature comme la balle attachée à une corde, le logiciel Tracker, le logiciel GeoGebra, le tableur. Cela a été mis en évidence dans l'atelier grâce aux outils théoriques permettant d'analyser les activités proposées ainsi que de caractériser le travail des élèves mexicains et français : l'ETC, l'ETM, le cycle de modélisation, les instruments utilisés par les participants à l'atelier. De cette manière, les deux ateliers ont mis en avant le fait que la modélisation mobilise des modèles émergents et implique une discussion sur des hypothèses simplificatrices. Également, si nous avons mis une focale sur la dimension instrumentale des ETM, les deux autres dimensions sémiotique et discursive seraient intéressantes également à questionner dans nos futurs travaux de recherche en lien avec la modélisation.

Ce que nous avons constaté dans ces ateliers nous fait penser à compléter les analyses, dans ces deux études avec les apports de la théorie des ETM par une analyse du travail développé en lien avec la mathématisation horizontale précisée par la RME (Gravemeijer et Doorman, 1999). Cela permettrait de passer d'une situation réelle vers une situation traitée avec des symboles traitables dans le cadre des mathématiques (voir texte d'Alain Kuzniak).

---

<sup>4</sup> Un « *model for* » est entendu comme un modèle construit d'une certaine réalité avec une dimension représentationnelle et instrumentale dérivée du « *model of* », où les représentations et les instruments appartiennent aux mathématiques : il devient un outil abstrait pour faire des mathématiques (Lagrange et al., 2022).

## RÉFÉRENCES

- BLUM, W., & LEISS, D. (2007). How Do Students and Teachers Deal with Mathematical Modelling Problems? The Example Sugaloaf und the DISUM Project. In C. Haines, P. L. Galbraith, W. BLUM, & S. KHAN (Eds.), *Mathematical Modelling (ICTMA12)-Education, Engineering and Economics*. Horwood.
- BOULEAU, N. (2014). *La modélisation critique*. Quae.
- DUVAL, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Éditions Peter Lang.
- GRAVEMEIJER, K., & DOORMAN, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: A calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics*, 39, pp. 111–129. <https://doi.org/10.1023/A:1003749919816>
- LAGRANGE, J.B., HUINCAHUE, J., & PSYCHARIS, G. (2022). Modeling in Education: New Perspectives Opened by the Theory of Mathematical Working Spaces. In A. Kuzniak, E. Montoya & P. Richard (Eds.). *Mathematical Work in Educational Context: The perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces* (pp. 247-266). Springer.
- MASSELIN, B., (2019). *Étude du travail de l'enseignant autour de la simulation en classe de troisième et seconde : métamorphose d'un problème au fil d'une formation en probabilité*. [Thèse de doctorat, Université Paris Diderot]. [https://theses.hal.science/tel-02318669/file/MASSELIN\\_Blandine\\_vd2.pdf](https://theses.hal.science/tel-02318669/file/MASSELIN_Blandine_vd2.pdf)
- MASSELIN, B. & FLORES GONZALEZ, M. (2020). Étude du travail idoine, le cas de la simulation en probabilité., In M. González Flores, A. Kuzniak, A. Nechache & L. Vivier (Eds), *Regards croisés sur le travail mathématique, Cahier du LDAR, 21* (pp.85-102), IREM Université de Paris
- MASSELIN, B., ARTIGUE, M. & HARTMANN, F. (à paraître). Étude du rôle des facilitateurs en Lesson Study adapté. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, Numéro spécial*.
- NECHACHE, A. (2016). *La validation dans l'enseignement des probabilités au niveau secondaire*. [Thèse de doctorat. Université Paris Diderot]. <https://theses.hal.science/tel-01345747/file/Manuscrit-Assia-Nechache-IREM.pdf>
- NECHACHE, A. (2017). Les catégorisations des tâches et du travailleur-sujet : un outil méthodologique pour l'étude du travail mathématique dans le domaine des probabilités. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 22, pp. 67–90.
- REYES-AVENDAÑO, C. (2020). *Enseignement et apprentissage des fonctions numériques dans un contexte de modélisation et de travail mathématique*. [Thèse de doctorat, Université de Paris]. <https://theses.hal.science/tel-03211997/document>

## ANNEXES

*Annexe 1 : Extrait de corpus situation Mouvement Circulaire Uniforme***Autour du mouvement circulaire uniforme**

Pour chacun des trois temps :

1. Indiquez les registres de représentation mobilisés par les élèves. Précisez de quelle façon, ils sont mobilisés.
2. Indiquez les différents artefacts utilisés par les élèves. Précisez de quelle façon, ils sont mis en œuvre.
3. Précisez les modèles qui apparaissent. Donnez les objets mathématiques ou physiques qui constituent ces modèles.
4. Décrivez le travail mathématique développé par les élèves à l'aide du diagramme. Précisez la circulation du travail.

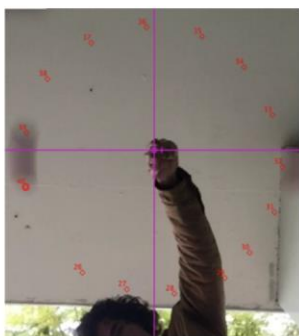
**Premier temps**

**Les élèves devaient effectuer un mouvement circulaire, en essayant de rendre le mouvement le plus uniforme possible.**



(a) Diabolo Chinois

1. Les élèves ont choisi un diabolo chinois comme artefact matériel.
2. En utilisant le diabolo chinois, les élèves ont réussi à enregistrer le mouvement mais ils ont trouvé que le mouvement ne correspondait pas un MCU.



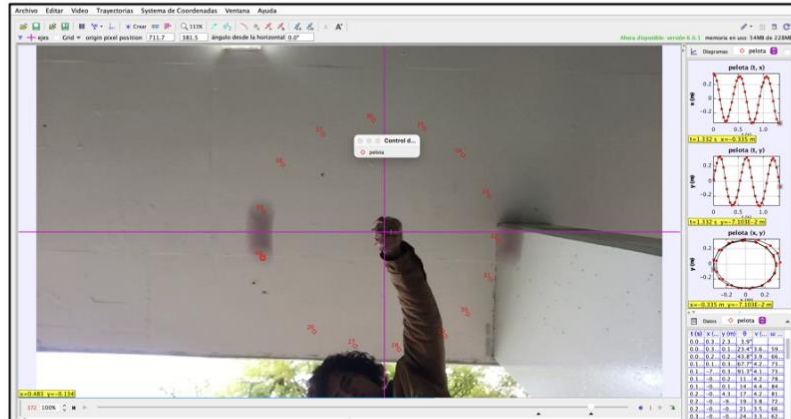
(b) Balle attachée à une corde

3. Les élèves décident de changer d'artefact matériel et choisissent une balle attachée à une corde
4. Avec cet artefact matériel, les élèves expliquent que le mouvement qu'ils ont effectué répond aux caractéristiques demandées.

Ils donnent l'explication suivante pour justifier leur choix : « *Nous avons choisi un diabolo chinois, mais nous n'avons pas pu le centrer, alors nous avons opté pour une corde à laquelle est attachée une balle. Bien que le centre ne soit pas très précis, nous pensons avoir réussi à obtenir un MCU.* »

Deuxième temps

La vidéo qu'ils ont obtenue du mouvement est analysée à l'aide du Tracker et ils observent que cela ressemble bien à un MCU. Les élèves utilisent Tracker pour obtenir des informations complémentaires sur le mouvement.



3. Identifiquen las variables involucradas en el MCU y escriban significado

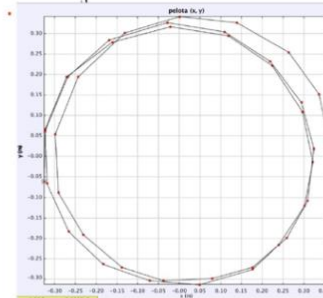
- $x$  → Posición horizontal
- $y$  → Posición vertical
- $\theta$  → Ángulo con respecto al origen
- $v$  → velocidad tangencial
- $\omega$  → velocidad angular

t (s)	x (m)	y (m)	θ (°)	v (m/s)	ω (°/s)
0.000	0.250	-0.226	67.5	2.987	533.1
0.012	0.165	-0.281	90.0	3.086	561.1
0.025	0.250	-0.299	135.0	3.141	565.1
0.038	0.365	-0.286	157.5	3.201	577.0
0.050	0.479	-0.269	180.0	3.262	591.3
0.063	0.521	-0.241	202.5	3.331	608.1
0.075	0.592	-0.211	225.0	3.400	626.4
0.088	0.676	-0.174	247.5	3.470	646.2
0.100	0.744	-0.144	270.0	3.541	667.5
0.112	0.788	-0.120	292.5	3.614	691.2
0.125	0.809	-0.110	315.0	3.689	717.1
0.138	0.807	-0.120	337.5	3.766	745.0
0.150	0.784	-0.146	360.0	3.845	774.9
0.163	0.741	-0.184	382.5	3.926	806.9
0.175	0.681	-0.229	405.0	4.009	841.0
0.188	0.608	-0.276	427.5	4.094	877.1
0.200	0.526	-0.319	450.0	4.181	915.3
0.212	0.439	-0.354	472.5	4.270	955.6
0.225	0.351	-0.379	495.0	4.361	998.0
0.238	0.266	-0.392	517.5	4.454	1042.5
0.250	0.187	-0.391	540.0	4.549	1089.1
0.263	0.118	-0.376	562.5	4.646	1137.8
0.275	0.063	-0.349	585.0	4.745	1188.6
0.288	0.026	-0.314	607.5	4.846	1241.5
0.300	0.011	-0.274	630.0	4.949	1296.6
0.312	0.019	-0.232	652.5	5.054	1353.9
0.325	0.047	-0.190	675.0	5.161	1413.4
0.338	0.091	-0.151	697.5	5.270	1475.1
0.350	0.148	-0.118	720.0	5.381	1538.9
0.363	0.215	-0.094	742.5	5.494	1604.9
0.375	0.289	-0.079	765.0	5.609	1673.1
0.388	0.367	-0.074	787.5	5.726	1743.5
0.400	0.445	-0.079	810.0	5.845	1816.1
0.412	0.519	-0.094	832.5	5.966	1890.8
0.425	0.586	-0.118	855.0	6.089	1967.6
0.438	0.643	-0.147	877.5	6.214	2046.5
0.450	0.688	-0.179	900.0	6.341	2127.6
0.463	0.728	-0.212	922.5	6.470	2210.9
0.475	0.761	-0.244	945.0	6.601	2296.4
0.488	0.776	-0.273	967.5	6.734	2384.1
0.500	0.773	-0.298	990.0	6.869	2473.9

(a) Réponse 3, MCU, groupe 2

4. ¿Por qué x y y cambian de signo repetidamente?

Porque el origen está en el centro del movimiento

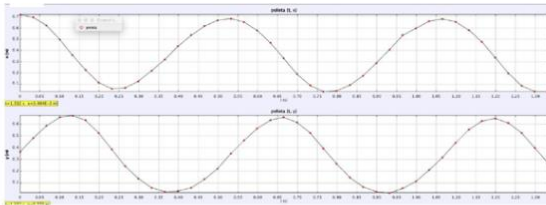


(b) Réponse 4, MCU, groupe 2

5. Observen las gráficas:

a)  $x$  Vs  $t$  &  $y$  Vs  $t$  ¿qué diferencias hay entre ellas?

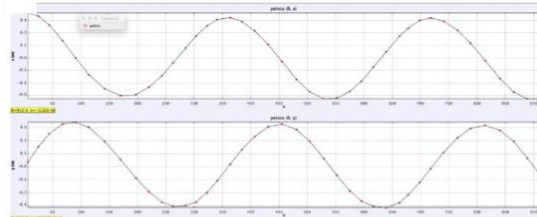
Están desfasadas por aproximadamente  $\frac{\pi}{2}$



(c) Réponse 5a, MCU, groupe 2

b)  $x$  Vs  $\theta$  &  $y$  Vs  $\theta$  ¿qué diferencia encuentran con las gráficas anteriores? ¿por qué?

La función  $x$  vs  $\theta$  es una función coseno y  $y$  vs  $\theta$  es una función seno. hay un desfase.



(d) Réponse 5b, MCU, groupe 2

## Troisième temps

Annexe 2 : Extrait de corpus autour des probabilités, le « jeu du lièvre et de la tortue »

### Premier temps

#### Production du groupe à la fin de la première heure

On fait cette expérience un grand nombre de fois, alors on utilise la méthode fréquentiste.

On effectue 1000 fois le 1<sup>er</sup> lancer.

Puis on soustrait au nombre de lancers total (1000) le nombre de parties gagnées par le lièvre, soit

$$1000 - 181 = 819$$

On effectue 819 fois le 2<sup>e</sup> lancé, étant donné que 181 parties ont déjà été gagnées.

On répète cette expérience 6 fois.

$$819 - 136 = 683$$

$$683 - 130 = 553$$

$$553 - 92 = 461$$

$$461 - =$$

### Deuxième temps (Script Vidéo Groupe de Gloria)

#### Échange entre l'enseignante Lucie et le groupe (E1, E2 et E3)

Lucie : Pour savoir vous avez mis un nombre Si, d'accord et ensuite pour savoir ce que vous avez fait ?

E1 : Ici sur la feuille on a fait le nombre de parties total puis on a fait « moins » par exemple, là, 160 vu que ce nombre de parties a déjà été gagné et on a pris le nombre de parties qu'il restait au total et on a refait exactement la même chose.

Lucie : D'accord donc là, vous avez fait une 2<sup>ème</sup> manche mais seulement pour les parties qui n'ont pas été gagnées par le lièvre. Donc au premier vous en aviez 820 qui n'avaient pas été gagnées par le lièvre donc vous en avez rejoué 820, enfin 819 quoi.

E1 : Oui

Lucie : D'accord et après pour toutes les parties qui n'ont pas été gagnées ni sur la première manche ni sur la deuxième manche, vous avez inventé une troisième manche.

E1 : C'est ça.

Lucie : Alors là vous êtes embêtés car du coup tout a bougé. Comment on va s'y prendre alors pour que justement j'ai un fichier qui résiste ?

E1 à E2 : Je ne sais pas

Lucie : Alors je peux vous donner le conseil de reprendre les 1000 parties à chaque fois, vous rejouez pour chacune des manches les 1000 parties. Même pour celles qui sont gagnées, ce n'est pas grave, vous rejouez quand même la deuxième manche même si elle a été gagnée dès la première manche. Ça ne vous coûte rien au niveau de coûts de calculs de l'ordinateur, on est d'accord ? Donc là sur les 136 parties qui vous manquent, 136, vous allez combler le manque en rejouant les parties. Et plutôt que de regarder manche par manche pour savoir si la partie est gagnée par le lièvre, vous jouez les six parties et c'est à la fin des six parties que vous allez regarder si le lièvre a gagné ou pas gagné. D'accord, ça va ? Donc l'avantage c'est que je fais des manches qui ne me servent à rien car si effectivement si le lièvre gagne dès la première manche, toutes les autres, tout l'algorithme de calculs que je fais faire au tableur, je n'en avais pas besoin. Mais comme ça ne lui demande pas de temps, de toute façon ce n'est pas très grave.

E1 : Oui

*Une fois que l'enseignante quitte le groupe.*

E2 à E1 : Tu fais 1000 fois les six, tu fais six fois, tu fais six colonnes de 1000.

E1 : Donc là tu enlèves E2 : Elle ne t'a pas dit « fais étape par étape », elle a dit « On regarde à la fin si le ... » E1 : D'accord E2 : Et s'il ne gagne pas la première manche, on s'en fiche.

E1 : Pourquoi s'il gagne la première manche, on s'en fiche ? parce que s'il gagne la première manche, il gagne.

E2 : Oui mais elle a dit que ça ne nous coûte rien.

E1 : Oui mais par rapport aux résultats, ça nous coûte.

E2 : Et bien je ne sais pas. C'est ce qu'on voulait faire au début.

E1 : Pour moi ça ne va pas parce que s'il a gagné au premier, il n'y a plus besoin de faire le reste. Si là il y a six les cinq autres plages, elles sont inutiles. Mais là, on ne va pas pouvoir mettre NB.SI (6) parce qu'il aura déjà gagné ici.  
 E2 : Je ne sais pas, j'ai compris mais.

**Troisième temps**

**Production du groupe à la fin de la deuxième heure**  
 On utilise le tableur. On fait 6 colonnes dans lesquelles on fait 1000 fois l'expérience.  
 En entrant la formule « =alea.entre.bornes(1 ; 6) »  
 Puis on compte le nombre de 6 dans chaque ligne dans chaque ligne : « =nb.si(A2 :F2 ;6) »  
 S'il est écrit 0, la tortue gagne.  
 Si le nombre est entre 1 et 6, le lièvre gagne.  
 On compte le nombre de 0. « =nb.si (H2 :H1001 ;0) » Il y a environ 300 « 0 »  
 On calcule le nombre de parties gagnées par le lièvre : « =1000-J2 » ce qui donne environ 700.  
 On calcule la fréquence de chacun.  
 Tortue : « =J2/1000 » environ égal à 0,3  
 Lièvre : « =K2/1000 » environ égal à 0,7  
 Donc le lièvre a plus de chance de gagner.

*Annexe 3 : Le « jeu du lièvre et de la tortue »*

Une course se passe entre un lièvre et une tortue : on dispose d'un parcours à 6 cases en ligne. On lance un dé équilibré à 6 faces. Si le 6 sort, le lièvre gagne, sinon la tortue avance d'une case. La tortue gagne quand elle arrive sur la 6ème case.  
 Qui a le plus de chances de gagner ?

*Annexe 4 : Poster sur la disparition du thon rouge en Méditerranée.*

**Le thon rouge de Méditerranée sauvé par les quotas ?**

**1. Situation réelle**  
 Le thon rouge se porte mieux dans l'Atlantique Est. C'est là une apparente bonne nouvelle qui le place au centre d'appétits décuplés de la part de l'industrie de la pêche. Depuis 2007, celle-ci avait dû se contenter de niveaux de capture strictement limités car le géant des mers était menacé d'extinction. Alors que sa biomasse semble se rétablir, les quotas de pêche du thon rouge vont passer de 13 500 tonnes pour 2014 à 23 155 tonnes par an en 2017. Ils doivent augmenter de 20 % en 2015 et en 2016, puis peut-être dans la même proportion en 2017 en fonction de nouvelles évaluations scientifiques.

**2. Situation modélisée**  
 Côté thon : Évolution de la population des thons femelles de 1 à 20 ans. Taux moyen annuel de ponte (en réalité ponte tous les 2 ou 3 ans). Migrations négligées (homing).  
 Côté pêche : Quotas supposés respectés : exclusion de toute fraude.

**3. Modèle réel**  
 Côté thon : Modèles à 10 compartiments / Modèles à 3 compartiments  
 Côté pêche : Répartition de la pêche par tranches d'âge / Répartition des quotas par tranches d'âge

**4. Modèles mathématiques**  
 Suite (P<sub>n</sub>) : vecteur - population par année  
 Matrices de survie S  
 F : Vecteur - prélèvement par pêche  
 V : Vecteur - prélèvement fonction du quota q  
 $V = q \times F / 100$   
 $P_{n+1} = S \times P_n - F$  ou  $P_{n+1} = S \times P_n - V$   
 N(n) : Nombre de femelles l'année n  $N(n) = \sum P_n [i]$

**5. Résultats mathématiques**  
 Vérification du modèle entre 1999 et 2007  
 Simulations jusqu'en 2027  
 Quotas : 13500 t / 0 t  
 10 compartiments / 3 compartiments

**6. Résultats réels**  
 Côté thon : Migrations réelles, deux docks à ou un seul? Fermé d'embouche  
 Côté pêche : Taille minimale de capture

**Dans nos classes**  
 Au collège : cycle 4. Étude d'un outil de simulation.  
 Au lycée : TS Spécialité mathématiques. Modèle proie-prédateur. Modèle de Leslie avec 3 compartiments. Coefficients matriciels à adapter.  
 Au lycée : TS Option ISN. Projet élève : interface de simulation avec le modèle de Leslie à 3 compartiments.

**Éléments de bibliographie**  
 COLLECTIF, « Rapport 2014 – 2015 », ICCAT  
 COLLECTIF, « Comprendre les avis du comité scientifique de l'ICCAT sur le thon rouge au regard de l'annexe 1 de la Cites. », 2009, GREENPEACE  
 COSENTINO P., « Simthun », simulateur Flash  
 LABIDI N. et NOUAR A., « Quelques indices de la biologie du thon rouge (Thunnus Thynnus) en Algérie », 2012, ICCAT, SCRS.  
 RAVIER-MAILLY C., « Fluctuations à long terme du thon rouge. Validité, origines et conséquences » 2003, ENS Agronomique de Rennes. (Thèse).



## DEPASSER LES PRAXEOLOGIES MUETTES DE MODELISATION : UN PARCOURS D'ETUDE ET DE RECHERCHE POUR LA FORMATION DES ENSEIGNANTS

Floriane Wozniak\*, Berta Barquero\*\*, Marianna Bosch\*\*, Danielly Kaspary\*\*\*

### RÉSUMÉ

De précédentes recherches en théorie anthropologique du didactique ont montré que les besoins de connaissances mathématiques et didactiques pour enseigner la modélisation génèrent des praxéologies muettes (Wozniak, 2012). Les enseignants dirigent l'étude vers le recours à des outils mathématiques pour construire des réponses à des problèmes, mais souvent le processus de modélisation n'est pas explicité. Il s'agit d'enseigner les réponses plutôt que les moyens de les produire. L'objet de ce texte est de présenter et interroger un parcours d'étude et de recherche pour la formation des enseignants autour de la modélisation (Barquero, Bosch & Wozniak, 2019) pour de futurs enseignants de l'école primaire à l'Université de Barcelone (Espagne). Nous montrons comment cette formation permet le développement de praxéologies didactiques qui fassent vivre pleinement le processus de modélisation.

Mots-clefs : modélisation, Théorie Anthropologique du Didactique, praxéologie muette, Parcours d'Etude et de Recherche pour la formation des enseignants

### ABSTRACT

Previous research in the anthropological theory of the didactic has shown that the mathematical and didactic knowledge requirements for teaching modelling generate silent praxeologies (Wozniak, 2012). Teachers direct the study towards using mathematical tools to construct answers to problems, but the modelling process is not often made explicit. It is a question of teaching the answers rather than the means to produce them. The purpose of this paper is to present and interrogate a study and research path for teacher education around modelling (Barquero, Bosch & Wozniak, 2019) for future primary school teachers at the University of Barcelona (Spain). We show how this training allows the development of didactic praxeologies that bring the modelling process to life.

Keywords: modelling, Anthropological Theory of Didactics, silent praxeology, Study and Research Path for Teacher Education

## INTRODUCTION

Dans son cours, Berta Barquero a présenté deux exemples de formations, l'une au lycée et l'autre à l'université, qui répondent au problème de l'enseignement de la modélisation didactique à partir des outils de la théorie anthropologique du didactique. Ces exemples montrent le lien entre la conception de la modélisation que propose cette approche (dimension *épistémologique*) et les stratégies didactiques que l'on peut mettre en place pour faire vivre les mathématiques en tant qu'activité de modélisation (dimension *économique*). Nous abordons ici un troisième exemple dans le cadre de la formation de futurs professeurs des écoles à l'enseignement de la modélisation.

Yves Chevallard (1989) propose de décrire le processus de modélisation comme trois pôles en interaction : la définition du système par l'identification des variables qui permettent de circonscrire la question étudiée ; la construction du modèle qui comprend des relations entre ces variables ; le travail du modèle qui permet de produire de nouvelles connaissances sur le système étudié. Nous considérons ainsi, de façon minimale, qu'un système est un découpage (arbitraire) de la réalité et qu'un modèle est tout ce qui contribue à apporter une information sur ce système, quels que soient son niveau de mathématisation et les types d'ostensifs utilisés. Cet auteur distingue le travail *du* modèle (ou *dans* le modèle) et le travail *sur* le modèle qui est « la construction de modèles successifs, mieux adaptés à l'étude » (*op. cit.*, p. 57). Le travail du modèle peut conduire en effet à redéfinir le système et conséquemment le modèle lui-même du fait de la possible réversibilité de la relation système/modèle : « Le rapport du système au

---

\* Université de Toulouse Jean Jaurès, EFTS.

\*\* Universitat de Barcelona.

\*\*\* Université de Grenoble Alpes, LIG, MeTAH.

modèle peut en effet s'inverser ; le système peut apparaître, à rebours, comme un modèle de son modèle. » (*op. cit.*, p. 56). De cette articulation du système avec son modèle émerge la réponse au problème initial posé.

De précédents travaux (Wozniak, 2012) ont montré comment les enseignants de l'école primaire en France enseignent les solutions plutôt que les praxéologies de l'étude. L'enjeu didactique, révélé par les discours technologiques des praxéologies mathématiques mises en œuvre, n'est pas la démarche de modélisation, mais la consolidation d'objets de savoir mathématiques déjà institutionnalisés qu'il s'agit d'appliquer au contexte du problème. Il manque des mots, des ostensifs et des concepts aux professeurs pour que se révèle le processus de modélisation dans la classe. D'un point de vue théorique, ces observations ont conduit à catégoriser les praxéologies en fonction de la place et du rôle du discours technologique :

Nous considérons qu'une praxéologie est muette lorsqu'elle se donne à voir uniquement au travers de sa composante praxis ; seule la technique mise en œuvre dans un rapport d'action est perceptible alors que la composante *logos* n'est pas audible, à moins qu'elle ne soit simplement tue. Une *praxéologie faible* laisse entrevoir la composante *logos* au travers des ostensifs associés à la technique mise en œuvre ; le discours technologique reste implicite ou limité à la seule description de la technique dans un rapport de formulation non encore abouti. Enfin, une *praxéologie forte* met en œuvre dialectiquement les deux composantes *praxis* et *logos* dans des rapports d'action, de formulation et de validation. (*op. cit.* 38-39).

Ce sont bien des praxéologies de modélisation *muettes* qui sont observées et un manque de connaissances mathématiques et didactiques sur les processus de modélisation qui est constaté. Ce texte présente et interroge une stratégie de formation à l'Université de Barcelone dont l'objectif est de fournir aux futurs professeurs d'école primaire les outils conceptuels qui nourriront leurs discours pour expliquer et analyser le processus de modélisation, par exemple :

- identification des variables de description du système, des observables, des données du système ;
- identification dialectique des différents modèles envisageables et des hypothèses qui les fondent ;
- choix d'un modèle sur la base d'une discussion sur le bien-fondé des hypothèses émises et clairement énoncées ;
- discussion de la portée du modèle, c'est-à-dire explicitation de son domaine de validité en évaluant le degré d'approximation de la réponse construite à l'aide du modèle par confrontation à la contingence du système.

Dans la première partie de ce texte, nous construisons un modèle praxéologique de référence pour l'analyse du processus de modélisation (MPR-Boîte du pâtissier) d'un problème dont l'étude a été expérimentée à l'école primaire, au collège et en formation d'enseignants du primaire en France et en Espagne. La nécessité d'élaborer un modèle praxéologique de référence est heuristique : c'est une mise au jour de la grille de lecture des situations par le didacticien qui est implicitement « toujours là ». Il s'élabore sur la base des praxéologies qui pourront vivre dans l'institution dont sont issues les situations qui seront analysées. Dans une seconde partie, nous examinons des productions de professeurs des écoles en formation initiale qui analysent ce problème. Le MPR-Boîte du pâtissier servira de grille d'analyse des praxéologies observées et sera, dans le même mouvement, mis à l'épreuve par cette confrontation à l'empirie. Enfin, dans la troisième partie, nous présentons le dispositif de formation de l'université de Barcelone et interrogeons la stratégie développée en lien avec les besoins praxéologiques des professeurs pour enseigner la modélisation. En particulier, nous revenons sur les parcours d'étude et de recherche pour la formation des enseignants et les cartes questions-réponses comme outil d'analyse de l'activité de modélisation mise en œuvre.

## ANALYSE A PRIORI DE LA SITUATION « LA BOÎTE DU PATISSIER »

La situation que nous considérons est inspirée d'une expérimentation en fin d'école primaire en France (Chappaz & Michon, 2003) : un pâtissier souhaite fabriquer différentes boîtes pour emballer ses gâteaux. Il envisage d'utiliser un mode de fabrication par pliage (figure 1). Comment peut-il s'assurer qu'avec le procédé choisi, il pourra effectivement emballer ses gâteaux ?

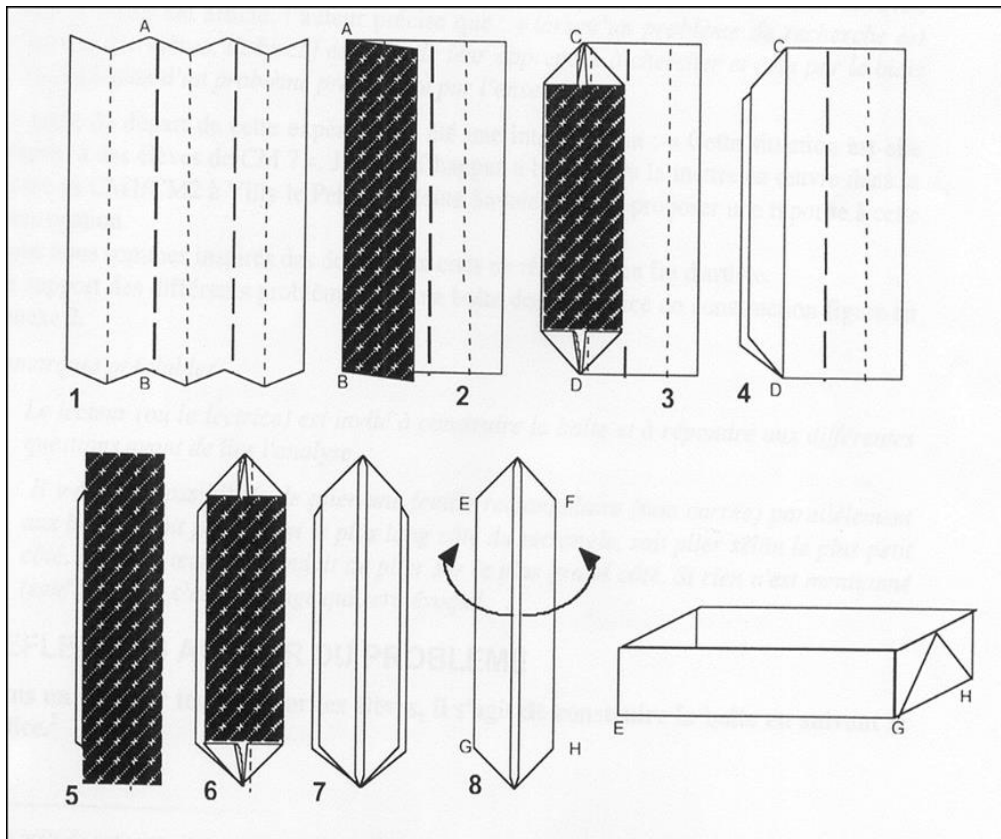
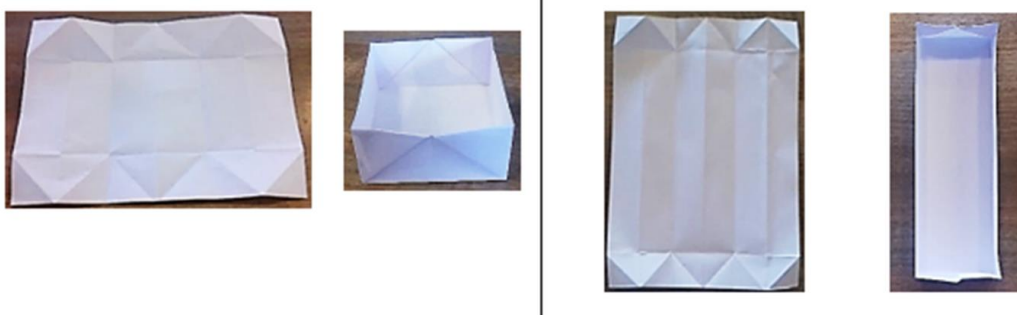


Figure 1. – Notice de pliage de la boîte (Chappaz & Michon, 2003, p. 32).

L'étude de cette situation amène différentes questions comme : peut-on obtenir n'importe quelle boîte ? Quel type de boîtes peut-on obtenir ? Est-ce qu'il y a un lien entre la forme de la boîte et la forme de la feuille ? Faut-il une feuille carrée pour obtenir une boîte carrée ? Que se passe-t-il si on plie la feuille dans le sens de la longueur ou dans le sens de la largeur ? Les réponses à ces questions se fondent sur l'élaboration de modèles et appellent de nouvelles questions. Ce faisant, une succession de modèles se construisent qui intègrent les modèles précédents.

### 1. Un premier modèle empirique-mesure

La construction de boîtes à partir de feuilles rectangulaires non-carrées permet de découvrir qu'on peut fabriquer deux boîtes différentes (figure 2) suivant que l'on plie dans le sens de sa longueur ou de sa largeur, alors qu'avec une feuille carrée, on ne peut fabriquer qu'une seule boîte (puisque largeur et longueur de la feuille se confondent).



**Figure 2.** – Les deux boîtes fabriquées avec une même feuille A4.

Si on mesure les dimensions de la boîte à partir de feuilles de différentes dimensions (voir tableau 1), de nouveaux constats peuvent être faits : avec une feuille carrée, on n’obtient pas une boîte à fond carré ; avec une feuille rectangulaire, on peut obtenir une boîte à fond carré ou rectangulaire. *In fine*, il n’y a pas de lien apparent entre la forme de la feuille et la forme du fond de boîte.

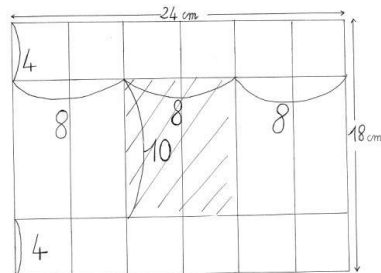
Feuille	Boîte		
	Longueur (cm)	Largeur (cm)	Hauteur (cm)
24 cm × 24 cm	8	16	4
14 cm × 21 cm	7	7	3,5
14 cm × 21 cm	16,3	4,6	2,3
13 cm × 15 cm	8	5	2,5
13 cm × 24 cm	8	5	4

**Tableau 1.** – Mesures des dimensions d’une boîte à partir du pliage d’une feuille.

Les mesures des boîtes à partir de feuilles de dimensions différentes permettent néanmoins de constater que l’on peut obtenir deux boîtes ayant le même fond mais pas la même hauteur. Et, à regarder les données du tableau, il semble que la hauteur soit toujours la moitié d’une des deux dimensions du fond de la boîte. L’étude de cette question conduit à enrichir le système étudié feuille/boîte de ce premier modèle empirique-mesure et, ce faisant, à concevoir un nouveau modèle.

## 2. Un second modèle géométrico-numérique

En dépliant la feuille, une analyse géométrique des plis – dont certains représentent les dimensions de la boîte – devient possible et permet la recherche d’une relation entre leurs différentes longueurs. Ces analyses reposent sur la connaissance de propriétés géométriques élémentaires, notamment celles du carré (par exemple, ses diagonales sont des axes de symétrie), et sur la recherche de relations numériques entre les longueurs (voir figure 3).



**Figure 3.** – Chappaz & Michon (2008, p.27).

Sur la figure 3, le fond de la boîte est hachuré, sa largeur mesure 8 cm et sa longueur 10 cm. Les plis forment 6 bandes verticales constituées de deux carrés et d'un rectangle. La longueur des côtés des 12 carrés présents sur la figure correspond à la largeur d'une bande. Ces observations qui s'appuient sur le procédé de pliage sont validées par les propriétés géométriques des figures ainsi construites. Elles permettent d'établir que la hauteur de la boîte est bien la moitié de sa largeur qui est égale au tiers de la longueur de la feuille tandis que la longueur de la boîte est égale à la largeur de la feuille moins deux hauteurs. Ces relations ainsi identifiées généralisent ce qui s'observait avec la fabrication des différentes boîtes et leurs mesures, faisant de ce deuxième modèle un enrichissement du premier. L'effort de généralisation se poursuit en considérant deux nouvelles questions : Quelle boîte peut-on fabriquer avec une feuille de dimension donnée ? Quelle feuille doit-on prévoir pour obtenir une boîte de dimensions données ?

### 3. Un modèle algébrique et un modèle fonctionnel

Nous l'avons vu avec la figure 2 : une feuille rectangulaire non-carrée permet de construire deux boîtes différentes selon le sens du pliage. En notant  $l$  et  $L$  respectivement la largeur et la longueur de la feuille ( $L > l$ ),  $x$  et  $y$  les deux dimensions du fond de la boîte et  $h$  sa hauteur, on peut établir les relations algébriques qui lient les dimensions de la feuille et de la boîte selon les deux orientations des plis. Si les plis sont parallèles à la largeur (image de gauche dans la figure 4) :  $x = L/3$ ,  $h = x/2 = L/6$ ,  $y = l - 2h = l - L/3$  ou  $L = 3x = 6h$  et  $l = y + x$ . Si les plis sont parallèles à la longueur de la feuille (image de droite dans la figure 4) :  $x = l/3$ ,  $h = x/2 = l/6$ ,  $y = L - 2h = L - l/3$  ou  $l = 3x = 6h$  et  $L = y + x$ . Notons que dans le premier cas  $2x > y$  et dans le second cas  $2x < y$ .

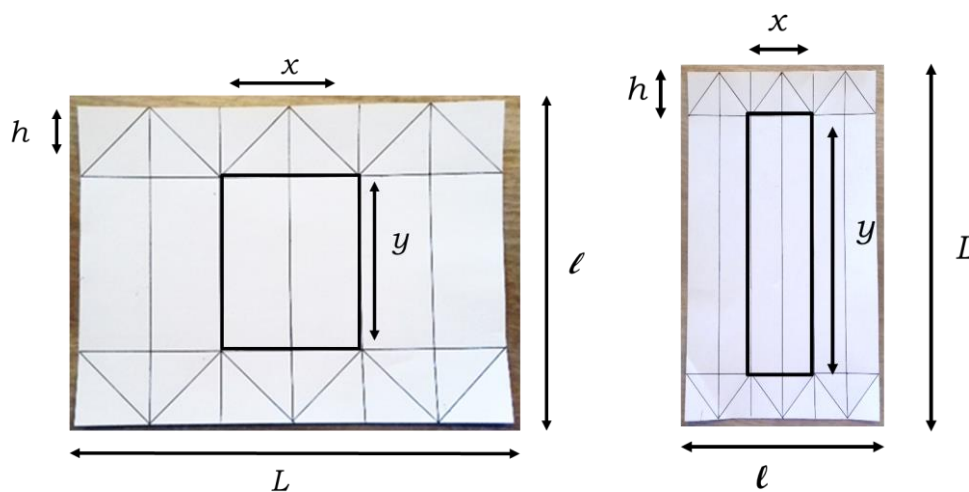


Figure 4. – Les dimensions de la feuille et de la boîte selon les deux orientations des plis.

Lorsque la feuille est carrée, longueur  $L$  et largeur  $l$  sont égales et les dimensions de la boîte sont :  $x = L/3 = l/3$ ,  $h = x/2$  et  $y = 2x$ .

En revanche, pour fabriquer une boîte à fond carrée à partir de ce procédé de pliage (ce qui nécessite d'avoir la relation  $x = y = 2h$ ), il faut une feuille rectangulaire de dimensions  $l = 2x = 2y$  et  $L = 3x = 3y$  et seul le premier cas de pliage est possible.

Poursuivant le travail de généralisation et de développement du modèle algébrique, pour traiter des problèmes de maximisation de volume par exemple, on peut construire un quatrième modèle fonctionnel. Ce faisant, on passe d'une modélisation en  $(L, l)$  à une modélisation plus symétrique en  $(a, b)$ . En considérant le premier sens de pliage, la fonction  $F_1$  associe aux dimensions  $(a, b)$  d'une feuille, les dimensions  $(x, y, h)$  de la boîte qu'on peut fabriquer et, en

sens inverse, la fonction  $F_2$  associe aux dimensions d'une boîte de fond  $(x, y)$ <sup>1</sup>, les dimensions de la feuille nécessaire pour la fabriquer selon ce procédé :

$$F_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 ; F_1(a, b) = (a/3; b - a/3; a/6) ;$$

$$F_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 ; F_2(x, y) = (3x; x + y).$$

Remarquons que, ces fonctions étant linéaires, on peut aussi les exprimer sous forme matricielle :

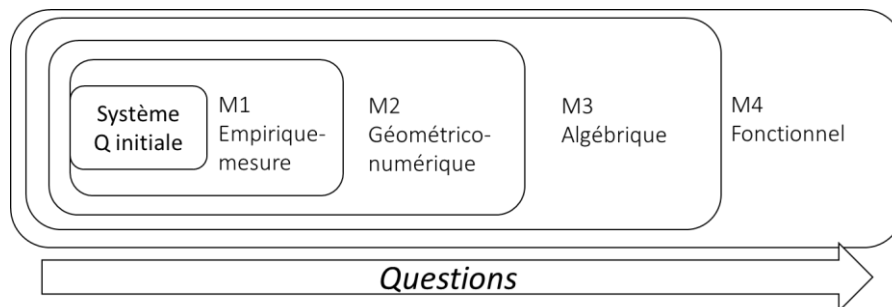
$$M_1 = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ -1/3 & 1 \\ 1/6 & 0 \end{pmatrix} M_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Et l'on observe que leur composition donne :

$$M_1 \cdot M_2 = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ -1/3 & 1 \\ 1/6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

On retrouve que ce n'est pas n'importe quelle boîte qui peut être fabriquée par ce procédé, mais seulement des boîtes dont la hauteur est la moitié d'une des dimensions du fond de cette boîte. Le deuxième type de pliage (plis parallèles à la longueur) est représenté par les fonctions  $G_1(a, b) = F_1(b, a)$  et  $G_2(x, y) = (x + y, 3x)$ , ce qui montre bien la symétrie de la construction.

Cette rapide analyse montre comment les organisations mathématiques s'enrichissent et se développent au fur et à mesure que de nouvelles questions émergent. Chaque modèle mathématique est motivé par de nouvelles questions et devient un élément du système sur lequel se construit le modèle mathématique suivant, comme l'illustre la figure 5.



**Figure 5.** – Bilan du processus de modélisation par le développement de modèles successifs.

Ce modèle du processus de modélisation va maintenant servir de modèle praxéologique de référence pour analyser les praxéologies de modélisation pour l'étude de la situation de la boîte du pâtissier. Nous l'appellerons MPR-Boîte du pâtissier dans la suite.

## UN PARCOURS D'ÉTUDE ET DE RECHERCHE POUR LA FORMATION

La situation de la boîte du pâtissier est utilisée en formation initiale des professeurs des écoles à l'Université de Barcelone. Son étude se déroule selon huit séances de 2 heures avec un groupe de 40 étudiants, en troisième année (sur cinq années de formation). Bien que cette activité ait été expérimentée depuis l'année académique 2012-13, dans ce texte, nous nous concentrons sur

<sup>1</sup> Rappelons que la hauteur de la boîte est toujours la moitié d'une des dimensions du fond.

sa mise en œuvre en 2019-20 où la formation s'est développée en anglais (au lieu du catalan qui est la langue courante d'usage). La conception du processus suit les trois premiers modules du dispositif de formation proposé par les parcours d'études et de recherche pour la formation des enseignants (PER-FE) (Barquero, Bosch & Romo, 2018).

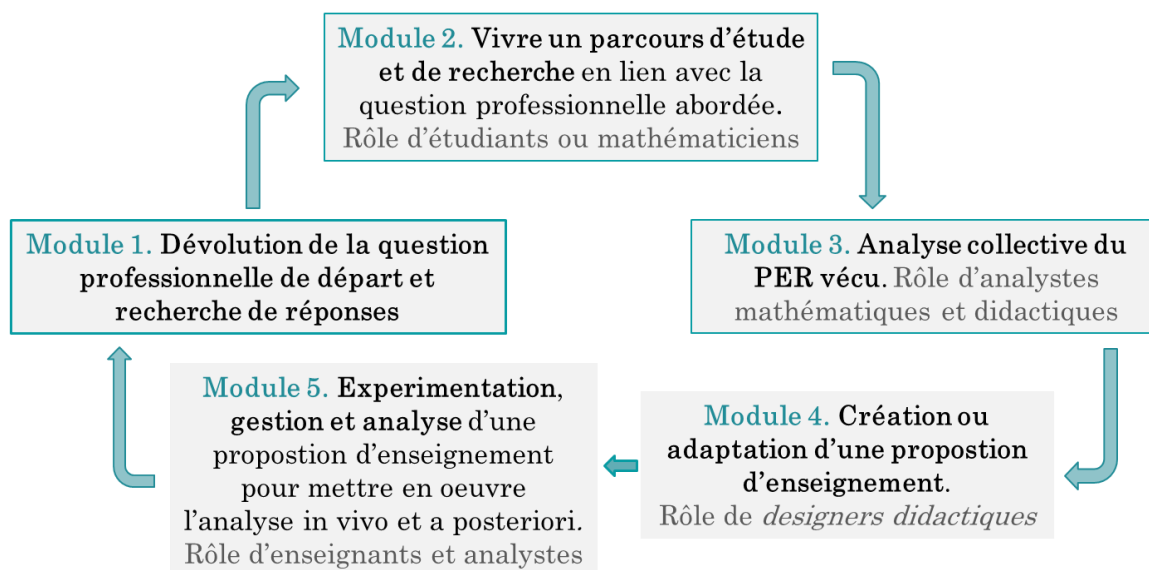


Figure 6. – Structure générale des PER-FE (Ruiz-Olarría, 2015 ; Barquero et al., 2018)

Dans le premier module, les étudiants (enseignants en formation initiale) sont confrontés aux questions suivantes : « Comment enseigner la modélisation à l'école primaire ? À travers quelles activités de modélisation ? ». Nous avons utilisé la situation de la recherche de la taille d'un géant dans un parc d'attractions (Wozniak, 2012) comme introduction, afin de les familiariser avec une activité de modélisation. Cette activité a également servi à établir un lexique commun : système, modèle, hypothèses, variables du système, résultats mathématiques, interprétation, validation du modèle, etc. Certains des principaux résultats décrits dans Wozniak (2012) ont été exposés aux étudiants.

Dans le deuxième module, trois séances ont été consacrées à la mise en œuvre de l'activité de la boîte du pâtissier (décrite dans la section précédente), où les futurs enseignants ont été invités à se mettre en position d'*élève*. L'objectif principal de ce module est de leur faire vivre une activité mathématique peu familière qui pourrait, sous certaines conditions, exister dans une classe ordinaire. Puis, par groupe, les étudiants doivent étudier la situation de modélisation et rédiger un rapport qui décrive les questions qu'ils se sont posées et les réponses qu'ils y ont apportées (voir Annexe 1). Le troisième module s'est étalé sur trois séances, au cours desquelles les étudiants ont analysé le processus de modélisation tel qu'il a été vécu. Des mises en commun des rapports des étudiants ont permis à la formatrice d'institutionnaliser les éléments du processus de modélisation ainsi que leur analyse (limitations des différents types de modèles, questions qu'ils permettent de poser, etc.). Les modules 4 et 5 n'ont pas été implémentés.

Dans la section suivante, nous présentons l'analyse des rapports des étudiants qui nous ont permis d'identifier les modèles qui se construisent successivement, l'évolution du système avec l'avancée du processus et le rôle de modèles préexistants (comme la *règle de trois* ou la *proportionnalité*) dans le milieu des étudiants (voir Annexe 2). Du fait de la réversibilité système/modèle, le modèle de référence que nous avons conçu pour analyser les praxéologies de modélisation peut devenir le système étudié selon une dialectique outil/objet. Ainsi, symétriquement, l'observation de praxéologies effectives joue le rôle de milieu pour mettre à l'épreuve notre modèle de référence. Cette confrontation à l'empirie pourrait alors nous conduire à compléter ou modifier notre MPR-Boîte-Pâtissier et/ou à reconsidérer sa

représentation graphique par emboîtements de modèles successifs si elle apparaissait mal adaptée ou avec des limitations pour décrire les phénomènes didactiques identifiés.

## ANALYSE DE PRAXELOGIES DE MODELISATION

Nous considérerons à présent le rapport de deux groupes d'étudiants que nous appellerons *groupe A* et *groupe B* dans la suite. Ces rapports sont élaborés tout au long du module 2 du PER-FE quand les enseignants en formation assument le rôle d'*étudiants* lors de l'activité de modélisation de la boîte du pâtissier. L'annexe 2 inclut un résumé de ces deux rapports. La situation est présentée ainsi :

Nous voulons aider un chef pâtissier qui a besoin d'aide pour emballer ses gâteaux dans des boîtes. Elle veut utiliser le même type de boîtes qu'elle a déjà utilisé. Elle collecte actuellement toutes les tailles des gâteaux et autres produits sucrés qu'elle vend dans sa pâtisserie pour nous en faire part (très bientôt !). Mais, avant d'avoir cette information, nous devons nous familiariser avec le type de boîtes qu'elle utilise pour emballer les gâteaux afin de pouvoir l'aider.

