



Actes du séminaire national de didactique des mathématiques

Année 2021

Édités par

Aurélie Chesnais & Hussein Sabra

PRESENTATION

Le séminaire de l'Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques (ARDM) a pour but de favoriser la mise en discussion et la diffusion des recherches en didactique des mathématiques. Il s'agit d'un outil que s'est donné l'ARDM pour soutenir la structuration de la communauté des chercheur-e-s de cette discipline. Ce séminaire a habituellement lieu 3 fois par an, une année sur deux, et 2 fois par an les années où l'ARDM organise le colloque de l'école d'été de didactique des mathématiques (EEDM). Il est organisé avec le partenariat de l'université Paris Diderot, du LDAR et de l'IREM de Paris.

Sous réserve de l'accord des intervenant-e-s, les présentations sont filmées et diffusées [en ligne](#). Le travail de capture, de montage et d'hébergement des vidéos est assuré par l'IREM de Paris.

Les auteurs sont également invités à rédiger un texte suite à leur communication. Par ailleurs, depuis 2014, le groupe des jeunes chercheur-e-s de l'ARDM organise une session de posters durant les sessions du séminaire. Les textes des communications ainsi que les textes courts associés aux posters sont ensuite regroupés en un volume. Le présent ouvrage regroupe les textes issus des séminaires de l'année 2020. Malheureusement, aucune proposition de poster n'a été faite pour les séminaires de 2020.

Les deux séminaires de l'année 2020 ont eu lieu en janvier et en novembre. Le premier a eu lieu à Paris. Le deuxième séminaire prévu pour l'année en avril, qui devait avoir lieu à Montpellier a dû être annulé du fait de la situation liée à la pandémie de COVID-19. Le séminaire de novembre a eu lieu en « distanciel » avec le soutien de la Faculté d'éducation (FDE) de l'Université de Montpellier. Il a accueilli, comme les années précédentes, le colloquium CFEM-ARDM, sur une demi-journée. Ce dernier a été organisé avec le soutien de l'Université Paris Diderot, du LDAR, de l'IREM de Paris et de la CFEM. Le thème était l'« Appropriation des mathématiques et usages dans la société (École, enseignement et formation) ». Le colloquium n'a pas donné lieu à des actes mais les vidéos des présentations sont disponibles [en ligne](#) sur le site de l'IREM de Paris.

Les textes de ce volume sont identifiés en fonction de la nature de l'intervention. Certains correspondent à la présentation d'une thèse ou d'une Habilitation à Diriger des Recherches, certains rendent compte de travaux en cours, d'autres sont des textes associés à des posters. La rubrique « ouverture sur » inclut également des textes de chercheurs dont les travaux ne relèvent pas de la didactique des mathématiques mais s'inscrivent dans un domaine connexe et dont, en tant qu'organisateur, nous avons estimé qu'ils pouvaient présenter un intérêt pour la communauté. Enfin, la rubrique « thématique filée » regroupe les textes qui correspondent à des interventions visant à discuter les fondements des théories et leurs arrière-plans. L'objectif (ambitieux !), était d'initier une démarche pour aborder l'évolution du paysage théorique dans les recherches en didactique des mathématiques et de rouvrir la discussion sur ce qui fonde la discipline (à la fois du point de vue culturel, philosophique, épistémologique voire politique), pour mieux penser son avenir.

Nous espérons que ce volume contribue ainsi à la dynamique de la communauté des chercheur.e.s en didactique des mathématiques.

Bonne lecture,

Aurélie Chesnais et Hussein Sabra,
Responsables du séminaire

SOMMAIRE

Séminaire des 21 et 22 janvier 2021

Travaux en cours7

Joris Mithalal

Les programmes de construction : prise en compte de la dimension textuelle pour construire un discours sur les objets et des objets de discours en géométrie.

Thématique filée9

Jill Adler

Levering change: A focus on professional development and the teacher-resource relationship.

Présentation d'HDR11

Christophe Hache

Une entrée dans les questions langagières dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques.

Présentation de thèse23

Chongyang Wang

Understanding Documentation Expertise in Resource System: A tale of a “failed” Teaching Research Group in China.

Présentation de thèse25

Valérie Batteau

Pratiques d'enseignant·e·s primaires vaudois·e·s dans le cadre d'un dispositif de formation lesson study en mathématiques.

Présentation de thèse51

Farida Mejani

Une analyse micro-didactique d'un dispositif pédagogique : le travail de groupe lors d'une activité d'étude et de recherche

Thématique filée63

Patricia Marchand

Le développement des connaissances spatiales : quelques balises pour alimenter nos réflexions.

Séminaire des 08 et 09 avril 2021

Thématique filée.....65

Dilma Fregona, Pilar Orús Báguena, Lalina Coulange, &Grégory Train

Le CRDM Guy Brousseau, un « bon outil » pour ressourcer l'activité du chercheur en didactique des mathématiques.

Travaux en cours93**Marie-Caroline Croset & Marie-Line Gardes**

Étude de la construction du nombre dans la pédagogie Montessori.

Présentation d'HDR95**Jana Trgalová**

Ressources numériques pour l'éducation mathématique. Conception, évaluation, qualité et appropriation.

Travaux en cours125**Laura Branchetti & Viviane Durand-Guerrier**

Dense and denumerable ordered sets - paradoxical objects?

Présentation de thèse127**Ana Jimena Lemes**

L'histoire des mathématiques dans la formation des enseignants : éléments pour la construction d'une compétence historique.

LES PROGRAMMES DE CONSTRUCTION : PRISE EN COMPTE DE LA DIMENSION TEXTUELLE POUR CONSTRUIRE UN DISCOURS SUR LES OBJETS ET DES OBJETS DE DISCOURS EN GÉOMÉTRIE

Joris MITHALAL

S2HEP (EA4148), Université Lyon 1, INSPE de Lyon

joris.mithalal@ens-lyon.org

Résumé

Au cycle 3 se joue l'émergence progressive de ce que Perrin-Glorian et Godin (2018) désignent par « espace géométrique » : si on note une continuité des énoncés, la nature des objets et propriétés devient discursive, préalable nécessaire à l'entrée dans la démonstration. Nous avons souligné (Mathé & Mithalal, 2019) qu'il était impératif de mettre en résonance les pratiques graphiques instrumentées et les pratiques langagières pour penser l'enseignement-apprentissage de la géométrie, sans pour autant élucider en profondeur les phénomènes langagiers, en particulier ceux qui lui sont internes : la primauté reste du côté des constructions. Dans cet exposé je m'appuierai sur un objet propre au cycle 3, qui allie intrinsèquement ces dimensions multiples : les programmes de construction. Je détaillerai en quoi ils permettent la construction d'objets de discours. En revenant aux travaux fondateurs de C. Laborde, et en appui sur des outils issus de didactique du français, je montrerai la nécessité de prendre en compte explicitement la dimension textuelle de cet objet tant dans l'analyse didactique que dans la pratique de classe. J'examinerai la pertinence d'introduire les programmes de construction comme des textes à étudier – et non à produire – pour construire un discours sur les objets, permettant cette transition de l'instrumenté au langagier.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- MATHE, A.-C., & MITHALAL, J. (2019). L'usage des dessins en géométrie : Quelques enjeux pour l'enseignement. In *Nouvelles perspectives en didactique : Géométrie, évaluation des apprentissages mathématiques—XIXe école d'été de didactique des mathématiques* (Editions La pensée sauvage, Vol. 1). La Pensée Sauvage.
- PERRIN-GLORIAN, M.-J., & GODIN, M. (2018). Géométrie plane : Pour une approche cohérente du début de l'école à la fin du collège. *Actes du XXIIIe colloque CORFEM*.

LEVERING CHANGE: A FOCUS ON PROFESSIONAL DEVELOPMENT AND THE TEACHER-RESOURCE RELATIONSHIP

Jill ADLER

University of Witwatersrand Johannesburg

Jill.Adler@wits.ac.za

Abstract

Over the past decade I have directed a research-informed mathematics professional development (PD) project focused at the lower secondary school level, particularly Grades 8 - 9. We have worked with teachers in poorly resourced school contexts serving low income communities and unsurprising widespread low attainment in mathematics. We have engaged the problematic of what and how to intervene in such contexts so as to lever change, in particular improved mathematics learning outcomes for students in these schools, through professional development of their teachers. Threading through all our work, has been an underlying starting assumption that levering change is a function of access to resources, and thus the teacher-resource relationship. We have built on my earlier conceptualization of resources as including material, cultural (including language), social (Adler, 2000) and knowledge resources (Adler, 2012) as well as the notion of re-source as both noun and verb. A key artefact emerging from the PD project is a Mathematics Teaching Framework, designed to enhance the teacher-curriculum resource relationship and mediate improved coherence in their mathematics teaching. In this seminar I will share key results from the project, linking these to the emerging theorization of the notion of relational transparency as key to understanding the teacher-resource relationship, particularly as it pertains to teachers' use of curriculum materials, and the contributory role of an artefact like a teaching framework in this relationship.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- ADLER, J. (2000). Conceptualizing resources as a theme for teacher education, *Journal of Mathematics Teacher Education*, 3, 205–224.
- ADLER, J. (2012). Knowledge Resources in and for School Mathematics Teaching. In G. Gueudet, B. Pepin, & L. Trouche (Eds.), *From Text to Lived Resources. Mathematics Curriculum Materials and Teacher Development* (pp. 3–22). New York: Springer.

UNE ENTREE DANS LES QUESTIONS LANGAGIERES RELATIVES A L'ENSEIGNEMENT ET L'APPRENTISSAGE DES MATHEMATIQUES

Christophe HACHE

LDAR, Université de Paris Cité

IREM de Paris

christophe.hache@u-paris.fr

Résumé

Cet exposé fait suite à la soutenance de mon habilitation à diriger des recherches soutenue en décembre 2019. Je commencerai ici par exposer quelques exemples qui éclairent mes problématiques. Je présenterai ensuite certains outils et concepts qui étayent mon travail. Je terminerai en précisant les éclairages que me permettent les didactiques des langues.

Mots clés

Pratiques langagières, didactique des langues, didactique des mathématiques

Mon habilitation à diriger des recherches a été soutenue le 16 décembre 2019 (Hache, 2019) sous le titre « Questions langagières dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques ». Je reprends ici la présentation faite le 22 janvier 2021 au séminaire national de didactique des mathématiques de l'ARDM. Dans ce texte je renverrai au texte de la note de synthèse si nécessaire et approfondirai les éléments développés pour cet exposé¹. Je garde la même structure que pour la présentation orale et je commence ainsi par exposer quelques exemples qui éclairent mes problématiques. J'évoquerai ensuite quelques éléments concernant l'ancrage de mes questions et de mes recherches dans le champ de la didactique des mathématiques et certains outils et concepts qui étayent mon travail.

I. EXEMPLES D'ANALYSES

1. « Courbes »

Contexte

Le contexte de cette étude est celui d'une collaboration initiée avec Cristelle Cavala (DILTEC, Université Sorbonne Nouvelle, sciences du langage, didactique des langues) ayant pour but la comparaison de nos outils d'analyses de texte. La recherche d'un corpus de textes nous a amenés vers un manuel en ligne, celui du site *exo7* (Exo7, 2016). Nous nous sommes

¹ Pour mémoire, l'exposé est archivé en vidéo sur le site de l'IREM de Paris : <https://video.irem.univ-paris-diderot.fr/videos/watch/65c71d2c-38d7-49a7-8245-ec8d74166d63>

notamment penchés sur le cours de première année de licence, entre autres le chapitre « Courbes paramétrées ».

Une des premières analyses effectuées a été quantitative, avec une recherche des occurrences de tous les mots. Un des premiers mots utilisés dans un sens non usuel les plus cités dans le chapitre était le mot « courbe ». Nous avons alors mené une étude des usages de ce mot, de ses différentes acceptions au cours du chapitre.

Exemple d'usages, analyse lexicale

Je présente tout d'abord la 2^{ème} page du chapitre, sur laquelle on trouve la définition mathématique d'une courbe paramétrée proposée par les auteurs.

1. Notions de base

1.1. Définition d'une courbe paramétrée

Définition 1.

Une **courbe paramétrée plane** est une application

$$\begin{aligned} f : D \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto f(t) \end{aligned}$$

d'un sous-ensemble D de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^2 .

Ainsi, une **courbe paramétrée** est une application qui, à un réel t (le **paramètre**), associe un point du plan. On parle aussi d'**arc paramétré**. On peut aussi la noter $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ou écrire en abrégé $t \mapsto M(t)$ ou $t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.

Enfin en identifiant \mathbb{C} avec \mathbb{R}^2 , on note aussi $t \mapsto z(t) = x(t) + iy(t)$ avec l'identification usuelle entre le point $M(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ et son affixe $z(t) = x(t) + iy(t)$.

(...)

Par la suite, une courbe sera fréquemment décrite de manière très synthétique sous une forme du type

$$\begin{cases} x(t) = 3 \ln t \\ y(t) = 2t^2 + 1 \end{cases}, \quad t \in]0, +\infty[\quad \text{ou} \quad z(t) = e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Il faut comprendre que x et y désignent des fonctions de D dans \mathbb{R} ou que z désigne une fonction de D dans \mathbb{C} . Nous connaissons déjà des exemples de paramétrisations.

Figure 1. Exo7, 2016, p. 128. La figure n'est pas reproduite.

On voit qu'une courbe est une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^2 . L'entrée n'est pas géométrique, même si dans le commentaire de la définition on parle de « points » et de « plans ».

On perçoit aussi sur cette page l'importance relative de la présence de symboles. Ces expressions symboliques ont d'abord un rôle illustrant ou reformulant le contenu d'une phrase (comme dans la définition). Le commentaire qui suit la définition porte notamment sur les notations, plusieurs formulations symboliques de la façon de présenter une courbe paramétrée sont proposées (les notations sont plus ou moins complexes, plus ou moins complètes², certains présupposés des notations sont pointés³). Les symboles peuvent aussi désigner au fil de la phrase des objets, à la façon d'un nom propre : « x et y désignent des fonctions de D dans \mathbb{R} ». Enfin on retrouve des usages plus complexes déjà pointés par ailleurs (par exemple Hache et Mesnil, 2020) comme dans la phrase « l'identification usuelle entre le point $M(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ et

² Certaines notations introduisent l'ensemble de définition de la fonction. Ou bien introduisent le nom de la fonction et un nom alternatif (f et M), voire l'usage conjoint de $x(t)$ et $y(t)$. Certaines notations vont permettre d'explicitement une formule pour la fonction.

³ Notamment l'identification nécessaire entre \mathbb{R}^2 et \mathbb{C} .

son affixe $z(t) = x(t) + iy(t)$ ». On voit bien dans cette dernière phrase que l'expression qui suit « le point » ne désigne pas un point, mais une égalité, cette égalité peut être vue comme une proposition relative (par exemple « le point $M(t)$, dont nous appellerons $x(t)$ et $y(t)$ les coordonnées »). Le même type d'analyse peut être fait avec l'expression « son affixe $z(t) = x(t) + iy(t)$ ».

Ces dernières remarques amènent à des questions méthodologiques : comment intégrer l'analyse des phrases d'un texte, comme celle donnée ici en exemple, dans une analyse lexicale ? Notamment si on pense à des analyses quantitatives, des analyses de cooccurrence⁴ ou de proxémie⁵ automatisées ? Quels rôles faire jouer aux expressions symboliques dans ces analyses ?⁶

Le mot « courbe » prend plusieurs sens au fil de ses occurrences dans ce chapitre. On repère notamment :

- Un sens plus ou moins naïf de (dessin d'une) ligne courbe ;
- Le sens du cours de mathématique du lycée : « courbe représentative d'une fonction [numérique de variable réelle] », « représentation graphique d'une fonction »⁷ ;
- Le sens de « Courbe paramétrée » dont on vient de voir la définition. Les auteurs précisent que l'on peut utiliser aussi l'expression « Arc paramétré », ou « Arc » pour alléger le discours, ou bien, de même, « Courbe », sans adjectif ;
- Le sens de « Support d'une courbe paramétrée ». Le terme est défini dans le chapitre, les auteurs précisent qu'on pourra utiliser « support », ou « graphe », ou « courbe ».

Soulignons ici que cette superposition de sens et d'usage est très classique. Il ne s'agit pas de pointer de mauvaises pratiques des auteurs, mais plutôt de décrire les pratiques de la communauté. En l'occurrence les auteurs font à plusieurs reprises des efforts d'explicitation concernant ces usages complexes du mot « courbe » :

Néanmoins par la suite, quand cela ne pose pas de problème, nous identifierons ces deux notions en employant le mot *courbe* pour désigner indifféremment à la fois l'application et son graphe. Des *courbes* paramétrées différentes peuvent avoir un même support. C'est par exemple le cas des *courbes* :

$$\begin{array}{lcl} [0, 2\pi[& \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (\cos t, \sin t) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{lcl} [0, 4\pi[& \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (\cos t, \sin t) \end{array}$$

(...)

Ainsi, la seule donnée du support ne suffit pas à définir un arc paramétré, qui est donc plus qu'un simple dessin. C'est une *courbe munie d'un mode de parcours*. Sur cette *courbe*, on avance mais on peut revenir en arrière, on peut la parcourir une ou plusieurs fois, au gré du paramètre, celui-ci n'étant d'ailleurs jamais visible sur le dessin. On « voit » $x(t)$, $y(t)$, mais pas t .

Figure 2. Exo7 2016, pp. 129-130.

Nous produisons ensuite une « carte » des usages du mot courbe sous forme d'un tableau qui nous permet de nous rendre compte de la répartition des occurrences (un point correspond à une occurrence) des sens du mot « courbe » ou des mots proches identifiés :

⁴ Analyse de la présence simultanée de deux ou de plusieurs mots ou autres unités linguistiques dans le même énoncé.

⁵ Analyse quantitative (mesure de la distance entre les mots dans les textes) des mots couramment utilisés avec un mot donné. L'analyse de fait pour un corpus de texte donné.

⁶ Une proposition en cours d'expérimentation consiste à remplacer ponctuellement, quand c'est possible, l'expression symbolique par une reformulation en mot issue de la présentation du cours en vidéo. Le cours d'exo7 est en effet aussi présenté en vidéo (présentation proche du texte écrit). Voir ici pour ce chapitre : https://youtube.com/playlist?list=PL024XGD7WCIGKVHtuO-Z2q8_J2MO4B_il

⁷ L'usage est également polysémique. Voir par exemple Chauvat (1999), ou Cerclé et al. (2020).

Page	Parties du chapitre	Mot « Courbe » au sens de					Autres mots			Extraits cités ici
		Ligne	Support	Arc	Lycée, graphe	Sens indéf. ou multiple	« Arc »	« Support et graphe »	« Support » (lycée)	
127	(Introduction)	••••				•				3
128	1. Notions de base			••	•	•	•		•	1
129		••		••••• •••			•	••••• ••		2
130			••	•••			•	••		7
131			••••• •••••			•	•••			
132			•••	••		•••••	•			
133			••	•		•	•			6
134	2. Tangente à une courbe paramétrée	••		••		•••••				
135				••••• •		••				
136		•				•		•		4
137								•	•	
138	3. Points singuliers – Branches infinies			••						
139		•	••••• ••	•		•	•			
140			•••••							
141			•			•				
142			•	•		•				
143			••••	•••						
145	4. Plan d'étude d'une courbe paramétrée	••••	•	••						
146			•••			•••	•			
147			••	•						
148		•	•••••			••				
148		•••	••	•		•	•	•		
149			•			••		•		
150	5. Courbes en polaires : théorie			•		•				
151				••		••				
152				•			•			
153						•				
154						•	•			
155	6. Courbes en polaires : exemples		•	••		••				
156			••••• ••	•		•				
157			•••••	•		•••		•		
158			••			•				
159			••	•••				•		5

Tableau 1. « Carte des usages du mot courbe ».

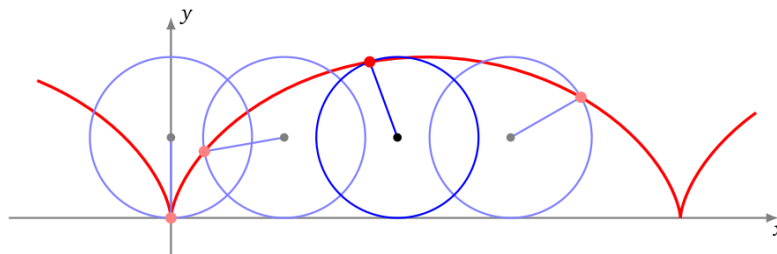
Je vais donner quelques exemples d'usages du mot, des différents sens qu'il peut prendre (et des possibles difficultés à lui attribuer un seul sens parfois).

Dans la figure 3 ci-dessous, le mot est utilisé dans un sens « naïf » : le texte est situé au début du chapitre, aucune définition n'a encore été donnée.

une **courbe** particulièrement intéressante. La **cycloïde** est la **courbe** que parcourt un point choisi de la roue d'un vélo, lorsque le vélo avance. Les coordonnées (x, y) de ce point M varient en fonction du temps :

$$\begin{cases} x(t) = r(t - \sin t) \\ y(t) = r(1 - \cos t) \end{cases}$$

où r est le rayon de la roue.



La cycloïde a des propriétés remarquables. Par exemple, la cycloïde renversée est une **courbe** brachistochrone : c'est-à-dire que c'est la **courbe** qui permet à une bille d'arriver le plus vite possible d'un point A à un point B . Contrairement à

Figure 3. Exo7 2016, p. 127.

Les auteurs parlent ici de la courbe que parcourt un point choisi sur une roue de vélo quand le vélo roule, d'une courbe qui permet à une bille d'aller d'un point A à un point B .

Dans la figure 4, de façon évidente, le mot courbe est utilisé au sens mathématique de la définition 2 (rappelée dans la figure 1 ci-dessus).

Définition 5.

Soit $t \rightarrow M(t) = (x(t), y(t))$, $t \in D \subset \mathbb{R}$, une **courbe** paramétrée et soit $t_0 \in D$. La **courbe** est **continue en t_0** si et seulement si les fonctions x et y sont continues en t_0 . La **courbe** est **continue sur D** si et seulement si elle est continue en tout point de D .

En d'autres termes la **courbe** est continue en t_0 si et seulement si $x(t) \rightarrow x(t_0)$ et $y(t) \rightarrow y(t_0)$, lorsque $t \rightarrow t_0$.

Figure 4. Exo7 2016, p.136.

On définit ainsi mathématiquement une « courbe continue » à partir des propriétés de continuité des applications composantes de l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^2 .

Dans le dernier tiers du chapitre, un travail est fait sur l'étude de courbes et le tracé du support d'une courbe (le tracé d'une courbe). Voici un extrait (Figure 5) concernant l'étude d'une courbe définie en coordonnées polaires, ou « courbe d'équation polaire » :

Exemple 21.

Déterminer un domaine d'étude le plus simple possible de la **courbe** d'équation polaire

$$r = 1 + 2 \cos^2 \theta.$$

Solution.

- La fonction r est définie sur \mathbb{R} et 2π -périodique. Donc, pour $\theta \in \mathbb{R}$,

$$M(\theta + 2\pi) = [r(\theta + 2\pi) : \theta + 2\pi] = [r(\theta) : \theta] = M(\theta).$$

La **courbe** complète est donc obtenue quand θ décrit un intervalle de longueur 2π comme $[-\pi, \pi]$ par exemple.

- La fonction r est paire. Donc, pour $\theta \in [-\pi, \pi]$,

$$M(-\theta) = [r(-\theta) : -\theta] = [r(\theta) : -\theta] = s_{(Ox)}(M(\theta)).$$

On étudie et construit la **courbe** sur $[0, \pi]$, puis on obtient la **courbe** complète par réflexion d'axe (Ox) .

- $r(\pi - \theta) = r(\theta)$. Donc, pour $\theta \in [0, \pi]$,

$$M(\pi - \theta) = [r(\pi - \theta) : \pi - \theta] = [r(\theta) : \pi - \theta] = s_{(Oy)}(M(\theta)).$$

On étudie et construit la **courbe** sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, puis on obtient la **courbe** complète par réflexion d'axe (Oy) puis par réflexion d'axe (Ox) .

Figure 5. Exo7 2016, p. 159.

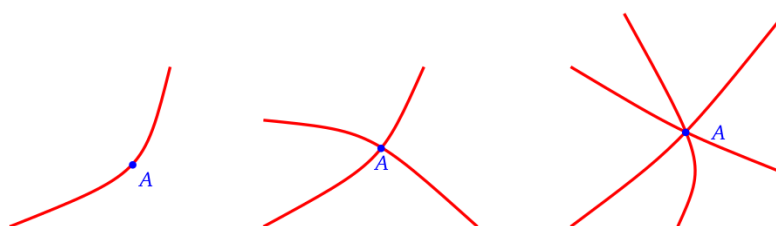
Dans toute cette partie, le mot « courbe » est utilisé pour parler du support de la courbe. Dans la figure 5, la première occurrence de « courbe » fait référence à la définition du chapitre (domaine d'étude de la courbe, courbe d'équation polaire, on parle bien d'une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^2). Par contre, les occurrences suivantes : « courbe complète », « on construit la courbe » font référence plutôt au support de la courbe (on peut noter un petit flou puisque les auteurs disent « on étudie et on construit la courbe » alors que le verbe « étudier » est plutôt associé à l'application, et le verbe « construire » au support).

On retrouve cette superposition possible des sens du mot à d'autres endroits du texte.

Définition 3.

Soit $f : t \mapsto M(t)$ une courbe paramétrée et soit A un point du plan. La multiplicité du point A par rapport à la courbe f est le nombre de réels t pour lesquels $M(t) = A$.

En termes plus savants : la multiplicité du point A par rapport à l'arc f est $\text{Card}(f^{-1}(A))$.



- Si A est atteint une et une seule fois, sa multiplicité est 1 et on dit que le point A est un **point simple** de la courbe (première figure).
- Si A est atteint pour deux valeurs distinctes du paramètre et deux seulement, on dit que A est un **point double** de la courbe (deuxième figure).

Figure 6. Exo7 2016, p. 133.

On voit par exemple dans la figure 6 que les points multiples sont définis comme des points du plan (classiquement assimilés à des éléments de \mathbb{R}^2) ayant une certaine propriété pour l'application f : $\text{Card}(f^{-1}(A)) > 1$. L'expression « point simple de la courbe » ou « point multiple de la courbe » fait à la fois référence à la propriété de l'application f et du point A , mais aussi au fait que le point A est un point du support de la courbe, le formalisme mathématique permettant de modéliser le fait que plusieurs branches du support se croisent en A (comme le montrent les figures proposées). Le mot courbe renvoie donc à la fois à l'application f et à son support (concrètement tracé).

Analyses logiques

D'autres analyses des usages de la langue et du symbolisme peuvent être menées. Notamment des analyses que l'on appelle classiquement analyses logiques. On peut se référer par exemple aux actes du séminaire national de didactique de l'ARDM : Barrier (2019), Chellougui (2020), et Hache et Mesnil (2020). Il s'agit de proposer une ou plusieurs reformulations du texte utilisant un référent logique (ici la logique des prédicats).

On peut par exemple s'attarder sur la phrase « on obtient la courbe complète par translation de vecteurs k . $(2\pi, 0) = (2k\pi, 0), k \in \mathbb{Z}$ » dans la figure 7 ci-dessous.

Exemple 2.
Déterminer un domaine d'étude le plus simple possible de la courbe

« Pour tous les / Pour chaque / Quel que soit t appartenant à ... »

$$\begin{cases} x(t) = t - \frac{3}{2} \sin t \\ y(t) = 1 - \frac{3}{2} \cos t \end{cases}$$

Formule (incomplète) désignant effectivement la courbe annoncée

« de vecteur ..., qui est égal à ... quelle que soit la valeur de k dans \mathbb{Z} »

Solution. « dans cette dernière égalité, u désigne ... »

Pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} M(t+2\pi) &= \left(t+2\pi - \frac{3}{2} \sin(t+2\pi), 1 - \frac{3}{2} \cos(t+2\pi) \right) \\ &= \left(t - \frac{3}{2} \sin t, 1 - \frac{3}{2} \cos t \right) + (2\pi, 0) = t_{\vec{u}}(M(t)) \end{aligned}$$

« 2π désigne effectivement une longueur »

où $\vec{u} = (2\pi, 0)$. Donc, on étudie l'arc et on en trace le support sur un intervalle de longueur 2π au choix, comme $[-\pi, \pi]$ par exemple, puis on obtient la courbe complète par translations de vecteurs $k \cdot (2\pi, 0) \equiv (2k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Pour $t \in [-\pi, \pi]$,

$$M(-t) = \left(-t - \frac{3}{2} \sin t, 1 - \frac{3}{2} \cos t \right) = s_{(Oy)}(M(t)).$$

On étudie la courbe et on en trace le support sur $[0, \pi]$ (première figure), ensuite on effectue la réflexion d'axe (Oy) (deuxième figure), puis on obtient la courbe complète par translations de vecteurs $k\vec{u}$, $k \in \mathbb{Z}$ (troisième figure).

« étudier la courbe sur ... »
« tracer le support sur ... » (?)

« par translation, en utilisant, pour chaque valeur de k dans \mathbb{Z} , la translation de vecteur $k\vec{u}$ »

Figure 7 (Exo7 2016, p130-131)

Il s'agit de réduire le domaine d'étude de la courbe pour arriver à la tracer. Chaque réduction du domaine d'étude (ici on passe de \mathbb{R} à $[-\pi, \pi]$, puis à $[0, \pi]$) est accompagnée d'une explication permettant de retrouver géométriquement l'ensemble de la courbe quand la partie réduite sera tracée.

Dans la phrase évoquée, on peut souligner le pluriel des mots « translations » et « vecteurs » : il est rare de faire opérer plusieurs translations sur un même objet et de le décrire dans une seule phrase. On peut noter aussi que (comme souligné dans la Figure 1) ce qui suit le mot vecteur n'est pas une expression désignant un vecteur, mais une égalité entre deux vecteurs. On peut interpréter là aussi comme une proposition relative, une information ajoutée. On peut aussi voir une trace de quantification dans l'expression « , $k \in \mathbb{Z}$ », quantification qui devrait préciser le sens du pluriel des mots « translations » et « vecteurs ». On pourrait ainsi s'approcher un peu du formalisme sous-jacent en disant « on obtient la courbe complète en faisant opérer sur le premier bout de courbe tracé, pour tous les nombres entiers k , la translation de vecteur $k \cdot (2\pi, 0)$, dont on sait bien qu'il est égal au vecteur $(2k\pi, 0)$ ».

Conclusion à propos de ces analyses lexicales

On a donc dans ce chapitre un mot central, le mot « courbe », qui a plusieurs sens, plusieurs usages, les sens se succédant, voire se superposant. Ce phénomène est très classique, et d'une certaine façon nécessaire (Hache, 2019, page 16). Mon hypothèse est que le fait d'avoir un seul mot allège les contraintes du formalisme, les formulations seraient fortement alourdies si des termes distincts (courbe paramétrée, support de la courbe paramétrée, représentation graphique,

ligne courbe, etc.) étaient utilisés pour chaque variation de sens, sachant que les différents sens des expressions, et les différents objets auxquels elles font référence sont effectivement très proches mathématiquement. Le fait d'avoir un même mot pour désigner la modélisation (« courbe paramétrée »), l'objet modélisé (« support »), des sens courants ou des sens scolaires plus anciens peut être porteur, et façonne la nouvelle acception du mot proposée dans le chapitre, soutient la conceptualisation, précise son usage... Cela facilite l'expression et la communication pour les mathématiciens et les mathématiciennes. Je souligne ici le fait que ces phénomènes sont essentiellement transparents pour les acteurs, ces choix sont en grande partie inconscients.

On peut bien sûr se demander ce qu'il en est de la réception effective par les étudiants. Comment les étudiants et les étudiantes lisant le texte ou écoutant le cours reconstituent-ils un sens, distinguent-ils les sens ? Font-ils ces rapprochements ? Perçoivent-ils petit à petit ces nuances et ces usages ?

On voit à l'aide de ces deux analyses que les formulations usuelles des mathématiques ne sont pas (uniquement) formelles. Elles ne sont pas dépourvues d'ambiguïtés (il n'y a pas univocité des termes, même des termes techniques). Elles mélangent mots et symboles, font un usage complexe de la langue, incorporent de nombreux implicites. Les formulations sont denses.

Ainsi, des analyses langagières peuvent permettre de mettre en évidence et de décrire certaines complexités de l'activité mathématique, et de l'entrée dans cette activité.

Je vais présenter rapidement un second exemple pour montrer que ces complexités peuvent être des difficultés pour l'enseignement et l'apprentissage. Je développerai ensuite l'idée qu'un travail sur cette dimension de l'activité mathématique peut renforcer également l'apprentissage du contenu.

2. Vrai, faux ou autre ?

Les pratiques langagières des mathématiciens et des mathématiciennes peuvent être étudiées pour elles-mêmes (voir par exemple Hache et Mesnil (2017)), mais il est intéressant d'avoir une approche descriptive des pratiques davantage liées à l'enseignement⁸.

Pour « entrer en classe » il est aussi possible de travailler sur des manuels scolaires du secondaire (en grande partie rédigés par des enseignants), sur les pratiques langagières des enseignants en classe, ainsi que sur les pratiques langagières des élèves. On peut se demander si les usages constatés chez les mathématiciens et les mathématiciennes se retrouvent chez les enseignants. Sur ce point on voit que la confrontation des élèves aux pratiques langagières de la communauté mathématique commence très tôt (Hache, 2015).

La question se pose de savoir si les élèves s'approprient ces pratiques langagières, et de quelle façon, s'il est possible de les accompagner dans cet apprentissage. C'est ce point que j'ai développé le 21 janvier 2021 en présentant le travail mené avec Emmanuelle Forgeoux (Hache et Forgeoux, 2018). L'étude des réponses à un questionnaire vrai – faux sur des questions du type « vrai ou faux ? Si $(x - 1)(x - 2) = 0$ alors $x = 1$ ». Cette étude reposait sur la question suivante : dans ce type de phrase mathématique les élèves perçoivent-ils la quantification universelle implicite liée à l'implication exprimée ? On pourrait en effet formuler la phrase ci-dessus ainsi :

$$\ll \forall x [(x - 1)(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 1] \gg$$

⁸ L'exemple précédent est, en quelque sorte, un intermédiaire : il s'agit bien d'une situation d'enseignement, mais le cours est rédigé par des mathématiciens et des mathématiciennes.

Je reprends ici la conclusion de l'article :

« Globalement, on voit que les élèves n'ont pas conscience des implicites des usages classiques de la langue en mathématiques.

Sur ce cas précis chacun tente d'explicitier des règles rationnelles de fonctionnement (c'est le fait qu'ils n'ont pas tous les mêmes qui permet d'avancer dans la discussion), les choses ne sont pas simples car ils n'ont pas les mots pour le dire. La notion de variable pourrait par exemple être utilisée ici... celle de quantification aussi bien sûr. Le fait que ces implicites ne soient pas spontanément partagés peut être source de gros quiproquos » (Hache et Forgeoux, 2018, p. 53)

D'autres travaux décrivent également les complexités du discours des enseignants (voir par exemple Hache et Mesnil, 2020). Tout d'abord celle du jeu entre oral et écrit : l'enseignant propose bien sûr certains écrits sans les commenter oralement (énoncé d'exercices, corrigés, manuel scolaire ou documents distribués, etc.), mais une part importante de la présentation du contenu mathématique (notamment les preuves) est faite sous la forme d'un écrit commenté, d'un discours oral s'appuyant sur un écrit au tableau, d'un mélange écrit – oral (accompagné d'une gestuelle, d'une spatialisation de l'écrit sur le tableau par exemple). Autre point de complexité dans le contexte de l'enseignement : le discours de l'enseignement mêle de façon forte un discours mathématique et un « discours sur » (pour une preuve par exemple : discours sur les mathématiques, sur la façon de rédiger, sur la façon dont on peut avoir une idée de la preuve qui est en train d'être exposée, sur l'importance du travail présenté, etc.).

Enfin, la transparence pour les acteurs de leurs pratiques langagières (mathématiciens, enseignants, élèves) complique le travail sur cette dimension de l'activité mathématique. Empêche certains leviers que pourraient apporter le travail sur la langue pour l'apprentissage des mathématiques.

Nous reprendrons dans la partie III. cette problématique du travail sur la dimension langagière de l'activité mathématique (en lien avec le travail sur les mathématiques elles-mêmes).

II. « AGIR, PARLER, PENSER »

Je reprends là une approche également présentée par Joris Mithalal (2021). Le titre de ce paragraphe, « agir, parler, penser », fait référence au travail de Maryse Rebière et Martine Jaubert (voir par exemple Rebière, 2013). Elles développent l'idée qu'il n'y a pas séparation possible entre ces trois facettes de l'activité. Le langage est notamment constitutif de la pensée. Il est à l'articulation entre action, communication et régulation sociale, processus psychocognitif. Il a une dimension individuelle et une dimension sociale et culturelle. C'est un outil de construction, de négociation, de transformation des représentations à la fois individuelles et sociales. De ce fait, le langage est au cœur des processus d'enseignement et d'apprentissage (voir également Hache, 2019 : « Pensée et langage, dimension individuelle et dimension sociale » pages 5 et 6).

Chaque groupe social développe des pratiques qui lui sont propres, notamment des pratiques langagières, des usages courants, usuels de la langue. La langue est vue comme un réservoir commun et relativement stable (en lente évolution, décrite dans les dictionnaires, livres de grammaires).

La première partie de l'exposé, et de ce texte, propose donc des analyses des pratiques langagières des mathématiciens et des mathématiciennes, des traces de ces pratiques en classe, et de la façon dont les élèves s'approprient (ou non) ces pratiques, s'acculturent à ces pratiques sociales. Les élèves et les enseignants développant à leur tour des pratiques langagières scolaires propres au cours de mathématiques.

Pour réfléchir à l'accompagnement de cette appropriation par les élèves, dont nous avons vu qu'elle n'allait pas de soi, des pratiques langagières des mathématiciens inhérentes à l'entrée dans l'activité mathématique, je propose d'éclairer notre point de vue à l'aide de résultats de recherche en didactique des langues.

III. LECTURE ET ECRITURE

Je me suis penché sur certains travaux de recherche en didactique des langues, notamment sur l'apprentissage de la compréhension de texte (lecture) et de la production de texte (écriture) : voir Hache 2019 « Texte, lecteur et auteur en didactique du français » pages 37 à 46.

Je me permets de souligner qu'il n'est pas simple de s'approprier les problématiques, les outils théoriques, les méthodologies d'un champ de recherche. À propos d'apprentissage de la lecture et de l'écriture, il est intéressant de s'appuyer sur des expériences proches, par exemple, en tant que chercheur, la production ou la compréhension d'un article de recherche, ou, en tant que chercheur, mais aussi à propos d'élèves, la production ou la compréhension d'une démonstration, ou encore, à propos d'élèves, la production ou la compréhension d'un programme de construction (Mithalal, 2021).

Une première idée développée est celle du caractère indissociable des activités de lecture et d'écriture de textes, des activités d'apprentissage de la lecture et de l'écriture de textes. De par la nature même de l'activité, mais également de par le fait que le scripteur fait un travail de lecture et de relecture de son texte en cours d'écriture (Plane, 2017), ou de par l'écho que l'on trouve entre l'intention artistique de l'auteur et l'attention esthétique du lecteur (Tauveron, 2002). Pour reprendre une des propositions d'exemples évoquées ci-dessus, le rédacteur d'un article pour une revue scientifique s'adresse à un modèle de lecteur qu'il se construit petit à petit, dont les caractéristiques sont empruntées à ses représentations des relecteurs qui vont lui faire un retour avant publication, à ses représentations du lectorat de la revue. Ces représentations se construisent petit à petit en lien avec ses propres lectures de textes scientifiques (que ce soit comme simple lecteur ou comme relecteur – évaluateur), avec les échanges passés entre collègues qu'il a eus à propos de la compréhension d'un texte, à propos de retours passés sur ses propres textes écrits. L'auteur se construit ainsi une représentation de sa position d'auteur en s'appuyant sur ses expériences de lecture. On peut également éclairer ainsi le travail de rédaction ou de compréhension de preuves ou celui de rédaction ou compréhension de programmes de construction.

Au-delà de cette première idée (indissociabilité de l'appréhension de la lecture et de l'écriture), la description des activités d'apprentissage de la compréhension d'un texte d'une part et d'apprentissage de l'écriture d'un texte d'autre part mettent en lumière trois traits communs centraux : l'importance des dimensions collective, réflexive et consciente (explicite) de ces activités. Ces considérations permettent d'interroger certaines dimensions de l'enseignement des mathématiques, si un travail explicite est parfois mené, par exemple sur les programmes de

construction⁹, il est plus rare sur l'apprentissage de la démonstration (il est rare par exemple que les élèves soient confrontés à une lecture d'un texte de démonstration¹⁰).

Le caractère collectif, réflexif et conscient de l'activité souligne le fait que la langue (entre autres) devient un objet de travail. C'est aussi ce que soulignent les didacticiens du plurilinguisme. Travailler sur la langue, sur ses usages, s'oppose ainsi à la transparence des activités et des pratiques langagières. Les didacticiens du plurilinguisme montrent que la reformulation en L1 et en L2¹¹ peut constituer un support du travail métalinguistique, et peut aboutir à des processus méta-cognitifs visant le traitement de l'information disciplinaire (Gajo, 2007, p. 4). L'opacification de la langue (que permet ici la coexistence L1 et L2) permet une remédiation : à la fois au sens de remède, mais également au sens de retour réflexif sur une médiation (en L1) elle permet aussi, à terme, une centration plus grande sur les contenus.

IV. CONCLUSION

L'idée était donc dans cette présentation et dans ce texte d'avoir une lecture transversale sur les travaux présentés dans la note de synthèse soutenue fin 2019 (Hache, 2019). Le travail dont la présentation est esquissée ici se poursuit dans plusieurs directions.

On a vu que la description, la caractérisation des pratiques langagières des mathématiciens a tout son intérêt dans la perspective de l'étude des phénomènes d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques. Les études menées jusqu'à présent peuvent être encore approfondies du point de vue de la variété et de la quantité des textes et discours analysés, mais aussi concernant les outils utilisés. On peut tout d'abord penser aux outils issus des recherches en linguistique (notamment les outils lexicométriques). Mais il est également possible de mener des analyses comparatistes : observer les pratiques langagières proches de façon à mieux comprendre celles des mathématiciens (analyse d'un cours de mathématique proposé par des physiciens, analyse de textes mathématiques dans une autre langue que le français, analyse des pratiques langagières des enseignants du premier degré qui n'ont, pour la plupart, pas cette culture mathématique, etc.).

Les analyses des usages de la langue et des formulations utilisées spécifiquement en classe de mathématiques sont également en cours de développement : analyse de discours d'enseignants, analyses de copies ou de discours d'élèves. Les outils sont à adapter, notamment pour les élèves pour lesquels les textes sont souvent très lacunaires.

J'ai évoqué à plusieurs reprises le fait que le travail avec les élèves sur les usages de la langue dans l'activité mathématique était un levier puissant pointé par les didacticiens des langues, notamment pour le travail et l'apprentissage mathématique (et non seulement langagier). Le développement de tâches à mener en classe, l'expérimentation associée, l'analyse des activités et des apprentissages effectivement mis en place par les élèves correspondent à un champ de question très vaste. Ma réflexion porte notamment sur le travail de formulation ou de reformulation collective et réflexive avec les élèves (énoncé du cours, rédaction de

⁹ Il est aussi mené sur la lecture ou l'écriture d'articles scientifique en master spécialisé ou en formation doctorale.

¹⁰ Les démonstrations, quand elles sont présentées, le sont souvent dans un mixte d'écrit (souvent au tableau) et de commentaires oraux par l'enseignant.

¹¹ Langue première et langue seconde : première langue parlée, apprise dans le cadre familial (éventuellement plusieurs langues), et langue apprise extérieurement et en général plus tard (cadre scolaire, social).

démonstration, présentation orale – vidéos – de preuve ou d'éléments de cours), ou sur l'appui sur des formulations en langues étrangères en cours de mathématiques.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUE

- BARRIER, T. (2019). Validation empirique, explication et démonstration. In Pilet J., Vendeira-Marechal C., *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2018*. ARDM – IREM de Paris <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02421410>
- BODIN, A., BORNE, N., BOURDON, M., CHEN, G., COSTANTINI, G., DESIDERI, L., HANANI, & A., ROUGET, JL. (2016). *Analyse, cours de mathématiques, première année*. Version 1.00, janvier 2016. Exo7 <http://exo7.emath.fr/cours/livre-analyse-1.pdf>
- CERCLE, V., CHESNAIS, A., DESTRIKATS, A., GOSSELIN, E., LEBERRE, J., & NYSSSEN L. (2020). Le repérage au collège et au lycée: des enjeux d'apprentissage au croisement des cadres numérique, géométrique, algébrique et fonctionnel (première partie), *Petit x*, 113. IREM de Grenoble <https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/petit-x/consultation/>
- CHAUVAT, G. (1999). Courbes et fonctions au collège, *Petit x* 51, IREM de Grenoble https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/51x3_1568716086451-pdf
- CHELLOUGUI, F. (2020). Pertinence de la prise en compte du formalisme logique pour une étude didactique de l'activité mathématique. In Pilet J., Vendeira-Marechal C., *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2019*. ARDM – IREM de Paris
- GAJO, L. (2007). Enseignement d'une DNL en langue étrangère : de la clarification à la conceptualisation, *Trema*, 28, pp 37-48. Faculté d'Éducation de l'Université de Montpellier <https://doi.org/10.4000/trema.448>
- HACHE, C. (2015). Pratiques langagières des mathématiciens, une étude de cas avec « avec », *Petit x*, 97, 27-43. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01397401>
- HACHE, C. (2019). *Questions langagières dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, note de synthèse d'habilitation à diriger des recherches*. Université Paris Diderot <https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-02420979/document>
- HACHE, C., & FORGEOUX, E. (2018). Vrai ou faux ? Parlons-en ! *Au fil des maths*, 528. APMEP <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02292639>
- HACHE, C., & MESNIL, Z. (2017). Pratiques langagières et preuves. In *Actes du 22e colloque de la CORFEM, juin 2015*, IREM de Nîmes. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01285116>
- HACHE, C., & MESNIL, Z. (2020). Outils logiques pour analyser les formulations des preuves dans des manuels de lycée. In Pilet J., Vendeira-Marechal C., *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2019*. ARDM – IREM de Paris <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03257750>
- MITHALAL, J. (2021, 21 janvier). *Les programmes de construction: prise en compte de la dimension textuelle pour construire un discours sur les objets et des objets de discours en géométrie*. [Conférence] Séminaire national de didactique des mathématiques. ARDM – IREM de Paris. <https://video.irem.univ-paris-diderot.fr/videos/watch/2d5cae71-156f-45b5-afeb-fcb08d47a5a3>
- PILET, J., & VENDEIRA, C. (2020). *Actes du séminaire de didactique des mathématiques, année 2019*. IREM de Paris <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03041140>
- PLANE, S. (2017). Dynamique de l'écriture et processus de resémantisation. *Pratiques*, 173-174. Centre de recherche sur les médiations. <http://pratiques.revues.org/3307>
- REBIERE, M. (2013). S'intéresser au langage dans l'enseignement des mathématiques, pour quoi faire ? In Bronner A. et al. (Eds.), *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage* (pp.119-232.) La Pensée Sauvage éditions.
- TAUVERON, C. (2002). L'écriture littéraire : une relation dialectique entre intention artistique et attention esthétique. *Repères, recherches en didactique du français langue maternelle*, 26/27, pp 203-215. ENS Lyon. http://www.persee.fr/doc/reper_1157-1330_2002_num_26_1_2402

UNDERSTANDING DOCUMENTATION EXPERTISE THROUGH THE LENS OF RESOURCE SYSTEM: A TALE OF “FAILED” TEACHING RESEARCH GROUP IN CHINA

Chongyang WANG

Beijing Normal University, China

cy_wang5258@163.com

Abstract

Researches on teacher professional development claimed the importance of collective working. Teachers' working together, with a cultural and institutional root in China, was even revealed as a killer reason for succeeding in TIMSS and PISA. Very often, papers report successful case studies where teachers benefit from collective work, but institutional construction doesn't ensure individual teachers' success. We are left wondering about the less successful cases, to see what went wrong, what we might learn from the failure, to have a lasting impact. This presentation takes a Teaching Research Group (TRG) of a middle school from South-eastern China, where 17 mathematics teachers were involved in a “teaching improvement program” conducted by the author during 6 months. They are excellent atoms seen from resumes, but not good as a TRG community. The data collected and analyzed include field notes, interviews with the TRG leader and her drawing of resource system. The “failed case” was further verified and reflected with the theories of Community of Practice and DAD: the true beneficial collective work needs resources to be ‘lived’ by connect and circulated.

REFERENCES

- CAO, Y., & LEUNG, F.K.S. (EDS.) (2018). *The 21st Century Mathematics Education in China. New Frontiers of Educational Research*. Springer.
- PEPIN, B., GUEUDET, G., & TROUCHE, L. (2013). Re-sourcing teachers' work and interactions: a collective perspective on resources, their use and transformations. *ZDM - Mathematics Education*, 45(7), 929–944.
- PEPIN, B., XU, B., TROUCHE, L., & WANG, C. (2016). Developing a deeper understanding of mathematics teaching expertise: Chinese mathematics teachers' resource systems as windows into their work and expertise. *Educational studies in Mathematics*, 94(3), 257–274.
- TROUCHE, L., GUEUDET, G., & PEPIN, B. (EDS.) (2019). The 'resource' approach to mathematics education. *Springer Series Advances in Mathematics Education*. Springer.
- WANG, J. (2013). *Chinese mathematics education: Tradition and reality*. Jiangsu Educational Press.
- WENGER, E. (1998). *Communities of Practice: Learning, Meaning, and Identity*. Cambridge University Press.

PRATIQUES D'ENSEIGNANT·E·S PRIMAIRES VAUDOIS·E·S DANS LE CADRE D'UN DISPOSITIF DE FORMATION LESSON STUDY EN MATHÉMATIQUES

Valérie BATTEAU

HEP Vaud, UER MS, 3LS

valerie.batteau@hepl.ch

Résumé

Cette recherche doctorale s'intéresse à l'évolution des pratiques d'enseignant·e·s d'école primaire engagé·e·s dans un dispositif de formation continue lesson study en mathématiques en Suisse Romande. Comment les pratiques évoluent-elles ou résistent-elles aux changements lors de ce dispositif de type collaboratif et réflexif ? Dans ce dispositif, un groupe d'enseignant·e·s et de facilitateurs·trices préparent une leçon, puis l'un des enseignant·e·s la met en œuvre dans sa classe. En se l'appropriant, il·elle crée des modifications entre la préparation collective (tâche prescrite par le groupe à l'enseignant·e) et la leçon. Le cadre théorique est celui de la double approche didactique et ergonomique. L'activité de l'enseignant·e y est analysée comme un processus de modifications de la tâche prescrite. Cette analyse locale est complétée par une catégorisation des pratiques en i-genre et une analyse en composantes des pratiques. Cette recherche a montré des évolutions des pratiques avant et pendant la classe, certaines résistances des pratiques, également des évolutions des discours sur les pratiques en tant que praticienne formatrice.

Mots clés

Pratiques enseignantes, double approche didactique et ergonomique, évolution des pratiques, *lesson study*.

Les dispositifs de formation impliquant un collectif d'enseignant·e·s accompagné·e·s de chercheurs·cheuses et formateurs·trices en mathématiques suscitent un intérêt actuel au niveau de la communauté de didactique des mathématiques. Le dispositif de formation et de recherche *lesson study* se trouve au centre de cet intérêt par son ancrage historique au Japon et ses multiples adaptations au niveau international.

Ce texte est issu d'une recherche doctorale (Batteau, 2018 ; 2020) sur l'évolution des pratiques de trois enseignant·e·s d'école primaire engagé·e·s dans un dispositif de formation continue *lesson study* en mathématiques en Suisse Romande entre 2013 et 2015. Cette recherche porte sur les dynamiques d'évolution des pratiques enseignantes dans le cadre de ce dispositif. En particulier, nous questionnons l'évolution ou non des pratiques dans le cadre de ce dispositif. Pour cela, nous opérationnalisons des outils issus du cadre de la double approche didactique et ergonomique (Robert & Rogalski, 2002) : les processus de modification de la tâche prescrite à la tâche réalisée (Leplat, 1997; Mangiante, 2007, 2012), les composantes des pratiques (Robert & Rogalski, 2002) et une catégorisation des pratiques en i-genre (Charles-Pézar, Butlen & Masselot, 2012).

Ce texte expose le cadre de la recherche : le dispositif de formation *lesson study* adapté au contexte suisse romand, les éléments théoriques issus du cadre de la double approche didactique et ergonomique (Robert & Rogalski, 2002) utilisés dans la recherche ainsi que les questions de recherche. La deuxième partie détaille la méthodologie adoptée : le modèle d'analyse au niveau local (de la leçon), le dispositif *lesson study* particulier, le portrait d'une enseignante choisie pour cette étude, et les données de recherche. La troisième partie relate les principaux résultats d'analyses des pratiques de l'enseignante. La dernière partie consiste en une discussion des résultats et des perspectives.

I. CADRE DE LA RECHERCHE

1. Dispositif de formation *lesson study* adapté au contexte de la Suisse Romande

Le dispositif *lesson study* s'est développé au Japon dans les années 1890 et a rencontré un développement international d'abord dans les années 1990-2000 aux Etats-Unis, puis dans le reste du monde. Ce dispositif s'est développé en Suisse Romande dans les années 2010 et en particulier dans le groupe Lesson Study en Mathématiques (Clivaz, 2015a ; 2015b). Issu du modèle développé aux États-Unis par Lewis (Lewis, 2002; Lewis & Hurd, 2011; Lewis, Perry & Hurd, 2009; Lewis & Tsuchida, 1998), ce dispositif réunit un groupe d'enseignant·e·s accompagnés de formateurs·trices, nommé·e·s facilitateurs·trices en référence aux travaux anglophones (Clerc-Georgy & Clivaz, 2016). Le dispositif se présente sous la forme d'un cycle en quatre étapes. Le groupe choisit d'explorer une difficulté d'enseignement ou d'apprentissage à propos d'un sujet d'enseignement, difficulté identifiée par les enseignant·e·s. Le groupe étudie alors le sujet mathématique choisi et le curriculum associé : les programmes officiels, les manuels scolaires, les livres du maître, les articles de revues professionnelles... (étape 1). L'étape 2 consiste à élaborer un *plan de leçon* pour une *leçon de recherche*, focalisée sur le sujet mathématique choisi. Le *plan de leçon* comprend des éléments du déroulement de la leçon, le matériel, ce que prévoit de faire l'enseignant·e et ce que les élèves peuvent potentiellement faire. Un·e enseignant·e du groupe met en œuvre la *leçon de recherche* dans sa classe avec ses élèves, en présence des autres membres du groupe qui observe l'activité des élèves et de l'enseignant·e (étape 3). Le groupe se réunit pour discuter de la leçon (étape 4). Le groupe peut éventuellement planifier une version améliorée de la leçon qui sera donnée dans la classe d'un·e autre enseignant·e et la boucle recommence.

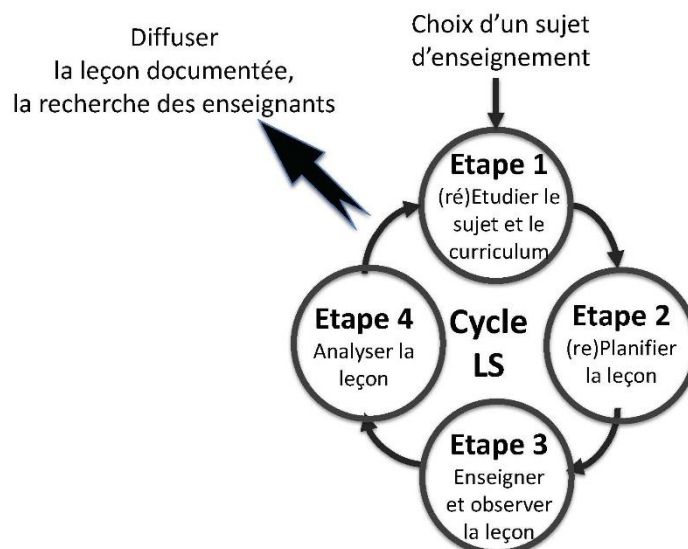


Figure 1. Le dispositif *lesson study* (Batteau & Clivaz, 2016) d'après (Lewis & Hurd, 2011, p. 2)

Dans ce contexte, les enseignant·e·s s'engagent dans une démarche de développement professionnel pour laquelle les aspects collaboratifs jouent un rôle clé.

2. Cadre théorique et questions de recherche

Nous avons choisi d'analyser les pratiques enseignantes dans le cadre théorique de la double approche didactique et ergonomique (Robert & Rogalski, 2002) car celui-ci intègre la dimension du métier d'enseignant avec les marges de manœuvre que les enseignant·e·s peuvent investir et les contraintes auxquelles ils·elles sont soumis·es. Les recherches dans ce cadre ont montré que les pratiques forment un système complexe, cohérent et relativement stable (Robert, 2004). Nous faisons l'hypothèse que ce dispositif sert de perturbateur dans ce système complexe, cohérent et stable des pratiques enseignantes et l'objet de la recherche est ainsi de questionner la stabilité des pratiques lors du dispositif *lesson study* qui vise le développement professionnel des enseignant·e·s.

Composantes des pratiques et catégorisation des pratiques en i-genre

Les pratiques sont analysées selon cinq composantes (Robert & Rogalski, 2002) : les composantes cognitive et médiative permettent de caractériser les pratiques en particulier au niveau local, de la leçon. Les composantes personnelle, sociale et institutionnelle agissent comme des déterminants à un niveau global et peuvent expliquer certains phénomènes d'évolution ou de résistance des pratiques. Une analyse en composantes des pratiques a pour objectif d'identifier des régularités, ce qui est stable dans les pratiques, et des variabilités dans les pratiques (Masselot & Robert, 2007).

Sur la base d'une analyse des pratiques en composantes, Peltier-Barbier et al. (2004) ont repéré des régularités interpersonnelles mais aussi intrapersonnelles dans les stratégies globales d'enseignement dans leur étude des pratiques de plusieurs enseignant·e·s d'école primaire en ZEP sur du long terme. Les régularités dans les stratégies d'enseignement ont été observées lors de trois moments de l'activité de l'enseignant·e : les processus de dévolution, de régulation et d'institutionnalisation (Brousseau, 1986) et correspondent aux stratégies et choix des enseignant·e·s. Charles-Pézarid et al. (2012) et Peltier-Barbier et al. (2004) catégorisent les pratiques enseignantes en trois i-genre relatifs au versant instruction du métier d'enseignant, en

fonction de régularités observées dans leurs pratiques. L'un des trois i-genres, le i-genre 3, est considéré comme une référence car les tâches proposées aux élèves sont a priori plus riches et constituent un meilleur vecteur d'apprentissage du point de vue didactique que dans les autres i-genres. Cette référence se décline en cinq niveaux de développement : les niveaux 1 et 2 sont davantage liés au processus de dévolution et les niveaux 3, 4 et 5 au processus d'institutionnalisation. L'enseignant·e atteint le niveau 1 lorsqu'il·elle instaure une « paix scolaire » dans sa classe, le niveau 2 lorsqu'il·elle propose des problèmes consistants d'un point de vue mathématique avec un temps de réelle recherche par les élèves. Il·elle atteint le niveau 3 lorsqu'il·elle organise des mises en commun des procédures avec validation et explicitation par les élèves. Lorsque l'enseignant·e hiérarchise les différentes procédures proposées par les élèves et organise des phases de synthèses contextualisées, le niveau 4 est atteint. Le niveau 5 est atteint lorsque l'enseignant·e organise des institutionnalisations du savoir ou de la méthode en jeu dans la situation, avec décontextualisation et dépersonnalisation, et une réorganisation des savoirs rencontrés, avec ancrage du nouveau savoir dans l'ancien.

Cette catégorisation des pratiques repose sur les composantes médiative, cognitive et institutionnelle avec la prise en compte des contraintes d'ordre institutionnel. L'analyse en composantes des pratiques décrit la logique d'action de l'enseignant·e pendant la classe (composantes médiative et cognitive) et prend en compte la dimension du métier d'enseignant avec des marges de manoeuvre et des contraintes (composantes personnelle, institutionnelle et sociale).

Apports de l'ergonomie

Cette partie expose des outils issus de l'ergonomie qui permettent de prendre en compte les pratiques de l'enseignant·e dans leur globalité (avant, pendant et après la classe). Notre recherche vise à analyser comment les enseignant·e·s peuvent investir les marges de manoeuvre laissées par l'élaboration collective de la *leçon de recherche*, par-delà les contraintes institutionnelles et la réalité des différentes classes. L'approche ergonomique permet d'analyser les écarts entre ce qui est préparé collectivement et ce que l'enseignant·e réalise effectivement dans sa classe. Dans cette approche, Leplat (1997) différencie la *tâche* (ce que l'on doit faire) et l'*activité* (ce que l'on fait vraiment). L'activité de l'enseignant·e dépend de facteurs internes liés au sujet, ce qui relève de la composante personnelle des pratiques : la représentation de l'enseignement des mathématiques, le rapport aux mathématiques, certaines caractéristiques des pratiques... L'activité de l'enseignant·e dépend aussi de facteurs externes liés à la situation, ce qui relève des composantes sociale et institutionnelle des pratiques : l'attitude de l'enseignant·e pendant le dispositif *lesson study*, son rapport aux ressources...

Dans cette approche, Leplat (1997) introduit des tâches intermédiaires pour analyser le passage entre la tâche prescrite (ce que le sujet doit exécuter) et la tâche réalisée (la tâche effectivement exécutée par le sujet). La tâche représentée est ce que le sujet pense qu'on attend de lui et la tâche redéfinie est la façon dont il définit sa propre tâche à partir de ses propres caractéristiques et de ses propres finalités.

Notre recherche s'appuie sur le modèle développé par Mangiante-Orsola (2007 ; 2012) dans le champ de la didactique des mathématiques d'après les travaux de Leplat (1997). Nous reprenons l'idée centrale d'analyser l'activité de l'enseignant·e comme un processus de modification entre les différents niveaux de tâches. Nous analysons comment l'enseignant·e s'est approprié·e et a modifié la préparation collective et le plan de la *leçon de recherche* par anticipation et/ou pendant la leçon. La particularité de ce dispositif est que le groupe d'enseignant·e·s et de facilitateurs·trices élaborent collectivement la tâche qui est prescrite à un des enseignant·e du groupe, celui·celle qui mettra en œuvre la *leçon de recherche*. Nous nous

intéressons donc aux modifications entre la tâche prescrite (par le groupe à l'un·e des enseignant·e·s du groupe), élaborée collectivement lors des étapes 1 et 2, et la tâche réalisée qui correspond à l'étape 3. Ces modifications sont inférées à partir de la mise en évidence d'écart entre les différentes tâches (Mangiante, 2007).

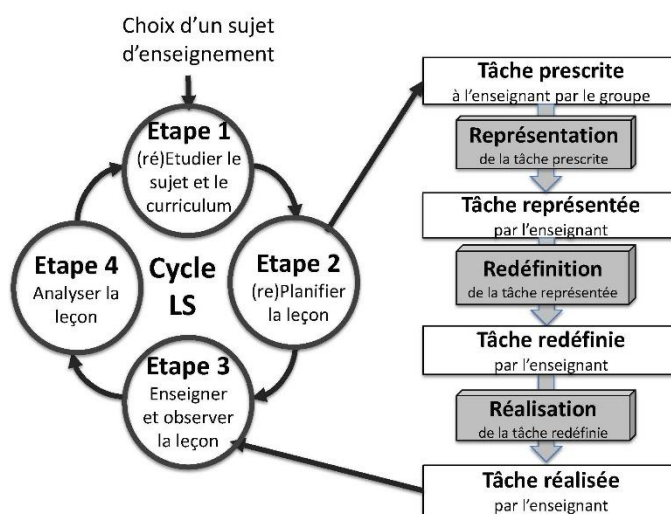


Figure 2. Modèle adapté au contexte du dispositif lesson study (Batteau, 2020, p. 9) d'après (Lewis & Hurd, 2011; Mangiante, 2007; 2012)

Nous nous intéressons en particulier à tout ce que l'enseignant·e met en œuvre lors de la représentation de la tâche prescrite, puis lors de la redéfinition de la tâche représentée, d'un point de vue mathématique, didactique et des gestes professionnels (Charles-Pézarid et al., 2012). La représentation et la redéfinition sont en partie prises en charge par le groupe, mais seulement de manière partielle, provisoire et par anticipation. En effet, le *plan de leçon* présente un degré d'explicitation relativement succinct car chaque élément a fait l'objet de discussions collectives. Lors des séances, chaque enseignant·e peut verbaliser en partie sa représentation de la tâche prescrite ainsi que sa redéfinition de la tâche représentée, en se projetant par anticipation dans la réalisation de la tâche. Ainsi, la redéfinition de la tâche représentée peut avoir lieu avant ou au cours de la réalisation de la tâche. L'enseignant·e a une redéfinition personnelle à partir de la tâche prescrite et de ses propres caractéristiques.

Nous analysons le processus de modification de la tâche prescrite pour chaque leçon observée afin d'en identifier les sources d'aides et de contraintes. Lors de la représentation, de la redéfinition et de la réalisation de la tâche, l'enseignant·e prend en compte plusieurs sources d'aides et de contraintes : son analyse des prescriptions institutionnelles qui émanent du travail collectif (tâche prescrite, analyse du Plan d'Etudes Romand, commentaires didactiques des ressources officielles...), mais aussi sa propre analyse de la tâche mathématique et enfin son analyse de l'activité des élèves au cours de la leçon ou par anticipation.

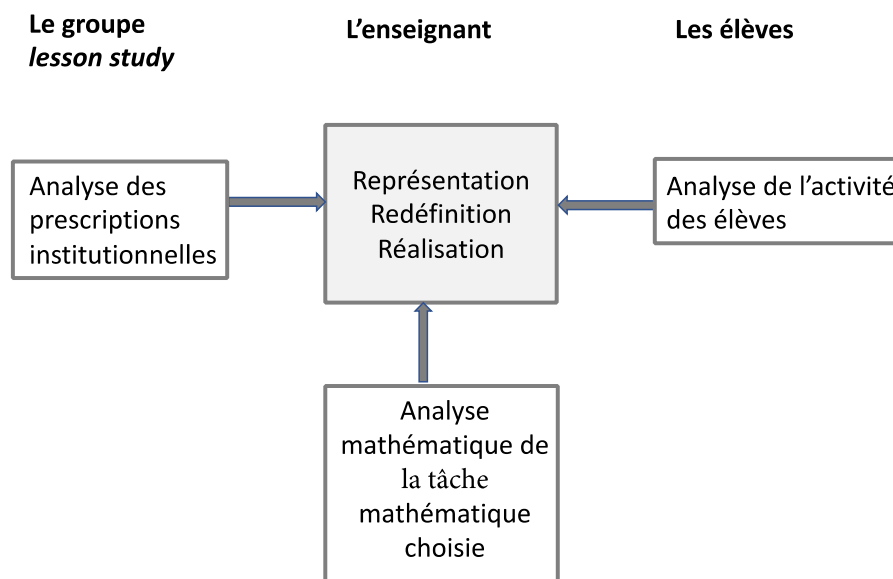


Figure 3. Sources d'aides et de contraintes (Batteau, 2020, p.11) d'après (Mangiante, 2012, p. 15)

Nous analysons si le dispositif *lesson study* implique des changements des sources du processus de modification de la tâche prescrite (analyse des prescriptions institutionnelles, analyse mathématique de la tâche mathématique, analyse de l'activité des élèves), ce que nous interprétons comme une évolution des pratiques. Dans la lignée des travaux de Mangiante-Orsola (2007 ; 2012), notre recherche s'appuie sur les hypothèses suivantes : toute appropriation de la tâche prescrite par l'enseignant·e s'accompagne nécessairement de modifications et la manière dont chaque enseignant·e investit la marge de manœuvre à disposition est révélatrice de la manière dont il·elle enrichit ses pratiques ou non par rapport à ses pratiques ordinaires observées avant le début du dispositif. Pour s'approprier la tâche prescrite, chaque enseignant·e prend en compte et analyse des sources d'aides et de contraintes : les prescriptions institutionnelles, la prise en compte de l'activité de l'élève et l'analyse mathématique de la tâche mathématique choisie. Les modifications apportées à la tâche prescrite peuvent correspondre aux marges de manœuvre laissées à l'enseignant·e, à ce qui est resté implicite par le groupe et à la charge de l'enseignant·e dans la tâche prescrite. Ainsi, les modifications apportées à la tâche prescrite par un·e enseignant·e peuvent traduire un investissement des marges de manœuvre liées à la tâche prescrite et un enrichissement des pratiques de l'enseignant·e.

Questions de recherche

La problématique se décline en trois questions de recherche : comment un changement dans les pratiques lors du dispositif *lesson study* peut-il être caractérisé par l'analyse des pratiques en composantes cognitive, médiative, personnelle, sociale et institutionnelle ? Comment un changement dans les pratiques lors du dispositif LS peut-il être caractérisé par l'analyse des pratiques en niveaux de développement associé au i-genre 3 ? Comment un changement dans les pratiques lors du dispositif *lesson study* peut-il être caractérisé par l'analyse du processus de modification de la tâche prescrite à la tâche réalisée ?

II. METHODOLOGIE

1. Modèle d'analyse au niveau local

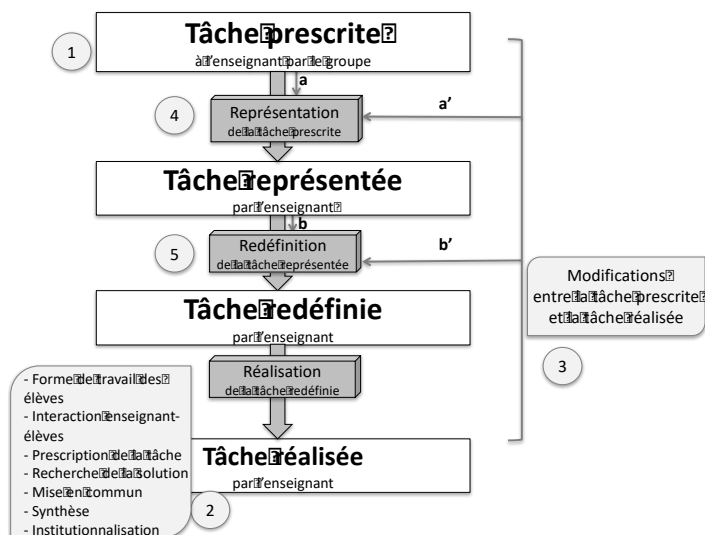


Figure 4. Modèle d'analyse au niveau local (Batteau, 2020, p.12)

Pour chaque leçon observée, l'activité de l'enseignant-e est analysée selon le modèle d'analyse présenté ci-dessus du point 1 au point 5. Le point 1 correspond à une analyse *a priori* de la tâche prescrite qui comprend la tâche mathématique, le *plan de leçon* en distinguant les connaissances mathématiques et les gestes professionnels explicités par le groupe (ce que l'enseignant-e doit faire) et ceux restés implicites à la charge de l'enseignant-e (ce que l'enseignant-e devrait faire pour permettre les apprentissages en référence à cette analyse *a priori*). Le point 2 correspond à une analyse *a posteriori* de la tâche réalisée qui vise à répondre à la question : par rapport à ce qui a été décidé collectivement, quels sont les choix faits par l'enseignant-e lors de la leçon ? Nous étudions le déroulement et les tâches mathématiques proposées aux élèves lors de la tâche réalisée. Cette analyse s'appuie sur les indicateurs proposés dans la méthodologie de Charles-Pézarid et al. (2012). Cette analyse *a posteriori* a pour double objectif de repérer des invariants dans les pratiques (identifiés à partir de la leçon observée avant le dispositif) et d'étudier les modifications apportées par l'enseignant-e à la tâche prescrite. Le point 3 correspond à l'analyse des modifications entre les tâches prescrite et réalisée en répondant aux questions : quels sont les écarts entre ce qui était prévu et ce que l'enseignant-e a fait ? Quelles sont les conséquences au niveau de l'activité possible des élèves ? Pour analyser la représentation de la tâche prescrite par l'enseignant-e (point 4), nous utilisons l'analyse *a priori* de la tâche prescrite (flèche a) pour prendre en compte les connaissances et gestes professionnels et nous identifions les modifications apportées par l'enseignant-e entre les tâches prescrite et réalisée (flèche a'). Lors des séances collectives, les enseignant-e's verbalisent en partie la représentation qu'ils ont de la tâche prescrite qu'ils élaborent collectivement.

Pour analyser la redéfinition de la tâche représentée par l'enseignant-e (point 5), nous considérons les modifications apportées par l'enseignant-e à la tâche prescrite (flèche b') et nous considérons la tâche représentée (flèche b). Lors des séances collectives, en particulier de l'étape 2 d'un cycle LS, l'enseignant-e peut en partie verbaliser sa redéfinition de la tâche prescrite, en se projetant par anticipation dans la réalisation de la tâche. Pendant les séances de

l'étape 4, l'enseignant·e peut également expliciter sa redéfinition de la tâche par anticipation (en exprimant ce qu'il avait prévu de réaliser) ou pendant la leçon.

Nous identifions ensuite les sources du processus de modification de la tâche prescrite et les niveaux de la représentation ou de la redéfinition à partir desquels ce processus a été initié.

2. Dispositif lesson study étudié

Le dispositif étudié s'est déroulé pendant deux années de 2013 à 2015 en formation continue (Batteau & Clivaz, 2016; Batteau & Dorier, 2018; Clivaz, 2015b; Clivaz, Clerc-Georgy & Batteau, 2016). Le groupe est formé de huit enseignant·e·s d'école primaire et de deux facilitateurs·trices : chercheur en didactique des mathématiques pour l'un et chercheur en enseignement, apprentissage et évaluation pour l'autre.

3. Portrait de l'enseignante Anaïs

L'enseignante, renommée Anaïs, est investie dans son métier. Au moment du recueil des données en 2013, elle a quinze années d'expérience d'enseignement en 5-6H (élèves de 8/9 ans ou 9/10 ans). Elle accueille des enseignant·e·s stagiaires dans sa classe. Elle collabore avec un formateur de didactique des mathématiques à la HEP Vaud dans le cadre de ses activités professionnelles et avec sa collègue Édith (une autre enseignante du groupe LS) à l'intérieur de son établissement. Anaïs a participé à de nombreuses formations principalement en français et en lecture. En participant au dispositif, elle souhaite échanger avec d'autres enseignant·e·s, voir d'autres manières d'enseigner et enrichir ses connaissances pour l'enseignement en mathématiques.

4. Données de recherche

Le corpus des données de recherche est constitué de l'enregistrement vidéo d'une leçon observée avant et une après le dispositif, d'une *leçon de recherche* pendant le dispositif et des séances collectives. Ces données vidéos sont complétées par des documents écrits : documents de préparations, *plan de leçon*, traces écrites des élèves et plans de leçon finaux.

III. RESULTATS

Dans ce texte, nous illustrons pour une des trois enseignantes, Anaïs, les analyses au niveau local pour une *leçon de recherche* et les analyses au niveau global sur l'ensemble des données recueillies pendant le dispositif LS.

1. Modèle d'analyse au niveau local

Cette partie illustre le modèle d'analyse pour les pratiques d'Anaïs lors de la première *leçon de recherche* du dispositif. Nous commençons par donner des éléments de contexte lié au dispositif LS : le premier cycle (*a*) est consacré à un travail sur l'aspect décimal de la numération et s'est découpé de la manière suivante. Le groupe LS a abordé plusieurs thèmes et choisi celui de la numération (séance 1) puis a travaillé sur l'aspect décimal du système de numération en base dix (séance 2). Le groupe a identifié que l'aspect positionnel du système de numération est plus travaillé dans les classes que l'aspect décimal alors que celui-ci pose des difficultés aux élèves.

Les facilitateurs ont préparé cette séance notamment avec l'article de Tempier (2010) et ont utilisé son site pour faire analyser des erreurs d'élèves aux enseignant·e·s. Entre les séances 2 et 3, les enseignant·e·s ont proposé par mail des tâches mathématiques aux facilitateurs pour travailler cet aspect retenu de la numération, tâches qui seront ensuite discutées en séance. Le groupe LS a planifié la *leçon de recherche* (séance 4) qu'Anaïs a mise en œuvre. Le groupe LS a ensuite analysé cette première *leçon de recherche* (séance 5).

Analyse de la tâche « Un drôle de jeu de l'oie... » par le groupe LS

Le groupe a choisi une des tâches proposées par les enseignant·e·s : « Un drôle de jeu de l'oie... » issue d'un manuel scolaire français de l'élève de CE2¹² (voir Figure 5).

Chercher

Unités, dizaines, centaines

Un drôle de jeu de l'oie...

2 ou 3 joueurs et le banquier

Matériel

- une piste de jeu - un dé - un pion par joueur
- trois boîtes pour le banquier avec :

1
unité

1
dizaine

1
centaine

25 cartes 80 cartes 80 cartes

Au départ chaque joueur reçoit :

- 3 cartes « 1 centaine » - 3 cartes « 1 dizaine » - 3 cartes « 1 unité »

Le pion est placé sur la case « Départ ».

Jouer

Le premier joueur lance le dé. Il avance son pion du nombre de points indiqué.

Si le pion arrive sur :

- Le joueur doit donner au banquier exactement le nombre de points indiqué dans la case.
Si le joueur n'a pas assez de points, il donne tout ce qu'il possède au banquier.
- Le banquier doit donner au joueur exactement le nombre de points indiqué dans la case.
- Le joueur passe son tour.

Le joueur suivant lance le dé.
Le jeu s'arrête quand un joueur atteint ou dépasse la case « Arrivée ».

Le gagnant est celui qui, à la fin du jeu, a le plus grand nombre de points avec toutes ses cartes. Vous devez toujours être d'accord sur ce que fait chaque joueur ou sur ce que fait le banquier.

1 Joue avec tes camarades. Arrêtez le jeu lorsque vous êtes bloqués. Écrivez pourquoi vous ne pouvez plus continuer.

2 Fais une ou deux autres parties complètes avec tes camarades.

16 • seize

Figure 5. « Un drôle de jeu de l'oie... » (Charnay, Combiér, Dussuc & Madier, 2007, p. 16)

Le livre du maître propose des modalités de déroulement et présente des commentaires didactiques et pédagogiques pour aider l'enseignant·e à la mise en œuvre de la tâche mathématique.

¹²Le CE2 (Cours Élémentaire 2^{ème} année) en France correspond au degré 5H dans le système Harmos Suisse.

Quelques éléments de l'analyse a priori

Dans la tâche « Un drôle de jeu de l'oie... », les élèves jouent par groupe de deux ou trois joueurs avec un banquier. Les joueurs lancent le dé, avancent le pion sur le plateau de jeu et doivent donner ou recevoir du banquier la somme exacte de points indiqués sur la case en fonction de la couleur de la case. Au départ, chaque joueur possède trois cartes « 1 unité », trois cartes « 1 dizaine » et trois cartes « 1 centaine ». Le jeu s'arrête quand un joueur atteint ou dépasse la case d'arrivée. Le gagnant est celui qui a le plus de points. Très rapidement dans le jeu, les joueurs ne disposent plus suffisamment de cartes « 1 unité » ou de cartes « 1 dizaine » pour pouvoir donner la somme exacte au banquier. C'est le cas par exemple, si un joueur lance son dé et obtient 2. Il arrive sur la case 35 et ne dispose pas de cinq cartes « 1 unité » pour pouvoir donner exactement 35. D'où la nécessité d'avoir recours aux échanges entre une dizaine et dix unités ou entre une centaine et dix dizaines, sachant que le jeu ne permet pas que le banquier rende la monnaie. Le banquier est donc la personne avec qui les joueurs doivent échanger leurs cartes « 1 dizaine » pour dix cartes « 1 unité » ou « 1 centaine » pour dix cartes « 1 dizaine ». Le banquier est aussi la personne à qui les joueurs doivent donner le nombre exact de points indiqués sur la case. Cette tâche a pour objectif de travailler dans le système de numération l'aspect décimal principalement et non l'aspect positionnel et c'est le respect de cette contrainte du jeu qui assure cet objectif d'apprentissage.

Une première variable didactique est le fait de donner exactement ou non le nombre de points indiqués sur la case. Donner exactement le nombre de points sous-entend qu'il n'est pas autorisé de donner plus et de « rendre la monnaie », ce que nous détaillerons plus loin dans le texte. Tout l'enjeu mathématique de la tâche se situe dans le fait de donner exactement le nombre de points. En effet, dans le cas où les rendus de monnaie sont autorisés, le joueur fait des décompositions de nombre en centaine, dizaines et unités. Pour rendre la monnaie, le banquier peut effectuer une soustraction, ou une addition à trou. Lorsque le rendu de monnaie est autorisé, nous ne pouvons donc pas affirmer que les élèves travaillent la notion d'échange d'une dizaine contre dix unités. Ce choix de valeur de variable didactique est fondamental, en effet il amène une contrainte, certes un peu artificielle, qui vise à faire travailler l'aspect décimal de la numération, la connaissance visée.

Une deuxième variable didactique est le nombre de cartes « 1 unité », « 1 dizaine », « 1 centaine » distribuées aux joueurs. Une troisième variable didactique est le choix des écritures en chiffres ou en lettres des cartes du jeu. Une quatrième variable est le nombre total de cartes « 1 unité » à disposition du banquier. Une cinquième variable est la présence d'un banquier dans le jeu, ce qui incite à parler en argent et aussi à rendre la monnaie. De plus, il y a un problème de conception dans le jeu. En effet, pour les groupes composés de quatre élèves (trois joueurs et un banquier), il n'y a pas suffisamment de cartes « 1 unité » pour pouvoir réaliser les échanges nécessaires dans le jeu. Quand le banquier a distribué trois cartes « 1 unité » au début de la partie à chaque joueur, il lui reste donc seize cartes « 1 unité » dans sa banque.

Dans cette partie, nous étudions si le groupe LS a pris en compte les variables didactiques de la tâche et nous précisons à quel moment, c'est-à-dire que nous précisons si les séances ont eu lieu avant ou après la *leçon de recherche*. Le groupe LS a discuté, lors de la séance 4 de préparation du *plan de leçon*, de la première variable : le fait de donner exactement ou non le nombre de points indiqués sur la case. Pendant cette séance, les enseignants ont insisté auprès des facilitateurs pour jouer eux-mêmes une vraie partie avec des cartes et des pions, ceci afin d'anticiper les difficultés des élèves. Certaines difficultés du jeu ont ainsi été anticipées, notamment la difficulté liée au terme « exactement ».