Une fois que les étudiants savent réaliser des boîtes, les questions génératrices de l'étude se posent : Comment construire des boîtes pour aider le pâtissier à emballer la variété de gâteaux qu'il propose ? Quelle relation existe-t-il entre les tailles des gâteaux, les tailles du matériau initial (papier ou carton) que nous utilisons et les tailles des boîtes fabriquées ? À ce moment-là, le système  $S_0$  est fait de feuilles, de boîtes et de la méthode de pliage. L'étude est structurée par trois phases, chacune associée à une question :

- $Q_{01}$  : Quelles sont les dimensions d'une boîte issue d'un papier dont les dimensions sont connues ?
- $Q_{02}$  : Quels sont les formats de papier initiaux dont nous avons besoin pour construire une boîte avec des dimensions spécifiques ?
- $Q_{03}$  : Comment construire les boîtes avec couvercles dont le pâtissier a besoin ?

Notons que le milieu de l'étude de la question  $Q_{03}$  s'enrichit de la donnée par le chef pâtissier des dimensions des boîtes requises pour emballer différents gâteaux de formes différentes, notamment le *Braç de gitano* (gâteau roulé) et le *Torró* (nougat) de forme allongée et un gâteau de forme arrondie. Le rapport, qui explicite comment les réponses se construisent dans chaque phase, doit contenir une lettre à adresser au chef pâtissier (Annexe 1). A l'issue de chaque phase, une mise en commun est réalisée, geste didactique qui permet d'enrichir le milieu des étudiants. Considérant la question  $Q_{01}$ , le *groupe A* fabrique des boîtes avec des feuilles de dimensions différentes et mesure leurs dimensions. La réponse  $R_{01}^\heartsuit$  est donnée sous la forme d'une liste de 10 mesures de dimensions du fond des boîtes ( $x, y$ ) à partir des dimensions des feuilles ( $l, L$ ), en tenant compte de l'orientation des plis ou de la possibilité matérielle de réaliser concrètement les boîtes. Le système défini par le groupe à cette étape est  $S_{Ph1} = S_0 \cup \{l, L, x, y\}$  et le modèle sur lequel se fonde la réponse  $R_{01}^\heartsuit$  est le modèle  $M_1$  (empirique-mesure) de notre MPR-Boîte-Pâtissier. En réponse à la question  $Q_{02}$ , ce même groupe cherche une relation entre les dimensions en explorant un modèle proportionnel entre dimensions, finalement rejeté. Le groupe s'intéresse à l'aire du fond de boîte, sans succès, mobilisant un modèle qui complète le modèle  $M_1$  de notre MPR-Boîte-Pâtissier,  $M_1^\#$  empirique-mesure-grandeurs et proportionnalité. En s'appuyant sur la mesure des feuilles dépliées, le groupe produit une description discursive de la relation entre les dimensions de la boîte ( $y$  compris sa hauteur) et celles de la feuille. Cette réponse  $R_{02}^\heartsuit$  se construit sur un modèle  $M_2^b$  géométrico-empirique, qui peut être vu comme une altération du modèle  $M_2$  géométrico-numérique de notre MPR-Boîte-Pâtissier dans le sens où tous les plis ne sont pas considérés, seulement le fond de boîte et sa hauteur à partir d'une feuille dépliée, ce qu'illustre la comparaison des figures 3 et 7. Le système considéré dans cette phase intègre au système précédent, une nouvelle dimension (la hauteur de la boîte  $h$ ), une nouvelle grandeur (l'aire du fond de boîte  $A$ ), le modèle  $M_1$  mobilisé précédemment :  $S_{Ph2} = S_{Ph1}$

$\cup\{h, A, M_1\}$ . L'étude de la question  $Q_{03}$  amène le groupe à prendre en compte la place nécessaire pour les doigts quand on retire les gâteaux des boîtes (ajout arbitraire de 2 cm aux dimensions données) et à augmenter de 0,3 cm les dimensions du fond de boîte pour constituer le couvercle, comme l'illustre la figure 7 pour un gâteau de diamètre 6 cm.

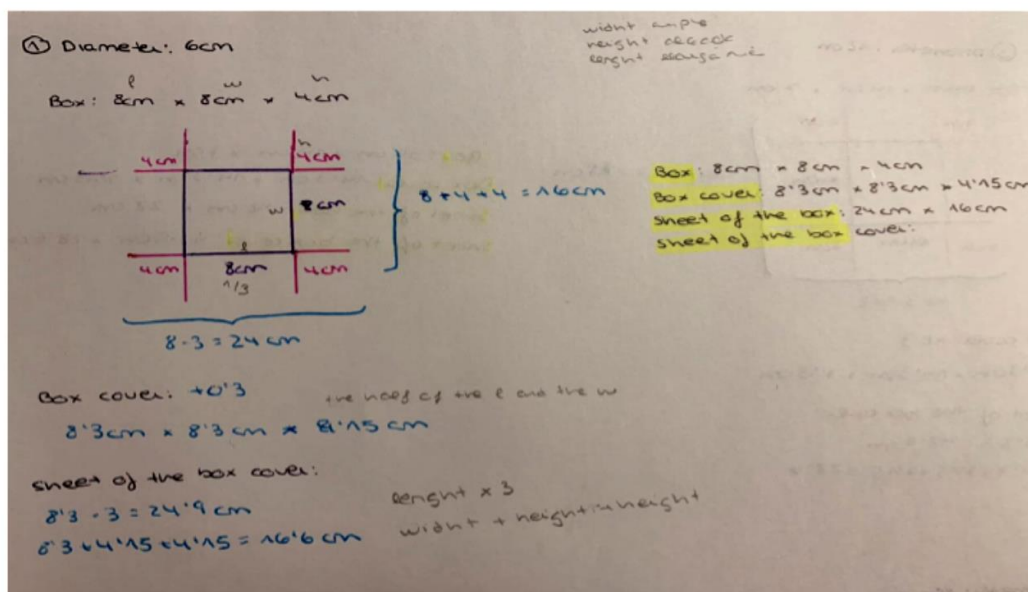


Figure 7. – Extrait du rapport rédigé par le groupe A : calculs des dimensions d'une feuille.

En revanche, le groupe envisage un patron de boîte alternative pour les gâteaux « Braç de gitano » et « Torró ». Dans cette phase, le système considéré intègre au système précédent les modèles mathématiques conçus au cours de la phase précédente et les dimensions des gâteaux pour lesquels il faut fabriquer des boîtes,  $S_{Ph3} = S_{Ph2} \cup \{M_1^\#, M_2^b, \text{gâteaux}\}$ , tandis que le modèle mathématique sur lequel se construit la réponse reste le modèle  $M_2^b$ . Le rapport se conclut par une lettre au chef pâtissier contenant un tableau qui précise pour chaque catégorie de gâteaux les dimensions de la boîte, de son couvercle et des feuilles nécessaires pour les réaliser.

Considérant la question  $Q_{01}$  le groupe *B* commence par envisager l'effet de l'orientation de la feuille au moment du pliage, puis fabrique et mesure les dimensions pour calculer l'aire du fond de la boîte avec des feuilles A3, A4, A5. Il s'agit alors de rechercher un modèle proportionnel entre les aires du fond des boîtes, d'une part et entre les aires des feuilles et des fonds de boîtes, d'autre part. Leur réponse  $R_{01}^\heartsuit$  est qu'il y a proportionnalité entre aires en dépit des calculs réalisés du fait d'erreurs de mesure. Le système considéré par le groupe à cette étape est  $S_{Ph1} = S_0 \cup \{\text{feuilles A3-A4-A5}, l, L, x, y, A, \text{orientations } \uparrow \rightarrow\}$  et le modèle sur lequel se fonde la réponse  $R_{01}^\heartsuit$  est le modèle  $M_1^\#$  empirique-mesure-grandeurs et proportionnalité. En réponse à la question  $Q_{02}$ , ce groupe utilise la hauteur de la boîte comme variable prépondérante après avoir découvert en fabriquant des boîtes qu'il n'était pas possible de construire avec ce procédé des boîtes de n'importe quelle hauteur. Le cœur de cette phase consiste à chercher les relations algébriques entre cette hauteur et les autres dimensions, en particulier une relation de proportionnalité. Dans cette phase, le système considéré inclut une nouvelle dimension, la hauteur de la boîte  $h$ , les modèles  $M_1$  et  $M_1^\#$  mobilisés précédemment, ainsi que les erreurs de mesure comme argument pour maintenir le modèle de proportionnalité comme référence ( $M_1^\#$ ) en dépit des calculs :  $S_{Ph2} = S_{Ph1} \cup \{h, M_1, M_1^\#, \text{erreurs de mesure}\}$ . Un nouveau modèle est mobilisé :  $M_3$  qui intègre le modèle  $M_2$  comme l'illustre la figure 8.

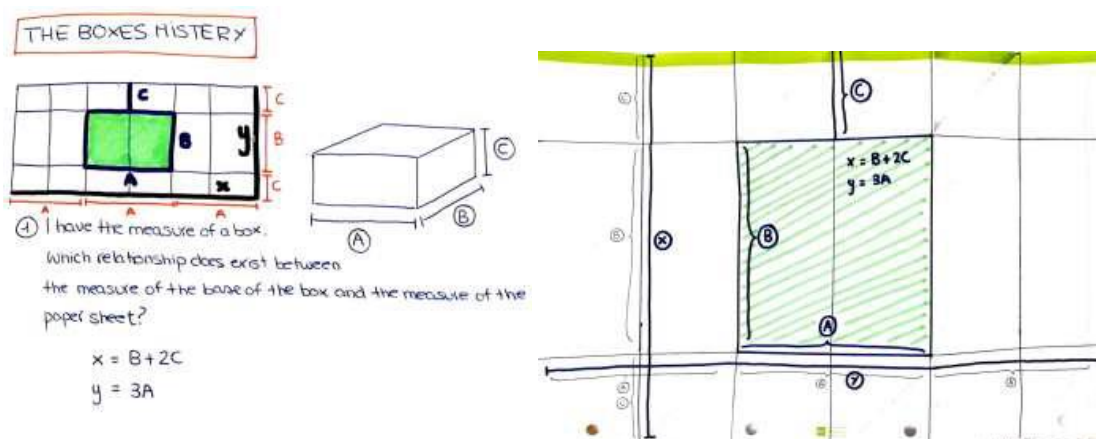


Figure 8. – Extrait du rapport du groupe : relation algébrique entre les dimensions.

L'étude de la question  $Q_{03}$  commence par la prise en compte, comme le groupe précédent, de la place nécessaire pour les doigts pour retirer les gâteaux des boîtes et propose (arbitrairement) différentes valeurs suivant le nombre ou les types de gâteaux. Le travail mathématique ensuite repose sur une étude de la hauteur des boîtes en fonction de la hauteur des gâteaux. Lorsque les dimensions du fond de la boîte sont grandes, la hauteur l'est aussi. Contrairement au groupe précédent qui va chercher de nouveaux pliages, ce groupe propose d'adapter le pliage en modifiant la largeur des bandes qui vont former les bords de la boîte (voir figure 9).

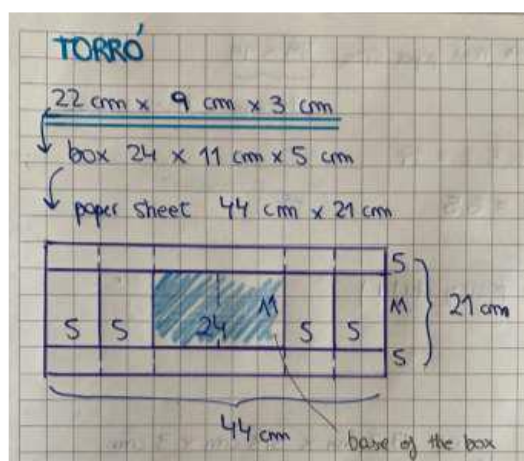


Figure 9. – Extrait du rapport du groupe B : modification du procédé de construction.

Dans cette phase, le système considéré intègre au système précédent les modèles mathématiques conçus au cours de la phase précédente et les dimensions des gâteaux pour lesquels il faut fabriquer des boîtes,  $S_{Ph3} = S_{Ph2} \cup \{M_2, M_3, \text{gâteaux}\}$ , sans mobiliser de nouveaux modèles que ceux déjà conçus.

Cette confrontation à l'empirie par l'observation de praxéologies de modélisation effectives conduit à interroger le modèle de référence MPR-Boîte-Pâtissier élaboré dans la première partie de ce texte qui ne rend pas visibles les différences entre les groupes A et B. Le groupe A ne recourt par à un modèle algébrique mais conçoit des modèles géométriques où la composante empirique est plus développée. Le groupe B de son côté développe tous les modèles jusqu'au modèle algébrique et un travail sur les grandeurs pour délimiter le système et le modéliser. Son rapport à l'empirie se caractérisant par le recourt à un argument sur les erreurs de mesure pour maintenir une hypothèse de proportionnalité en dépit des résultats des calculs. Notons enfin que le procédé de pliage fait partie du système et que les deux groupes choisissent soit de changer

de patron (*groupe A*), soit d'adapter le pliage (*groupe B*) pour mieux répondre aux besoins. La délimitation du système inclut les questions que l'on se pose à son propos.

Dès la première phase, le *groupe A* fabrique et mesure les dimensions de la boîte tandis que le *groupe B* fabrique et mesure les dimensions pour calculer les aires à la recherche d'un modèle proportionnel. Nous proposons donc d'inclure dans  $M_1$  une composante « grandeur », en plus des composantes « empirique » et « mesure » en intégrant le modèle  $M_1^{\#}$  à  $M_1$ . Nous avons constaté aussi l'existence d'un modèle qui n'est plus  $M_1$  mais pas complètement encore le modèle  $M_2$  tel que nous l'avons défini. Par ailleurs, il existe un modèle intermédiaire  $M_2^b$  dont la composante empirique s'exprime par le fait que la feuille n'est pas encore regardée comme une figure géométrique où tous les plis sont mis en relation avec ses dimensions (longueur et largeur). Au-delà des modèles construits, ce qui différencie le parcours des deux groupes, c'est la délimitation et l'évolution des systèmes et comment elle s'articule à l'évolution des modèles à partir des questions qui se posent pour l'étude. Ceci nous conduit à devoir proposer une autre représentation (figure 10) du processus de modélisation, où  $M_1'$ ,  $M_1''$  et  $M_2'$  indiquent de possibles modèles intermédiaires entre  $M_1$ ,  $M_2$  et  $M_3$ .

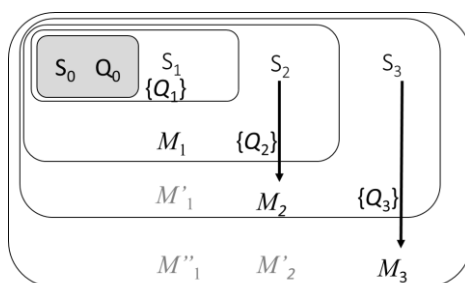


Figure 10. – Représentation du processus de modélisation.

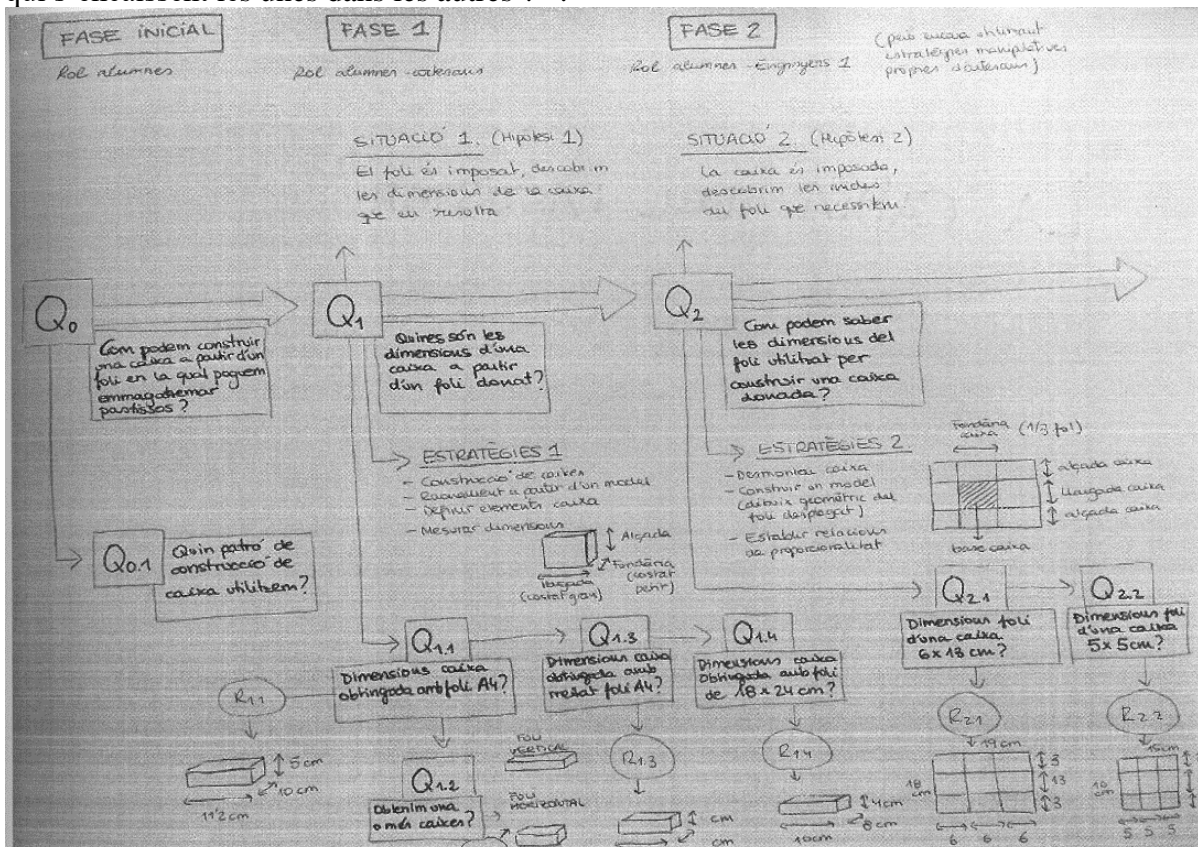
Dans cette analyse de praxéologies de modélisation de deux groupes d'étudiants, nous avons considéré l'évolution conjointe des systèmes et des modèles sans prendre en compte ce qui est le moteur de cette évolution : le jeu de questions-réponses qui alimente le processus de modélisation. Ensuite, nous allons présenter comment le parcours d'étude et de recherche pour la formation dont sont issus ces rapports fait vivre ce jeu de questions-réponses. Ceci permettra de discuter de la façon dont les cartes Q-R peuvent être un appui pour développer les discours technologiques des enseignants, condition de l'évolution de praxéologies de modélisation muettes vers des praxéologies fortes.

## UN OUTIL D'ANALYSE : LES CARTES DE QUESTIONS-REPONSES

Nous constatons que les modèles transitoires et leur évolution, ainsi que les modèles écartés tout au long de l'activité de recherche ont tendance à disparaître dans l'histoire de l'activité de modélisation. Ce qui reste est souvent le modèle considéré comme le plus performant, soumis généralement à une réduction ostensive importante. Nous faisons l'hypothèse que la prise de conscience de l'existence de différents modèles et de leurs corrélations est un aspect important dans l'étude de la modélisation et la formation des futurs enseignants. Une question se pose alors : Quel geste didactique mettre en place pour conserver le parcours d'étude et de recherche vécu ?

Dans le module 2, les enseignants en formation sont invités à analyser l'activité de modélisation qui a été expérimentée. Il leur est demandé d'endosser le rôle d'« analyste mathématique » et « analyste didactique » de l'activité vécue et de sa gestion dans la classe. L'ensemble des rapports remis par chaque groupe, les discussions en groupe-classe, les forums partagés et les présentations de la formatrice constituent un moyen partagé très riche pour recueillir des traces et des preuves empiriques de l'activité vécue.

Dans le rôle d'analystes mathématiques, les étudiants analysent l'activité mathématique réalisée. Pour ne pas réduire une telle analyse à une liste de contenus abordés ou à la simple correction des réponses, l'importance d'analyser la dynamique établie entre les questions abordées, les systèmes, les modèles et les réponses données est discutée collectivement. Cela conduit la formatrice à proposer l'utilisation des *cartes questions-réponses* (Winsløw, Matheron, & Mercier, 2013) comme outil principal d'analyse. Est ainsi présenté un premier schéma de carte avec la structure des phases, les questions les plus caractéristiques de chaque phase et les réponses qui ont été traitées. Il est demandé aux étudiants de le compléter, dans un premier temps, à partir de leurs rapports, puis d'étendre ou d'inclure d'autres questions, réponses, techniques du groupe classe. Des indications sont également données sous la forme de caractéristiques cartographiques de type questions-réponses (Q-R). La figure 11 illustre un exemple de carte de questions-réponses élaborée par l'un des groupes de travail de l'année 2015-16 (enseignement en catalan). Les principales questions abordées sont :  $Q_0$  « Comment peut-on construire une boîte à partir d'une feuille pour y garder des gâteaux ? »,  $Q_1$  « Quelles sont les dimensions d'une boîte à partir d'une feuille donnée ? »,  $Q_2$  « Comment savoir les dimensions de la feuille utilisée pour construire une boîte donnée ? »,  $Q_3$  « Comment savoir les dimensions de la boîte à partir de celles de la feuille ? »,  $Q_4$  « Comment construire des boîtes qui s'encaissent les unes dans les autres ? ».



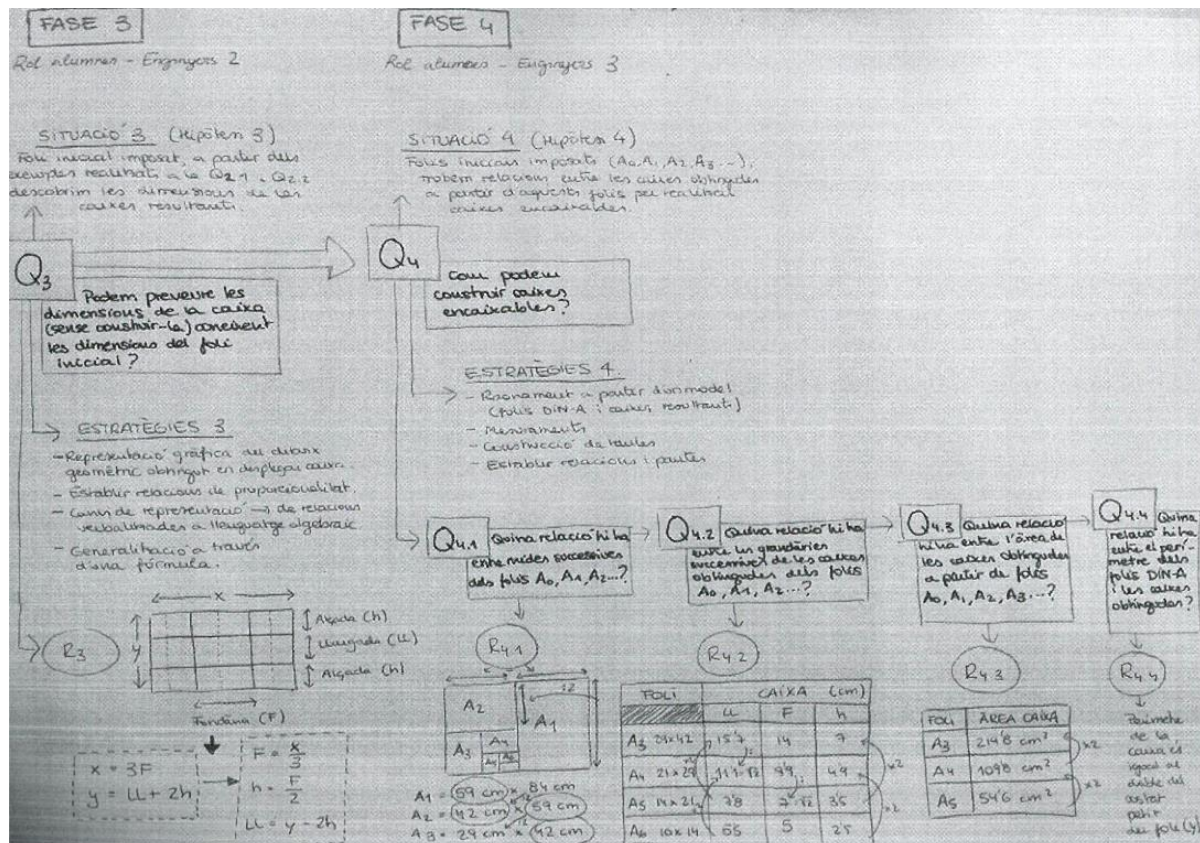


Figure 11. – Exemple d'una carta de preguntes-respostes (text en catalan)

On y voit comment les réponses révèlent les modèles construits, même si les systèmes ne sont pas explicités. Une fois la carte Q-R complétée, elle est utilisée comme outil d'analyse dans différentes activités proposées dans la formation, comme l'étude par tous les étudiants d'une même carte produite par un des groupes. Les cartes Q-R explicitant les trajectoires de modélisation suivies par les groupes, permettent de les décrire et de les évaluer. Les discussions sur ces trajectoires permettent aux groupes d'enrichir leurs propres cartes Q-R en incluant de nouvelles questions, réponses et stratégies négligées dans un premier moment et qui leur paraissent importantes à considérer. La figure 12 illustre comment un groupe analyse le travail d'un autre groupe. En vert, les étudiants superposent sur la carte Q-R de leur propre trajectoire de modélisation (figure 11) une autre trajectoire possible.

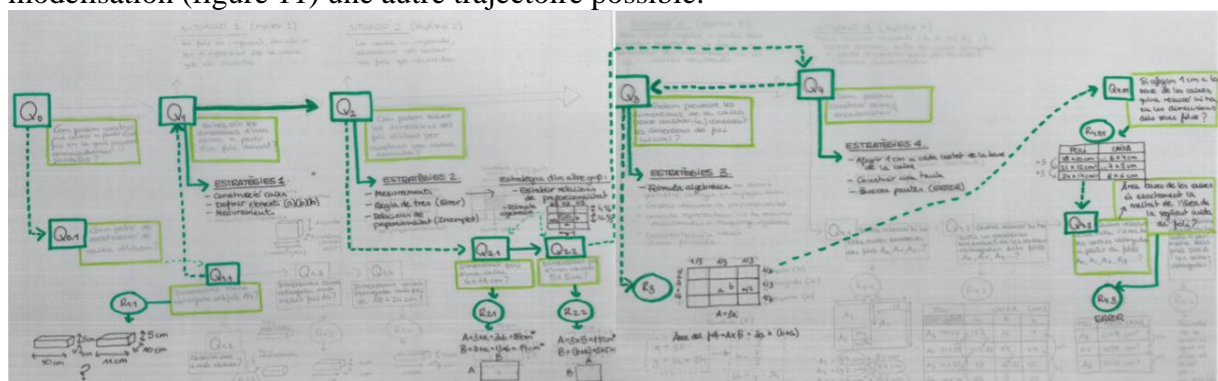


Figure 12. – Utilisation de la carte Q-R pour décrire les parcours de modélisation d'un autre groupe.

Les cartes Q-R produisent une hiérarchisation des questions en rendant compte de la temporalité du processus de modélisation par la restitution de l'ordre des questions traitées et des réponses apportées. Elles matérialisent et laissent une trace de la construction progressive des modèles.

Elles sont un dispositif didactique qui permet l'analyse de la dynamique du processus de modélisation et la conception de nouvelles trajectoires de modélisation. Leur expérimentation en formation a montré qu'il s'agit d'un outil puissant pour alimenter les réflexions autour de la modélisation mathématique des situations d'enseignement.

## CONCLUSION

La modélisation est progressivement entrée dans les curriculums de différents pays en même temps que la démarche d'investigation y devenait un élément structurant sous l'impulsion des évaluations internationales comme TIMSS ou PISA (Barquero et al., 2018). Cette évolution conduit les formateurs d'enseignants à se poser la question : quelle stratégie pour former à l'enseignement de la modélisation ? Or des travaux attestent de la difficulté pour les enseignants, notamment de l'école primaire, de percevoir ce qu'est un processus de modélisation. Difficulté qui s'observe par la mise en œuvre de praxéologies muettes où la solution d'un problème est enseignée plutôt que le processus qui permet de produire cette solution. Ce texte présente donc la réponse apportée par l'Université de Barcelone en considérant les outils didactiques qui peuvent être apportés aux enseignants pour dépasser cette difficulté. Quel dispositif mettre en œuvre qui révèle les spécificités du processus de modélisation et quel outil didactique peut-on doter les (futurs) enseignants pour analyser et produire des situations d'enseignement ?

Le système initial sur lequel se construit cette réponse est fait du modèle des PER-FE (Ruiz-Olarría, 2015 ; Barquero et al., 2018) et du modèle du processus de modélisation proposé par Chevallard (1989). De façon à illustrer l'analyse didactique à conduire lors de l'élaboration d'un tel PER-FE, nous avons présenté dans la première partie la construction a priori d'un modèle praxéologique de référence pour l'étude d'une situation de modélisation largement éprouvée, la boîte du pâtissier. Pour rendre compte de la modélisation comme un processus évolutif, nous l'avons représenté comme un emboîtement de modèles associés à un système qu'il s'agit lui aussi d'explicitier. Or l'élaboration d'un modèle vient enrichir la compréhension d'une part de cette réalité modélisée. Cette nouvelle lecture du réel qu'offre le couple système-modèle peut générer de nouvelles questions. Le modèle initial devient alors un élément constitutif d'un nouveau système sur lequel se construit un nouveau modèle. C'est cette dynamique que nous avons montré dans l'analyse a priori de la situation boîte du pâtissier. Si l'on peut considérer un système comme le milieu sur lequel se construit un modèle, le système n'est qu'une partie du milieu de la situation didactique (au sens de la théorie des situations didactiques). Tout élément du milieu n'est pas nécessairement élément du système qui se définit en considérant les variables supposées déterminantes pour répondre à la question. De ce fait, l'emboîtement des modèles ne peut se confondre avec une structuration du milieu. Sur cette base, un modèle praxéologique de référence du processus de modélisation MPR-boîte-pâtissier est construit dans la première partie de ce texte. Le domaine de validité d'un modèle se mesure à son adéquation avec la réalité qu'il modélise notamment par une confrontation à l'empirie, c'est-à-dire ici, à des praxéologies de modélisation effectives. Cette confrontation, présentée à travers l'étude de deux rapports d'étudiants, a conduit à intégrer de nouveaux éléments dans le MPR-boîte-pâtissier. Nous faisons l'hypothèse qu'un modèle praxéologique d'une modélisation mathématique n'a pas qu'une fonction heuristique pour le chercheur, il est aussi une grille d'analyse didactique pour les enseignants lorsqu'ils observent les praxéologies mises en œuvre par les élèves et permet de produire des connaissances didactiques sur les situations d'enseignement. Cependant la représentation du MPR sous forme de modèles emboîtés masque les questions qui sont le moteur du processus. Aussi est-il complété par les cartes questions-réponses.

L'objectif de cet atelier était de présenter un dispositif de formation pour les enseignants d'école en forme de PER-FE centré sur les processus de modélisation. Les productions des étudiants ayant suivi cette formation ont servi à illustrer les différentes démarches du processus et à apporter quelques matériaux pour son analyse. Celle-ci reste néanmoins en grande partie à produire.

#### RÉFÉRENCES

- BARQUERO, B., BOSCH, M., ROMO, A. (2018). Mathematical modelling in teacher education: dealing with institutional constraints. *ZDM Mathematics Education*, 50(1-2), 31-43.
- BARQUERO, B., BOSCH, M., WOZNIAK, F. (2019). Modelling praxeologies in teacher education: the cake box. Dans U.T. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen, M. Veldhuis (Eds.), *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Utrecht University*, Utrecht, Netherlands. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02408705>
- BARQUERO, B., FLORENSA, I., JESSEN, B., LUCAS, C., WOZNIAK, F. (2018). The external transposition of inquiry in mathematics education: impact on curriculum in different countries. ICMI Studies 24. School Mathematics Curriculum Reforms: Challenges, Changes and Opportunities. University of Tsukuba, Japan. (pp. 189-197).
- CHAPPAZ, J., MICHON, F. (2003). La boîte du pâtissier. *Grand N* 72, 19-32.
- CHEVALLARD, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie, perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x*, 19, 43-72.
- CHEVALLARD, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-265.
- FLORENSA, I., BOSCH, M., GASCON, J. (2020). Question-answer maps as an epistemological tool in teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 1-23.
- OLARRIA, A. R. (2015). *La formación matemático-didáctica del profesorado de secundaria: De las matemáticas por enseñar a las matemáticas para la enseñanza* (Thèse de doctorat, Universidad Autónoma de Madrid).
- WINSLØW, C., MATHERON, Y., & MERCIER, A. (2013). Study and research courses as an epistemological model for didactics. *Educational Studies in Mathematics*, 83(2), 267-284.
- WOZNIAK, F. (2012). Des professeurs des écoles face à un problème de modélisation : une question d'équipement praxéologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 32(1), 7-55.

## ANNEXES

*Annexe 1*

Nous présentons ici les questions posées aux étudiants et qui structurent le plan des rapports à présenter. En plus de faire le récit du parcours d'étude et de recherche, le rapport doit contenir la réponse au chef pâtissier. Celle-ci prend souvent la forme d'un tableau de mesures.

## INTRODUCTION

1. What do we have to do?
2. Initial question.
3. Instructions to build the box.

## PHASE 1: Building boxes and measuring their sizes

1. Which particular cases (paper sheets) and questions have you addressed? Which answers have you found out?
2. Which strategies did you follow?
3. How do you propose to follow your inquiry? New questions.

## PHASE 2: But, if what we know is the box we want ...

1. Which questions have you addressed?
2. Which answers have you found out and how?
3. How do you propose to follow your inquiry? New questions after Phase 2.

## PHASE 3: Let us give an answer to the pastry chef!

Specific sizes and patterns of construction.

1. Which questions have you addressed?
2. Which answers have you found out and how have you found them?
3. How do you propose to follow your inquiry? New questions after Phase3.

## Annexe 2

Synthèse des rapports des groupes A et B pour l'étude du problème de la boîte du pâtissier : les systèmes, les questions, les réponses, les modèles.

	<i>Groupe A</i>	<i>Groupe B</i>
<i>Q</i> <sub>01</sub>	<p><math>S_{Ph1} = S_0 \cup \{l, L, x, y\}</math>  <math>M_1</math> empirique-mesure  <math>R_{01}^\heartsuit</math>: liste de 10 mesures de dimensions de fond de boîtes (<math>x, y</math>) pour différentes dimensions de feuille (<math>l, L</math>).</p>	<p><math>S_{Ph1} = \{\text{feuilles A3-A4-A5}, l, L, x, y, A, \text{orientations } \uparrow \rightarrow\}</math>  <math>Q_{1.1}</math>: effet de l'orientation des plis sur la boîte et l'aire des fonds de boîtes ?  <math>\rightarrow R_{1.1}^\heartsuit</math>: pas les mêmes boîtes.  <math>M_1</math>: empirique-mesure  <math>Q_2</math>: Proportionnalité des dimensions boîte/feuille ?  <math>\rightarrow R_{1.2}^\heartsuit</math>: oui, les sommets sont alignés sur une diagonale.  <math>M_1^\#</math> empirique-mesure-grandeurs et proportionnalité  <math>Q_3</math>: proportionnalité entre les aires des bases ?  <math>\rightarrow R_{1.3}^\heartsuit</math>: proportionnalité malgré les calculs du fait d'erreurs de mesures.  <math>M_1^\#</math>  <math>Q_4</math>: connaissant les dimensions de la feuille, quelle est l'aire de la boîte ?  <math>\rightarrow R_{1.4}^\heartsuit</math>: oui mais il faut une référence  <math>M_1^\#</math></p>
<i>Q</i> <sub>02</sub>	<p><math>S_{Ph2} = S_{Ph1} \cup \{h, M_1, A\}</math>  <math>Q_{2.1}</math>: peut-on utiliser une règle de trois ?  <math>\rightarrow R_{2.1}^\heartsuit</math>: Non  <math>M_1^\#</math> empirique-mesure-grandeurs et proportionnalité  <math>Q_{2.2}</math>: L'aire intervient ?  <math>\rightarrow R_{2.2}^\heartsuit</math>: Non.  <math>M_1^\#</math>  <math>Q_{2.3}</math>: quel lien entre <math>l, L, h</math> ?  <math>\rightarrow R_{2.3}^\heartsuit</math>: [description discursive]  <math>M_2^b</math> géométrico-empirique (mesure sur feuille dépliée)</p>	<p><math>S_{Ph2} = S_{Ph1} \cup \{h, M_1, M_1^\#, \text{erreurs de mesure}\}</math>  <math>Q_{2.1}</math>: Peut-on construire n'importe quelle boîte ?  <math>\rightarrow R_{2.1}^\heartsuit</math>: non, <math>h</math> compte  <math>M_1</math>: empirique-mesure  <math>Q_{2.2}</math>: Relation entre <math>h</math> et (<math>x, y</math>) ?  <math>\rightarrow R_{2.2}^\heartsuit</math>: <math>h = x/2</math>  <math>M_2, M_3</math>  <math>Q_{2.3}</math>: proportionnalité entre la hauteur et les autres mesures ?  <math>\rightarrow R_{2.3}^\heartsuit</math>: <math>h = L/6</math>  <math>M_2, M_3</math>  <math>Q_{2.4}</math>: Différentes feuilles peuvent donner la même boîte ?  <math>\rightarrow R_{2.3}^\heartsuit</math>: Non, <math>h</math> ne sera pas la même  <math>M_3</math> avec validation dans <math>M_1</math>  <math>Q_{2.4}</math>: Règle de trois entre les dimensions feuille/boîte ?  <math>\rightarrow R_{2.4}^\heartsuit</math>: Non.  <math>M_3</math></p>

<sup>2</sup> Cette question est traitée d'emblée et reprise avec la liste des questions ensuite. Elle est placée ici sans être reprise dans la liste des questions ensuite. La numérotation des questions n'est donc pas la même que dans le rapport mais cela respecte mieux la chronologie du travail des étudiants.

<p><math>Q_{03}</math></p>	<p><math>S_{Ph3} = S_{Ph2} \cup \{M_1^{\#}, M_2^b, \text{gâteaux}\}</math>  <math>Q_{3.1}</math> : Quel espace laisser entre la boîte et les gâteaux ?  <math>\rightarrow R_{3.1}^{\heartsuit}</math> : 2 cm  <math>M_1</math>  <math>Q_{3.2}</math> : Quel rapport entre la boîte et le couvercle ?  <math>\rightarrow R_{3.2}^{\heartsuit}</math> : ajout de 0,3 cm pour (x,y)  <math>M_2^b</math>  <math>Q_{3.3}</math> : Quelles boîtes pour les « braç de gitano » ?  <math>\rightarrow R_{3.3}^{\heartsuit}</math> : Nouveaux patrons sans pliage</p>	<p><math>S_{Ph3} = S_{Ph2} \cup \{M_2, M_3, \text{gâteaux}\}</math>  <math>Q_{3.1}</math> : Quelles dimensions des boîtes en fonction des gâteaux ?  <math>\rightarrow R_{3.1}^{\heartsuit}</math> : ajout de 2 cm, 3 cm ou 4 cm suivant les cas pour toutes les dimensions.  <math>M_1</math>  <math>Q_{3.2}</math> : Quelles dimensions de papier ?  <math>\rightarrow R_{3.2}^{\heartsuit}</math> : suivant les dimensions du fond, la hauteur de la boîte peut être trop haute pour le gâteau : modification du procédé de construction.  <math>M_2</math>  <math>Q_{3.3}</math> : Quelles dimensions du couvercle ?  <math>\rightarrow R_{3.3}^{\heartsuit}</math> : ajout de 0,3 cm pour (x,y) et hauteur égale à la moitié de la hauteur de la boîte (avec nouveau procédé de construction).  <math>M_2</math>  <math>Q_{3.4}</math> : Peut-on augmenter la base et maintenir la hauteur ?  <math>\rightarrow R_{3.2}^{\heartsuit}</math> : oui avec le nouveau procédé.  <math>M_3</math>  <math>Q_{3.3}</math> : Quelles boîtes pour les « braç de gitano » et le « torró » ?  <math>\rightarrow R_{3.3}^{\heartsuit}</math> : Nouveau procédé  <math>M_2</math></p>
----------------------------	---	---

# LES TECHNOLOGIES DANS L'ENSEIGNEMENT : ACTIVITE DE L'ENSEIGNANT EN CLASSE ET EN FORMATION

Maha Abboud\*, Fabien Emprin\*\*, Janine Rogalski\*\*\*, Fabrice Vandebrouck\*\*\*

## RÉSUMÉ

Ce texte s'appuie sur les considérations théoriques et méthodologiques présentées par Abboud dans son cours (volume des cours) et sur son approche de l'activité de l'enseignant dans des environnements technologiques. Il vise à développer plus en avant certains aspects de l'analyse des pratiques enseignantes réelles et de la formation de ces pratiques. Ceci est illustré par trois études, les deux premières d'analyse d'activités en classe ordinaire et la troisième en formation via l'utilisation d'un simulateur de classe.

Mots-clefs : activité, enseignants, formation, régulations, ZPD, simulateurs

## ABSTRACT

This text builds on the theoretical and methodological considerations presented by Abboud and on her approach to teaching activity in technological environments. It aims at deepening certain features of the analysis of actual teaching practices and the training of these practices. This is illustrated by three studies, the first two analyzing activities in regular classrooms and the third in training sessions through the use of a classroom simulator.

Keywords: activity, teachers, teacher education, regulations, ZPD, simulators

## INTRODUCTION

Comprendre les pratiques enseignantes pendant la mise en place de séances intégrant les technologies est un enjeu important pour la recherche dans le domaine. Analyser l'activité de l'enseignant, non seulement dans sa préparation de tâches enrichies par les technologies mais aussi lors du déroulement effectif des séances correspondantes s'avère indispensable pour comprendre les difficultés, les tensions et les incertitudes auxquels il fait face et les choix explicites ou implicites qu'il fait pour les gérer en temps réel. Les outils conceptuels développés pour faire cette analyse peuvent en outre permettre l'identification de leviers de formation. Ce texte s'appuie sur les considérations théoriques et méthodologiques présentées par Abboud (volume 1) et sur son approche de l'activité de l'enseignant dans des environnements technologiques. Il vise à développer certains aspects de l'analyse des pratiques enseignantes réelles et de la formation de ces pratiques. C'est ce qui est illustré dans ce qui suit à travers trois études, les deux premières d'analyse d'activités en classe et la troisième en formation.

Le modèle de référence utilisé dans la première partie considère l'enseignement comme la gestion de situations dynamiques ouvertes. M. Abboud et J. Rogalski y proposent une analyse de l'activité de l'enseignant qui implique le diagnostic de l'activité mathématique des élèves, la gestion des incertitudes dues aux caractéristiques de la situation et à l'interaction avec la technologie, et la prise de décisions quant aux interventions didactiques appropriées.

La deuxième partie a pour but d'analyser les activités des élèves et de l'enseignant lorsque coexistent deux environnements de travail dans la classe : un classique papier-crayon et un innovant avec des tablettes. M. Abboud et F. Vandebrouck y présentent des outils théoriques autour de la notion de proximités — comprise dans une perspective vygotskienne — en s'intéressant aux zones que l'enseignant met en place pour soutenir l'apprentissage.

---

\*LDAR, Cergy Paris Université

\*\* Université de Reims, CEREP, IREM de Reims

\*\*\* LDAR, Université Paris Cité

La troisième partie propose d'ouvrir la réflexion sur la formation des enseignants à l'utilisation de la géométrie dynamique à travers des simulateurs de classe. F. Emprin et M. Abboud y adoptent un point de vue théorique et méthodologique des observations des stagiaires en activité, mobilisant conjointement l'approche instrumentale à la double approche ainsi que des cadres relatifs à la formation à travers la simulation de situations professionnelles.

## TENSIONS ET REGULATIONS DANS L'ACTIVITE EN CLASSE

### *1. Questions de recherche et outils théoriques mobilisés*

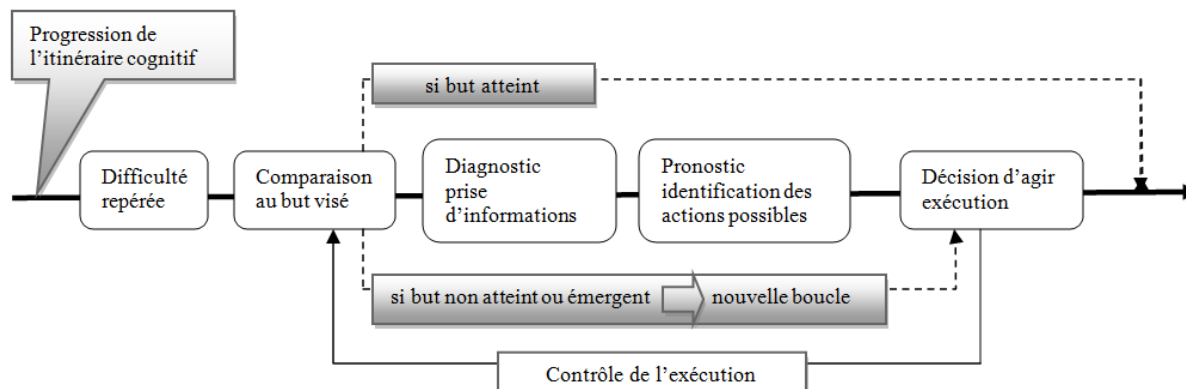
Dans cette partie nous nous intéressons en particulier à l'étude de l'interaction enseignant-élève lorsque le premier diagnostique une difficulté chez le deuxième. Le modèle de référence utilisé considère l'enseignement comme la gestion d'un environnement dynamique ouvert (Rogalski, 2003) où l'activité de l'enseignant implique de faire un diagnostic de l'activité mathématique des élèves, de gérer des incertitudes dues aux caractéristiques de la situation — à l'interaction avec la technologie — et de prendre des décisions quant aux interventions didactiques appropriées.

En effet, lors de la préparation d'une séance, les enseignants se fixent un but quant aux mathématiques à rencontrer ou à pratiquer par les élèves. Des tâches sont données en ce sens aux élèves (i.e. *itinéraire cognitif prévu*), et les interventions enseignantes pendant la mise en place dépendent du cours de la réalisation de ces tâches. Ce qui se passe en classe est dynamique, et les enseignants en partagent la maîtrise avec la classe comme unité ou avec les élèves lors du travail individuel ou en petit groupe — ce qui est souvent le cas lors de l'usage des technologies. Les interventions enseignantes sont en interaction avec la dynamique propre du traitement de la tâche par l'élève ou les élèves, dynamique que les enseignants peuvent anticiper seulement globalement (Rogalski, 2003). Les enseignants sont souvent conscients de l'incertitude de leur diagnostic face aux difficultés des élèves et de la nécessité de faire des inférences pour choisir les aides appropriés. La conséquence d'un diagnostic inadéquat est que leur intervention se situe en dehors de la zone proximale de développement de l'élève (Vygotski, 1986), et peut entraver son travail au lieu de le soutenir. Des difficultés supplémentaires apparaissent quand les technologies sont utilisées : les retours fournis aux enseignants par les réactions de la classe sont dispersés sur les élèves travaillant via un logiciel ; il y a un rythme propre de traitement de la tâche par chaque groupe voire élève ; les actions des élèves sur les contenus mathématiques qui ont lieu via le logiciel ainsi que les retours de celui-ci ne laissent que peu de traces, voire aucune (Abboud-Blanchard, 2014). Si la prise d'information sur un élève ou groupe peut se faire « au plus près » de son activité (à la différence de la situation de classe, en général) elle ne peut pas avoir lieu de manière suivie, et plus important encore les contenus des rétroactions qu'a pu fournir le logiciel ont souvent été « opaques » aux élèves en difficulté (la cible des interventions).

En s'appuyant sur les éléments théoriques décrits dans le cours d'Abboud (Volume 1) pour l'étude des déroulements de séances intégrant les technologies, nous présentons ici un prolongement théorique qui cherche à caractériser la façon dont les enseignants diagnostiquent les difficultés de leurs élèves, et à examiner dans quelle mesure le traitement qu'ils en font répond aux besoins de leurs élèves. Nous essayons également de comprendre comment la gestion de ces moments est parfois source de tensions pour les enseignants, tensions qui peuvent évoluer vers des perturbations (Abboud & Rogalski, 2017).

Nous proposons un modèle adapté des travaux de Leplat (1997) en considérant que la gestion des activités des élèves en classe et ses interventions auprès d'eux peuvent se représenter comme des boucles successives de régulation. Nous considérons en particulier la boucle de

régulation réactive qui compare le résultat obtenu à l'attendu initial (Leplat, 2006). Un composant essentiel de la gestion est le diagnostic (et son composant temporel : le pronostic de ce qui peut s'ensuivre). Nous illustrons ces boucles selon le schéma de la figure 1.



**Figure 1.** – schéma de boucles de régulation successives en classe de mathématiques

Ce schéma illustre que lorsqu'une difficulté de l'élève est repérée ou signalée, l'enseignant fait un diagnostic de l'état de la classe (ou des élèves singuliers) et repère l'état actuel de progression de l'activité de l'élève (ce diagnostic peut être réussi ou non). Il fait alors un pronostic sur l'évolution possible de cet état (basé sur les indices pris lors du diagnostic). La décision d'intervention de l'enseignant peut être de trois types : continuer l'intervention prévue en appliquant des routines (ou des actions anticipées) ; adapter des procédés didactiques connus (ou anticipés) ; résoudre le problème posé (à l'enseignant) par la situation (incompréhension, acquis non présents, la classe « décroche »...). Suite à l'intervention, il y a un contrôle de l'impact de l'action et une reprise (ou pas) vers le but à atteindre ou vers un but modifié (adapté...) ou nouveau (émergent).

Nous illustrons notre utilisation de ces outils théoriques et méthodologiques à travers l'étude de cas qui suit.

## 2. Étude de cas

Nous présentons l'analyse d'une interaction relativement longue (7 min) entre une enseignante (Marie) et une élève (Lisa) lors d'une séance de résolution de problème en salle informatique mise en place en classe de seconde dans un environnement de géométrie dynamique. Ce cas met en évidence les tensions qui affectent l'activité de l'enseignant tiraillé entre le besoin de diagnostiquer la difficulté de l'élève et l'avancée de la réalisation du travail mathématique jusqu'à l'objectif final visé.

Marie est une enseignante expérimentée qui a une utilisation régulière des outils technologiques dans son activité personnelle et qui fait travailler ses élèves souvent avec Geogebra™ et parfois avec Excel. Les interactions que nous présentons et analysons ici ont eu lieu lors de la deuxième séance d'un TP visant à : familiariser les élèves avec l'utilisation de l'environnement Geogebra™ pour des tâches mathématiques complexes, et revenir sur des généralités concernant les fonctions numériques (vues l'année scolaire précédente). L'énoncé du problème peut être résumé comme suit : *ABC est un triangle rectangle en B avec  $AB = 3$  et  $BC = 6$ . M est un point variable sur [AB]. N est un point sur [AC] et P sur [BC] tels que MNPB soit un rectangle. Pouvez-vous trouver des positions de M telles que l'aire du rectangle MNPB soit égale à la moitié de l'aire du triangle ABC ?*

Lors de la première séance, l'enseignante avait guidé ses élèves dans l'utilisation de Geogebra™ pour construire la figure (cf. figure 2) à l'aide d'un document de travail qu'elle leur a fourni au début et qui détaille toutes les étapes de construction sur le logiciel (géométrie,

graphique et tableur). L'utilisation de Geogebra™ dans la deuxième séance vise à explorer la figure et à examiner l'aire du rectangle MNPB pour différentes positions du point M après avoir créé une feuille de calcul affichant les valeurs de la longueur  $AM$  et de l'aire du rectangle.

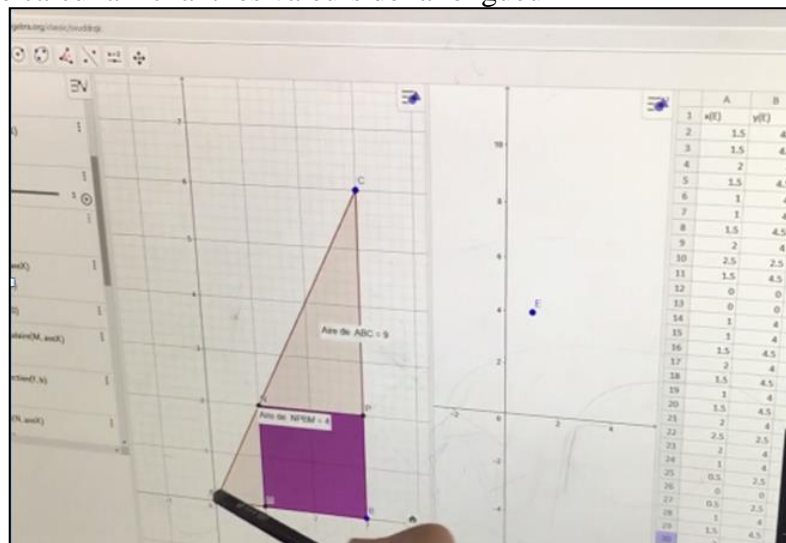


Figure 2. – Une capture d'écran de l'écran de Lisa au début de l'interaction observée.

Dans ce qui suit, nous relevons deux phénomènes qui apparaissent dans l'activité de l'élève et que l'enseignante n'avait pas prévus

### 3. Un malentendu qui s'installe : des boucles de régulation en cascade

Dès le début de l'interaction une incompréhension apparaît sur l'objectif de la tâche pour l'élève. Lisa, se concentre sur ce qu'elle voit à l'écran dans la fenêtre géométrique (un rectangle dans un triangle), et comprend la hauteur  $MN$  du rectangle comme étant l'ordonnée  $y$  du point  $M$ . L'enseignante diagnostiquant cette incompréhension, essaye d'amener l'élève à identifier que l'ordonnée  $y$  correspond à la valeur de l'aire du rectangle  $AMNB$ , et est fonction de  $AM$  dans la fenêtre graphique.

P : à ton avis, la représentation graphique gauche est une représentation graphique d'une fonction ?

Lisa : oui, ouais [dubitative]

P : ah bon, c'est une fonction ça ? C'est que...

Lisa : non... à la base c'est un quadrillage

P : non, mais, c'est ce que tu as représenté ici ?

Lisa : ah ! un triangle

P : un triangle, dans dans quoi ? dans quel domaine ?

Lisa : la géométrie

P : voilà ! donc tu es en train de te rendre compte que visuellement sur ton dessin, ça, sur ta figure géométrique

Lisa : oui

P : tu peux finalement voir la valeur de l'aire

Lisa : oui [un « petit » oui, peu convaincu]

P : OK ! À quel endroit on pourrait éventuellement associer cette valeur de l'aire à une ordonnée ?

Lisa : mmm  $MN$  [geste sur le trait vertical, elle a mis son crayon parallèlement à ce trait]

P : à quel endroit de ta... de.. de.. de ton

Lisa : ah, euh

P : de ton ordinateur

Lisa : là

P : de ton ordinateur [insiste sur ce mot]

Lisa : ah

Réalisant que cette aide n'aboutit pas, l'enseignante va tenter de passer par la représentation tableur, entamant ainsi une deuxième boucle de régulation.

P : ça, c'est quoi ? [geste sur une colonne du tableur à droite de l'écran]

Lisa : ça, c'est, euh c'est un tableur, qui représente les différentes variations quand on bouge MN, AM, toutes les variations

P : d'accord, AM, OK. AM se lit où dans ton tableau ?

Lisa : euh, eh bé, dans mon tableau, y'a x

P : x c'est quoi ?

Lisa : AM

P : oui

Lisa : et yE c'est MN

P : c'est quoi, MN ?

Lisa : euh, c'est pas...

P : ah, ben non

P : qu'est-ce qu'on t'a demandé de calculer à chaque fois ?

Lisa : euh, je sais pas...

L'enseignante tente alors une autre approche en essayant de faire réaliser à Lisa l'objectif du travail en cours

P : finalement, cet exercice, il te montre quoi ?

Lisa : il me montre qu'à partir d'une géométrie on peut avoir une fonction

P : non, ce n'est pas ça qu'il te montre. Qu'est-ce qu'il te montrait, là [P fait un geste qui tourne au-dessus du rectangle grisé MNPB]

Lisa : les différentes aires du carré en fonction de AM

P : c'est ça ! c'est-à-dire que l'aire du carré, enfin de la figure, du carré.. du rectangle.. du quadrilatère .. varie

Lisa : selon

P : selon la place de M sur AB, et donc selon AM

Lisa : oui

P : OK ! Est-ce qu'à ton avis, ici [début de geste sur le côté vertical MN, puis changement] la valeur que tu vois ici correspond au fameux y [geste sur le tableur], est-ce que abscisse/ordonnée répond [correspond] à ça ? ou est-ce que c'est abscisse/ordonnée d'autre chose ? Je ne sais pas si je suis claire...

[...]

Face à l'incertitude de Lisa, Marie tente une dernière approche en lui proposant de prendre des exemples.

Lisa : si je mets mon aire à 4 et M à 1 on a bien 1 et 4

P : d'accord ! Donc qu'est-ce qu'on est en train de voir ? que y c'est...

Lisa : c'est l'aire

P : alors, ça peut pas être une ordonnée

Lisa : euh, ben on

P : alors à quel endroit on peut avoir abscisse/ordonnée ?

Lisa : ben abscisse c'est toujours AM, mais...

Tout au long de ces échanges, on observe donc une tension majeure qui s'installe et que l'enseignante n'arrive pas à gérer. Lisa est complètement concentrée sur les sous-tâches locales en réponse à certaines questions ponctuelles de l'enseignante, tandis que Marie suit l'itinéraire cognitif prévu, qui vise à aider l'élève à comprendre les transitions entre les cadres de représentation d'une fonction.

Ce premier phénomène est accentué par un deuxième que nous supposons que Marie avait du mal à diagnostiquer

#### 4. Une tension cognitive due à une difficulté dans le diagnostic

L'élève semble avoir une conception erronée, selon laquelle l'ordonnée  $y$  est une ligne (qu'elle appelle trait) et non une valeur numérique, qui a été un obstacle à sa compréhension de la tâche. Cette notion a été travaillée au collège et elle est donc supposée acquise à l'entrée au lycée. Marie ne s'attendait par conséquent pas à ce que ce soit un problème pour Lisa. Ainsi dès le début de l'échange on relève ce qui suit :

P : qu'est-ce qui te gêne ?

Lisa : c'est que l'ordonnée c'est un carré au lieu d'être un trait

P : parce que l'ordonnée c'est un trait ?

Lisa : oui, c'est un trait perpendiculaire à l'axe des abscisses

Étant au début de l'échange avec Lisa et voulant diagnostiquer la difficulté qu'elle attribue au passage du cadre géométrique au cadre graphique, Marie ne prend pas en compte cette information (la définition de l'ordonnée) qui gênait Lisa. Cependant, plusieurs interactions plus tard, la même difficulté réapparaît quand Lisa fait un geste simulant un trait vertical avec son crayon en parlant de l'ordonnée (cf. premier extrait plus haut). Cette difficulté de diagnostic persiste d'autant plus que Marie est entièrement concentrée à guider Lisa à explorer les différentes fonctions du logiciel pour qu'elle arrive à concevoir l'aire du rectangle comme une fonction de l'abscisse de  $M$  alors que Lisa ne pouvait penser à l'ordonnée  $y$  autrement que comme une ligne verticale. Les régulations tentées par l'enseignante avaient de ce fait peu de chance d'aboutir ! Vers la fin de l'épisode on relève encore l'échange suivant :

P : ouais, afficher la trace

Lisa : [manipule...]

P : mais non, c'est bon, qu'est-ce que tu voulais faire ?

Lisa : je voulais un trait

P : un trait, pour quoi faire ?

Lisa : pour avoir une trace en trait(s)

À la fin de cet épisode, on observe que l'enseignante tente d'accélérer le rythme afin de gérer la tension temporelle dont elle a désormais conscience. Dès que Lisa parle d'une fonction (*P : mais quand est-ce qu'on fait une courbe graphique ? Lisa : quand on a une fonction P : voilà, ça y est, on y est !*), Marie valide son propos. Ici, l'enseignante avait besoin de croire que son élève a avancé vers l'objectif visé, même si elle ne l'a pas encore atteint (au moins elle est sur le bon chemin), pour pouvoir poursuivre le travail avec le reste de la classe.

#### 5. Conclusion

Cette étude montre que le diagnostic, et les boucles de régulation associées, dans l'activité de l'enseignant deviennent plus complexes en situation d'utilisation des technologies puisqu'il faut démêler ce qui revient à une maîtrise insuffisante du logiciel et ce qui relève de difficultés proprement mathématiques. Le cas de Marie montre en particulier la difficulté parfois pour l'enseignant de poser un diagnostic efficace face à un problème que rencontre l'élève, notamment lorsqu'il se base sur des connaissances d'élèves supposées acquises. La situation est encore plus complexe pour l'enseignant lorsqu'à la fois, cet « amont » des acquisitions supposées est lointain, et indispensable pour s'engager dans une activité intégrant les technologies. La rapidité de prise de conscience d'un tel problème résistant est un facteur crucial pour que la tension temporelle due au retour sur le sens de ces notions n'évolue pas en véritable perturbation (cf. le cas de Daisy dans Abboud & Rogalski, 2021).

Notre approche peut sembler de prime abord non spécifique à une situation intégrant les technologies, mais nous pensons que la présence d'instrument technologique dans l'activité de

l'enseignant et dans celle de l'élève agit comme amplificateur des phénomènes que nous étudions. De plus, des phénomènes propres à l'utilisation des technologies compliquent les diagnostics enseignants sur les problèmes rencontrés par les élèves. Du fait de la « transposition informatique », dont Balacheff (1994) a souligné l'importance, les objets traités via le logiciel ne sont pas exactement les objets mathématiques « habituels » (par exemple, il n'y a que du discret et pas de continu, même en acte). Le logiciel rend visiblement réalisables des actions logiques, comme les liens entre les changements de valeurs d'une variable et ceux d'une fonction de cette variable, il peut aussi proposer un passage entre modes de représentation : géométriques avec mesures possibles, tableaux de valeurs de ces mesures, graphes de fonctions (comme dans le cas étudié ci-dessus). Toutefois, si ces apports avérés des technologies masquent pour l'enseignant les effets parfois inattendus de la transposition didactique sur l'activité de l'élève, les régulations que l'enseignant entreprend perdent de leur efficacité ou bien l'amènent à abandonner son projet initial (perturbations dans l'itinéraire cognitif prévu).

## PROXIMITÉS ET TENSIONS DANS UN ENVIRONNEMENT DOUBLE

### *1. Questions de recherche et outils théoriques mobilisés*

Dans cette partie, les questions de recherche sont relatives à l'utilisation des tablettes en classe de mathématiques. Comment l'enseignant installe-t-il un environnement de travail intégrant les tablettes ? Quelle articulation des deux environnements (tablettes et papier-crayon) prévoit-il pendant la phase de préparation ? Quelles interactions entre les deux environnements sont à l'œuvre pendant le déroulement et quel rôle l'enseignant y joue (ou pas) afin d'atteindre les objectifs en termes d'apprentissages mathématiques ?

Pour traiter ces questions, nous utilisons la notion de tensions développée dans la partie précédente. De plus, nous faisons appel à la notion de zone proximale de développement (ZPD) (Vygotsky, 1986) ainsi qu'aux zone de libre mouvement et zone d'action promue (ZFM/ZPA) (Valsiner, 1987). Du point de vue de l'apprentissage, la ZPD désigne une zone de connaissances de l'élève qui inclut celles qui lui permettent de réaliser des tâches sans aides et celles qu'il est capable d'acquérir avec l'aide de l'enseignant. La ZPD représente donc un ensemble de possibilités de développement des connaissances. D'un point de vue pratique, l'enseignant met en place un environnement numérique de travail qui intègre des instruments pour soutenir la compréhension des notions mathématiques à apprendre par les élèves. Cette mise en place fait apparaître deux zones :

- la zone de libre mouvement (ZFM), qui structure la manière dont les élèves accèdent aux différentes zones de l'environnement de travail et interagissent avec les différents instruments de ces zones ;
- la zone d'action promue (ZPA), qui vise à faciliter l'acquisition des nouvelles connaissances visées.

Ce que l'enseignant fournit (dans la ZFM) et ce qu'il promeut (dans la ZPA) sont interdépendants et sont considérés simultanément, d'où la combinaison des deux en ZFM/ZPA dans les travaux qui y font appel (Blanton et al., 2005). Pour que l'apprentissage soit possible, la ZPA doit être compatible avec la capacité d'apprentissage de l'élève (ZPD), et pour que l'approche prévue de l'apprentissage ait une chance de réussir, la ZPA doit se situer dans une ZFM efficace.

En lien avec ces concepts de zones, nous développons également un concept introduit précédemment par Robert et Vandebrouck (2014) : les proximités cognitives discursives. Ce concept permet de traquer les moments où l'enseignant dans son discours tente d'opérer des rapprochements entre les connaissances déjà là, ce qui se fait ou a été fait en classe de la part des élèves et ce qu'il veut introduire. Ce concept a été introduit pour étudier les interventions

de l'enseignant dans des environnements papier-crayon. Dans notre travail actuel, nous l'étendons à des environnements enrichis par les technologies. En effet, les interventions de l'enseignant dans ces environnements ne se situent pas toujours ni au niveau des connaissances mathématiques (proximités cognitives) ni au niveau du discours (proximités discursives). Nous introduisons ainsi la notion de proximités pragmatiques qui peuvent être discursives ou non (actions au-delà des discours) et qui sont en particulier relatives à l'utilisation des instruments présents dans l'environnement. Les proximités pragmatiques renseignent sur les opportunités que les enseignants offrent à leurs élèves, sous forme d'une ZFM/ZPA mise en place pour les engager dans les apprentissages mathématiques.

Lors de l'analyse des données, nous distinguons les proximités *prévues* lors de la préparation et *effectives* lors du déroulement. Les proximités cognitives et pragmatiques sont (ou peuvent être) prévues lors de la mise en place de la ZFM/ZPA. Une intervention discursive ou non discursive peut être planifiée pour se rapprocher le plus possible de la ZPD des élèves. Les proximités effectives prennent deux formes : des actions planifiées qui sont effectivement réalisées ; des actions improvisées qui sont développées in situ. Ces dernières dépendent directement de ce que l'élève fait et visent à garantir que les actions soutenues par la ZPA soient possibles (ou atteignables) dans la ZPD. Dans le premier cas, l'enseignant peut supposer qu'il y a une proximité effective alors que ce n'est pas le cas ; cela contribue aux *tensions observées* dans la classe.

Nous illustrons notre utilisation de ces outils théoriques et méthodologiques à travers l'étude de cas qui suit.

## 2. Étude de cas


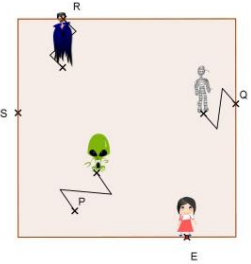
Nous présentons l'analyse d'une situation mise en place en classe de 6<sup>e</sup> dans un environnement où coexistent deux environnements : papier-crayon et tablette.

Le professeur, Roger, a une vingtaine d'années d'ancienneté dans le métier. Il enseigne dans un collège de banlieue d'une grande ville du nord de la France ; le niveau des élèves est hétérogène. Il utilise les technologies depuis plus de 10 ans. Il est très familier de Geogebra et l'utilise régulièrement dans ses classes. Il est membre d'un groupe IREM et membre de la commission inter IREM sur les TICE. Son établissement est équipé en tablettes qu'il distribue aux élèves lorsqu'il les utilise pendant une séance. Selon lui, les élèves peuvent éprouver du plaisir à simuler des situations réelles grâce aux technologies et c'est avec cet esprit qu'il a conçu sa situation des « monstres » pour ses élèves de 6<sup>e</sup>. Dans cette situation, l'enjeu est de remobiliser les connaissances opératoires des élèves à propos du cercle afin d'en institutionnaliser une définition comme ensemble de points équidistants du centre. Les élèves ont déjà abordé la notion de cercle à l'école primaire mais en ont une connaissance plutôt opératoire liée à un enjeu de construction, identifiant centre et rayon et utilisant le compas. Avant la séance observée, les élèves de Roger ont déjà manipulé GeoGebra pour construire sur une droite un point à une distance donnée d'un point fixe.

La séance est divisée en trois phases successives. Dans la première, la tâche est dévolue, avec la tablette du professeur projetée au tableau, mais les élèves n'ont à leur disposition que la fiche élève papier. Ils doivent développer un travail individuel. Dans la phase 2, il y a un changement d'environnement : la tâche est proposée sur la tablette où des feedback « gagné/perdu » sont possibles. Les élèves peuvent faire plusieurs essais. Un bilan intermédiaire est fait au tableau avec un élève et enfin, pendant la phase 3, les élèves font une production définitive sur leur fiche papier (les deux environnements coexistent) et doivent rédiger leur construction en utilisant un vocabulaire géométrique approprié.

### 3. La situation proposée et le relief sur l'enseignement de la notion en jeu

Il s'agit en fait d'une tâche papier-crayon que Roger a adaptée pour l'environnement tablette. L'enjeu de la situation papier-crayon est de faire mobiliser la notion de cercle comme outil pour répondre à la question « aide la petite fille à traverser la pièce ». L'énoncé de la tâche pour l'environnement papier-crayon se trouve en figure 3.

<p>   <b>Traversée de la pièce</b>          Fiche élève          6<sup>e</sup>          Auteur : PETIT Raphaël © octobre 2019          Élève :       </p> <p>         Une petite fille vient d'entrer dans une pièce sombre par la porte E.          La porte se referme violemment (clac !).          Elle est verrouillée, impossible de l'ouvrir !          Elle se retourne, ses yeux s'habituent à l'obscurité ....          Ah ! Elle devine 3 monstres qui se réveillent !          Vite ! Elle veut rejoindre la porte de sortie qu'elle aperçoit enfin en S ...       </p> <p>         A toi de l'aider à traverser la pièce !          Dessine un chemin qu'elle pourra suivre sans se faire attraper.       </p> <p>         Quelques informations utiles pour que tu puisses l'aider :       </p> <ul style="list-style-type: none"> <li>· la pièce est un carré de côté 8 m ;</li> <li>· elle est représentée à l'échelle avec 1 cm pour 1 m en réalité ;</li> <li>· un monstre est attaché au point P par une chaîne de 3,8 m de long ;</li> <li>· un autre monstre est attaché au point Q par une chaîne de 3 m ;</li> <li>· un dernier monstre est attaché au point R par une chaîne de 2,6 m.</li> </ul>	
--	--

**Figure 3.** — Énoncé de la tâche proposée aux élèves (fiche élève).

L'enseignant part ici de l'hypothèse que les élèves ont une connaissance du cercle défini par son centre et son rayon. Ce qui est visé dans cette nouvelle situation, c'est le cercle comme objet géométrique, ensemble de points équidistants de son centre, la distance étant le rayon (programme de fin de cycle 3, classe de 6<sup>e</sup>). Il s'agit donc d'un changement de niveau de conceptualisation de la notion de cercle.

La notion de ZPD est ainsi cruciale dans notre analyse. L'apprentissage des élèves va supposer, non seulement des activités mathématiques de leur part sur la tâche proposée<sup>1</sup>, mais aussi des proximités discursives à développer de la part du professeur (dans la ZPD) pour installer la connaissance nouvelle.

Deux ZFM vont être en jeu, l'une liée à la fiche élève papier et l'autre liée à la même tâche dans l'environnement tablette. Roger a prévu une première proximité pragmatique, pour faciliter le passage d'un environnement à l'autre en fournissant sur papier la capture d'écran de la tablette (ZFM). Dans les deux environnements, la tâche porte sur la petite fille (« aide la petite fille à traverser la pièce ») et donc les actions promues (ZPA) concernent a priori la petite fille.

### 4. Analyse de la tâche en environnement papier-crayon

Pour résoudre la tâche dans l'environnement papier-crayon, les connaissances à mettre en fonctionnement concernent la mesure, les comparaisons de mesure et les cercles tracés avec un compas. Ce sont des connaissances anciennes, qui vont être mobilisées comme outil pour résoudre la tâche. Du côté des activités mathématiques attendues, il y a en premier lieu la reconnaissance du cercle comme outil puis le traitement lié aux constructions successives. Cette reconnaissance nécessite *un changement de point de vue* pour passer d'une centration sur la

<sup>1</sup> Dans d'autres textes, on parle de la ZAP pour qualifier la zone d'activités (mathématiques) possibles des élèves compte tenu des tâches prescrites et du déroulement (en particulier les proximités). La ZAP étant bornée par les activités possibles *a minima* et les activités possibles *a maxima*. La ZAP dépend donc d'une part du complexe ZPA/ZFM organisé par l'enseignant et la ZAP est reliée d'autre part à la ZPD par les connaissances mises en fonctionnement dans la ZAP.

petite fille à une centration sur les monstres et leurs zones de prédation. Si les élèves ne font pas ce changement de point de vue ou ne reconnaissent pas que le cercle et le compas vont leur être utiles, ils vont a minima procéder points par points en mesurant et comparant.

Nous avons déjà évoqué la ZPD plus haut. Si les élèves développent les activités mathématiques attendues, et dans la mesure où l'enseignant peut proposer des proximités discursives avec la notion de cercle, il peut y avoir un développement des connaissances des élèves. Mais du côté des ZFM/ZPA, on voit que les seules actions possibles des élèves concernent les essais de mesure de distance, les comparaisons, et des tracés de chemin de la petite fille. Seul le professeur peut valider ou invalider leurs constructions. Les monstres ne peuvent pas être déplacés sur la feuille et l'action de déplacer les monstres en « tirant » la corde pour délimiter des parties du plan qu'ils peuvent atteindre n'est pas dans la ZPA. Les élèves doivent donc dépasser cette ZPA restreinte et tracer d'eux-mêmes les parties du plan où les monstres peuvent agir en mobilisant la notion de cercle comme ligne frontière de ces parties de plan.

### 5. Analyse de la tâche en environnement tablette

Dans le nouvel environnement, les connaissances en jeu et les activités mathématiques attendues sont différentes (malgré la proximité pragmatique — instrumentale — prévue de garder le même visuel). La ZFM est enrichie par l'environnement tablette, avec la possibilité de déplacer les monstres et la petite fille, la possibilité de rétroaction et la possibilité de recommencer plusieurs fois. Cependant la ZPA est modifiée également et de façon plus subtile. Les actions promues sont encore de déplacer la petite fille mais plutôt comme dans un jeu. Si elle rentre dans la zone d'un monstre, il y a une rétroaction immédiate « perdu » et le monstre capture instantanément la petite fille (figure 4a). Les élèves peuvent déplacer la petite fille et gagner (figure 4 b) sans du tout mobiliser la notion de cercle et sans le changement de point de vue identifié dans la situation en papier-crayon.

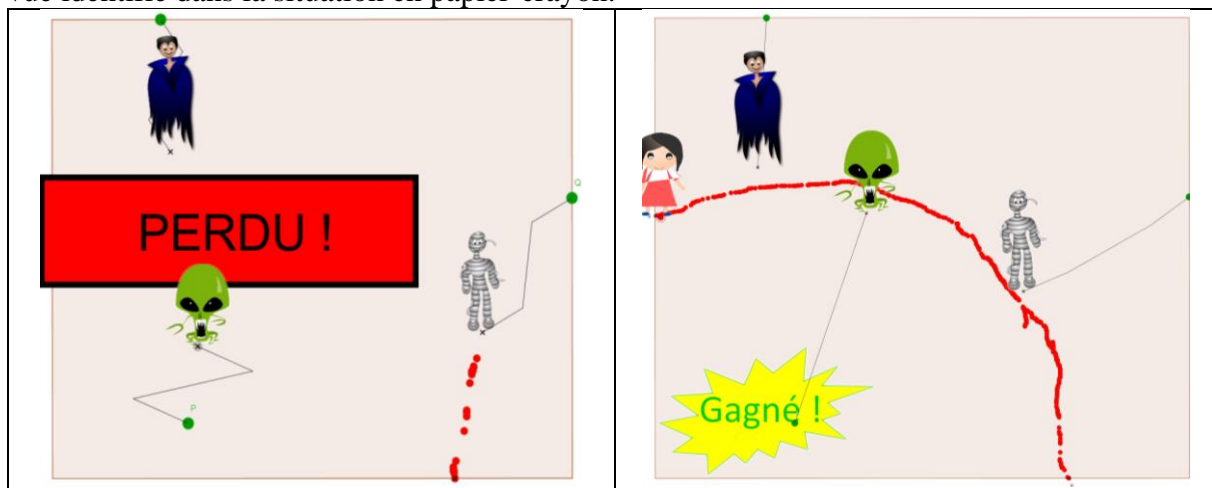


Figure 4a et 4 b. — Environnement tablette.

Le complexe ZFM/ZPA ne favorise donc pas plus qu'en papier-crayon la mobilisation de la notion de cercle dans la ZPD des élèves, de sorte que le professeur puisse développer des proximités (cognitives ou pragmatiques). Pire encore, le complexe ZFM/ZPA, avec les feedbacks et l'aspect jeu, peut conforter les élèves dans les procédures du type essai/erreur. On peut ainsi prévoir une tension instrumentale (cognitive et pragmatique liée à la tablette) qui ne favorise pas la progression des élèves vers la connaissance visée.

### 6. Analyse de déroulement

Durant la phase 1, même avec des rétroactions du professeur qui pointe auprès des élèves les constructions fausses, ceux-ci n'ont pas développé les activités attendues (le changement de point de vue et la mobilisation du compas et des cercles). Comme on l'a vu dans l'analyse a priori, la ZPA ne favorise pas naturellement ces adaptations à la charge des élèves. Les figures 5a et 5 b montrent des exemples emblématiques de productions d'élèves.

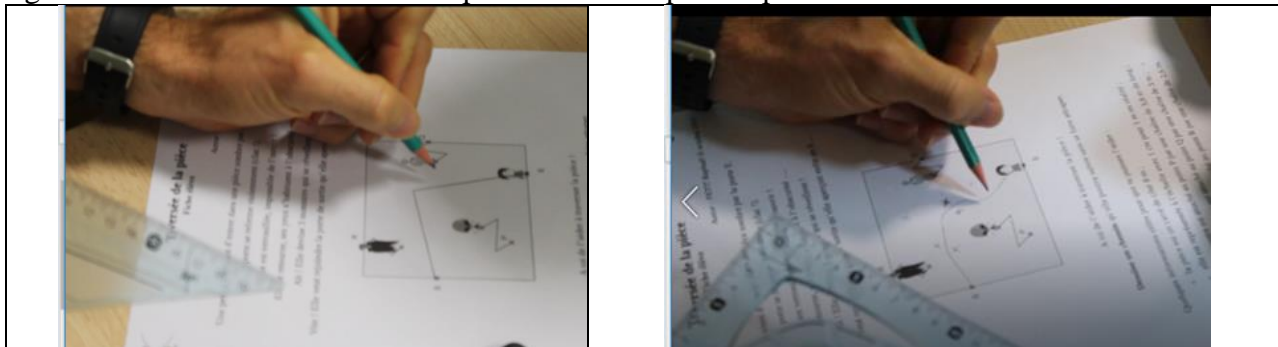


Figure 5a et 5 b. — Productions d'élèves pendant la phase 1

On s'intéresse au passage de la phase 1 à la phase 2. Le professeur identifie que le changement de point de vue est une étape fondamentale dans l'activité des élèves et il change la tâche, d'abord inconsciemment, au moment du changement d'environnement (ZFM).

Moi je vous encourage à utiliser votre tablette pour bien comprendre comment ça se passe. Oui. Vous pouvez — non c'est mieux comme ça avec la tablette — vous pouvez prendre les points avec votre doigt (...) Vous allez déplacer votre... Vous allez pouvoir tester un petit peu. En déplaçant la petite fille. Et puis c'est ça qui m'intéresse aussi (...) Essayez de déplacer les monstres pour voir à quel endroit ils peuvent aller. D'accord ? Pour voir à quels endroits la petite fille n'a surtout pas le droit d'aller. Ça marche ? Aller essayez de tester un petit peu comme ça (...) Vous avez réussi à sortir d'accord. Alors maintenant essayez de dessiner sur le papier tous les endroits qui sont accessibles par l'un des monstres c'est-à-dire tous les endroits qui sont interdits d'accès à la petite fille.

Dans le changement de ZFM, le professeur joue donc également sur la ZPA : le déplacement des monstres et donc le changement de point de vue font maintenant partie de la ZPA. Devenant conscient de ce changement, le professeur va répéter cette nouvelle consigne plusieurs fois car la ZPA est sensiblement différente de ce qui était promu en environnement papier-crayon. Le faisant, il suppose avoir opéré une proximité pragmatique permettant aux élèves de mobiliser leur connaissance sur les cercles.

Toutefois, la trace des monstres n'est pas activée sur les tablettes des élèves donc même s'ils déplacent les monstres en « tirant » sur la corde, les élèves peuvent à nouveau ne pas visualiser des cercles. En outre, on peut « tirer » sur la corde sans décrire un rayon constant autour du monstre, comme l'illustre la fille au tableau dans la figure 6a (où la fonction trace est activée). L'activité sur la tablette peut donc encore éloigner les élèves de l'idée attendue de cercle. C'est une deuxième tension instrumentale. Le projet de l'enseignant de présenter le cercle comme outil géométrique permettant la résolution du problème, peut ne pas du tout être dans la ZPD de ces élèves-là. D'ailleurs, dans la phase 3 (figure 6 b), de nombreuses constructions d'élèves sur leur feuille mettent bien en évidence que le changement de point de vue s'est produit mais ne donnent pas du tout à voir des cercles. Beaucoup en restent à des prises de mesures discrètes autour de chacun des monstres pour identifier un chemin possible pour la petite fille.

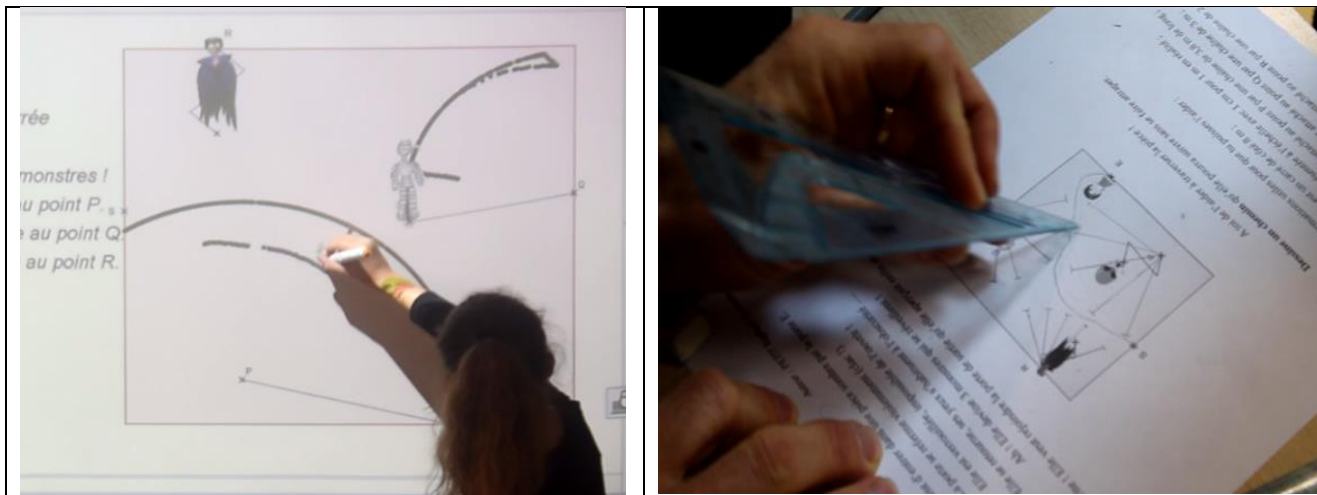


Figure 6a et 6 b. — Synthèse et production d'un élève au moment du bilan

À la fin de la phase 3, même quand les élèves ont été mis sur la voie des cercles dans le bilan synthétique au tableau (en fin de phase 2), le professeur doit encore passer auprès de nombre d'entre eux pour s'assurer que ces derniers ont identifié l'utilité d'avoir recours à la notion de cercle et tracent effectivement des cercles, en opérant des proximités pragmatiques successives.

C'est quel objet mathématique tu as créé. D'accord ? Quel objet mathématique as-tu construit. Est-ce que ce sont des segments que tu as construits ? (...) Bien bah là t'as compris t'as réussi. Tu as relié tous les autres points que tu m'as montrés tout à l'heure (...) T'as utilisé quel outil toi ? T'as utilisé quoi comme outil pour tracer tes limites ? Le crayon et puis c'est tout. Quel outil permet de tracer un cercle ? (compas) Et alors ? Pourquoi tu ne l'utilises pas ton compas ? Ah bah voilà si tu sais qu'il faut utiliser un compas il faut l'utiliser hein. Là est-ce que ce dessin-là il est précis ? Il est précis ton dessin ? Moi je veux un précis hein ? N'oublie pas que c'est la vie de la petite fille qui est en jeu. On ne prend pas de hein risque. Tu l'as ton compas ? Allez vas-y sors le.

## 7. Conclusion

Dans la migration de la situation papier-crayon à la situation tablette, le complexe ZFM/ZPA est modifié sensiblement et le professeur n'en est pas nécessairement conscient. Dans notre exemple, les feedbacks et l'aspect jeu confortent une ZPA au sein de laquelle la notion de cercle et l'idée du compas ne sont pas en jeu naturellement. Beaucoup d'élèves interagissent avec la tablette de façon perceptive, sans mettre en jeu des connaissances mathématiques (pas même la mesure et la comparaison qui étaient a minima dans l'environnement papier-crayon). Du coup il est compréhensible que les activités des élèves n'embarquent pas la notion de cercle pour la majorité d'entre eux. Les quelques élèves qui tracent spontanément des cercles dans la phase 3 sont déjà ceux qui les avaient identifiés dans la phase 1 (en « sortant » de la ZPA papier-crayon). On a donc un environnement qui favorise un complexe ZFM/ZPA qui conforte les élèves dans des procédures éloignées des connaissances en jeu (le cercle « outil » comme seule réponse pour le problème). Cela engendre une tension instrumentale dans l'activité de la classe dans la mesure où le professeur doit donner de nombreuses aides procédurales aux élèves pour installer la notion de cercle et pouvoir tenir ensuite son propos sur la définition nouvelle du cercle (avec des proximités discursives).

## FORMATION CONTINUE AVEC SIMULATEUR DE CLASSE

*1. Former des enseignants par simulation informatique.*

Dans cette dernière partie, nous analysons cette fois les pratiques de formation et nous accédons aux pratiques des enseignants à travers leur utilisation d'un logiciel de simulation informatique de classe et leurs interactions durant la formation.

Depuis 10 ans, nous développons et utilisons des simulateurs informatiques de classe pour former à enseigner les mathématiques (Emprin, 2011 ; 2018). À l'origine de ce travail se trouve l'analyse des pratiques existantes de formation aux usages du numérique pour l'enseignement des mathématiques (Abboud et Emprin, 2010) qui a mis en évidence des caractéristiques de ces pratiques. Se dégagent de ce travail plusieurs hypothèses pour la formation. En particulier, l'introduction d'une analyse réflexive dans les formations, notamment via l'analyse de vidéos de classes réelles est propice au questionnement et à la prise de conscience par les enseignants de leurs propres pratiques avec les technologies. De plus, faire questionner les composantes des pratiques au sens de la double approche didactique et ergonomique (Robert, 1999 ; 2003) permet d'accéder à une meilleure compréhension de ces pratiques en vue de participer à leur développement via la formation continue. Après avoir vérifié ces hypothèses dans le cadre d'une ingénierie didactique de formation (Abboud et Emprin, 2010) s'appuyant sur l'introduction de l'analyse de pratiques importées dans la formation grâce à l'utilisation de vidéos, nous avons voulu dépasser deux grandes difficultés identifiées par Robert et Rogalski (2015) :

*« On voit la justification d'un temps long pour cette formation, dans la mesure où chaque analyse a un caractère opportuniste, dépendant de ce qui sort dans la séance. Sur la durée, l'aléatoire des apports des participants amène à rencontrer suffisamment de thèmes pour donner matière aux participants pour les adaptations dont ils auront besoin [...] » (p 109).*

L'usage de simulations informatiques de classe vise donc à augmenter le temps de confrontation à la pratique en formation (sans augmenter le temps de formation) et à mieux maîtriser le caractère opportuniste des connaissances et des savoirs qui y émergent.

Les simulateurs existants, teachLive (<http://exceptionaleducation.buffalostate.edu/teach-live>), Tprof (<https://t-prof.fr>), Simschool (<https://www.simschool.org>) ou encore Lesson Sketch (<https://www.gripumich.org>) ne remplissent pas les conditions que nous avons définies notamment ils ne permettent pas de questionner la dimension cognitive des pratiques. Un premier simulateur informatique de classe (SIC — Première version : <https://s.42l.fr/SIC>, Version 2.0 : <https://s.42l.fr/SIC2>) a été conçu spécifiquement et expérimenté pour vérifier qu'il corresponde bien aux attendus en termes de formation.

SIC simule la mise en œuvre d'une séance de classe (virtuelle) qui concerne la résolution d'un problème de mathématiques (figure 7) en utilisant un logiciel de géométrie dynamique pour construire le dessin, conjecturer, puis démontrer l'égalité des longueurs

Énoncé groupe 1 :

Réalise le dessin ci-contre avec « l'atelier de géométrie ».

(Tu commenceras par le cercle, ses deux diamètres perpendiculaires puis tu placeras les points B et F et tu continueras la construction en respectant les codages)

Quel est le plus long des deux segments, [AC] ou [EG] ?

*Figure 7. – Énoncé du problème à enseigner dans SIC*

L'utilisateur fait des choix parmi une liste (figure 8) qui a été déterminée à partir d'observations de séances dans des classes réelles. Certains choix qui ont été proposés par les enseignants au fil des formations utilisant SIC, sans pour autant avoir été observés en classe, sont cachés au premier abord et peuvent être ajoutés par le formateur au fur et à mesure de la formation. Le temps est lui aussi simulé, chaque action coûte un nombre de minutes données et fait avancer le temps de la séance.

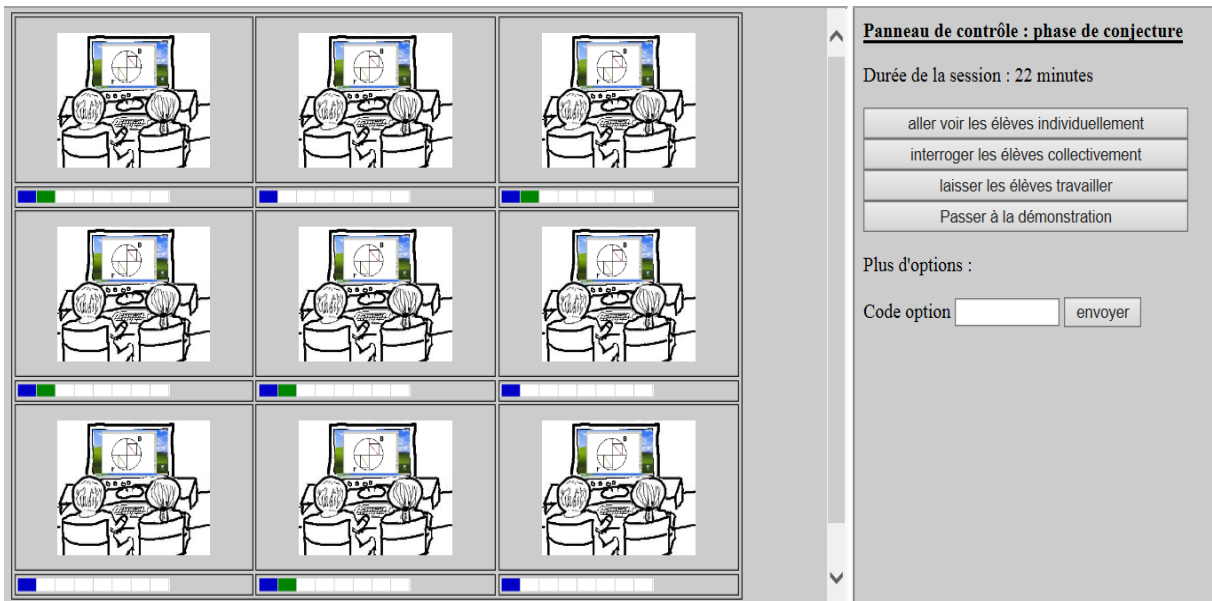


Figure 8. — Interface de la première version du logiciel SIC

L'utilisateur peut voir le travail des élèves sur leurs écrans, les interroger ou aller voir plus en détail un groupe et interagir avec ce groupe (figure 9). Il dispose également d'un vumètre qui indique les niveaux d'agitation des binômes. Lorsque ces niveaux atteignent un certain seuil, cela déclenche l'arrêt de la séance, en quelque sorte un « game over ».

**SIC** - Simulateur Informatique de Classe

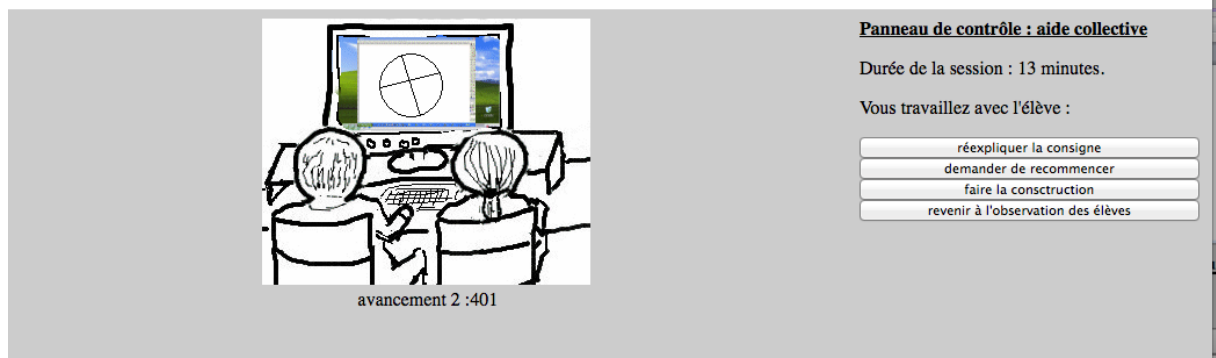


Figure 9. – Interactions avec un groupe dans la première version du logiciel SIC

À la fin de la simulation, l'utilisateur récupère le bilan de sa séance constitué, pour chaque binôme, de l'état d'avancement des tâches de construction et de conjecture et ce que l'élève a retenu de la séance après une semaine c'est à dire la réponse à la question : « Qu'as-tu appris lors de la séance de la semaine dernière en salle informatique ? ». Cette réponse peut aller de « rien » à « les diagonales d'un rectangle sont isométriques et il fallait utiliser le fait que les diagonales étaient aussi des rayons du cercle... »

Dans la formation que nous rapportons ici, nous avons remplacé l'utilisation de la vidéo par celle de SIC. Le scénario de formation est de type :

- analyse du problème mathématique, anticipation par le formé de la séance qu'il aurait mis en place dans sa classe (préparation de séance) autour de ce problème avec identification des difficultés potentielles ;
- utilisation du simulateur de la classe virtuelle (plusieurs essais possibles) avec analyse de l'écart entre prévu et réalisé ;

- identification et formulation des grandes problématiques qui se dégagent de cette expérience (connaissances et savoir issus de la formation).

## 2. Quelle différence entre l'usage de la vidéo et la simulation ?

De quelles données dispose-t-on lors de l'utilisation de SIC en formation ? Tout d'abord, il faut noter que toutes les traces sont soumises au fait que l'utilisateur (ici, enseignant en formation) accepte de les transmettre. Il s'agit, premièrement des actions choisies par l'utilisateur tout au long du déroulement temporel de chacun des essais de la séance simulée (figure 10)

	min	action	action2	action3
0 à 6 min	0	allumer	allumer	allumer
	1			
	2			
	3	donner la consigne	donner la consigne	donner la consigne
	4			
	5			
	6			
[...]		interroge élève n05	interroge élève n06	attend
22 à 25 min			regarde élève n05	revient à l'arrière
	22	redonner la consigne	revient à l'arrière	revient à l'arrière
	23			passer à la conjecture
	24		passer à la conjecture	demande la conjecture
	25		demande la conjecture	passer à la conjecture

Figure 10. — Extrait des 6 premières minutes et de la 22<sup>e</sup> à la 25<sup>e</sup> minute du déroulement de trois séances simulées par Amélie.

Deuxièmement nous avons accès à l'effet des actions de l'utilisateur sur les élèves virtuels : où ils en sont du travail ? Quelles conjectures ont-ils réalisées ? De quoi se souviennent-ils après une semaine ? (Figure 11).

Ces deux types de traces sont disponibles pour toutes les simulations réalisées par les formés, c'est-à-dire pour plusieurs séances réalisées sur des élèves et dans des conditions identiques (SIC est complètement réinitialisé à chaque relance). De fait, cette répétition des expériences est propice à l'analyse des invariants et des variations.