SC 4 - 32:10 - 33:02 Vanessa : je donne plus et il me rend la monnaie. [...]

Caroline : c'est marqué il doit donner juste ou pas ?

Anaïs : exactement. [...]

Facilitateur : tu dois donner au banquier exactement le nombre de points. Il n'y a pas possibilité de rendre la monnaie. [...]

Dans cet extrait, le groupe LS a relevé l'importance du fait qu'il faut donner exactement le nombre de points et que le banquier n'est pas autorisé à rendre la monnaie dans le jeu. La solution proposée à cette situation de blocage (dans le sens où les joueurs ne disposent pas des cartes nécessaires pour donner le nombre de points indiqué) est d'organiser une mise en commun afin que les élèves comprennent qu'en effectuant des échanges, ils pourront donner le nombre de points exact.

La deuxième variable (le nombre de cartes « 1 unité », « 1 dizaine », « 1 centaine ») et la troisième (le choix des écritures en chiffres ou en lettres des cartes du jeu) ont aussi été discutées pendant cette séance. Le groupe LS a discuté de cette troisième variable à l'occasion de la partie entre enseignant·e·s qui s'est déroulée avec du matériel improvisé : des cartes en écritures chiffrées (1 ; 10 ; 100) et non avec le matériel prévu par le jeu (des cartes : « 1 unité », « 1 dizaine » ou « 1 centaine »). Le groupe LS décide alors d'exclure le type de cartes en écritures chiffrées car ce matériel induit la procédure de rendre la monnaie qu'ils veulent éviter. La quatrième variable, le nombre total de cartes « 1 unité » à disposition du banquier, a aussi été discutée. Certaines difficultés du jeu ont ainsi été anticipées suite à cette partie, mais le problème de conception du jeu n'a pas été repéré : il manque des cartes « 1 unité » dans le jeu pour qu'une partie puisse se dérouler dans les conditions prévues avec des échanges de cartes. Par ailleurs, les enseignant·e·s utilisent des termes liés à l'argent (« sous », « francs », « monnaie ») à la place de points en jouant cette partie, ce que les facilitateurs soulignent. Mais, le fait que la présence du banquier incite à rendre la monnaie n'a pas été discuté dans les séances qui ont eu lieu avant la leçon. Pour terminer, la cinquième variable, la présence d'un banquier dans le jeu, a été discutée après la leçon (séance 5).

Analyse de la tâche prescrite (point 1 du modèle d'analyse local – Figure 4)

La tâche prescrite comprend : le *plan de leçon* qui décrit le déroulement de la *leçon de recherche*, « Un drôle de jeu de l'oie... » (voir Figure 5), le livre du maître, la connaissance mathématique en jeu et le matériel. Nous allons décrire l'élaboration collective du *plan de leçon* en distinguant les connaissances mathématiques et gestes professionnels qui ont été explicités ou non. Nous commençons par l'analyse des connaissances mathématiques et gestes professionnels explicités dans la tâche prescrite. Le groupe LS a décidé de former des groupes de trois ou quatre élèves dont un banquier. Dans les groupes, les rôles entre banquier et joueur varient au cours des parties. La passation de la consigne est laissée au choix de l'enseignant·e : lecture individuelle ou explication collective selon les habitudes de la classe.

Le groupe LS a décidé de commencer par un début de partie collective avec les élèves, illustrant ainsi le fonctionnement du jeu dans des cas qui ne nécessitent pas d'échanges de cartes avec le banquier. La partie collective a été décidée collectivement ainsi : le premier coup du joueur A est 4, il arrive sur une case où il doit donner au banquier 12 points. Le premier coup du joueur B est 5, il arrive sur une case où le banquier lui donne 102 points. Les cases choisies sont telles que les deux cas « donner » ou « recevoir » du banquier sont illustrés, mais sans situation de blocage : les joueurs ou le banquier peuvent donner les sommes 12 et 102 sans devoir effectuer d'échange. Puis, les groupes d'élèves jouent. Les situations de blocage vont intervenir très rapidement dans la partie. Le groupe LS a décidé de laisser un moment de réflexion pour les élèves bloqués puis d'organiser un moment collectif de mise en commun pour clarifier les règles. La mise en commun a pour objectif de faire comprendre aux élèves qu'ils doivent

effectuer des échanges pour débloquer une situation du jeu. Dans le cas où personne ne propose d'effectuer des échanges, l'enseignant·e doit demander ce qu'on obtiendrait en échange d'une dizaine et d'une centaine. Enfin, l'enseignant·e doit écrire au tableau : $10 \text{ unités} = 1 \text{ dizaine}$ et $10 \text{ dizaines} = 1 \text{ centaine}$, comme indiqué dans le livre du maître, ce qui correspond au texte du savoir pour les élèves qui est visé par la leçon. Après la mise en commun, les élèves reprennent leurs parties. En cas d'autres blocages, l'enseignant·e intervient dans les groupes et vérifie la règle du gain : la partie s'arrête quand un joueur arrive sur la case d'arrivée et on compte alors les points. Sinon, un moment avant la fin de la leçon, il arrête tout le monde et les élèves comptent les points. Pour terminer la leçon, le groupe LS a décidé de faire un moment collectif pour demander aux élèves ce qui s'est passé et ce qu'ils ont appris. La connaissance mathématique visée dans cette leçon relève de l'aspect décimal de la numération. Cette connaissance a été explicitée et travaillée lors des séances de préparation, notamment avec le livre du maître dans lequel il est indiqué « ce jeu de l'oie est destiné à faire pratiquer les échanges entre unités, dizaines et centaines ». Le groupe LS a relevé que notre système de numération est en base dix, c'est-à-dire qu'il repose sur des groupements par dix pour passer d'un certain rang à un rang supérieur.

Nous analysons à présent les connaissances mathématiques et gestes professionnels laissés implicites par le groupe (c'est-à-dire ce que l'enseignant·e devrait faire pour permettre les apprentissages en référence à l'analyse *a priori*) lors des séances qui ont lieu avant la *leçon de recherche*. Pour travailler l'aspect décimal, il est nécessaire d'effectuer des échanges directement d'une unité d'un certain rang pour dix unités du rang inférieur. Cet aspect est resté implicite lors de la préparation collective de la leçon et apparaîtra lors de la séance 7 qui a lieu après la deuxième *leçon de recherche* (Batteau & Clivaz, 2016).

Dans ce *plan de leçon*, certains gestes professionnels sont laissés à la charge de l'enseignant·e. Lors du processus de dévolution, l'enseignant·e a la charge de gérer les questions des élèves, notamment celles concernant les situations de blocage (qui ont été écartées volontairement dans l'exemple) pendant la partie collective. Puis, lorsque les élèves jouent et se retrouvent dans une situation de blocage, il revient à l'enseignant·e de décider du moment pour proposer une mise en commun, c'est-à-dire lorsque suffisamment de groupes d'élèves se sont engagés dans le jeu et se sont retrouvés bloqués. Lors de cette mise en commun, l'enseignant·e doit faire comprendre aux élèves que la connaissance mathématique qu'ils possèdent en fait déjà (la notion de groupements ou d'échanges dans le système de numération) est un moyen de débloquer les situations en la recontextualisant avec des cartes dans le jeu. À la fin du jeu, l'enseignant·e propose un moment de réflexion aux élèves sur ce qu'ils ont appris. Il devrait centrer ce moment sur la décontextualisation de la connaissance mathématique en jeu. Les aspects de recontextualisation (lors de la mise en commun) et de décontextualisation (à la fin du jeu) de la connaissance mathématique sont restés implicites lors de la préparation collective de la leçon.

Le groupe LS n'a pas discuté de l'éventualité d'écrire $1 \text{ dizaine} = 10 \text{ unités}$ et $1 \text{ centaine} = 10 \text{ dizaines}$ plutôt que les égalités « inverses ». Les deux paires d'écritures sont équivalentes puisque l'égalité est une relation d'équivalence (réflexive, transitive et symétrique). Cependant, pour les élèves de ce niveau, le sens que revêt le signe « = » est plus celui « ça fait » que « c'est égal à » et que de fait la relation n'est pas vue comme symétrique. Selon Theis (2005), le signe « = » est un obstacle cognitif important pour des élèves du début du primaire. Il a montré que le signe « = » est vu comme un opérateur ou une incitation à fournir une réponse et non comme une relation d'équivalence. Selon cet auteur, une conception adéquate du signe « = » comme indicateur d'une relation d'équivalence est donc primordiale pour pouvoir comprendre les opérations arithmétiques élémentaires et leurs propriétés. En lisant de gauche à droite « 1 dizaine = 10 unités », le signe « = » correspond à l'échange que les élèves effectuent

concrètement : ils-elles donnent le membre de gauche une carte « 1 dizaine » et ils-elles prennent le membre de droite dix cartes « 1 unité ». Le signe « = » n'est donc pas considéré ici comme une relation d'équivalence car ils-elles ne disposent pas de dix cartes « 1 unité » et donc l'échange n'est possible que dans un seul sens pour les joueurs et dans l'autre sens pour le banquier.

Lors d'une partie du jeu, l'échange avec un seul sens possible pour les joueurs permet de débloquent la situation. Ainsi, le signe « = » ne correspond pas à une relation d'équivalence dans le jeu. Or dans la connaissance mathématique, l'aspect décimal de notre système de numération, le signe « = » correspond à une relation d'équivalence.

Nous ne détaillons pas ici le point 2 du modèle d'analyse (la réalisation de la tâche par Anaïs) et nous passons directement au point 3 de l'analyse des modifications entre la tâche prescrite et la tâche réalisée et qui est éclairée par les séances collectives 3, 4 et 5 (pour plus de détails, voir Batteau, 2018).

Recherche de modifications entre les tâches prescrite et réalisée (point 3 du modèle d'analyse local – Figure 4)

Nous présentons les modifications qu'Anaïs a apportées à la tâche prescrite, d'abord concernant les formes globales de travail. Elle apporte des modifications à la tâche prescrite pendant les moments de travail collectif et reste conforme à la tâche prescrite lors des moments de travail en groupe. Une explication est qu'il y a plus de liberté laissée à l'enseignante lors des moments de travail en groupe car il y a moins d'indications directives dans le *plan de leçon*. Cela implique moins de modifications possibles de la tâche prescrite pour les moments de travail en groupe. Par contre, le *plan de leçon* donne des indications plus directives lors des moments collectifs par exemple lors de la prescription de la tâche (avec la description de la partie collective) ou lors du blocage avec une mise en commun et ses objectifs. Nous allons donc plus particulièrement nous intéresser à ces moments collectifs. Anaïs apporte des modifications à la tâche prescrite pendant les mises en commun. Le moment collectif de mise en commun a pour objectif de trouver des solutions pour les élèves bloqués, c'est-à-dire d'arriver à la notion d'échange d'une dizaine contre dix unités et d'une centaine contre dix dizaines. Dans le passage ci-dessous, l'enseignante demande un autre échange que dix unités contre une dizaine ($10u=1d$). Un élève propose alors d'échanger « des dizaines contre des unités » (cf. extrait ci-dessous). Comme au tableau, il est déjà noté $1d=10u$ (à la place du texte « 10 unités = 1 dizaine et 10 dizaines = 1 centaine » planifié par le groupe), Anaïs en déduit par une forme d'effet Jourdain que l'élève propose d'échanger dix unités contre une dizaine.

37:33 - 37:57 Anaïs : trouvez-moi un autre échange possible [...] (les élèves ont déjà proposé d'échanger 10 cartes « 1 unité » contre 1 carte « 1 dizaine »)

Julien : des dizaines contre des unités.

Anaïs : ok, dizaine unités. C'est ce qu'on a fait, dix unités contre une dizaine. Je pourrais avoir aussi une dizaine contre dix unités. C'est ça que tu veux dire ? (L'enseignante écrit au tableau $1d=10u$ en dessous de $10u=1d$)

Julien : oui.

Un peu après, l'enseignante reprend la proposition de Julien pour les échanges entre centaine et dizaines (38:54 - 39:48 « Je peux aussi faire le contraire comme nous avait dit Julien, (l'enseignante écrit au tableau $1c=10d$ en dessous de $10d=1c$) ça vous aidera, une centaine égale dix dizaines »). Elle s'appuie sur l'intervention de Julien pour introduire les deux écritures $1c=10d$ et $10d=1c$. Ne pas reconnaître la symétrie de l'égalité dans ces deux cas précis peut renforcer de fausses conceptions des élèves dans lesquelles l'égalité aurait un sens. Ici, elle

introduit ces deux écritures qui peuvent être utiles dans la tâche mathématique mais sans généraliser la connaissance mathématique. La tâche prescrite n'avait pas évoqué la symétrie de l'égalité. Mais, il est difficile de savoir si elle l'aurait fait à son initiative sans l'intervention de l'élève.

Dans le passage ci-dessous, l'enseignante apporte une autre modification à la tâche prescrite : elle rajoute l'utilisation de matériel pour donner une explication à une élève et rajoute l'égalité entre une centaine et cent unités. Elle fait un passage par le nombre d'unités simples pour expliquer l'échange entre dix dizaines et une centaine. Par un cours dialogué, elle utilise le raisonnement suivant : comme dix dizaines égalent cent (unités) et une centaine égale cent (unités), alors dix dizaines égalent une centaine.

38:30 - 39:48 Anaïs : *Amandine ? Une centaine, c'est combien ? (L'enseignante montre une plaque de 100 unités)*

élève : cent

Anaïs : hum, hum. Exact. Est-ce que ça joue ça ? Dix dizaines, vous m'avez dit que ça fait cent. Une centaine vous m'avez dit que ça fait cent. Est-ce que ça joue ?

Élèves (en chœur) : oui.

Anaïs se ramène à la référence en nombre d'unités plutôt que d'utiliser le caractère décimal du système de numération, qui est l'objectif d'apprentissage et qui permet de dire directement qu'une centaine vaut dix dizaines. Autrement dit, Anaïs ne considère pas les dizaines comme pouvant être une unité et ne peut raisonner qu'en convertissant les centaines et les dizaines en unités simples (Chambris, 2021). Elle n'effectue pas les échanges directement des dizaines aux centaines, elle les exprime en passant par les unités simples, pour arriver au fait qu'une centaine vaut dix dizaines, ce qui occulte une part du caractère décimal du système de numération et l'objectif d'apprentissage essentiel de la séance ! Il était bien question de travailler les échanges en base dix et à aucun moment durant la séance, il n'a été envisagé de faire les passages par les unités simples, et inversement, le groupe n'avait pas non plus pointé cette difficulté lors de la préparation de la *leçon de recherche*. Anaïs opère ici bien une modification à son initiative, sans visiblement en mesurer les conséquences et l'inadéquation quant à l'atteinte des objectifs de la séance.

Anaïs réalise une autre modification lors de la mise en commun : au lieu d'écrire $10 \text{ unités} = 1 \text{ dizaine}$ et $10 \text{ dizaines} = 1 \text{ centaine}$, elle écrit $10u=1d$, avec u et d encadrés à la place d'unité et dizaine (*Figure 6*). Peut-être se réfère-t-elle implicitement au tableau de numération c-d-u ? Peut-être se réfère-t-elle aux cartes « 1 unité », « 1 dizaine », « 1 centaine » du jeu car le u, le d et le c encadrés peuvent rappeler la forme d'une carte du jeu ? Elle a aussi dessiné les cartes que les joueurs doivent avoir au début de la partie (trois cartes « 1 unité », trois cartes « 1 dizaine », trois cartes « 1 centaine »).

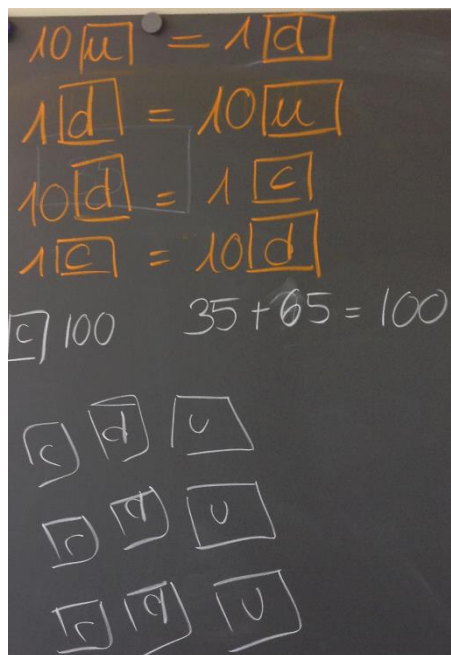


Figure 6. Tableau noir-classe d'Anaïs-leçon de recherche n°1 du cycle a

Anaïs n'écrit pas au tableau la connaissance décontextualisée dans un registre mathématique comme prévu dans le plan de leçon, mais la connaissance mathématique contextualisée avec les u, d et c encadrés comme pour rappeler les cartes du jeu.

Dans le *plan de leçon*, le groupe LS n'a prévu de faire ni d'institutionnalisation ni de synthèse des procédures d'élèves. L'enseignante doit écrire au tableau 10 unités = 1 dizaine et 10 dizaines = 1 centaine, ce qui constitue une connaissance mathématique déjà institutionnalisée lors de leçons précédentes. Cette connaissance est recontextualisée en connaissance utile dans la tâche. Nous pouvons donc considérer que ce moment peut participer au processus d'institutionnalisation.

Dans le *plan de leçon*, le groupe LS a décidé de faire un « moment collectif sur ce qui s'est passé : est-ce que vous avez appris quelque chose ? » À la place, Anaïs réalise elle-même une synthèse rapide sur le déroulement du jeu (évoquant sur le fait que les élèves ont rencontré des problèmes et durée du jeu), reprise du jeu ultérieurement et rangement du matériel. Cette modification de la fin du jeu peut en partie s'expliquer par un manque de temps.

Analyse de la représentation (point 4 du modèle d'analyse local – Figure 4)

Au début de la séance 5, les facilitateurs demandent à Anaïs d'exprimer son vécu de la leçon, ce qu'elle a observé, son point de vue et les difficultés qu'elle a identifiées.

SC 5 - 27:39- 30:17 Anaïs : [...] Je m'étais déjà dit ça, et puis t'es sûr... il doit donner exactement la même somme ou ils peuvent rendre. J'avais quand même le doute en refaisant le jeu et en réfléchissant encore. Et puis, ça ne jouait effectivement pas, car à un moment, ils ont fait leurs échanges et malgré tout, et puis hier (inaudible) aucun des élèves n'avait assez d'unités. [...]

Anaïs émet alors un doute sur la tâche prescrite : est-ce que les élèves doivent donner exactement le nombre de points ou peuvent-ils rendre la monnaie ? Dans cet extrait, elle évoque en plus le manque de cartes « 1 unité ». Comme nous l'avons vu lors de l'analyse *a priori* de la tâche prescrite, il est essentiel dans ce jeu de donner exactement le nombre de points afin de permettre l'apprentissage visé. La tâche prescrite indique explicitement que les joueurs doivent donner exactement le nombre de points indiqué et les facilitateurs le mentionnent également

mais sans faire explicitement le lien avec l'apprentissage visé. Ce point est encore repris lors de la séance 5.

SC 5 – 1:16:04 - 1:18:17 Enseignant 4 : je pense que tous les élèves qu'ils aient rendu la monnaie ou non ont fait les échanges. Ils ont d'une certaine manière fait des décompositions. Donc avec ou sans la règle du jeu, même les élèves qui rendaient la monnaie sur cent ou cent cinquante ont fait des décompositions et des recompositions. Ce qui était quand même l'aspect mathématique qu'on avait retenu.

Enseignante 1 : ils peuvent rendre sans faire d'échanges.

Enseignant 4 : oui mais en décomposant. [...] parce que si je te donne cent cinquante pour cent quarante-cinq, forcément que tu dois faire la décomposition pour trouver que tu dois me rendre cinq. Dix moins cinq, donc tu as cassé ta dizaine en deux fois cinq unités.

Enseignante 1 : ça peut être une bête soustraction.

Enseignant 3 : oui, mais celui qui donne, il donne une centaine et cinq dizaines. [...] mais celui qui donne, il a déjà compris que dans cent cinquante, il y a cent et cinq dizaines.

Enseignante 1 : d'accord. Et pour le banquier [...] il peut ne pas faire d'échange mais une soustraction.

Facilitateur : un élève qui donne une centaine et cinq dizaines pour cent quarante-cinq. Qu'est-ce qu'on est sûr que l'élève sait ?

Enseignant 3 : la différence centaine et dizaine.

Facilitateur : [...] Et s'il rend cinq, qu'est-ce qu'on peut affirmer que l'élève sait ?

Enseignante 1 : les compléments à dix.

Facilitateur : y a-t-il une possibilité de s'en sortir sans faire des échanges ? De rendre de la monnaie comme ça sans rentrer dans la notion d'échanges ou pas ?

Anaïs : ben cent quarante-cinq, non, on est obligé de faire des échanges.

Au début de ce passage, l'enseignant 4 affirme que les élèves travaillent la notion d'échange lorsqu'ils se rendent ou non la monnaie ; les facilitateurs ne valident (ou n'invalident) pas son affirmation et amènent les enseignant·e·s à questionner le lien entre « rendre la monnaie » et « travailler la notion d'échanges ». Ainsi, Anaïs affirme que lorsqu'on rend la monnaie, on doit effectuer des échanges.

SC 5 - 27:39 - 30:17 Anaïs : [...] Je m'étais déjà dit ça, et puis t'es sûr il doit donner exactement la même somme ou ils peuvent rendre. J'avais quand même le doute en refaisant le jeu et en réfléchissant encore. [...]

Nous en déduisons qu'Anaïs se représente une tâche dans laquelle les élèves peuvent se rendre la monnaie et atteindre l'objectif d'apprentissage visé. Lors de la *leçon de recherche*, les joueurs se retrouvent dans une situation de blocage car ils·elles n'ont plus suffisamment de cartes « 1 unité » pour pouvoir donner le nombre exact de points au banquier. Anaïs incite alors le banquier à rendre la monnaie aux joueurs pour qu'ils·elles puissent continuer à jouer leur partie et aux joueurs à ne pas donner le nombre exact de points au banquier. Cette modification est en cohérence avec ses analyses mathématiques (SC 5 – 1:16:04 - 1:18:17) et sa représentation de la tâche prescrite. Cet extrait est rediscuté lors de la séance 5 par Enseignante 1, l'enseignante qui a observé ce groupe d'élèves.

SC 5 - 2:01:10 - 2:02:30 Enseignante 1 : et puis après à un autre moment, Anaïs est intervenue, donc le banquier est bloqué, il peut pas faire d'échanges puisqu'il lui reste huit unités. Il lui en faut dix pour faire un échange. Quand il est allé regarder chez les autres, et bien, Anaïs les a guidés pour dire toi, toi... et aucun n'en avait, donc, soit le jeu s'arrêtait, soit, tu as proposé quoi finalement ?

Anaïs : *j'ai dit on va... on est obligé de ne pas respecter les règles. [...] et du coup, Jules, lui, il arrivait pas à dépasser ça. Il était tout le temps dans rendre la monnaie.*

Enseignante 1 : *oui, tu leur as fait rendre la monnaie. [...] ce moment-là était embêtant quoi.*

Anaïs : *ouais.*

Enseignante 1 : *parce que là, qu'est-ce qu'on avait dit, le jeu s'arrêtait quand on est bloqués. Quand on est bloqués, il faut recommencer une partie.*

Anaïs : *aussi, ouais.*

Enseignante 1 : *on s'arrête là, la partie est terminée, vous comptez.*

Enseignante 2 : *il aurait fallu trouver un joueur qui avait assez d'argent.*

Enseignante 1 : *non, c'est pas dans les règles non plus d'aller chercher chez les autres si ça peut jouer.*

Dans la représentation de la tâche prescrite, Anaïs privilégie le jeu et son aspect réaliste, et le fait de faire jouer les élèves, plutôt que de leur faire effectuer des échanges. Ceci la conduit à modifier ouvertement la règle du jeu.

SC 5 - 27:39 - 30:17 Anaïs : *Je pense qu'il faut vraiment jouer. Il y en a qui ont rejoué et c'est comme ça, il y a vraiment de quoi faire. Au stade où ils en sont, je pense qu'il tourne bien ce jeu car les échanges, ils ne savent pas encore tous faire. Mais ça, je le savais déjà avant qu'on joue, c'est pas encore compris pour beaucoup. [...]*

Cette intervention montre que l'aspect du jeu l'emporte sur l'enjeu mathématique de la tâche, même si elle voit l'enjeu d'apprentissage des échanges. Il y a une dialectique entre l'aspect du jeu et l'apprentissage mathématique visé, qui la conduit à faire ces choix. Dans sa représentation de la tâche, Anaïs doit faire jouer ses élèves et les autorise à se rendre la monnaie. Dans son analyse mathématique de la tâche, elle croit rendre possible un apprentissage qu'en réalité elle ne permet pas. Tout l'enjeu se situe dans le fait d'observer lors des séances, si Anaïs se rend compte de cet écart entre sa représentation de la tâche et la tâche prescrite. Dans ce cas, elle pourrait faire évoluer son discours sur ses pratiques dans un premier temps et pourrait avoir une prise de conscience sur ses pratiques. Pour cette première *leçon de recherche*, comme il y a eu d'autres problèmes par rapport au jeu lui-même et au matériel proposé, elle n'a pas remis en question ses pratiques, même si Enseignante 1 l'y a encouragée comme nous avons pu le voir. Le groupe LS a plutôt orienté les discussions vers les problèmes du jeu afin de pouvoir les dépasser lors de la *leçon de recherche* suivante. Une caractéristique des pratiques d'Anaïs est de privilégier l'aspect « jeu » à l'enjeu mathématique visé et cette caractéristique a influencé sa représentation de la tâche prescrite.

Analyse de la redéfinition (point 5 du modèle d'analyse local – Figure 4)

Dans sa redéfinition, Anaïs n'apporte pas de modification au niveau de la composition des groupes d'élèves : la tâche prescrite suggérait que l'enseignante détermine les groupes d'élèves à l'avance mais laissait une certaine liberté sur la composition des groupes, notamment sur leur homogénéité ou leur hétérogénéité. Plusieurs éventualités avaient été discutées (SC 4 -58:14 - 58:20 Facilitateur : « donc c'est déterminé à l'avance et un peu au hasard. Je vous laisse, c'est à vous de décider », SC 5 - 33:25 - 33:32 Anne : « on avait laissé libre »). Elle ne se donne pas cette liberté qu'elle aurait prise hors du dispositif LS (SC 5 - 33:42 - 34:16 Anaïs : « j'aurais voulu des groupes homogènes en fait, j'aurais voulu essayer comme ça, si je le refais, je ferai comme ça »). La formulation dans le *plan de leçon* laissait un flou, ce qui a peut-être empêché Anaïs de faire comme elle voulait ? Il s'agit de la première *leçon de recherche* du groupe LS avec un certain effet de contrainte du dispositif. Anaïs se sent sûrement comme une exécutante

des décisions du groupe qui va enseigner la leçon préparée collectivement et dans ce contexte, il n'est pas simple d'oser prendre la liberté de s'éloigner du *plan de leçon*, sachant que cela pourra être discuté ensuite collectivement. Une autre intervention d'Anaïs illustre un effet du dispositif.

SC 5 - 43:13 - 43:35 Anaïs : non, pour ces feuilles (la feuille à 3 colonnes), moi, je m'attendais, comme c'est vous qui faisiez, je m'attendais à ce que ce soit écrit unité, dizaine, centaine dessus et puis c'était pas. Je me suis dit ok c'est égal. Hein sur le moment, je me suis dit... j'ai vu qu'ils notaient pas forcément (inaudible) moi, j'avais pensé ça comme ça.

Cette intervention montre qu'Anaïs ne se sent que comme une exécutante des décisions du groupe LS et cela montre un effet du dispositif sur ce qu'elle peut faire ou non pendant la *leçon de recherche*. Pour conclure, elle n'apporte pas de modifications à la tâche prescrite lors de sa redéfinition lorsqu'elle s'approprie, anticipe et prépare seule la leçon. Et pendant la leçon, elle réalise une tâche qui est proche de la tâche qu'elle se représente (avec le rendu de monnaie autorisé).

Synthèse par rapport au processus de modifications

Anaïs apporte des modifications au niveau de la réalisation et de la représentation de la tâche prescrite, mais pas au niveau de la redéfinition (hormis pour la passation de la consigne). Elle reste conforme aux prescriptions qui émanent du groupe LS (*plan de leçon* : non-modification de la composition des groupes d'élèves). La tâche mathématique n'a pas été mise en scène de façon adidactique, c'est-à-dire de sorte à ce que le résultat souhaité (donner le nombre de points sans rendre la monnaie) ne puisse être obtenu que par la mise en œuvre des connaissances visées (les échanges entre unités, dizaines et centaines) et que l'élève ne soit pas conscient de l'intention d'enseigner de l'enseignante. Cela révèle une représentation de la tâche prescrite éloignée de la tâche prescrite : les élèves doivent pouvoir continuer à jouer leur partie sans s'arrêter, même si l'enseignante doit intervenir et transformer les règles du jeu en s'éloignant de l'enjeu mathématique visé.

Le processus de modifications a pour source l'aspect du jeu qui intervient lors de la réalisation et de la représentation de la tâche prescrite. Comme elle n'a pas apporté de modifications au niveau de la redéfinition de la tâche, elle devra s'adapter et apporter des modifications lors de la réalisation de la tâche.

2. Bilan des analyses des pratiques en composantes

Cette partie expose le bilan des analyses des pratiques d'Anaïs en composantes présentées partiellement dans ce texte (pour les analyses complètes, voir Batteau, 2018, pp. 99-121, 285-297). Pour la composante cognitive, il ressort qu'Anaïs choisit des tâches issues des moyens d'enseignement romands (ressources officielles en Suisse Romande), qui ne sont pas toutes consistantes d'un point de vue mathématique, et qu'elle laisse un temps de recherche conséquent aux élèves pendant les leçons. Son enseignement est différencié dans le choix des tâches ainsi que dans leur déroulement car certaines tâches sont réservées à un certain type d'élèves (ceux qui ont le plus de facilité) et son temps d'intervention n'est pas le même en fonction des ateliers mis en place, laissant certains élèves en grande partie en autonomie. Au niveau de la séquence d'enseignement, elle choisit des tâches similaires et des tâches avec matériel (pour la numération) en visant à dépasser le stade de la manipulation : c'est-à-dire qu'après une phase de manipulation, elle incite les élèves à ne plus utiliser de matériel pour résoudre les tâches demandées.

Un invariant de la composante médiative des pratiques est la part plus importante des leçons pour le travail en groupe (voire sous forme d'« ateliers ») par rapport au travail en collectif. Anaïs privilégie cette forme de travail car cela lui permet d'apporter des aides personnelles aux élèves pendant les moments de recherche, mais aussi d'éviter de gérer des mises en commun en collectif comme elle l'explique en séance LS « je trouve que c'est [...] difficile de gérer ces moments, enfin ce n'est pas facile ». Elle organise la prescription des tâches, la synthèse des procédures et l'institutionnalisation en collectif. Elle n'apporte pas d'aides collectives aux élèves à aucun moment des leçons observées tant avant qu'après le dispositif LS. Par ailleurs, dans son enseignement, elle privilégie le travail différencié tant sur le choix des tâches (composante cognitive) que sur son mode d'intervention (composante médiative). Elle choisit d'intervenir avec un petit groupe d'élèves à la fois (sous forme d'« ateliers »), laissant le reste de la classe en autonomie soit sur la même tâche, soit sur une autre tâche et son temps d'intervention n'est pas le même en fonction des « ateliers ».

Nous relevons à présent les caractéristiques de la composante médiative qui sont différentes lors de la *leçon de recherche* par rapport aux deux autres leçons et confirmées par les interventions de l'enseignante en séances. Par rapport aux déroulements, il ressort que le temps de travail en collectif est plus important pour la *leçon de recherche* que pour les deux autres leçons. Pour les mises en commun, moins de temps est dévolu aux explicitations des procédures des élèves et plus de temps pour les validations lors de la *leçon de recherche* que lors de la leçon avant LS. Par rapport à l'accompagnement de l'activité des élèves, il ressort que lors de la *leçon de recherche*, Anaïs intervient davantage pendant la prescription, moins pendant les moments de recherche et les mises en commun que pour les deux autres leçons observées. Parmi ses interventions, elle propose des aides collectives à différents moments de la *leçon de recherche*, ce qui n'est pas le cas pour les deux autres leçons, mais aussi des aides personnelles en réduisant ses exigences mathématiques.

Nous en déduisons que le dispositif LS a eu un effet sur sa composante médiative lors de la *leçon de recherche*. En revanche, nous n'avons pas observé d'évolution de sa composante médiative des pratiques entre les leçons avant et après LS : en effet, les modifications de la composante médiative lors de la *leçon de recherche* n'ont pas été observées lors de la leçon après LS.

La composante personnelle des pratiques d'Anaïs est marquée par sa représentation de l'enseignement des mathématiques. Cette représentation relève d'une croyance dans laquelle les élèves doivent être en activité et avec peu d'intervention et d'aide de la part de l'enseignante. De plus, l'aspect jeu est une caractéristique qui intervient dans le choix des tâches (composante cognitive). Cette caractéristique intervient également dans sa composante médiative : sur les aides et ses interventions, mais aussi sur le processus de modifications de la tâche prescrite.

Nous n'avons pas observé d'effet du dispositif LS sur sa composante personnelle. D'une part, le groupe LS a aussi choisi un jeu lors de la première *leçon de recherche*, ce qui va dans le sens de sa composante personnelle. D'autre part, sa représentation de l'enseignement peut expliquer une certaine résistance à faire évoluer sa composante médiative (proposer des aides collectives).

Concernant les composantes sociale et institutionnelle, Anaïs bien que toujours présente et motrice au début du dispositif est intervenue très peu du point de vue de la dynamique des séances. Par ailleurs, Anaïs est praticienne formatrice, cela signifie qu'elle a une stagiaire régulièrement dans sa classe. Nous prenons en compte les discours sur ses pratiques concernant son travail avec son stagiaire dans sa composante sociale des pratiques. Nous avons ainsi pu analyser qu'elle dit avoir réinvesti les connaissances acquises lors du dispositif LS avec sa stagiaire, ceci à deux reprises. Anaïs dit avoir transposé notamment la recommandation du facilitateur à ses étudiants (dans le cadre de la formation initiale) qui consiste à mettre en œuvre

une tâche en deux parties pour différer la mise en commun et l'institutionnalisation, à son travail de praticienne formatrice dans lequel elle intercale une discussion avec sa stagiaire entre deux leçons afin d'explicitier et d'analyser les choix effectués pendant la première leçon avant d'enseigner la deuxième. Nous en déduisons que le dispositif LS a eu un effet sur ses discours concernant sa composante sociale en particulier dans son rôle de praticienne formatrice. Nous n'avons en effet pas de données concernant son travail de praticienne formatrice avec sa stagiaire, nous n'avons accès qu'à ses discours sur ce travail.

3. Catégorisation des pratiques en i-genre

Cette partie apporte des éléments de réponse à la question de recherche concernant des changements de i-genre ou de niveau de développement associés au i-genre 3. Nous catégorisons les pratiques d'Anaïs à partir des trois leçons observées et des résultats issus de l'analyse en composantes des pratiques qui s'appuie sur l'ensemble des séances collectives. Nous montrons que ses pratiques se rapprochent du i-genre 2. L'analyse des composantes cognitive et médiative des pratiques a mis en évidence que pour les trois leçons observées, elle présente collectivement la tâche. Pour la *leçon de recherche*, le groupe LS a laissé la liberté à l'enseignante de présenter les consignes par une lecture individuelle ou par une explication collective selon les habitudes de la classe. Ainsi, elle s'est conformée à ses pratiques ordinaires et a présenté la tâche de façon collective. Elle individualise les itinéraires cognitifs principalement pour la leçon avant LS lorsqu'elle sépare les élèves en trois ateliers autour de deux tâches différentes. Elle apporte des aides individuelles lorsque les élèves travaillent en groupe et aucune aide collective hormis pour la *leçon de recherche*. Pour la leçon après LS, elle aide les élèves en découpant la tâche en tâches élémentaires, par exemple lorsqu'elle demande aux élèves de compter le « nombre de fois » pour associer l'écriture multiplicative à l'écriture additive. De plus, elle n'effectue ni synthèse contextualisée, ni institutionnalisation pour les trois leçons observées. Comme nous l'avons vu pour la leçon de recherche, elle a modifié le texte de savoir qui avait été préparé en séance.

Nous en déduisons que ses pratiques se rapprochent du i-genre 2. Nous allons situer les pratiques d'Anaïs au moyen des cinq niveaux associés au i-genre 3, à partir des analyses effectuées pour chaque leçon. Le choix d'enseignement par ateliers pendant la leçon avant LS a des implications sur cette catégorisation des pratiques. Le niveau 1 n'est pas tout à fait atteint compte tenu des nombreux rappels à l'ordre nécessaires pour maintenir le travail des élèves. Une raison est que certains élèves sont laissés en autonomie une grande partie du temps, néanmoins l'ensemble des élèves adhèrent globalement au projet d'enseignement d'Anaïs. Pour le niveau 2, les tâches choisies n'offrent pas toutes la possibilité d'avoir une activité mathématique consistante pour les élèves. Néanmoins, les élèves ont un temps de recherche pendant chaque leçon. Pour le niveau 3, l'enseignante n'organise pas de mise en commun des procédures des élèves pour l'ensemble de la classe et après chaque tâche proposée. Les niveaux 2 et 3 sont atteints partiellement et les niveaux 4 et 5 ne sont pas atteints. Cette analyse ne permet pas d'observer d'évolution des pratiques au point de considérer qu'il y a un changement de niveau.

Nous portons un double regard pour ressortir d'une part ce qui a été modifié lors de la *leçon de recherche* (à partir du profil des pratiques en cinq composantes décrites et de l'analyse du processus de modifications de la tâche prescrite) et d'autre part comment ont été modifiées les pratiques ordinaires par le dispositif LS pour les leçons après LS (celle observée et celle non observée mais discutée en séance). Enfin, nous synthétisons les résultats de nos analyses afin d'apporter des éléments de réponse aux questions de recherche dans le cas des pratiques d'Anaïs.

Lors de la *leçon de recherche*, certaines caractéristiques de la composante médiative des pratiques d'Anaïs sont modifiées : en apportant des aides collectives et en accordant une part plus importante du temps de travail en collectif. Le processus de modifications de la tâche prescrite a pour sources sa conformité aux prescriptions du groupe LS (elle ne fait pas de groupe d'élèves de niveaux homogènes, elle ne modifie pas le matériel alors qu'elle dit avoir vu un problème de conception) et l'aspect du jeu. La prise en compte de l'activité des élèves pendant la leçon n'est plus une source du processus de modifications pour la *leçon de recherche*.

Les analyses des données concernant les pratiques d'Anaïs ne nous ont pas permis de relever de modifications dans ses pratiques ordinaires suite à sa participation au dispositif LS. Nous avons néanmoins relevé une évolution de ses discours sur ses pratiques en tant que praticienne formatrice dans son travail avec sa stagiaire.

Une résistance se situe au niveau de la composante médiative des pratiques d'Anaïs : elle n'apporte pas d'aides collectives aux élèves. Il s'agit d'un choix volontaire et explicité par l'enseignante en accord avec sa représentation de l'enseignement. Elle a pu constater par elle-même l'échec de ce choix lorsqu'elle a mis en œuvre l'une des tâches observées. Néanmoins, elle n'a pas remis en question son choix même si elle y a été incitée par le groupe LS et malgré le travail collectif approfondi sur les aides à apporter aux élèves en collectif pour cette même tâche et également pour une autre tâche lors des cycles suivants.

Nous apportons à présent des éléments de réponse aux trois questions de recherche de cette étude dans le cas des pratiques d'Anaïs. L'analyse du processus de modifications de la tâche prescrite a mis en évidence que les sources de ce processus diffèrent pour les leçons observées, hormis la source portant sur l'aspect du jeu. Nous avons déduit de ces analyses que le dispositif LS n'a pas eu d'effet concernant cette source du processus de modifications et qu'il y avait une résistance dans les pratiques d'enseignement d'Anaïs à prendre en compte les apports mathématiques et didactiques du dispositif LS. L'analyse en i-genre a montré que les pratiques d'Anaïs se rapprochent du i-genre 2, i-genre caractérisé par des scénarios d'enseignement faisant une part importante à la présentation collective des tâches, par une individualisation des itinéraires cognitifs et des aides apportées par l'enseignante, et dans lesquels les phases de synthèse, de bilan et d'institutionnalisation sont peu présentes. Par ailleurs, ses pratiques atteignent partiellement les niveaux 2 et 3 de développement en référence au i-genre 3. Par ailleurs, cette analyse a mis en évidence des résistances dans ses pratiques d'enseignement au niveau de la composante médiative (concernant les aides collectives). Ces résistances peuvent être expliquées par sa composante personnelle, en particulier par sa représentation de l'enseignement des mathématiques qui relève d'une croyance selon laquelle les élèves doivent être en activité avec peu d'aide de sa part.