Troisièmement, comme pour toute séance de formation, nous avons filmé et enregistré la session de formation afin d'analyser les échanges entre formés et entre le formateur et les formés. De fait, nous avons trois sources de données au lieu d'une, la dernière, traditionnellement recueillie lors de l'utilisation de vidéos en formation

Notre hypothèse de chercheur-formateur est que ces traces peuvent contribuer à l'analyse des pratiques. Notre objectif est donc triple. Du point de vue du chercheur, nous analysons ces traces pour inférer les pratiques et caractériser les genèses instrumentales de l'artefact simulateur pour les formés. Du point de vue du formateur, nous utilisons ces traces comme outil de formation. Pour cela, nous mobilisons le cadre de la Double Approche adaptée aux Technologies (DAaT) développé par Abboud (Volume 1) avec les axes d'analyse (cognitif, pragmatique et temporel) et les déterminants (personnels, sociaux et institutionnels) de l'activité de l'enseignant utilisant les technologies numériques ainsi que l'approche instrumentale de Rabardel (1995).

	Amélia					Gpe 42			Rudy				
Construction / essai	1	2	3	4	5	1	2	3	1	2	3	4	5
Construction sur le logiciel terminée	8	8	7	8	8	8	8	8	8		5	8	8
Construction sur le logiciel rectangles placés			1							4	3		
Construction sur le logiciel non commencée									4				
État de la démonstration													
Très faible avancement dans la tâche			1								3		
Pense que les longueurs sont différentes	5	5	4	1	2	2			4		4	1	
Pense que les longueurs sont égales mais sans idée de la démonstration	3	1	1	3	2	6	4	2	4	3		3	3
Capable d'enchaîner les étapes de la démonstration		1	1	2	3		2	2		3	1	2	3
Pense que les longueurs sont égales et a repéré que la longueur des diagonales est le rayon du cercle		1	1	2	1		1	2		2		2	2
Pense que les longueurs sont égales et a repéré une égalité des diagonales du rectangle							1	2					
A 1 semaine													
Tâche trop incomplète pour avoir une trace à distance			1								3		
Ne reste quasiment rien	5	5	4	1	2	2			4		4	1	
Les deux longueurs étaient égales	2	1	2	5		6	2	4	4	3		5	3
Les diagonales d'un rectangle sont isométriques	1						3	2		1			1
Les diagonales d'un rectangle sont isométriques, quand il y a un cercle on peut s'en servir pour démontrer une égalité de longueurs	0	2	1	2			3	2		4	1	2	4

Figure 11. — Bilan des séances de trois groupes de formés : Amélie, groupe 42 et Rudy

### 3. Étude de cas : inférer les pratiques à partir des traces des séances simulées

La séance simulée met en scène une tâche à réaliser en Environnement de Géométrie Dynamique (EGD). Elle vise à mettre en évidence le fait qu'il y a, de fait, deux objectifs distincts : d'une part la construction d'une figure résistante (Laborde et al., 2006) en EGD et d'autre part la conjecture puis la démonstration en s'appuyant sur une construction correcte. Ces deux objectifs ne sont pas tenables en une séance de 55 minutes ce qui nécessite pour l'enseignant de faire des choix qui concernent l'axe temporel et l'axe cognitif.

L'analyse des séances simulées pour Rudy (annexe 1) montre l'entrecroisement des axes d'analyse et l'importance de la gestion de l'axe temporel. Au premier essai, Rudy a passé beaucoup de temps pour que les élèves réalisent la construction pour un résultat sur les élèves partiellement satisfaisant (figure 11) : la moitié des élèves ont à la fois la bonne construction, la bonne conjecture et se souviennent du résultat après une semaine. En revanche, aucun n'a repéré l'enjeu de la séance en termes d'apprentissage, i.e. l'isométrie des diagonales du rectangle qui combinée avec la présence de rayons d'un même cercle permet de déduire l'égalité des longueurs EG et AC. Au deuxième essai, il écourte la partie construction. Les élèves vont plus loin, quatre d'entre eux repèrent les propriétés attendues et s'en souviennent une semaine après. Au troisième essai, il se centre sur un seul élève. On peut penser qu'il a repéré dans les simulations antérieures que cet élève rencontre des difficultés systématiquement et qu'il essaie de voir s'il est possible de lui permettre de réussir. Au quatrième essai, et afin de gérer la tension temporelle, Rudy fait toute la construction à la place des élèves, mais les effets sont moindres, car il ne fait pas de mise en commun ce qui induit une moindre diffusion des connaissances dans le groupe. Le cinquième essai est caractérisé par le fait que les formés disposent de nouvelles options débloquées par le formateur à leur demande : il peut donner une construction partielle ou complète aux élèves. Cette option semble lui permettre de gérer d'une façon plus satisfaisante les tensions cognitive et temporelle puisqu'il choisit de l'utiliser au bout de 16

minutes afin de laisser plus de temps pour les tâches de conjecture et démonstration. Il laisse ainsi 31 minutes pour la conjecture et mène ensuite une mise en commun. Le dernier essai consiste à tester les limites du logiciel, voir ce qui se passe quand les élèves n'ont rien à faire, la séance est arrêtée par le logiciel au bout de 20 minutes, car les niveaux d'agitation des élèves sont trop élevés. Notre hypothèse est que le cinquième essai étant satisfaisant, Rudy utilise le temps qui lui reste pour découvrir le fonctionnement de SIC. Cela contribue également à la compréhension de la façon dont il est programmé.

L'analyse de ce déroulement fait émerger les tensions cognitives et temporelles que l'enseignant avait à gérer et aussi le processus d'instrumentalisation de SIC par Rudy. Ce processus est repérable par le nombre d'essais, le fait qu'il semble utiliser les essais antérieurs pour l'essai en cours et qu'il cherche à comprendre les hypothèses des formateurs grâce au fonctionnement du logiciel. On peut également adopter ici une autre entrée analytique en reprenant le concept de « régulation » de l'activité de l'enseignant développé dans la première partie de ce texte.

A titre de comparaison, une autre stagiaire, Amélia, fait 5 essais également. Alors que son premier essai est peu concluant en termes d'effets sur les élèves, elle reproduit cependant, sur chacun des essais suivants, les mêmes types d'interaction : elle regarde le travail de tous les élèves. Elle n'utilise donc pas le fait que les réactions des élèves sont prévisibles : les mêmes causes provoquent les mêmes effets d'un essai à l'autre, sans aspects aléatoires. Une forte stabilité de la composante médiative de ses pratiques se dégage donc de ses pratiques ainsi qu'un processus d'instrumentalisation qui n'exploite pas les potentialités de l'artefact.

#### 4. *Exploitation en formation*

L'extrait suivant d'un échange enregistré pendant la formation illustre une tension liée à l'axe pragmatique. Les enseignants sont confrontés à un risque d'éclatement de la classe dû à un rythme hétérogène de l'avancement dans la réalisation de la tâche et cherchent à ramener tous les élèves au même rythme :

Formateur (F) : donc la consigne, ça vous pose pas de souci, la construction alors la conjecture maintenant

Enseignant (E) 4 : est-ce que là c'est possible, là de laisser ceux qui ont encore des problèmes avec la construction et puis demander aux autres de faire la conjecture

F : ça n'a pas été prévu non, de différencier comme ça

E4 : parce que là il y a un problème avec ceux qui ont terminé la figure et qui ont plus rien à faire du tout, parce qu'une fois que c'est fini y s'ont plus rien du tout à faire

E1 : et y s'énervent

[...]

F1 : donc du coup effectivement on pourrait proposer ça de laisser ceux qui ont à construire et de travailler avec ceux qui ont...

E4 : mais après ça crée l'écart encore plus

F1 : du coup oui

E4 : parce que là il y en a qui vont avoir fini de démontrer et tout et d'autres rien du tout, jamais

F : du coup est-ce que ce code-là il ne répond pas .

E4 : donner la correction à tous quoi

Le logiciel ne permet pas de faire passer un groupe à la phase de conjecture alors que d'autres groupes sont à la phase de construction, notamment parce que cela n'a pas été observé lors des expérimentations en classes réelles. On voit que les enseignants souhaiteraient, dans la simulation, proposer cela, mais qu'ils y renoncent au fil de l'échange pour ne pas « créer l'écart encore plus. » La solution proposée « donner la construction correcte aux élèves » permet d'abandonner, pour certains élèves, l'enjeu de construction pour remettre tous les élèves à la même tâche. Il semblerait que les enseignants instrumentalisent le simulateur pour prendre plus

de risque et que de fait, il ouvre au formateur la possibilité de dégager des problématiques pour la dernière partie. Ici une problématique liée à l'axe pragmatique.

### *5. Conclusion et perspectives liées à la simulation*

Pour conclure sur l'analyse des pratiques de formation avec simulateur de classe, les travaux réalisés mettent en évidence à la fois l'aspect prometteur de l'utilisation des traces pour le chercheur et l'adéquation du cadre de l'analyse en axes pragmatique, cognitif et temporel tout en questionnant sur la façon dont un formateur pourrait exploiter ces outils en formation.

En effet, comment un formateur peut-il exploiter les traces que nous avons présentées durant sa formation ? Si le chercheur a le temps de compiler et analyser les séances simulées, il faudrait inventer d'autres stratégies de formation, et probablement d'autres techniques, pour utiliser ces éléments durant les séances de formation. Reste également à analyser ce que l'exploitation de ces traces peut apporter durant la formation, par exemple si on imagine que l'on amène les formés à analyser leurs pratiques par ce prisme.

## CONCLUSION

Les trois parties de ce texte visaient à fournir des éclairages sur l'activité de l'enseignant lors de la mise en place de tâches enrichies par les technologies et sur les difficultés, les tensions et les incertitudes auxquels il fait face et les choix explicites ou implicites qu'il fait pour les gérer en temps réel. Dans la dernière partie nous avons en plus montré comment les outils conceptuels développés pour permettre cet éclairage représentent des leviers pour la formation. En fait, un formateur outillé avec ces concepts est plus à même de réagir in situ et d'ajuster ses interventions aux besoins et aux connaissances professionnelles des enseignants.

Les trois parties présentent également une cohérence au niveau du cadrage théorique et les approches qui y sont présentées sont complémentaires. De plus, un élément méthodologique fort est que les données recueillies sont relatives à des pratiques ordinaires de classe de mathématiques. D'un côté, l'analyse de ces pratiques permet au chercheur de caractériser les pratiques enseignantes en environnement technologique et ainsi mieux comprendre les difficultés qu'éprouvent ces enseignants dans la vie quotidienne de la classe et les tensions qu'ils arrivent à gérer (ou non). Régulations, prise en compte des ZPD des élèves (proximités) et gestion de tensions afin d'assurer des apprentissages mathématiques jugés « satisfaisants » par l'enseignant, nous renseignent aussi sur les genèses d'usage des technologies chez les enseignants (Abboud-Blanchard & Vandebrouck, 2013). D'un autre côté, se baser sur ces analyses permet de simuler des pratiques de classe utilisables en formation et d'accéder à une analyse de l'activité de l'enseignant en formation, d'agir sur cette activité en visant son enrichissement.

L'ensemble de ces travaux participent à un chantier en cours, les outils conceptuels continuent à être consolidés, d'autres outils restent à développer et des transferts vers la formation sont à renforcer et à inventer. Chantier mouvant, à la fois contraint et stimulé par des technologies éducatives en perpétuel développement...

## RÉFÉRENCES

- ABBOUD-BLANCHARD, M. (2014). Teachers and technologies: shared constraints, common responses. In A. Clark-Wilson, O. Robutti & N. Sinclair (Eds.), *The Mathematics Teacher in the Digital Era: An International Perspective on Technology Focused Professional Development* (pp. 297-318). Springer.
- ABBOUD-BLANCHARD, M. & EMPRIN, F. (2010). Pour mieux comprendre les pratiques des formateurs et de formations TICE, *Recherche et Formation (INRP)*, 62, 125-140.
- ABBOUD-BLANCHARD, M. & VANDEBROUCK, F. (2013). De l'analyse d'usages des TICE à une articulation de cadres théoriques pour l'étude des pratiques enseignantes. In J.B. Lagrange (Ed.), *Les technologies numériques pour l'enseignement : usages dispositifs et genèses* (pp. 111-128). Octarès.
- ABBOUD, M. & ROGALSKI, J. (2017). Des outils conceptuels pour analyser l'activité de l'enseignant « ordinaire » utilisant des technologies en classe. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 37/2-3, 161-216.
- ABBOUD, M. & ROGALSKI, J. (2021). Open dynamic situations of classroom use of Digital Technologies: investigating teachers' interventions. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 21(2), 424-440.
- BALACHEFF, N. (1994). Didactique et intelligence artificielle. *Recherches en didactique des Mathématiques*, 14 (1), 9-42.
- BLANTON, M.L., WESTBROOK, S., & CARTER, G. (2005). Using Valsiner's Zone Theory to Interpret Teaching Practices in Mathematics and Science Classroom. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8, 5-33.
- EMPRIN, F. (2011). Construction d'un Simulateur Informatique de Classe (SIC) pour la formation des enseignants. In M. Bétrancourt, C. Depover, V. Luengo, B. De Lièvre & G. Temperman (Eds.), *Conférence EIAH 2011 (Environnements Informatiques pour l'Apprentissage Humain)* (pp. 409-422). Éditions de l'UMONS — ATIEF (Association des Technologies de l'information pour l'Éducation et la Formation).
- EMPRIN, F. (2018). Un simulateur informatique de classe pour la formation et la recherche. Quelle place des recherches en didactique dans la conception et l'expérimentation ?, in J.-B Lagrange & M. Abboud-Blanchard (Eds), *Environnements numériques pour l'apprentissage, l'enseignement et la formation : perspectives didactiques sur la conception et le développement*, IREM de Paris. <http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/up/IPS18001.pdf>
- LABORDE, C., KYNIGOS, C., HOLLEBRANDS, K., & STRÄSSER, R. (2006). Teaching and learning geometry with technology. In A. Gutiérrez & P. Boero (eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*, (pp. 275-304). Brill.
- LEPLAT, J. (1997). *Regards sur l'activité en situation de travail*. Paris, PUF.
- LEPLAT, J. (2006). La notion de régulation dans l'analyse de l'activité. *Perspectives interdisciplinaires sur le travail et la santé* <http://journals.openedition.org/pistes/3101>
- RABARDEL, P. (1995). *Les hommes et les technologies ; approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin.
- ROBERT, A. (1999). Recherches didactiques sur la formation professionnelle des enseignants de mathématiques du second degré et leurs pratiques en classe. *DIDASKALIA*, 15, 123-157.
- ROBERT, A. (2003). Analyse de vidéo de séances de classe : des tâches prescrites aux activités des élèves, en passant par les pratiques des enseignants de mathématiques (second degré). *Document pour la formation des enseignants*, IREM de Paris 7.
- ROBERT, A., & VANDEBROUCK, F. (2014). Proximités en acte mises en jeu en classe par les enseignants du secondaire et ZPD des élèves : analyses de séances sur des tâches complexes. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 34 (2/3), 239-285.
- ROGALSKI, J., & ROBERT, A. (2015). De l'analyse de l'activité de l'enseignant à la formation des formateurs. Le cas de l'enseignement des mathématiques dans le secondaire. in V. Lussi Borer (Ed), *Analyse du travail et formation dans les métiers de l'éducation* (pp. 93-113). De Boeck Supérieur. <https://doi.org/10.3917/dbu.lussi.2015.01.0093> »
- ROGALSKI, J. (2003). Y a-t-il un pilote dans la classe ? Une analyse de l'activité de l'enseignant comme gestion d'un environnement dynamique ouvert. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 23 (3), 343-388.
- VALSINER, J. (1987). *Culture and the development of children's actions: A cultural-historical theory of developmental psychology*. John Wiley & Sons.
- VYGOTSKI, L.-S. (1934/1986). *Thought and language*. MIT Press.

## ANNEXES

### *Annexe 1 : séances simulées de Rudy*

min	Essai 1	Essai 2	Essai 3	Essai 4	Essai 5	Essai
0	donner la consigne	donner la consigne	donner la consigne	ne pas allumer	ne pas allumer	donner la consigne
1				donner la consigne	donner la consigne	
2						
3						
4	redonne la consigne	construire	regarde élève n01			att
5	regarde élève n05		regarde élève n05	demande à tous résiste ?	interroge élève n01	
6	regarde élève n04		regarde élève n04		interroge élève n05	
7	regarde élève n03	attendre 3 minutes	faire à leur place	redonner la consigne	interroge élève n09	construire
8	regarde élève n03				redonne la consigne	
9	regarde élève n01			demande à tous résiste ?	demande à tous résiste ?	
10	regarde élève n01	regarde élève n01				att 3 min
11	regarde élève n02		regarde élève n07	regarde élève n03	regarde élève n01	
12	regarde élève n02		demande à tous résiste ?	faire à leur place	regarde élève n02	
13	regarde élève n06					att 3 min
14	faire à leur place	demande la conjecture	redonner la consigne			
15						
16		montrer une construction correcte		regarde élève n01	donne la construction de base et des points	att 3 min
17				faire à leur place		
18	demande à tous résiste ?	regarde élève n01				
19		faire à leur place	<b>passer à la conjecture</b>		attendre 3 minutes	att 3 min
20	redonner la consigne					
21				regarde élève n02		
22	regarde élève n07		demande la conjecture	faire à leur place	passer à la conjecture	
23	regarde élève n08	regarde élève n02				
24	revient à l'arrière		dire de mesurer			
25					demande la conjecture	
26		<b>passer à la conjecture</b>		regarde élève n04		
27	regarde élève n01	demande la conjecture	demande la conjecture	faire à leur place	dire de mesurer	
28	regarde élève n02					
29	regarde élève n03	revient à l'arrière	montrer une construction correcte			

30	regarde élève n04				demande la conjecture	
31	regarde élève n05	<b>passer à la demo</b>	dire de mesurer	regarde élève n05		
32	regarde élève n06	demande à tous mettre OB sur rayon			revient à l'arrière	
33	regarde élève n07					
34	regarde élève n08	redonner la consigne	demande la conjecture			
35	regarde élève n09			<b>passer à la conjecture</b>	<b>passer à la demo</b>	
36	regarde élève n08	redonner la consigne	revient à l'arrière			
37	regarde élève n01					
38		revient à l'arrière		dire de mesurer	redonner la consigne	
39			demande à tous mettre OB sur rayon			
40	<b>passer à la conjecture</b>				demande à tous mettre OB sur rayon	
41	dire de mesurer	<b>passer à la mise en commun</b>	redonner la consigne	demande la conjecture		
42					redonner la consigne	
43			redonner la consigne	montrer une construction correcte		
44	montrer une construction correcte	avis des élèves			revient à l'arrière	
45			revient à l'arrière	demande la conjecture		
46	demande la conjecture					
47		<b>note en trace écrite</b>		revient à l'arrière	<b>passer à la mise en commun</b>	
48	montrer une construction correcte		attendre 3 minutes			
49						
50	demande la conjecture	<b>fin de session</b>		demande à tous mettre OB sur rayon	avis des élèves	
51			<b>passer à la mise en commun</b>			
52	revient à l'arrière			redonner la consigne		
53					<b>note en trace écrite</b>	
54			<b>note en trace écrite</b>	revient à l'arrière		
55	<b>passer à la demo</b>					
56					<b>fin de session</b>	
57			<b>fin de session</b>	<b>fin de session</b>		
58	<b>fin de session</b>					

## RESSOURCES NUMERIQUES POUR L'ENSEIGNEMENT ET L'APPRENTISSAGE DES MATHÉMATIQUES

Xavier Nicolas\*, Christian Mercat\*\*, Sébastien Jolivet\*\*\*, Jana Trgalová\*\*

### RÉSUMÉ

Les trois séances de ce TD abordent différents aspects liés aux ressources en général et aux ressources numériques en particulier. La première séance, animée par Xavier Nicolas, s'intéresse à la relation chercheur-praticien dans le cadre des problématiques didactiques de conception, évaluation et appropriation de ressources numériques, sur le fond de l'utilisation d'un environnement de réalité virtuelle. Durant la deuxième séance, Christian Mercat propose une réflexion sur la conception de ressources à partir d'un générateur de tâches proposé dans *MathCityMap*, un dispositif d'apprentissage de mathématiques innovant soutenu par la technologie mobile. La troisième séance, animée par Sébastien Jolivet, aborde la question de la description de ressources, en particulier lorsqu'il s'agit d'articuler les contraintes liées à la description d'un volume important de ressources dans des domaines mathématiques différents, tout en assurant une certaine qualité didactique à cette description. Les trois TD invitent les participants à porter un regard didactique sur ces diverses problématiques liées aux ressources numériques.

Mots-clefs : Ressource numérique, indexation, réalité virtuelle, rallye mathématique géolocalisé

### ABSTRACT

The three sessions of this workshop address different aspects related to resources in general and digital resources in particular. The first session, led by Xavier Nicolas, focuses on the researcher-practitioner relationship in the context of didactic issues of design, evaluation and appropriation of digital resources, with the background use of a virtual reality environment. During the second session, Christian Mercat offers a reflection on the design of resources using a task generator proposed in *MathCityMap*, an innovative mathematics learning device supported by mobile technology. The third session, moderated by Sébastien Jolivet, addresses the question of the description of resources, in particular when it comes to articulating the constraints linked to the description of a large number of resources in different mathematical fields, while ensuring a certain didactic quality to this description. The three sessions invite participants to take a didactic look at these various issues related to digital resources.

Keywords: Digital resource, indexation, virtual reality, geolocalized mathematical trail

### INTRODUCTION

Les trois séances de ce TD permettent d'aborder différents aspects liés aux ressources en général et aux ressources numériques en particulier.

Lors de la première séance, Xavier Nicolas propose aux participants de s'intéresser à la relation chercheur-praticien dans le cadre des problématiques didactiques de conception, évaluation et appropriation de ressources numériques pour l'enseignement et l'apprentissage en mathématiques. Il exploite pour cela l'approche « recherche orientée par la conception » (Sanchez et Monod-Ansaldi, 2015). Cette réflexion générale est appuyée sur le travail de réalisation effective d'une ressource pour l'enseignement de la géométrie dans l'espace à l'aide de la technologie, encore peu exploitée en classe, de la réalité virtuelle. Lors de l'atelier, les participants vivent une étape cruciale de la conception collaborative de ressources, celle de révision collective de la ressource qui vise l'identification d'éventuels points critiques (difficultés, implicites, imprécisions...). Ce travail est soutenu par la carte d'expérience (Sperano et al., 2019), outil méthodologique retraçant les divers aspects et choix de conception de la ressource.

Durant la deuxième séance, Christian Mercat propose une réflexion sur un dispositif d'apprentissage des mathématiques innovant soutenu par la technologie mobile. Le dispositif *MathCityMap* s'appuie d'une part sur une application web permettant aux enseignants de concevoir des tâches nécessitant une prise d'informations dans l'espace environnant, et d'autre part sur une application sur smartphone qui permet aux élèves de résoudre des tâches proposées

\* INSPE, Université Clermont Auvergne

\*\* LDAR, Université de Paris & IUFE, Université de Genève

\*\*\* LDAR, Université de Paris et LIP6, Sorbonne Université

dans un parcours géolocalisé. Les participants sont invités à porter un regard didactique sur le générateur de tâches sur le portail afin d'en analyser la qualité.

Lors de la troisième séance, Sébastien Jolivet aborde la question de la description des ressources, en particulier lorsqu'il s'agit d'articuler les contraintes liées à la description d'un volume important de ressources dans des domaines mathématiques différents, tout en assurant une certaine qualité didactique à cette description. Les participants sont d'abord invités à réfléchir sur des critères didactiques de description de ressources d'apprentissage (numériques ou non), ce qui suscite des questionnements sur ce qu'est une ressource, sur la finalité de leur description (pour qui, pour quoi faire). En guise de réponse à ces questions, Sébastien présente quelques réflexions sur les enjeux de descriptions de ressources et sur les approches qu'il a développées dans divers projets.

Ce TD, à travers les trois ateliers à la fois différents et complémentaires, a permis d'aborder et d'approfondir des questionnements relatifs aux ressources, numériques ou non : leur conception, description et évaluation.

## CONCEPTION, EVALUATION, APPROPRIATION D'UNE RESSOURCE MOBILISANT LA REALITE VIRTUELLE DEDIEE A L'ENSEIGNEMENT DE LA GEOMETRIE DANS L'ESPACE

Séance de TD animée par Xavier Nicolas

L'exploration des potentialités offertes par des formes didactiques nouvelles, comme celle liés à l'intégration des technologies numériques, bénéficie d'approches de recherche pragmatiques et impliquant une forte dimension collaborative entre chercheur et praticiens. S'inscrivant dans le paradigme des recherches de faisabilité (Astolfi, 1993) et des recherches collaboratives (Desgagné, 1997), la recherche orientée par la conception (Sanchez & Monod-Ansaldi, 2015) place la conception, l'évaluation et l'appropriation de ressources numériques au cœur du processus de recherche et de collaboration. Dans cet atelier, nous proposons d'illustrer ces principes autour d'une phase de design d'une ressource dédiée à l'enseignement de la géométrie dans l'espace et mobilisant un environnement de réalité virtuelle.

### *1. L'approche méthodologique Recherche Orientée par la Conception*

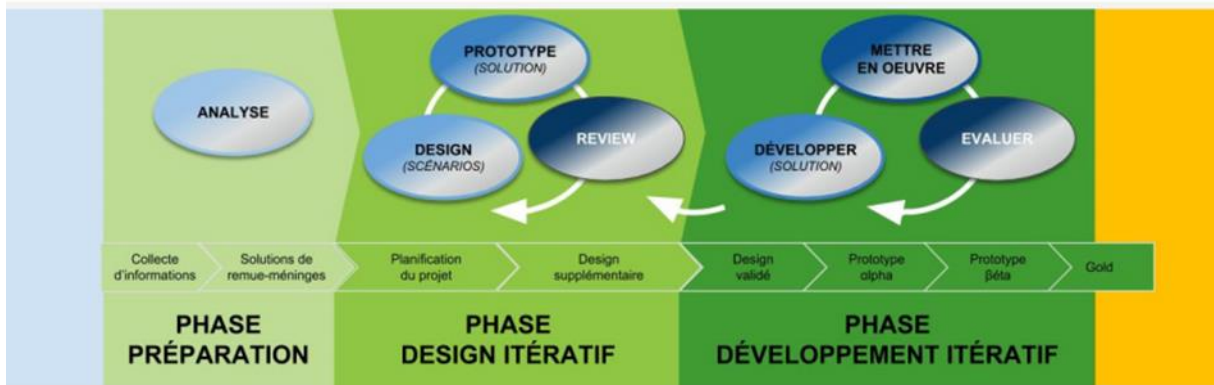
La recherche orientée par la conception (ROC) est la dénomination dans le monde francophone proposée par Sanchez & Monod-Ansaldi (2015) pour Design-Based Research (DBR). Né au début des années deux mille, le collectif Design-Based Research Collective (2003) développe une vision de la recherche en éducation considérée comme une recherche appliquée et propose une synthèse de différents courants méthodologiques qui ont en commun d'afficher leurs visées pragmatiques et collaboratives :

“We define design-based research as a systematic but flexible methodology aimed to improve educational practices through iterative analysis, design, development, and implementation, based on collaboration among researchers and practitioners in real-world settings, and leading to contextually-sensitive design principles and theories. The five basic characteristics: (a) pragmatic ; (b) grounded ; (c) interactive, iterative, and flexible ; (d) integrative ; and (e) contextual” (Wang & Hannafin, 2005, p. 6-7).

Les approches DBR partagent de nombreux points communs avec l'ingénierie didactique (Artigue, 2020) mais dans la DBR le rôle du design est plus équilibré entre l'objectif de production de ressources pour faire évoluer l'enseignement et celui de production de connaissances, entre recherche fondamentale et développement. En effet si les visées de la ROC sont bien pragmatiques, car il s'agit de concevoir un dispositif techno-pédagogique, de produire des résultats pouvant éclairer la pratique, elles sont surtout heuristiques, car les

expérimentations qui sont conduites visent à éprouver les modèles théoriques élaborés par la recherche, à les raffiner et, éventuellement, à en construire de nouveaux. (Sanchez & Monod-Ansaldi, 2015). Un des enjeux pour la ROC est de parvenir à s'abstraire des contextes étudiés et à permettre une généralisation des résultats en identifiant des invariants et en s'assurant de la validité externe des résultats produits.

Une des caractéristiques principales de la ROC est sa dimension itérative et flexible. Le modèle SAM (Allen & Sites, 2012), met en relief ces itérations à plusieurs niveaux : au sein d'une même phase et entre les phases (Figure 1).



*Figure 1. – Le modèle SAM (Successive Approximation Model) de Allen et Sites (2012)*

### *La relation chercheur-praticien dans la ROC*

La ROC permet de combiner les visées éducatives du praticien avec les moyens que le chercheur se donne pour comprendre les conditions de leur réalisation.

Le travail de conception, de mise en œuvre et d'analyse est de nature à permettre une évolution des praxéologies des chercheurs et des praticiens. Pour les chercheurs, le gain consisterait alors dans une meilleure compréhension théorique basée sur des travaux empiriques, dans une évolution de sa pratique de recherche ainsi que des avancées d'un point de vue méthodologique. Pour le praticien, les apports consistent dans une évolution de sa pratique ainsi que dans une meilleure compréhension des effets de cette pratique. Cela se traduirait donc par un développement professionnel. Le dispositif de recherche collaborative offre alors la possibilité de construire un espace interprétatif partagé dans lequel s'élabore progressivement un problème d'enseignement aux prises avec des enjeux de savoir et des contraintes de mise en œuvre qu'il s'agit justement de partager. Ce partage nécessite que les deux communautés : chercheurs et praticiens puissent s'accorder sur l'idée que certains objets leurs sont communs et qu'ils puissent développer un discours tant pratique que théorique sur ces objets. Le concept d'objet frontière (Trompette & Vinck, 2009) définit des « objets, abstraits ou concrets, dont la structure est suffisamment commune à plusieurs mondes sociaux pour qu'elle assure un minimum d'identité au niveau de l'intersection tout en étant suffisamment souple pour s'adapter aux besoins et contraintes spécifiques de chacun de ces mondes ». On retrouve cette idée dans l'objet biface (Marlot et al., 2017) qui organise la co-activité des enseignants et des chercheurs. Dans ces approches, le passage de frontières culturelles nécessite la médiation d'une personne appartenant aux deux communautés : le broker. Son rôle consiste alors à identifier les objets frontières, les différences de sens qu'ils portent, et à en informer le collectif pour faciliter la construction d'un sens partagé (Aldon et al., 2013).

## 2. Cadre théorique associé à la ressource mobilisée

Dans cet atelier, nous mobilisons une ressource numérique en réalité virtuelle dans le contexte des enseignements de la géométrie dans l'espace. Initialement cette ressource a été conçue pour développer chez les élèves une vision non iconique des représentations en perspective cavalière des prismes et des pyramides en développant des techniques de construction inédites de ces solides : la « construction dimensionnelle » (Nicolas & Trgalová, 2017). Nous nommons « construction dimensionnelle », le fait de générer un objet géométrique de dimension  $N$  à partir d'un objet de dimension  $N-1$ . Cette génération prend la forme d'un étirement d'une figure dans l'espace. Un segment peut être généré par l'étirement d'un point. Un prisme peut être généré par l'étirement d'un polygone.

Le design proposé dans l'atelier est la remobilisation de la technique de construction dimensionnelle des prismes et des pyramides dans le contexte des apprentissages du calcul du volume en 5ème et 4ème du collège. En effet, si les formules mathématiques nécessaires à ces calculs sont simples, leur mise en œuvre peut être problématique du fait de devoir identifier la base et la hauteur dans des représentations graphiques en perspectives cavalières. L'hypothèse des concepteurs de la ressource est que la construction dimensionnelle facilite l'identification des bases et de la hauteur des prismes et des pyramides et qu'elle participe également à la perception du concept de volume.

D'un point de vue scientifique, nous considérons l'environnement de réalité virtuelle comme un espace graphique (Perrin-Glorian et al., 2013) qui a la particularité d'être perçu comme un espace sensible par le sujet. En effet l'immersion et l'interaction pseudo naturelle des dispositifs de réalité virtuelle permettent l'émergence du sentiment de présence chez l'utilisateur, le sentiment authentique d'exister dans un monde autre que le monde physique où notre corps se trouve. L'utilisation du corps, comme principal moyen d'interaction dans les environnements de réalité virtuelle invite à considérer de manière central le rôle des expériences corporelles et kinesthésiques dans l'apprentissage des mathématiques (Arzarello & Robutti, 2008 ; de Freitas & Sinclair, 2014 ; Nemirovsky et al., 2004 ; Radford, 2009). En conclusion les environnements de réalité virtuelle nous amènent à considérer l'ensemble des ressources ou modalités mobilisés dans le processus d'apprentissage : communication symbolique orale et écrite, dessin, geste, manipulation d'artefacts matériels et numériques, mouvements du corps.

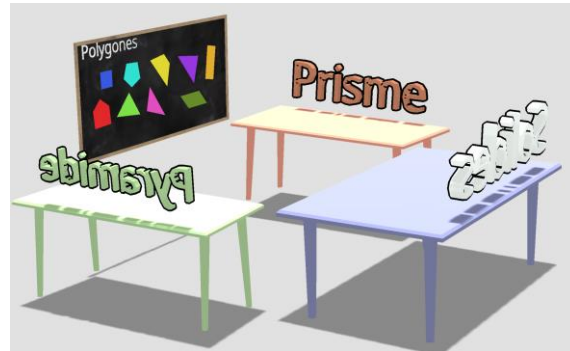
## 3. Mise en œuvre de l'atelier et analyses

Dans cet atelier, nous avons souhaité faire vivre aux participants un moment clé de la ROC, la phase design itératif (Figure 1) et plus particulièrement l'étape de *review*, c'est-à-dire l'évaluation du design. C'est en effet dans cette phase que les échanges entre chercheurs et praticiens sont particulièrement riches. Compte tenu des contraintes de temps de l'atelier, nous avons proposé aux participants de travailler à partir d'un design (scénario pédagogique et prototype de l'environnement virtuel dédié) conçu précédemment par des enseignants de mathématiques lors de cycle antérieur de design itératif. Les objectifs de l'atelier sont de :

- Permettre aux participants de s'approprier une technologie nouvelle à partir d'un design ayant déjà connu plusieurs cycles d'itération ;
- Faire émerger des points de friction concernant l'utilité, l'utilisabilité et l'acceptabilité du design en bénéficiant d'un regard neuf sur le design ;
- Favoriser l'émergence de discussions autour d'objets frontières.

*Le dispositif*

L’environnement virtuel est une scène 3D, construite avec l’application *Gravity Sketch*, un environnement de Conception Assistée par Ordinateur grand public et gratuit (Figure 2). L’environnement est accessible par un dispositif de réalité virtuelle (RV) immersif de type casque autonome. Nous avons utilisé le casque *Meta Quest 2* qui possède deux contrôleurs (un pour chaque main) et permet une manipulation et des déplacements dans une zone de 7m x 7m. L’ensemble des mouvements (tête, corps, mains) est capté par le casque (pas de dispositif externe de *tracking*) et retranscrit en temps réel dans l’environnement virtuel. La vision utilisateur est partagée sur un écran d’ordinateur pour une consultation par les observateurs extérieurs.



**Figure 2.** – Le prototype d’environnement virtuel dans l’application *Gravity Sketch*

Le scénario du design prend la forme d’une carte d’expérience. Une carte d’expérience est une représentation graphique et textuelle qui permet de décrire une expérience dans le temps avec un produit, un système ou un service (Kalbach, 2016). Elle peut être utilisée *a posteriori* pour analyser le réalisé ou de manière prospective pour la conception d’une situation ou d’une ressource. La carte est fournie aux groupes sous forme numérique, les participants peuvent interagir avec son contenu : modifier, ajouter des éléments.

	Activité 0 Prise en main		Activité 1 Génération des prismes/pyramides à partir d'un polygone			Activité 2 Tri de prismes Définir ident base	
Objectifs	Assimiler les commandes et les procédures à mobiliser pour réaliser les actions demandées	Se repérer dans l'environnement Identifier les différents espaces de travail	Générer des solides à partir d'un polygone	Un prisme est un solide dont les bases sont des polygones parallèles et identiques	Une pyramide est un solide dont la base est un polygone	Identifier un prisme une pyramide Définition des propriétés	
Tâches Enseignant	Description des contrôleurs utilisés : Gâchette (index) Grac (majeur) Bouton (pouce)	Tenir le casque pour montrer à l'écran les différentes zones	Faire formuler Générer un prisme, une pyramide Utilisation des gestes iconiques	Blocs iconique prisme : Remarque qu'on écrit Celle iconique pyramide : Une main ouverte, une main au poignet sur l'écran	Faire décrire ce qui varie et ne varie pas aux élèves observateurs	Prise de notes au tableau pour phase institutionnelle	Questionner la classe sur la proposition de l'élève manipulant
Tâches Élève Manipulateur			Générer un prisme ou une pyramide à partir d'un polygone	Prendre un polygone et le déplacer dans la zone de manipulation	Editer le polygone Appliquer une transformation : étirement ou pincement	Déposer le solide dans la zone de stockage	Prendre un solide le poser sur sa base dans la zone correspondant à nature
Manipulations techniques	Editer on/off = bits bleus	Possibilité de limiter		Placer la main sur l'objet désiré.	Entrée et sortie du mode édition	Placer la main sur l'objet désiré.	Placer la main sur l'objet désiré.

**Figure 3.** – Extrait de la carte d'expérience ([voir ici la version complète](#))

Les participants sont répartis en trois groupes et disposent d'un dispositif de RV, d'une zone de manipulation de 3mx3m et de la carte d'expérience interactive au format numérique (Figure 4). Les consignes suivantes sont données aux participants :

« Vous devez tester une ressource (scénario + artefact) proposée à une classe de 4ème collège dans le cadre de l'enseignement du calcul du volume du prisme. Vous disposez d'une carte d'expérience décrivant l'ensemble du scénario. Vous rendrez compte dans cette carte d'expérience d'éventuels points de friction ; questionnements, difficultés, remarques autour des objets de savoir, des tâches, émergents de la mise en œuvre de la ressource. »



**Figure 4.** – Disposition matérielle dans un groupe

#### *Synthèse des productions sur les cartes et des discussions dans les groupes*

Le tableau 1 recense les points de friction déposés sur les cartes d'expérience par les groupes. Une version en ligne de la carte est disponible en cliquant sur ce lien. Malheureusement un problème technique a limité le recueil de données, certains groupes ayant perdu leurs annotations en rafraîchissant l'affichage de l'ordinateur. Nous avons choisi de trier les points de friction disponibles en trois catégories. Celles relevant de l'utilité : permettre d'atteindre les objectifs pédagogiques, celles relevant de l'utilisabilité : les problèmes liés à l'usage du dispositif et enfin celles relevant de l'acceptabilité : la conformité aux savoirs mathématiques, aux pratiques institutionnelles.

Utilité	Utilisabilité	Acceptabilité
Comment mettre en relief la notion de hauteur (manque de transparence des objets)	Limiter les fonctionnalités accessibles aux utilisateurs (élèves)	Pas de validation à part la comparaison directe de volume par inclusion d'un solide dans l'autre
Prolongement sur d'autres solides ?	Manque de précision (pas de mesures disponibles : coordonnées, grandeurs)	Quelle signification mathématique pour la technique de construction dimensionnelle ?
Faire du lien avec les patrons : assemblages de faces	Retour haptique du moment d'inertie : vibration des contrôleurs	
Ajouter différents mécanismes pour créer plus de réflexions de la part des élèves		

**Tableau 1.** – Recueil des points de friction proposés par les participants

### *Discussion autour de l'objet frontière construction dimensionnelle*

Comme évoqué dans les potentialités de la ROC, l'activité des participants a fait émerger des questionnements autour d'un objet frontière. Ici les discussions ont porté sur la justification mathématique, la technologie au sens de Chevallard, de la technique de construction dimensionnelle pour générer des volumes.

Les discussions se sont orientées vers la notion d'intégrale. En effet certaines grandeurs physiques sont des résultats d'intégrale. L'étirement d'un polygone invite à considérer le solide généré comme l'intégrale d'une aire selon une différence de hauteur. Si  $S(z)$  désigne l'aire de la surface découpée du solide par le plan de côte  $z$  dont la hauteur varie de  $a$  à  $b$ , le volume  $V$  du solide peut s'écrire :

$$V = \int_a^b S(z). dz$$

En conséquence on retrouve bien pour le prisme,  $V = \text{base} \times \text{hauteur}$  (l'aire étant constante) et pour la pyramide  $V = \text{Base} \times \text{hauteur} / 3$ .

Bien que cette justification mathématique ne soit pas accessible à des élèves de 4ème, il est assez inattendu et intéressant pour la suite d'explorer la construction dimensionnelle comme une représentation graphique et kinesthésique de l'intégration.

## CONCEPTION ET EVALUATION D'UN RALLYE MATHEMATIQUE GEOLOCALISE

Séance de TD animée par Christian Mercat

En direction d'une mathématique plus située et plus réaliste que celle enseignée en classe habituelle, les rallyes mathématiques invitent à visiter un endroit (une école, une ville...) en ouvrant un œil scientifique et ludique sur le monde autour de soi (Aldon, 2018 ; Blane & Clarke, 1984 ; English et al., 2010). L'idée est de se voir poser des questions, à un endroit précis, nécessitant de prendre des informations dans son environnement, mesurer ou estimer une grandeur (longueur, angle, durée...) ou simplement se placer physiquement à un endroit donné (milieu de deux points, centre d'un cercle...), lire une pancarte, vérifier un alignement...

Le projet *MathCityMap* facilite l'ingénierie de tels rallyes au travers d'une plateforme numérique en ligne d'édition de tâches et de parcours, et d'une application sur smartphone et tablette pour la conduite des rallyes, individuellement ou en groupes (Cahyono & Ludwig, 2019). Cette application non seulement vous pose la question mais vous aide à la localiser (à l'aide du GPS), vous propose des indices, valide, invalide et évalue la précision de votre réponse (vous gagnez des points) et vous propose une correction (Gurjanow et al., 2019). En version connectée synchrone, elle vous permet aussi de communiquer avec votre enseignant qui peut vous localiser et suivre votre activité.

Dans cet atelier, nous proposons de prendre en main l'outil, de faire l'expérience du dispositif, de concevoir des tâches et de faire l'étude qualité de tâches données.

### *1. L'intérêt de la technologie pour les rallyes mathématiques*

Les rallyes mathématiques donnent l'occasion aux élèves de faire l'expérience d'apprentissages situés dans l'espace, utilisant leur corps pour évaluer (de Freitas & Sinclair, 2012 ; Mercat & Berger, 2020), et l'opportunité de résoudre des problèmes de modélisation pouvant être significatifs (Blum et al., 2006).

Suivant le modèle SAMR (substitution-augmentation-modification-redéfinition) (Hamilton et al., 2016), la technologie permet ici de faciliter la production et la gestion des rallyes en se *substituant* à une gestion papier, mais permet d'*augmenter* l'expérience, par exemple en

facilitant la localisation des tâches et l'identification des objets (zoom sur l'image), *modifie* également l'évaluation, en donnant une rétroaction immédiate aux essais, en proposant des indices, et *redéfinit* les tâches mêmes, par exemple celle dont la réponse est une géolocalisation fournie par l'appareil.

Une redéfinition est à l'œuvre également dans la *conception* des tâches, spécialement dans l'utilisation de l'assistant d'épreuves génériques. Cet outil peut se comprendre comme une prise en main technique du logiciel mais également comme une initiation didactique des auteurs à ce qui est attendu, tant du point de vue du contenu que de la philosophie des parcours et de la modélisation en général.

Enfin, la version en test actuellement intègre aussi des éléments de *réalité augmentée*, permettant d'interagir avec des objets virtuels et d'augmenter les informations visibles dans une scène (Cahyono et al., 2020).

D'autre part, le *portail web*<sup>1</sup> sur lequel s'administrent les épreuves possède un processus d'évaluation par des experts qui valident ou invalident les épreuves suivant différents critères. La technologie permet donc également de participer à l'évaluation de la qualité des ressources produites.

La question centrale de la modélisation offre en général une belle illustration de l'effet Dunning-Kruger (Kruger & Dunning, 1999) : les enseignants débutants ont tendance à être trop confiants, d'une part ils surestiment leur précision et celle des élèves, ils introduisent souvent des implicites (comme l'unité de mesure ou le type de modélisation) et d'autre part ils n'envisagent pas spontanément qu'il puisse en être autrement. Le point crucial est de comprendre ce qu'est réellement une mesure réalisée à l'aide d'un instrument : ce n'est pas un nombre mais une *distribution*, qu'on modélise le plus souvent par une courbe gaussienne, qui peut être caractérisée par sa moyenne et son écart-type. L'interface aide à comprendre ce fait en proposant, pour les résultats numériques, non pas seulement la réponse exacte, mais un encadrement par quatre valeurs : deux valeurs vertes définissant la réponse correcte (entre les deux écarts-type) et deux oranges, plus larges, définissant une plage acceptable mais moins précise (voir la Figure 4). Dans le processus de validation (voir section suivante), obtenir des enseignants d'accepter de mettre une marge d'erreur de plus de 2% pour une longueur nécessite souvent des explications. La technologie, en imposant un format d'entrée des résultats attendus par la plateforme, est en soi un élément déclencheur de la réflexion, particulièrement dans sa version d'assistant d'épreuve proposant un intervalle par défaut.

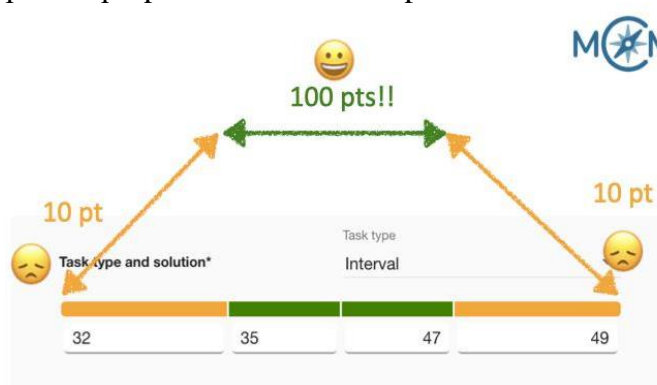


Figure 4. – Intervalles corrects et acceptables

<sup>1</sup> <http://mathcitymap.eu>

## 2. Une évaluation de la qualité des tâches

Le type de réponses par excellence d'un rallye est un nombre, issu de mesures, évaluant une certaine grandeur, masse d'un rocher, hauteur d'une tour, débit d'un robinet, aire d'un toit, âge d'un arbre... Fabriquer de telles questions n'est pas forcément aisé pour un enseignant et la participation au projet *MathCityMap* est également comprise comme contribuant à une formation continue sur la modélisation, médiée par la technologie. Par exemple, du côté de l'outil de création d'épreuve, un *assistant d'épreuve* permet de créer rapidement de telles questions génériques et autorise l'enseignant à se poser les bonnes questions, nous l'avons abordé dans la section précédente, sur l'idée d'une mesure comme une distribution et non pas comme un nombre isolé.

Le mouvement *Realistic Math Education* (Freudenthal, 1968) pose un horizon difficile à atteindre. Il nous enjoint de partir du réel pour explorer, manipuler, chercher, analyser, créer, évaluer, résumer et finalement intégrer ! Au contraire, bien des tâches proposées dans les rallyes sont en fait conçues par l'auteur comme des outils d'enseignement d'une notion, avant d'être des problèmes réels dont la notion mathématique serait la clef de résolution. Elles sont souvent simplement des exercices typiques, contextualisés en extérieur. Cette ludification de surface ne dure qu'un temps mais n'est pas à négliger dans la motivation des élèves. Cependant, le critère de qualité numéro 1 d'une tâche est son authenticité.