IV. DISCUSSION ET PERSPECTIVES

1. Discussion

Les trois enseignantes étudiées Anaïs, Enseignante 1 et Enseignante 2, dans cette recherche présentent des points communs : toutes trois praticiennes formatrices avec de nombreuses années d'expérience d'enseignement dans les degrés 5H et 6H (entre 15 et 36 ans). Elles ont suivi une formation à l'École Normale et utilisent les mêmes ressources. Elles enseignent dans le même établissement scolaire avec les mêmes orientations et suivis pédagogiques, mais dans

des bâtiments différents avec des publics différents. La recherche doctorale (Batteau, 2018 ; 2020) a mis en évidence que ces trois enseignantes avaient en commun dans leur profil une représentation de l'enseignement qui relève d'une certaine croyance qui peut expliquer des résistances dans leurs pratiques. Dans leur représentation de l'enseignement, l'enseignement doit reposer sur du travail en groupe ou en atelier, les élèves devant être en activité avec peu ou pas d'intervention et d'aide de leur part (Anaïs : « c'est important qu'ils réussissent seuls et [...] ça ne sert à rien de leur donner la solution, faire une mise en commun sans qu'ils ne soient passés par cette phase de recherche »). Elles favorisent le guidage du travail des élèves en plus petit effectif, sous forme d'ateliers, laissant en autonomie le reste de la classe parfois toute la séance avec du travail individuel ou en groupe sur des tâches demandant moins d'interventions de leur part. Dans leur représentation, elles s'interdisent d'intervenir pour aider les élèves lors du processus de dévolution et des moments de recherche (Enseignante 1 : « on nous a quand même appris que la situation-problème, c'est motus et bouche cousue l'enseignant hein, moi j'comprends pas (*imite un élève et une enseignante qui lui fait signe de se taire*) »). Elles expliquent aussi que les connaissances ainsi que les nouveaux termes à institutionnaliser doivent émerger de l'activité et des interventions des élèves, sans apport de leur part. Ainsi leur représentation de l'enseignement relève d'une certaine croyance issue d'une interprétation du socioconstructivisme, d'un certain glissement entre une théorie et son opérationnalisation en « méthode d'enseignement » (Clerc-Georgy, 2013). Cette représentation de l'enseignement trouve aussi un écho dans les travaux de Crinon, Marin et Bautier (2008). Ces auteurs ont étudié les pratiques d'enseignants d'école primaire en France lors de séances de français et ont mis en évidence certaines doxas et principes qui peuvent guider des pratiques propices à des malentendus et générateurs d'inégalités scolaires : une classe doit être active, les connaissances viennent des élèves, les savoirs sont répétés et reliés, le sens vient de situations authentiques, l'enseignant observe les apprentissages des élèves et s'y ajuste.

Nous avons analysé de manière analogue les processus de modifications de la tâche prescrite pour Anaïs et les deux autres enseignants 1 et 2. Nous avons identifié que les sources de ce processus ont évolué de manière analogue. Dans leurs cas, la prise en compte de l'activité des élèves en classe ne semble plus être une source du processus suite à leur participation à ce dispositif. Nous l'expliquons ainsi : ce dispositif leur a permis d'effectuer un travail conséquent d'analyse mathématique et didactique de tâches qui comprend l'anticipation des difficultés des élèves, des procédures et des aides à apporter aux élèves. Ce travail de préparation et d'analyse a enrichi leurs pratiques dans le sens où l'enseignante 2 et l'enseignante 1 ont toutes deux réinvesti une partie de ce travail lors de la leçon observée après le dispositif LS. Se sentant mieux préparées, elles ont toutes deux davantage fait confiance à leur représentation de la tâche prescrite et à leurs analyses mathématiques au détriment de leur prise en compte de l'activité des élèves en classe. Dans le cas de l'enseignante 1, la tâche choisie dans la leçon observée consiste à chercher tous les nombres que l'on peut représenter sur un boulier à deux tiges en utilisant neuf boules au maximum. L'enseignante qualifie la tâche d'« obscure » car « la consigne n'est pas claire » et l'interprète avec « exactement neuf boules » au lieu de « au maximum neuf boules ». Pendant la leçon, les élèves réalisent la tâche en respectant la consigne « au maximum neuf boules ». L'enseignante ne remet pas en question ses propres analyses de la tâche et va jusqu'à valider la procédure erronée présentée par deux élèves (avec exactement neuf boules). L'enseignante exprime : « ça veut dire qu'on ne peut pas utiliser plus que neuf boules. Mais en utilisant neuf boules, est-ce que ça veut dire qu'on doit les utiliser chaque fois, les neuf ? Ils (les élèves) ont compris ça [...]. Et on n'est pas loin de l'interprétation juste de la consigne. Mais elle (la consigne) n'est pas claire à mon avis ».

Dans le cas de l'enseignante 2, la tâche observée lors de la leçon après le dispositif LS consiste à plier une bande en deux, puis en deux, etc. et à compter le nombre de parties obtenues

lorsqu'on l'a pliée dix fois en deux. Le livre du maître mentionne différentes démarches d'élèves « manipuler spontanément une bande et observer les résultats », « utiliser un mode de représentation : liste de nombres, tableau, dessin... », « appliquer une procédure de calcul ». Après une première phase de recherche des élèves, l'enseignante distribue un tableau à deux colonnes (nombre de plis et nombre de parties) à compléter. Elle a donc imposé sa modélisation du problème aux élèves, ne leur laissant pas la possibilité d'en avoir une autre et, de ce fait, a réduit leur activité mathématique.

Quant à Anaïs, la prise en compte de l'activité des élèves en classe est une source du processus pour la leçon observée avant le dispositif mais ne semble plus l'être suite à sa participation à ce dispositif. Mais dans son cas, cette source n'a pas été remplacée par ses analyses mathématiques de la tâche, mais par l'aspect du jeu pour les leçons de recherche et après LS. Dans son cas, en plus d'être une source de ce processus, l'aspect du jeu représente une caractéristique importante de ses pratiques qui influe sur les composantes cognitive, médiative et personnelle de ses pratiques. Cette caractéristique ajoutée à des analyses mathématiques incomplètes pour la leçon avant LS ou qui s'opposent à celles du groupe pour la *leçon de recherche* illustre une résistance de ses pratiques à prendre en compte les apports mathématiques du dispositif LS et ainsi une résistance à évoluer dans ses pratiques d'enseignement.

Dans ces trois études de cas, nous dégagons le fait que la prise en compte de l'activité des élèves en classe n'est plus une source du processus de modifications de la tâche prescrite suite à la participation au dispositif LS. Soit cette prise en compte s'effectue par anticipation lors de la préparation et de l'analyse mathématique et didactique de la tâche, dans ce cas, nous l'interprétons comme une évolution des pratiques, même si celle-ci n'est pas aboutie. Soit l'aspect du jeu demeure une source du processus de modifications au détriment de la prise en compte de l'activité des élèves et dans ce cas, nous l'interprétons plutôt comme une résistance en termes d'évolution des pratiques. Nous interprétons ces analyses d'évolutions des pratiques en dynamique d'équilibre, de déséquilibre et de rééquilibration. Les pratiques de l'enseignante 2 et de l'enseignante 1 semblent passer d'un état d'équilibre avant le dispositif LS, à un état de déséquilibre créé par le dispositif. Dans cet état de déséquilibre, ces deux enseignantes ont modifié leurs pratiques notamment lors de la préparation de leçons en effectuant des analyses mathématiques et didactiques de la tâche. Mais elles n'ont pas, ou du moins pas encore, retrouvé d'état de rééquilibration dans lequel elles pourraient faire cohabiter leurs analyses mathématiques et didactiques, leur anticipation de l'activité des élèves avec la prise en compte en classe de l'activité des élèves. Nous avons observé des évolutions des pratiques de l'enseignante 2 et de l'enseignante 1 concernant leurs pratiques avant la classe (au niveau des analyses mathématiques et de leur représentation de la tâche prescrite) qui ont eu des effets sur le processus de modifications de la tâche prescrite pendant la classe. Nous avons observé une évolution des pratiques en classe uniquement pour certaines caractéristiques de la composante médiative des pratiques de l'enseignante 2. Ces résultats viennent en écho avec la note de synthèse de Crahay (1989) qui avait souligné que c'est en dehors de la classe, lorsque les enseignant·e·s préparent leurs leçons, que ceux-celles-ci peuvent le mieux penser leur action et se donner le temps d'anticiper différents scénarios et choix possibles. Mais aussi, pour un·e enseignant·e, il est plus difficile de changer sa gestion en classe qu'en dehors de la classe.

2. Perspectives

Les résultats de cette recherche font écho aux travaux de Butlen, Mangiante-Orsola et Masselot (2017) qui ont également identifié une évolution contrastée des pratiques après deux années de formation lors de trois dispositifs, avec un accroissement des marges de manœuvre, un processus de dévolution enrichi, mais un processus d'institutionnalisation difficile à mettre en œuvre. Ces auteurs évoquent les difficultés de changement de postures de l'enseignant·e entre

les processus de dévolution et d'institutionnalisation et la difficulté d'improviser en temps réel sur la base des productions des élèves. Notre recherche montre que certaines de ces difficultés peuvent perdurer même dans le cas de trois enseignantes expérimentées, mais ne se considérant pas à l'aise avec les mathématiques en jeu. Un levier de l'évolution des pratiques pourrait être l'anticipation de l'activité des élèves en classe.

Un résultat de cette recherche qui peut être utilisé en formation relève de la méthodologie d'analyse des pratiques en processus de modifications de la tâche prescrite. En effet, un·e formateur·trice qui a conscience des différentes sources de ce processus et des priorités entre elles peut agir sur celles-ci en formation initiale ou continue. D'après nos analyses, la prise en compte de l'activité des élèves n'était plus une source de ce processus au profit des analyses mathématiques et didactiques préalables de la tâche pour deux enseignantes sur les trois, et cela a provoqué un déséquilibre dans les pratiques : une réduction de l'activité mathématique des élèves ou une non-prise en compte des procédures correctes des élèves au détriment de la procédure incorrecte de l'enseignante. Sachant que le dispositif *lesson study* peut déstabiliser les pratiques, il faudrait agir sur la représentation de la tâche prescrite, en outillant l'enseignant·e pour réaliser des analyses mathématiques et didactiques pertinentes comme cela a pu être le cas lors des séances LS. Il faudrait aussi l'outiller par rapport à la prise en compte de l'activité des élèves en classe, surtout lorsque celle-ci va à l'encontre de ce qu'il·elle a anticipé. Il faudrait également l'outiller pour qu'il·elle prenne en compte l'activité des élèves en classe et qu'il·elle n'impose pas sa modélisation du problème.

Par sa dimension collaborative, le dispositif *lesson study* permet à l'enseignant·e d'adopter une attitude réflexive sur ses pratiques, mais aussi une démarche de recherche (Miyakawa & Winsløw, 2009). Une perspective de recherche pourrait être de questionner en quoi adopter une démarche de recherche contribue au développement professionnel des enseignant·e·s.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- BATTEAU, V. (2018). *Une étude de l'évolution des pratiques d'enseignants primaires vaudois dans le cadre du dispositif de formation lesson study en mathématiques*. (Thèse de Doctorat, Université de Genève, Genève). Repéré à <https://archive-ouverte.unige.ch/unige:106282>
- BATTEAU, V. (2020). Evolution des pratiques d'une enseignante d'école primaire lors d'un dispositif de formation et de recherche en mathématique. *RDM*, 40(1), 13-53. Repéré à <https://revue-rdm.com/2020/evolution-des-pratiques-dune-enseignante-decole-primaire-lors-dun-dispositif-de-formation-et-de-recherche-en-mathematiques/>
- BATTEAU, V. & CLIVAZ, S. (2016). Le dispositif de lesson study: travail autour d'une leçon de numération. *Grand N*, 98, 27-48. Repéré à <http://www-irem.ujf-grenoble.fr/spip/spip.php?rubrique21&num=98>
- BATTEAU, V. & DORIER, J.-L. (2018). L'enseignement des transformations géométriques à l'école primaire dans le cadre d'un dispositif de formation Lesson Study en Suisse Romande. *Petit x*(106), 5-38. Repéré à <http://www-irem.ujf-grenoble.fr/spip/spip.php?rubrique25&num=106>
- BUTLEN, D., MANGIANTE-ORSOLA, C. & MASSELOT, P. (2017). Routines et gestes professionnels, un outil pour l'analyse des pratiques effectives et pour la formation des pratiques des professeurs des écoles en mathématiques. *Recherches en didactiques*, 24(2), 25-40. Repéré à <https://www.cairn.info/revue-recherches-en-didactiques-2017-2-page-25.htm>
- CHAMBRIS, C. (2021). Raisons d'être des grandeurs. Le cas de l'arithmétique à l'école élémentaire. Dans H. Chaachoua, A. Bessot, B. Barquero, L. Coulange, G. Cirade, P. Job, A.-C. Mathé, A. Pressiat, M. Schneider, & F. Vandebrouck (Dir.), *Nouvelles perspectives en didactique: le point de vue de l'élève, questions curriculaires, grandeur et mesure* (Vol. 1, pp. 169-195). Grenoble: La pensée sauvage.
- CHARLES-PÉZARD, M., BUTLEN, D. & MASSELOT, P. (2012). *Professeurs des écoles débutants en ZEP. Quelles pratiques? Quelle formation?* Grenoble, France: La pensée sauvage.
- CHARNAY, R., COMBIER, G., DUSSUC, M.-P. & MADIER, D. (2007). *Cap Maths CE2. Manuel de l'élève*. Hatier.
- CLERC-GEORGY, A. (2013). *Rôle des savoirs théoriques de référence dans les parcours de formation des futurs enseignants des premiers degrés de la scolarité*. (Thèse de doctorat, Université de Genève, Genève). Repéré à <https://archive-ouverte.unige.ch/unige:28992>
- CLERC-GEORGY, A. & CLIVAZ, S. (2016). Evolution des rôles entre chercheurs et enseignants dans un processus lesson study: quel partage des savoirs? Dans F. Ligozat, M. Charmillot, & A. Muller (Dir.), *Le partage des savoirs dans les processus de recherche en éducation* (pp. 189-208). Série Raisons Educatives, n°20. Bruxelles, Belgique: De Boeck.
- CLIVAZ, S. (2015a). Les lesson study : des situations scolaires aux situations d'apprentissage professionnel pour les enseignants. *La revue des Hautes écoles pédagogiques et institutions assimilées de Suisse romande et du Tessin. Formation et pratiques d'enseignement en questions*, 19, 99-105.
- CLIVAZ, S. (2015b). Les Lesson Study ? Kesako ? *MATH-ECOLE*, 224, 23-26. Repéré à http://www.ssrldm.ch/mathecole/wa_files/224-Clivaz.pdf
- CLIVAZ, S., CLERC-GEORGY, A. & BATTEAU, V. (2016). Lesson study en mathématiques : un dispositif japonais de développement professionnel des enseignants à l'épreuve du contexte suisse-romand. Dans Y. Matheron, G. Gueudet, V. Celi, C. Derouet, D. Forest, M. Krysinska, S. Quilio, M. Rogalski, T. Á. Sierra, L. Trouche, C. Winsløw, & S. Besnier (Dir.), *Enjeux et débats en didactique des mathématiques. Actes de la XVIIIème école d'été de didactique des mathématiques* (Vol. II, pp. 487-502). Brest, France: La pensée sauvage, Editions. Repéré à <http://rdm.penseesauvage.com/-Collection-Ecole-d-ete-.html>.
- CRAHAY, M. (1989). Contraintes de situation et interactions maître-élèves: changer sa façon d'enseigner est ce possible? *Revue Française de Pédagogie*, 88, 67-94. Repéré à http://ife.ens-lyon.fr/publications/edition-electronique/revue-francaise-de-pedagogie/INRP_RF088_7.pdf
- CRINON, J., MARIN, B. & BAUTIER, É. (2008). Quelles situations de travail pour quel apprentissage ? Paroles des élèves, paroles de l'enseignant. *Le développement des gestes professionnels dans l'enseignement du français: Un défi pour la recherche et la formation* (pp. 123-147). Louvain-la-Neuve, Belgique: De Boeck Supérieur. Repéré à https://www.cairn.info/resume.php?download=1&ID_ARTICLE=DBU_BUCHE_2008_01_0123. 10.3917/dbu.buche.2008.01.0123
- LEPLAT, J. (1997). *Regards sur l'activité en situation de travail*. Paris, France: Presses Universitaires de France.
- LEWIS, C. (2002). *Lesson study: A handbook of teacher-led instructional change*. Philadelphia, United States: Research for Better Schools, Inc.
- LEWIS, C. & HURD, J. (2011). *Lesson study, Step by step, How teacher learning communities improve instruction*. Portsmouth, United States: Heinemann.

- LEWIS, C., PERRY, R. & HURD, J. (2009). Improving mathematics instruction through lesson study: a theoretical model and North American case. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 12(4), 285-304. doi: 10.1007/s10857-009-9102-7.
- LEWIS, C. & TSUCHIDA, I. (1998). A lesson is like a swiftly flowing river: How research lessons improve Japanese education. *American Educator*, 22(4)(12-17), 50-52. <https://doi.org/10.1177/136548029900200117>.
- MANGIANTE, C. (2007). *Une étude de la genèse des pratiques de professeurs des écoles enseignant les mathématiques: pré-détermination et développement*. (Thèse de doctorat, Université Paris 7, Paris). Repéré à <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00424673/document>
- MANGIANTE, C. (2012). Une étude de la cohérence en germe dans les pratiques de professeurs des écoles en formation initiale puis débutants. *RDM*, 32(3), 1-43. Repéré à <https://revue-rdm.com/2012/une-etude-de-la-coherence-en-germe/>
- MASSELOT, P. & ROBERT, A. (2007). Le rôle des organisateurs dans nos analyses didactiques de pratiques de professeurs enseignant les mathématiques. *Recherche et formation*, 56, 15-31. Repéré à <http://rechercheformation.revues.org/841>
- MIYAKAWA, T. & WINSLOW, C. (2009). Un dispositif japonais pour le travail en équipe d'enseignants: Etude collective d'une leçon. *Education et Didactique*, 3(1), 77-90. <https://doi.org/10.4000/educationdidactique.420>
- PELTIER-BARBIER, M.-L., BUTLEN, D., MASSELOT, P., NGONO, B., PEZARD, M., ROBERT, A. & VERGNÈS, D. (2004). *Dur d'enseigner en ZEP. Dur pour les élèves. Dur pour les enseignants. Analyse des pratiques de professeurs des écoles enseignant les mathématiques en réseaux d'éducation prioritaire*. Grenoble: La pensée sauvage.
- ROBERT, A. (2004). Que cherchons-nous à comprendre dans les pratiques des enseignants? Quelles analyses menons-nous? Dans M.-L. Peltier-Barbier (Ed.), *Dur d'enseigner en ZEP. Dur pour les élèves. Dur pour les enseignants. Analyse des pratiques de professeurs des écoles enseignant les mathématiques en réseaux d'éducation prioritaire* (pp. 15-32). Grenoble, France: La pensée sauvage.
- ROBERT, A. & ROGALSKI, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, 2(4), 505-528. <http://dx.doi.org/10.1080/14926150209556538>.
- TEMPIER, F. (2010). Une étude des programmes et manuels sur la numération décimale au CE2 *Grand N*, n° 86, 59-90. Repéré à <http://www-irem.ujf-grenoble.fr/spip/spip.php?rubrique21&num=86>
- THEIS, L. (2005). *Les tribulations du signe = dans la moulinette de la bonne réponse*. Baie-Joli: Editions des Bandes didactiques.

UNE ANALYSE MICRO-DIDACTIQUE D'UN DISPOSITIF PEDAGOGIQUE : LE TRAVAIL DE GROUPE LORS D'UNE ACTIVITE D'ETUDE ET DE RECHERCHE

Farida MEJANI

Université d'Aix-Marseille

farida.mejani@gmail.com

Résumé

L'étude du dispositif pédagogique qui consiste à faire travailler les élèves en groupe a surtout été menée par ceux qui, chercheurs en éducation, se désignent eux-mêmes comme des pédagogues : Freinet, Meirieu, Cousinet.

Nous nous plaçons, pour le travail que nous présentons dans ce séminaire, dans un cadre didactique qui vise à décrire le processus de construction d'une réponse mathématique à un problème mathématique dévolu à des groupes d'élèves, à travers l'analyse du milieu d'étude qu'ils se constituent. Nous nous appuyons sur une expérimentation menée dans un collège marseillais dans des classes de quatrième dont les trois professeurs ont mis en œuvre une Activité d'Étude et de Recherche (AER) sur les équations du premier degré à une inconnue.

Nous montrons comment la dynamique de l'étude et de la recherche est portée en partie par les différences dans les équipements praxéologiques des individus dans les groupes à travers une dialectique de l'individu et du collectif et une dialectique des médias et des milieux, dynamique d'étude qui n'est pas toujours perçue par les professeurs. Ces professeurs doivent cependant réaliser une double dévolution, envers les élèves pris individuellement et envers les groupes afin de favoriser une étude collective.

Mots clefs

Travail de groupe ; AER ; Milieu, schéma herbartien ; double dévolution

I. INTRODUCTION

Le cadre théorique offert par la Théorie Anthropologique du Didactique dans lequel nous situons notre travail s'appuie sur le concept de « paradigme de questionnement du monde » n cadre épistémologique élargi par rapport à la position de Bachelard pour qui « toute connaissance scientifique est réponse à une question ». C'est dans la perspective de faire vivre un tel questionnement auprès des élèves scolarisés au collège en France, que le groupe didactique de l'IREM d'Aix-Marseille, auquel nous participons, développe des Parcours d'Étude et de Recherche (PER). Ces PER, grâce à une question génératrice de tout un secteur du programme d'enseignement, engagent les élèves dans un processus d'étude qui leur permet, par la rencontre de sous-questions déclinées en Activités d'Étude et de recherche (AER) de rencontrer certaines des questions auxquelles le savoir visé permet de répondre.

Le travail d'ingénierie mené au sein de ce groupe donne lieu à des recherches qui portent, d'une part, sur l'étude de la prise en main des professeurs de ces PER et des gestes professionnels particuliers qu'engendrent un enseignement par PER, quand d'autres recherches s'intéressent à l'apprentissage des élèves. Le travail que nous avons engagé depuis 2014 dans le cadre de notre thèse (Méjani, 2018) porte sur l'étude de l'apprentissage des mathématiques chez des élèves soumis à un enseignement par PER. Nous avons cherché à accéder aux raisonnements qu'ils mettent en œuvre collectivement, dans une perspective d'analyse de l'évolution de leurs rapports au savoir.

La ressource que les enseignants ont mise en place dans leurs « classes ordinaires » repose sur le cadre théorique didactique proposé par la TAD. Elle porte sur l'enseignement de la résolution d'équations du premier degré à une inconnue tel que préconisé par les programmes français de 2008, et mis en application de septembre 2009 à septembre 2016. C'est une AER sur les équations en 4^e qui s'insère au sein d'un PER plus large, courant de la 5^e à la 3^e, et portant sur l'enseignement de l'algèbre élémentaire au collège. Ce PER s'appuie sur la question génératrice qui consiste à modéliser des programmes de calcul et à chercher à calculer sur des programmes de calcul ainsi modélisés.

Dans ce texte, après avoir rappelé succinctement le cadre d'élaboration des ressources et les effets sur l'apprentissage évalués par des tests, nous précisons le dispositif d'observation basé sur le travail des groupes des élèves ainsi que les outils théoriques sollicités pour l'analyse. Nous présenterons quelques résultats sur le milieu d'étude que se constituent les élèves dans leur recherche, qui nous renseigne sur les rapports qu'ils entretiennent avec certains objets de savoir. Nous concluons cette présentation en proposant de prendre appui sur l'étude du milieu pour développer des éléments de formation qui articulent organisations mathématique et didactique.

II. LE LEA RC MARSEILLEVEYRE DE 2012 A 2018

1. Des ressources élaborées et éprouvées

Cette présentation s'appuie sur des travaux menés pendant six ans au sein du Lieu d'Éducation Associé, le LéA du réseau collège Marseilleveyre (RcM), travaux qui ont donné lieu à la production de ressources, lesquelles sont testées dans les classes avant diffusion, dans le cadre d'une recherche collaborative entre chercheurs et professeurs. Un suivi de cohortes de la 5^e à la 3^e a été organisé, à partir de pré-tests et de post-tests, dont l'enjeu est de produire des évaluations comparatives entre les élèves ayant participé à un enseignement « LéA » et ceux dits « non LéA ». Ces évaluations portent d'une part sur les acquis mathématiques dans les domaines pour lesquels des ressources LéA existent et ont été enseignées, d'autre part sur le rapport au savoir des élèves dans l'étude des questions mathématiques qu'ils rencontrent.

Nous nous intéressons ici à ceux qui ont été donnés aux élèves en fin de quatrième et sont donc considérés comme des post-tests.

Nous reproduisons ci-dessous les questions qui concernent les programmes de calcul et la résolution d'équations du premier degré, à savoir les exercices 2 et 3.

Exercice 2 : Voici deux programmes de calcul :

Choisir un nombre	Choisir un nombre
Multiplier par 5	Multiplier par 8
Ajouter 2	Soustraire 3

Karine choisit un nombre. Elle lui applique ces deux programmes de calcul. À son grand étonnement, les deux résultats sont égaux.

Quel nombre a-t-elle choisi au départ ?

- a) |_1|_9|_0| b) |_1|_9|_0| c) |_1|_9|_0| d) |_1|_6|_7|_9|_0|
a) |_1|_9|_0| b) |_1|_9|_0| c) |_1|_9|_0| d) |_1|_6|_7|_9|_0|

Afin de répondre à cet exercice, il est nécessaire de produire une expression algébrique des programmes pour laquelle les codages de correction des points a), b) et c) sont les suivants : le code 0 est celui caractérisant une absence de réponse, le code 1 désigne la réponse attendue tandis que le code 9 est réservé à une autre réponse. La preuve de l'équivalence est codée en d) : en cas de réponse erronée, le code 6 affine l'analyse : pour la question 2, il désigne une non-mise en équation après avoir écrit les expressions algébriques associées correctement, en gardant les deux membres séparés sous la forme $5x + 2 = y$ et $8x - 3 = z$ par exemple.

2. Une différence dans les tests de fin de collège entre élèves « LéA » et « non LéA »

Les graphiques ci-dessous sont extraits du mémoire de Hugo Martinez, lors d'un stage qu'il effectuait en fin de première année de Master MASS (Mathématiques Appliquées et Sciences Sociales) au sein du laboratoire ADEF, équipe d'accueil de l'Université d'Aix-Marseille associée à l'IFÉ, encadré par Yves Matheron. Ils sont relatifs aux post-tests passés par les classes de quatrième de l'année scolaire 2013-2014 : ils représentent le taux de bonnes réponses codées 1 à l'exercice 2, scindé pour les besoins de l'analyse statistique en trois parties : les deux premières étapes consistent à produire une expression algébrique correcte associée à chacun des deux programmes de calcul, la troisième étape est la traduction du problème par une équation.

Question 1	Exercice 2 : Pgm calcul	
	LEA	NONLEA
1	62,3	70,6
9	37,7	26,6
0	0,0	2,8

Question 2	Exercice 2 : Pgm calcul	
	LEA	NONLEA
1	59,7	71,8
9	37,7	25,5
0	2,6	2,7

Question 3	Exercice 2 : Mise en Equation	
	LEA	NONLEA
1	53,3	18,2
6	0,0	1,8
9	2,6	6,4
0	44,2	73,6

Un premier résultat surprenant apparaît ici : le passage d'un programme de calcul donné en français à une écriture littérale est bien moins réussi par les élèves LéA. Néanmoins, une fois les deux expressions littérales associées obtenues, ce sont les élèves LéA qui ont de bien meilleurs scores pour les associer à l'équation souhaitée, et ce, de manière flagrante. Martinez précise également que le taux des élèves LéA qui ont réussi à écrire correctement les deux programmes de calcul est de 59,7% et que parmi eux, 89%, soit la très grande majorité parvient à produire la bonne équation. Une autre remarque concerne le taux de non-réponses à cette question qui concerne quasiment les trois quarts des élèves non LéA, mais également près de la moitié soit 44,2 % des élèves LéA.

Nous n'analyserons pas ici ces différences de réussite selon le type d'enseignement des élèves, analyse que le lecteur intéressé pourra trouver dans notre travail de thèse. La question que nous

avons souhaité étudier dans le cadre de ce séminaire prend certes son origine dans cette différence de réussite entre élèves, mais elle s'intéresse davantage à l'évolution du rapport au savoir des élèves telle qu'elle apparaît dans ces tests. Nous la formulons ainsi : quel milieu d'étude les élèves se constituent-ils dans la recherche au sein d'une AER ?

Pour commencer à répondre à cette question, un premier travail a consisté à étudier le modèle praxéologique de référence qui sous-tend la ressource utilisée

III. UN MODELE PRAXEOLOGIQUE DE REFERENCE INDUIT PAR CETTE RESSOURCE

L'AER utilisée pour cette recherche propose aux élèves l'étude de trois problèmes successifs formulés de manière similaire et dont nous reproduisons ici le premier problème :

Problème 1 : Alice et Bertrand jouent avec leur calculatrice. Ils tapent le même nombre sur leur calculatrice, Alice lui ajoute 3, puis multiplie le résultat obtenu par 7. Bertrand multiplie le nombre affiché par 2 puis ajoute 6 au résultat. À leur grand étonnement, ils s'aperçoivent qu'ils obtiennent le même résultat. Quel nombre Alice et Bertrand ont-ils pu choisir ?

Les trois problèmes donnent lieu à la résolution d'une équation du premier degré ou s'y ramenant comme le second. Pour la suite, nous n'avons considéré que le premier problème. En effet, dans les quatre classes que nous avons observées, les professeurs, à la suite de l'étude de ce premier problème durant laquelle ils ont pu laisser les élèves chercher sans intervenir dans leur travail, ont repris « la main » pour l'étude des autres équations.

1. Modélisation de l'algèbre comme science des programmes de calcul

Cette AER, à la conception de laquelle nous n'avons pas participé, repose sur une modélisation de l'algèbre qui la définit comme étant la science des programmes de calcul (Chevallard, 2007). Elle est intégrée à un PER sur l'enseignement de l'algèbre au cycle 4, c'est-à-dire pour des élèves âgés de 12 à 15 ans. Le PER est entendu ici comme une organisation mathématique (OM) régionale constituée de plusieurs AER amalgamées en autant d'OM locales qui couvrent par exemple l'enseignement des nombres relatifs et la résolution des équations du premier degré ou des équations produits. Ainsi, cette AER est-elle considérée comme une OM locale qui repose sur une praxéologie unique $[T_i; \tau_i; \theta; \Theta]$ dont le type de tâches principal T_i peut être énoncé comme suit: T_1 « résoudre une équation du premier degré à une inconnue » avec des sous-types de tâches qui relèvent de la résolution d'équations de degré supérieur se ramenant à des équations du premier degré. La technique τ_i relative à ces types de tâches repose sur le théorème fondamental $A=B$ ssi $A-B=0$, élément technologico-théorique θ qui introduit dès le début de l'apprentissage la forme canonique $P(x)=0$. Ce théorème ainsi que les autres éléments technologico-théoriques utilisés comme la définition du quotient, induisent un contrôle par les élèves de leur activité mathématique. D'autres théorèmes issus du domaine de l'analyse sont également utilisés en acte comme le théorème des valeurs intermédiaires pour déterminer une valeur approchée d'une solution par dichotomie ou encore la notion de limites comme éléments technologiques pour le choix des valeurs à tester.

Cette AER vise donc un enseignement de l'algèbre dans la phase de modélisation comme science des programmes de calcul. Les organisations mathématique et didactique étant ainsi

contrôlées par l'AER, il nous a fallu penser un dispositif d'observation pour accéder aux rapports semi-privés des élèves à travers leurs échanges oraux. L'analyse que nous présentons dans la suite de cette présentation s'est concentrée sur des moments de l'étude très particuliers : les moments exploratoires et d'élaboration d'un environnement technologico-théoriques de cette AER.

2. Pourquoi le choix de cette AER pour notre étude ?

Pendant ces moments de l'étude, nous avons pu accéder aux discours des élèves dans lesquels nous avons pu observer une pratique orale que l'on peut qualifier de pré-algébrique, car les élèves ne manipulent pas encore les écritures algébriques, même si certains les produisent, pratique orale qui nécessite un va et vient entre le sens de l'expression algébrique écrite et le programme de calculs qu'elle modélise pour pouvoir agir dessus. Nous obtenons ainsi un discours sur la pratique, discours dans lequel des éléments du logos peuvent être perçus par le chercheur observateur.

C'est aussi un discours qui dépendra fortement de l'équipement praxéologique des élèves : le rapport à l'usage de la lettre pour modéliser un programme est en cours de développement, il est donc non encore conforme au rapport attendu à la fin de cette AER. C'est pourquoi nous avons formulé l'hypothèse méthodologique suivante, à savoir que nous pouvions accéder aux rapports semi-privés des élèves dans les discours qu'ils formulaient entre eux, sans médiation du professeur. Nous les considérons comme des rapports semi-privés, dans le sens où nous pourrions trouver des indices des rapports aux objets mathématiques en jeu en train de se construire, dans les commentaires des pratiques pré-algébriques qui sont formulés.

IV. DISPOSITIF D'OBSERVATION

La dynamique d'étude générée par une dialectique des questions et des réponses est garantie par la construction de l'AER grâce aux analyses épistémologiques, mathématiques et didactiques qui la sous-tendent, nous souhaitons alors observer les classes au travail dans cette dynamique d'étude. Il nous faut créer alors un dispositif d'observation pour accéder aux interactions entre les élèves au cours de l'étude. Pour cela, le dispositif de travail de groupe s'est imposé, d'une part parce qu'il est aujourd'hui promu par les programmes et par le document ressource qui stipule explicitement la mise en groupe des élèves. D'autre part, il permet le recueil de traces de la recherche et de l'étude des élèves à travers leurs interactions. Une telle organisation pédagogique a donné lieu à de nombreux travaux en sciences de l'éducation comme ceux de Roger Cousinet (1950) ou encore Philippe Meirieu (1983).

Les trois professeurs qui ont accepté de participer à cette étude travaillent dans un collège du centre-ville, collège que nous qualifions de standard, dans le sens où, les élèves qui le fréquentent ne relevant pas d'une catégorie sociale particulière, il offre une mixité sociale réelle. Ces professeurs ont mis en œuvre cette AER dans quatre classes de 4^e. Les groupes ont été constitués par nos soins à l'issue d'une première expérimentation sur le théorème de Thalès en début d'année scolaire. Même si notre travail s'est concentré sur la première séance, nous avons pu filmer l'intégralité de l'AER sur les trois séances où elle s'est déroulée. Nous avons disposé deux caméras dans chaque classe, l'une fixe sur le groupe choisi, l'autre mobile afin de saisir des échanges dans d'autres groupes ou encore le professeur interagissant avec la classe. Une

fois mis en place le dispositif d'observation, se pose la question de l'analyse des données recueillies.

V. OUTILS THEORIQUES D'ANALYSE

Deux types de systèmes apparaissent par la mise en groupe des élèves : celui qui relève du système didactique classique que constitue la classe, noté en TAD $S(X, Y, Q)$ où X désigne le collectif qui étudie, Y l'ensemble des aides à l'étude, ici le professeur, et Q la question mise à l'étude. Le second système que nous considérons, noté $Ss_i(\{X_1, X_2, X_3, X_4\}; y; Q)$, est celui formé par les groupes d'élèves au travail, où le collectif X est ici constitué des quatre élèves observés $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$, l'aide à l'étude y est ici soit vide, soit un élève, et Q , à nouveau la question étudiée par ce collectif.

Les moyens mis en œuvre par ce collectif pour répondre à Q constituent ce que la TAD appelle le milieu du schéma herbartien qui vise à décrire le processus de production d'une réponse à Q . Ce milieu contient les sous-questions engendrées mais également tous les outils, qu'ils soient matériels ou liés à des savoirs, sollicités par le collectif, et que nous nommerons œuvres O .

La prise d'indices sur ces systèmes se fait par le jeu des deux caméras dont l'une filme en continu le groupe choisi. Les traces de l'activité de recherche des élèves, et de leurs rapports au savoir déjà présents ou en construction, sont ici recherchées à travers les tentatives de résolution des élèves, et leurs rétroactions opérées à partir des résultats trouvés, des milieux constitués, eux-aussi évolutifs. L'analyse des traces repose en partie sur des inférences réalisées à partir de leur confrontation et de leur insertion dans un cadre théorique *a priori* qui les établit en indices d'un phénomène que l'on souhaite mettre à jour. Nous allons par la suite exposer quelques résultats issus de cette analyse.

VI. QUELQUES RESULTATS : DES EXEMPLES DANS LES CLASSES OBSERVEES

Pour cela, nous nous appuyons sur un épisode survenu dans la classe noté C_1 et que nous jugeons éclairant le rapport au savoir des élèves antérieur à la recherche pour notre analyse. De nombreux autres épisodes survenus dans les différentes classes observées sont étudiés dans notre thèse. Les élèves sont, dans cet extrait, nommés $E_{1,1}$, $E_{1,2}$, $E_{1,3}$ et $E_{1,4}$.

1. Un épisode dans la classe C_1

07 :40 : $E_{1,1}$ continue avec sa calculatrice. $E_{1,2}$ se remet à écrire, $E_{1,3}$ et $E_{1,4}$ non visibles.

08 :05 : $E_{1,2}$: ça fait des équations. C'est chiant, on n'a pas fait les équations....

$E_{1,4}$ à $E_{1,2}$: On n'a pas fait les équations ?

$E_{1,2}$ à $E_{1,4}$: Non on a fait juste du calcul littéral. $E_{1,4}$ feuillète alors son cahier et le montre à $E_{1,2}$.

E1,2 : c'est pas des équations, ce qu'on a fait. Il regarde le cahier que lui montre E1,4.

E1,4 : c'est calcul littéral et équations.

E1,2 : dubitatif. Puis :

E1,2 à E1,4 : ça c'est juste, t'écris x et y , des trucs.... Mais les équations, c'est quand tu dois trouver le x . (...)

08 :50 : Puis silence E1,2 se remet à réfléchir seul.

Ah ! Bé ! Attends !

En voyant que son camarade E1,4 attend qu'il écrive, il lui demande de travailler aussi :

Eh ! Il travaille sur moi !

Dans cet épisode, nous observons deux des institutions étudiées : d'abord la classe, entendue en TAD comme le système didactique que nous avons précédemment décrit, avec deux positions institutionnelles, celle d'élève notée p_{EC} , et celle de professeur p_{PC} . Nous considérons également le système constitué par les élèves du groupe observé comme institution, avec cette fois-ci trois positions institutionnelles : p_{EC} pour l'élève qui ne s'y assujettit pas et reste donc dans la position élève de la classe, p_{EG} pour celui qui au contraire a accepté l'assujettissement au groupe et enfin p_{PG} lorsque le professeur intervient dans le groupe.

Pour cet épisode, les deux élèves $E_{1,1}$ et $E_{1,3}$ ne sont pas assujettis au groupe, ce que nous indiquons dans la position p_{EC} , alors que le dialogue entre les élèves $E_{1,2}$ et $E_{1,4}$ montre ponctuellement un travail collectif, vite interrompu par $E_{1,2}$ lorsqu'il refuse que son camarade copie ce qu'il écrit. Nous avons modélisé ce court extrait sous la forme d'un micro-système $Ss(\{E_{1,1}, E_{1,4}\}; E_{1,2}; \{O_{\text{énoncé}}, O_{\text{équations}}\}) : \{E_{1,1}, E_{1,4}\}$ pour ce collectif d'étude, $E_{1,2}$ pour l'aide à l'étude puisqu'il renvoie son camarade à son cours, en lui donnant des indications sur ce qu'il sait des équations, et les notations $O_{\text{énoncé}}$ et $O_{\text{équations}}$ renvoient à ce qu'en TAD on nomme des œuvres, ici $O_{\text{énoncé}}$ l'énoncé du problème sur lequel ils travaillent et $O_{\text{équations}}$ l'œuvre équations.

De plus, nous pouvons également affirmer, par ce court extrait, que l'œuvre « équation » a déjà été rencontrée par l'élève $E_{1,2}$ puisqu'il sait qu'il faut trouver x , mais il ne dispose pas encore d'une technique ni d'une technologie pour trouver ce x . Donc cet objet « équation » appartient à son univers praxéologique mais pas à son équipement praxéologique. Il est néanmoins disposé à construire une praxéologie adéquate pour le type de tâche problématique relatif à la résolution de cette équation puisqu'il a rencontré son ignorance. Cependant cette œuvre n'existe pas pour l'élève $E_{1,4}$, elle n'appartient donc pas ni à son univers praxéologique ni à son équipement praxéologique. Apparaissent ici pour l'élève $E_{1,2}$ des connaissances liées à une mémoire praxéologique qui permet, pour un objet de l'équipement praxéologique donné, d'en mesurer les lacunes. Plus généralement, cet échange montre que le rapport de $E_{1,2}$ à l'objet « équations » diffère de celui qu'il entretient avec l'objet « calcul algébrique », rapports qui évolueront au fil du déroulement de l'AER.

2. Un second épisode dans une classe différente avec un professeur différent

L'étude de ces micro-systèmes didactiques vient illustrer ce que la TAD nomme la dialectique des personnes et des institutions. Nous présentons ici un autre épisode qui se déroule lui aussi lors du moment de première rencontre avec le premier problème de l'AER, dans une classe différente du même collègue notée C2, avec un professeur différent également.

06 :22 : E2,1 à E2,2 qui au départ ne l'écoute pas : je voudrais que tu m'expliques.

E2,1 s'écrie en tapant sur la table avec sa calculatrice : Explique-moi, j'ai pas compris, j'ai pas compris !

E2,2 montre alors sa calculatrice à E2,1 et lui montre certaines touches : Je crois que tu prends 3, il montre une touche, puis tu fais en posant son doigt sur son énoncé 3, ce qui a écrit là Arthur plus 3 et il tape sur sa calculatrice, multiplié par 7, tu fais 3 fois 7. Et ça donne... 24 (sic).

E2,1 : c'est tout ?!

E2,2 : oui !

Puis quelques minutes plus tard

E2,1 à E2,2 : c'est quoi le résultat ? Hein ? C'est quoi le résultat ?

Comme E2,2 ne répond pas, il répète : c'est quoi le résultat ?!

E2,2 : je sais pas. Faut trouver le même résultat.

Dans cet autre épisode, l'échange montre que la dévolution, que nous nommerons dévolution simple car en direction des élèves en position d'élève de la classe p_{EC} , n'a eu lieu que pour l'un d'entre eux, $E_{2,2}$. Et c'est lui qui va assurer celle de son camarade, en acceptant de s'assujettir, un peu sous la pression au groupe constitué. Ces deux élèves $E_{2,1}$ et $E_{2,2}$ sont assujettis au groupe, dans la position p_{EG} comme le relève leur dialogue pendant lequel $E_{2,2}$ effectue fugacement des gestes de professeur en assurant la dévolution de la question à son camarade, tandis que $E_{2,3}$ travaille seul. Nous pouvons donc modéliser ce court extrait sous la forme d'un micro-système $Ss (\{E_{2,1}, E_{2,2}\} ; E_{2,2} ; O_{\text{énoncé}}) : \{E_{2,1}, E_{2,2}\}$ pour ce collectif d'étude, $E_{2,1}$ pour l'aide à l'étude puisqu'il fournit une aide ostensive (taper sur la calculatrice en détaillant le programme et en reformulant la question), et la notation $O_{\text{énoncé}}$ renvoie à l'œuvre énoncé du problème sur lequel ils travaillent.

3. Des institutions diverses

Ces deux courts extraits montrent que l'assujettissement au groupe ne va pas de soi, et nous parlerons d'une double dévolution à la charge du professeur : l'une en direction des élèves de la classe dans la position p_{EC} , c'est-à-dire celle du problème en direction de chaque élève de la classe, une autre, de nature différente, en direction des groupes constitués afin d'amener les élèves à prendre une position p_{EG} de sujet au sein des groupes les rendant collectivement responsables de la recherche. De même, l'analyse des micro-systèmes didactiques précédents vient illustrer ce que la TAD nomme la dialectique des personnes et des institutions. C'est une dialectique qui sous-tend l'acceptation pour un individu d'un nécessaire assujettissement à une position au sein d'une institution afin de réaliser un projet commun avec d'autres individus, également assujettis. Ces échanges montrent que ce processus basé sur une dialectique de l'individu et du collectif ne va pas de soi. Il nécessite pour cela une double dévolution de la part des professeurs, l'une en direction des élèves et une autre en direction des groupes qui doivent se sentir collectivement responsables de l'étude qu'ils engagent.

Dans le cadre de notre micro-analyse des groupes de travail, nous nous sommes également intéressée à l'évolution du milieu que se constituent les groupes dans le processus d'étude d'une question.

VII. ÉTUDE DU MILIEU CONSTITUE POUR LA RECHERCHE

1. Le « pré-milieu », un milieu avant l'étude

Pour cela, nous avons étudié des milieux dits intermédiaires. Nous avons pu mettre en évidence ce que nous nommons « pré-milieu » et que nous définissons ainsi : c'est le milieu qui est mis à disposition des élèves avant toute action de leur part : il n'aura été agi que par le professeur qui y apporte l'ensemble des questions et des œuvres qu'il juge utiles pour que les élèves puissent agir avec ce milieu afin d'enclencher une dynamique de recherche pour l'étude de la question Q_1 , que nous formulons ainsi : « déterminer les valeurs qu'ont pu taper Alice et Bertrand sur leur calculatrice ? ». On trouve trace de ce pré-milieu dans le document ressource à destination des professeurs : il comporte plusieurs œuvres dont l'énoncé du premier problème $O_{\text{énoncé}}$, la demande explicite de traces de recherche, ainsi que la proposition de faire travailler les élèves en groupe de quatre et bien évidemment la première question Q_1 qui demande de déterminer les valeurs qui rendent égaux deux programmes de calcul non équivalents. Ce pré-milieu revêt à notre sens deux fonctions essentielles : d'une part il s'agit pour le professeur de créer les conditions d'une situation d'action dans le sens de la Théorie des Situations Didactiques (TSD), d'autre part de mettre en place une situation adidactique afin que la question soit effectivement dévolue aux élèves. Cette préparation au déroulement effectif de la séance est à considérer comme un geste d'aide à l'étude, que la TAD note δ depuis les derniers développements à Autrans en janvier 2018, geste que réalisent tous les enseignants dans leur pratique professionnelle, quelle que soit la forme d'enseignement choisie. Dans la ressource utilisée par les professeurs filmés, nous trouvons un pré-milieu que nous avons ainsi modélisé : $M_{0,RES} = \{\text{énoncé } O_{\text{énoncé}} ; \text{notes de recherche } O_{\text{recherche}} ; \text{travail de groupe de quatre élèves } O_{\text{groupe}} ; Q_1\}$ dans lequel nous retrouvons évidemment l'énoncé du premier problème $O_{\text{énoncé}}$, mais aussi l'injonction à garder des traces de recherche $O_{\text{recherche}}$ ou encore le dispositif pédagogique du travail de groupe O_{groupe} , œuvres au sens de la TAD.

La mise à disposition d'un pré-milieu par le professeur constitue un geste d'aide à l'étude δ , dont nous avons observé les traces dans chacune des quatre classes filmées.

2. Étude du milieu constitué pour la recherche

Nous ne relevons ici que les milieux relatifs aux deux extraits précédents dans les classes C_1 et C_2 que nous reproduisons ci-dessous :

$$M_{0,1} = \{\text{travail de groupe de quatre élèves } O_{\text{groupe}} ; \text{énoncé } O_{\text{énoncé}} ; \text{traces de recherche } O_{\text{recherche}} ; \text{échanges entre pairs } O_{\text{échanges}} ; \text{ressources personnelles} ; Q_1\}$$

$$M_{0,2} = \{\text{travail de groupe de quatre élèves } O_{\text{groupe}} ; \text{énoncé } O_{\text{énoncé}} ; \text{énoncé auxiliaire } O'_{\text{énoncé}} ; \text{usage de la calculatrice } O_{\text{calculatrice}} ; \text{domaine de l'arithmétique } O_{\text{arithmétique}} ; \text{réponse } R^{\diamond}_{\text{essai-erreur}} \text{ pour la technique essai-erreurs pour } T'_1 ; \text{traces de recherche } O_{\text{recherche}} ; \text{répartition du travail entre pairs } O_{\text{échanges}} ; Q_1\}.$$

La première remarque concerne l'ensemble d'intersection des deux pré-milieux relatifs aux deux classes observées : il correspond au pré-milieu du document ressource : $M_{0,RES} = \{\text{énoncé } O_{\text{énoncé}} ; \text{notes de recherche } O_{\text{recherche}} ; \text{travail de groupe de quatre élèves } O_{\text{groupe}} ; Q_1\}$. En effet, il est évident que la question Q_1 , intégrée à un énoncé contextualisé $O_{\text{énoncé}}$ est indispensable pour que le système didactique $S(X, y, Q_1)$ puisse même exister ; d'où leur présence dans tous les pré-milieux M_0 . Cet énoncé porte, dans sa formulation qui vise à étudier une organisation mathématique locale portant sur la résolution d'équations du premier degré, une représentation

de l'algèbre comme science des programmes de calcul. De même, le dispositif du travail de groupe – qui était une demande explicite de notre part, puisque nous souhaitions accéder aux échanges des élèves pendant l'enquête portée par cette AER – est un dispositif intrinsèque à la ressource. Enfin, la demande de notes de recherche, exprimée dans le document ressource, se justifie par la nécessité de garder une trace, non seulement du travail effectif des élèves, mais aussi afin de permettre aux élèves de se constituer un milieu d'étude avec des éléments qui pourront faire fonction de médias. L'objectif consiste à faire observer une régularité dans les valeurs obtenues, sans pour autant chercher à en apporter, à ce stade de l'étude du moins, une justification mathématique.

Cependant, ils sont tous les deux enrichis avec, par exemple une œuvre que nous avons nommé « énoncé auxiliaire $O'_{\text{énoncé}}$ » qui est une reformulation par le professeur P_2 de l'énoncé initial, ou bien même une désignation du domaine numérique de recherche avec l'arithmétique qui est explicitement affirmée.

Cette analyse des pré-milieus montre d'une part que la ressource est clairement utilisée comme un support d'enseignement par ces deux professeurs puisque l'on retrouve tous les éléments induits par la ressource. D'autre part les différences qui ont été relevées ne peuvent être considérées que comme des différences interpersonnelles.

3. Étude du milieu du schéma herbartien

En effet, pour le professeur P_3 qui a été, lui, observé dans deux classes différentes, on retrouve aussi des pré-milieus distincts pour chacune de deux classes, dont l'une était considérée comme bonne la classe C_{3a} et l'autre plus faible, la classe C_{3b} selon les pré-tests que nous avons effectués avant cette expérimentation. Ci-dessous, nous notons les pré-milieus mis à disposition par ce professeur P_3 .

$$M_{0,3a} = \{\text{travail de groupe de quatre élèves } O_{\text{groupe}} ; \text{énoncé } O_{\text{énoncé}} ; \text{usage de la calculatrice } O_{\text{calculatrice}} ; \text{lecture à haute voix de l'énoncé pour la classe } O_{\text{lecture énoncé}} ; \text{traces de recherche } O_{\text{recherche}} ; Q_1\} \setminus \{\text{œuvre tableur } O_{\text{tableur}}\}$$

$$M_{0,3b} = \{\text{travail de groupe de quatre élèves } O_{\text{groupe}} ; \text{énoncé } O_{\text{énoncé}} ; \text{énoncé auxiliaire } O'_{\text{énoncé}} ; \text{usage de la calculatrice } O_{\text{calculatrice}} ; R^\circ \text{ ébauche de technique pour } T_1 ; \text{domaine de l'arithmétique } O_{\text{arithmétique}} ; \text{traces de recherche } O_{\text{recherche}} ; \text{répartition du travail entre pairs } O_{\text{échange}} ; Q_1\}.$$

Si l'on considère le même professeur P_3 , les différences que nous relevons dans les pré-milieus $M_{0,3a}$ et $M_{0,3b}$ montrent qu'il évalue le degré de conformité des rapports $RC_{3a}(E_i, Q_1)$ et $RC_{3b}(E_i, Q_1)$ de chacune des deux classes et que le premier geste qu'il opère est de rechercher à accroître la conformité de l'un – $RC_{3b}(E_i, Q_1)$ – en reformulant complètement la question Q_1 . C'est pourquoi nous affirmons que les éléments divergents ont pour fonction d'installer une situation possiblement didactique, au sens de la TAD (Chevallard, 2018) en aménageant un milieu d'étude propice à cette étude.

Mais l'étude de l'évolution des milieux intermédiaires avant le milieu du schéma herbartien – tel que défini par Chevallard (2010) comme ensemble des réponses partielles et des œuvres rencontrées pendant l'étude de la question Q_1 – nous a également permis de prendre des indices sur les rapports au savoir des élèves. Ainsi, le milieu d'étude des élèves a pu évoluer dans la dynamique d'étude et de recherche interne à chacun des groupes.

4. Étude du milieu et contrat didactique

De plus, l'étude des milieux permet aussi des observations sur le contrat didactique en œuvre à travers le dispositif de travail de groupe. Il y a modification dans la topogénèse avec des gestes

d'aide à l'étude habituellement réservés au professeur, que cela soit pour faciliter la dévolution ou pour tenir un discours technologique pour les autres élèves.

Nous avons aussi relevé une double chronogenèse dans ce dispositif. L'une est interne, portée par l'avancée de la recherche et dont l'expression relève de la topogenèse telle qu'elle s'installe dans les groupes par des mécanismes différenciés selon les groupes. L'autre est externe et obéit à certaines des clauses du contrat didactique qui stipule qu'en dernier recours, c'est le professeur qui reste le maître de l'avancée dans la recherche et le savoir, notamment lors des moments d'institutionnalisation ; que lors de ces phases, les rôles dévolus aux uns et autres soient partagés ou que la responsabilité incombe entièrement au professeur

La micro-analyse didactique des groupes dont nous venons de d'exposer succinctement quelques éléments saillants nous permet d'envisager quelques perspectives de recherche.

VIII. CONCLUSION : DES PERSPECTIVES DE RECHERCHE

L'activité mathématique peut être vécue comme une pratique collective à l'instar de la communauté savante des mathématiciens. Elle apparaît ici comme une activité dans laquelle il n'est pas nécessaire que chacun des individus parcourt l'ensemble des moments de l'étude pour voir son rapport au savoir modifié. Nous avons ainsi observé une évolution des rapports au savoir chez tous les élèves observés sur la première séance. Les autres séances sont plus nuancées car les éléments technologico-théoriques indispensables pour faire avancer l'étude prennent une place plus importante, et ce sont les professeurs qui se chargent alors d'enrichir non plus les milieux des groupes mais ceux de la classe. Ainsi, certains élèves ne passent par les moments mis en place par le professeur : les apprentissages peuvent être différés et même différenciés avec des gestes chez des élèves qui apprennent en observant les autres agir dans les phases exploratoires et d'élaboration de techniques.

Nous avons également souligné la nécessité de poser la question des gestes d'aide à l'étude que suppose la mise en place d'une AER. En interrogeant les conditions qui président à sa mise en place, dans une perspective d'une étude écologique tant des savoirs que des praxéologies liées à l'étude et la recherche.

De plus, nous considérons que l'analyse du schéma herbartien peut être enseignée, en formation des enseignants en tant que modèle de l'articulation entre ces deux objets que sont l'organisation mathématique et l'organisation didactique, problème professionnel essentiel lorsque l'on considère les deux grands genres de tâches que sont « $T_{conception}$: concevoir un cours pour que des élèves apprennent un objet de savoir » et « T_{faire} : réaliser une séance effective de son cours tel qu'il a été prévu ». L'étude présentée ici peut être transposée en termes de praxéologie pour l'analyse du milieu du schéma herbartien. Pour cela, il faudra expliciter davantage les techniques que nous avons mises en œuvre, techniques qui se justifient dans le cadre de la TAD en tant que théorie de la cognition.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- CHEVALLARD, Y. (2007). Passé et présent de la Théorie Anthropologique du Didactique. Dans L. Ruiz-Higueras, A. Estepa & F. J. García (Éds), *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD)* (pp. 705-746). Jaen, Espagne : Publicaciones de la Universidad de Jaén.
- CHEVALLARD, Y. (2010). Le sujet apprenant entre espace et dispositif. Commentaires depuis la théorie anthropologique du didactique. *Intervention le 9 septembre 2010 aux journées du Lisec tenues à Gérardmer*. Repéré à http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=206

- CHEVALLARD, Y. (2018). Some sensitive issues in the use and development of the anthropological theory of the didactic, *Conférence inaugurale pour CITAD VI*, Autrans, 22-26 janvier 2018.
- COUSINET, R. (1950) cité dans Perspectives : revue trimestrielle d'éducation comparée (Paris, UNESCO : Bureau international d'éducation), vol. XXIII, n° 1-2, mars-juin 1993, p. 225-236
- LEUTENEGGER, F. (2000). Construction d'une "clinique" pour le didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 20/2, 209-250, La Pensée Sauvage, Grenoble
- MEJANI, F. (2018). *Analyse micro-didactique du processus d'étude et de recherche du point de vue mésogénétique au sein d'un travail de groupe dans le cadre des moments d'exploration du type de tâches et d'élaboration d'une technique sur les équations du premier degré*. Thèse de l'Université d'Aix-Marseille
- MEIRIEU, P. (2011). Pourquoi le travail en groupes des élèves ? Repéré à <https://www.meirieu.com/ARTICLES/listes-des-articles.htm>

LE DÉVELOPPEMENT DES CONNAISSANCES SPATIALES : QUELQUES BALISES POUR ALIMENTER NOS RÉFLEXIONS.

Patricia MARCHAND

Université de Sherbrooke

patricia.marchand@usherbrooke.ca

Résumé

Cette communication présente des balises pour valoriser le développement des connaissances spatiales à l'école primaire qui viennent d'être publiés dans RDM (Marchand, 2020). Ces balises qui ont été développées dans le cadre d'une recherche collaborative portant sur l'élaboration de séquences d'enseignement visant le développement des connaissances spatiales (CS) des élèves du primaire. Les CS sont distinctes des connaissances géométriques, mais elles en sont également indissociables. Comme plusieurs auteurs l'ont relevé avant nous, les CS engendrent diverses difficultés d'apprentissage et d'enseignement dans le cadre actuel de l'enseignement de la géométrie au Québec et ailleurs dans le monde. Les résultats découlant du présent projet et portant sur les CS s'intègrent dans un champ de recherche actuellement en plein essor en didactique des mathématiques. J'exposerai ainsi l'avancement de mes réflexions ciblant le développement des CS à l'école par le biais de la présentation d'une « Structure génératrice d'activités » (SGA) pour guider les pratiques enseignantes. Cette structure vise à être un outil à la croisée des savoirs didactiques et des savoirs pratiques.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- BATTISTA, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843-908). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- BERTHELOT, R. & SALIN, M.-H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*. (Thèse de doctorat inédite). Université de Bordeaux I, France.
- BERTHELOT, R. & SALIN, M.-H. (1999-2000). L'enseignement de l'espace à l'école primaire. *Grand N*, 65, 37-59.
- CLEMENTS, D. H. (1999). Geometric and spatial thinking in young children. In J. V. Copley (dir.), *Mathematics in the early years* (pp. 66-79). Washington, DC : National Association for the Education of Young Children.
- DAVIS, B. & THE SPATIAL REASONING STUDY GROUP (2015). *Spatial reasoning in the early years: Principles, assertions, and speculations*. New York, NY: Routledge.
- UTTAL, D. H., MEADOW, N. G., TIPTON, E., HAND, L. L., ALDEN, A. R., WARREN, C & NEWCOMBE, N. S. (2013). The malleability of spatial skills: A meta-analysis of training studies. *Psychological Bulletin*, 139(2), 352-402.

LE CRDM GUY BROUSSEAU, UN BON OUTIL POUR RESSOURCER L'ACTIVITE DU CHERCHEUR EN DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

Dilma FREGONA

Université Nationale de Córdoba

fregona@famaf.unc.edu.ar

Pilar ORUS

Université Jaume-I de Castellón

orus@uji.es

Lalina COULANGE

Université de Bordeaux, Lab-E3D

lalina.coulange@u-bordeaux.fr

Grégory TRAIN

Université de Bordeaux, Lab-E3D

gregory.train@u-bordeaux.fr

Résumé

Le Centre de Ressources de Didactique des Mathématiques – Guy Brousseau (CRDM – Guy Brousseau) est un fonds documentaire archivant une grande variété de ressources liées aux ingénieries de recherche développées dans les années 80-90 au sein du Centre d'Observation et de Recherches sur l'Enseignement des Mathématiques (COREM). Nous rendons compte de deux trajectoires d'utilisation de ce fonds, l'une ayant comme point d'entrée la diffusion d'une ingénierie sur la division dans la formation des enseignants, l'autre, proposant une revisite de la thématique des rationnels et de l'aspect commensuration des fractions. Nous montrons comment l'étude de ressources du CRDM – Guy Brousseau ont permis de renouveler un questionnement autour à la fois de la cohérence globale des décisions didactiques prises dans les différentes ingénieries mais également des conditions de reproductibilité de situations didactiques « proches » des situations originelles.

Mots clés

CRDM Guy Brousseau, ingénierie, division, multiplication, décisions didactiques, rationnels, commensuration, reproductibilité.

I. INTRODUCTION

Le Centre d'Observation et de Recherches sur l'Enseignement des Mathématiques¹³ (COREM) s'est voulu, et ceci dès sa création, un lieu de partage, regroupant une pluralité d'acteurs, enseignants, étudiants, formateurs et autres chercheurs, tous partageant une ambition commune, celle de mieux comprendre les phénomènes liés à l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques à l'école. Sans nul doute, chacun et chacune des acteurs auront ainsi accompagné, nourri et enrichi les développements théoriques de la théorie des situations didactiques. A écouter les propos même de Guy Brousseau, les situations d'institutionnalisation, arrivées plus tardivement que d'autres types de situations, sont nées du besoin exprimé par les enseignants de l'école Jules Michelet de « revoir ce qu'ils ont fait », d'aménager un espace entre une leçon et la suivante ... Dans cette communauté, Nadine Brousseau aura tenu une place de premier choix. Ses ambitions et engagements sans faille en faveur de l'enseignement, sa connaissance fine des situations, son talent dans l'orchestration de la classe, sa générosité dans le partage de ses connaissances n'auront échappé à personne de ceux qui auront eu plaisir à croiser sa route. Ainsi, au-delà des ressources produites par le COREM archivées aujourd'hui précieusement dans le fonds documentaire Guy Brousseau et dont nous tentons dans cette contribution de montrer en quoi elles auront permis de ressourcer notre activité de chercheur(s), nous souhaitons tout autant, à travers ce texte, rendre hommage à Nadine Brousseau, qui aura, encore plus que d'autres, accompagné la construction de cette œuvre majeure que constitue encore et toujours la théorie des situations en didactique des mathématiques.

Nous rendons compte dans cette contribution de deux trajectoires d'utilisation du Centre de Ressources en Didactique des Mathématiques (CRDM) Guy Brousseau, en illustrant comment les ressources de ce fonds documentaire nourrissent de nouvelles recherches. Dans une première trajectoire, nous montrons comment une problématique liée à la diffusion d'une ingénierie sur la division dans la formation d'enseignants (Brousseau et al., 2012) permet de re-questionner un ensemble de situations liées à la multiplication (Fregona et al., soumis) et conduit à l'étude de la cohérence globale des décisions didactiques prises dans ces différentes ingénieries comme objet d'étude en soi. Nous montrons dans une seconde trajectoire comment le revisite de la thématique sur les décimaux et les rationnels (Brousseau et Brousseau, 1987) à l'aune de travaux plus récents sur les unités (Chambris et al., 2021a ; Chambris et al., 2021b) permet de réinterroger un ensemble de situations liées à l'aspect commensuration des fractions, d'étoffer un questionnement sur la reproductibilité de situations didactiques « proches » et d'envisager de possibles prolongements de ces situations.

¹³ Le COREM était un dispositif créé par l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (IREM) de l'Université de Bordeaux en 1972, pour élaborer et expérimenter des ingénieries didactiques de recherche dans le milieu scolaire. Il a fait l'objet d'une présentation lors d'un précédent séminaire national (Brousseau et al., 2015).

II. UNE PREMIERE TRAJECTOIRE D'ETUDE SUR (LA DIVISION ET LA MULTIPLICATION DE NOMBRES ENTIERS (PILAR ORUS ET DILMA FREGONA))

1. Une première étude à propos de la division

Nous avons conduit une première étude en prise d'appui sur une ancienne ressource produite par l'IREM de Bordeaux : *“La division à l'école élémentaire - compte rendu des situations d'enseignement réalisées avec des enfants de CE2, CM1 et CM2”* (Brousseau et al., 1985), peu après la création du CRDM Guy Brousseau. Le choix de cette thématique était initialement lié à une problématique attachée à l'enseignement de l'algorithme de la division et rencontrée de manière récurrente en formation initiale et continue d'enseignants.

L'identification d'un problème (pour la profession) : l'algorithme de la division

Nous avons fait l'hypothèse à l'époque que l'enseignement de cet algorithme pouvait constituer un « problème » pour la profession au sein de l'institution de formation qui vise à former les enseignants du primaire en Argentine. Nous avons en effet constaté des attentes potentiellement fluctuantes au sein de cette institution en ce qui concerne l'enseignement de l'algorithme de la division posée : il existe notamment une distance entre des attentes exprimées dans les programmes et les manuels au sein de l'institution scolaire (qui tendent à laisser une place importante à l'algorithme « en soi » et son enseignement) et des propositions plus « didactisées » en prise d'appui sur la recherche (qui tendent parfois à en amoindrir l'importance et aménager au sein de cet enseignement des occasions de consolider des connaissances sur la numération, le sens des nombres et des opérations). De telles fluctuations ont conduit des (futurs) enseignants du primaire à exprimer de manière récurrente des besoins « forts » de formation en la matière : en termes d'identification des connaissances mathématiques visées ou en jeu convoquées par cet algorithme.

En 2011-2012, nous avons proposé à des enseignants du primaire de *l'Universidad Nacional de Cordoba*, l'étude d'un ensemble de documents du CRDM avec pour visée l'appropriation de la séquence conçue sur un algorithme de la division posée, qualifié d'ergonomique¹⁴ par Brousseau (2010) et qui diffère de celui traditionnellement enseigné en Argentine (et en France à l'époque). Cette séquence a été élaborée dans le cadre de la théorie des situations didactiques (Brousseau et al., 1985) et expérimentée au COREM. Si l'étude de ces archives a permis aux enseignants d'identifier les connaissances et les savoirs mathématiques en jeu dans l'algorithme de division et dans sa construction au fil des séances étudiées, la question d'un retour possible à l'algorithme traditionnellement enseigné dans l'institution scolaire (argentine) s'est rapidement posée. La suite de notre trajectoire découle de la recherche d'éléments de réponse à cette question formulée par les enseignants.

¹⁴ Brousseau (2010) montre en quoi l'algorithme traditionnellement enseigné dans plusieurs institutions scolaires (l'Argentine mais aussi le Chili et la France à l'époque) conjugue ce qu'il appelle des « facteurs de complexité didactique ». Il propose d'enseigner un autre algorithme qu'il appelle la « division ergonomique » pour pallier les difficultés potentielles d'élèves en lien avec ces facteurs de complexité. Les différences entre ces deux algorithmes sont développées dans Brousseau (2010).

Des décisions didactiques dans l'enseignement et l'apprentissage de la division

Il nous a tout d'abord semblé essentiel d'identifier ce qui pouvait justifier la proposition élaborée et expérimentée par les acteurs du COREM, en dehors de ce seul contexte de l'algorithme « posé » de la division. En particulier, notre attention s'est portée sur les connaissances mathématiques enseignées en amont et permettant de mieux cerner les décisions didactiques prises par les acteurs enseignants et chercheurs du COREM liées au processus d'enseignement et d'apprentissage de la division. Le processus d'enseignement de la division (Brousseau et al., 1985) débute en classe de CE2 avec l'étude du problème suivant relevant de la division quotient (Vergnaud, 1990) : « déterminer le nombre de groupes de 18 éléments dans un ensemble de 245 éléments ». En particulier, aucune technique spécifique de calcul ne semble attendue comme visée a priori dans la résolution. Un tel problème apparaît également « résistant » au regard à la fois du choix des nombres en jeu (18 et 245) et de l'absence chez les élèves de technique de calcul spécifique à mobiliser. Ce premier constat nous a conduites à vouloir mieux cerner ce que pouvaient être les conditions de mise en œuvre attachées à l'étude de ce problème, en identifiant dans l'inventaire fourni par le CRDM (figure 1), le bilan correspondant à ce début d'étude de la « division » (figure 2).

INVENTARIO CRDM				
Curso escolar	Clase (Nivel)	Extracción de actividades mat. del "BILAN" relacionada con los materiales de cada CAJA	Signatura de las CAJAS (nº Caja-curso escolar-nivel)	Contenido de la caja
1982/83	CP	http://hdl.handle.net/10234/91512	148-1982/83-CP	Pavés; Estadísticas; CAS
1982/83	CP	http://hdl.handle.net/10234/91512	149-1982/83-CP	Pavés; Trabajos alumnos
1982/83	CP	http://hdl.handle.net/10234/91512	150-1982/83-CP	Trabajos alumnos
1982/83	CP	http://hdl.handle.net/10234/91512	151-1982/83-CP	Trabajos alumnos
1982/83	CP	http://hdl.handle.net/10234/91512	152-1982/83-CP	Numeración; Trabajos alumnos;
1982/83	CP	http://hdl.handle.net/10234/91512	153-1982/83-CP	Numeración; Trabajos alumnos: Sobres
1982/83	CE1A	http://hdl.handle.net/10234/91495	154-1982/83-CE1A	Carpetas de alumnos; Trabajos
1982/83	CE1A	http://hdl.handle.net/10234/91495	155-1982/83-CE1A	Bilan; Pavés
1982/83	CE1B	http://hdl.handle.net/10234/91495	156-1982/83-CE1B	Carpetas de alumnos; Trabajos
1982/83	CE1B	http://hdl.handle.net/10234/91495	157-1982/83-CE1B	Estadísticas de resultados; Progresión anual; TAS; CAS; Pavés
1982/83	CE2	http://hdl.handle.net/10234/91551	158-1982/83-CE2	Estadísticas resultados escolares; Progresión anual con fichas; TAS; CAS; Pavés
1982/83	CE2	http://hdl.handle.net/10234/91551	159-1982/83-CE2	Estadísticas resultados escolares; Progresión anual con fichas; TAS y CAS; Pavés
1982/83	CE2	http://hdl.handle.net/10234/91551	160-1982/83-CE2	Carpetas alumnos con trabajos
1982/83	CE2	http://hdl.handle.net/10234/91551	161-1982/83-CE2	Carpetas alumnos con trabajos
1982/83	CE2B	http://hdl.handle.net/10234/91551	162-1982/83-CE2B	Carpetas alumnos con trabajos
1982/83	CE2B	http://hdl.handle.net/10234/91551	163-1982/83-CE2B	Estadísticas resultados escolares; TAS y CAS; Carpetas alumnos con resultados
1982/83	CM1	http://hdl.handle.net/10234/91496	164-1982/83-CM1	Libretas alumnos
1982/83	CM1	http://hdl.handle.net/10234/91496	165-1982/83-CM2	Libretas alumnos; Estadísticas; Pavés
1982/83	CM2	http://hdl.handle.net/10234/91552	166-1982/83-CM2	Libretas alumnos
1982/83	CM2	http://hdl.handle.net/10234/91552	167-1982/83-CM2	Estadísticas resultados escolares; progresión anual; Pavés; Bilan; TAS y CAS; trabajos alumnos

Figure 1. Extrait d'inventaire – identification de la boîte 159 – CE2 - 1982/83

DATES	ACTIVITES	OBJECTIFS	INSTRUCTIONS	COMMENTAIRES
13.5.	Division : l'approche par la situation 1	Amener les élèves à résoudre un problème de division, avec les outils qu'ils possèdent : addition, multiplication, soustraction.	Dans les situations relevant de la division que l'on étudiera, on ne se limitera pas, et cela dès le début aux cas de diviseurs ou quotients inférieurs à 10.	Réf : Etudes en didactique des mathématiques. P.TEULE-SENSACQ et G.VINRICH Travail par groupes de 2.
14.5.	Division : situation 2			
17.5.	Division : situations 3 et 4			
19.5.	Division : Situation 5. Construire une collection dont le nombre maximum de carreaux est donné ainsi que le nombre de carreaux sur la largeur de la collection.	Affiner les calculs. Rechercher des moyens plus économiques de calculer le quotient.	On se bornera à des méthodes empiriques de calcul du quotient et du reste à l'élaboration desquelles les enfants participeront.	

Figure 2. Extrait de bilan – CE2 - 1982/83, accessible à l'adresse <http://repositori.uji.es/xmlui/handle/10234/91551>

En plus d'un bref descriptif des premières « activités » proposées aux élèves, on trouve dans le bilan les « objectifs » poursuivis, les « instructions » correspondantes ainsi que les dates de réalisation (du 13 au 19 mai, soit en fin d'année scolaire de CE2). Une fiche de préparation d'un-e enseignant-e (figure 3) documente précisément les différents modèles de résolution de ce problème par les élèves : en lien avec l'addition ou la soustraction répétée ou en lien avec la multiplication « à trou » avec encadrements ou ajustements.

VENDREDI 13 MAI 1983

Approche de la division (1)

Intentions pédagogiques

Amener les élèves à résoudre un problème de division avec les moyens qu'ils possèdent : addition, multiplication, soustraction.

Matériel:
Une feuille de papier assez grande et un feutre par groupe de 2.

Projet de déroulement

Le maître distribue le problème et les enfants travaillent par groupe de 2. Il s'assure que le texte est bien compris par tous, puis il les laisse travailler.

On peut s'attendre à voir apparaître divers modèles

M. additif : $18 + 18 + 18 \dots$

M. soustractif : ~~245~~ $245 - 18 = \dots - 18 = \dots$ et...

M. multiplicatif : multiplication à trous et talonnement par encadrement ou ajustement avec l'addition ou la soustraction.

A la fin, quelques exemples sont affichés et on s'échange mutuellement expliquant à son tour son procédé.

Figure 3. Extrait de fiche de préparation d'un-e enseignant-e trouvée dans la boîte 159 – CE2 - 1982/83

Cette nouvelle exploration des archives du fonds Brousseau a dès lors permis l'émergence de nouvelles questions : quelle situation didactique a été investie par les élèves ? Quelles stratégies « de base » (potentiellement afférentes aux modèles décrits dans la fiche) pouvaient-ils convoquer pour répondre au problème posé ? Quels discours (enseignant-e-s) sur ces stratégies ? Y-avait-il la possibilité de valider « empiriquement » de telles stratégies (ce qui renvoie à la question du rôle du milieu) ? Quels sont les observables des stratégies investies par les élèves (traces ou productions) ? Quelle(s) gestion(s) enseignant(es) de telles stratégies, en termes de formulation de connaissances, de dévolution et d'institutionnalisation ?

Plusieurs contributions conduites entre 2012 et 2017 (Brousseau et al., 2012 ; Fregona, D. & Orus, P., 2012a, 2012b, 2017b ; Fregona et al., 2013 ; Fregona et al., 2017a) en prise d'appui sur les archives du fonds Brousseau apportent différents éclairages sur cet ensemble de

questions. Dans cette contribution, nous nous attardons sur la « situation 5 » (figure 4) dans laquelle l'utilisation du quadrillage est signalée. Brousseau et al. (1985) mettent en avant le rôle joué par ce quadrillage dans la mise en œuvre « facilitée » de procédures relevant du modèle multiplicatif et dans la justification des résultats obtenus :

Intentions pédagogiques : les deux séances suivantes ont aussi pour objet de résoudre des situations de division qui, cependant, diffèrent des précédentes. En effet, elles s'appuient sur un matériel particulièrement familier aux enfants : le quadrillage... ce qui favorisera la mise en œuvre de procédures multiplicatives et facilitera la justification des résultats (phase de validation). (op. cité, p. 9)

La présence d'un quadrillage dans ces situations nous semble une variable didactique essentielle liée au milieu de cette situation, notamment du point de vue du rôle joué par la mémoire didactique. L'utilisation du quadrillage permet *a priori* d'activer un répertoire de connaissances construites antérieurement par les élèves sur des techniques de calcul renvoyant à la multiplication, notamment pour répondre à la question présentée ci-dessous (figure 4) :

Consigne:
 Vous avez une bande de 16 carreaux de largeur.
 On veut la découper de façon à obtenir un rectangle
 de même largeur qui ne dépasse pas 160 carreaux,
 mais qui s'en rapproche le plus possible.
 Insister pour que le rectangle ait 16 carreaux de
 largeur.

Figure 4. Extrait de fiche de préparation d'une enseignante trouvée dans la boîte 159 – CE2 - 1982/83

Le quadrillage est un élément important du milieu de la situation évoqué dans le bilan (voir figure 2). En particulier, la largeur fixée (permettant de matérialiser le diviseur, ici : 16) est conservée d'une situation à l'autre, puisque à la suite de cette première question, les élèves sont invités à réfléchir à « approcher (un rectangle de) 3300 carreaux ». Le choix de laisser la largeur du rectangle fixe, tout en jouant sur la modification du nombre de carreaux à approcher (correspondant au dividende) oblige un saut informationnel (Brousseau, 1997) important au regard des connaissances visées sur la division. Dans nos travaux antérieurs sur la division cités plus haut, nous avons en particulier montré, à partir des résultats des élèves aux évaluations archivées au CRDM, que les élèves (de CE2) faisaient preuve d'une habileté forte dans la résolution des problèmes. La question de savoir quelles connaissances avaient été construites sur la multiplication, en amont de celles examinées sur la division, en « remontant le fil » de la construction de ces savoirs mathématiques au sein du COREM s'est dès lors naturellement imposée.

2. Une deuxième étude sur la multiplication

Tout comme nous l'avons fait antérieurement pour la division, nous avons consulté une ancienne ressource produite par l'IREM de Bordeaux sur l'enseignement et l'apprentissage de la multiplication (Berthelot et Grésilier, 1985) : *La multiplication au CE1. Quelques apports des recherches en didactique aux leçons de tous les jours. Document pour les enseignants.*

La multiplication pour désigner le cardinal d'une collection organisée de façon rectangulaire

La multiplication est envisagée, dans cette brochure, d'emblée comme « désignant le cardinal d'une collection, organisée de façon rectangulaire » (Berthelot et Grésilier, 1985).

Notons que ce point de vue de « désignation » d'un nombre (et non d'un calcul à effectuer pour trouver un nombre) revêt une forme d'importance que nous investiguons plus avant dans une publication en cours de soumission (Fregona et al., soumis). En examinant le travail conduit en amont du CE2, on constate, en classe de CP, que la production de différentes désignations de nombres était une tâche quasi-routinisée, avec une précaution prise de distinguer ce qui pouvait relever d'une désignation de type « nombre habituel » (le nombre dans son écriture chiffrée) d'autres désignations possibles de ces mêmes nombres. Un des premiers problèmes proposés aux élèves de CE1 (1er mars 1982) concernant la multiplication était notamment formulé ainsi : « donner le « nombre habituel » correspondant à 14×18 à partir d'un quadrillage.

S'agissant des stratégies mises en œuvre par les élèves pour résoudre un tel problème, les productions consultées dans les archives du CRDM (figure 6) montrent que d'emblée, les élèves convoquent des techniques relevant de découpages de la collection rectangulaire quadrillée en « morceaux » exprimés comme des produits. Ils laissent de côté des techniques plus élémentaires telles que le dénombrement « un à un » ou des additions répétées, le « jeu » n'étant pas tant de compter ou de calculer le nombre de carreaux « total », mais de produire de nouvelles désignations à même d'avancer vers la production de la désignation attendue de type « nombre habituel ».

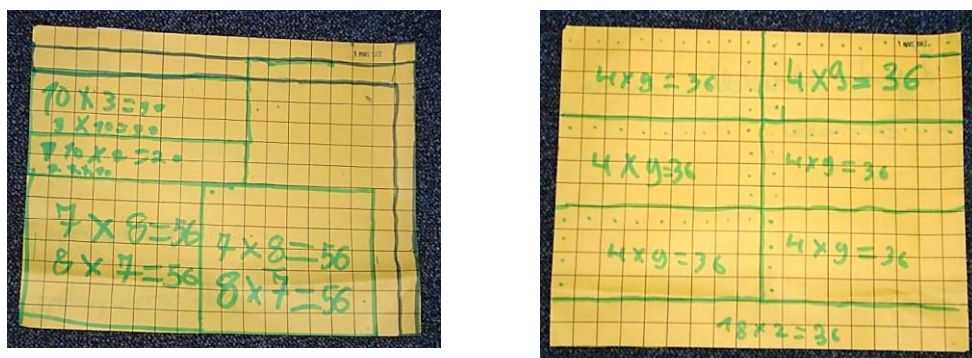


Figure 6. Productions d'élèves correspondant à la recherche du « nombre habituel de 14×18 » issues de la boîte 130 – CE1 - 1981/82

Plus dans le détail, la production du groupe d'élèves à gauche (figure 6) montre que pour répondre à la question posée, les élèves ont envisagé des découpages sans toutefois arriver à recouvrir totalement le rectangle. Nous pouvons faire l'hypothèse qu'ils ont recherché des produits intermédiaires pour lesquels ils disposent déjà de désignations sous la forme de « nombres habituels ». Ils trouvent ainsi les nombres habituels à associer aux produits « 7×8 » et à des produits par 10 (« 10×3 » et « 10×4 »). On note par ailleurs des expressions de la propriété de commutativité dans chacun des rectangles correspondants (correspondant peut-être pour eux à d'autres désignations égales à ces mêmes « nombres habituels »). Toutefois, des difficultés subsistent pour produire le « nombre habituel » associé au produit initial « 14×18 ».

La production du groupe d'élèves à droite (figure 6) fait apparaître une régularité dans le découpage qui a permis à ces élèves de produire des surfaces rectangulaires disjointes recouvrant l'intégralité du rectangle correspondant au produit « 14×18 », renvoyant chacune à un même « nombre habituel » renseigné : 36 (comme « 4×9 » mais aussi « 18×2 »). Le

« nombre habituel » associé au produit initial n'est toutefois pas encore renseigné quant à lui sur cette deuxième production.