Voici les autres critères proposés à l'évaluation :

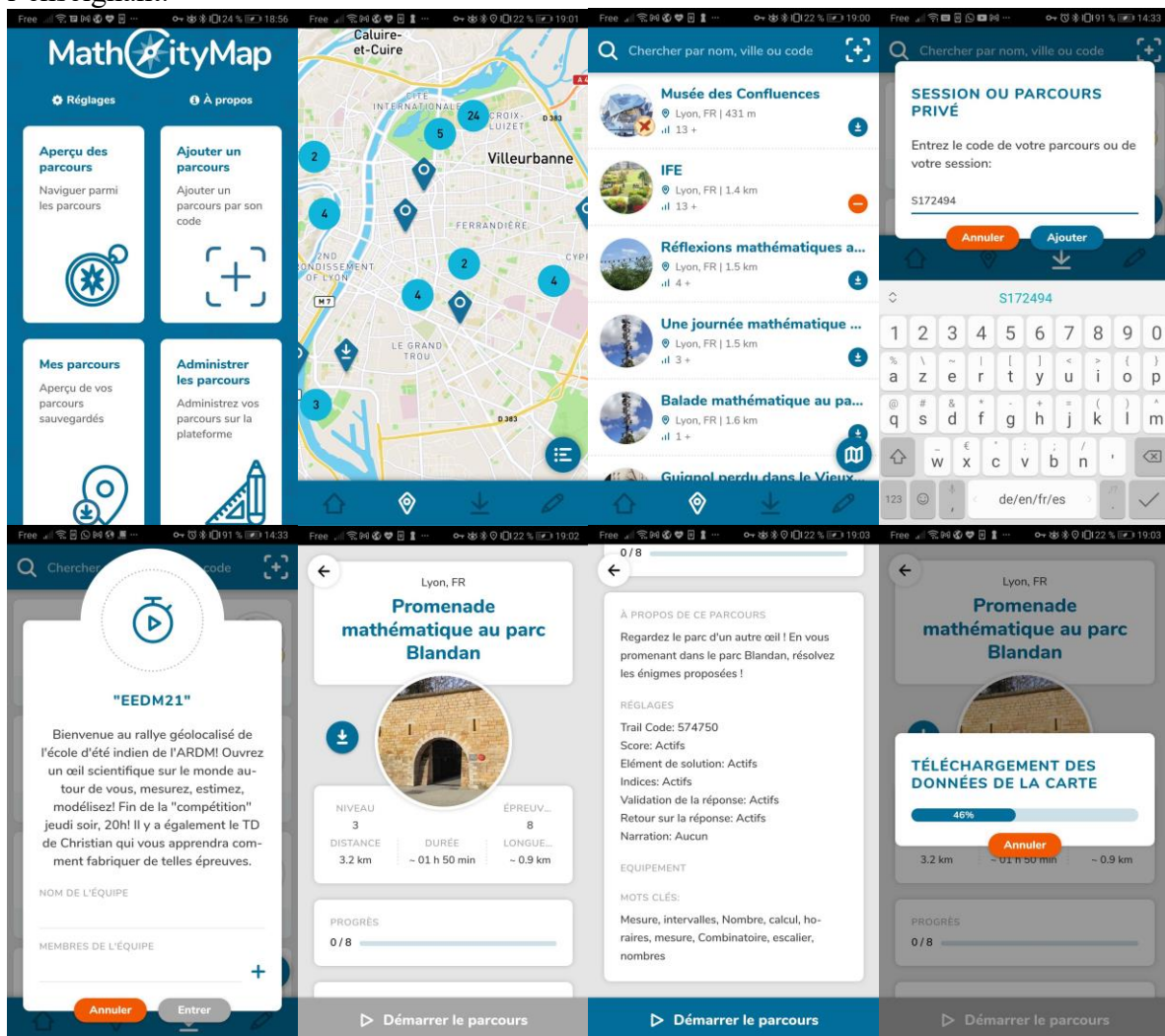
- Univoque : Le lieu, l'objet et le résultat attendu sont non ambigus (image, coordonnées GPS, mention de l'unité de mesure).
- Située et active : La résolution de l'épreuve nécessite de se rendre au lieu indiqué et de procéder à des observations/mesures et un calcul/raisonnement.
- Ouverte : Plusieurs procédures sont envisagées pour la résolution.
- Aidée : Au moins deux indices permettent de se lancer dans la résolution (sans donner la réponse).
- Au format adapté : Valeur exacte, intervalle avec marges d'erreur, question à choix multiple, phrase à compléter, vecteur de nombres, géolocalisation(s)...
- Documentée : Les éléments de solution indiquent le(s) modèle(s) choisi(s), la stratégie de résolution, les mesures effectuées et les calculs intermédiaires, le résultat final.
- Culturelle : Le champ « à propos de cet objet » apporte des informations sur l'intérêt pratique de l'épreuve et/ou sur l'intérêt artistique ou historique du lieu ou de l'objet.

Le système aide les rapporteurs à préparer leur rapport et propose différents types de messages génériques: sujet trop peu clair, artificiel, sans unité explicite (très courant), formule mal typographiée (il y a un éditeur de formule et on peut écrire également en LaTeX), la résolution peut se faire sans aller sur place ; sur la solution : l'explication est incorrecte, trop courte, l'intervalle donné est trop étroit (c'est le plus courant), trop large, alternative entre réponse exacte et intervalle ; sur les indices : trop explicites, trop généraux ou difficiles à comprendre.

## 3. L'expérience utilisateur

Dans le cadre qui est le nôtre, notre modèle d'utilisateur sera un groupe d'élèves d'une classe, accompagné de son enseignant ; mais ce pourra être un groupe d'amis, une famille de touristes, des visiteurs sur un site industriel... L'utilisateur télécharge et installe depuis le *store* Apple ou Android l'application *MathCityMap* (Figure 5). L'application (Figure 5.1) lui permet de localiser des parcours publics autour de soi à l'aide d'une carte interactive (Figure 5.2), dans une liste (Figure 5.3) ou bien d'entrer un code communiqué par l'auteur (Figure 5.4). Une brève présentation du parcours est proposée (Figure 5.5-7). On télécharge le parcours et on peut le

jouer hors ligne, hormis si on participe à une *classe numérique* synchronisée. On voit alors l'ensemble des épreuves ou seulement l'épreuve suivante, dans le cas où la progression est fixée par l'enseignant. On peut positionner le parcours dans un univers narratif tel que *les pirates* (Comparez Figure 5.9-10). Pour chaque épreuve, une photo, une localisation et un descriptif définissent la tâche à accomplir (Figure 5.11-12). Des indices (Figure 5.13) éclairent sur la voie à suivre, la réponse apportée peut être juste ou seulement acceptable (Figure 5.14-15). Une fois la question résolue, des éléments de solution permettent de comprendre ce qui était attendu (Figure 5.16). En mode *classe numérique*, on peut voir le nombre de points des équipes immédiatement au-dessus et en dessous de notre score. On peut aussi dialoguer avec l'enseignant.



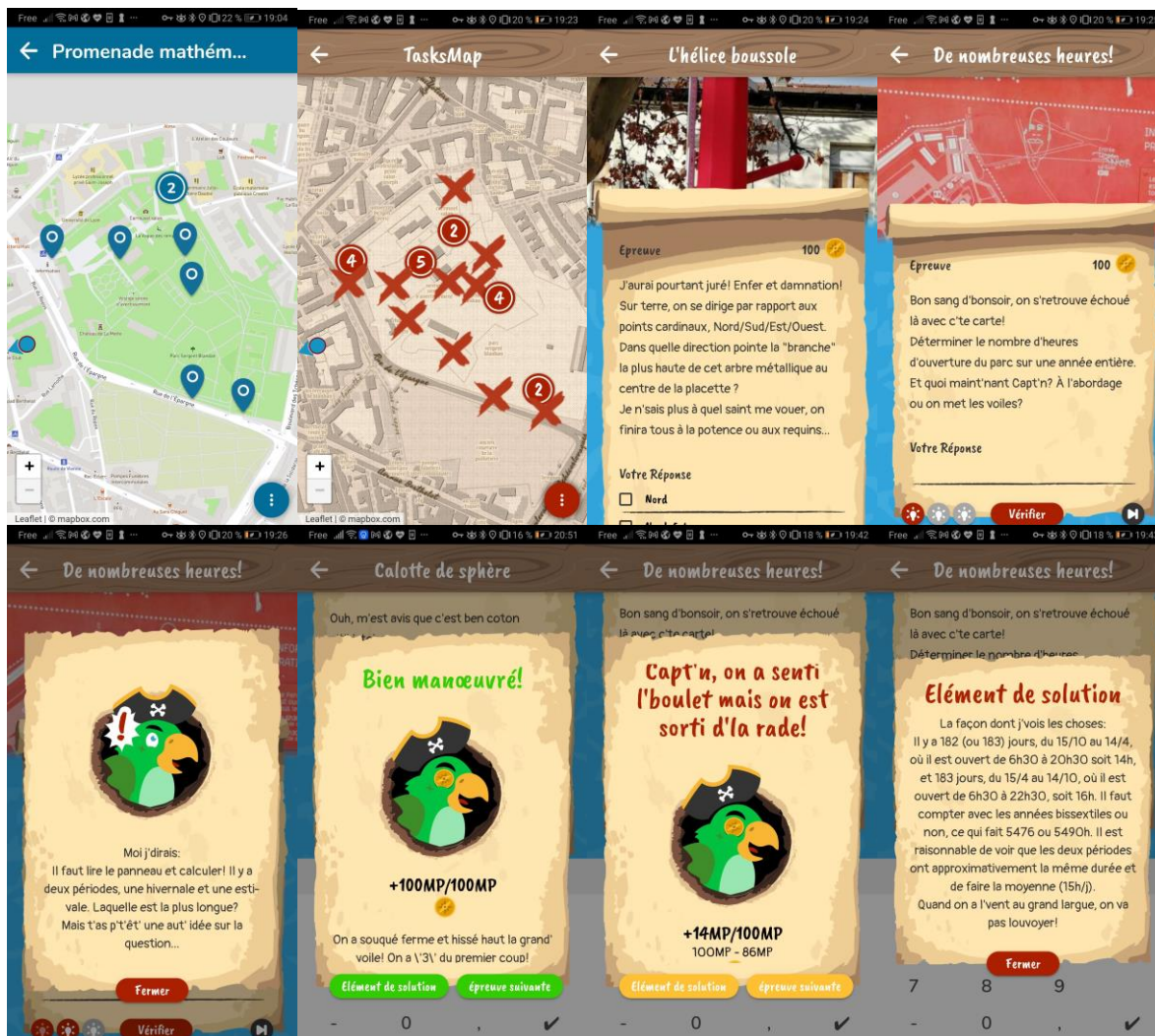


Figure 5. – L'application MathCityMap

#### 4. L'interface auteur

Pour créer des épreuves et les rassembler dans un parcours, il faut créer un compte utilisateur sur la plateforme <http://mathcitymap.eu> (conforme aux RGPD) et entrer dans le portail (Figure 6.1) où on peut administrer ses parcours et ses épreuves (Figure 6.2-3) ainsi que suivre les progrès des équipes en classe numérique (Figure 6.4-5).

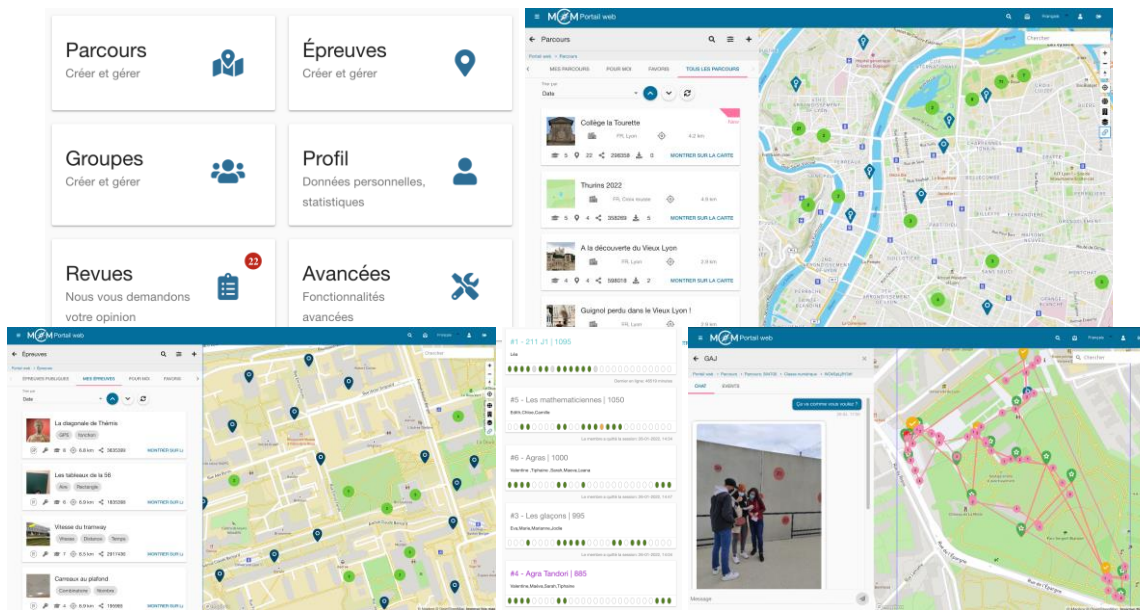


Figure 6. – Gestion des parcours, épreuves et classes numériques sur le portail MathCityMap

Pour créer un élément, on clique sur le bouton + en haut à droite de la colonne de gauche (Fig. 7). Si un parcours rassemble simplement des épreuves dans un certain ordre, les épreuves elles-mêmes peuvent être créées au travers de l’assistant d’épreuve (Fig. 7) ou bien en partant de rien. Les types de réponses possibles sont l’intervalle, la valeur exacte, le questionnaire à choix multiples, la phrase à trous, le vecteur de valeurs, exactes ou encadrées, un ensemble non ordonné et des données GPS, accessibles elles uniquement par l’assistant d’épreuve.

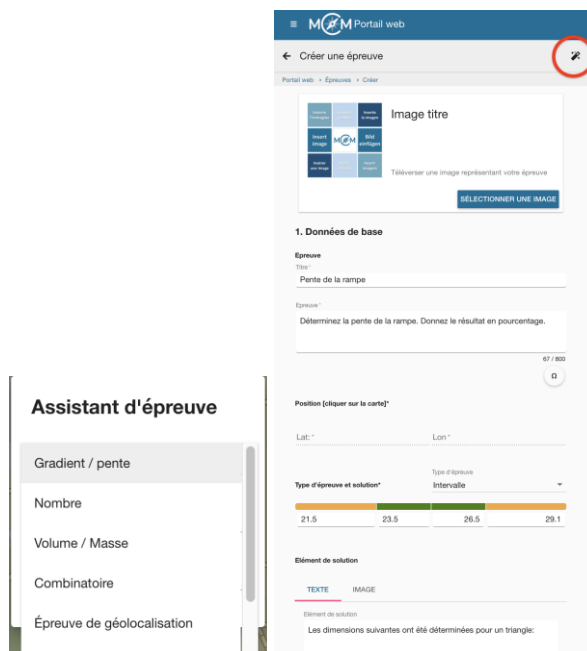


Figure 7. – Création d’épreuves par l’assistant. Il suffit de contextualiser avec un titre, une image, une géolocalisation et des mesures minimales

## 5. Conclusion

Le système *MathCityMap* comprend une interface auteur en ligne et une application sur smartphone/tablette. Il permet de mettre en place des rallyes mathématiques géolocalisés. Pour l'enseignant, la construction d'un rallye peut se comprendre comme participant à une formation continue autour de la modélisation, médiée par la technologie. En effet, il faut se poser les bonnes questions, particulièrement sur ce qu'est une mesure, ce qu'est une épreuve de qualité, mettre en lumière les implicites, tenter d'identifier des problèmes authentiques et réalistes plutôt que de contextualiser en surface des concepts scolaires.

Ce système a été créé par l'Université Goethe de Francfort autour de Matthias Ludwig. Deux projets européens, MoMaTrE et Masce3, ont permis de créer du contenu et de former des enseignants. Un MOOC, organisé par l'Université de Catania en Italie a rassemblé, de mars à avril 2021, une grande communauté d'enseignants de toute l'Europe, 236 enseignants ont été actifs et 39% ont finalisé la formation, ce qui est un très bon taux.

### DESCRIPTION DIDACTIQUE DE RESSOURCES D'ENSEIGNEMENT : POLE ONTOLOGIQUE ET MODELE PRAXEOLOGIQUE DE REFERENCE

*Séance de TD animée par Sébastien Jolivet*

#### 1. Introduction

Dans ce texte nous revenons sur la description didactique de ressources d'apprentissage. La séance de TD a débuté par une mise en situation durant laquelle il a été demandé aux participants de décrire des ressources présentées dans les deux séances précédentes par Xavier Nicola (apprentissage de la géométrie dans un environnement de réalité virtuelle) et Christian Mercat (dispositif *MathCityMap*). Il n'a, volontairement, été donné aucune précision ou consigne particulière ni sur la manière de procéder, ni sur le résultat attendu, à l'exception du fait que c'est une description *didactique* qui est demandée. Cette mise en situation introductive a permis d'identifier quelques questions : qu'est-ce exactement que la ressource ? de quels aspects veut-on rendre compte ? pourquoi ? à qui est destinée la description ?

Dans le prolongement de cette introduction, un temps d'activité a été organisé pour de la description de ressources plus « usuelles » du type exercices de mathématiques, autour des descripteurs de ressources présentés dans (Jolivet, 2018a).

Ces deux temps ont permis de (re)mettre en évidence quelques éléments relatifs aux difficultés posées par la description didactique de ressources : le besoin de lier la ressource à un ou des curriculums ; la tendance forte à décrire la ressource selon son adéquation, supposée, à un ou des usages ; l'absence d'outils ou de référentiels partagés pour procéder à une telle description au-delà des informations de type bibliothécaire (auteur, type de document, date de production, version, etc.).

Dans cette contribution nous revenons sur la manière dont nous abordons ces grands enjeux en nous appuyant sur trois exemples issus de nos travaux : la description d'exercices de mathématiques et leur mise en relation avec une intention didactique (Jolivet, 2018b) ; la production d'exercices de mathématiques et leur organisation dans des parcours d'apprentissage pour la plateforme d'apprentissage MindMath (Jolivet et al., 2021) ; la conception et la recommandation de rétroactions épistémiques pour un environnement numérique d'apprentissage (Jolivet et al., 2022b).

Pour ces trois situations nous avons mis en œuvre une approche qui présente deux caractéristiques communes : la première est de commencer par décrire ce qu'est la ressource pour ensuite envisager ce à quoi elle peut servir. Cette approche, inspirée par les travaux de Le

Moigne (2006) relatifs à la description d'un objet, est motivée et précisée plus bas. La seconde caractéristique est d'appuyer la description sur une modélisation du savoir. Dans nos travaux elle est réalisée à l'aide de modèles praxéologiques de référence construits en exploitant le cadre T4-TEL (Chaachoua, 2018), cette modélisation pouvant éventuellement être représentée informatiquement dans une ontologie (Gruber, 1993) comme présenté dans le TD consacré à MindMath lors de cette université d'été (Grugeon-Allys et al., 2023). Dans ce texte nous ne (re)présentons pas le cadre théorique de la TAD et l'approche praxéologique développée en son sein, ni le prolongement de cette approche praxéologique qu'est T4-TEL, le lecteur qui n'est pas familier avec ces éléments pourra se référer aux diverses références qui orientent à la fois vers les fondements théoriques et vers des cas d'usages.

## 2. Enjeux liés à la description didactique d'une ressource

Dans le support de soutenance de son HDR, Trgalová (2020) a présenté le diagramme repris dans la Figure 8. Il permet d'identifier deux grandes approches relatives aux ressources numériques (et plus largement de ressources d'enseignement) : une première qualifiée d'*approche e-learning* que l'on pourrait aussi qualifier d'*approche bibliothécaire* et une seconde nommée *approche didactique*. Dans nos différents travaux le défi a été de se placer à l'intersection de ces deux approches en articulant à la fois des enjeux liés à la description d'un volume significatif de ressources tout assurant une qualité didactique de la description permettant ensuite de lier description de la ressource et usages possibles.

Deux autres éléments sont fondamentaux lorsqu'il s'agit de décrire des ressources éducatives. D'une part la description produite ne doit pas être dépendante de la personne réalisant cette description (appelée annotateur ensuite), d'autre part elle doit permettre de préciser l'adéquation, ou non, de la ressource décrite à un ou plusieurs curriculums. Concernant la dépendance à l'annotateur nous avons constaté dans (Jolivet, 2018b) l'absence d'une base partagée de descripteurs, que l'on pourrait qualifier de didactiques, et qui pourrait servir de référence lors de la description de ressources (élément nécessaire mais non suffisant, pour s'assurer de la similarité de la description quelle que soit la personne réalisant cette description). Ce constat nous a amené à proposer une liste de descripteurs didactiques de ressources éducatives en mathématiques (Jolivet, 2018a) qui a été exploitée dans la première partie du TD. Par ailleurs, le modèle praxéologique de référence permet de fournir une référence, à la fois externe à l'annotateur et non assujettie à une institution particulière, lors du processus de description.

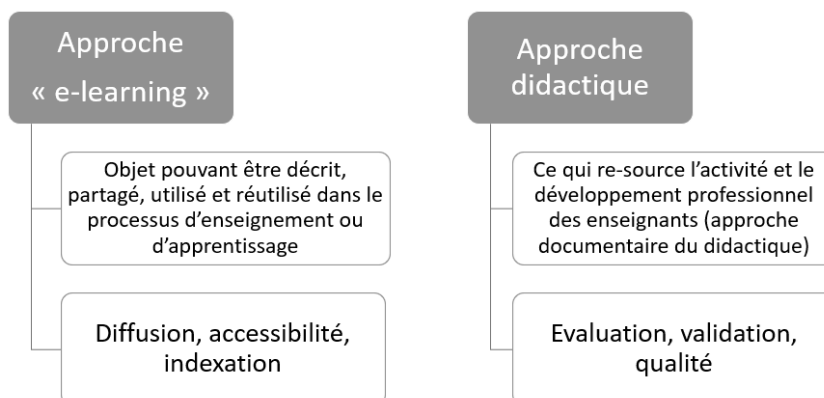


Figure 8. – Extrait support de soutenance HDR (Trgalová, 2020)

### 3. Description didactique d'une ressource, principaux enjeux

Les grands enjeux liés à la description didactique d'une ressource sur lesquels nous revenons sont : 1) les informations didactiques contenues dans la description, 2) l'adéquation que la description permet d'établir entre la ressource et différents curriculums, 3) la possibilité de caractériser des usages potentiels de la ressource à partir de sa description, 4) la représentation et l'exploitation informatique possible des ressources décrites. Ils sont motivés et positionnés au regard de l'état de l'art dans (Jolivet et al., 2022a).

Le deuxième enjeu est un facteur important de la pérennité de la description de la ressource dans la mesure où il participe largement au coût de son actualisation en cas de modification d'un curriculum, nous revenons brièvement dessus dans la section suivante. Les enjeux un, trois et quatre influent directement sur l'utilité de la description et la diversité des utilisations qui peuvent en être faite. Dans la section suivante nous présentons l'approche que nous mettons en œuvre pour aborder le travail de description des ressources.

### 4. Décrire une ressource selon son pôle ontologique

Comme constaté dans l'introduction au travers de l'activité donnée aux participants au TD, et d'une manière plus générale, lorsque l'on demande à quelqu'un de décrire une ressource d'apprentissage, la première réponse porte fréquemment sur les usages possibles, et même le plus souvent sur l'adéquation de la ressource à l'usage qui correspond aux préoccupations du moment de la personne interrogée. Or cette approche « fige » la description de la ressource et ne permet pas d'appréhender la diversité des usages qui peuvent lui être associés. Ainsi sur la Figure 9 on peut décrire l'objet « chaise » soit comme un objet composé de quatre pieds, d'une assise et d'un dossier, soit par un ou plusieurs des divers usages que l'on peut lui associer (jouer aux chaises musicales, faire du sport, s'asseoir ou monter une barricade). Or, si la première description, qui répond à la question « qu'est cet objet ? », permet d'envisager et justifier l'adéquation de l'objet aux différentes fonctions envisagées ensuite, l'entrée par un usage donné a tendance à enfermer la description, et donc l'objet, dans cet usage.

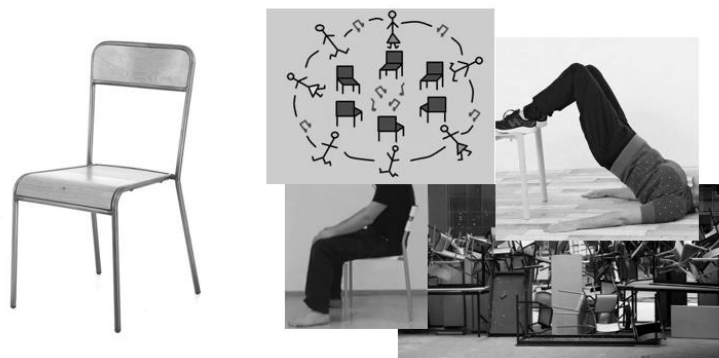


Figure 9. – Chaise, nature et fonctions

D'une manière générale, Le Moigne (2006) propose de définir un objet selon trois pôles : ontologique, fonctionnel et génétique. Le premier permet de dire ce que l'objet « est », le second ses usages possibles et le troisième ce qu'il devient. Dans nos travaux nous nous intéressons essentiellement aux deux premiers et avons fait le choix de commencer par décrire la ressource selon son pôle ontologique pour ensuite envisager une ou plusieurs fonctions possibles pour la ressource.

### *5. Description didactique d'une ressource, quelques propositions*

Dans cette section nous illustrons les réponses apportées aux quatre enjeux évoqués précédemment.

### *6. Description d'une ressource et adéquation au curriculum*

Un premier élément permettant de proposer une description didactique d'une ressource est la caractérisation du ou des savoirs mobilisés dans cette ressource. Pour cela nous avons, dans les trois projets évoqués, exploité des modèles praxéologiques de référence (MPR, Bosch & Gascón, 2005), créés ou adaptés de modèles déjà existants, en mobilisant en particulier la notion de variable introduite par Chaachoua et Bessot (Chaachoua & Bessot, 2019). Cette approche nous permet aussi de gérer la question de la relation avec un ou des curriculums. En effet, la description d'une ressource est un processus coûteux (en temps, en expertise...) et doit notamment permettre de définir son adéquation à un ou plusieurs curriculums. Pour cela Van Assche (2007) propose différentes approches. De notre côté nous avons retenu celle où il existe un pivot entre les différents curriculums, ce rôle de pivot étant attribué au modèle praxéologique de référence. Le principe est que chaque élément du MPR (type de tâches, technique, élément du logos) est associé à un ou plusieurs curriculums. Concernant les types de tâches, qui sont décrits à l'aide d'un système de variables et valeurs de variables conformément au modèle T4-TEL, c'est chaque valeur de variable qui est associée à un ou plusieurs curriculums (l'utilisation de ce système pour calculer la conformité d'un type de tâches donné à un curriculum est détaillé dans (Jolivet et al., 2021). Si le coût d'initialisation est significatif, il permet de prendre en compte une évolution de curriculum pour un coût modéré puisqu'il ne faut pas redécrire chaque ressource mais « simplement » actualiser dans le MPR à partir duquel les ressources sont décrites. Nous détaillons cette approche dans (Jolivet et al., 2022a). Nous revenons dans la partie suivante sur les exploitations du modèle praxéologique de référence dans différents contextes et objectifs.

### *7. Description d'une ressource, rôle donné au modèle praxéologique de référence*

La description didactique d'une ressource peut s'inscrire dans deux grandes situations : décrire des ressources déjà existantes ou décrire des ressources en vue de permettre leur production. La première situation est celle que nous avons explorée dans notre thèse en décrivant des exercices de mathématiques issus de manuels scolaire, la seconde est celle mise en œuvre dans le projet MindMath pour permettre d'une part la production d'exercices et d'autre part de rétroactions épistémiques. Dans tous les cas nous avons exploité des modèles praxéologiques de référence représentés à l'aide du cadre T4-TEL. Cette approche présente différents intérêts :

- Fournir une référence commune, aux annotateurs dans le cas de la description des exercices, aux différents acteurs de la production des exercices dans le cas de la génération de ressources.
- Disposer d'une référence fondée épistémologiquement qui permet de décrire les savoirs mis en jeu dans les ressources.

Plus précisément, dans le cadre du travail de thèse, le MPR fournissait un référentiel de description des savoirs en jeu dans les ressources. Afin de préciser la manière dont l'annotateur devait relier tâche et MPR, nous avons introduit la notion de type de tâches optimum, dans le sens du type de tâches le plus « précis » contenu dans le MPR et auquel la tâche appartient.

Dans le cadre du travail réalisé dans le projet MindMath plusieurs potentialités des MPR représentés par T4-TEL ont été exploitées et d'autres ajoutées. Tout d'abord, en accord avec les perspectives introduites par Chaachoua et Bessot lors de l'introduction des variables dans le modèle praxéologique, certaines variables se sont vu attribuer des fonctions particulières, en

particulier rendre compte de la complexité d'une tâche. Deuxièmement, comme il s'agissait de rendre fonctionnel le modèle pour permettre la génération effective d'exercices, nous avons introduit la notion de famille de tâches comme étant un type de tâches au sein duquel les tâches sont générées à de l'aléatoire près au sein d'un ensemble de valeurs (valeurs des coefficients d'une équation, position d'une figure en géométrie...). Troisièmement, afin de pouvoir mettre en relation les ressources et l'activité des élèves avec ces ressources, le MPR a été enrichi par des technologies erronées.

Les éléments contenus dans le MPR ont aussi été exploités comme moyen de décrire, une partie, du contenu de rétroactions épistémiques proposées dans un environnement numérique d'apprentissage. Un apport significatif de l'exploitation d'un même moyen pour décrire des ressources différentes (exercices et rétroactions) dans un même cadre est de pouvoir opérer plus aisément des liens entre ces ressources.

Dans cette section nous avons brièvement présenté l'utilisation d'un MPR pour décrire des ressources, que ce soit des ressources déjà existantes ou des ressources à produire. Dans la section suivante nous évoquons l'utilisation de cette description du pôle ontologique pour aller vers le pôle fonctionnel des ressources.

#### *8. Du pôle ontologique au pôle fonctionnel de la ressource*

Dans nos travaux nous avons étudié trois situations mettant en jeu des pôles fonctionnels répondant à différents besoins d'utilisation des ressources. Nous revenons brièvement sur deux d'entre elles.

#### *9. Exercices de mathématiques et intentions didactiques*

Dans le cadre de notre travail de thèse nous avons considéré, comme contexte d'utilisation des ressources décrites, un enseignant devant sélectionner des exercices pour une situation d'enseignement. Pour spécifier les caractéristiques auxquelles la ressource doit répondre, nous avons précisé la notion d'intention didactique d'un enseignant (Jolivet et al., 2022a). Dans cette situation nous exploitons la description de la ressource qui permet à la fois de préciser les savoirs en jeu dans la ressource mais aussi la présence dans la ressource de relations entre les tâches de l'exercice (de type étayage).

#### *10. Rétroactions épistémiques et décisions*

La décision des rétroactions dans un environnement numérique d'apprentissage est un processus qui se réalise dans un contexte présentant de très nombreuses incertitudes : la connaissance de l'apprenant, de son rapport au savoir travaillé, de la nature et de la cause de son/ses erreurs, etc. La didactique ne fournit pas non plus de réponse précise à une question du type « quelle est la bonne rétroaction pour un élève donné dans un contexte donné ? ». Dans le cadre de nos travaux (Jolivet et al., 2022b) nous avons articulé l'expertise humaine des didacticiens et l'intelligence artificielle (IA). Dans ce cadre la description ontologique de la rétroaction permet de caractériser la nature du contenu de la rétroaction, notamment comme appartenant au bloc praxique ou au bloc du logos. Diverses hypothèses didactiques, qui mettent en relation un contenu de rétroaction, fondée sur la description du pôle ontologique, et une situation donnée (profil de l'apprenant, erreur, etc.), permettent d'aider à l'initialisation des algorithmes d'IA.

### *11. Conclusion*

Dans ce texte nous avons explicité une approche relative à la description didactique de ressources d'apprentissage de deux types : exercices de mathématiques et rétroactions épistémiques. Elle est fondée sur le choix de décrire tout d'abord le pôle ontologique, pour ensuite envisager le pôle fonctionnel de la ressource. Cette approche a été instanciée sur trois contextes différents permettant d'explorer à la fois la question de la description de ressources déjà existantes, et celle de la description en vue de produire des ressources. Disposer d'un modèle praxéologique de référence joue un rôle crucial dans ce processus de description. Il permet à la fois d'intégrer les différents résultats issus des travaux de la didactique, de fournir une référence externe pour l'annotateur des ressources et de définir un élément pivot entre les différents curriculums au regard desquels il est pertinent de positionner la ressource.

La description de la ressource est ensuite exploitée pour déterminer la pertinence de la ressource par rapport à une intention didactique d'un enseignant, pour concevoir des parcours d'apprentissage et pour aider à la décision de rétroactions dans un environnement d'apprentissage.

Pour chacune de ces situations, les travaux engagés peuvent être poursuivis et approfondis. Un enjeu transversal est de parvenir à la définition de processus permettant de rendre plus efficace la production des MPR, d'homogénéiser les choix pour les représenter à l'aide de T4-TEL afin notamment de permettre leur représentation informatique dans des ontologies et d'augmenter ainsi les potentialités offertes par leur exploitation.

## RÉFÉRENCES

- ALDON, G., ARZARELLO, F., CUSI, A., GARUTI, R., MARTIGNONE, F., ROBUTTI, O., ... & SOURY LAVERGNE, S. (2013). The Meta-didactical transposition: A model for analysing teacher education programs. In *PME37 Conference* (Vol. 1, pp. 97-124). PME.
- ALDON, G. (2018). *Le rallye mathématique dans la classe : Un jeu très sérieux !* Canopé éditions/IREM de Lyon.
- ALLEN, M. W., & SITES, R. (2012). *Leaving ADDIE for SAM: An agile model for developing the best learning experiences*. American Society for Training and Development.
- ARTIGUE, M. (2020). Méthodologies de recherche en didactique des mathématiques : Où en sommes-nous ? Research Methodologies in didactic of mathematics: Where Are We? *Educação Matemática Pesquisa : Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, 22(3), 25-64
- ARZARELLO, F., PAOLA, D., ROBUTTI, O., & SABENA, C. (2009). Gestures as semiotic resources in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 70(2), 97-109.
- ASTOLFI, J. P. (1993). Trois paradigmes pour les recherches en didactique. *Revue française de pédagogie*, 5-18.
- BLANE, D. C., & CLARKE, D. (1984). A mathematics trail around the city of Melbourne. Monash Mathematics Education Centre, 169-181.
- BLUM, W., & INTERNATIONAL COMMISSION ON MATHEMATICAL INSTRUCTION (Éds.). (2006). *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study* (1st ed). Springer.
- BOSCH, M., & GASCON, J. (2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. In A. Mercier & C. Margolinas (Éds.), *Balises pour la didactique des mathématiques : Cours de la 12e école d'été de didactique des mathématiques* (p. 107-122). La Pensée Sauvage, Grenoble.
- CAHYONO, A. N., & LUDWIG, M. (2019). Teaching and learning mathematics around the city supported by the use of digital technology. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 15(1).
- CHAACHOUA, H. (2018). T4TEL : Un cadre de référence pour la formalisation et l'extension du modèle praxéologique. *Actes du 6e congrès pour la Théorie Antrophologique du Didactique*. Autrans.
- CHAACHOUA, H., & BESSOT, A. (2019). La notion de variable dans le modèle praxéologique. *Educação Matemática Pesquisa : Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, 21, 234-247.
- DESGAGNE, S. (1997). Le concept de recherche collaborative : l'idée d'un rapprochement entre chercheurs universitaires et praticiens enseignants. *Revue des sciences de l'éducation*, 23(2), 371-393.
- DESIGN-BASED RESEARCH COLLECTIVE. (2003). Design-based research: An emerging paradigm for educational inquiry. *Educational Researcher*, 32(1), 5-8.
- ENGLISH, L., HUMBLE, S., & BARNES, V. E. (2010). Trail blazers. Learning maths outside the classroom. *Teaching Children Mathematics*, 16(7), 402-412.
- GRUBER, T. R. (1993). A translation approach to portable ontology specifications. *Knowledge Acquisition*, 5(2), 199-220. <https://doi.org/10.1006/knac.1993.1008>
- GRUGEON-ALLYS, B., JOLIVET, S., LESNES, E., LUENGO, V., & YESSAD, A. (2023). MindMath : Didactique des mathématiques et intelligence artificielle dans un EIAH. *Actes de la 21e école d'été de didactique des mathématiques*.
- GURJANOW, I., OLIVEIRA, M., ZENDER, J., SANTOS, P. A., & LUDWIG, M. (2019). Shallow and deep gamification in mathematics trails. In Sobke H., Gentile M., & Allegra M. (Eds.), *Lect. Notes Comput. Sci.: Vol. 11385 LNCS* (p. 374). Springer Verlag.
- JOLIVET, S. (2018a). Descripteurs didactiques d'exercices de mathématiques : Catégorisation ; utilité et utilisabilité d'un modèle. *Actes du colloque EMF 2018*, 737-745.
- JOLIVET, S. (2018b). *Modèle de description didactique de ressources d'apprentissage en mathématiques, pour l'indexation et des services EIAH* [Thèse de doctorat, Université Grenoble Alpes]. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-02079412/document>
- JOLIVET, S., LESNES-CUISINIEZ, E., & GRUGEON-ALLYS, B. (2021). Conception d'une plateforme d'apprentissage en ligne en algèbre et en géométrie : Prise en compte et apports de modèles didactiques. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 26, 117-156.
- JOLIVET, S., CHAACHOUA, H., & DESMOULINS, C. (2022a). Modèle de description didactique d'exercices de mathématiques. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 42(1), 53-102.
- JOLIVET, S., YESSAD, A., MURATET, M., LESNES-CUISINIEZ, E., GRUGEON-ALLYS, B., & LUENGO, V. (2022b). Rétroactions dans un environnement numérique d'apprentissage : Modèle de description et décision. *STICEF*, 29(2).
- KRUGER, J., & DUNNING, D. (1999). Unskilled and unaware of it : How difficulties in recognizing one's own incompetence lead to inflated self-assessments. *Journal of Personality and Social Psychology*, 77(6), 1121-1134. <https://doi.org/10.1037//0022-3514.77.6.1121>
- LE MOIGNE, J.-L. (2006). *La théorie du système général. Théorie de la modélisation*. (5e édition). Presses Universitaires de France. <http://www.mcxapc.org/inserts/ouvrages/0609tsgtm.pdf>
- MERCAT, C., & BERGER, P. (2020). Man is the Measure of all Things—Math Trails in Lyon. In M. Ludwig (Éd.), *Research on Outdoor STEM Education in the digital Age. Proceedings of the ROSETA Online Conference in June 2020* (1st éd., p. 127-138). WTM-Verlag.
- MARLOT, C., TOULLEC-THÉRY, M., & DAGUZON, M. (2017). Processus de co-construction et rôle de l'objet biface en recherche collaborative. *Phronesis*, 6(1), 21-34.
- NEMIROVSKY, R., BORBA, M., DIMATTIA, C., ARZARELLO, F., ROBUTTI, O., SCHNEPP, M., CHAZAN, D., RASMUSSEN, C., OLSZEWSKI, J., & DOST, K. (2004). *PME Special Issue: Bodily activity and imagination in mathematics learning*. Springer.
- NICOLAS, X., & TRGALOVA, J. (2019). A virtual environment dedicated to spatial geometry to help students to see better in space. In U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen, & M. Veldhuis (Éds.), *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (Vol. TWG16, Numéro 22). Freudenthal Group

Vandebrouck, F., Emprin, F., Ouvrier-Bufferet, C. & Vivier, L. (dir.) (2023). Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques - Preuve, Modélisation et Technologies Numériques. Volume des ateliers des actes de EE21.

- PERRIN-GLORIAN, M.-J., MATHÉ, A. C., & LECLERCQ, R. (2013). Comment peut-on penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 à 15 ans. *Le jeu sur les supports et les instruments. Repères-IREM*, 90, 5-41.
- RADFORD, L. (2009). Why do gestures matter? Sensuous cognition and the palpability of mathematical meanings. *Educational Studies in Mathematics*, 70(2), 111-126.
- SANCHEZ, É., & MONOD-ANSALDI, R. (2015). Recherche collaborative orientée par la conception. Un paradigme méthodologique pour prendre en compte la complexité des situations d'enseignement-apprentissage. *Éducation et didactique*, 9-2, 73-94.
- SPERANO, I., ROBERGE, J., BÉNECH, P., TRGALOVA, J., & ANDRUCHOW, R. (2019). Exploring new usages of journey maps: Introducing the pedagogical and the project planning journey maps. In S. Bagnara et al. (Eds.), *Proceedings of the 20th Congress of the International Ergonomics Association (IEA 2018)* (Vol. VII: Ergonomics in Design, Design for All, Activity Theories for Work Analysis and Design, Affective Design, pp. 964-982). Springer International Publishing.
- TRGALOVA, J. (2020). *Ressources numériques pour l'éducation mathématique. Conception, évaluation, qualité et appropriation* [HDR]. Université Claude Bernard Lyon 1 (UCBL).
- TROMPETTE, P., & VINCK, D. (2009). Retour sur la notion d'objet-frontière. *Revue d'anthropologie des connaissances*, 3(1), 5-27.
- VAN ASSCHE, F. (2007). Linking Learning Resources to Curricula by using Competencies. *Proceedings of the First International Workshop on Learning Object Discovery & Exchange*, 80-91. <http://ceur-ws.org/Vol-311/paper11.pdf>



## MINDMATH : DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES ET INTELLIGENCE ARTIFICIELLE DANS UN EIAH

Brigitte Grugeon-Allys \*, Sébastien Jolivet \*\*, Elann Lesnes \*\*\*, Vanda Luengo \*\*\*\*, Amel Yessad\*\*\*\*

### RÉSUMÉ

Ce TD s'inscrit dans la thématique "technologies numériques" de l'école d'été, il est le fruit de la collaboration de chercheurs et chercheuses en didactique des mathématiques et en informatique. Les trois séances portent sur le projet MindMath qui vise l'élaboration d'un EIAH à destination d'élèves de collège en algèbre et en géométrie. Lors de la première séance, nous avons présenté les modèles didactiques construits pour représenter le savoir, l'apprenant, les tâches et les parcours d'apprentissage dans l'EIAH. Il a été proposé aux participants d'exploiter ces modèles pour concevoir des parcours. Lors de la deuxième séance, le travail a porté sur le modèle informatique et didactique des rétroactions envoyées à l'apprenant travaillant dans l'EIAH MindMath. Les participants ont eu l'occasion de tester le modèle de description des rétroactions. La troisième séance a été l'occasion de présenter l'ontologie construite pour articuler les différents objets créés dans la perspective de faire évoluer la plateforme et de communiquer entre les différents partenaires du projet. Enfin, Philippe R. Richard a proposé son regard sur ce travail relativement à son expérience et à son approche théorique.

Mots clefs : EIAH, modélisation didactique, modélisation informatique, rétroactions, parcours d'apprentissage

### ABSTRACT

This TD is part of the "digital technologies" theme of the summer school and is the result of the collaboration of researchers in mathematics education and computer science. The three sessions focus on the MindMath project which aims at developing a learning environment for middle school students in algebra and geometry. In the first session, we presented the didactic models built to model the knowledge, the learner, tasks and learning paths in the learning environment. It was proposed to the participants to exploit these models to design learning paths. In the second session, the work focused on the computational and didactic model of the feedback given to the learner working in MindMath. Participants had the opportunity to test the feedback description model. The third session was the opportunity to present the ontology built to articulate the different objects created in the perspective of evolving the platform and communicating between the different project partners. Finally, Philippe R. Richard proposed his point of view on this work in relation to his experience and his theoretical approach.

Key words: Technology Enhanced-Learning, didactic modeling, computer modeling, feedbacks, learning path

### INTRODUCTION

Ce TD s'inscrit dans la thématique "technologies numériques" de l'école d'été et plus précisément dans le cadre d'une réflexion sur l'articulation entre la didactique des mathématiques et l'informatique, notamment l'intelligence artificielle (IA), pour la conception d'un EIAH (Environnement Informatique pour l'Apprentissage Humain). La délimitation de la part de l'apprentissage qui peut être laissée à un tel environnement n'est pas simple à déterminer, elle est par exemple discutée dans (Jolivet & Grugeon-Allys, 2022). Dans ce texte nous qualifierons MindMath d'EIAH ou d'ENA (Environnement Numérique pour l'Apprentissage) de manière indistincte, essentiellement pour limiter les répétitions.

Il s'agit, au travers du cas d'étude MindMath, d'étudier divers aspects liés à la conception d'un EIAH du type plateforme d'entraînement aux mathématiques (algèbre et géométrie) au collège, qui ne remplace pas un enseignement visant la régulation des apprentissages des élèves.

Nous nous concentrons sur trois aspects fondamentaux dans le projet MindMath :

- les fondements didactiques d'un tel environnement, nécessaires pour aborder la conception des exercices, leur organisation en parcours d'apprentissage et le contenu de rétroactions adaptatives ;
- la modélisation et la décision des rétroactions avec les apports potentiels de l'IA, apprentissage par renforcement, pour cette décision ;

\* LDAR, Université Paris-Est Créteil

\*\* LDAR, Université de Paris et LIP6, Sorbonne Université

\*\*\* LDAR, Université de Rouen Normandie

\*\*\*\* LIP6, Sorbonne Université

- la représentation du savoir dans une ontologie et ses exploitations.

Ce texte se conclut par une réaction de Philippe R. Richard (Université de Montréal) et des perspectives de recherche.

## SEANCE 1 — CONCEPTION D’UN EIAH : ARTICULATION ENTRE DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES ET IA

La première séance du TD portait sur les choix de modélisation didactique réalisés pour la conception de la plateforme MindMath. Nous les présentons dans cette partie.

### 1. *Éléments théoriques*

La conception de la plateforme MindMath se situe dans la continuité des recherches menées autour du logiciel de diagnostic *Pépité* en algèbre (Delozanne et al., 2010 ; Grugeon-Allys et al., 2012). Nous présentons brièvement le cadre théorique et nous faisons évoluer les modèles construits dans ce cadre afin de pouvoir prendre en compte le domaine géométrique comme nous le verrons par la suite.

Nous nous plaçons dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1999). Toute activité humaine peut être décrite à partir de tâches  $t$  qui relèvent de types de tâches  $T$  et qui sont résolues par au moins une technique  $\tau$ , justifiée par un discours rationnel appelé technologie  $\theta$ , lui-même justifié par une théorie  $\Theta$ . Ces éléments forment une praxéologie  $[T ; \tau ; \theta ; \Theta]$  dite ponctuelle.

Dans l’enseignement, les praxéologies ponctuelles ne fonctionnent pas seules, elles s’agrègent autour d’une même technologie pour former une praxéologie locale. Ces praxéologies locales peuvent à leur tour s’agréger autour d’une même théorie pour former une praxéologie régionale. Enfin, les praxéologies régionales peuvent s’agréger en une praxéologie globale qui forment une discipline (ici, les mathématiques).

### *Modélisation didactique du savoir*

L’élève apprend donc dans une institution dont les programmes fixent le savoir visé en termes de praxéologies, en particulier les technologies. De plus, un élève de collège a étudié dans plusieurs classes avec différents enseignants et s’est construit un rapport au savoir relativement aux différentes praxéologies mathématiques rencontrées. Bosch et Gascón (2005) en déduisent la nécessité de définir une praxéologie de référence pour analyser la transposition didactique. C’est ce que nous désignerons comme le Modèle Praxéologique de Référence (MPR).

Un MPR permet de décrire les aspects épistémologiques des objets de savoir d’un domaine mathématique et les praxéologies associées à un rapport idoine au savoir visé relativement aux institutions considérées. Ainsi, nous construisons un MPR pour chacun des domaines pris en compte dans la plateforme MindMath (algèbre et géométrie à ce jour), en enrichissant les aspects épistémologiques des objets de savoir à partir de résultats de travaux issus d’approches cognitive et sémiotique. Pour implémenter ces modèles du savoir dans le logiciel, nous travaillons dans le cadre T4TEL (Chaachoua, 2018) que nous exposerons dans la partie consacrée au modèle des tâches.

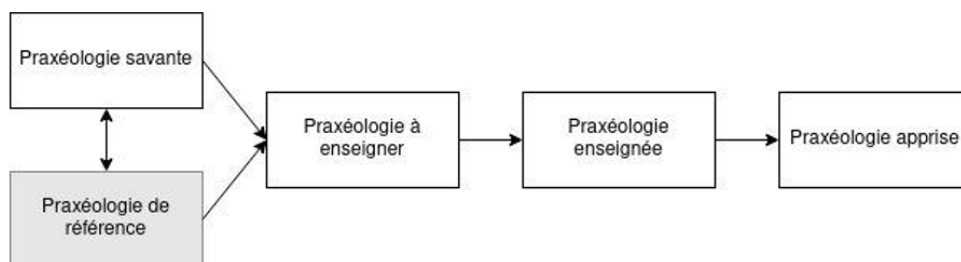


Figure 1. – Outil d'analyse de la transposition didactique (Bosch & Gascón, 2005).