A la recherche du « nombre habituel »

Concernant le projet d'enseignement de la multiplication, on note des avancées progressives dans les travaux d'élèves, liées à la recherche de ce « nombre habituel » comme somme des nombres correspondant aux « nombres habituels » de produits intermédiaires (figure 7).

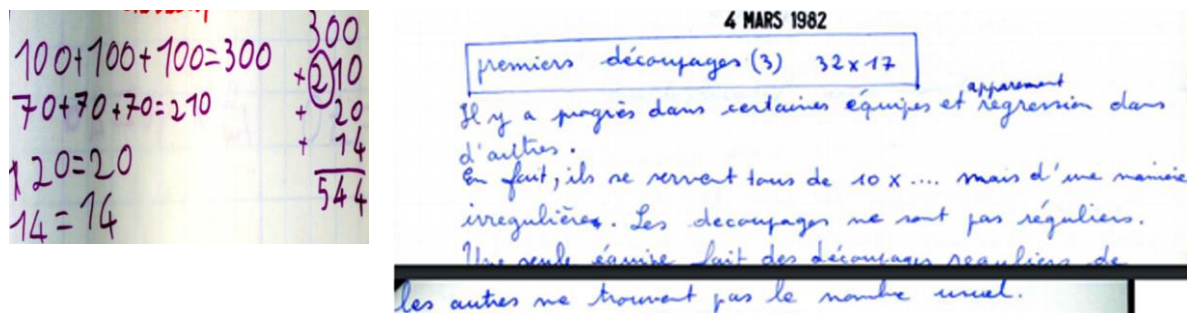
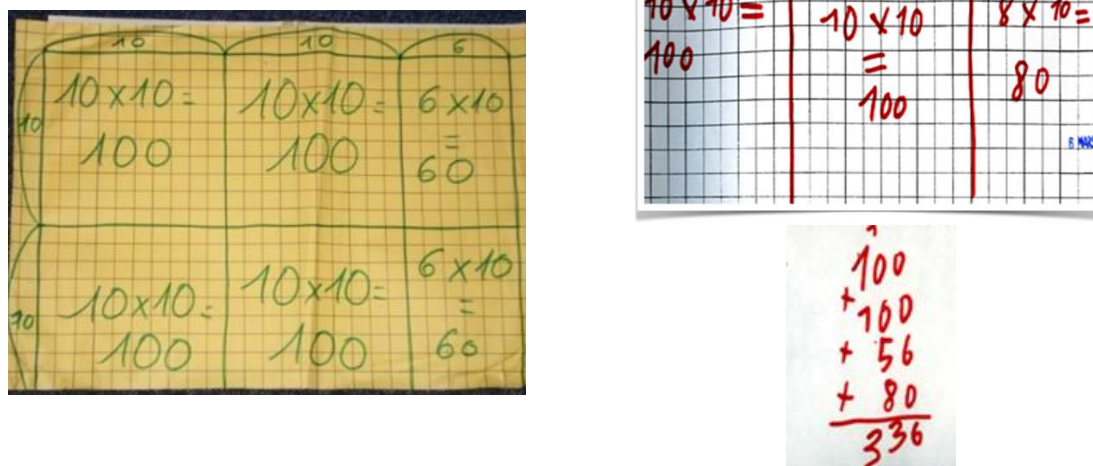


Figure 7. Productions d'élèves et compte rendu d'observateur trouvés dans les boîtes 130 et 132 – CE1 - 1981/82

Ainsi le 4 mars 1982 (soit 3 jours après la séance consacrée au problème évoqué ci-dessus) apparaissent des premières additions partielles arrangées verticalement et horizontalement, correspondant à des sommes de « nombres habituels », presque tous associés à des produits par 10. L'observateur de cette séance remarque que certains groupes d'élèves ont semblé avancer dans ce sens, mais que d'autres n'accèdent pas aussi aisément à ce type d'organisation dans leurs découpages et éprouvent dès lors des difficultés à déterminer le « nombre habituel ».

Un jeu sur les variables didactiques (notamment en proposant un produit de 26 par 20, le 5 mars 1982), semble permettre au plus grand nombre de progresser en ce sens : l'extension de cette technique (de découpage avec des produits avec un facteur 10) à de nouveaux produits (comme celui de 12 par 28, proposé le 6 mars 1982) permet le succès de quasiment tous les groupes d'élèves, d'après le compte rendu d'un observateur (daté du 11 mars 1982), soit sur une durée d'environ une semaine (voir figure 8).



11 MARS 1982

découpage par 10 : 24×13

travail par 2.

tous réunissent.

Une équipe s'est trompée à l'addition. (mal recopiée :
13 au lieu de 12)

Figure 8 : Productions d'élèves sur un problème de multiplication trouvées dans la boîte 130 – CE1 - 1981/82

On note par la suite une disparition progressive du quadrillage en tant que tel. S'y substituent des « plans de découpages » produits sur feuilles blanches (semaine du 11 au 18 mars 1982) comme l'illustre la figure ci-dessous (figure 9) :

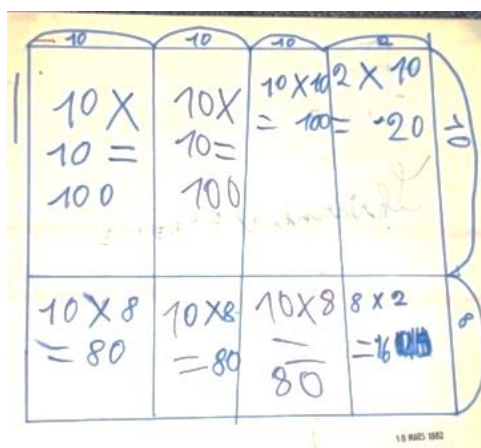
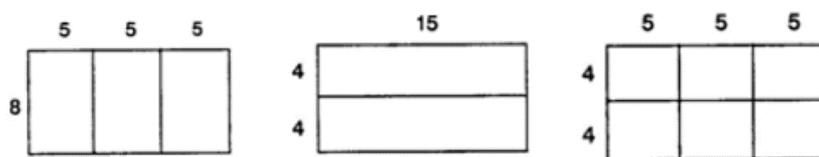


Figure 9. Production d'élèves sur un problème de multiplication trouvée dans la boîte 130 – CE1 – 1981/82

“[...] Par exemple, pour évaluer 8×15 on peut décomposer selon



(Boët et al., 1993, p. 239).

Si le principe de découpe en surface est identique, les techniques attendues pour « organiser » le découpage sont d'un autre ordre, visant à réactiver des techniques de calcul mental, éloignées d'une recherche de désignation d'un nombre d'une part, et ne visant pas des connaissances liées à la construction progressive d'un algorithme en prise d'appui sur les propriétés des nombres, d'autre part. Sur ce deuxième point, les auteurs de l'ouvrage signalent d'ailleurs :

« Il nous semble que la démarche de construction d'une technique opératoire, à l'aide des découpages de rectangles est lourde et coûteuse en temps au CE1 si l'on respecte toutes les étapes prévues et la démarche des élèves ». (Boët et al., 1993, p. 243)

Ces transformations de l'ingénierie de départ renvoient potentiellement au phénomène d'obsolescence¹⁵ rencontré dans les pratiques enseignantes par Brousseau (1981) observé au COREM, mais à l'œuvre ici, dans une tentative de diffusion de situations didactiques dans une ressource à destination d'enseignants. Un tel phénomène nous paraît précisément pointer la nécessité de poursuivre le développement de connaissances et de savoirs didactiques sur les ingénieries originellement développées dans le cadre de la théorie des situations didactiques, en prise d'appui sur le fonds documentaire CRDM – Guy Brousseau : il s'agit bien de veiller à « ressourcer » l'activité du chercheur en didactique des mathématiques ou celle du didacticien-formateur d'enseignants.

En guise de conclusion intermédiaire

À partir de 1972 et pendant 25 années, l'école Jules Michelet à Talence en France a été un espace de travail et de formation en didactique des mathématiques où il était rendu possible d'observer finement les phénomènes d'enseignement et d'apprentissage à l'œuvre dans les classes au sein d'expérimentations conduites dans le cadre la théorie des situations. De telles expérimentations recouvraient parfois des marges de manœuvre inédites par rapport à un curriculum institutionnel prescrit, invitant par là-même à des prises de décisions (enseignantes) qui peuvent rester inhabituelles dans de nombreuses institutions scolaires, encore aujourd'hui. Cela nous semble justifier d'investir plus finement les prises de décisions (enseignantes) à l'œuvre à l'époque qui auront participé à préserver le sens de la perspective théorique adoptée dans ce groupe scolaire. *In fine*, ce sont la reconstruction et la recherche de ce sens qui nous semblent s'afficher comme un objet d'étude en soi et une porte d'entrée fructueuse pour l'analyse des prises de décisions enseignantes et la construction progressive des moyens pour permettre la résolution de problèmes similaires dans d'autres contextes.

¹⁵ « Nous entendons par obsolescence le phénomène suivant : les maîtres, d'une année à l'autre, ont de plus en plus de mal à reproduire les conditions susceptibles d'engendrer chez leurs élèves, à travers peut-être des réactions différentes, une même compréhension de la notion enseignée. » (Brousseau 1981, p. 85).

III. UNE DEUXIEME TRAJECTOIRE D'ETUDE SUR DECIMAUX ... ET RATIONNELS (LALINA COULANGE ET GREGORY TRAIN)

A l'instar de nos collègues, nous, revenons dans cette section sur ce qui a constitué le point de départ de notre trajectoire d'étude des ressources du CRDM - Guy Brousseau.

Le premier point d'ancrage a résidé, dans la continuité des recherches conduites par Chambris (2008) puis par Tempier (2013) sur les unités de numération dans l'enseignement des nombres entiers, à interroger une possible extension de ces travaux aux nombres décimaux (Coulange & Train, 2015 ; Coulange & Train, 2019) et les conséquences potentielles d'une telle entreprise.

Le second point d'ancrage, non sans lien avec cette première perspective d'étude, a reposé sur une collaboration avec une enseignante exerçant dans un lieu d'éducation associé (le LéA Carle Vernet). Cette enseignante collaboratrice cherchait à prendre appui sur les écritures décimales convoquées spontanément (et de manière imprévue) par les élèves (car faisant partie par ailleurs de leur univers quotidien hors de l'école) dans des situations de mesure de longueurs pour tenter d'aménager avec ces mêmes élèves la (re)construction collective des significations de ces écritures (Coulange & Train, 2015 ; Coulange & Train, 2019 ; Chambris et al., 2021a ; Chambris et al., 2021b)

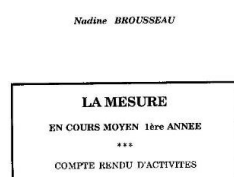
1. Les décimaux et l'écriture décimale

A l'époque, si l'initiative de l'enseignante collaboratrice avait pu apparaître à plusieurs égards intéressante, une telle proposition semblait, dans le même temps, quelque peu contradictoire avec ce que nous imaginions (trop naïvement) être la trajectoire, documentée dans Rationnels et décimaux (Brousseau et Brousseau, 1987) relative à l'étude des nombres rationnels puis décimaux (en particulier l'écriture fractionnaire précédant l'écriture décimale des nombres rationnels), trajectoire par ailleurs en conformité avec les attentes institutionnelles actuelles. Une première investigation du fonds Brousseau aura permis de rectifier une telle naïveté, avec la présence de premières écritures décimales rencontrées dans les cahiers d'élèves de CM1 (Figure 11), bien en amont de la mise en œuvre de l'ingénierie « Rationnels et décimaux » programmée en classe de CM2.

Plus encore, l'étude conjointe d'une ressource de l'IREM de Bordeaux¹⁶ (Brousseau, 1987) et d'une première fiche didactique extraite du CRDM (datée de 1994, voir figure 10), fiche en partie reprise dans la brochure IREM, a fait apparaître des proximités fortes avec nos propres observations conduites dans la classe de l'enseignante collaboratrice (Coulange & Train, 2015 ; Coulange & Train, 2019).

Ainsi, adossée à la tâche initiale proposée aux élèves en 1994 : « une mesure de longueur étant donnée en mm (ici 250), exprimer cette mesure avec une seule unité (ici le décimètre) », on trouve trace dans la fiche didactique d'un discours explicite sur l'apparition (probable) de la virgule : si l'enseignant « ne dit rien sur la virgule mais n'interdit pas de l'utiliser », il est invité à rapprocher de telles écritures d'autres données en exemple afin de revenir sur la signification des chiffres positionnés après l'unité (ici le dm).

¹⁶ Accessible à l'adresse : <http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2012/09/Mesure87-annexe.pdf>



→ Correction : 205 mm, et 250 mm, ce qui est différent; le maître rappelle que 10 mm, c'est 1 ^{dm}dm, ...il s'agit d'un travail de conversion en l'unité plus petite connue.
 "Et maintenant, vous allez essayer d'écrire ces mesures avec une seule unité : le décimètre (dm)."

Certains élèves vont probablement être perplexes, le maître attend d'avoir suffisamment d'écritures proposées et fait ^{la}écrire les ardoises.

Exemples de productions attendues :

2 dm 5 2 dm 50 2 dm 05 2,5 dm 2,05 dm 2,50 dm

Le maître ne dit rien sur la virgule, mais n'interdit pas de l'utiliser. Dans tous les cas, l'obligation de produire simultanément les écritures de deux segments visiblement de longueur différente permet de pointer le fait qu'on ne peut pas avoir deux fois la même écriture. Les débats entre élèves doivent porter sur la justesse des écritures, et la signification des chiffres placés après les unités, par comparaison par exemple avec les écritures en mm.

Document pour les enseignants
 et pour les formateurs
 1987

Tirage 1992

Edition augmentée

Figure 10. Brochure de l'IREM de Bordeaux « La mesure en cours moyen 1^{ère} année » (Brousseau, 1987) et extrait de fiche didactique - boîte 434 – CM1 – 1994/95

Les cahiers d'élèves de CM1 donnent trace de l'usage de telles écritures, écritures en place à la fois dans des tâches de conversion liées à d'autres écritures possibles (« complexes ») et dans des tâches de calculs additifs ou soustractifs mettant en jeu des grandeurs mesurées (longueur, monnaie, masse, etc.).

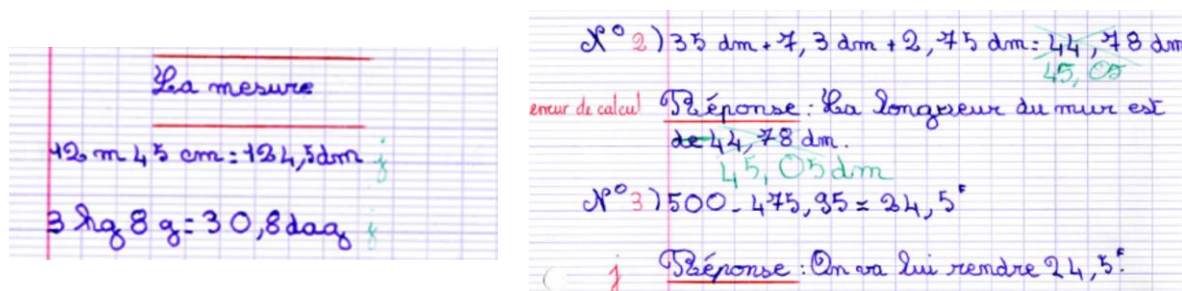


Figure 11. Extraits de cahiers d'élèves - boîte 434 – CM1 – 1994/95

Ces premières découvertes ont dès lors permis de poser un regard nouveau et d'accéder à une meilleure compréhension des phénomènes à l'œuvre dans d'autres matériaux d'enquête, récupérés plus tardivement au sein d'un autre système de ressources complémentaire aux ressources du CRDM : la banque de données Vidéos de Situations d'enseignement et d'Apprentissage » (VISA¹⁷). L'étude de premières données filmiques des situations didactiques dites de « l'épaisseur des feuilles de papier » laisse entrevoir des élèves de CM2 réintroduisant l'écriture décimale dans la formulation de premières réponses (copie d'écran du tableau – figure 11) et une négociation conduite par l'enseignante pour « exclure » de telles écritures du codage attendu d'un rationnel sous la forme d'un couple de nombres entiers (correspondant à un nombre de feuilles et à l'épaisseur du tas de feuilles mesurée en millimètres).

¹⁷ <http://visa.ens-lyon.fr>

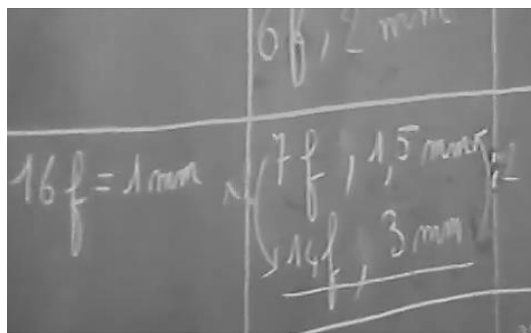


Figure 11. Capture d'écran d'une vidéo extraite du fonds VISA – codage de l'épaisseur d'une feuille de papier

Un tel fait de classe permet d'ailleurs de faire le constat suivant : la grandeur associée à l'épaisseur d'une feuille mesurée en millimètres et retenue par Brousseau et Brousseau (1987) comme *a priori* non éligible au fractionnement (pour ne pas détourner les élèves de l'enjeu lié à la commensuration), ne résiste pas tout à fait à l'entrée en scène de telles écritures décimales, fréquentées en amont par les élèves, en classe de CM1¹⁸. Nous soulignons et retenons ici une mise en regard et une complémentarité, particulièrement fructueuses¹⁹ des deux systèmes documentaires que sont le CRDM – Guy Brousseau et la banque de données VISA offrant l'accès à une pluralité de données filmiques liées aux ingénieries expérimentées au COREM.

En particulier, la perspective est offerte par le CRDM de (ré)inscrire les faits didactiques observables à l'échelle d'une séance ou de plusieurs séances filmées, dans une temporalité plus longue d'enseignement et d'apprentissage. Une telle perspective permet de (re)positionner une partie des phénomènes didactiques identifiés par rapport à l'histoire scolaire des élèves de l'école Jules Michelet. Dans la suite de ce texte, nous examinons plus avant l'accès à différentes dimensions du temps didactique, d'enseignement ou d'apprentissage à partir de l'étude de l'ingénierie de « l'épaisseur des feuilles de papier » en prise d'appui sur les ressources du CRDM associées.

2. Dimensions temporelles de l'ingénierie « épaisseur d'une feuille de papier »

Dans un deuxième temps de notre trajectoire, tourné vers l'examen de l'enseignement des rationnels et l'aspect commensuration de la fraction, l'étude des ressources du CRDM nous a permis de circonscrire plus précisément les dimensions temporelles liées à l'ingénierie didactique « l'épaisseur d'une feuille de papier » (figure 12).

¹⁸ Et ce, même si restreintes *a priori* dans leurs usages antérieurs à des unités de mesures de longueur plus grandes comme le mètre, le décimètre ou le centimètre...

¹⁹ L'intérêt d'une telle mise en regard avait déjà été mise en avant par Fregona, Orus et Gregori (2018) s'agissant de situations liées à des figures géométriques « téléphonées ».

1.1 - EPAISSEUR D'UNE FEUILLE DE PAPIER

1.1.1 - Préparation du matériel et des lieux
L'enseignant a disposé :

- sur une table devant les enfants : 5 tas d'environ 200 feuilles de même format, de même couleur, mais d'épaisseurs différentes (par exemple, des feuilles de polycopie, de bristol etc...) placés dans un ordre quelconque. Certaines différences d'épaisseur ne doivent pas pouvoir être appréciées au simple toucher. L'enseignant ne cherche pas à "savoir" ces épaisseurs à l'avance : il n'y a pas de "bonne mesure" à découvrir.
- sur une autre table au fond de la classe 5 autres tas de 200 feuilles des mêmes types de papier placés dans un ordre différent qui servira pendant la phase 2.
- 10 pieds à coulisse en plastique (2 par groupe de 5 enfants)
- Un rideau ou un paravent permet de partager la classe en 2.

1.1.2 - 1ère Phase : Recherche d'un code (durée 20 à 25 mn).
L'enseignant place les enfants par équipes de quatre ou cinq.

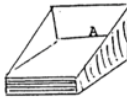
a) **Présentation de la situation - Consigne.**

- "Voyez ces feuilles que j'ai préparées dans ces boîtes A, B, C, D, E. Dans un même tas, toutes les feuilles ont la même épaisseur mais d'un tas à l'autre, les épaisseurs ne sont peut-être pas les mêmes. Pouvez-vous sentir ces différences ?"

Quelques feuilles de chaque tas circulent dans la classe - les enfants les touchent, les comparent.
"Comment fait-on dans le commerce pour distinguer les différentes qualités de papiers ? (d'après le poids)

- Objectif didactique

"Vous allez essayer d'inventer un autre moyen pour désigner et reconnaître ces différents types de papier, et pour les distinguer seulement d'après leur épaisseur.
Vous êtes groupés par équipes concurrentes.
Chaque équipe va réfléchir pour trouver un moyen de désigner les épaisseurs des feuilles. Dès que vous en aurez trouvé un, vous l'essaierez dans un jeu de communication.



UNIVERSITE DE BORDEAUX I

I.R.E.M. DE BORDEAUX

8.116

LADIST

Bibliothèque JEAN COLMEZ

DEA et Doctorat

Nadine et Guy BROUSSEAU

RATIONNELS et DÉCIMAUX
dans la scolarité obligatoire

— comptes rendus d'observations de situations et de processus didactiques à l'école Jules Michelet de TALENCE —

Document pour les enseignants et pour les formateurs
1987

1.1 - EPAISSEUR D'UNE FEUILLE DE PAPIER

1.1.1 - Préparation du matériel et des lieux

L'enseignant a disposé :

- sur une table devant les enfants : 5 tas d'environ 200 feuilles de même format, de même couleur, mais d'épaisseurs différentes (par exemple, des feuilles de polycopie, de bristol etc...) placés dans un ordre quelconque. Certaines différences d'épaisseur ne doivent pas pouvoir être appréciées au simple toucher. L'enseignant ne cherche pas à "savoir" ces épaisseurs à l'avance : il n'y a pas de "bonne mesure" à découvrir.
- sur une autre table au fond de la classe 5 autres tas de 200 feuilles des mêmes types de papier placés dans un ordre différent qui servira pendant la phase 2.
- 10 pieds à coulisse en plastique (2 par groupe de 5 enfants)
- Un rideau ou un paravent permet de partager la classe en 2.

1.1.2 - 1ère Phase : Recherche d'un code (durée 20 à 25 mn).

L'enseignant place les enfants par équipes de quatre ou cinq.

a) **Présentation de la situation - Consigne.**

- "Voyez ces feuilles que j'ai préparées dans ces boîtes A, B, C, D, E. Dans un même tas, toutes les feuilles ont la même épaisseur mais d'un tas à l'autre, les épaisseurs ne sont peut-être pas les mêmes. Pouvez-vous sentir ces différences ?"

Quelques feuilles de chaque tas circulent dans la classe - les enfants les touchent, les comparent.
"Comment fait-on dans le commerce pour distinguer les différentes qualités de papiers ? (d'après le poids)

- Objectif didactique

"Vous allez essayer d'inventer un autre moyen pour désigner et reconnaître ces différents types de papier, et pour les distinguer seulement d'après leur épaisseur.
Vous êtes groupés par équipes concurrentes.
Chaque équipe va réfléchir pour trouver un moyen de désigner les épaisseurs des feuilles. Dès que vous en aurez trouvé un, vous l'essaierez dans un jeu de communication.

Figure 12. Brochure²⁰ de l'IREM de Bordeaux « Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire » (Brousseau & Brousseau, 1987)

Ainsi, le temps dédié au processus d'enseignement et d'apprentissage du « rationnel-commensuration », débutant de la caractérisation de l'épaisseur d'une feuille de papier (incluant l'équivalence de désignations de cette épaisseur ou la comparaison de deux épaisseurs) et s'achevant par la construction de techniques d'addition de rationnels mais aussi de techniques liées à la multiplication et à la division d'un rationnel par un entier, peut apparaître somme toute, assez restreint au regard des enjeux de savoirs sur les fractions²¹. La figure ci-dessous synthétisant le parcours d'étude à partir d'extraits de cahiers d'élèves de l'année 1995/96, rend compte de cette temporalité « resserrée » : de mi-novembre à début décembre de la même année scolaire.

²⁰ Accès ressource : https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00610769/file/Rationnels_et_dA_cimaux_1987.pdf

²¹ A titre de comparaison, le curriculum actuel envisage ce processus d'enseignement et d'apprentissage des rationnels (équivalence, comparaison, addition et multiplication ou division par un entier) sur plusieurs années.

<p>Jeudi 16 novembre 1995</p> <p><u>L'épaisseur d'une feuille</u></p> <p>J'écris 3 couples équivalents aux couples suivants :</p> <p>8 f; 8 mm \equiv 16 f; 16 mm \equiv 4 f; 3 mm \equiv 24 f; 18 mm</p> <p>50 f; 4 mm \equiv 25 f; 8 mm \equiv 100 f; 8 mm \equiv 250 f; 20 mm</p>	<p>8) $\frac{25}{100} + \frac{18}{100} + \frac{45}{100} = \frac{88}{100}$ j</p> <p>$\frac{4}{25} + \frac{9}{50} + \frac{16}{100} =$</p> <p>$\frac{16}{100} + \frac{18}{100} + \frac{16}{100} = \frac{66}{100} \frac{60}{100}$</p> <p>$\frac{16}{4} - \frac{18}{98} =$</p> <p>$\frac{128}{32} - \frac{18}{32} = \frac{110}{32}$? erreur ou oubli</p>
Caractérisation de rationnels (équivalence)	Somme et différence de rationnels
16 novembre 1995	21 novembre 1995
<p>$\frac{1}{9} : 8 =$</p> <p>$\frac{16}{36} : 8 = \frac{2}{36}$ j</p> <p>$\frac{15}{120} : 3 =$</p> <p>$\frac{30}{360} : 3 = \frac{10}{360}$ j</p>	<p>4) $\frac{7}{25} : 8 =$</p> <p>$\frac{56}{200} : 8 = \frac{7}{250}$ j</p> <p>l'épaisseur d'une feuille est 7 mm</p> <p>5) $\frac{3}{25} \times 5 = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$ j</p> <p>Réponse : il est plus fin qu'un b j</p> <p>il faut coller 10 feuilles juste feuille de plus pour qu'il soit plus gros qu'un mm.</p>
Division d'un rationnel par un entier	Évaluation
30 novembre 1995	5 décembre 1995

Figure 12. Extraits de cahiers d'élèves - boîte 464 – CM2 – 1995/96

Dans le même temps, c'est aussi un autre fait temporel lié à la robustesse des situations didactiques que permettent de pointer les ressources du CRDM. Ainsi, un même sujet d'évaluation (celui pour lequel nous donnons à voir un extrait de cahier d'élève ci-dessus) a été proposé pendant une période longue d'enseignement (d'au moins 10 ans), puisque nous l'avons retrouvé proposé à l'identique dans des boîtes allant de 1985/86 à 1995/96. L'extrait de ce sujet, cité ci-dessous, a d'ailleurs particulièrement attiré notre attention, pour d'autres raisons, sur lesquelles nous reviendrons ci-après.

- 3) Pour faire un carton, on colle 5 feuilles identiques dont l'épaisseur est $\frac{3}{25}$ mm.
- Quelle sera l'épaisseur du carton ?
 - Ce carton est-il plus gros ou plus fin qu'un millimètre ?
 - Combien de feuilles faut-il coller (au minimum) pour qu'il soit plus gros qu'un millimètre ?
- 4) Un carton a une épaisseur de $\frac{7}{25}$ mm. Il a été réalisé en collant 8 feuilles identiques. Quelle est l'épaisseur d'une de ces feuilles ?

Figure 13. Extrait d'un sujet d'évaluation – CM2 – trouvé dans les boîtes 236 de 1985/86 et 464 de 1995/96

3. Reprise de « l'épaisseur d'une feuille de papier », version « robots » ...

Forts de ces constats, nous nous sommes inspirés des matériaux issus du CRDM pour concevoir une ressource destinée à des enseignants de collège, contextualisant la commensuration par le biais de « robots » ou « d'automates », en reprenant l'idée émise par Neyret (1995) d'un

rapprochement possible entre les deux contextes du point de vue de la commensuration²². Nous avons ainsi proposé des adaptations de situations préexistantes, liées aux « automates » pour les rapprocher davantage des situations didactiques associées à « l'épaisseur d'une feuille de papier » (Coulange et Train, 2017). Ces adaptations visaient, entre autres, l'extension à certaines opérations sur les rationnels (addition et soustraction de rationnels, multiplication et division d'un rationnel par un entier). De premières expérimentations ont été conduites en classe de sixième et en classe de cinquième à partir d'une ressource détaillant une scénarisation de situations dans ce nouveau contexte des « robots ».


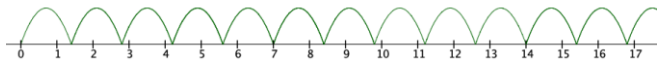
Le contexte des « feuilles de papier »	Le contexte des « Robots »
Nombre de feuilles identiques de papier : q feuilles	Nombre de sauts identiques d'un robot : q sauts
Épaisseur d'un tas de feuilles (q feuilles) mesurée en mm : p mm	Distance atteinte (sur une droite graduée) : p unités
Épaisseur d'une feuille de papier : $\frac{p}{q}$ mm mais aussi $\frac{p \times a}{q \times a}$ mm, etc.	Longueur du saut d'un robot : $\frac{p}{q}$ unités mais aussi $\frac{p \times a}{q \times a}$ unités, etc.
	

Figure 14. Deux contextes attachés à la commensuration

La mise en regard des résultats de ces premières expérimentations liées aux « robots » avec les ressources du CRDM et de VISA documentant l'ingénierie de l'épaisseur d'une feuille de papier a permis de révéler une forme de reproductibilité forte des phénomènes didactiques à l'œuvre, transcendant le changement de contexte. Cette reproductibilité concerne tout autant des leviers mais aussi des récurrences sur des points de difficulté rencontrés dans la trajectoire globale de l'étude de rationnels, en prise d'appui sur la commensuration.

Ainsi, entre autres phénomènes didactiques liés à des faits observés, a-t-on pu constater l'émergence de techniques de comparaison similaires et pourtant, relativement inédites dans le curriculum scolaire français actuel. Par exemple, dans une classe de sixième observée en mai 2018, pour comparer les fractions $\frac{7}{3}$, $\frac{9}{2}$ et $\frac{17}{4}$ (données sous leur écriture fractionnaire), une élève envisage la technique suivante :

« Pour comparer 7 sur 3 et 17 sur 4 j'ai d'abord multiplié par deux, ça fait 7 fois 2, 14 et 3 fois 2, 6 et on sait qu'avec un plus grand nombre de sauts, on atteint une plus petite longueur / ça veut dire que ce nombre est plus grand »

Le raisonnement produit par cette élève consiste dans un premier temps en la recherche d'une nouvelle désignation de la longueur du saut codée $\frac{7}{3}$: le robot qui atteint 7 unités en 3 sauts atteint 14 unités en 6 sauts. Cette nouvelle désignation rend alors possible la comparaison : comme le robot dont la longueur de saut est codée $\frac{17}{4}$ parcourt une plus grande distance, 17 unités, en un nombre plus petit de sauts, 4 sauts, alors la longueur de son saut ($\frac{17}{4}$) est plus grande (que $\frac{7}{3}$). Un même raisonnement est mis en œuvre à l'identique dans le contexte de la situation des feuilles de papier une trentaine d'année plus tôt par des élèves du COREM et est documenté dans Brousseau & Brousseau (1987). La technique sous-jacente à un tel raisonnement peut être formalisée de la manière suivante : $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ si $a < c$ et $b > d$ (Coulange &

²² Le contexte des « automates » a d'ailleurs pu être exploité par ailleurs à d'autres fins, y compris dans la version qui a inspiré l'auteur cité ici (Neyret, 1995), documentées de manière exhaustive dans Coulange et Train (2017).

Train, 2021) et la commensuration semble favoriser l'émergence d'une telle technique de comparaison de rationnels.

En nous intéressant plus spécifiquement à la somme de deux rationnels (la contextualisation liée à la situation des « robots » est donnée figure 14) nous avons montré qu'elle semble recouvrir quant à elle un saut de complexité important du point de vue des connaissances des élèves dans les deux types de contextes.

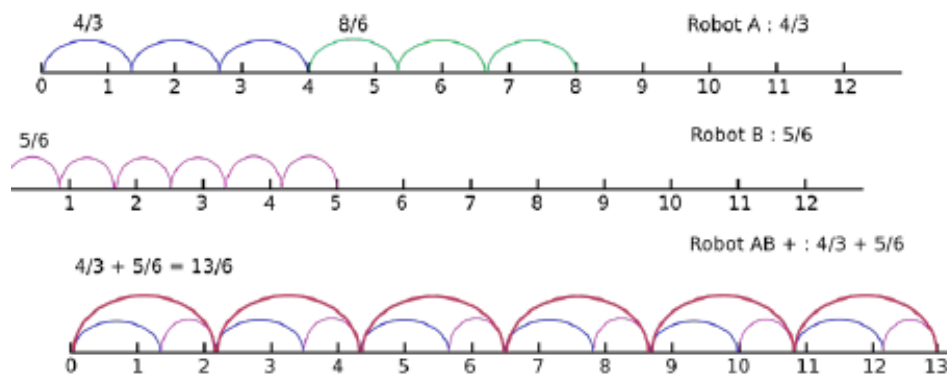


Figure 14. Somme de deux rationnels, contextualisée dans la situation « robots »

Ce saut de complexité est lié à la contrainte d'appariement (de deux feuilles d'épaisseurs différentes ou de deux sauts de longueurs différentes, voir figure 14) à identifier comme nécessitant la recherche d'un nombre (multiple) commun (de sauts ou de feuilles) au dénominateur pour calculer la somme des deux longueurs (des deux sauts ou de l'épaisseur de deux feuilles). Dans une classe de sixième observée, si un élève accède directement et spontanément au raisonnement en question et formule les calculs associés (*8 sur 6 plus 5 sur 6 égal 13 sur 6*), ce raisonnement est apparu comme difficile d'accès pour les autres élèves et sa diffusion dans la classe a été assez délicate à négocier par l'enseignant. L'étude de données filmiques provenant de la banque de données VISA (classe de CM2 observée en 1989) donne à voir que ce point a semblé tout aussi délicat à négocier pour l'enseignant de CM2 : même une fois la contrainte d'appariement dévoilée par l'enseignant (par un geste d'accolement de deux feuilles d'épaisseurs différentes, voir figure 15), la nécessité de disposer d'un même nombre de feuilles a du mal à émerger de la part des élèves.



Figure 15. Geste d'appariement de deux feuilles de papier dans la recherche de l'épaisseur de deux feuilles de papier différentes

Par ailleurs, sans disposer de données filmées, les retours d'autres enseignants expérimentateurs de la ressource « Robots » apparaissent converger vers une aisance acquise des élèves dans des tâches de multiplication et de division d'un rationnel par un entier telles que scénarisées dans la ressource « robots ». Même s'il s'agit de déclarations d'enseignants expérimentateurs, cette aisance résonne tout à fait avec celle constatée dans les cahiers d'élèves de CM2 consultés au CRDM (figure 16), en réponse au sujet d'évaluation donné figure 13.

Figure 16. Productions²⁴ d'élèves de CM2 de l'Ecole Michelet relatives au sujet d'évaluation donné en figure 13, trouvées dans les boîtes 236 de 1985/86 et 464 de 1995/96

Ce constat nous a poussés à approfondir la question du potentiel de la commensuration dans le champ multiplicatif, champ que nous avons commencé à investiguer par ailleurs dans des travaux conduits en collaboration avec C. Chambris (Chambris et al. 2021a, Chambris et al., 2021b).

4. La commensuration, un levier pour construire des relations de comparaison multiplicatives entre grandeurs ?

En s'intéressant à la manière dont sont négociées la multiplication et la division d'un rationnel par un entier dans la situation de « l'épaisseur d'une feuille de papier », nous avons mis à l'étude la tâche correspondante présente dans le sujet d'évaluation cité plus haut (voir figure 13) : cette dernière nécessitait d'évaluer la mesure de l'épaisseur d'une feuille de carton qui serait obtenue en collant 5 feuilles d'épaisseur identique, désignée par $\frac{3}{25}$ mm (ie tel que 25 de ces feuilles formeraient un tas d'épaisseur 3 mm). Un raisonnement possible à tenir prend appui sur les éléments suivants : le carton étant 5 fois plus épais que la feuille de papier alors un même nombre de feuilles de carton empilées (25 feuilles de carton) formeraient un tas d'épaisseur 5 fois plus grande (5 fois 3 mm, soit 15 mm). Un autre raisonnement peut être tenu en considérant que pour former un tas de feuilles de carton de même épaisseur (3 mm) que celui formé par 25 feuilles, il faudrait 5 fois moins de feuilles de carton (soit 5 feuilles de carton). Les techniques sous-jacentes à ces raisonnements peuvent être généralisées et formalisées par les égalités suivantes : $\frac{p}{q} \times n = \frac{p \times n}{q}$ ou $\frac{p}{q} \times n = \frac{p}{q:n}$ (à la condition que q soit un multiple de n).

Des raisonnements similaires peuvent être tenus pour la division d'un rationnel par un entier. La tâche correspondante (voir figure 13) nécessite d'évaluer la mesure de l'épaisseur d'une feuille de papier, la désignation de l'épaisseur d'une feuille de carton constituée de 8 de ces feuilles étant désignée par $\frac{7}{25}$ mm, ce qui sous-entend que 25 feuilles de carton forment un tas d'épaisseur mesurant 3 mm. Un raisonnement possible pourrait être le suivant : sachant qu'une feuille de papier est 8 fois moins épaisse qu'une feuille de carton, alors le tas qui serait composé

²⁴ Notons dans cette production d'élève, le passage d'une écriture fractionnaire $\frac{7}{25}$ à une écriture équivalente $\frac{56}{200}$ codé par une flèche unique codée « $\times 8$ ». Nous y revenons un peu plus loin.

d'un même nombre de feuilles de papier que celui constitué de 200 feuilles de carton aurait une épaisseur 8 fois moins grande (soit 56 mm divisé par 8, 7 mm). Notons qu'un tel raisonnement sous-entend la production intermédiaire d'une désignation équivalente de l'épaisseur d'une feuille de papier ($\frac{56}{200}$ mm comme équivalente à $\frac{7}{25}$ mm) précisément envisagée dans les extraits de cahiers d'élèves de la figure 16. Un autre raisonnement possible (mais non apparu dans les cahiers d'élèves consultés à ce jour) serait que sachant qu'il faudrait 8 fois plus de feuilles de papier que les 25 feuilles de carton (soit 200 feuilles de papier) pour former un tas de même épaisseur que le tas de feuilles de carton (56 mm). Là encore, les techniques sous-jacentes à de tels raisonnements peuvent être généralisées et formalisées par les égalités : $\frac{p}{q} : n = \frac{p \cdot n}{q}$ (à la condition que p soit un multiple de n) ou $\frac{p}{q} : n = \frac{p}{q \times n}$.

Une telle analyse des tâches liées à la multiplication et à la division d'un rationnel par un entier, qu'elles soient contextualisées dans l'une ou l'autre des situations (les « feuilles de papier », ou les « robots ») souligne le potentiel de la commensuration pour conceptualiser des relations multiplicatives de comparaison entre grandeurs, telles que définies dans Chambris et al. (2021a). Un tel constat nous a notamment conduits à faire un rapprochement entre l'épaisseur d'une feuille de carton (qui serait n fois plus épaisse qu'une feuille) ou la longueur d'un saut de robot (qui serait n fois plus grand qu'un autre saut) et ce que Chambris (2021) qualifie d'unités relatives (comme n fois plus grande qu'une autre).

Adopter un tel point de vue permet d'envisager ce qui se joue dans les raisonnements décrits ci-avant comme mettant en fonctionnement ce que nous avons conjointement qualifié de théorème de compensation : « n fois plus que p unités, c'est p unités chacune n fois plus grande » ou plus exactement son corollaire que nous avons formulé comme suit : « n fois plus que p unités, chacune n fois plus petite égalent p unités » (Chambris & al., 2021a). Ce qui, en revenant aux feuilles de carton avec le formalisme adopté ci-dessus pour la multiplication, donne par exemple : q feuilles de carton, chacune n fois plus épaisse qu'une feuille de papier, constitueront un tas n fois plus épais que celui constitué par q feuilles de papier de mesure p mm, soit n fois p mm.

Dans ces mêmes travaux conduits en collaboration avec C. Chambris, nous avons eu l'occasion d'apprécier la difficulté d'accès à un tel raisonnement contextualisé en prise d'appui seul de la fraction sous son acception partage de l'unité, point de vue adopté dans l'enseignement des fractions en CM2 (Chambris et al., 2021a). A l'occasion d'observations menées en classe de CM2, une élève aura produit le raisonnement suivant relativement à une tâche de comparaison de deux fractions : ainsi, pour comparer $\frac{3}{7}$ et $\frac{9}{21}$, elle a déclaré que les 21èmes étant 3 fois plus petits que les 7èmes, il en fallait 3 fois plus, soit 9 pour conclure à l'égalité des deux fractions données. L'enseignante avait tenté de diffuser ce raisonnement aux autres élèves, sans succès, contrainte de négocier « à la baisse » en lui substituant progressivement un autre type de raisonnement (lié à des « groupes égaux » de trois 21èmes dans un 7ème) visiblement plus accessible et partagé dans la classe observée.

Nous faisons aujourd'hui l'hypothèse que la commensuration facilite l'accès à un tel théorème de compensation et à son corollaire, potentiellement convoqué dans les types de raisonnements décrits plus haut. Nous pensons, en effet, que les relations de comparaison multiplicative entre des grandeurs mesurées sont d'emblée au cœur des situations didactiques liées à la commensuration. Ainsi si l'on considère les nombres-grandeurs mesurées en jeu (nombre de feuilles, épaisseurs de tas) comme des unités relatives, des relations de comparaison multiplicative sont convoquées dès le départ sur des couples de telles « unités » (n fois plus de feuilles qui forment des tas d'épaisseur n fois plus grandes) dans la production de codages correspondant à des écritures fractionnaires équivalentes.

Cette relation de comparaison multiplicative entre des couples de grandeurs mesurées a d'ailleurs attiré notre attention sur des usages des ostensifs « flèches » dans les extraits de cahier d'élèves trouvés dans les ressources du CRDM. Ces ostensifs « flèches » présentent de fait des aspects mouvants. Ces relations sont désignées tantôt par une unique flèche opérant sur un couple de nombres (comme le montre l'extrait de cahier en haut à gauche de la figure 17), tantôt plus classiquement par deux flèches opérant sur chaque membre d'un couple de nombres (comme le montre l'extrait de cahier de droite de la figure 17), selon différentes périodes d'expérimentation, mais aussi parfois sur un même cahier, selon les exigences professorales exprimées (comme le montre le deuxième extrait de cahier de gauche sur la figure 17). Si la flèche unique peut surprendre et poser question (car créant potentiellement la confusion avec une autre flèche qui coderait la multiplication d'un rationnel par un entier), elle peut paraître cohérente avec le fait que c'est bien la même relation de comparaison multiplicative qui opère sur un couple de nombres qui est considérée²⁵.

Figure 17. Productions d'élèves de CM2 de l'Ecole Michelet trouvées dans les boîtes 464 de 1995/96 et 320 de 1989/90

En résumé, nous requestionnons ce qui se joue du point de vue de la construction de relations multiplicatives entre grandeurs mesurées au regard de ces différents phénomènes dont la reproductibilité semble avérée et ce, dès les premières situations didactiques, qu'elles soient contextualisées par les « robots » ou les « feuilles de papier ». Notons au passage que du point de vue des unités relatives, on pourrait requalifier le geste inhérent à la commensuration comme la recherche d'une « sur » - unité (relative) commune par opposition au fractionnement qui consisterait à rechercher une « sous » - unité (relative) commune. Les constats ainsi faits sur les relations multiplicatives entre grandeurs mesurées, considérées comme unités relatives, nous ont conduit à explorer d'autres ressources, également rendues accessibles au CRDM, des enregistrements audios des interventions de Guy Brousseau auprès des différents acteurs enseignants de l'école, impliqués au sein du COREM. Des extraits de propos tenus sur le produit de nombres entiers ont particulièrement attiré notre attention :

« Saisir le rapport entre 3 et 12, par exemple combien de fois 3m dans 12m ? Combien de paquets de 3 gâteaux je fais avec 12 gâteaux ? Je fais sur 3 pour aller à 12 ce que je fais à 1 pour aller à 4 [...] Si je veux transformer ce 4 qui est un rapport en une mesure, ça veut

²⁵ D'ailleurs dans une des expérimentations conduites avec les « robots », un enseignant aura lui aussi temporairement fait usage de cette unique flèche opérant doublement sur le couple de nombres – grandeurs mesurées en jeu avant que de se questionner sur la pertinence d'un tel ostensif au regard de confusions possibles avec le produit d'un rationnel par un entier.

dire que je dois regarder ce 4 avec une unité, comme ayant une unité.... Pour passer de 3 à 12, il faut faire 4 quelque chose comme pour passer de 1 à 4 » (Brousseau, entretien avec les acteurs du COREM – enregistrement audio archivé au CRDM)

Ce discours nous a paru résonner fortement avec ce que, depuis, Chambris (2021) a théorisé en lien avec la multiplication, en prise d'appui sur le traité de Reynaud (1821) même si tout comme dans ce traité, le rôle des unités reste assez implicite. De notre point de vue, ces propos tenus au COREM sont en particulier des indices du produit appréhendé d'emblée comme opérant sur des couples de nombres (de 1 à 4, de 3 à 12). Un tel fait est d'ailleurs particulièrement visible dans la production d'écritures fractionnaires équivalentes en place dans la situation des feuilles de papier où l'on opère d'emblée avec un « multiplicateur commun » sur des couples de grandeurs mesurées (21 mm – 210 mm et 10 feuilles – 100 feuilles, le multiplicateur commun étant « x 10 », pour reprendre un des exemples figurant dans la figure 17). Ceci nous paraît aujourd'hui possiblement une des clés de la conceptualisation de relations multiplicatives entre nombres - grandeurs mesurées (Coulange & Train, 2021).

De tels rapprochements entre unités (relatives), relations de comparaison multiplicative et commensuration nous semblent ouvrir aujourd'hui encore d'autres perspectives. Si dans l'ingénierie des feuilles de papier, le produit et le quotient de deux rationnels n'ont jamais été envisagés en prise d'appui sur la commensuration²⁶, il nous apparaît aujourd'hui, en rapprochant les unités (relatives) de la commensuration, que l'étude de la question « combien de fois la longueur du saut du robot B dans la longueur du saut du robot A ? » (ou, de façon transposée à la situation de l'épaisseur des feuilles de papier, combien de fois l'épaisseur de la feuille de papier A dans l'épaisseur de la feuille de papier B ?) serait susceptible de conduire à une utilisation étendue de la commensuration (figure 18).

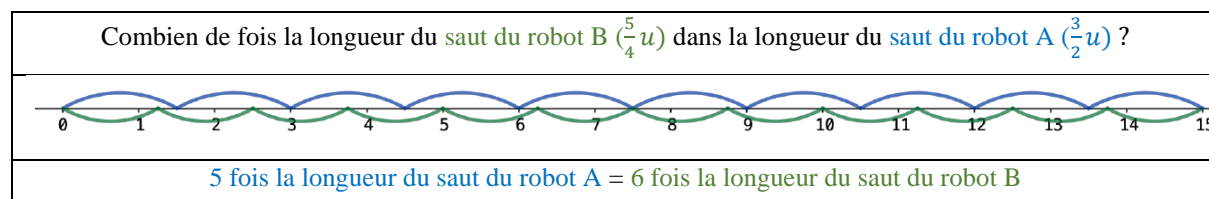


Figure 18. Une piste pour la division d'un rationnel par un rationnel en prise d'appui sur la commensuration

Il s'agirait ainsi de donner à voir qu'en 5 sauts du robot A, la distance parcourue est identique à celle parcourue en 6 sauts du robot B. A la condition de considérer comme « nouvelle » unité (relative) la longueur du saut du robot B ($\frac{5}{4}u$), ceci peut permettre de conclure que la longueur du saut du robot A égale $\frac{6}{5}$ fois la longueur du saut du robot B, soit $\frac{6}{5}$ fois ($\frac{5}{4}u$).

Ainsi l'obtention du résultat d'une division d'un rationnel par un rationnel nous paraît aujourd'hui envisageable dans une forme de continuité du geste de commensuration (appréhendé comme la recherche d'une (sur)unité commune) à la condition toutefois de négocier le changement d'unité (relative) sous-jacent²⁷. Si le produit pourrait dès lors être construit de manière indirecte comme une opération réciproque de la division, la question d'un chemin plus direct vers la multiplication de deux rationnels en prise d'appui sur la commensuration reste toutefois ouverte...

²⁶ Une telle trajectoire nous est d'ailleurs apparue délicate voire impossible dans nos premières investigations.

²⁷ Une telle piste est actuellement mise à l'étude dans la thèse en cours de A. Ovide – des premiers résultats de cette thèse semblent confirmer le potentiel de la commensuration en termes de relations de comparaison multiplicative entre grandeurs mesurées et même de composition de telles relations (Coulange & al., accepté), ce qui nous fait penser que nous nous rapprochons peut-être du produit...

5. En guise de conclusion intermédiaire

Notre trajectoire d'étude nous aura ainsi ramenés à considérer un empan majeur de l'œuvre de Brousseau, à savoir Rationnels et décimaux (Brousseau & Brousseau, 1987). Parce que par ailleurs, plusieurs aspects de cette ingénierie avaient été largement documentés (Brousseau et al. 2014, Brousseau, 1998), investir une telle trajectoire, à la recherche d'inédit et de nouveautés, pouvait paraître quelque peu risqué. Il nous semble aujourd'hui que cette trajectoire aura été fructueuse, jusqu'à largement participer à « ressourcer » notre propre recherche de chercheurs en didactique des mathématiques. De nouvelles voies de recherche nous apparaissent aujourd'hui ouvertes dans les rapprochements faits entre commensuration, unités (relatives) (Chambris, 2021) et relations de comparaison multiplicatives entre nombres - grandeurs mesurées (Coulange & Train, 2021). Certaines d'entre elles pourraient notamment mieux éclairer encore le potentiel de la commensuration en matière de champ conceptuel multiplicatif.

Si les ressources archivées au CRDM auront permis de nourrir fortement notre trajectoire, elles auront été également tout à fait précieuses pour (re)problématiser des questions d'ordre curriculaire, y compris attachées à des *curricula* contemporains. La contribution de D. Fregona et P. Orus aura permis de souligner un tel fait, davantage que notre propre contribution dans le cadre de ce séminaire. Pour autant, les expérimentations que nous avons conduites auront permis à des enseignants et des élèves de sixième de rencontrer le point de vue commensuration après que ces derniers avaient, conformément au curriculum actuel, fréquenté en amont le point de vue fractionnement des rationnels. Ceci n'est pas sans soulever son lot de questions nouvelles – que nous n'avons ici pas l'occasion d'approfondir – mais qui démontre clairement les potentiels apports d'une œuvre comme Rationnels et décimaux comme levier d'une réflexion didactique, y compris sur l'organisation du curriculum scolaire actuel.

IV. PERSPECTIVES LIEES AU CRDM – GUY BROUSSEAU

Nous espérons qu'avoir rendu compte de nos deux trajectoires d'étude respectives, celle de D. Fregona et P. Orus sur la division/multiplication, puis celle de L. Coulange et de G. Train sur les décimaux/rationnels puisse permettre à tout-e chercheur-se-s didacticien-ne-s d'envisager en quoi et comment le fonds documentaire CRDM-Guy Brousseau peut s'ériger en outil précieux pour ressourcer son activité de recherche, et ce à bien des égards. Le CRDM offre la possibilité unique d'un « retour aux sources » ancré dans la théorie des situations didactiques, en donnant accès à une grande variété de matériaux liés aux ingénieries de recherche conçues dans le cadre de cette théorie. Rappelons d'ailleurs que ces ingénieries ont largement contribué au développement même de cette théorie, fondatrice du champ de la didactique des mathématiques que Brousseau appréhendait comme une « science phénoménotechnique ».

Au potentiel avéré de telles ressources pour l'activité de recherche même contemporaine en didactique des mathématiques, s'ajoutent des conditions particulièrement propices au travail scientifique car le CRDM-Guy Brousseau, c'est aussi une équipe constituée de chercheurs, Pilar Orus, Pablo Gregori et d'une documentaliste, Paris Lidon, qui s'occupent avec passion de ce fonds documentaire et accueillent chaleureusement tout-e-s chercheur-se-s intéressé-e-s.

C'est pourquoi si vous êtes vous-mêmes intéressé-e-s, nous vous invitons à ne pas hésiter à contacter cette équipe, si vous souhaitez vous-même accéder à ces ressources quasi-

inépuisables en matière de recherches qui restent toujours à conduire en didactique des mathématiques, en consultant les annexes de ce texte qui apportent quelques précisions sur l'organisation d'une telle venue.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- BERTHELOT, R. et GRESILIER, M. F. (1985) : *La multiplication au CE1. Quelques apports des recherches en didactique aux leçons de tous les jours. Document pour les enseignants*. Université et IREM de Bordeaux.
- BOËT, J., BOUCULAT, N., BOURSEY, E., CHANIAC, C., CHARNAY, R., DERAMECOURT, G., DOUAIRE, J., GUILLAUME, J-C., HUBERT, C., LALLEMENT, M-H., NOYARIE, D., PORCHERON, J-L., RAMUS, M., VALENTIN, D. (1993). *ERMEL, Apprentissages numériques et résolution de problèmes. Cours élémentaire (première année)*. Hatier.
- BROUSSEAU, N. (1987). *La mesure en cours moyen première année*. Université de Bordeaux, IREM d'Aquitaine.
- BROUSSEAU, G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux, *Recherches en Didactique des Mathématiques* (vol. 2.1). La Pensée Sauvage.
- BROUSSEAU, G. (1997). *Cours donné lors de l'attribution à Guy Brousseau du titre de Docteur Honoris Causa de l'Université de Montréal*. Disponible sur les archives de la CFEM en ligne : <http://www.cfem.asso.fr/actualites/archives/Brousseau.pdf/view>
- BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des situations didactiques (Didactique des mathématiques 1970-90)*, Grenoble, La Pensée Sauvage.
- BROUSSEAU, G., & BROUSSEAU, N. (1987). *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*. Université de Bordeaux, IREM d'Aquitaine.
- BROUSSEAU, G., BRIAND, J., BROUSSEAU, N., GRÉSILLER, M., GRESLARD, D., LACAVE-LUCIANI, M., TEULE-SENSACQ, P. & VINRICH G. (1985). *La division à l'école élémentaire. Compte rendu des situations d'enseignement réalisées avec des enfants de CE2, CM1 et CM2*. Université et IREM de Bordeaux. <http://hdl.handle.net/10234/143287>
- BROUSSEAU, G. (2010). Le calcul humain des multiplications et des divisions de nombres naturels, *Grand N*, 85, 13-41.
- BROUSSEAU, G., ORUS, P., FREGONA, D. & GREGORI, P. (2012). Los recursos del Centre pour l'observation et la recherche en didactique des mathématiques (COREM), posible cantera de datos para el ASI. Un ejemplo: la enseñanza de la división en la escuela primaria, *VI Colloque International Analyse Statistique Implicative (A.S.I.)*, Régnier, Bailleul, Gras (Eds.) Caen (France) 7-10 Novembre, pp. 307-334.
- BROUSSEAU, G., BROUSSEAU, N. & WARFIELD, V. (2014). *Teaching fractions through situations: A fundamental experiment*. Springer.
- BROUSSEAU, G., GRESLARD, D. & SALIN, M.-H. (2015). L'accès au milieu scolaire pour l'élaboration et l'expérimentation d'ingénieries didactiques de recherche : conditions et contraintes. Le Centre d'Observation et de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques. In A.C Mathé & E. Mounier, *Actes du séminaire national 2014* (pp. 66-79). IREM de Paris.
- CHAMBRIS, C. (2008). *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20^e siècle. Connaissances des élèves actuels*. Thèse de doctorat, Université Paris Diderot, Paris 7. Disponible en ligne : <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00338665/en/>
- CHAMBRIS, C. (2021). Raison d'être des grandeurs. Le cas de l'arithmétique à l'école élémentaire. In H. Chaachoua, A. Bessot, B. Barquero, L. Coulangue, G. Cirade, P. Job, A.C. Mathé, A. Pressiat, M. Schneider, & F. Vandebrouck (Eds.), *Actes de la 20^{ième} école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 169-195). La Pensée Sauvage.
- CHAMBRIS, C., COULANGE, L., RINALDI, A.M., & TRAIN, G. (2021a). Unités et systèmes d'unités pour l'enseignement et l'apprentissage des nombres et du calcul à l'école. Contribution à un état des lieux - potentialités. In H. Chaachoua, A. Bessot, B. Barquero, L. Coulangue, G. Cirade, P. Job, A.C. Mathé, A. Pressiat, M. Schneider, & F. Vandebrouck (Eds.), *Actes de la 20^{ième} école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 373-396). La Pensée Sauvage.
- CHAMBRIS, C., COULANGE, L. & TRAIN, G. (2021b). Measurement units and numeration units: what reveals the introduction of a "mixed" table in decimals teaching. *ICME 14*, Jul 2021, Shanghai (online), China. hal-03452940
- COULANGE, L. & TRAIN, G. (2015). Quelle(s) extension(s) d'un système de numération des nombres entiers aux nombres décimaux ? *Actes du XXIII^e colloque de la CORFEM*, Nîmes. Disponible en ligne : https://www.univ-irem.fr/corfem/Actes_2016_02.pdf
- COULANGE, L. & TRAIN, G. (2017). Continuités et ruptures de l'enseignement des fractions au cycle 3 - Quelles perspectives ? In Lebot B. & Vandebrouck F. (Eds.), *Mathématiques en cycle 3 – Actes du colloque*, IREM de Poitiers, 143-156. Disponible en ligne : <http://irem.univ-poitiers.fr/colloque2017/ressources/Actes.pdf>
- COULANGE, L. & TRAIN, G. (2019). Teaching and learning decimal numbers: the role of numeration units. In U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen, & M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp.403-410). Utrecht, the Netherlands:

- Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME. Disponible en ligne : http://www.mathematik.tu-dortmund.de/~prediger/ERME/CERME11_Proceedings_2019.pdf
- COULANGE, L. & TRAIN, G. (2021). *Reasoning and comparing fractions Potentials of commensuration meaning*. [Communication]. 9th ERME Topic Conference: Perspectives on conceptual understanding of flexibility and number sense in arithmetic, Leeds.
- COULANGE, L. OVIDE, A. & TRAIN, G. (2022). *Multiplicative comparison of fractions: potentials and limits of commensuration meaning*, [Communication]. 12th CERME Topic Conference, Bolzano. Disponible en ligne : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03746627v2>
- ERMEL (1978). *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire CM*, Editions Hatier.
- ERMEL (1993). *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire CM*, Editions Hatier.
- ERMEL (2005). *Apprentissages numériques et résolution de problèmes CM*, Editions Hatier.
- FREGONA, D. & ORUS, P. (2012a). Enseñar la división en la escuela primaria: un problema de investigación y de formación docente, *XXXV REM*, Córdoba, 6 al 8 de agosto. Disponible en ligne : http://www2.famaf.unc.edu.ar/rev_edu/documents/vol_28/28-1_FregonaOtros-EnsenarDivision.pdf
- FREGONA, D. & ORUS, P. (2012b). Cómo enseñar la división en la escuela primaria. Un ejemplo de utilización de los recursos del CRDM-GB para la investigación y la formación del profesorado”, *XVI Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, 20-22 de septiembre, Universidad Internacional de Andalucía (Baeza, Jaén). Disponible en ligne : <http://repositori.uji.es/xmlui/handle/10234/93450>.
- FREGONA, D. & DELPRATO, F., ORUS, P. (2013). Desafíos en los procesos de estudio de matemática con adultos de baja escolaridad. *Actas IV CITAD* (Toulouse, Francia). Disponible en ligne : http://citad4.sciencesconf.org/conference/citad4/pages/Citad4_Preactes_Axe4.pdf
- FREGONA, D. & BLOCK, D. & ORUS, P. (2017a). Teoría das Situações Didáticas e Engenharia Didática”, Oficina 3 A, *Actas 1º Simposio Latinoamericano de Didáctica de la Matemática*.
- FREGONA, D. & ORUS, P. (2017b). [El Centro de Recursos en Didáctica de la Matemática Guy Brousseau: un sitio para explorar prácticas de enseñanza de las matemáticas](#) . cap. de libro *Formación de profesores que enseñan matemática y prácticas educativas en diferentes escenarios : aportes para la educación matemática*. pp.(109-132) Analía Cristante ... [et al.] ; editado por Dilma Fregona ... [et al.]. Ed.- Córdoba : Universidad Nacional de Córdoba (Argentina).
- FREGONA, D. & ORUS, P., GREGORI P. (2018). *Quelques aspects de la géométrie enseignée et apprise au COREM (CMI-CM2) – Perspectives pour le cycle 3*, communication au 25^e colloque de la CORFEM, Bordeaux. http://repositori.uji.es/xmlui/bitstream/handle/10234/182275/CORFEM_2018_orus_CRDM.pdf?sequence=1&isAllowed=y
- FREGONA, D., PETICH, A., PORRAS, M. & ORUS, P. (soumis). De diferentes designaciones de números a una técnica de cálculo escrito de multiplicaciones en la escuela primaria.
- NEYRET, R. (1995). *Contraintes et détermination des processus de formation des enseignants : nombres décimaux, rationnels et réels dans les IUFM*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble. Disponible en ligne : <https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-03194180>
- REYNAUD, A. (1821). Notes sur l'arithmétique. In BEZOUT E., REYNAUD, A. *Traité d'arithmétique à l'usage de la marine et de l'artillerie, 9e édition*. Consulté sur Internet le 4 décembre 2021, <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k201342q/f2.table>
- TEMPIER, F. (2013). *La numération décimale de position à l'école primaire. Une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource*. Thèse de doctorat, Université Paris Diderot, Paris 7. Disponible en ligne : <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00921691>
- VERGNAUD, G. (1990). La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol.10 n°2-3, pp.133-170, éd. La Pensée Sauvage.

ANNEXES

Annexe 1 (responsables du CRDM-GB à contacter pour organiser la consultation du fonds.)



Annexe 2 (page d'accueil du site de l'IMAC)

<https://www.uji.es/institucional/estructura/instituts/imac/>

The screenshot shows the IMAC website homepage. At the top, there is a navigation bar with categories like 'Future students', 'UJI students', 'PDI-PAS', 'AlumniSAUJI', 'Companies and institutions', 'Library', and 'Coronavirus'. Below this is a secondary navigation bar with dropdown menus for 'UJI', 'Admission', 'Studies', 'International', 'Research', 'Culture and sports', 'Virtual Office', and 'Transparency'. The main content area features the IMAC logo and the text 'Instituto Universitario de Matemáticas y Aplicaciones de Castellón · IMAC'. A contact section provides the address: 'Escola Superior de Tecnologia i Ciències Experimentals - Universitat Jaume I'. On the right side, there is a vertical menu with options: 'Home', 'Main Page IMAC', 'IMAC', 'Institute', 'Activities', 'Seminars', and 'CRDM-Guy Brousseau'.

Annexe 3 (page d'accueil du CRDM-GB)

<https://www.uji.es/institucional/estructura/instituts/imac/base/crdm/presentacio/>

The screenshot shows the CRDM-Guy Brousseau website homepage. At the top, there is a navigation bar with social media icons, a search bar, and dropdown menus for 'Profile', 'English', and 'Tools'. Below this is a secondary navigation bar with categories like 'Studies', 'Research and innovation', 'International', 'UJI', and 'University life'. The main content area features the CRDM-Guy Brousseau logo and the text 'CRDM-Guy Brousseau'. A date and sharing information bar shows '18/06/2021 | imac' and social media icons. The main text states: 'The aim of this site is to spread the existence of the Resource Center for the Didactics of the Mathematics Guy Brousseau (CRDM-Guy Brousseau) and the documentation it stores, as well as publicize the different possibilities of access to them by researchers in Didactics of Mathematics.'

Annexe 4 (page d'accès aux bilans et autres ressources du fonds)

<https://www.uji.es/institucional/estructura/instituts/imac/base/crdm/inventari/>

The screenshot shows the CRDM-Guy Brousseau inventory page. At the top, there is a date and sharing information bar: '10/02/2020 | imac' and social media icons. The main text states: 'The Inventory allows to consult (on-line) the resources of the CRDM-Guy Brousseau, by courses and school levels, by contents curriculares mathematicians or by investigations in DM. The Centre puts these resources to disposal of the researchers interested:'. A list of resources is provided:

- In a room of surgery in the Library of the UJI: to access to the originals, respecting the uniqueness and classification of the Resources and locating the productions by the levels and school courses.
- On-line: through the digital resources of the repository of the Library of the Universitat Jaume I of Castellón (UJI), in the measure that go digitalizando. In the actuality there is three subcolecciones:
 - Didactic material School J. Michelet: Didactic materials elaborated by students and masters of the School J. Michelet (Talence, Bordeaux).
 - Productions CDRM_GB: Articles, reports and communications elaborated from the material of the CRDM-GB.
 - Productions of the COREM: scientific Publications of the Centre pour l'Observation et la Recherche of l'Enseignement give Mathématiques (COREM).
- The near of 450 videos that have been able to be saved (the anterior to 1985 can be read at present with special devices and some have lost) conserve in the frame of the Project VISA of l'Université de Lyon and will be able to be consulted progressively in IFE-ENS-Lyon, or presencialmente in the UJI, when it need complete the documentation "paper" of some observation and do not have of the digitalisation in the database of VISA.

 The procedure section states: 'Procedure: To be able to consult the resources of the CRDM-Guy Brousseau, the Library of the Universitat Jaume I, and the Institut de Matemàtiques i Aplicacions de Castelló (IMAC) have established of common agreement the criteria and the procedure of said surgery, to make through the form, transacting it through the people of contact of the CRDM.'

Annexe 5 (bibliothèque de consultation du fonds CRDM-GB)



ÉTUDE DE LA CONSTRUCTION DU NOMBRE DANS LA PÉDAGOGIE MONTESSORI

Marie-Caroline CROSET

Université Grenoble-Alpes, France

Marie-Caroline.Croset@univ-grenoble-alpes.fr

Marie-Line GARDES

HEP Vaud, Suisse

marie-line.gardes@hepl.ch

Résumé

Actuellement en France, l'intérêt pour les pédagogies alternatives et en particulier pour la pédagogie Montessori ne cesse de se développer. L'argument des mauvais résultats aux études internationales est mis en avant pour justifier ce regain d'intérêt, en particulier par les enseignants. Cependant, du côté de la recherche, peu d'études se sont intéressées aux effets de la pédagogie Montessori sur les apprentissages. Dans ce séminaire, nous présenterons les résultats d'une recherche visant à évaluer l'impact de la pédagogie Montessori en maternelle sur des compétences cognitives, sociales et académiques. La méthodologie de recherche consiste en une étude séquentielle, transversale et longitudinale, randomisée sur un échantillon d'enfants dans une école maternelle publique de milieu défavorisé.

Au cours de ce projet, nous nous sommes interrogées sur l'existence de spécificités de l'enseignement dans la pédagogie Montessori. Nous avons alors porté un regard didactique sur l'enseignement d'un domaine spécifique, celui de la construction du nombre. Nous présenterons donc aussi le résultat de cette étude didactique, conduite avec le modèle T4TEL et visant à caractériser l'enseignement de ce domaine dans l'Institution Montessori.

Cette recherche a été l'occasion de croiser les regards de psychologues en cognition numérique et de didacticiens des mathématiques.

RÉFÉRENCES

- CROSET, M.-C., & GARDES, M.-L. (2019). Une comparaison praxéologique pour interroger l'enseignement du nombre dans l'institution Montessori. *Recherches en didactique des mathématiques*, 39/1, 51-96
- COURTIER, P., GARDES, M.-L., VAN DER HENST, J.-B., NOVECK, I., CROSET, M.-C., EPINAT-DUCLOS, J., LEONE, J. & PRADO, J. (accepted). Effects of Montessori education on the academic, cognitive, and social development of disadvantaged preschoolers: a randomized controlled study. *Child Development*.
- GARDES, M.-L. ET COURTIER, P. (2018). Quelle manipulation, représentation et communication dans les ateliers Montessori de première numération ? *Grand N*, 101, 83-105.

RESSOURCES NUMÉRIQUES POUR L'ÉDUCATION MATHÉMATIQUE : ÉVALUATION, QUALITÉ ET APPROPRIATION

Jana TRGALOVÁ

Haute école Pédagogique du canton de Vaud

jana.trgalova@hepl.ch

Résumé

Ce texte présente notre travail de synthèse HDR qui porte sur les questions relatives aux ressources numériques pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Il s'agit dans un premier temps de faire un tour d'horizon des travaux de recherche nationaux et internationaux pour dégager les différentes conceptualisations de la notion de ressource numérique. Nous abordons ensuite deux problématiques : celle de l'évaluation de la qualité de ressources numériques, en appui notamment sur nos travaux menés sur des ressources de géométrie dynamique, et celle d'appropriation de ressources numériques par des enseignants, appuyée sur la perspective instrumentale.

Mots clés

Ressources numériques, enseignement et apprentissage des mathématiques, qualité des ressources, appropriation

I. INTRODUCTION : RESSOURCES EDUCATIVES

Depuis une vingtaine d'années, la communauté de recherche éducative porte un intérêt accru aux ressources et aux interactions des enseignants avec ces dernières. En attestent par exemple le développement de l'approche documentaire du didactique (Gueudet et Trouche, 2008) et la tenue de la conférence internationale Re(s)ources 2018 à Lyon. Selon Adler (2019), cet intérêt est alimenté par trois sources principales : la diffusion d'initiatives de réforme dans l'enseignement des mathématiques et l'introduction de nouveaux textes curriculaires de toutes sortes, une offre grandissante de ressources numériques, notamment sur Internet, et le développement professionnel des enseignants résultant de leurs interactions avec des ressources. Notons que le contexte scolaire adopte également le terme de ressource ; par exemple les documents d'accompagnement des programmes sont désormais appelés ressources d'accompagnement du programme.

Dans cette section introductive, nous proposons un tour d'horizon de la notion de « ressource » et de celle de « ressource numérique » pour dégager des problématiques spécifiques liées à ces dernières. Certaines de ces problématiques sont abordées dans les sections suivantes : la question de la qualité de ressources numériques (section II) et celle de l'appropriation de ressources numériques par des enseignants de mathématiques (section III). La dernière section IV propose quelques conclusions et perspectives de recherche.

1. Ressources éducatives

Dans sa revue de littérature, Reverdy (2014) pointe la « complexité de la notion de ressource » qu'elle aborde à travers « les différentes définitions de ce que peut être une ressource pour enseigner, les différents types de ressources qui existent [...] et les usages que les enseignants en font au quotidien » (p. 3). Curieusement, on ne trouve aucune définition explicite de ressource ; à la place, plusieurs « découpages » sont mentionnés, par exemple ressources matérielles, humaines et culturelles, en référence aux travaux d'Adler (2000) ou encore la classification de ressources matérielles en ressources imprimées, ressources numériques et autres ressources parmi lesquelles sont distingués « des objets de la vie quotidienne utilisés à des fins pédagogiques ou des objets didactiques [...] construits en vue d'un apprentissage précis » (Reverdy, 2014, p. 2). Ces découpages font transparaître la difficulté à cerner les ressources utilisées par des enseignants, puisque tout objet peut potentiellement être une ressource du moment où un enseignant s'en sert pour faire son enseignement. D'autre part, dresser une cartographie de ressources existantes est une tâche complexe du fait qu'une multitude de critères peuvent être pris en compte conduisant à des classifications diverses et variées, par exemple le support (papier, numérique), la provenance (institution, association, etc.) ou encore l'usage qui en est fait (pour la formation, pour la classe, etc.).

Dans un autre contexte, en s'interrogeant sur les difficultés que les enseignants québécois rencontrent dans leurs efforts d'intégration des technologies numériques, Bibeau (2005) déplore dans un premier temps une multitude de dénominations relatives aux ressources qu'il qualifie de didactiques :

Une première difficulté concerne les ressources didactiques. Matériel scolaire, matériel pédagogique, matériel didactique, matériel complémentaire d'usage collectif [...], matériel d'apprentissage, [...] ressources d'enseignement et d'apprentissage (REA), "objet d'apprentissage", voilà autant d'appellations que l'on utilise pour identifier les ressources éducationnelles, culturelles et informationnelles que l'enseignant utilise pour enseigner et l'élève pour apprendre²⁸

Ce constat l'a conduit à proposer sa propre vision de ce que peut être une ressource :

[...] pratiquement toute donnée, toute information, toute banque de ressources, tout document accessible sous format imprimé (manuel scolaire, livre de lecture, journal ou magazine, etc.), sous format analogique (cassette audio ou vidéo) ou sous format numérique (disquette, cédérom, DVD, Internet), puissent servir de matériel pédagogique pour l'apprentissage. Tous ces documents [peuvent] être considérés comme des ressources d'enseignement et d'apprentissage.²⁹

Or, cette proposition a été formulée en lien avec une des problématiques abordées par l'auteur concernant l'indexation des ressources pour pouvoir « les classer, les partager, les retrouver, les réutiliser et pour éviter de les dupliquer inutilement ». Ainsi, ne sont considérées comme ressources que des « objets » matériels, imprimés, analogiques ou numériques.

Une perspective différente est adoptée par Gueudet et Trouche (2011) au sein de l'approche documentaire du didactique ; les auteurs confèrent à la notion de ressource

une acception très large : un manuel scolaire, les programmes officiels, un logiciel, un site web, peuvent être, bien entendu, des ressources pour le professeur. Mais une copie d'élève, un conseil donné par un collègue... constituent également des ressources, au sens attribué à ce terme par (Adler 2000) : ce qui re-source l'activité et le développement professionnel des professeurs (p. 147).

²⁸<https://www.epi.asso.fr/revue/articles/a0511a.htm>

²⁹Ibid.

Cette « acception très large » s'impose pour pouvoir étudier le « travail documentaire » de l'enseignant qui est défini comme un travail de

conception (qui se nourrit des ressources disponibles) de la matière de son enseignement, pour lui, pour les élèves, pour les collectifs et les institutions auxquels il participe (Gueudet et Trouche, 2008, p. 7).

Dans cette large palette de ressources, une attention particulière est portée dans la littérature, notamment anglo-saxonne, aux ressources institutionnelles qui relèvent du curriculum. Ces ressources, nommées curriculum materials (Remillard, 2005), comprennent des textes de programmes, des manuels, des guides pédagogiques ou encore des logiciels éducatifs. Le terme plus générique d'*instructional material* ou plus récemment *instructional resources* (Remillard, 2018) désigne « tools provided to, appropriated by, or generated by teachers to guide or support instruction » (p. 70).

Ce panorama d'approches de ressources montre la complexité à circonscrire précisément la notion de ressource. Dans nos travaux, comme nous allons voir, nous étions amenés à considérer des ressources particulières dont nous préciserons la nature. Pour cette raison, nous ne cherchons pas à prendre position par rapport à ces diverses approches.

Une attention particulière est portée aux ressources numériques du fait qu'elles offrent « de nombreuses opportunités pour enrichir et diversifier les enseignements et les apprentissages, pour prendre en compte la diversité des élèves »³⁰ et qu'elles sont devenues quasiment incontournables aujourd'hui. La section suivante est consacrée à ce type de ressources.

2. Ressources numériques

Dans le milieu éducatif en lien avec le numérique, nous ne pouvons pas nous intéresser au concept de ressource numérique sans considérer le concept d'*objet d'apprentissage* (learning object). Le concept d'objet d'apprentissage est apparu dans le contexte d'apprentissage en ligne (e-learning), en référence au paradigme orienté objet de l'informatique des années 1960 qui a fortement valorisé la création de composants réutilisables (Del Moral & Cernea, 2005). Bien qu'il n'y ait pas de consensus sur la définition d'un objet d'apprentissage, la réutilisabilité semble être sa principale caractéristique. Un objet d'apprentissage est défini par IEEE Learning Technology Standards Committee comme “any entity, digital or non-digital, that can be used, re-used, or referenced during technology supported learning”³¹. Considérant cette définition trop large, Wiley (2002) propose de définir un objet d'apprentissage comme “any digital resource that can be reused to support learning” (p. 6). L'auteur précise que cette définition comprend tout ce qui peut être diffusé par Internet ; des images, des vidéos, des animations ou des applications disponibles en ligne sont des exemples de « petits » objets d'apprentissage, des pages web entières qui combinent divers média sont des exemples d'objets d'apprentissage plus grands. L'expression *ressource numérique* (digital resource) n'est cependant pas définie ; elle apparaît comme un terme générique englobant tout ce qui peut être stocké, partagé ou diffusé sur un support numérique et en particulier via internet.

En dehors des problématiques d'apprentissage en ligne, l'intérêt porté aux ressources numériques éducatives est motivé notamment par l'hypothèse que la transition du papier au numérique, du fait de son développement massif, va bouleverser les pratiques des enseignants : le numérique permet aux enseignants de prolonger le travail au-delà de la salle de classe, de réutiliser les ressources disponibles pour concevoir de nouvelles activités et de nouveaux supports en complément de manuels, de s'engager dans de nouvelles formes de collaboration

³⁰<https://eduscol.education.fr/cid119187/presentation-acquerir-des-ressources-numeriques-pour-l-ecole.html>

³¹<https://www.ieeeltsc.org/working-groups/wg12LOM/lomDescription/>

avec d'autres enseignants, etc. Il est cependant difficile de trouver une définition opérationnelle de ressource numérique. Le Centre collégial de développement de matériel didactique³² définit des ressources numériques, nommées *ressources d'enseignement et d'apprentissage* (REA), comme étant « un cours, un programme ou une partie de cours réalisés sur support multimédia et faisant appel à la technologie informatique (TIC) » (CCDMD, 2003, p. 1). Cette définition est accompagnée d'exemples de REA : « des simulations, un dictionnaire informatisé ou diverses banques de données, des exercices, un répertoire de capsules vidéo ou des situations de résolution de problèmes accessibles à partir de cédéroms, de DVD ou d'Internet » (ibid.). La définition proposée par Bibeau (2005) repose également sur l'énumération d'objets numériques faisant partie de l'ensemble des ressources numériques : les ressources numériques pour l'éducation correspondent à

l'ensemble des services en ligne, des logiciels de gestion, d'édition et de communication (portails, logiciels outils, plates-formes de formation, moteurs de recherche, applications éducatives, portfolios) ainsi qu'aux données (statistiques, géographiques, sociologiques, démographiques, etc.), aux informations (articles de journaux, émissions de télévision, séquences audio, etc.) et aux œuvres numérisées (documents de références générales, œuvres littéraires, artistiques ou éducatives, etc.) utiles à l'enseignant ou à l'apprenant dans le cadre d'une activité d'enseignement ou d'apprentissage utilisant les TIC, activité ou projet pouvant être présenté dans le cadre d'un scénario pédagogique³³.

Les ressources numériques, de par leur diversité, leur quantité grandissante et une relative accessibilité, posent de nombreux défis. Selon Robertson (2006), « [d]énicher des ressources utiles, crédibles, des contenus éducatifs de qualité mis à jour régulièrement relève bien souvent de l'utopie » (p. 13). Ce constat met en lumière trois problématiques qui, selon Bibeau (2005), constituent des obstacles à l'intégration de ressources numériques en classe :

- *le développement et la mise à jour de contenus numériques* qui fait défaut ;
- *l'indexation et la diffusion de ressources numériques*. L'indexation de ressources numériques par des métadonnées standardisées est une condition nécessaire pour les trouver et pour pouvoir les réutiliser. Cette condition n'est toutefois pas suffisante selon Bibeau (2005) qui considère qu'« il faut également aider les usagers de l'éducation à repérer facilement ces ressources » (p. 13) ;
- *la qualité et l'évaluation de ressources numériques*. Du fait que « [n]'importe qui peut publier n'importe quoi sur Internet » (ibid.), la question de la validité et de la pertinence des informations véhiculées dans les ressources se pose avec insistance. Certaines banques de ressources mettent en place des dispositifs d'évaluation de contenus publiés ; nous en présentons certains dans le chapitre suivant.

3. Problématiques spécifiques des ressources numériques

Cette brève revue de littérature montre la complexité de la notion de ressource dans le monde éducatif qui reste difficile à cerner. Diverses conceptualisations sont proposées parmi lesquelles se dégagent deux points de vue (Figure 1) :

³²Centre de production de ressources numériques et de documents imprimés conçus à l'intention du personnel enseignant et des étudiants de l'ensemble du réseau collégial du Québec, principalement financé par le ministère de l'Éducation et de l'Enseignement supérieur, <https://www.ccdmd.qc.ca/>

³³<https://www.epi.asso.fr/revue/articles/a0511a.htm>. C'est l'auteur qui souligne.

- celui du domaine du e-learning qui considère une ressource (ou un objet d'apprentissage) comme un objet matériel qui peut être décrit et utilisé dans le processus d'enseignement et apprentissage ;
- celui proposé dans l'approche documentaire du didactique qui conçoit une ressource en rapport avec un sujet (en particulier l'enseignant), c'est-à-dire que quelque chose peut être ressource pour quelqu'un et ne pas l'être pour quelqu'un d'autre : c'est le fait que cette 'chose' nourrit (re-source) l'activité du sujet qui en fait une ressource.

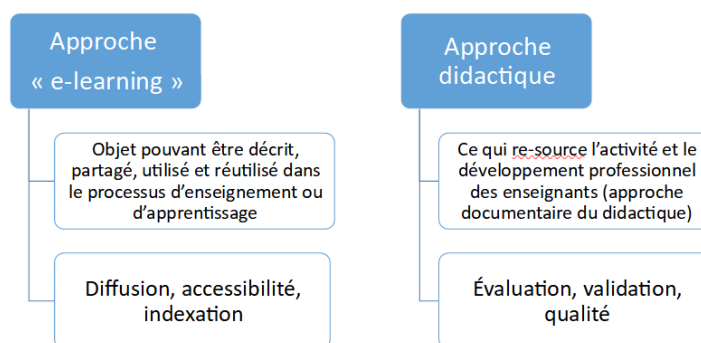


Figure 1. Deux conceptualisations de ressources numériques et problématiques associées

Les travaux de recherche ont montré que les ressources numériques posent de nombreux défis et font émerger des problématiques spécifiques de points de vue de leurs concepteurs ou de leurs utilisateurs, dont nous relevons les deux problématiques suivantes.