### Modélisation didactique de l'apprenant

Dans une institution donnée, à un temps donné, l'élève peut être confronté à un décalage entre son rapport personnel au savoir et le rapport au savoir attendu dans cette institution. Nous définissons ainsi les besoins d'apprentissage comme « ce qui est nécessaire de travailler pour faire évoluer son rapport personnel actuel vers un rapport personnel idoine au regard des attendus de l'institution » (Jolivet et al., 2021, p. 125). Les besoins d'apprentissage correspondent à ce qui est à travailler par l'élève pour favoriser, si besoin, la négociation de ruptures d'ordre épistémologique (Vergnaud, 1990) et pour poursuivre la construction d'éléments technologico-théoriques pour résoudre des tâches du domaine, de complexité variée, nécessitant pour leur résolution la convocation d'autres types de tâches (Castela, 2008 ; Robert, 2008).

Savoir	Mode ancien	Mode incomplet en construction	Mode attendu
Repère scolaire	Cycle 3	5e	Fin cycle 4
Statut du signe égal	Annonce de résultat		Signe d'équivalence
Statut des lettres	Étiquettes, non prises en compte	Lettres évaluées, variables en construction	Variables, inconnues
Praxéologie Modéliser, Prouver	Démarche arithmétique	Généralisation, programmes de calcul	Modélisation via expressions, mise en équations
Praxéologie Représenter	Non cohérence entre énoncé et graphique ou écritures numériques abrégatives	Cohérence entre énoncé et écritures algébriques avec congruence sémiotique	Cohérence entre énoncé et écritures algébriques avec ou sans congruence sémiotique
Praxéologie Calculer	Calcul arithmétique (erreur : concaténation)	Substitution, distributivité simple pour développer (application directe)	Équivalence d'expressions, distributivité simple, pour développer, factoriser, distributivité double

Tableau 1. – Modes de justification en algèbre à la fin du cycle 4.

Reprenant le travail de Grugeon-Allys (2016) sur les modes technologico-théoriques, nous définissons la notion de mode de justification. Un mode de justification caractérise la rationalité de l'élève à un moment donné de sa formation. Pour le déterminer, nous nous appuyons sur les technologies et théories régulièrement mises en œuvre par l'élève dans la résolution des tâches

d'une praxéologie locale ou régionale donnée. Nous définissons ainsi des modes de justification *a priori* pour une praxéologie donnée et à un niveau scolaire donné : un mode ancien, un mode attendu et un mode en cours de construction. En algèbre, nous définissons ces trois modes que nous caractérisons dans le Tableau 1.

Le modèle didactique de l'apprenant est ainsi constitué d'un *n-uplet* de modes de justification correspondant aux différentes praxéologies locales définies pour un domaine de savoir donné.

## 2. Hypothèse et questions de recherche

Nous faisons ainsi l'hypothèse que la prise en compte de différentes approches (épistémologique, institutionnelle et cognitive) permet de définir les conditions didactiques pour concevoir des parcours adaptés aux besoins d'apprentissage d'élèves sur une plateforme d'entraînement aux mathématiques.

Nous nous demandons donc comment modéliser didactiquement et informatiquement les tâches proposées aux élèves dans l'EIAH en prenant en compte ces trois approches

Pour répondre à ces questions, nous nous appuyons sur les éléments présentés auparavant qui constituent les modèles didactiques du savoir et de l'apprenant. Nous définissons à présent le modèle didactique des tâches et le modèle didactique des parcours.

## 3. Modèles didactiques construits pour la plateforme MindMath

### Modélisation didactique des tâches

Grapin et Grugeon-Allys (2018) caractérisent didactiquement une tâche par : les savoirs en jeu, sa conformité au curriculum, la ou les technique(s) permettant de la réaliser, les justifications associées et en particulier celles attendues à un niveau institutionnel donné, et sa complexité. Une telle caractérisation permet, en appui sur un modèle didactique du savoir et de l'apprenant, de positionner les tâches les unes par rapport aux autres au regard des programmes et d'identifier les justifications erronées ainsi que les classes d'erreurs.

Afin de l'implémenter, nous nous plaçons dans le cadre développé par Chaachoua (2018) puis Chaachoua et Bessot (2019) et qui étend le cadre de la TAD : T4TEL. Nous utilisons en particulier la notion de générateur de types de tâches définit par :

$$GT=[\text{Verbe d'action, Complément fixe ; Système de variables}].$$

Un exemple de générateur de types de tâches en algèbre est :

GT1=[résoudre, une équation du 1<sup>er</sup> degré ; VT1, VT2] avec VT1 la structure de l'équation ( $ax + b = c$  ;  $ax + b = cx + d$  avec  $a - c \neq 0$ , etc.) et VT2 le nombre de solutions de l'équation (aucune, une, une infinité).

Nous commençons donc par décomposer un domaine de savoir en praxéologies régionales et locales. Pour l'algèbre, nous nous appuyons en particulier sur le processus d'algébrisation défini par Ruiz Munzón (2010). Chacune des praxéologies locales est ensuite décomposée en générateurs de types de tâches. Le choix des valeurs des variables de type de tâches (VT) permet de définir des types de tâches, rendant compte de l'agrégation de différentes technologies dans les praxéologies locales et régionales.

Pour construire et caractériser des tâches à partir de ces types de tâches, nous faisons évoluer le modèle T4TEL en introduisant des variables de tâches (Jolivet et al., 2021). Les variables de tâches et leurs valeurs ont ainsi une double fonction : caractériser la portée de certaines techniques (VtP) et caractériser la complexité des tâches (VtC). En instanciant les variables de tâches VtP et VtC, nous définissons des familles de tâches. Une famille de tâches est un ensemble de tâches que le choix des valeurs des variables nous amène à considérer comme

semblables à l'aléatoire de génération près. C'est le niveau de granularité le plus fin que nous définissons. En reprenant le générateur de types de tâches GT1 déjà défini, on peut ainsi construire plusieurs types de tâches en appui sur l'évolution du modèle T4TEL : GT1=[résoudre, une équation du 1er degré ; VT1, VT2, VtP, VtC]. Puis nous instancions la variable VtP « nature des solutions » (entière, rationnelle, etc.) et les variables VtC1 « nature des coefficients » et VtC2 « complexité de la réécriture » (réductions, factorisation, etc.) pour définir des familles de tâches. A partir du type de tâches « résoudre une équation de la forme  $ax + b = cx + d$  avec  $a - c \neq 0$  », nous pouvons définir différentes familles de tâches, par exemple :

- famille de tâches Ft\_2 = {forme de l'équation  $P(x) = Q(x)$  avec  $d^\circ(P), d^\circ(Q) < 2$ , forme  $ax + b = cx + d$  avec  $a - c \neq 0$  ; nombre de solutions : 1 ; nature des solutions :  $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{D}$  ; nature des coefficients :  $\mathbb{Z}$  ; complexité de la réécriture : aucune réécriture nécessaire} ;
- famille de tâches Ft\_3 = {forme de l'équation  $P(x) = Q(x)$  avec  $d^\circ(P) = d^\circ(Q) = 2$  et  $d^\circ(P-Q) = 1$  ; nombre de solutions : 1 ; nature des solutions :  $\mathbb{D}$  ; nature des coefficients :  $\mathbb{Z}$  ; complexité de la réécriture : développement et réduction}.

Pour conclure, nous reformulons l'hypothèse initiale : en quoi la modélisation praxéologique d'une tâche issue du cadre T4TEL, affinée par des variables didactiques de portée et de complexité, permet-elle la définition de famille de tâches, pour une praxéologie locale donnée, et in fine la génération d'exercices implémentables dans un EIAH ? Et en quoi une telle définition permet-elle de concevoir des parcours, en lien avec les besoins d'apprentissage de l'apprenant, implémentables dans un EIAH ?

#### *Modélisation didactique des parcours*

Un parcours d'apprentissage est une suite organisée de tâches pour répondre à un objectif d'apprentissage en prenant en compte les modes de justification des élèves. C'est le jeu sur les valeurs de variables de types de tâches et de tâches qui permet de caractériser des exercices adaptés à cet objectif.

Lorsqu'un parcours d'apprentissage est créé, nous définissons d'abord des tâches cibles. Un élève, quel que soit son mode de justification, doit maîtriser la résolution de ces tâches pour considérer que l'objectif visé est acquis. Le reste du parcours s'adapte au mode de justification de l'élève relativement à la ou les praxéologie(s) locale(s) en jeu dans le parcours. Ainsi, si le mode de justification de l'élève relève du mode ancien, on pourra lui proposer des tâches pouvant d'abord être résolues par une procédure ancienne avant de lui proposer des tâches « pivot » pour négocier la rupture vers les procédures attendues à son niveau scolaire, puis les tâches cibles. Pour un élève dont le mode de justification relève déjà de ce qui est attendu, il est possible de proposer directement les tâches cibles puis des tâches plus complexes, faisant intervenir d'autres praxéologies.

#### *4. Adaptation à la géométrie*

Comme nous l'avons déjà vu, la plateforme MindMath propose un entraînement en algèbre et en géométrie à des élèves de collège (fin du cycle 3 pour la 6<sup>e</sup> et cycle 4). Les modèles présentés auparavant ont donc aussi été développés en géométrie.

Au cours du cycle 3, les programmes scolaires indiquent que l'objectif est déjà de passer d'une géométrie orientée par la perception ou les instruments à une géométrie orientée par le raisonnement sur les propriétés géométriques. Cependant, les propriétés et objets géométriques changent de statut du cycle 3 au cycle 4 sans que ce changement soit explicité (Lesnes-Cuisiniez, 2021). En effet, en CM2 et 6<sup>e</sup>, les propriétés des objets géométriques étudiées peuvent être juxtaposées les unes à côté des autres, sans hiérarchisation alors qu'au cycle 4, on commence à distinguer les propriétés nécessaires et suffisantes.

Comme en algèbre, la non prise en compte de cette double rupture entre la géométrie orientée par la perception ou les instruments et la géométrie du raisonnement peut amener des élèves à construire des rapports à la géométrie différents et non idoines. Nous définissons ainsi trois modes de justification en géométrie (à noter que nous nous situons dans le cadre de l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique) : ils sont présentés dans le Tableau 2.

<b>Critère</b>	<b>Mode ancien</b>	<b>Mode incomplet en construction</b>	<b>Mode attendu</b>
Repère scolaire	Cycle 3	6 <sup>e</sup> - 5 <sup>e</sup>	Fin cycle 4
Type de construction	Au jugé	Construction molle au sens de Laborde (2005)	Construction robuste
Outils utilisés pour la construction	Outils de dessin	Utilisation combinatoire d'outils de construction	Utilisation réfléchie d'outils de construction
Schéma codé			Utilisation d'un schéma codé
Présence et nature du raisonnement	Pas de raisonnement construit	Raisonnement construit pour valider uniquement	Raisonnement préalable
Validation de la construction	Pas de validation, validation perceptive ou par les instruments de tracé	Validation par le déplacement	Validation par les propriétés géométriques
Propriétés mobilisées	Pas de propriétés ou propriétés spatio-graphiques	Propriétés erronées ou utilisées hors de leur domaine de validité	Propriétés géométriques bien utilisées
Structure déductive du raisonnement	Argumentation incorrecte ou par juxtaposition	Argumentation incomplète (îlots deductifs)	Raisonnement déductif correct, démonstration

*Tableau 2. – Modes de justification en géométrie à la fin du cycle 4.*

Une analyse épistémologique, institutionnelle et cognitive relative à la géométrie plane nous permet de définir un modèle du savoir sous la forme d'un MPR (Lesnes-Cuisiniez, 2021) et de définir des types de tâches pour favoriser l'entrée dans la géométrie théorique en prenant en compte des aspects épistémologiques relatifs aux figures géométriques, aux constructions et aux raisonnements. Pour la praxéologie locale de construction en particulier, l'objectif est de faire travailler les élèves sur des constructions qui nécessitent de déterminer la nature de la figure à partir de certaines de ses propriétés données dans l'énoncé, avant de pouvoir déterminer d'autres propriétés sur lesquelles s'appuiera la construction avec les instruments à disposition dans le milieu. Les élèves mettent alors en jeu une argumentation heuristique au sens de Duval (1993) et élaborent implicitement un programme de construction.

Nous définissons ainsi plusieurs générateurs de types de tâches permettant de couvrir la praxéologie locale de construction. En particulier, le générateur de types de tâches GT2=[construire, un triangle ; VT1, VT2] avec VT1 la nature du triangle à construire et VT2 les données de l'énoncé (deux côtés et un angle, un côté et deux angles, etc.). Une fois les types de tâches produits, nous définissons des variables de tâches VtP (VtP1 : éléments de la figure

déjà construits, VtP2 : instruments à disposition dans le milieu) et VtC (VtC1 : nombre de propriétés minimum à mobiliser dans la résolution, VtC2 : registre de représentation de l'énoncé et désignation du triangle).

La tâche présentée sur la figure 2, définie à partir du générateur GT2 par les valeurs de variables {VT1 : triangle équilatéral ; VT2 : un côté et un angle sur ce côté ; VtP1 : un côté non-base ; VtP2 : report de longueur (pas de rapporteur) ; VtC1 : 4 ; VtC2 : langage naturel, triangle désigné comme « isocèle »} nécessite pour sa résolution de montrer que le triangle à construire est équilatéral avant de pouvoir utiliser la définition d'un tel triangle pour construire la figure avec un outil de report de longueur (« cercle » ou « compas »).

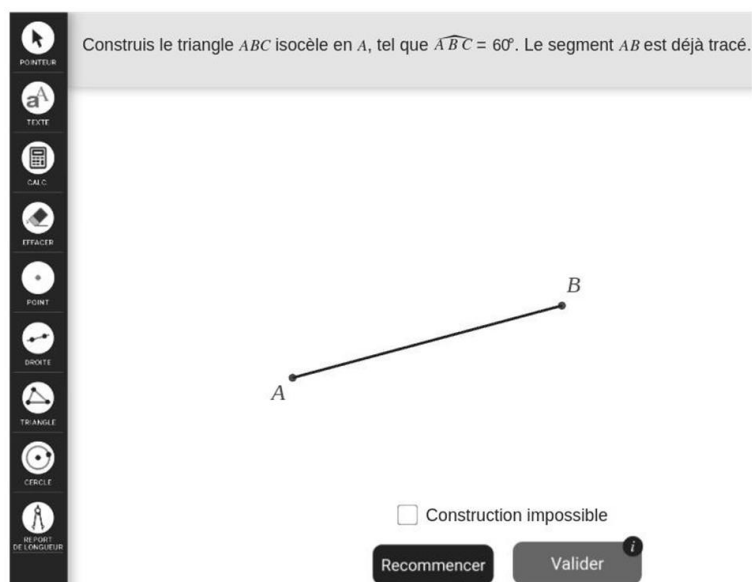


Figure 2. – Exercice « construis le triangle ABC ».

Enfin, les parcours d'apprentissage sont construits de la même façon qu'en algèbre en jouant sur les variables de types de tâches et de tâches pour s'adapter au mode de justification de l'élève.

## SEANCE 2 - MES RETROACTIONS DANS MINDMATH

*Note* : cette section prend largement appui sur le texte de Jolivet et al. (2022), paru dans la revue STICEF.

D'une manière générale, les environnements numériques d'apprentissage (ENA) des mathématiques qui proposent des rétroactions épistémiques sont peu nombreux. L'un des enjeux du projet MindMath est précisément de proposer de telles rétroactions. Du point de vue de la plateforme, l'enjeu est double : produire les rétroactions et décider les rétroactions. Dans le cadre d'un ENA, les rétroactions proposées sont nécessairement relatives à la tâche prescrite, cependant le choix de la rétroaction doit aussi prendre en compte la part de l'activité de l'apprenant qui est perceptible par l'environnement. Du point de vue de la recherche cela se traduit par les défis suivants :

- proposer une modélisation des rétroactions qui permette leur production effective et qui soit exploitable pour leur décision ;
- construire un processus de décision qui prenne en compte le savoir travaillé, la réponse de l'apprenant et le profil de l'apprenant ;
- prendre en compte l'effet des rétroactions pour améliorer le processus de décision.

Ces différents défis s'adressent conjointement aux chercheurs en didactique et en informatique. Après une présentation rapide de quelques éléments de l'état de l'art, pour

répondre à ces défis, nous présentons un modèle de rétroactions puis un algorithme de décision des rétroactions, construits sur la base de l'expertise didactique.

Dans la section suivante, pour prendre en compte les incertitudes au moment de la décision de la rétroaction, nous présentons une deuxième approche de la décision s'appuyant sur l'intelligence artificielle.

### 1. Quelques éléments de l'état de l'art

S'il n'y a pas de consensus sur l'effet des rétroactions sur un apprenant, Wisniewski et al. (2020) signalent cependant, dans une revisite de l'article « The power of Feedback » (Hattie & Timperley, 2007), que les rétroactions ont un impact plus important sur l'apprentissage que sur la motivation et le comportement. Storbard (2018, p. 46) pointe le fait que l'impact de la rétroaction n'est pas le même selon le niveau, en termes de compétences et d'expérience de l'apprenant. Par ailleurs, des travaux tels que ceux de Brooks et al. (2019) et Small et Lin (2018) montrent l'importance de la prise en compte de l'erreur et les diverses formes de sa prise en compte.

Dans le domaine des mathématiques, il n'y a que peu de travaux de didactique qui se sont intéressés à l'effet des rétroactions dans un environnement numérique d'apprentissage. En géométrie on peut citer le travail de comparaison de onze « systèmes d'aide à la démonstration » réalisé par Tessier-Baillargeon et al. (2017). Ils relèvent en particulier que les rétroactions de type « aide à la prochaine étape » ne concernent que quatre systèmes sur les onze étudiés, et même parmi ceux-ci, trois sont basés sur une structuration assez rigide du raisonnement attendu de l'élève. Ce constat est confirmé par l'analyse de ce sur quoi portent les rétroactions : « tous les systèmes tutoriels analysés offrent une rétroaction sous forme d'une validation locale des inférences ou des énoncés soumis par l'élève, et on recense peu de validation globale de démonstrations [4 systèmes], et encore moins d'annotation des solutions [1 seul système] ou d'explication des erreurs [3 systèmes] » (Tessier-Baillargeon et al., 2017, pp. 113-114).

### 2. Modèle de rétroaction

Le modèle de rétroaction, qui est utilisé à la fois pour guider la production, permettre la description et est exploité pour la décision, est présenté **Figure 3**. Il est décrit et illustré de manière détaillée dans (Jolivet et al., 2022), nous présentons ici sa logique globale.

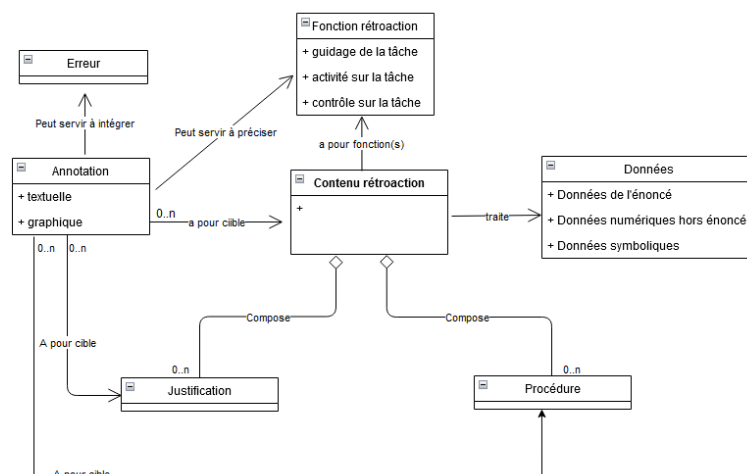


Figure 3. – Modèle de rétroaction.

Dans un premier temps nous utilisons la modélisation du savoir sous forme de praxéologies pour définir le contenu principal de la rétroaction. Elle peut donc contenir une technologie et/ou une technique (dans le modèle présenté dans la figure 3, nous avons utilisé les termes justification et procédure à la place de technologie et technique pour éviter les confusions liées à la polysémie des termes dans un contexte interdisciplinaire). Ce contenu principal peut être enrichi d'une ou plusieurs annotations. Elles sont facultatives et vont permettre de préciser la rétroaction. Elles peuvent avoir plusieurs finalités :

- expliciter la fonction de la rétroaction ;
- détailler un aspect du contenu ;
- introduire des éléments relatifs à une erreur dans la rétroaction.

Nous revenons brièvement sur ces différentes finalités dans le cadre d'exemples commentés ci-dessous.

Enfin, le dernier élément de modèle de rétroaction permet de spécifier trois cas selon la manière dont la rétroaction est rédigée :

- utilisation de données numériques identiques à celles de l'énoncé (DNI) ;
- utilisation de données numériques qui ne sont pas celles de l'énoncé (DN) ;
- utilisation de données symboliques (DS).

L'exemple de gauche de la Figure 4 est une rétroaction qui porte essentiellement sur la technique de factorisation, chaque exemple est cependant enrichi de rappels technologiques. On utilise des données numériques qui ne sont pas nécessairement celles de l'énoncé. Dans l'exemple de droite de la Figure 4, la rétroaction porte sur des éléments technologiques (définitions et propriétés en lien avec les triangles isocèles), elle est rédigée en utilisant des données symboliques (il n'y a ni longueur de segment ni mesure d'angle utilisées pour rédiger la rétroaction).

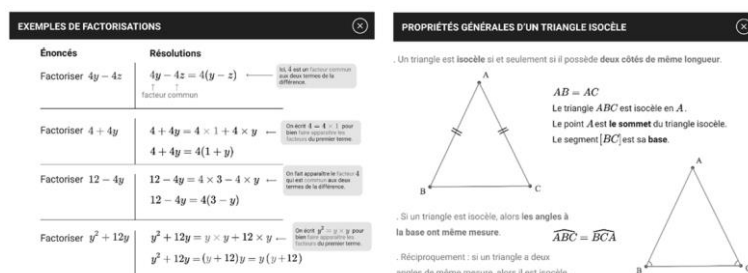


Figure 4. – deux exemple de rétroactions issues de la plateforme MindMath

### 3. Décision des rétroactions

Décider une rétroaction revient à proposer une réponse à la question : dans un contexte donné, qui dépend de la tâche à réaliser, de la réponse de l'apprenant et de son profil, quelle rétroaction proposer à l'apprenant pour favoriser son apprentissage ?

Dans MindMath, pour fonder la décision, nous disposons des éléments suivants :

- le déclenchement de la rétroaction :
  - demande d'aide (ou inaction prolongée de l'apprenant sur la plateforme), indépendamment d'une réponse de l'apprenant ;
  - ou réponse de l'apprenant à une tâche.
- la réponse de l'apprenant ;
- le profil de l'apprenant ;
- ce que l'on sait des erreurs des autres apprenants par rapport à la tâche travaillée.

C'est sur la base de ces critères que nous avons construit l'arbre de décision présenté figure 5. Les différents parcours de cet arbre permettent de définir onze feuilles qui correspondent chacune à une situation dans notre environnement. Par exemple, la feuille 6 correspond à une

situation où l'apprenant a répondu à la tâche, sa réponse est incorrecte mais il n'y a pas d'erreur identifiée associée à sa réponse, son mode de justification est 0 ou 1<sup>1</sup>, et enfin il existe une erreur identifiée qui est dominante parmi les autres utilisateurs ayant résolu une tâche de la famille de tâches traitée par l'apprenant.

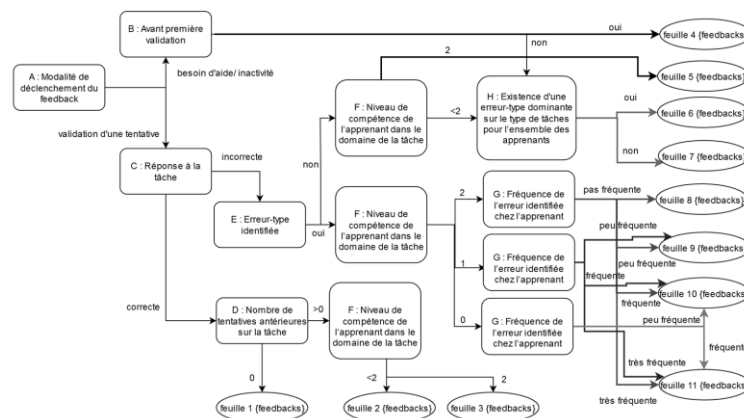


Figure 5. – Arbre de décision des rétroactions.

À chaque feuille est associé un certain nombre de rétroactions. Il s'agit, parmi les rétroactions disponibles, de celles qui sont évaluées par les didacticiens et didacticiennes comme cohérentes par rapport au chemin parcouru pour aboutir à la feuille. Une même rétroaction peut être associée à plusieurs feuilles.

C'est la description de la rétroaction selon le modèle présenté dans la section précédente qui guide ce travail d'association rétroaction - feuille. Une fois celui-ci réalisé, au sein de chaque feuille, des pondérations sont associées à chaque rétroaction afin de pouvoir déterminer un ordre permettant de les décider<sup>2</sup>.

Une hypothèse forte globale peut être formulée de la manière suivante :

- un contenu relatif aux justifications sera *a priori* plus efficace pour un élève possédant un mode de justification élevé et favorise l'apprentissage ;
- un contenu portant sur les procédures sera *a priori* plus adapté pour un élève possédant un mode de justification faible et favorise la réussite de la tâche.

#### 4. Décision et IA

La décision de la rétroaction se déroule dans un contexte caractérisé par de nombreuses incertitudes. Certaines sont fortement contingentes à l'ENA et à la qualité des informations que l'on peut obtenir :

- le diagnostic relatif à la réponse de l'apprenant ;
- la précision de la connaissance que l'on a du profil de l'apprenant en particulier lors des premiers temps d'utilisation de la plateforme par lui ;
- les rétroactions effectivement disponibles dans l'ENA ;
- la forme des rétroactions produites dans l'ENA MindMath.

D'autres incertitudes ont des origines extrinsèques aux qualités de l'ENA. Ainsi la qualité de la modélisation du savoir et de l'analyse *a priori* permettant d'identifier les erreurs possibles

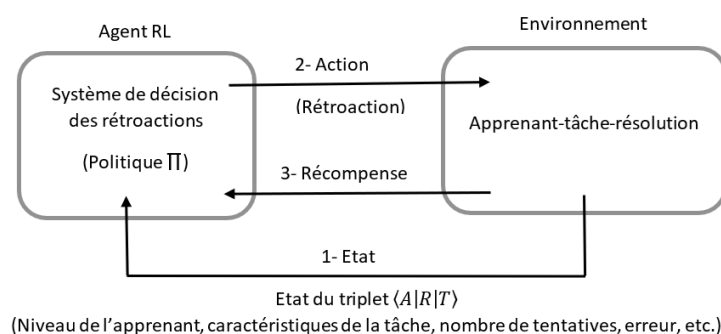
<sup>1</sup> Par rapport au modèle didactique de l'apprenant, le mode de justification 0 correspond à un mode ancien, le mode de justification 1 à un mode en cours de construction et le mode de justification 2 à un mode attendu.

<sup>2</sup> Un apprenant peut bénéficier de plusieurs rétroactions consécutives, la même feuille peut donc être obtenue plusieurs fois lors de la résolution d'une tâche. Dans la plateforme MindMath nous avons choisi de ne pas proposer deux fois la même rétroaction à un apprenant lors de la réalisation d'une tâche.

impacte fortement la pertinence des informations dont dispose le système pour décider les rétroactions. Le faible nombre de travaux sur l'effet des rétroactions, en particulier dans un ENA, rend difficile d'étayer *a priori* les hypothèses présentées dans la section 3. De même, si l'effet de la rétroaction sur la réussite immédiate de la tâche est relativement aisé à déterminer, son effet sur l'apprentissage est nettement plus complexe à définir et observer, alors qu'il s'agit d'un élément crucial pour la décision de la rétroaction.

Enfin, comme le signale Rezat (2021), il est de toute façon difficile de déterminer l'usage et l'effet effectif fait par l'apprenant des rétroactions proposées : *“no matter how carefully the tasks in e-textbooks and the feedback messages are designed, it is very likely that they still contain irrelevant information, which might become salient in students' solution processes. Therefore, tasks, feedback messages, and diagrams need to be designed very carefully and as unambiguously as possible”* (Rezat, 2021, p. 1443).

L'ensemble de ces incertitudes nous a amenés à réinterroger cette question de la décision par le moyen d'algorithmes d'intelligence artificielle. Nous détaillons dans Jolivet et al. (2022) les raisons qui nous ont conduits à considérer des algorithmes de type apprentissage par renforcement. Le principe général est qu'à un instant donné, le système dispose d'informations sur le triplet  $\langle A|R|T \rangle$  où A est l'état de l'apprenant, R la résolution proposée par l'apprenant et T les caractéristiques didactiques de la tâche travaillée. Comme évoqué précédemment, ces informations sont parcellaires ou incertaines. À partir des informations disponibles, le système va décider une rétroaction à l'instant  $t$ . Cette rétroaction va modifier l'état du triplet  $\langle A|R|T \rangle$  à l'instant  $t+1$ . C'est en fonction de cette modification que le système va évaluer la pertinence de la rétroaction décidée. Cette évaluation va permettre d'attribuer une récompense, positive ou négative, à la rétroaction décidée pour le contexte de décision. Le fonctionnement global du modèle d'apprentissage par renforcement est présenté dans la figure 6.



**Figure 6.** – Modèle d'apprentissage d'un agent logiciel.

Nous ne détaillons pas ici ce processus. Nous pointons uniquement les enjeux principaux à l'articulation entre didactique et informatique.

Premièrement, d'un point de vue informatique, suite à un grand nombre d'utilisations, le système va tendre vers une certaine stabilité et permettra ainsi de déterminer quelle est la meilleure rétroaction dans un contexte donné. Ceci étant, pour que cette stabilisation ait un sens, il est tout d'abord nécessaire que les rétroactions proposées soient mathématiquement et didactiquement pertinentes. Le travail de modélisation du savoir et des erreurs, réalisé en amont par les didacticiens et didacticiennes, est donc fondamental.

Deuxièmement c'est un gain important pour ce type d'algorithme que de pouvoir démarrer avec des premières données, permettant ainsi que les premières décisions ne relèvent pas uniquement de l'aléatoire (ce qui pourrait générer des situations potentiellement dépourvues de sens). Les hypothèses didactiques posées dans la section 3, en dépit de leur limite, permettent d'aider au démarrage de l'algorithme.

Enfin, le choix de la fonction qui calcule les récompenses après chaque décision, doit être significatif du point de vue des apprentissages. D'une manière caricaturale, il est presque assuré

qu'une rétroaction qui présente la solution intégrale de la tâche, avec un simple travail de recopiage par l'apprenant, va permettre d'obtenir de très bons résultats du point de vue de la résolution de la tâche à l'étape suivante. Cependant, il n'est pas pertinent d'attribuer une récompense forte à une telle rétroaction dont l'effet sur l'apprentissage est nettement plus incertain. À nouveau, l'articulation entre l'analyse didactique des rétroactions et les connaissances informatiques sur les fonctions de récompense dans d'autres situations doit permettre d'avancer plus rapidement vers la définition d'une fonction de récompense pertinente.

### *5. Conclusion et perspectives sur les rétroactions*

Lors de cette deuxième séance du TD, nous avons donc présenté les enjeux relatifs à la mise en place de rétroactions épistémiques dans l'environnement MindMath.

En complément de tous les défis scientifiques abordés dans les sections précédentes, nous sommes confrontés à ce stade de notre travail à deux obstacles significatifs pour poursuivre l'avancée du travail : d'une part, les limites fonctionnelles de la plateforme ne nous permettent pas de déployer des expérimentations à grande échelle, pourtant nécessaires pour recueillir des données et faire fonctionner l'algorithme d'apprentissage par renforcement. D'autre part, il y a une réelle difficulté dans la production effective des rétroactions à partir du modèle avec des contraintes, à la fois éditoriales et techniques, qui émergent à l'occasion de cette étape. Ces contraintes, qui ne peuvent être gérées par les laboratoires de recherche dans le cadre d'un tel projet, ont amené à la production de rétroactions qui, d'un simple point de vue ergonomique, posent un certain nombre de problèmes (affichage non dynamique, volume d'informations dans une rétroaction trop important, juxtaposition impossible de la zone de travail élève avec la rétroaction...). D'un point de vue expérimental il sera donc nécessaire de questionner les effets qui relèvent des aspects ergonomiques et ceux qui sont effectivement liés au contenu des rétroactions elles-mêmes.

La principale perspective est maintenant de pouvoir mettre en place des expérimentations à la fois qualitatives pour travailler sur la réception et l'utilisation individuelle des rétroactions dans des contextes contrôlés, et quantitatives pour permettre d'exploiter et évaluer les deux algorithmes, fondé sur les hypothèses didactiques pour le premier et mobilisant des techniques d'IA pour le second.

### SEANCE 3 - MODELISATION DU SAVOIR DANS UNE ONTOLOGIE ET EXPLOITATIONS

Lors de cette troisième séance du TD, nous avons abordé un élément transversal au projet MindMath, dont les potentialités sont d'ailleurs plus vastes que celles exploitées à ce jour. En effet, dans le cadre du projet, nous avons conçu et implémenté une ontologie qui explicite la modélisation praxéologique. L'organisation hiérarchique des tâches, des familles de tâches, des types de tâches et des générateurs ainsi que des relations sémantiques entre les éléments de la modélisation praxéologique tels que les variables didactiques de portée et de complexité ont été explicitées et réifiées au sein de ce modèle ontologique. Ce troisième TD était l'occasion de présenter ce travail.

Notre conception des ontologies rejoint celle de Gruber (1993). En effet, nous avons conçu cette ontologie comme une description explicite de concepts d'une part permettant l'opérationnalisation du modèle praxéologique en vue de prises de décisions automatiques (adaptation de parcours, décision de rétroactions, etc.) et d'autre part, facilitant la communication entre les différents acteurs humains impliqués dans le projet. En effet, l'aspect formel et consensuel des ontologies permet à la fois la communication entre les différentes

applications composantes d'un EIAH mais aussi favorise la communication entre personnes issues de disciplines différentes (didacticiens, informaticiens cogniticiens, enseignants, etc.).

Le travail de conception avec les didacticiens a permis d'extraire les concepts les plus pertinents pour une représentation en machine. Des décisions de simplification du modèle praxéologique et parfois même de retrait de certains concepts ont été prises conjointement entre informaticiens et didacticiens. Néanmoins, des règles de design ontologique (Lima et al., 2010 ; Sure et al., 2002) ont été appliquées pour faire en sorte que l'ontologie obtenue soit aisément extensible en vue d'intégrer de nouveaux concepts le cas échéant.

Deux applications concrètes ont guidé ce travail de modélisation : l'aide à la décision des rétroactions (boucle courte) qui a été présentée lors de la séance 2 et la recommandation adaptative de tâches (boucle longue).

### 1. Modélisation du savoir et design ontologique

Comme nous l'avons illustré sur le cas de la géométrie et de l'algèbre lors de la première séance, nous avons réalisé une modélisation du savoir allant du niveau du domaine au niveau des familles de tâches. Cette modélisation contient les éléments hiérarchiquement reliés aux types de tâches tels que les domaines mathématiques, les générateurs de types de tâches, les genres de tâches mais aussi les variables caractérisant les familles de tâches (leurs portée et complexité) et celles caractérisant leurs types. Chaque famille de tâches et chaque type de tâches est décrit par une combinaison de variables qui peuvent être reliées entre elles. Ces liens servent à inférer, entre autres, des relations d'inclusion ou de complémentarité entre les familles de tâches, utiles lors de la recommandation adaptative des tâches aux apprenants.

D'autres concepts tels que les erreurs, les modes de justification des élèves, les techniques (procédures) et les technologies (justifications) ainsi que leur périmètre de validité ou d'invalidité ont été modélisés et reliés aux variables de tâches. Ces éléments sont, quant à eux, utiles lors du diagnostic des erreurs, à la fois pour la décision des rétroactions mais aussi pour la recommandation des tâches.

Plusieurs itérations ont été nécessaires pour trouver un modèle qui soit suffisamment simple à représenter en machine et suffisamment précis du point de vue de la modélisation didactique. La figure 7 est le modèle qui a été produit avant la phase d'implémentation.

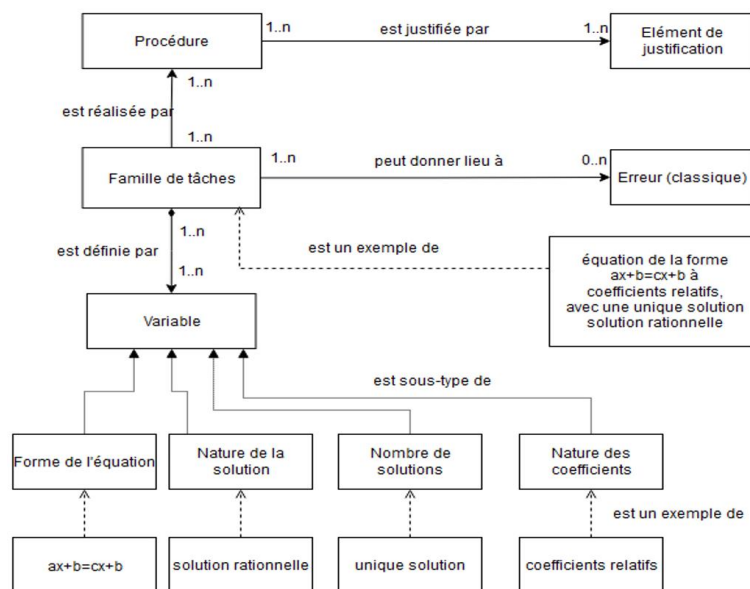


Figure 7. – Diagramme de classes en vue d'une opérationnalisation sous la forme d'une ontologie. Exemple dans le cas des équations du 1<sup>er</sup> degré.

Une fois le modèle stabilisé, la phase d'implémentation du modèle en OWL<sup>3</sup> a débuté. Cette phase a été très riche en échanges entre didacticiens et informaticiens qui ont fait évoluer davantage le modèle. Un travail de modélisation supplémentaire a été nécessaire pour enrichir les relations entre les concepts du modèle en vue des inférences souhaitées en lien avec les applications potentielles de l'ontologie. Comme exemple d'application on pourra citer la recherche de l'existence de techniques concurrentes (Kaspary et al., 2020) et ses applications (Vu & Tchounikine, 2020).

La Figure 8 est un extrait du diagramme de classes produit en vue de l'opérationnalisation du modèle praxéologique en mathématiques. Plusieurs versions de ce modèle conceptuel ont été produites et archivées dans un but de capitalisation et de maintenabilité de l'ontologie implémentée.

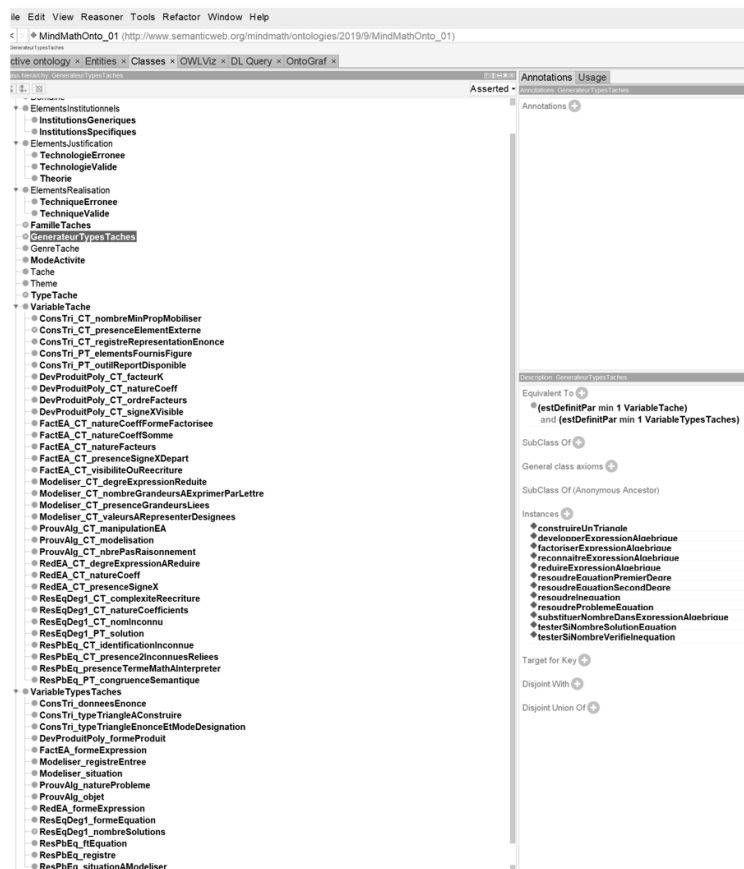


Figure 8. – Extrait de l'ontologie modélisation le modèle praxéologique (implémentée dans l'environnement Protégé, <https://protege.stanford.edu/>).

## 2. Exemples d'utilisations et d'extraction de connaissances ontologiques

Deux applications majeures ont guidé le travail de modélisation du modèle praxéologique :

- Aider à la décision des rétroactions (en boucle courte) : il s'agit de la sélection en ligne du contenu de la rétroaction en fonction de la tâche, du mode de justification de l'élève, de son erreur, etc. Le modèle des rétroactions décrit lors de la séance 2 combiné aux éléments de l'ontologie permet de décider le type et le contenu de la rétroaction la plus adaptée.

<sup>3</sup> Web Ontology Language : langage permettant de définir des ontologies

- Aider à la recommandation de tâches (en boucle longue) : il s'agit de sélectionner la prochaine tâche à soumettre à l'apprenant. Les liens explicités entre les familles de tâches et les types de tâches grâce aux variables didactiques permettent d'inférer un ordre partiel entre les tâches.

Dans le cadre de la troisième séance de TD, un outil a été développé pour nous permettre d'expliquer le potentiel d'une telle modélisation ontologique, et ceci au-delà du cas MindMath. Il s'agit d'un moteur de requêtes SPARQL qui permet d'extraire, d'inférer et d'afficher des connaissances répondant à un besoin explicité par des usagers sous forme de requêtes SPARQL. Cet outil pourrait être amélioré avec une interface homme-machine (IHM) adaptée à des utilisateurs non-initiés au langage SPARQL sous la forme d'un formulaire par exemple. La Figure 9 est une capture d'écran des résultats de deux requêtes formulées vis-à-vis de l'ontologie MindMath. Il s'agit (A) d'extraire à partir d'une famille de tâches donnée (ici factoriser une expression algébrique) les familles de tâches génériques et (B) d'extraire les techniques relatives à une famille de tâches donnée (ici développer le produit de deux polynômes) et leurs variables de tâches.

**A**

VAR1
factIEA_ft.2.2
factIEA_ft.2.1

**B**

VAR1	VAR2	VAR3
devProduitPoly_nc_N	tech_dev_additer	Technique de simple distributivité réalisée par additions itérées*
devProduitPoly_nc_N	tech_dev_SD	Technique développement simple distributivité*
devProduitPoly_of_monomeXPoly	tech_dev_additer	Technique de simple distributivité réalisée par additions itérées*
devProduitPoly_of_monomeXPoly	tech_dev_SD	Technique développement simple distributivité*
devProduitPoly_sxV_tous	tech_dev_additer	Technique de simple distributivité réalisée par additions itérées*
devProduitPoly_sxV_tous	tech_dev_SD	Technique développement simple distributivité*
devProduitPoly_Rc_n1N6-1	tech_dev_additer	Technique de simple distributivité réalisée par additions itérées*
devProduitPoly_Rc_n1N6-1	tech_dev_SD	Technique développement simple distributivité*

Figure 9. – Deux exemples de requêtes en utilisant le moteur de requêtes SPARQL.

### 3. Conclusion et perspectives sur la modélisation du savoir

Le travail présenté lors de cette troisième séance du TD avait comme objectif de présenter la réification du modèle didactique, présenté lors de la première séance du TD, à travers une ontologie. Nous avons également voulu montrer le potentiel d'une telle modélisation pour la mise en œuvre à terme d'un EIAH adaptatif.

Il est vrai que ce travail de design ontologique peut être considéré comme chronophage et éprouvant mais les bénéfices, en termes d'application et usages potentiels nous semblent sans commune mesure avec l'effort déployé. En outre, ce travail d'explicitation et de formalisation mené entre informaticiens et didacticiens est crucial pour instaurer une compréhension commune et un vocabulaire partagé, nécessaires au travail collaboratif entre disciplines.

Ce travail de modélisation évoluera certainement avec les usages qu'on voudra mettre en place dans l'EIAH mais le travail de design que nous avons suivi devrait rendre cette évolution maîtrisée en termes de temps et d'effort.

## CONCLUSION GENERALE DU TD

Le travail réalisé au sein du projet MindMath a permis de mettre en évidence la richesse, mais aussi les complexités, offerte par un contexte qui fait travailler ensemble des partenaires scientifiques et industriels. Nous concentrons ces quelques lignes de conclusion sur les aspects liés à la collaboration scientifique entre deux équipes de recherche, l'une en didactique, l'autre en informatique.

Comme nous avons pu le constater dans ce TD ce travail de collaboration a nécessité pour les deux partenaires, didacticiens et informaticiens, de faire des efforts d'explicitation et de

formalisation des concepts et objets manipulés. Ce travail a été rendu possible par une confiance réciproque, notamment construite lors de collaborations antérieures, et un respect du champ de compétences des différents partenaires. Il est aussi notable que chaque partenaire a avancé sur des questions de recherche propres à chaque domaine scientifique mais que cette collaboration a amené à la construction d'objets (modèle de rétroactions, ontologie par exemple) qui sont maintenant des objets communs aux deux champs.

Les perspectives ouvertes sont au moins aussi riches que les premiers résultats obtenus. A titre d'exemple l'utilisation de l'IA pour la décision des rétroactions mobilise l'expertise didactique pour aborder le problème de l'initialisation du processus, l'IA permettant ensuite d'aborder à une large échelle un problème complexe pour lequel les certitudes sont faibles en didactique et les résultats obtenus devraient permettre d'adresser de nouvelles questions à la recherche en didactique.

#### LE POINT DE VUE DE PHILIPPE R. RICHARD

*Note : Philippe R. Richard nous a fait le plaisir de participer aux trois séances du TD, il a accepté de nous livrer un texte relatif au regard qu'il a porté sur ce TD. Nous le reproduisons ici.*

Si l'enseignant de mathématique a la responsabilité de faire faire des mathématiques aux élèves, ce n'est pas parce qu'il transmet des connaissances prédéterminées comme on transmet des règles du code de la sécurité routière. On sait depuis longtemps que l'apprentissage des mathématiques passe essentiellement par la résolution de problèmes, car ce sont eux qui motivent l'apprentissage et qui permettent aux connaissances d'évoluer. Un projet comme MindMath se fonde sur cette idée en situant les problèmes dans des tâches qui se laissent évaluer et qui donnent, dans l'usage, de l'information pour accommoder des parcours d'apprentissage à chaque élève. À terme, le projet vise l'intelligence d'un système qui saurait s'adapter à un modèle d'apprentissage humain. Le défi est lancé.

Dans sa version actuelle, les tâches implémentées engagent des compétences mathématiques de premiers niveaux. On pourrait critiquer ce choix sur un plan proprement didactique. En effet, lorsqu'on veut concevoir un système d'apprentissage et d'évaluation qui s'adapte à l'élève, on souhaiterait (dans l'absolu) pouvoir se lancer dans des activités complexes. Cependant, dès qu'on veut obtenir des résultats concrets, il faut réussir une sorte de quadrature du cercle, c'est-à-dire trouver le moyen de joindre la pensée éclatée typique de la résolution de problèmes avec le déterministe incontournable de la programmation informatique. Comment alors y arriver, sans tomber dans le piège de la prescription de solutions prévues à l'avance ou de l'évaluation qui mesure un écart entre les opérations de l'élève et une solution idéale ? Le choix des types de tâches du projet MindMath offre une perspective éclairante qui rapproche le modèle didactique au modèle de l'apprenant à l'aide d'un outil diagnostique supporté par un modèle praxéologique de référence. La difficulté se déplace d'abord en amont : elle vient du choix des tâches particulières, car ce sont elles qui permettent aux connaissances d'évoluer et sur lesquels portera l'évaluation. Autrement dit, en appuyant sur la qualité de ces tâches, on peut contrôler d'entrée de jeu les conceptions de l'élève susceptibles de s'y développer, avec des indicateurs de progression bien balisés qui demeurent en relation avec les connaissances véhiculées par les problèmes.

Comment alors articuler les rétroactions d'un système informatique lorsque l'élève se trompe ou lorsqu'il rencontre un obstacle ? Le processus de décision peut s'engager dans une approche symbolique où la rétroaction évalue en quelque sorte la réussite par rapport à la tâche. Cette information est accessible dès qu'on s'intéresse aux éléments fins et à la mécanique précise de la tâche, ce qui permet d'encourager ou de sanctionner l'élève dans sa progression

en constatant un écart par rapport à un système de corrections prédéterminées ou en comparant à un répertoire d'erreurs connues. En même temps, le processus de décision peut s'inscrire dans une dynamique de choix, plus proche de la complexité et surtout compatible avec l'incertitude typique de l'apprentissage humain. C'est un prolongement naturel qui accepte que la décision ne soit pas complètement calculable, parce qu'on accepte l'implication d'un risque sous-jacent, mais il s'agit quand même d'un risque calculé fondé sur l'action de l'élève. Le pari du projet MindMath est de joindre les avantages du contrôle sur la tâche à la nécessité de rendre compte de l'apprentissage sur deux plans, celui de la machine et surtout, celui de l'humain.

La qualité des rétroactions est fondamentale et dépend crucialement du frottement entre les modèles didactiques et informatiques. Par exemple, le caractère de généralité des rétroactions a-t-il besoin de l'énoncé des tâches, du sens des actions ou des significations véhiculées au cours de la résolution, ou s'agit d'invariants transposables d'un énoncé à l'autre, sinon des catégories ? Comment s'assurer que les rétroactions informatiques ne donnent pas les réponses en même temps que le questionnement supposé du point de vue de la connaissance visée à travers le modèle didactique ? En ce moment, la rétroaction du modèle entre dans une dynamique de récompenses, avec les facteurs de pondération, que l'on tente de faire converger pour marquer l'apprentissage. On aurait ainsi un investissement en vue des nouvelles tâches sur le plan d'un ensemble d'états qui donne de l'information sur la tâche en jeu, le processus de résolution et sur le profil de l'apprenant. Dans le système informatique actuel, l'algorithme d'apprentissage ne donne pas d'information à l'arbre de décision, ce sont les états de l'apprenant qui nourrissent l'arbre. On suppose que la convergence a lieu d'entrée de jeu par la génération de tâches similaires pour des problèmes voisins à partir d'un modèle coconstruit entre didacticiens et informaticiens. Cette démarche est tout à fait naturelle, comme nous le rappelle (Balacheff, 2005) :

« Quand on s'intéresse non seulement aux théories didactiques, mais aussi à la construction des Environnements Informatiques pour l'Apprentissage Humain (EIAH), ces questions s'imposent d'une façon très concrète puisqu'il faut aboutir à des éléments calculables par une machine. Notamment, ce qui permet de reconnaître une connaissance et de l'opposer à une autre demande de comprendre ce qui, parmi les productions identifiables par la machine, peut-être considéré comme appartenant à un modèle donné a priori ; il faut, en quelque sorte, automatiser l'analyse a priori, composante classique de la didactique des mathématiques. Plus encore, les moyens d'observation et d'analyse du chercheur-observateur doivent être modélisés et implémentés pour qu'une machine, d'une certaine façon, joue son rôle dans l'interprétation des connaissances ».

Les rapports entre l'apprentissage et la décision demeurent toutefois l'avenue royale pour se rapprocher de la complexité. Le projet MindMath permet certainement de tabler sur l'information des états pour dynamiser l'algorithme de décision à partir de l'apprentissage. Ce travail n'est pas encore fait, mais il est possible. Le véritable défi à venir est plutôt de profiter conjointement de l'apprentissage de l'élève et celui de la machine avec les moyens offerts par l'intelligence artificielle. Certaines techniques informatiques de l'IA sont maintenant bien connues, mais elles oublient généralement en amont l'humain qui utilise la machine, contrairement aux modèles de MindMath. S'il faut maintenant trouver le moyen de répondre à comment l'intelligence artificielle peut servir l'apprentissage humain mathématique (Richard et al., 2022), il est sûr que l'interaction humain-machine doit être au cœur de la problématique et on ne doit surtout pas laisser les informaticiens agir seuls. Cela peut paraître une évidence, mais dès qu'il s'agit de répartir des moyens sociaux pour développer des systèmes utiles, il semble qu'un autoritarisme technologique s'installe au détriment du service pour tous à l'humain.

## RÉFÉRENCES

- BOSCH, M., & GASCON, J. (2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. In A. Mercier & C. Margolinas (Éds.), *Balises pour la didactique des mathématiques : Cours de la 12<sup>e</sup> école d'été de didactique des mathématiques* (p. 107-122). La Pensée Sauvage, Grenoble.
- BROOKS, C., CARROLL, A., GILLIES, R. M., & HATTIE, J. (2019). A matrix of feedback for learning. *Australian Journal of Teacher Education (Online)*, 44(4), 14-32.
- CASTELA, C. (2008). Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignorés par les institutions d'enseignement. *Recherche en didactique des mathématiques*, 28(2), 135-182.
- CHAACHOUA, H. (2018). T4TEL : Un cadre de référence pour la formalisation et l'extension du modèle praxéologique. *Actes du 6<sup>e</sup> congrès pour la Théorie Anthropologique du Didactique*. Actes du 6<sup>e</sup> congrès pour la Théorie Anthropologique du Didactique (CITAD6), Autrans.
- CHAACHOUA, H., & BESSOT, A. (2019). La notion de variable dans le modèle praxéologique. *Educação Matemática Pesquisa : Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, 21, 234-247. <https://doi.org/10.23925/1983-3156.2019v21i4p234-247>
- CHEVALLARD, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-265.
- DELOZANNE, É., PREVIT, D., GRUGEON-ALLYS, B., & CHENEVOTOT-QUENTIN, F. (2010). Vers un modèle de diagnostic de compétence. *Technique et Science Informatiques*, 29(8), 899.
- DUVAL, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 5, 37-65.
- GRAPIN, N., & GRUGEON-ALLYS, B. (2018). Approches psychométrique et didactique de la validité d'une évaluation externe en mathématiques : Quelles complémentarités et quelles divergences ? *Mesure et évaluation en éducation*, 41(2), 37-66.
- GRUBER, T. R. (1993). A translation approach to portable ontology specifications. *Knowledge Acquisition*, 5(2), 199-220. <https://doi.org/10.1006/knac.1993.1008>
- GRUGEON-ALLYS, B. (2016). Modéliser le profil diagnostique des élèves dans un domaine mathématique et l'exploiter pour gérer l'hétérogénéité des apprentissages en classe : Une approche didactique multidimensionnelle. *e-JIREF*, 2(2), 63-88.
- GRUGEON-ALLYS, B., PILET, J., CHENEVOTOT-QUENTIN, F., & DELOZANNE, E. (2012). Diagnostic et parcours différenciés d'enseignement en algèbre élémentaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques, Numéro spécial hors-série, Enseignement de l'algèbre élémentaire : bilan et perspectives*, 137-162.
- HATTIE, J., & TIMPERLEY, H. (2007). The Power of Feedback. *Review of Educational Research*, 77(1), 81-112. <https://doi.org/10.3102/003465430298487>
- JOLIVET, S., & GRUGEON-ALLYS, B. (2022). Modélisation de parcours d'apprentissage adaptés à l'apprenant dans un EIAH. *Actes de la 7<sup>e</sup> conférence internationale sur la théorie anthropologique du didactique (CITAD7)*, 92-106.
- JOLIVET, S., LESNES-CUISINIEZ, E., & GRUGEON-ALLYS, B. (2021). Conception d'une plateforme d'apprentissage en ligne en algèbre et en géométrie : Prise en compte et apports de modèles didactiques. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 26, 117-156.
- JOLIVET, S., YESSAD, A., MURATET, M., LESNES-CUISINIEZ, E., GRUGEON-ALLYS, B., & LUENGO, V. (2022). Rétroactions dans un environnement numérique d'apprentissage : Modèle de description et décision. *STICEF*, 29(2).
- KASPARY, D., CHAACHOUA, H., & BESSOT, A. (2020). Qu'apporte la notion de portée de portée d'une technique à l'étude de la dynamique praxéologique ? *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, 25, 243-269.
- LESNES-CUISINIEZ, E. (2021). *Modélisation didactique de parcours d'apprentissage dans un EIAH pour l'entrée dans le raisonnement géométrique au cycle 4, en appui sur les problèmes de construction de figures planes* [Thèse de doctorat]. Université de Paris.
- LIMA, J. F., AMARAL, C. M. G., & MOLINARO, L. F. R. (2010). Ontology : An analysis of the literature. *International Conference on ENTERprise Information Systems*, 426-435.
- REZAT, S. (2021). How automated feedback from a digital mathematics textbook affects primary students' conceptual development : Two case studies. *ZDM – Mathematics Education*, 53(6), 1433-1445. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01263-0>
- RICHARD, P. R., VÉLEZ, M. P., & VAN VAERENBERGH, S. (2022). Mathematics education in the age of artificial intelligence. *How artificial intelligence can serve the mathematical human learning*.
- ROBERT, A. (2008). *Une méthodologie pour analyser les activités (possibles) des élèves en classe*. In F. Vandebrouck (Ed.), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (p. 33-41). Octares.
- RUIZ MUNZON, N. (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional* [Thèse de doctorat]. Universitat Autònoma de Barcelona.
- SMALL, M., & LIN, A. (2018). Instructional feedback in mathematics. In A. Lipnevich & J. Smith (Éds.), *The Cambridge handbook of instructional feedback* (p. 169-190). Cambridge University Press.
- STOBART, G. (2018). Becoming Proficient : An Alternative Perspective on the Role of Feedback. In A. A. Lipnevich & J. K. Smith (Éds.), *The Cambridge Handbook of Instructional Feedback* (1<sup>re</sup> éd., p. 29-51). Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/9781316832134.004>
- SURE, Y., ERDMANN, M., ANGELE, J., STAAB, S., STUDER, R., & WENKE, D. (2002). OntoEdit : Collaborative ontology development for the semantic web. *International semantic web conference*, 221-235.
- TESSIER-BAILLARGEON, M., LEDUC, N., RICHARD, P. R., & GAGNON, M. (2017). Etude comparative de systèmes tutoriels pour l'exercice de la démonstration en géométrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 22, 91-117.
- VERGNAUD, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, 10(23), 133-170.
- VU, T. M. H., & TCHOUNIKINE, P. (2020). Supporting teacher scripting with an ontological model of task-technique content knowledge. *Computers & Education*, 163, 104098.

Vandebrouck, F., Emprin, F., Ouvrier-Bufferet, C. & Vivier, L. (dir.) (2023). Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques - Preuve, Modélisation et Technologies Numériques. Volume des ateliers des actes de EE21.

WISNIEWSKI, B., ZIERER, K., & HATTIE, J. (2020). The power of feedback revisited : A meta-analysis of educational feedback research. *Frontiers in Psychology, 10*, 3087. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2019.03087>



## TABLE RONDE : L'INTELLIGENCE ARTIFICIELLE

Fabien Emprin\*

## RÉSUMÉ

L'intelligence artificielle (IA) est en fort développement dans la société : l'IA index (Zhang et al. 2022) de l'université de Stanford qui partage les données sur l'intelligence artificielle dans le monde annonce un investissement privé dans l'IA en 2021 d'environ 93,5 milliards de dollars. C'est plus du double de l'investissement privé total de 2020. Ces technologies liées au numérique, à la récolte et au traitement de données, aux algorithmes d'apprentissage (deep Learning, machine learning...) questionnent nécessairement le monde de l'enseignement. Si la didactique s'intéresse depuis longtemps aux questions liées à l'IA (Balacheff, 1994), ces dernières années ont changé la donne grâce à la combinaison de la puissance de calcul et la disponibilité de données massives. L'objectif de cette table ronde de l'EEDM est de questionner l'IA sous l'angle didactique en faisant dialoguer des chercheurs venant de différents horizons : didactique des mathématiques et informatique, français et nord-américains.

Mots-clefs : Intelligence artificielle, didactique des mathématiques

## ABSTRACT

Artificial intelligence (AI) and learning analytics (LA) are growing rapidly in society: the AI Index (Zhang et al. 2022) from Stanford University, which shares data on artificial intelligence around the world, announces a private investment in AI in 2021 of about \$93.5 billion. That's more than double the total private investment in 2020. These technologies linked to digital technology, to data collection and processing, to learning algorithms (deep learning, machine learning...) necessarily question the world of teaching. If didactics has long been interested in issues related to AI (Balacheff, 1994), these last years have changed the deal thanks to the combination of computing power and the availability of massive data. The objective of this EEDM round table is to question AI from a didactic point of view by bringing together researchers from different backgrounds: mathematics didactics and computer science, French and North American.

Keywords: artificial intelligence, learning analytics, mathematics education

## INTRODUCTION

Dès l'émergence des technologies numériques, dans la société comme à l'école (dans les années 1970 en France), la question des relations entre recherche en informatique (notamment l'Intelligence Artificielle - IA) et la didactique (Balacheff, 1994) s'est posée. Définir et modéliser la connaissance y est central. Par ailleurs, la collecte et le traitement des réponses des élèves sont des tâches de l'enseignant qui prend des décisions en fonction des informations recueillies sur les apprentissages de l'élève de façon formelle ou informelle. Les technologies numériques permettent de collecter des traces de l'activité des élèves, à l'école comme en dehors, et ouvre la porte à une nouvelle forme d'analyse, assistée par l'ordinateur : les *learning analytics* (LA). Si la question n'est pas récente, ces dernières années ont changé la donne grâce à la combinaison de la puissance de calcul, la disponibilité de données massives due notamment à l'accès facilité aux technologies numériques (smartphone dans la poche des élèves, tablettes, ordinateurs...). En marge du travail du thème 3 sur les technologies numériques, nous avons voulu faire le point sur les questions vives liées à l'IA sous la forme d'une table ronde regroupant des chercheurs en didactique des mathématiques et en informatique travaillant sur ces questions en France et dans d'autres pays. Nous avons, alors, posé quatre questions à quatre chercheurs : d'abord, (1) qu'est-ce que l'IA pour vous, pour quoi et par qui ? Ensuite, (2) quelles sont les interactions et les « responsabilités » réciproques entre l'informatique et la didactique ? En troisième lieu, (3) quelle peut être la relation entre les savoirs / connaissances et l'IA ? Enfin, (4) quels cadres théoriques mobiliser ?

Ce compte rendu vise à donner un aperçu des échanges, sans en être une retranscription. Il est suivi d'un texte complémentaire fourni par Philippe R. Richard permettant d'approfondir spécifiquement certains aspects.

---

\* Université de Reims Champagne Ardenne – URCA – CEREP – IREM de Reims

## LES INTERVENANTS

Comme nous l'avons annoncé, notre intention est de mettre en dialogue des chercheurs travaillant en didactiques des mathématiques et en informatique.

Nicolas Balacheff est directeur de recherche émérite au CNRS, membre du Laboratoire d'Informatique de Grenoble (LIG). Chercheur en didactique des mathématiques, il travaille à l'interface de l'informatique et de la didactique sur la question des EIAH (Environnements Informatiques pour l'Apprentissage Humain). Il nous apporte un regard englobant sur la problématique grâce à l'expérience des collaborations avec les chercheurs en IA depuis la fin des années 1980.

Philippe R. Richard est Professeur titulaire à la Faculté des sciences de l'éducation - Département de didactique de l'université de Montréal. Il est éditeur et promoteur de l'ouvrage *Mathematics education in the digital area of artificial intelligence. How Artificial intelligence can serve Mathematical Human learning* (Richard, Vélez et Van Vaerenbergh, 2022). Cet ouvrage de synthèse permet de faire le point sur les rapports entre IA et didactique des mathématiques. Il nous permet d'avoir un point de vue extérieur, nord-américain, sur le système éducatif français qu'il connaît, de plus, très bien.

Ernesto Exposito est Professeur des Universités en Informatique à l'Université de Pau et des Pays de l'Adour. Il est responsable d'un *Work Package* dans le projet ANR Hype 13 (HYbrider et Partager les Enseignements) porté par un consortium de 12 universités françaises, lauréates de l'appel à projet « Hybridation des formations de l'enseignement supérieur » dans le cadre du Programme d'Investissement d'Avenir (PIA) de l'Agence Nationale de la Recherche (ANR). Sa contribution nous permet de mettre en dialogue les recherches en informatique et en didactique des mathématiques grâce à son expérience de pilotage d'un projet pluridisciplinaire.

Vanda Luengo, est Professeure des Universités en informatique et responsable de l'équipe MOCAH du laboratoire LIP6 à Sorbonne Université. Elle travaille dans le domaine de l'IA pour l'éducation, notamment en lien avec la chirurgie orthopédique (projet Teleos), l'apprentissage des connaissances non techniques en situation critique dans la conduite automobile, l'anesthésie et la gynécologie obstétrique (projet MacCoy Critical), l'apprentissage des mathématiques en primaire (AdaptivMath) ou au collège (MindMath). Ces nombreux projets en lien avec la didactique des mathématiques et son parcours d'ingénieure puis de chercheuse en informatique la place à l'interface entre les deux champs de recherche.

Les projets auxquels ces chercheurs et chercheuses ont contribué permettront d'illustrer le propos.

## INTRODUCTION ET GENERALITES SUR L'IA

### 1. Qu'est-ce que l'IA pour vous ? Pour qui ? Par qui ?

La question de l'IA est problématisée du point de vue de l'informatique et de l'apprentissage des mathématiques, depuis longtemps, au niveau international. Par exemple, les premiers tuteurs cognitifs (*cognitive tutors*®) de *Carnegie Learning* dans la décennie 80 ont été développés dans le domaine de la géométrie ou de l'algèbre (Anderson et al., 1995).

De quoi parle-t-on quand on évoque l'IA ? Est-ce un effet de mode (le fait que des travaux portent sur cette question depuis plusieurs dizaines d'année nous amène à répondre plutôt non) ? est-ce une histoire de machine ? un prolongement modélisé de l'humain ? un partenariat humain-machine ?

En tous cas, parmi les questions, semblent apparaître celles des interactions (Homme  $\leftrightarrow$  machine), celle de l'intelligence et de la modélisation (de la connaissance, des processus d'apprentissage, de l'élève...).

Des premières pistes sur la question de l'intelligence nous renvoient à la théorie des intelligences multiples (Gardner, 1983), à l'intelligence augmentée dans l'interaction (Engelbart, 1962) et à l'intelligence collective avec le succès de Sapiens (Henrich, 2021). Nous revenons, dans la suite du texte, sur les deux autres termes.

## 2. Du point de vue de l'informatique

L'IA peut être définie comme « L'étude et la conception de systèmes informatiques qui perçoivent leur environnement et agissent comme des êtres humains » McCarthy (Dartmouth Conference, 1956 dans McCarthy et al. 2006).

Cependant, il y a des multiples définitions de l'intelligence artificielle. Russel et Norvig proposent de tenir compte des deux dimensions : la pensée et l'action. Ainsi, pour eux, ils existent quatre grands types de système d'IA, comme décrit dans le tableau 1.

	Humain	Rationnel
Pensée	Systèmes qui pensent comme les humains	Systèmes qui pensent rationnellement
Action	Systèmes qui agissent comme des humains	Systèmes qui agissent rationnellement

**Tableau 1.** – Tableau issu de (Russell & Norvig – *Artificial Intelligence: A Modern Approach*) En Français : *Intelligence artificielle 3ème édition, 2010.*

Cette différenciation proposée par les auteurs montre bien les aspects interdisciplinaires qui ont construit le domaine. Ainsi, par exemple, les systèmes « qui pensent comme un humain » font référence plus spécifiquement aux approches cognitives qui combinent les modèles informatiques de l'IA et les approches psychologiques. « Les systèmes qui agissent comme des humains » associent des nombreuses branches de l'IA tels que le traitement du langage naturel (TAL), la représentation des connaissances, le raisonnement automatisé, l'apprentissage automatique, la vision par ordinateur et la robotique et associent des domaines tels que la linguistique pour le TAL ou la mécanique pour la robotique.

L'interaction entre ces quatre types de systèmes d'IA et l'éducation existe depuis la naissance de l'IA. Le premier tuteur intelligent, nommé Scholar, est développé dans le cadre de la thèse de Carbonnell (1970), qui propose un système générant des réponses adaptées à l'apprenant en navigant sur un réseau sémantique sur des connaissances en géographie. Un autre exemple emblématique est celui de Clancey (1987) qui propose un tuteur intelligent en médecine, nommé Guidon, en s'appuyant sur le système experte Mycin (Buchanan & Shortliffe, 1984) qui est un système de connaissances expertes pour le diagnostic en médecine et en rajoutant des règles

Ces travaux sont précurseurs de la communauté de l'IA en éducation, communauté qui traite les spécificités du domaine de l'éducation. Ainsi, à partir des travaux sur les tuteurs intelligents trois types des modèles sont étudiés (Wenger 1987) : le modèle du domaine à enseigner, le modèle de l'apprenant et le modèle pédagogique.

- Le modèle du domaine fait référence aux domaines de connaissances à enseigner, comme c'est le cas de Mycin dans le cas précédemment cité.
- Le modèle pédagogique fait référence aux connaissances et expertises d'enseigner (type d'interaction pédagogique, rétroactions, suivi).
- Le modèle de l'apprenant fait référence aux connaissances sur l'apprenant comme l'état de connaissances, ses réussites et difficultés, son état émotionnel ou méta cognitif.

Ces modèles restent d'actualité, les évolutions sont relatives à leurs représentations, leurs usage (comme le modèle ouvert de l'apprenant) ou les techniques de raisonnement (algorithmes) utilisant les modèles. Toutefois, l'évolution la plus importante est liée aux

méthodes et algorithmes s'appuyant sur les données, en particulier des données d'interaction entre les apprenants et des systèmes numériques (Luckin et al., 2016).

Dans tous ces systèmes nous pouvons donc distinguer trois types d'approches de modélisation. Les approches d'IA symbolique basées sur des connaissances expertes, tels que les modèles logiques, règles expertes ou ontologies ; les approches numériques basées sur des données, tels que le clustering ou les techniques de *deep learning* et, enfin, les approches mixtes combinant les deux, tels l'apprentissage des règles à partir des données combinées à des règles expertes ou la conception d'un modèle de décision basé sur un algorithme par renforcement utilisant des connaissances expertes et évoluant à partir des données.

Ainsi, l'IA pour l'éducation est une thématique de recherche spécifique qui se distingue de l'IA générale. Elle est développée depuis plus de 40 ans (<https://iaied.org/>) de recherches pluridisciplinaires avec les SHS, la psychologie, la didactique, la linguistique, la sociologie visant à construire des théories et des modèles. Cette approche pluridisciplinaire pose la question de la définition d'objets communs.

### 3. Du point de vue de la didactique

L'intelligence artificielle pose la question de la modélisation de la connaissance, de l'élève, des interactions didactiques et du raisonnement ce qui la distingue des points de vue des autres sciences de la connaissance et de l'apprentissage.

Dans ce contexte, on peut se demander :

### 4. Comment l'IA peut-elle aider l'enseignant ? à enseigner ? à se former ?

Quelle est la place de l'IA dans l'accompagnement et l'évaluation des étudiants ? Peut-elle être facteur d'individualisation, d'adaptation des apprentissages ?

Une piste de réponse vient du projet Hype 13 dont un des *Work package* porte sur une transformation durable des pratiques d'enseignement et d'apprentissage soutenue par l'intelligence artificielle au service de l'expérience humaine. Si la relation entre humains (professeurs et élèves) est primordiale et est d'ailleurs réaffirmée dans la conférence de consensus sur l'IA en éducation (ONU-UNESCO, 2019) quelle automatisation est permise par l'IA pour l'aide à la décision ? Nous l'avons vu, les tuteurs intelligents et l'individualisation sont au cœur des définitions et des concepts de l'IA en éducation ce qui apporte une première réponse à cette question.

L'hybridation des formations (notamment en raison de la crise du COVID 19), permet le recueil et le traitement des traces d'apprentissage. Ces dernières sont présentes de façon non homogène dans les plateformes d'enseignement à distance (LMS – *Learning Management System* type Moodle), les logiciels de visio conférence (type Zoom), les plateformes d'interactions (type Wooclap). La présence de ces traces renvoie au *data mining*, au traitement et à la visualisation mais aussi à la question de la formation des enseignants à l'usage de ces outils. Le projet Hype13 allie développement d'outils et formation des enseignants universitaires D'autres initiatives existent comme le MOOC « l'Intelligence Artificielle... avec intelligence ! ». de la Higuera (2020) propose un aperçu des questions clef sur la formation.

Nous abordons, à présent, la question des interactions entre les champs disciplinaires.

## QUELLES SONT LES INTERACTIONS ET « RESPONSABILITES » RECIPROQUES ENTRE INFORMATIQUE ET DIDACTIQUE ?

Pour aborder les échanges entre informatique et didactique, commençons par regarder les implications côté machine et côté humain.

Côté machine, l'IA peut être la simulation de processus d'intelligence humaine par une phase d'apprentissage, c'est-à-dire l'acquisition d'information et ses règles d'utilisation, une phase de raisonnement, soit l'utilisation de règles pour tirer des conclusions approximatives ou définitives, et enfin une phase d'autocorrection.

Nous pouvons distinguer une approche symbolique où l'ordinateur agit en fonction de règles entrées par un Humain (possibilités de lien causal tout en posant le problème d'une résolution à croissance exponentielle) et une approche numérique qui s'appuie sur une analyse de données pour prendre des décisions (stratégie de résolution efficace, mais avec un effet boîte noire sur le fonctionnement interne).

Côté humain, il s'agit d'une question d'idonéité interactive : perspective du concepteur (dispositif didactique, informatique) et celle de l'utilisateur (élève, enseignant, formateur)

Du point de vue de l'apprenant, cela renvoie au critère du degré d'initiative laissé à l'élève comme base de sa classification des EIAH (Environnements Informatiques pour l'Apprentissage Humain). Dans les systèmes tuteur, l'initiative de l'élève est contrôlée le logiciel en fonction de l'analyse réalisée et de la stratégie de tutorat et à l'opposé dans les micromondes l'élève a toute liberté de sa démarche et de ses choix pour atteindre le but.

Du point de vue de la conception, tel que déjà proposé par Balacheff (1994), c'est la connaissance qui est à la croisée de la didactique et de l'IA. Concernant les trois modèles cités précédemment, le modèle du domaine est au centre entre didactique et IA, mais la modélisation de l'apprenant et de la pédagogie fait émerger également des questions de recherche à l'intersection entre la didactique et l'IA. En effet, la modélisation appelée pédagogique peut tenir compte des dimensions didactiques comme la fonction d'étayage ou la production des rétroactions épistémiques (Luengo, 2009).

Dans les approches symboliques, l'informatique doit proposer des modèles et des représentations suffisamment utilisables pour que la connaissance experte issue de la didactique soit aisément réifiable. D'autre part, les connaissances didactiques nécessitent d'être calculables et de garantir la pertinence et couverture du domaine représenté pour le bon fonctionnement du système. La modélisation des conceptions de l'apprenant en géométrie à partir du modèle *ckç* et d'une approche multi agent émergent (Weber, Pesty & Balacheff, 2002) est un des premiers exemple Français. Le modèle *ontoprax* (Chaachoua, Ferraton & Desmoulin, 2017), qui a été testé en algèbre élémentaire, est également un bon exemple de ce type d'interaction, s'appuyant sur le cadre praxéologique et la représentation sous forme d'ontologies.

Pour les approches purement numériques, plusieurs interactions semblent intéressantes. Ainsi, pour les algorithmes d'IA non supervisée certaines connaissances résultantes (par exemple les ensembles résultants d'un clustering) peuvent être expliquées à travers des analyses didactiques. Un exemple d'application réel, qui pourrait proposer une interaction intéressante est le projet *Adaptiv'Math* où des résultats scientifiques ont conduit à la proposition d'activités de résolution des problèmes sur les 4 opérations et des activités de modélisation. Ce projet associe deux algorithmes d'intelligence artificielle : (1) pour des parcours individualisés (ZPDES [2]) et (2) pour synthétiser les expériences individuelles de chaque élève (Harrak & Bouchet, 2021).

Par ailleurs, pour les algorithmes d'IA supervisée, « la labélisation des données » ou connaissances de démarrages des algorithmes peuvent être guidés par des connaissances didactiques.

Enfin pour les approches mixtes, les modèles, théories et connaissances didactiques peuvent accompagner la modélisation informatique, les méthodes de raisonnement ou d'interaction. Ainsi, pour la modélisation informatique un exemple est le projet *TELEOS* où en le modèle *ckc* (Balacheff et Gaudin, 2003) est à la base de la structure du réseau bayésien (Chieu, Luengo, Vadcard et Tonetti, 2010) mais ensuite le système est capable d'évoluer à partir des données

d'interaction entre le système et l'apprenant (Toussaint et al., 2015). Aussi, les connaissances didactiques peuvent être utiles dans le raisonnement algorithmique pour atténuer le problème du démarrage à froid d'un l'algorithme d'IA, comme dans le cas du projet *MindMath* où les connaissances didactiques sur l'apprentissage d'algèbre élémentaire et la géométrie orientent deux algorithmes, l'un permettant la proposition des nouvelles situations d'apprentissage et l'autre permettant la prise de décisions afin de proposer des rétroactions épistémiques immédiates (Jolivet et al., 2021).

### 1. Des exemples de projets

Dans les projets pluridisciplinaires de recherche de type Hype 13 (Lamine Gueye et Exposito, 2022), les échanges entre les différents domaines de recherche apparaissent notamment au moment du développement d'outils. L'analyse du besoin et la définition du cahier des charges ne peut se faire qu'en interaction, au risque d'obtenir un outil techniquement fiable mais non adéquat. L'analyse des usages est aussi un moment extrêmement riche d'échanges entre les spécialités pour comprendre les détournements, les freins et les leviers à la diffusion d'un outil. Les phases de test permettent d'entrer dans une boucle d'adaptation et d'amélioration des outils.

Dans le projet QED-Tutrix associant notamment un doctorant en *computer science* et un chercheur en didactique, il s'agit d'équilibrer les interactions entre l'intelligence naturelle de l'utilisateur et l'intelligence artificielle du logiciel tuteur. On voit bien, ici, la nécessité d'interaction entre les domaines pour, plus spécifiquement, aborder « la problématique de la lisibilité et de l'accessibilité des preuves, et de l'adaptabilité des preuves aux raccourcis inférentiels. Cette exigence d'intégration des utilisateurs dès la conception du logiciel est cruciale » (Font et al., 2018, traduction libre). Par ailleurs, ce travail nécessite la mobilisation de cadres théoriques spécifiques à la didactique tels que la théorie des situations d'enseignement des mathématiques et plus particulièrement la notion de contrat didactique (Brousseau, 1990) et le modèle de l'espace de travail mathématique (ETM) (Kuzniak, 2011) mais aussi spécifiques aux sciences de l'informatique comme les études sur les preuves automatiques présentent dans GRAMY (Matsuda & Kurt, 2005) par exemple.

Dans *MindMath*, le concept de praxéologies de Chevallard (1999) permet une modélisation de l'apprenant vis-à-vis du savoir et ainsi raisonner sur le parcours d'apprentissage (Jolivet et al., 2021).

## LA QUESTION DES SAVOIRS ET DES CONNAISSANCES

Le rôle des connaissances et des savoirs apparaît dans les rétroactions visant à donner une information qui permette d'accéder à une solution correcte à la connaissance experte. L'IA permet de dépasser les rétroactions normatives vers une rétroaction centrée sur les représentations, connaissances (éventuellement erronées) des élèves. On peut distinguer les rétroactions sous forme de boucles longues (comme dans le projet TELEOS), permettant de mobiliser des savoirs de plusieurs natures : procéduraux, psychomoteurs, déclaratif et de boucles courtes (projet *MindMath*), avec une rétroaction immédiate basée sur un modèle de décision.

L'IA peut également avoir un effet boîte noire, comme nous l'avons mis en évidence plus haut en décrivant les approches statistiques. Il n'y a pas d'accès aux règles de décisions qui sont prises sur des calculs statistiques réalisés sur des quantités de données non accessibles à un humain.

Une proposition mise en œuvre dans QED-Tutrix est de mettre, au cœur des décisions, la combinaison des deux approches : statistique et symbolique.

## CADRES THEORIQUES ET CONCLUSION

Dans cette dernière partie a abordé les cadres théoriques permettant de questionner la modélisation des connaissances, du raisonnement, de l'apprenant, la problématique de l'erreur et de son traitement... Les traces, la mémoire et l'oubli par rapport à la biographie didactique de l'élève, de l'enseignement posent également la question de l'éthique par rapport à l'IA ?

Les cadres mobilisés par les chercheurs ont déjà en partie été évoqués dans les exemples ; il s'agit de la Théorie des situations didactiques en mathématique (TSDM) (Brousseau, 1998) et Théorie des espaces de travail mathématique (ThETM) (Kuzniak et Richard, 2014), le modèle cKç (Balacheff, 2011) mais aussi le modèle SMAR (Puentedura, 2012) permettant d'analyser les usages de l'IA.

Les « nouvelles technologies » pour l'éducation ont souvent suscité des contraintes et de grands espoirs (Emprin, 2018) et aucun des deux ne s'est complètement réalisé. La spécificité de l'IA est que dans certains cas les méthodes sont des boîtes noires et dont les informations ou connaissances produites sont difficiles à expliquer.

Cette table ronde permet de faire le point sur les relations entre didactique et IA ; on peut y noter que les cadres théoriques anciens tels de la TSD (Brousseau, 1998) ou la TAD (Chevallard, 1999) sont suffisamment robustes pour permettre des modélisations informatiques même si d'autres cadres ont dû être développés pour accéder à certains aspects du processus d'apprentissage avec les outils technologiques basés sur l'IA. Les projets qui y ont été présentés montrent également la richesse de la dynamique de travail entre sciences de l'informatique et didactiques. Les perspectives ouvertes sont nombreuses et montrent l'ampleur des travaux qui peuvent encore être développés.

## RÉFÉRENCES

- ANDERSON, J. R., CORBETT, A. T., KOEDINGER, K. R. & PELLETIER, R. (1995). Cognitive tutor: Lesson learned. *The Journal of the Learning Sciences*, 4 (2): 167–207. doi:10.1207/s15327809jls0402\_2.
- BALACHEFF N., GAUDIN N. (2003). Conceptual Framework. *Les Cahiers Du Laboratoire Leibniz*.
- BALACHEFF, N. (1994). Didactique et intelligence artificielle. *Recherches en didactique des mathématiques*, 14, 9-42.
- BALACHEFF, N. (2011). cKç, un modèle pour relier connaissance et preuve en didactique des mathématiques. dans J. BAILLE. *Du mot au concept : Preuve*, PUG, 9-32. (hal-01567192)
- BARQUERO, B., BOSCH, M., ROMO, A. (2018). Mathematical modelling in teacher education: dealing with institutional constraints. *ZDM Mathematics Education*, 50(1-2), 31-43.
- BROUSSEAU G. (1998). La théorie des situations didactiques. Recueil de textes de Didactique des mathématiques, 1970-1990 présentés par M. COOPER, N. BALACHEFF, R. SUTHERLAND ET V. WARFIELD. (*La pensée sauvage*, Grenoble)
- BROUSSEAU, G. (1990). Le contrat didactique : le milieu. *Recherches en didactique des mathématiques*, 9(9.3), 309-336.
- BUCHANAN, B. G., & SHORTLIFFE, E. H. (1984). *Rule based expert systems: the mycin experiments of the stanford heuristic programming project (the Addison-Wesley series in artificial intelligence)*. Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc..
- CARBONELL, J. R. (1970). AI in CAI: An artificial-intelligence approach to computer-assisted instruction. *IEEE transactions on man-machine systems*, 11(4), 190-202.
- CHAACHOUA, H., FERRATON, G., & DESMOULINS, C. (2013). Utilisation du modèle praxéologique de référence dans un EIAH. *Actes du 4e congrès pour la Théorie Anthropologique du Didactique*.
- CHEVALLARD, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(2), 221-266.
- CHIEU, V. M., LUENGO, V., VADCARD, L., & TONETTI, J. (2010). Student modeling in complex domains: Exploiting symbiosis between temporal Bayesian networks and fine-grained didactical analysis. *Journal of Artificial Intelligence in Education*.
- CLANCEY, W. J. (1987). *Knowledge-based tutoring: The GUIDON program*. MIT press.
- DE LA HIGUERA, C. (2020). *A report about Education, Training Teachers and Learning Artificial Intelligence: Overview of key issues*. Prepared for the Knowledge Societies Division, Communication and Information Sector of the UNESCO.
- EMPRIN, F. (2018, JUNE). Passé, présent et futur des formations aux usages numériques pour les enseignants de mathématiques. *In actes du 45ème colloque COPIRELEM*. ARPEME.
- ENGELBART, D. C. (1962). *Augmenting human intellect: A conceptual framework*. Menlo Park, CA, 21.
- FONT, L., RICHARD, P. R., & GAGNON, M. (2018). *Improving QED-Tutrix by automating the generation of proofs*. arXiv preprint arXiv:1803.01468.
- GARDNER, H. (1983). *Frames of mind: The theory of multiple intelligences*. New York, NY: Basic Book
- HARRAK, F. ET BOUCHET, F. (2021, JUNE). Aide au suivi de la progression de groupes d'apprenants pour la mise en place d'une pédagogie différenciée. *In 10e Conférence sur les Environnements Informatiques pour l'Apprentissage Humain* (pp. 312-317).
- HENRICH, J. (2021). *L'Intelligence collective*. Éditions MultiMondes.

- JOLIVET, S., LESNES-CUISINIEZ, E., & GRUGEON-ALLYS, B. (2021). Conception d'une plateforme d'apprentissage en ligne en algèbre et en géométrie : prise en compte et apports de modèles didactiques. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. Revue internationale de didactique des mathématiques*, (26), 117-156.
- KUZNAK, A. (2011). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. *In Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, 16, 9-24.
- KUZNAK, A., & RICHARD, P. R. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, 17(4-1), 5-39.
- LAMINE GUEYE, M. & EXPOSITO, E. (2022). Education 4.0: Proposal of a model for autonomous management of learning processes, Service-Oriented Computing – *ICSOC 2022 Workshops – AI-PA, ASOCA, FMCIoT, WESOACS, and Satellite Events*, Seville, Spain.
- LUCKIN, R., HOLMES, W., GRIFFITHS, M. & LAURIE, B. (2016). *Forcier Intelligence Unleashed – an Argument for AI in Education*, Pearson Education.
- LUENGO, V. (2009). *Les rétroactions épistémiques dans les Environnements Informatiques pour l'Apprentissage Humain*. Note de synthèse pour l'Habilitation à Diriger des Recherches, Université Joseph Fourier – Grenoble I
- LUENGO, V. ET BALACHEFF, N. (1998). Contraintes informatiques et environnements d'apprentissage de la démonstration en géométrie. Computational Constraints and Environments for Learning Proofs in Geometry. *Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication pour l'Éducation et la Formation*, 5(1), 15-45.
- MATSUDA, N. & VANLEHN, K. (2004). Gramy: A geometry theorem prover capable of construction. *Journal of Automated Reasoning*, 32(1), 3.
- MCCARTHY, J., MINSKY, M. L., ROCHESTER, N., & SHANNON, C. E. (2006). A proposal for the dartmouth summer research project on artificial intelligence, august 31, 1955. *AI magazine*, 27(4), 12-12.
- PUENTEDURA, R. R. (2012). *Building upon SAMR*. Retrieved May, 6, 2014.
- RICHARD, P. R., VÉLEZ, M. P., & VAN VAERENBERGH, S. (2022). *Mathematics education in the age of artificial intelligence. How artificial intelligence can serve the mathematical human learning*, Springer International Publishing.
- RUSSELL, S. J. (2010). *Artificial intelligence a modern approach*. Pearson Education, Inc..
- TOUSSAINT, B. M., LUENGO, V., JAMBON, F., & TONETTI, J. (2015). From heterogeneous multisource traces to perceptual-gestural sequences: The PeTra treatment approach. *In Artificial Intelligence in Education: 17th International Conference, AIED 2015, Madrid, Spain, June 22-26, 2015*. Proceedings 17 (pp. 480-491). Springer International Publishing.
- WEBBER, C., PESTY, S., & BALACHEFF, N. (2002, July). A multi-agent and emergent approach to learner modelling. *In ECAI*, 98-102.
- ZHANG, D., MASLEJ, N., BRYNJOLFSSON, E., ETCEMENDY, J., LYONS, T., MANYIKA, J., NGO, H., NIEBLES J.-C., SELBITTO, M., SAKHAEI, E., SHOHAM, Y., CLARK, J. & PERRAULT, R. (2022). *The AI Index 2022 Annual Report*. AI Index Steering Committee. Stanford Institute for Human-Centered AI.

## TABLE RONDE : INTERVENTION DE PHILIPPE RICHARD

### L'IA : POUR QUI ET PAR QUI ?

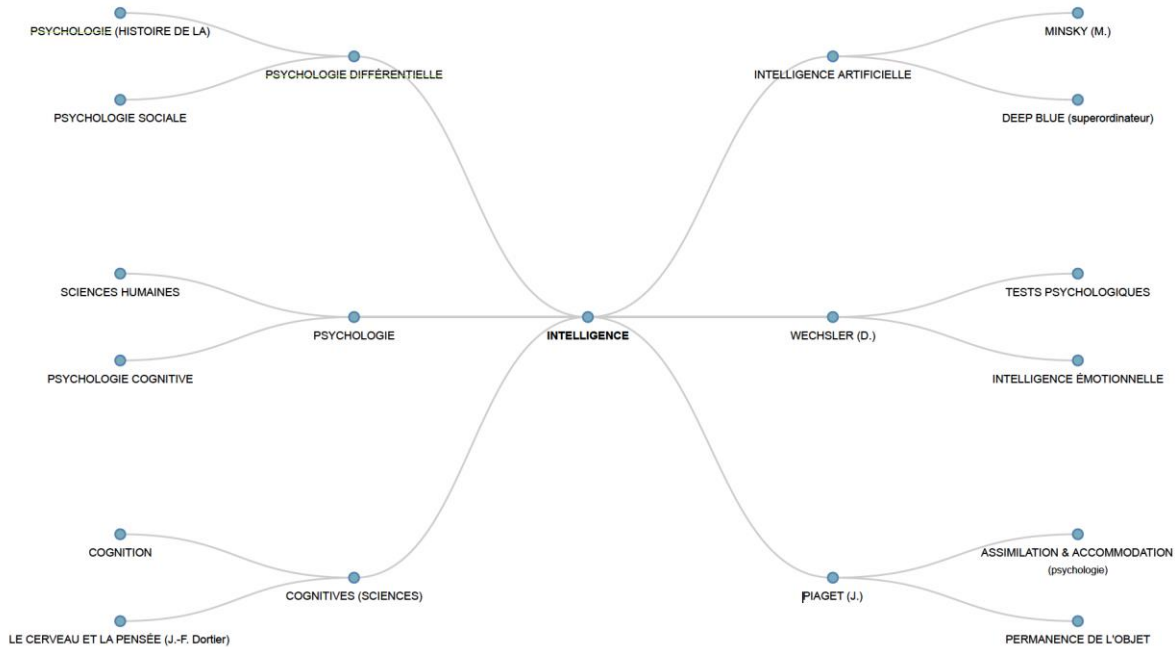
Lorsqu'on s'intéresse à l'origine de la faculté d'intelligence, on peut commencer avec un regard encyclopédique. Selon Richard (2022), l'intelligence représente la fonction par laquelle l'homme a essayé de se définir dans l'échelle des êtres, c'est-à-dire de se situer par rapport à son inférieur, l'animal, et par rapport à son supérieur, la divinité. Le phénomène de l'Intelligence Artificielle (IA) apparaît d'entrée de jeu comme un oxymore qui ne cesse d'intriguer. De quoi parle-t-on au juste ? Pour le grand public, l'IA fascine autant qu'elle inquiète, surtout pour ceux qui pensent que l'IA est une technologie qui va permettre aux ordinateurs de penser et d'agir comme des êtres humains. D'ailleurs, dans le magazine ISOfocus (2019) de l'Organisation internationale de normalisation, on tentait de démythifier les croyances à cet égard, comprenant que l'IA est sur toutes les lèvres dans le monde d'aujourd'hui. Dans la pratique, il s'agit d'un terme générique qui recouvre une constellation de technologies dont l'objet est de conférer une forme d'intelligence à des machines. Pour l'informaticien ordinaire, l'IA est un outil de plus dans le coffre à outils des spécialistes du domaine, une discipline scientifique qui vise la construction de programmes informatiques capables de résoudre des problèmes à l'instar des humains. Même s'il n'existe pas de définition universellement admise de l'IA (OCDE, 2019) et, sans entrer dans les aspects les plus techniques du concept, on retient généralement que l'IA reprend l'idée de simulation des processus cognitifs humains par des algorithmes, intégrés à un environnement assimilant des données dynamiques. Pour l'informaticien grassement subventionné par l'industrie ou par l'état, l'IA est une aubaine incroyable. Profitant du grand intérêt de l'IA dans la société, c'est aussi le sujet de l'heure.

Après la génomique des années 1990, les nanotechnologies des années 2000, l'IA ouvre les années 2010 avec l'apprentissage profond. Parce que l'IA effectue des travaux minutieux à grande vitesse, cela permet de gagner énormément de temps et de réduire les coûts en conséquence, faisant saliver le monde politico-administratif. Si au Québec la question de l'intérêt pour tous est posée, rien n'indique que la direction sera prise de façon équilibrée :

Les gouvernements canadien et québécois n'ont pas hésité à accorder des sommes considérables pour développer un « écosystème » de l'IA et attirer à Montréal les grands joueurs de l'industrie des technologies de l'information (Facebook, Microsoft, Google, IBM, etc.). Mais les gouvernements agissent-ils de façon responsable en adoptant sans réserve ce nouveau créneau d'investissement ? L'étude de la documentation portant sur le potentiel économique de l'IA au Québec montre des lacunes : les politiques publiques ne paraissent pas alignées directement sur l'intérêt collectif. (Lomazzi, Lavoie-Moore, Gélinas & Hébert, 2019)

Pour le didacticien des mathématiques, l'IA est au service de l'humain qui apprend, qui développe des compétences intellectuelles et qui fait son travail de mathématicien à l'école. L'humain est encore la référence, mais ici le rapport humain/machine est inversé. Selon Balacheff (2022), l'IA est une propriété des machines qui présentent certains comportements qui frappent par leur intelligence, rappelant qu'il s'agit d'un jugement sous-tendu par une sorte d'empathie humaine. Autrement dit, l'intelligence ne vient pas de la machine, mais du regard humain qui la voit ou que se voit interagir avec elle. Peu importe la perspective, il semble que le lien commun entre l'IA et la didactique des mathématiques passe d'abord par l'intelligence, comme on peut le voir dans la carte mentale à la Figure 1. Dans cette structure arborescente, les sommets sont des articles encyclopédiques et les branches des liens de voisinage. Par rapport

à l'intelligence du centre, on remarque que l'IA et les sciences cognitives figurent dans son voisinage immédiat. On connaît bien les liens historiques entre la didactique des mathématiques et les sciences cognitives depuis les années 1980, voire les acquis de la psychologie cognitive et, en particulier, les apports théoriques plus anciens de l'épistémologie génétique de Jean Piaget.



*Figure 1. – Carte mentale de l'intelligence dans l'Encyclopædia Universalis (2022).*

Des points de vue précédents, on en tire que l'IA est à la fois une histoire de machine, un prolongement modélisé de l'humain et un partenariat humain-machine. Si l'on revient un peu sur la notion d'intelligence, l'idée originelle de faculté de comprendre, de connaître ou de saisir par la pensée demeure très orientée sur l'humain. Malgré cela, avec leur mémoire et leur capacité de calcul prodigieuses, certaines machines réussissent très bien à donner des réponses comme les humains les plus performants, à l'instar du Deep Blue d'IBM au jeu d'échecs ou du logiciel Seek d'iNaturalist pour explorer la faune et la flore qui nous entourent.

Dans la théorie des intelligences multiples d'Howard Gardner (2008), on y voit facilement une manifestation des intelligences logico-mathématique, spatiale et naturaliste. Cependant, dans quelle mesure une machine serait-elle capable d'imiter les autres types d'intelligence, comme les intelligences musicale, interpersonnelle ou existentielle ? Dans un contexte d'apprentissage ou d'utilisation de machines, la notion d'interaction avec un milieu semble incontournable, fût-il un milieu matériel, virtuel, social ou symbolique qui véhicule des connaissances mathématiques. On gagne alors à retenir de l'intelligence un sens issu traditionnellement de l'écologie, c'est-à-dire l'aptitude d'un être vivant, mais aussi d'un outil informatique, à s'adapter à une situation nouvelle, à comprendre et à résoudre certaines difficultés, à donner un sens aux choses qui l'entourent ou, notamment chez l'humain, à agir avec discernement. L'intelligence se décrit alors comme une faculté d'adaptation (apprentissage pour s'adapter au milieu) ou au contraire, une faculté de façonner le milieu pour l'adapter à ses propres besoins, dans une sorte de mutualisation de moyens. La notion d'intelligence augmentée dans l'interaction de Douglas Engelbart (1962) devient alors une référence de choix pour mettre en valeur l'apprentissage instrumenté ou le nouveau travail mathématique qui s'enrichit avec l'usage d'une grande variété d'artéfacts numériques.

L'augmentation de l'intelligence qui en résulterait serait caractéristique d'un système sujet-milieu en interaction, typique de celui que l'on retrouve dans la théorie des situations didactiques en mathématiques de Guy Brousseau (1998), alors que c'est le sujet qui prend l'initiative d'un questionnement avec un milieu « artificiel » partenaire dans la construction des connaissances. La machine pourra-t-elle un jour apprendre de cette intelligence augmentée en vue de se bonifier ? Enfin, que pouvons-nous dire de l'intelligence collective qui aurait fait le succès de Sapiens comparativement à notre cousin néandertalien. En effet, selon Joseph Henrich (2021) :

La sélection naturelle a favorisé l'apprentissage culturel des individus les plus doués de notre espèce. Ce phénomène a lancé Homo sapiens sur une voie inédite de l'évolution, aucunement observée jusqu'alors dans la nature. (...) Au bout de plusieurs générations, ce processus nous a permis de nous doter de pratiques et de techniques qu'il n'aurait pas été possible d'élaborer individuellement en une seule vie, en comptant uniquement sur notre intelligence et notre expérience. C'est l'ensemble des connaissances que nous avons acquises qui constitue aujourd'hui notre intelligence collective.

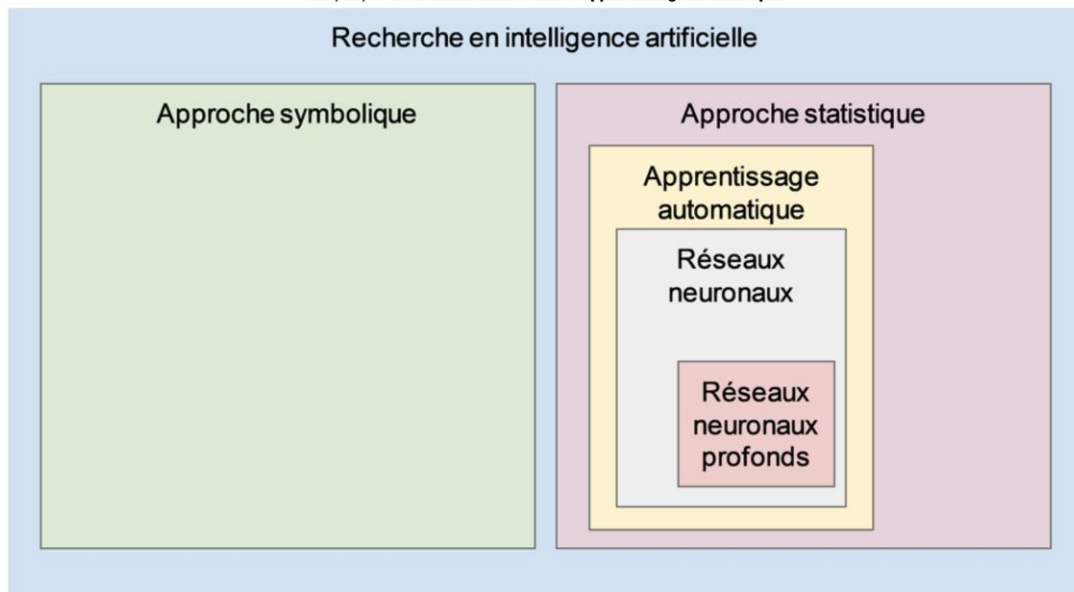
Pour pasticher l'univers des personnages de bandes dessinées, on sait qu'en Amérique du Nord, les héros inspirés de l'univers Marvel sont souvent des self-made-man (autodidactes ?) qui ont leur force intérieure et physique, mais qui sont seuls avec ça (Lalonde, 2022). Quand ils impliquent quelqu'un, ils le mettent à risque. Pour le héros des mangas japonais, dès que celui-ci essaie de se séparer des autres et qu'il pense que seul, il va réussir, il devient soudainement le méchant... Bref, si l'on cherche à se débrouiller tout seul, on te dit que ce n'est pas comme ça que l'on va gagner, car on a besoin des autres. Bien entendu, la notion du collectif peut s'interpréter comme une recherche d'harmonie contre la mise en valeur individuelle, mais sa portée sous-entendue est bien plus forte. Dans la construction des connaissances, le milieu est aussi un milieu social, toute forme d'intelligence en a besoin pour se développer. Comment l'IA pourrait-elle intégrer, en temps réel, l'intelligence collective ? Si toute solution passe par un dialogue permanent entre la didactique et l'informatique en vue de la conception et de l'usage des machines, il semble plus facile pour l'humain d'arriver à un consensus que pour la machine.

#### INTERACTIONS ET RESPONSABILITES MUTUELLES DANS LE RAPPORT INFORMATIQUE/DIDACTIQUE

À notre avis, pour être réellement intelligents, les systèmes de l'IA doivent d'abord rester suffisamment souples pour s'adapter à l'évolution naturelle du travail mathématique en classe, tout en laissant le paramétrage à l'enseignant ou au formateur. S'il est techniquement possible de concevoir des programmes qui ne sont pas complètement déterministes, comme les réseaux de neurones artificiels capables d'apprendre et d'autoévoluer, les machines ne se posent pas de question. Dans la quête d'une pensée artificielle, il faut certainement éviter de confondre modèle et objet du modèle : l'idée d'un partenariat humain-machine est bien plus intéressante que le développement d'une machine autonome. Par ailleurs, si l'on connaît suffisamment les ressources, les objectifs et les orientations d'une classe, on peut arriver à comprendre, expliquer et modéliser des actions et des décisions qui semblent inhabituelles ou anormales pour un œil extérieur. L'intelligence se révèle alors dans un processus itératif de convergence entre les effets a priori et les effets observés qui s'affinent progressivement à l'usage, en espérant libérer le côté lumineux de l'incertitude ou profiter des échecs au cours de l'interaction. Dans l'enseignement des mathématiques, il semble donc que l'IA ne peut être formulée uniquement sur le plan de la machine, mais bien en termes d'activité finalisée avec des humains et orientée vers ceux-ci. Si notre point de vue est déjà proche de la théorie des situations didactiques en mathématique, il est tout aussi proche de l'idonéisme de Ferdinand Gonseth par rapport à une double préoccupation de vérité et de réalité. Avec la notion d'espace de travail idoine qui figure

quelque part à mi-chemin entre l'espace du sujet et l'espace de référence, la théorie des espaces de travail mathématiques (Kuzniak, Montoya- Delgadillo et Richard, 2022) propose un modèle privilégié pour penser et interpréter l'interaction humain-machine au cours du travail mathématique potentiel ou réel à l'école.

Graphique 1.6. Relation entre l'IA et l'apprentissage automatique



Source : Fourni par le programme Internet Policy Research Initiative (IPRI) du Massachusetts Institute of Technology (MIT).

Figure 2. – Les deux types d'approches dans la recherche en IA (OCDE, 2019).

Lorsqu'on regarde d'abord du côté machine, l'IA peut se concevoir comme la simulation de processus d'intelligence humaine par des artéfacts qui effectuent des tâches, et plus particulièrement, à l'aide de systèmes informatiques. Ces processus comprennent une phase d'apprentissage, c'est-à-dire l'acquisition d'information et ses règles d'utilisation, une phase de raisonnement, soit l'utilisation de règles pour tirer des conclusions approximatives ou définitives, et enfin une phase d'autocorrection. En guise d'exemples, l'IA est utile pour l'automatisation, l'apprentissage machine, la vision par ordinateur, le traitement du langage naturel, la robotique, la recherche d'invariants ou l'évaluation de risques par simulation et visualisation. Bien entendu, elle résulte souvent de combinaisons plus ou moins sophistiquées de ces techniques, comme pour le développement de voitures autonomes (vision par ordinateur, reconnaissance d'images, apprentissage profond, automatisation), ou pour les diagnostics médicaux (reconnaissance d'images, apprentissage profond, reconnaissance vocale, formulation d'hypothèses et schéma de confiance). Dans la recherche en IA, on reconnaît deux types de démarches fondamentales (Fig. 2) : l'approche symbolique, qui préserve le lien causal, mais dont la résolution s'accompagne souvent d'un problème de temps de calcul exponentiel (algorithme en force brute), et l'approche statistique, pour laquelle la stratégie de résolution paraît plus efficace, mais qui engendre un effet boîte noire au cours du processus (apprentissage automatique profond). Ce qui fait qu'on ne connaît pas nécessairement la mécanique interne qui produit l'extrait à partir des intrants, contrairement à l'approche symbolique qui, théoriquement, peut être mise à plat. Cela soulève plusieurs questions en matière de contrôle et de validité des connaissances produites par la machine.

Avant d'introduire quelques enjeux qui concernent la didactique des mathématiques, allons-y d'une petite comparaison bien de saison au moment d'écrire ces lignes. Quiconque fait du patin à glace ou du ski de fond le sait : pratiquer un sport de glisse exige, pour avancer, d'accepter une perte de contrôle dans le mouvement. Mais on sait aussi que cette perte de

contrôle doit être maîtrisée pour éviter le dérapage et les chutes. Il s'en est de même en intelligence artificielle avec l'effet boîte noire de l'approche statistique, dont une perte de contrôle sous-jacente dans l'articulation des connaissances mathématiques et son potentiel de créer des distorsions dans les réponses de la machine. Osons alors poser quelques questions oratoires. Comment garantir la fiabilité ou le domaine de validité de l'extrait, c'est-à-dire engendrer du vrai à partir du vrai ou s'assurer de la production de connaissances non contradictoires ? Sommes-nous dans un processus de traduction ou de modélisation qui sous-entendent une sorte de simplification par rapport à la réalité de l'intrant ? Bref, comment être sûr que l'on participe encore au même mouvement ? Pour reprendre l'exemple des voitures autonomes, on sait que l'IA est amenée devant certaines questions éthiques qui paraissent insolubles. En effet, ces machines pourraient devoir décider qui vit et qui meurt en cas de défaillance des freins ou de collision inévitable (Lajoie, 2019). En prévision d'un cas d'urgence, dans quelle mesure pouvons-nous faire confiance aux réactions programmées ? Pouvons-nous même nous mettre d'accord sur la manière dont ces véhicules devraient réagir ? Quant au diagnostic médical, est-il acceptable de recevoir d'une machine un jugement sur l'évolution future d'une maladie, comparativement au pronostic établi par un médecin assisté par l'IA ?

Lorsqu'on considère plutôt le côté humain, c'est l'apprentissage instrumenté qui nous touche. On pourrait prendre telles quelles les réalisations informatiques de l'IA, mais celles-ci n'ont pas été conçues à partir de modèles de connaissances ou de raisonnement issus de la didactique des mathématiques. C'est pourquoi il faut situer l'interaction humain-machine au cœur de la problématique et retenir l'idée d'idoneité interactive qui intègre à la fois la perspective du concepteur (dispositif didactique, informatique) et celle de l'utilisateur (élève, enseignant, formateur) au cours d'un dialogue permanent entre modèles didactiques et informatiques. Dans l'ouvrage de Richard, Vélez & Van Vaerenbergh (2022), on souligne la contribution de l'IA à l'enseignement des mathématiques, notamment par la création de milieux d'IA pour la réalisation du travail mathématique à l'école. On traite aussi de l'apprentissage des mathématiques assisté par l'IA et on discute du développement des nouvelles mathématiques dans le monde contemporain, dont un regard de la recherche empirique en vue de mieux comprendre le présent et l'avenir de l'IA dans l'enseignement des mathématiques. On propose une classification des systèmes d'IA pour l'enseignement des mathématiques (Van Vaerenbergh et Pérez-Suay, 2022), on montre l'utilité des outils de raisonnement automatisé avec GeoGebra (Kovács, Recio & Vélez, 2022) et on présente l'intelligence de QED-Tutrix comme un équilibre entre l'intelligence naturelle de l'utilisateur qui est en interaction avec l'intelligence artificielle du système tuteur (Font, Gagnon, Leduc & Richard, 2022). Nous revenons sur ces systèmes à la section suivante.

## LA QUESTION DU SAVOIR ET DES CONNAISSANCES : L'EXEMPLE DE LA GEOMETRIE

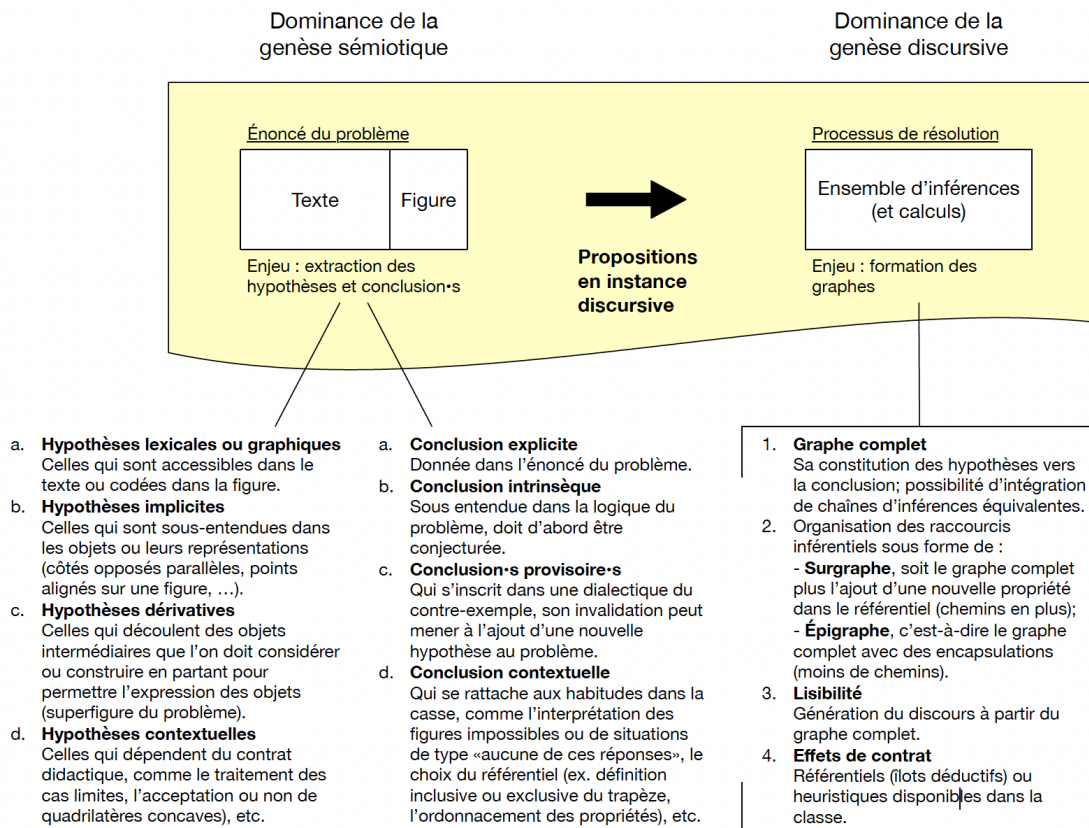
Dans un contexte scolaire, la géométrie porte en elle une spécificité aux accents sémiotiques qui n'est pas nécessairement le cas de tous les signes mathématiques : les figures sont à la fois la représentation d'une référence instituée (l'idéal ou le concept figural absent que l'on dessine) et la signification d'un objet qui est son propre modèle, le dessin étant aussi une forme. Lorsque la figure se pose à l'interface d'un dispositif de géométrie interactive, elle apparaît aussi comme une situation que l'on peut manipuler, paramétrer ou interroger, le contrôle sur les propriétés signifiées est typique de l'interaction entre un utilisateur et un milieu. On peut parler de figure dynamique opératoire (Coutat, Laborde et Richard, 2016), un idéal instrumenté qui émerge dans les nouvelles mathématiques et qui se distingue des représentations sémiotiques ou discursives standards. Si la modélisation des connaissances pour stimuler l'IA doit déjà se réfléchir dès la conception des techniques informatiques mises en œuvre, il faut qu'elle

introduise les caractéristiques du travail mathématique d'aujourd'hui avec ses valences sémiotiques, discursives et instrumentales. Quant au savoir géométrique de référence, il dépend du référentiel, pour une personne ou pour une institution, autant sur le plan mathématique que scolaire. Ces questions sont habituelles dans la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998), la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1992) et la théorie des espaces de travail mathématique (Kuzniak, Montoya-Delgado et Richard, 2022). Sans entrer dans le détail, nous pouvons mentionner que la notion de vigilance épistémologique rend compte d'un effort de cohérence nécessaire entre le travail du mathématicien et le travail mathématique dans un contexte scolaire. Dans une perspective instrumentée par l'IA, le savoir géométrique est aussi celui qui se crée dans l'usage avec un artefact numérique, ce qui rapproche savoir et praxéologie à la manière de la théorie anthropologique du didactique.

Les Outils de Raisonnement Automatisée (ORA) dans Géogebra (GGB) et le système tuteur intelligent QED-Tutrix (QEDX) adoptent des approches symboliques. La principale différence entre ces systèmes est qu'avec les ORA de GGB, les connaissances géométriques sont modélisées par l'algèbre, alors que dans QEDX, elles restent dans l'univers géométrique. Depuis 2016, les objets dans GGB ont été redéfinis symboliquement, ce qui permet d'employer le calcul symbolique pour trouver des relations entre des éléments géométriques, tester la véracité ou la fausseté d'une affirmation, ou même découvrir des hypothèses supplémentaires afin qu'une affirmation donnée soit valable dans le contexte d'un problème. Par rapport aux logiciels de géométrie dynamique précédents, le passage vers le symbolique est un changement majeur pour lequel nous sommes loin d'en avoir exploré tous les bénéfices. Pour l'utilisateur, la valeur épistémique des réponses qu'il reçoit de la machine vient de dépasser les approches numériques et ses limites dans la discrétisation du continu. Ainsi, lorsqu'un usager questionne un oracle (ex. les objets sont-ils parallèles et si oui, sous quelles conditions ?), l'effet boîte noire de la vérification par échantillonnage disparaît au profit d'une réponse vraie ou fautive sous certaines conditions dans une logique modale. Cependant, avec sa puissance de calcul et la modélisation de la géométrie par l'algèbre, de nouveaux effets « indésirables » se produisent pour l'utilisateur. Tandis qu'avec l'approche symbolique, on peut en principe détailler la mécanique interne qui produit la réponse, l'utilisateur ne connaît pas cette mécanique qui lui est inaccessible. De plus, la réponse obtenue n'est pas toujours facilement interprétable dans la situation d'origine, le modèle géométrique de référence en 2D fonctionne dans  $\mathbb{R}^2$ , tandis que les opérateurs à l'interne travaillent dans le plan complexe. Malgré cela, il est incontestable que les outils de raisonnement automatisé impressionnent par l'amplitude du champ des problèmes qu'ils permettent déjà de résoudre.

Le système QEDX a été créé pour soutenir la résolution de problèmes complexes en géométrie. Développé conjointement en didactique et en génie informatique dans une perspective de travail mathématique, il a été conçu de façon à intégrer les utilisateurs, et ce très tôt dans le processus de conception. Ainsi, l'élève qui résout un problème de géométrie peut construire une figure dynamique, raisonner sur celle-ci, en dégager une conjecture, l'écrire, la démontrer ou la réfuter. Au besoin, un agent pédagogique virtuel répond aux difficultés de chaque élève par des messages sous forme de phrases ou de problèmes qui s'adaptent au comportement et à la stratégie de chacun. L'intelligence du système tuteur doit être capable de communiquer avec l'élève dans la logique du problème, avec son langage et ses contraintes, et anticiper des moments de blocages qui se lient aux connaissances en jeu. Par ses possibilités de messages discursifs (propositions verbales) et de messages cognitifs (problèmes connexes), le tuteur reste au sein du modèle géométrique de l'utilisateur. Il s'agit d'un avantage dès qu'on cherche à produire l'articulation d'un raisonnement humain ou produire des preuves qui sont lisibles. Toutefois, l'approche symbolique du système sous forme de graphe inférentiel exige la production préalable de toutes les preuves possibles, ce qui soulève un enjeu combinatoire

bien connu en informatique. Pour mieux cerner les enjeux de l'évolution de la déduction automatique et des constructions dynamiques en géométrie, on peut se référer à la contribution de Quaresma (2022). En revanche, l'organisation déductive de QEDX permet d'engager les élèves dans des preuves instrumentales, bien au-delà des preuves discursives traditionnelles. En effet, pour certaines étapes de raisonnement, il est possible d'introduire un outil technologique en interaction en guise de justification de la déduction, prolongeant de ce fait la structure discursive du système, comme la construction d'une figure dynamique, l'exécution d'un algorithme ou la modélisation d'une situation réelle. Le fait de pouvoir agir au coeur des justifications est compatible avec un prolongement vers des approches statistiques (méthode mixte de recherche en IA).



**Figure 3.** – Genèses virtuelles et enjeux principaux qui situent l'activité mathématique dans le système tuteur intelligent QED-Tutrix pour l'extraction de l'information de problèmes. Les besoins d'automatisation du processus répercutent sur l'identification et l'organisation des hypothèses, des conclusions et des graphes.

À une époque d'automatisation de procédures routinières par des algorithmes, notre système d'éducation doit dépasser le traditionnel transfert de connaissances par une habileté à résoudre des problèmes difficiles et à concevoir des solutions, comme le font effectivement les scientifiques, les chercheurs, les médecins ou les ingénieurs. Des systèmes comme QED-Tutrix offrent des environnements sûrs pour expérimenter, échouer puis réessayer, et surtout, pour miser sur la réussite en résolution de problèmes complexes. Si l'on imagine un peu la suite, on peut facilement combiner l'approche discursive de QEDX avec celle des ORA de GGB. Par exemple, on sait que tout problème de preuve modélisé se calque sur la forme : « étant donné les hypothèses, démontrer la conclusion ». Puisque l'approche discursive permet la génération automatique de problèmes et de solutions, les ORA sont susceptibles d'intervenir à l'interne pour vérifier la cohérence de certaines inférences, participer à la simplification des graphes ou contrôler le passage d'une proposition figurale à une proposition discursive. De plus, elles

peuvent aider à l'extraction de l'information signifiante (propositions en instance discursive, Fig. 3) issue de problèmes dans des manuels scolaires, dans le but d'adapter le système tutoriel à la réalité d'un contrat didactique. Ces possibilités soulèvent de nouvelles questions, comme la pertinence des problèmes générés ou l'à-propos des raccourcis inférentiels selon les habitudes du contrat. En revanche, l'intérêt pour la recherche d'invariants dans la pertinence de problèmes ou au cours de la gestion des inférences d'une solution donnée est à noter, il s'agit même d'un avantage pour le forage exploratoire de données en IA ou la formation de catégories conceptualisantes en sciences humaines (Paillé et Mucchielli, 2021). Enfin, si l'on considère l'historique des processus de résolution de l'élève et que l'on applique des techniques d'apprentissage profond pour repérer des invariants dans le travail mathématique, on obtient soudainement de l'information sur le référentiel effectif de l'élève à travers ses conceptions. Cela complète, au besoin, ce que nous savons sur le référentiel potentiel ou présumé de l'enseignant à travers ses définitions mathématiques, propriétés caractéristiques, théorèmes et problèmes à résoudre.

Par ses effets « boîte noire », il est sûr qu'un défi de taille attend l'IA pour le contrôle des connaissances lorsqu'on s'intéresse aux approches symboliques modélisées ou aux approches statistiques. Malgré cela, une nuance s'impose puisqu'un même type de problème survient dès qu'il est question d'implicites, une réalité incontournable en classe de mathématique. On retrouve des effets similaires avec : la notion de contrat didactique et les responsabilités réciproques dans les rapports enseignant/élèves au savoir; les objets mathématiques non ou mal définis en permanence, à l'exemple de la conduite des nombres réels qui renferment de «mystérieux» processus jamais clarifiés par l'enseignant; les propriétés mathématiques en usage dont la démonstration semble inaccessible pour toujours; les inévitables obstacles didactiques ou épistémologiques constitutifs de la connaissance; le niveau de granularité des étapes de résolution d'expressions mathématiques supposées efficaces, mais dont la gestion appartient au destinataire dans une relation de communication; le domaine de validité des conceptions de l'apprenant après la dévolution de nouveaux problèmes; les réponses «raisonnées» d'un artefact numérique dans le style de l'oracle qui changent de modèle en cours de route, etc. Tout cela et bien plus encore fait qu'en classe de mathématique, on doit forcément accepter une perte de contrôle, tout comme dans un sport de glisse, encore faut-il que cette perte soit comprise, acceptée ou traitée d'une façon ou d'une autre par les protagonistes. Dans la théorie des situations didactiques : « les connaissances sont les moyens transmissibles (par imitation, initiation, communication, etc.), mais non nécessairement explicites, de contrôler une situation, et d'y obtenir un certain résultat conformément à une attente et à une exigence sociale.» (Brousseau et Centeno, 1991). On en retient qu'à la limite, on retrouve des effets boîte noire inhérents à toute connaissance mathématique et à son rôle de contrôle d'une situation en classe. Quant au lien avec le savoir, puisqu'« [il] est une connaissance qui contrôle une situation et ses transformations, elles-mêmes inductrices de connaissances» (Conne, 1992), on en revient ici à la question du référentiel que nous avons évoqué un peu plus haut et à la problématique de trouver des façons d'intégrer toutes ces mathématiques que l'on ne saurait voir, pour suivre les traces de Molière, dans le développement des techniques de l'IA adaptées à la didactique.

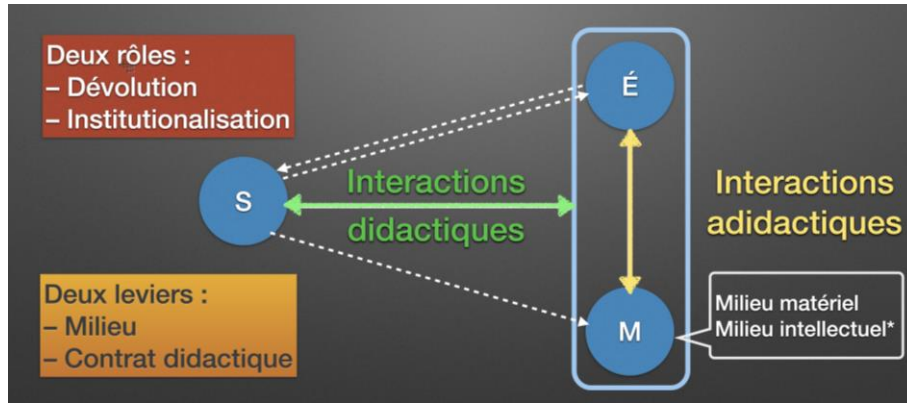
## LES THEORIES QUI NOUS GUIDENT

Jusqu'ici, nous avons insisté sur trois théories issues de la culture didactique. La relation étroite et singulière qui lie la Théorie des Situations Didactiques (TSD) et la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) est bien connue, tandis la plus récente Théorie des Espaces de Travail Mathématique (ThETM) est déjà vue comme une fille aînée de la TSD (Radford, 2017). Il faut souligner l'intérêt particulier de la ThETM pour la manière dont les artefacts influencent et

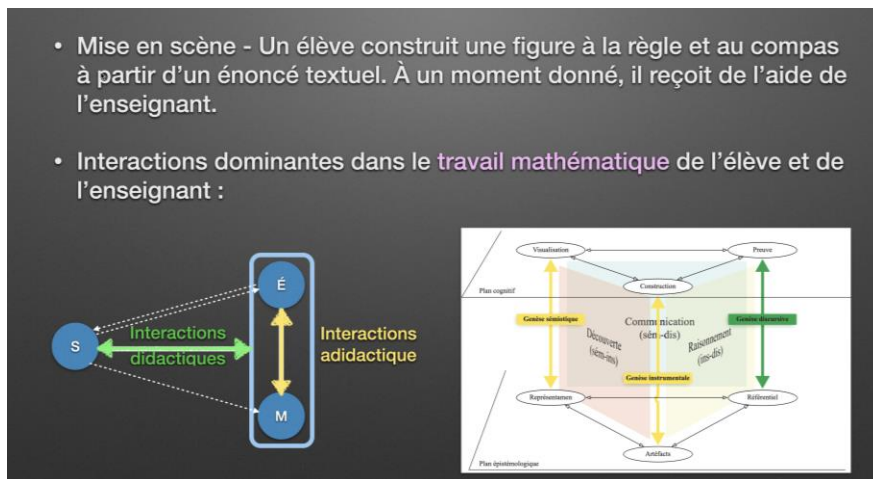
transforment le travail mathématique. Après quelques considérations historiques sur le travail mathématique lorsque des outils symboliques ou mécaniques, et des méthodes algorithmiques sont utilisés, Flores-Salazar, Gaona et Richard (2022) définissent le nouveau travail mathématique en réfléchissant à l'interaction entre les humains et les machines. L'adaptation dans un processus d'idonéité entre le projet d'enseignement et le projet d'apprentissage, ainsi qu'entre l'intention du concepteur et le travail effectué par l'utilisateur sont discutés. La notion de genèse instrumentale, déjà introduite par Vérillon et Rabardel (1995) en ergonomie cognitive ou, si l'on veut, en psychologie du travail, prend un sens didactique émergent dans la ThETM. À ce propos :

As for the instrumental genesis in the ThMWS, it is first an objective entity, linking tangible artifacts and observable processes of construction. Because it also comprises a conceptual dimension transforming both the user and the mathematical knowledge, it is compatible with Vérillon and Rabardel's idea of instrumental mediation. However, instrumental genesis in the theory of MWS is based on different choices compared to Vérillon and Rabardel's notion: on the one hand it is part of a theorization of mathematical work in educational settings not limited to the use of instruments, and on the other hand it does not theorize about the transformation occurring in the instrumental genesis. The two complementary viewpoints, psychological and institutional (one providing insight into the cognitive work, the other into how techniques are understood and implemented), derived from the works of Vérillon and Rabardel, and of Chevallard, can therefore help to "flesh out" an analysis of the instrumental genesis in a particular MWS, on the condition of being cautious not to merge or confuse ideas drawn from different theoretical perspectives. (Lagrange et Richard, 2022, p.226)

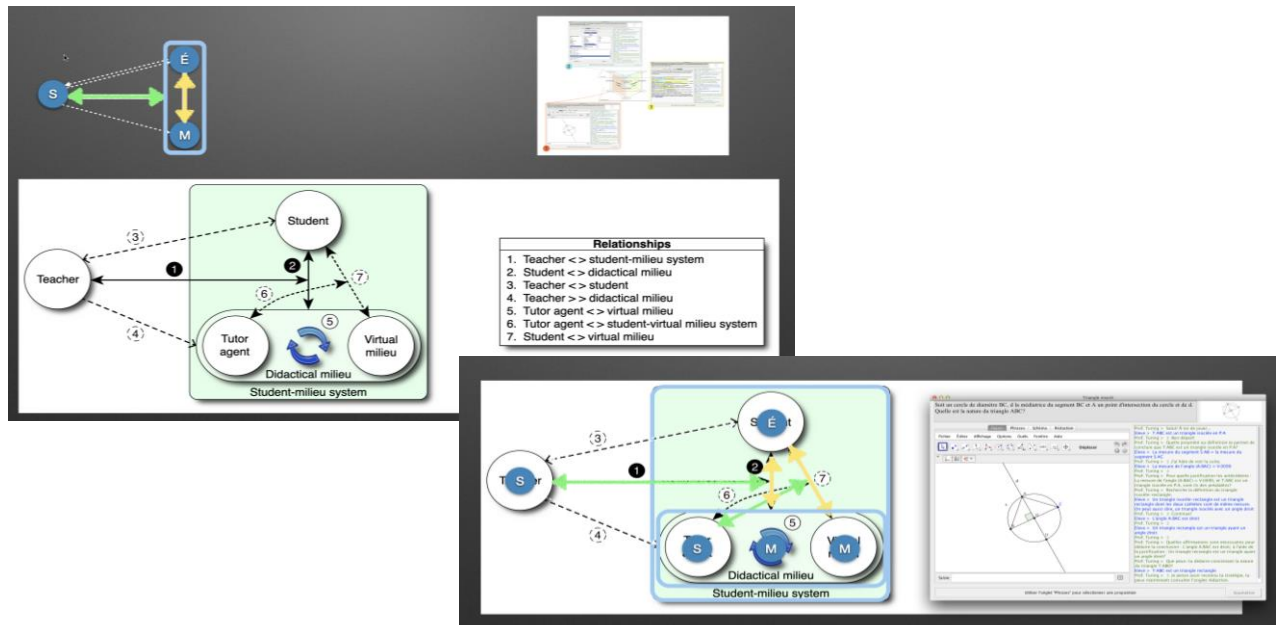
Avec sa danse des genèses sémiotiques, discursives et instrumentales qui s'entrelacent et qui rythment un travail proprement mathématique, la ThETM se rattache facilement à l'IA dans la poursuite de la TSD (Fig. 4 et Fig. 5). Déjà, la ThETM est particulièrement utile pour la conception d'un dispositif didactique ou informatique qui se fonde sur l'idée d'interaction entre un sujet épistémique et un milieu épistémologique ; que ce soit depuis la conception du dispositif jusqu'à l'évaluation de l'activité mathématique, en passant par le raffinement progressif du dispositif dans l'usage avec des sujets. De façon plus fine, si l'on reprend l'idée des deux systèmes en interaction dans la TSD, conjointement au modèle de Balacheff et Margolinas (2005) pour raisonner sur les conceptions des élèves (connaissances personnelles), on peut étudier les interactions principales de la classe en matière d'interactions didactiques et a-didactiques (Fig. 4). Bien que la conception de l'élève est caractéristique d'un système élève-milieu en évolution, c'est l'élève qui conserve l'initiative du questionnement, même lorsque des réponses sont apportées par une machine avec une certaine autonomie par rapport aux connaissances l'élève. Toutefois, les conceptions instrumentées sont souvent différentes des conceptions traditionnelles, comme s'il fallait avoir une petite machine avec soi pour la révéler lorsque nous en avons besoin. À cause des effets boîtes noires de l'IA et en dépit du fait que le questionnement demeure chez l'élève, certaines rétroactions de la machine peuvent soudainement changer la valeur épistémique de la connaissance en jeu. Elles peuvent même la modifier à la baisse, entretenant l'illusion de préserver un même niveau de conviction ou une même valeur de vérité. Il est alors possible de traiter les interactions par rapport à deux milieux, un milieu nécessaire à la conception instrumentée et un milieu qui lui est contingent. Cela permet de mieux comprendre le domaine de validité de la conception supposée ou d'anticiper sur quoi devrait porter l'action tutrice, à l'égal de certains systèmes tuteurs intelligents comme QED-Tutrix (Fig. 6).



**Figure 4.** – Concepts clés dans la TDS. Au centre, le diagramme de Brousseau (1998, p. 92) montre que l’enseignant S interagit principalement avec un système élève-milieu lui-même en interaction. L’enseignant ici joue deux rôles principaux et, pour les assumer, il dispose de deux leviers. Le *a privatif* pour qualifier l’interaction en jaune signifie qu’il s’agit d’un milieu pour lequel l’enseignant a réussi à faire disparaître sa volonté, ses interventions, en tant que renseignements déterminants qui pourraient influencer l’acquisition des connaissances.



**Figure 5.** – Situation élémentaire pour illustrer l’articulation des interactions entre la TSD et la ThETM. Le diagramme de Brousseau (Fig. 3) est placé à la gauche du modèle des espaces de travail mathématique, alors que les plans verticaux se lient à différentes phases du travail mathématique comme la découverte, le raisonnement et la communication. Les genres activés sont tramés de la même couleur que les observables didactiques et a-didactiques.



**Figure 6.** – Dans un système tuteur intelligent comme QED-Tutrix, des interactions didactiques et adidactiques sont aussi encapsulées dans le milieu. En intégrant un milieu virtuel dans le milieu didactique traditionnel, on peut distinguer l'action du tuteur de l'action de l'enseignant sur des systèmes qui se distinguent eux-mêmes selon la nature du milieu en jeu et la recherche d'un équilibre entre l'intelligence naturelle des sujets et l'intelligence artificielle de la machine.

Le lien historique et naturel entre l'IA et la didactique des mathématiques est bien établi. On peut prendre en exemple l'ouvrage *Didactique et intelligence artificielle* (Balacheff, 1994), publié il y a aura bientôt 30 ans, qui indiquait en quelque sorte que les progrès de l'IA avaient ouvert la voie à un courant de recherche vigoureux pour le développement d'environnements informatiques pour l'apprentissage humain. Mais à la suite d'une première période d'enthousiasme, où l'on s'imaginait qu'on arriverait très vite à faire des choses incroyables, on est passé par une période un peu plus sombre de désillusion où l'on a constaté qu'on avait un peu sous-estimé les difficultés. Aujourd'hui, par un retour de situation paradoxale, il semble que l'IA rejoigne la didactique avec ses approches par la résolution de problèmes non routiniers, lesquelles passent par des phases d'apprentissage, de modélisation et de prédiction qui évoquent aussi bien le travail mathématique que la conception de solutions par des spécialistes. Si l'IA a un rôle à jouer pour favoriser la réussite scolaire et apporter un soutien au professeur dans le suivi des acquis, une collaboration effective entre un enseignant et un tuteur ne peut s'engager sans l'éclairage de la didactique des mathématiques. Le tuteur doit comprendre les besoins didactiques de l'enseignant pour se mettre à son service : c'est au système à s'adapter à l'humain et non pas le contraire. L'intégration du « penser machine » au « penser humain » en faisant appel à l'intelligence artificielle est une question antérieure au développement d'outils numériques par des informaticiens seuls. En étudiant les phénomènes d'enseignement et d'apprentissage humain sous l'exigence du travail mathématique, la didactique continue d'être intimement liée à la découverte, à la résolution de problèmes, au raisonnement et à la communication à l'aide de langages, avec ou sans moyens technologiques, avec ou sans l'aide de l'IA. Si l'on reprend l'idée fondamentale et commune comme quoi le seul moyen de faire des mathématiques est de chercher et résoudre certains problèmes spécifiques et, à ce propos, de poser de nouvelles questions, il en découle qu'en étant indispensable au travail mathématique, chaque problème représente une occasion d'apprentissage. Pour peu que l'élève en accepte la responsabilité, le processus de résolution nous informe sur l'apprentissage même, aussi bien au moment d'un blocage, du dépassement d'un obstacle ou de la simple réussite du

problème. Puisqu'avec ses techniques traditionnelles, l'IA est déjà utile, elle gagne à se développer conjointement en didactique et en génie informatique dans une perspective de travail mathématique et à se concevoir de façon à intégrer les utilisateurs, et ce très tôt dans le processus de conception.

L'étude sur les systèmes d'intelligence artificielle de Van Verenberg et Pérez-Suay (2022) est déjà éloquente pour préparer l'avenir. Le texte part des nouvelles générations de calculatrices et des tuteurs intelligents pilotés par des données, pour s'ouvrir sur une taxonomie des techniques d'IA pour l'enseignement des mathématiques. Ils distinguent les extracteurs d'information des moteurs de raisonnement, en passant par les « explicateurs », qui traduisent les solutions machines en une suite d'étapes logiques, lisibles et compréhensibles pour l'humain, de même que le guidage de données provenant de sources différentes pour en déduire des modèles qui peuvent y aller de prédictions. Lorsqu'ils revisitent le présent, c'est pour aborder la question des calculatrices fondées sur l'IA et les systèmes tuteurs émergents, avec quelques commentaires sur « modélisation étroite » des élèves que l'on retrouve encore trop souvent dans systèmes actuels et souligner quelques enjeux liés à l'exploration, la créativité et l'aléatoire en classe de mathématique. On sait bien que la modélisation de l'apprenant et de la situation didactique en général est en soi un objectif très ambitieux. Mais il est aussi nécessaire, non seulement parce qu'on veut profiter du mouvement de l'IA et de la recherche pour l'intérêt collectif, mais surtout parce que la relation naturelle qui unit mathématique, didactique et informatique nous y invite pressément. Si la grande contribution de l'intelligence artificielle à l'enseignement des mathématiques passe par des environnements plus technologiques, plus personnels et plus stimulants, c'est certainement parce qu'ils auront été conçus pour développer les compétences professionnelles de l'enseignant, et surtout parce qu'elle favorisera le travail, l'acquisition de connaissances et le développement des compétences mathématiques, scientifiques et culturelles de l'élève.

#### RÉFÉRENCES

- BALACHEFF N. (1994) Didactique et intelligence artificielle. *Recherches en didactique des mathématiques* 14 (1/2) 9-4.
- BALACHEFF N. (2022). Foreword : AI for the Learning of Mathematics. In: RICHARD, P.R., VÉLEZ, M.P., VAN VAERENBERGH, S. (eds) *Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence. Mathematics Education in the Digital Era*, vol 17. Springer, Cham. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-86909-0>
- BALACHEFF, N. ET MARGOLINAS, C. (2005). Ckç, modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. In A. MERCIER, & C. MARGOLINAS (EDS.), *Balises pour la didactique des mathématiques* (pp. 75-106). Grenoble: La Pensée Sauvage.
- BARQUERO, B., BOSCH, M., ROMO, A. (2018). Mathematical modelling in teacher education: dealing with institutional constraints. *ZDM Mathematics Education*, 50(1-2), 31-43.
- BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- BROUSSEAU, G., ET CENTANO, J. (1991). Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 11(2.3), 167–210. <https://revue-rdm.com/1991/role-de-la-memoiredidactique-de-l/>
- CHEVALLARD, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 12(1), 73–112.
- CONNÉ, F. (1992). Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 12/2.3.
- COUTAT, S., LABORDE, C. ET RICHARD, P.R. L'apprentissage instrumenté de propriétés en géométrie : propédeutique à l'acquisition d'une compétence de démonstration. *Educ Stud Math* 93, 195–221 (2016). <https://doi.org/10.1007/s10649-016-9684-9>
- ENGELBART, D. C. (1962). *Augmenting Human Intellect: A conceptual framework*. Menlo Park, CA: Stanford Research Institute.
- FLORES-SALAZAR, J.V., GAONA, J. & RICHARD, P.R. (2022). Mathematical Work in the Digital Age. Variety of Tools and the Role of Geneses. In: KUZNIAK, A., MONTÓYA-DELGADILLO, É ET RICHARD, P.R. (2022). *Mathematical Work in Educational Context. Mathematics Education in the Digital Era*, vol 18. Springer, Cham. <https://link.springer.com/book/9783030908492>
- FONT, L., GAGNON, M., LEDUC, N. & RICHARD, P.R. (2022). Intelligence in QED-Tutrix: Balancing the Interactions Between the Natural Intelligence of the User and the Artificial Intelligence of the Tutor Software. In: RICHARD, P.R., VÉLEZ, M.P., VAN VAERENBERGH, S. (EDS) *Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence. Mathematics Education in the Digital Era*, vol 17. Springer, Cham. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-86909-0\\_3](https://doi.org/10.1007/978-3-030-86909-0_3)
- GARDNER, H. (2008). *Les intelligences multiples - La théorie qui bouleverse nos idées reçues*. Les Éditions Retz. ISBN : 978-2-7256-2787-8

Vandebrouck, F., Emprin, F., Ouvrier-Bufferet, C. & Vivier, L. (dir.) (2023). *Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques - Preuve, Modélisation et Technologies Numériques*. Volume des ateliers des actes de EE21.

- HENRICH, J. (2021). *L'intelligence collective : le succès de Sapiens*. Éditions MultiMondes. ISOfocus Novembre-décembre 2019 consulté le 1 mars 2022. URL : [https://www.iso.org/files/live/sites/isoorg/files/news/magazine/ISOfocus%20\(2013-NOW\)/fr/2019/ISOfocus\\_137/ISOfocus\\_137\\_fr.pdf](https://www.iso.org/files/live/sites/isoorg/files/news/magazine/ISOfocus%20(2013-NOW)/fr/2019/ISOfocus_137/ISOfocus_137_fr.pdf)
- KOVACS, Z., RECIO, T., VÉLEZ, M.P. (2022). Automated Reasoning Tools with GeoGebra: What Are They? What Are They Good For?. In: RICHARD, P.R., VÉLEZ, M.P., VAN VAERENBERGH, S. (EDS) *Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence. Mathematics Education in the Digital Era, vol 17*. Springer, Cham. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-86909-0\\_2](https://doi.org/10.1007/978-3-030-86909-0_2)
- KUZNIAK, A., MONTOYA-DELGADILLO, É ET RICHARD, P.R. (2022). Mathematical Work in Educational Context. The Perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces. *Mathematics Education in the Digital Era, vol 18*. Springer, Cham. <https://link.springer.com/book/9783030908492>
- LAGRANGE, J.B. & RICHARD, P.R. (2022). Instrumental Genesis in the Theory of MWS: Insight from Didactic Research on Digital Artifacts. In: KUZNIAK, A., MONTOYA-DELGADILLO, É ET RICHARD, P.R. (2022). *Mathematical Work in Educational Context. Mathematics Education in the Digital Era, vol 18*. Springer, Cham. <https://link.springer.com/book/9783030908492>
- LAJOIE, M. (2019). *Voitures autonomes qui sauver, qui sacrifier ?* Média consulté le 1 mars 2022 <https://ici.radio-canada.ca/info/2019/voitures-autonomes-dilemme-tramway/>
- LALONDE, C. (S.D.). L'année de la mangamania au Québec. *Quotidien Le Devoir*, [en ligne], consulté le 1 mars 2022. URL : <https://www.ledevoir.com/lire/662613/lecture-2021-l-annee-de-la-manga-mania-a-quebec>
- LOMAZZI, L., LAVOIE-MOORE, M., GELINAS, J. ET HEBERT, G. (2019). *Financer l'intelligence artificielle, quelles retombées économiques et sociales pour le Québec ?*, consulté le 1 mars 2022. URL : <https://irisrecherche.qc.ca/publications/financer-lintelligence-artificielle-quelles-retombees-economiques-etsociales-pour-le-quebec/>
- OCDÉ (2019), *L'intelligence artificielle dans la société*, Éditions OCDÉ, Paris, <https://doi.org/10.1787/b7f8cd16-fr>.
- PAILLE, P. ET MUCCHIELLI, A. (2021). *L'analyse qualitative en sciences humaines et sociales*, 5e édition. Paris : Armand Colin.
- QUARESMA, P. (2022). Evolution of Automated Deduction and Dynamic Constructions in Geometry. In: RICHARD, P.R., VÉLEZ, M.P., VAN VAERENBERGH, S. (eds) *Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence. Mathematics Education in the Digital Era, vol 17*. Springer, Cham. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-86909-0\\_1](https://doi.org/10.1007/978-3-030-86909-0_1)
- RABARDEL, P. (1995). *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains*. Paris : Armand Colin.
- RADFORD, L. (2017). On inferentialism. *Mathematics Education Research Journal*, 29(4), 493–508. <https://doi.org/10.1007/s13394-017-0225-3>
- RICHARD, J.-F. (S.D.). «INTELLIGENCE», Encyclopædia Universalis [en ligne], consulté le 1 mars 2022. URL : <http://www.universalis-edu.com/encyclopedie/intelligence/>
- RICHARD, P.R., VÉLEZ, M.P., VAN VAERENBERGH, S. (2022). Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence. *How Artificial Intelligence can Serve Mathematical Human Learning. Mathematics Education in the Digital Era, vol 17*. Springer, Cham. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-86909-0>
- VAN VAERENBERGH, S., PÉREZ-SUAY, A. (2022). A Classification of Artificial Intelligence Systems for Mathematics Education. In: RICHARD, P.R., VÉLEZ, M.P., VAN VAERENBERGH, S. (eds) *Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence. Mathematics Education in the Digital Era, vol 17*. Springer, Cham. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-86909-0\\_5](https://doi.org/10.1007/978-3-030-86909-0_5)
- VÉRILLON, P., & RABARDEL, P. (1995). Cognition and artefacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumental activity. *European Journal of Psychology of Education*, 10, 77–101.





**TITRE :**

**Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques : preuve modélisation et technologies numériques – Volumes des ateliers**

**COORDINATION :**

**Fabrice Vandebrouck , Fabien Emprin, Cécile Ouvrier-Bufferet & Laurent Vivier**

**RÉSUMÉ :**

**Cette brochure constitue le volume des ateliers de la 21ème école d'été de didactique des mathématiques qui s'est tenue du 18 au 24 octobre 2021 à Sainte Marie de Ré. L'école d'été est un lieu important de constitution de la communauté des didacticiens des mathématiques et de la définition de son activité. Elle offre aux participants une possibilité d'intervenir à différents niveaux (TD, séminaires, posters). Dans ce volume sont regroupés les textes des 7 ateliers et de la table ronde qui ont été présentés à l'école 2021.**

**Le document est destiné aux chercheurs en didactique des mathématiques, pour lesquels il constitue un outil de travail. Il permet d'étudier (ou du moins de commencer l'étude) de travaux innovants produits par des collègues. Cela peut également contribuer à l'ouverture de nouveaux terrains ou de nouvelles questions de recherche.**

**MOTS- CLÉS :**

**Didactique des Mathématiques**

**Éditeur: IREM de Paris**

Responsable de la publication: C.Hache

IREM de Paris – Case 7018

Université Paris Cité

75205 Paris cedex 13

irem\_de\_paris@univ-paris-diderot.fr

<https://irem.u-paris.fr/>

Dépôt légal : 2023

ISBN : 978-2-86612-407-6