La première problématique concerne la *diffusion* et la possibilité de trouver des ressources pertinentes pour une utilisation donnée. Au cœur de cette problématique se trouve la notion d'*indexation* de ressources par des métadonnées qui vise à accroître l'*accessibilité* des ressources, c'est-à-dire « permettre la recherche, l'identification, l'accès et la livraison »³⁴ de ces ressources. Bien décrire les ressources est un enjeu important aussi bien pour l'utilisateur de ces ressources afin de pouvoir les retrouver, que pour le producteur pour pouvoir les partager et les rendre utilisables. Alors qu'il existe des standards définissant des métadonnées pour décrire des ressources éducatives (comme LOM par exemple), Jolivet (2018), en citant d'autres auteurs, pointe des insuffisances de ces standards, en particulier au niveau des descripteurs de l'activité pédagogique. L'auteur s'interroge également sur une indexation plus précise en lien avec des savoirs en jeu dans le contenu de la ressource. Il introduit alors la notion d'*indexation « didactique »* à destination des enseignants de mathématiques qui permettrait « de rendre compte des savoirs mobilisés et de leur organisation dans la ressource » (p. 32). Il pose la problématique d'*indexation* de ressources numériques éducatives comme « la modélisation et la caractérisation du savoir utilisées pour indexer et la mise en relation entre les ressources indexées et les curricula » (p. 54).

Une indexation satisfaisante de ressources n'est cependant pas suffisante pour leur (ré-) utilisation par des acteurs de l'éducation (enseignants, formateurs, élèves). Les ressources doivent aussi présenter une certaine *qualité* aux yeux de l'utilisateur. La seconde problématique est donc celle de l'*évaluation* et de la *validation* de ressources numériques diffusées sur internet. Elle pose la question de la *qualité des ressources* qui, comme nous l'avons vu, prend un sens particulier dans le contexte marqué par une profusion de ressources d'origines diverses. C'est à ce questionnement qu'est dédiée la section suivante.

³⁴https://wikieducator.org/Les_enjeux_des_Normes_et_Standard_en_FOAD

II. QUALITE DE RESSOURCES NUMERIQUES

L'évolution du numérique dans ces dernières décennies conduit à une profusion de ressources accessibles sur Internet et au développement de la formation à distance à travers des dispositifs d'apprentissage en ligne (e-learning) tels que des plateformes de formation en ligne, des LMS (Learning Management Systems) ou encore des universités ou campus numériques. L'enseignant ou le formateur se trouve ainsi face à un double problème : chercher des ressources intéressantes et choisir la ressource la plus pertinente pour un objectif d'apprentissage donné.

Mahé et Noël (2006) font le constat que les ressources disponibles sont peu utilisées car difficilement repérables et sans indication sur leur qualité :

Les problèmes cruciaux de l'utilisation de ces objets d'apprentissage concernent en effet leur repérage (d'où l'intérêt des banques de ressources et des liens entre elles afin d'accroître la visibilité des ressources) et les possibilités de sélection sur la base d'une validation et de l'évaluation de leur qualité (p. 2).

Dans cette section, nous présentons notre contribution aux réflexions sur la question de la qualité de ressources numériques, relativement peu abordée dans les recherches en didactique des mathématiques. Nous commençons par donner un aperçu sur la conceptualisation de la qualité dans divers domaines pour pouvoir situer notre approche qui porte essentiellement sur la qualité de ressources de géométrie dynamique par rapport aux recherches existantes. Nous concluons cette section en ouvrant des perspectives de ces travaux pour la formation des enseignants de mathématiques.

1. Qualité de ressources éducatives et démarche qualité : état de l'art

Dans cette partie, nous présentons les différentes acceptions du concept de qualité dans divers domaines, dont certaines pourront s'appliquer aux ressources éducatives. Nous mettons ensuite en évidence les dimensions de qualité de ressources éducatives émergées des travaux de recherche, ainsi que des banques de ressources éducatives.

Concept de qualité

Delvosalle (2002) donne un aperçu de l'évolution de la vision de la qualité d'un objet (produit, service ou processus), d'une « conception descriptive, statique » qui considère la qualité « comme un niveau de supériorité relative d'un produit (le « meilleur » !) » à la vision de la qualité « comme une mesure de l'harmonie de la rencontre entre les besoins des bénéficiaires ». Cette vision confère à la qualité un caractère subjectif puisque

C'est donc le jugement, l'appréciation du bénéficiaire (l'utilisateur), sur base de son expérience réelle et par rapport à ses besoins et désirs, exprimés ou non, conscients ou intuitifs, techniques ou subjectifs, qui donnent la seule mesure de la qualité d'un « produit ». (ibid.)³⁵

Selon Mar (2013), le concept même de qualité est difficile à saisir puisque les chercheurs ne s'accordent pas sur sa définition. L'auteur souligne sept définitions différentes qui considèrent

³⁵<https://journals.openedition.org/pyramides/480>

la qualité du point de vue de la gestion, de l'assurance qualité, du produit, du marketing, de la fabrication et de l'économie : un objet est de qualité s'il :

1. *convient à son usage* (Fit for Purpose). Selon l'auteur, cette définition est utile car applicable à tout processus, service ou produit, néanmoins il est difficile de mesurer la qualité ainsi définie ;
2. *est conforme aux exigences* (Conformance to Requirements). La facilité de valider la conformité et d'identifier les non-conformités aux exigences données est contrebalancée par le fait que les exigences peuvent offrir une vision biaisée et subjective de la qualité ;
3. *coûte plus cher à produire* (Quality is Cost). L'auteur remet en cause cette définition en soulignant que si elle convient pour de simples produits, elle n'est pas applicable à la technologie par exemple : "*The history of technology is filled with cheaper products that have higher quality*" (ibid.) ;
4. *coûte le prix que les consommateurs sont disposés à payer pour* (Quality is Price). Cette définition voit la qualité proportionnelle au prix de l'objet : plus l'objet est cher, meilleure est sa qualité ;
5. *se conforme aux normes, procédés et spécifications* (Quality is a Standard). Dans le domaine de la fabrication, c'est cette vision de la qualité qui est utilisée et qui s'applique aux produits aussi bien qu'aux processus ;
6. *offre un bon rapport qualité prix* (Quality is Value for Performance). Du point de vue de marketing, cette définition de qualité est souvent utilisée pour expliquer pourquoi les consommateurs achètent les produits en question ;
7. *procure une expérience satisfaisante* (Quality is an Experience). La fidélisation d'un client est considérée comme une mesure de qualité selon ce point de vue.

Toutes ces définitions sont liées aux résultats (produits). Delvosalle (op. cit.) désigne cette approche par l'expression « qualité produit » dont il évoque des limites : « les objectifs sont clairement fixés, mais les moyens pour les obtenir demeurent vagues, difficiles à spécifier et à mettre en œuvre ». L'auteur présente une autre approche de qualité, désignée par l'expression « gestion de qualité » qui part de l'idée que « pour garantir la qualité des résultats, il faut avoir une réelle maîtrise des processus » de production. Cette approche vise l'amélioration continue de ces processus et des résultats obtenus.

Dans la suite, nous allons nous restreindre au domaine de l'éducation et considérer des ressources éducatives comme objets dont la qualité est en question.

Qualité de ressources éducatives

Dans le contexte éducatif, en lien avec des ressources éducatives libres (REL), Camilleri et al. (2014) circonscrivent le concept de qualité à la confluence de cinq attributs (p. 13) :

- *Efficacité, i.e.* aptitude à l'emploi de l'objet évalué. Dans le contexte des REL, cela pourrait renvoyer aux aspects tels que la facilité de réutilisation ou la valeur éducative. Cette vision fait écho à la définition 1 du paragraphe ci-dessus.
- *Impact* qui exprime la mesure dans laquelle l'objet évalué est efficace. L'impact dépend de la nature de l'objet lui-même, du contexte dans lequel il est appliqué et de son utilisation. Cette dimension se rapproche de la définition 7 qui repose sur l'expérience des utilisateurs.

- *Disponibilité* qui est une condition préalable à l'efficacité et à l'impact. La disponibilité inclut des concepts tels que la transparence et la facilité d'accès.
- *Exactitude* qui renvoie à la précision et à l'absence d'erreurs.
- *Excellence* qui compare la qualité d'un objet à ses pairs et à son potentiel de qualité, c'est-à-dire le potentiel de qualité théorique maximum qu'il peut atteindre. On retrouve dans cette vision le niveau de supériorité évoqué par Delvosalle (2002).

Ce qui semble se dégager de ces considérations est le fait que la définition de qualité d'un objet (une ressource dans notre cas) recouvre deux types d'aspects : d'une part des aspects qui déterminent la qualité « intrinsèque » (Pepin, 2020) de la ressource, tels que l'exactitude du contenu de la ressource ou absence de bug informatique par exemple, et d'autre part des aspects qui dépendent de l'utilisateur, ses connaissances et ses croyances, mais aussi du contexte dans lequel il inscrirait l'utilisation de la ressource.

Mahé et Noël (2006) distinguent la validation d'une ressource qu'elles considèrent comme une « vérification de la conformité de la ressource à certaines exigences » (qui reposerait sur la définition 2 citée plus haut) de son évaluation qui est une « estimation de la qualité de la ressource relativement à différents critères ». Les auteurs ont mis en évidence différents scénarios d'évaluation :

- *Évaluation a priori implicite* qui est utilisée par des banques de ressources qui obligent les auteurs de ressources à faire partie de l'institution ou du réseau pour pouvoir faire un dépôt. Dans le cas de sites proposant des ressources spécialisées sur une thématique (ex. ClasseTICE³⁶, portail des usages du numérique pour le primaire), la sélection renvoie implicitement à cette thématique.
- *Évaluation par un comité scientifique (peer-review)* qui est effectué généralement avant le dépôt par un ou plusieurs experts. La banque de ressources MERLOT³⁷ utilise ce type d'évaluation et a même mis en place une formation pour des évaluateurs³⁸ afin de s'assurer que ceux-ci s'approprient les processus et les politiques de MERLOT en matière de l'évaluation par les pairs.
- *Évaluation par des utilisateurs* qui ont la possibilité d'évaluer les ressources par une note (ex., on peut voter pour les ressources sur ClasseTICE de 1 à 5) ou par un commentaire libre (ex., sur Edupass³⁹ on peut laisser un commentaire sur une ressource en s'identifiant avec un nom et une adresse de messagerie).
- *Évaluation croisée* qui combine deux scénarios, une évaluation par peer-review avec celle par des utilisateurs. C'est le cas de la banque MERLOT par exemple.

Contrairement à l'évaluation implicite ou par des utilisateurs qui n'a en général pas besoin de s'appuyer sur des critères explicites, celle par un comité scientifique renvoie à des critères prédéfinis. La section suivante est dédiée à la présentation des différents critères de qualité de ressources éducatives discutés dans la littérature.

³⁶<https://classetice.fr/>

³⁷<https://www.merlot.org/merlot/index.htm>

³⁸http://info.merlot.org/merlohelp/topic.htm#t=MERLOT_Peer_Review_Information.htm

³⁹<https://edupass.hypotheses.org/>

Critères de qualité de ressources éducatives

Mahé et Noël (2006) regroupent les critères de qualité utilisés par les diverses banques de ressources en quatre catégories :

- *évaluation technique* qui analyse « la qualité de fonctionnement et d'exécution de la ressource pédagogique » ;
- *évaluation du contenu* qui interroge sa validité et son apport à l'apprentissage ;
- *évaluation du design* qui porte sur « la fonctionnalité de l'interface et son intérêt par rapport aux objectifs pédagogiques définis » ;
- *évaluation de la description* qui vise à vérifier l'exactitude des informations fournies pour décrire la ressource (métadonnées).

Selon les auteurs, ces évaluations s'appuient sur des critères « documentaires », i. e., c'est surtout le contenu et sa description qui sont évalués et elles déplorent l'absence d'une approche pédagogique qui intégrerait une analyse de scénarios d'usage et de contextes pédagogiques.

La dimension pédagogique est prise en compte dans le modèle TIPS (*TIPS framework*) élaboré par l'organisation internationale Commonwealth of Learning établie au Canada (Kawachi, 2014). Ce modèle propose 38 critères de qualité qui ont été reconnus par des enseignants auteurs de ressources comme utiles et représentant les bonnes pratiques (pedagogic best practices). Ces critères, formulés comme des conseils pour des concepteurs de ressources, sont regroupés en quatre catégories :

- La catégorie T, pour *Teaching and learning processes*, comprend 16 critères relatifs à l'approche pédagogique (ex. "Use a learner-centered approach" ou "Don't use difficult or complex language, and do check the readability to ensure it is appropriate to age/level", p. 6-7) ;
- La catégorie I, pour *Information and material content*, contient sept critères concernant à la fois le contenu de la ressource (ex. "Your content should be authentic, internally consistent and appropriately localized"), et l'aspect design (ex. "Try to keep your OER [Open Educational Resource] compact in size, while allowing it to stand-alone as a unit for studying by itself. Consider whether it is small enough to reuse in other disciplines", p. 7-8) ;
- La catégorie P, pour *Presentation product and format*, propose huit critères qui concernent l'accessibilité et la réutilisabilité de la ressource (ex. "Use open formats for delivery of OER to enable maximum reuse and remix"), son apparence, notamment au regard de la motivation des apprenants (ex. "Put yourself in your student's position to design a pleasing attractive design, using white-space and colours effectively, to stimulate learning"), mais également sa possible intégration dans une progression (ex. "Consider suggesting which OER could come before your OER, and which OER could come afterwards in a learning pathway", p. 8) ;
- La catégorie S, pour *System technical and technology*, propose sept critères relatifs aux métadonnées (ex. "Give metadata tags for expected study duration, level of difficulty, format, and size") et à des aspects techniques (ex. "Try to use only free sourceware/software, and this should be easily transmissible across platforms", p. 8).

MERLOT⁴⁰ est un autre exemple de banque de ressources qui met en place une évaluation de ressources incluant la dimension pédagogique. L'évaluation de la qualité de ressources est supervisée par des comités éditoriaux qui désignent des membres de la communauté MERLOT pour réaliser cette évaluation (*peer review*). Les ressources sont évaluées selon trois critères : qualité du contenu, efficacité potentielle de la ressource comme un outil d'enseignement et facilité d'utilisation. Chaque critère requiert une évaluation globale (ex., "Overall, the quality of content is very high"⁴¹) ainsi qu'une évaluation plus détaillée en répondant à des items associés (avec positionnement de 5 – excellent à 1 – faible) :

- 11 items pour évaluer la qualité du contenu (ex. "The learning material... is supported by appropriate research" ou "...provides accurate information") ;
- 8 items pour évaluer l'efficacité potentielle de la ressource comme un outil d'enseignement (ex. "This learning material... builds on prior concepts" ou "...is very efficient (could learn a lot in short time)") ;
- 9 items pour évaluer la facilité de l'utilisation de la ressource (ex. "This learning material... has very clear instructions" ou "...is of high design quality").

Des commentaires qualitatifs peuvent être ajoutés pour souligner des aspects particulièrement intéressants de la ressource (ex. "Strengths: Describe the outstanding features of the quality of the learning material") ou inversement, des faiblesses identifiées (ex. "Concerns: Describe any problems in terms of quality").

Ce bref tour d'horizon de la question de qualité a permis de voir qu'il n'y a pas de consensus sur la définition du concept de qualité. Deux approches de qualité co-existent (Figure 2) : une approche 'qualité produit' qui porte sur la ressource comme le produit fini et une approche 'gestion qualité' qui se concentre à la fois sur les processus et leurs résultats et dont l'objectif principal est une amélioration continue des deux (processus et résultats).

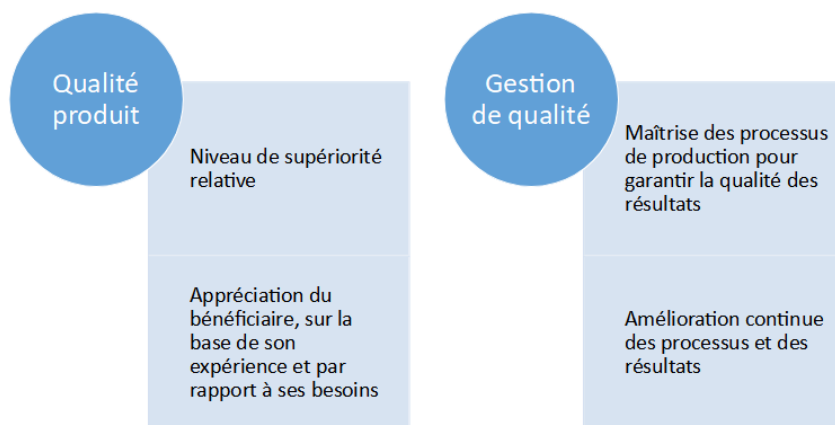


Figure 2. Deux approches du concept de qualité

Nous verrons dans la suite que nos travaux sur la qualité de ressources de géométrie dynamique s'inspirent de cette seconde approche. Par ailleurs, nous avons vu que l'évaluation de la qualité d'un produit est tributaire de l'utilisateur de ce produit et du contexte de son utilisation, ce qui confère à la qualité une dimension subjective et située. Concernant les ressources numériques et les critères pour évaluer leur qualité, bien que la validité du contenu de la ressource et la qualité technique soient largement partagés par des banques de ressources, la dimension

⁴⁰<https://www.merlot.org/merlot/>

⁴¹http://info.merlot.org/merlohelp/assets/docs/Peer_Review_form_CC_0519.pdf

pédagogique n'est pas prise en compte par toutes et la dimension didactique encore moins. Une des raisons possibles peut être la grande diversité de types de ressources numériques. En effet, la qualité didactique d'un logiciel ne serait pas évaluée de la même manière et par les mêmes critères qu'une activité d'apprentissage faisant appel à un outil numérique. Il semble donc difficile de proposer des critères pour une évaluation fine de ressources numériques quelle que soit leur nature.

Dans la section suivante, nous présentons notre contribution à la problématique de la qualité de ressources numériques en ciblant plus particulièrement celles qui mobilisent un logiciel de géométrie dynamique (GD).

2. Qualité de ressources de géométrie dynamique

Cette section s'appuie largement sur nos travaux menés dans le cadre du projet européen Intergeo (2007-2010), en particulier (Trgalová & Jahn, 2013 ; Trgalová et al. 2011).

Le projet Intergeo poursuivait un triple objectif : (1) rendre interopérables les principaux logiciels de géométrie dynamique, (2) rendre possible le partage, via une plateforme européenne, de ressources éducatives décrites par un ensemble de métadonnées (Kortenkamp et al., 2009), et (3) mettre en place une démarche qualité permettant une amélioration continue de ressources de géométrie dynamique disponibles sur cette plateforme.

La plateforme i2geo.net a été fondée sur le principe du développement communautaire : c'était un environnement ouvert où tout utilisateur pouvait déposer des ressources pour les mutualiser avec d'autres utilisateurs, il pouvait réutiliser les ressources disponibles, les commenter et partager ses expériences de l'usage de ces ressources dans sa classe. Cependant, des projets ultérieurs ont fait évoluer la plateforme. Désormais, pour pouvoir y accéder il faut appartenir à la communauté d'utilisateurs de celle-ci.

Dans ce qui suit, nous présentons le dispositif de démarche qualité que nous avons élaboré et mis en place. Il est inspiré de l'approche 'gestion qualité' décrite plus haut et il s'appuie sur l'évaluation de la qualité des ressources de GD par des utilisateurs ce qui a nécessité de définir des critères de qualité qui sont également présentés dans cette section.

Démarche qualité, le cas de la plateforme i2geo.net

Nos réflexions sur la question de qualité de ressources au sein du projet Intergeo partaient des principes suivants :

- Les utilisateurs de ressources doivent être au centre, ils doivent donc être impliqués dans l'évaluation de qualité de ressources.
- Plutôt que d'évaluer la qualité de ressources au sens de produire un jugement qualifiant ces ressources de bonnes ou moins bonnes (approche « qualité produit »), cette évaluation doit permettre de repérer les aspects à améliorer et contribuer ainsi à une amélioration continue des ressources. En effet, une ressource peut être « bonne » selon certains aspects (ex. proposer un scénario pédagogique précis) et « moins bonne » selon d'autres (ex. ne pas donner suffisamment d'informations sur le contexte de son utilisation rendant difficile d'envisager des adaptations pour d'autres contextes).
- Compte tenu du fait que différentes personnes peuvent avoir des avis différents sur la qualité d'une même ressource, la qualité d'une ressource n'est pas établie par un évaluateur, mais elle émerge d'un ensemble d'évaluations de cette ressource par divers évaluateurs.

Ces trois principes nous ont conduits à mettre en place un dispositif de démarche qualité dont l'objectif a été double :

- objectif « communautaire » : permettre le contrôle et l'amélioration de la qualité des ressources déposées par les utilisateurs ;
- objectif « individuel » : soutenir la pratique réflexive et les processus d'appropriation des ressources chez les enseignants utilisateurs de ces ressources.

Le processus de démarche qualité repose sur les évaluations des ressources par des utilisateurs dans un esprit de communauté, où tout utilisateur, après s'être identifié, a la possibilité d'évaluer la qualité de toute ressource disponible sur la plateforme (Trgalová et al., 2011). Ces utilisateurs pouvant être des enseignants, mais aussi des chercheurs ou des formateurs, le dispositif propose une évaluation croisée combinant des évaluations par des experts avec celles des utilisateurs. Les différentes évaluations d'une même ressource sont agrégées selon un algorithme⁴² pour donner lieu à une « note » sous forme d'un nombre d'étoiles (de 1 à 4) (Figure 3). Notons qu'une ressource peut être évaluée *a priori*, c'est-à-dire avant son utilisation en classe, ou *a posteriori*. Cette dernière a une plus grande valeur du fait qu'elle peut prendre en compte son efficacité réelle telle que perçue par l'évaluateur, ce dont l'algorithme de notation tient compte.

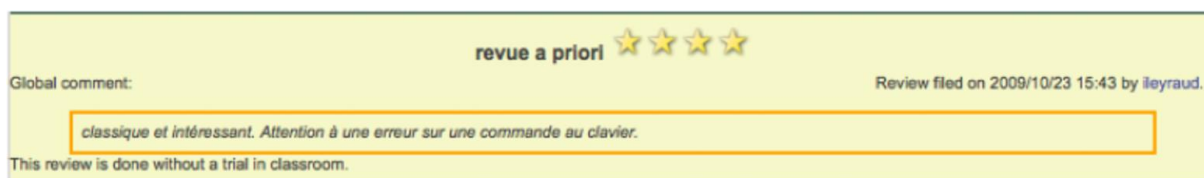


Figure 3. Exemple du résultat de l'évaluation d'une ressource sur la plateforme i2geo.net (Mercat et al., 2009, p. 48)

L'évaluation de la qualité de ressources de GD repose sur un ensemble de critères que nous présentons dans la suite.

Critères de qualité de ressources de géométrie dynamique

Précisons tout d'abord que les critères présentés dans cette section sont définis pour un type particulier de ressources, à savoir des ressources proposant des activités mathématiques qui font appel à un logiciel de géométrie dynamique et qui sont plus ou moins scénarisés. Ces ressources, lorsqu'elles sont déposées sur la plateforme i2geo.net, doivent être décrites par des métadonnées indiquant entre autres le thème et les notions mathématiques en jeu, les compétences visées, le niveau scolaire, les prérequis et la durée des activités proposées.

Afin de permettre l'amélioration de la qualité des ressources d'i2geo, la démarche qualité que nous avons mise en place s'appuie sur un questionnaire. En accord avec Rabardel (1995) qui souligne l'importance de penser les usages d'un outil dès sa conception, le questionnaire a été élaboré dans un processus cyclique consistant en la conception de versions successives testées par des enseignants, ce qui a permis ses améliorations progressives. De plus, l'équipe de chercheurs en charge de l'élaboration du questionnaire a travaillé en étroite collaboration avec un groupe de sept enseignants de mathématiques pour garantir l'accessibilité du questionnaire à ses principaux usagers, les enseignants.

⁴²Cet algorithme qui est complexe, tenant compte à la fois du karma de l'évaluateur, de la profondeur de son évaluation et du fait si l'évaluation a été réalisée avant ou après la mise en œuvre de la ressource en classe, est décrit dans (Mercat et al., 2009).

Le questionnaire prend en considération neuf dimensions d'une ressource (Figure 4) qui servent à décrire et délimiter des aspects de cette ressource à évaluer pour pouvoir ensuite définir des critères de qualité, à savoir : (1) dimension métadonnées, (2) dimension technique, (3) contenu mathématique, (4) dimension instrumentale, (5) valeur ajoutée de la géométrie dynamique, (6) dimension didactique, (7) dimension pédagogique, (8) intégration dans une progression et (9) dimension ergonomique (Trgalová et al., 2011 ; Trgalová et Jahn, 2013).

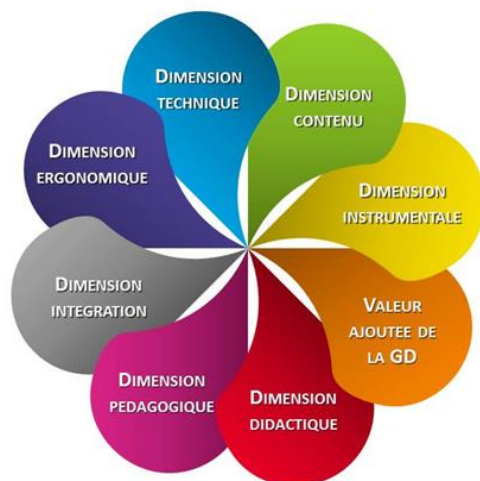


Figure 4. Dimensions d'une ressource de géométrie dynamique (hormis la dimension métadonnées liée à la plateforme i2geo.net)

La dimension *métadonnées* vise à vérifier l'exactitude de la description de la ressource au regard de son contenu. La dimension *technique*, fondamentale dans le cas d'une ressource numérique, vérifie son exploitabilité (accès, fonctionnement). Les quatre dimensions suivantes – contenu, instrumentale, valeur ajoutée de la GD et didactique – doivent donner lieu à une analyse a priori approfondie des tâches proposées dans la ressource. La dimension *pédagogique* interroge la mise en œuvre envisagée de la ressource en classe et la dimension relative à *l'intégration de la ressource dans une progression* vise à assurer que la ressource peut contribuer aux apprentissages visés et qu'elle n'est pas destinée à une utilisation ponctuelle de la géométrie dynamique. Enfin, la dimension *ergonomique* interroge la manière dont les informations sont présentées dans la ressource.

Dans la suite, nous présentons les critères associés aux dimensions instrumentale, valeur ajoutée de la GD, didactique et pédagogique, ainsi que les fondements théoriques qui nous ont conduites à proposer ces critères.

Dimension instrumentale. Si la ressource comporte des figures dynamiques, la cohérence entre l'activité proposée et les figures doit être vérifiée (critère « adéquation des figures »). Plus précisément, les figures doivent se comporter de la façon attendue, c'est-à-dire être cohérentes avec les théories mathématiques et les intentions didactiques. Une attention particulière doit être portée à la gestion des cas limites et les mesures des grandeurs numériques (ex. les mesures d'angle et de longueur) afin de ne pas entraver les apprentissages visés (critères « comportement des figures dans des cas limites » et « gestion des valeurs numériques »). Ces trois items s'appuient sur les recherches qui mettent en évidence l'interrelation entre la conceptualisation de notions mathématiques et les interactions avec un environnement informatique (par exemple Artigue, 2002). Plus précisément, la manière dont un élève interagit avec l'environnement, dont il utilise ses affordances et dont il fait face à ses contraintes va façonner sa conceptualisation des objets qu'il manipule. D'autre part, il ne construit pas les compétences technologiques (comment utiliser l'environnement) indépendamment des connaissances mathématiques (comment résoudre un problème mathématique donné). Les deux

aspects de son activité façonnent l'un l'autre. Il peut arriver que l'interaction avec une figure dynamique produise des phénomènes en contradiction avec l'objectif d'apprentissage visé, comme dans l'exemple présenté dans la Figure 5. Dans cet exemple, ABCD est un parallélogramme et O est le point d'intersection de ses diagonales. AODE est un autre parallélogramme. Les segments [AO] et [OD] sont à la fois les demi-diagonales de ABCD et les côtés de AODE. Ainsi, les propriétés des côtés de AODE peuvent être déduites des propriétés des diagonales de ABCD. En déplaçant les sommets de ABCD, l'élève peut facilement trouver le cas montré dans la Figure 5 (à droite) où le parallélogramme ABCD apparaît avec deux côtés adjacents de même longueur (7 cm) ; c'est donc un losange. Or, ses diagonales ne sont pas perpendiculaires (95°), ce qui contredit la théorie mathématique. Cette contradiction est due au fait que les mesures des longueurs des angles sont affichées arrondies à l'unité. Le critère « gestion des valeurs numériques » a pour objectif d'aider l'auteur ou l'utilisateur de la ressource à prendre conscience de ce problème potentiel.

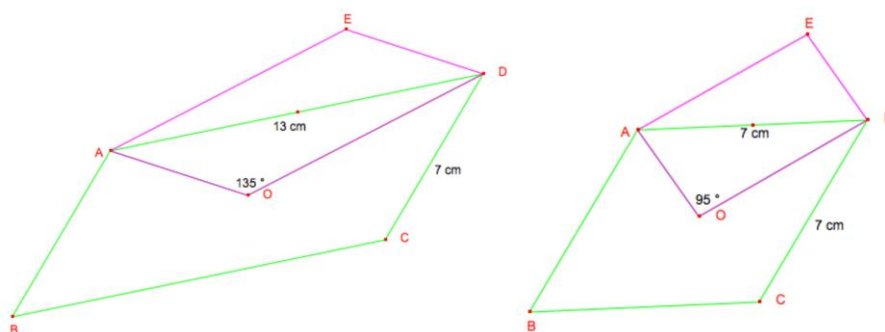


Figure 5. Deux parallélogrammes dynamiques, ABCD et AODE, O étant l'intersection des diagonales de ABCD

Enfin, pour faciliter l'appropriation de la ressource par un utilisateur, il est nécessaire de décrire le fonctionnement d'outils ou de fonctions avancés (ex. macro-constructions). Les critères correspondants à la dimension instrumentale de la ressource sont rappelés et listés dans le Tableau 1 suivant :

Item général : L'interaction avec les figures de géométrie dynamique est valide et cohérente avec l'activité mathématique prévue	
Critère	Item
Adéquation des figures	Les figures de géométrie dynamique se comportent de manière cohérente par rapport à l'activité mathématique prévue.
Comportement des figures dans des cas limites	Poussées dans leurs limites, les figures résistent bien.
Gestion des valeurs numériques	Les valeurs numériques (mesures de longueur, angle) ne remettent pas en cause le déroulement de l'activité.
Fonctions avancées	Les fonctionnalités avancées, comme l'usage de clavier ou de macro-constructions, sont bien décrits.

Tableau 1. Critères de qualité relatifs à la dimension instrumentale de la ressource

Dimension valeur ajoutée de la géométrie dynamique. La GD peut être utilisée de diverses manières dans l'enseignement des mathématiques, dans des tâches qui peuvent varier entre de simples traductions de tâches usuelles papier-crayon aux tâches qui n'existent que dans l'environnement de géométrie dynamique. Cette dimension a pour objectif de questionner l'apport de la géométrie dynamique dans les tâches proposées, ainsi que le rôle joué par le déplacement.

Laborde (2002) distingue quatre rôles que peut jouer la géométrie dynamique dans une tâche :

- la géométrie dynamique peut être utilisée pour simplifier des aspects matériels de la tâche sans la changer conceptuellement. Il s'agit ici de tâches travaillées usuellement en papier-crayon proposés dans l'environnement de la GD. L'avantage escompté est la plus grande précision des tracés ;
- la géométrie dynamique est utilisée comme un amplificateur visuel dans des tâches où il s'agit d'identifier des propriétés géométriques, cette identification étant facilitée par l'observation des invariants lors du déplacement des objets de base de la figure ;
- la géométrie dynamique modifie des stratégies de résolution des tâches, notamment des tâches de construction qui nécessitent le recours aux propriétés géométriques ;
- la géométrie dynamique est incontournable pour résoudre la tâche donnée, par exemple celle de reproduction d'une figure dynamique au comportement identique que celui de la figure modèle (ex. boîte noire).

Les critères « précision des constructions », « production de différents cas de figure », « recours aux propriétés géométriques » et « tâche n'existant qu'en GD » se proposent d'identifier ces rôles de la GD dans les tâches proposées dans les ressources évaluées.

En observant des élèves résoudre des tâches dans l'environnement de géométrie dynamique, Healy (2000) a mis en évidence deux paradigmes différents qu'elle a appelés approche robuste et approche molle. La première conduit à la construction d'une figure qui a toutes les propriétés géométriques la définissant (figure robuste). La seconde, en revanche, repose sur la construction d'une figure dont certaines propriétés ne sont pas robustes. L'élève peut, en déplaçant les objets de base, modifier la figure de manière à ce que ces propriétés soient vérifiées manuellement (et visuellement), ce qui permet d'observer d'autres propriétés qui sont des conséquences de ces ajouts. Le déplacement joue des rôles différents dans ces paradigmes : tandis que dans l'approche robuste, le déplacement permet de valider la construction (elle résiste au déplacement) ou de mettre en évidence des propriétés géométriques (ce qui reste invariant lors du déplacement), dans l'approche molle, le déplacement fait partie de la construction et permet d'explorer la figure et de formuler des conjectures sur les dépendances entre les propriétés. Les critères « validation » et « déplacement pour mettre en évidence des invariants » renvoient à la mobilisation du paradigme robuste dans la tâche, les critères « exploration et conjecture » et « déplacement pour conjecturer ou valider » à celle du paradigme mou.

Les représentations d'objets mathématiques sont nécessaires pour pouvoir les appréhender (Duval, 1993). Selon l'auteur, l'intérêt de pouvoir disposer de multiples représentations d'un même objet permet notamment d'éviter de le confondre avec sa représentation. De plus, « la coordination de plusieurs registres de représentation sémiotique apparaît fondamentale pour une appréhension conceptuelle des objets » (ibid., p. 40). L'une des potentialités des technologies numériques réside dans la possibilité d'utiliser diverses représentations reliées de manière dynamique. C'est le cas des environnements de GD qui proposent, en plus de la représentation géométrique/graphique des objets mathématiques, leur représentation algébrique. Les changements opérés sur l'une des représentations se répercutent sur l'autre. Le critère « multi-représentations » interroge l'exploitation (ou non) de cette potentialité dans la ressource. Le critère « utilité » questionne de manière générale l'apport de la GD pour atteindre les objectifs d'apprentissage visés. Le Tableau 2 présente les critères permettant d'évaluer la valeur ajoutée de la GD dans la ressource :

Item général : Les activités mathématiques proposées bénéficient des apports de la géométrie interactive, elles ne peuvent pas être transposées telles qu'elles en activités papier-crayon	
Critère	Item
Précision des constructions	Dans cette activité, les dessins sont clairs et précis.
Production de différents cas de figure	L'enjeu de cette activité est de produire différents cas de la même figure.
Exploration et conjecture	Cette activité amène l'élève à explorer, expérimenter et conjecturer.
Validation	Dans cette activité, l'élève peut valider visuellement des conjectures.
Multi-représentations	Dans cette activité, différentes représentations (graphiques, numériques, algébriques) sont en interaction.
Recours aux propriétés géométriques	Cette activité amène l'élève à considérer des propriétés géométriques plutôt que des coïncidences numériques ou graphiques.
Tâche n'existant qu'en GD	L'activité ne peut pas être transposée telle qu'elle en une activité papier-crayon.
Utilité	La géométrie interactive aide à atteindre les buts pédagogiques.
Déplacement pour mettre en évidence des invariants	Le déplacement est utilisé pour illustrer une propriété ou une relation entre objets grâce à son invariance.
Déplacement pour conjecturer ou valider	Le déplacement est utilisé pour conjecturer ou valider une propriété ou une relation entre objets.

Tableau 2. Critères de qualité relatifs à la dimension valeur ajoutée de la GD

Dimension didactique. Cette dimension conduit l'évaluateur de la ressource à faire une analyse didactique des tâches et du scénario proposés. Les principaux appuis théoriques sous-jacents sont les concepts de la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998). Deux types de critères sont proposés interrogeant ces éléments (tâche et scénario) du point de vue de l'élève et de celui de l'enseignant.

Du point de vue de l'élève, il s'agit de questionner :

- la marge laissée à l'élève pour la prise d'initiative (critère « prise d'initiative de l'élève »). En effet, de nombreuses ressources, par ex. des exercices proposés dans des manuels scolaires, se réduisent à des activités « presse-bouton » où l'élève n'a qu'à exécuter les consignes détaillées conduisant à la solution de l'exercice (Figure 6) ;
- l'engagement facile de l'élève dans la tâche proposée (critère « dévolution ») ;
- les rétroactions du milieu qui doivent soutenir l'activité de l'élève (critère « rétroactions soutenant l'activité de l'élève »).

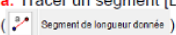

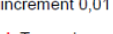
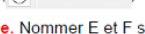

Du point de vue de l'enseignant, nous proposons de questionner la présence d'éléments destinés à soutenir une utilisation efficace et efficiente de la ressource en classe :

- des conseils pour faciliter l'entrée des élèves dans l'activité (critère « conseils pour aider la dévolution ») ;
- des informations qui aident l'enseignant à gérer les apprentissages des élèves, en particulier les stratégies prévisibles (critère « stratégies anticipées »), des extraits de productions d'élèves (critère « productions d'élèves »), des suggestions pour faire évoluer des stratégies d'élèves (critère « conseils pour faire évoluer les stratégies ») ou des conseils sur l'aide à leur apporter (critère « conseils concernant l'aide ») ;
- une description de rétroactions de l'environnement informatique (critère « description des rétroactions du logiciel ») ;
- des conseils sur la gestion des phases de validation et d'institutionnalisation (critères « validation » et « institutionnalisation ») ;

- une analyse de la situation d'apprentissage proposée en termes de variables didactiques qui peut aider l'enseignant à envisager des adaptations éventuelles de la ressource (critère « variables didactiques »).

61 Résoudre un problème (Transmath 5^e, Nathan, édition 2014, p. 248)
M. Seguin a un champ carré de 20 m de côté. Il attache sa chèvre Honorine avec une corde à l'un des sommets de son champ.
M. Seguin souhaite connaître la longueur maximale de la corde pour que Honorine ne puisse pas brouter plus de la moitié du champ.

1. Réaliser une figure

- Tracer un segment [DC] de longueur 20

- Tracer un carré ABCD (utiliser ).
- Créer un curseur r allant de 0 à 20 avec pour incrément 0,01 (utiliser ).
- Tracer le cercle de centre D et e rayon r

- Nommer E et F ses points d'intersection avec les côtés du carré.
- Créer le quart de disque à l'intérieur du carré ().

2. Estimer la longueur

- Afficher l'aire du quart de disque.
- Déplacer le curseur et déterminer la longueur maximale, en m, de la corde pour que Honorine ne puisse pas brouter plus de la moitié du champ. Donner la valeur approchée par défaut au centième près.

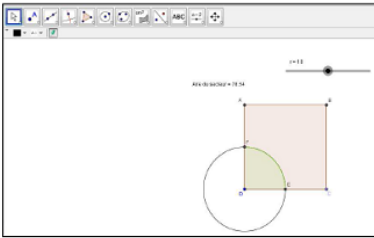


Figure 6. Activité extraite du manuel Transmath 5e (Nathan, édition 2014, p. 248)

Le Tableau 3 présente les critères pour évaluer la dimension didactique de la ressource :

Item général : La description de cette activité en permet une utilisation efficace pour l'apprentissage des notions et compétences annoncées.	
Critère	Item
Dévolution	L'activité est conçue de telle manière à ce que les élèves s'y engagent facilement.
Conseils pour aider la dévolution	Des conseils sont donnés à l'enseignant pour lancer l'activité.
Prise d'initiative de l'élève	L'activité est conçue de telle manière à ce qu'elle laisse des initiatives à l'élève pour élaborer une stratégie de résolution.
Stratégies anticipées	Les stratégies prévisibles des élèves, correctes ou erronées, sont décrites.
Productions d'élèves	Des traces de productions d'élèves sont disponibles.
Conseils concernant l'aide	Des suggestions pour sortir les élèves de stratégies sans issue sont proposées.
Conseils pour faire évoluer les stratégies	Des actions pour faire évoluer les stratégies des élèves sont proposées.
Rétroactions soutenant l'activité de l'élève	L'activité est conçue de telle manière à ce que les rétroactions soutiennent le processus de résolution de l'élève.
Description des rétroactions du logiciel	Les rétroactions du logiciel essentielles pour l'activité sont décrites.
Institutionnalisation	Des conseils sur les interventions aux moments de synthèse sont donnés.
Validation	Des suggestions sur comment, quand et qui valide les productions des élèves sont données.
Variables didactiques	Les caractéristiques principales de l'activité et les effets de leurs modifications sur les stratégies et les apprentissages des élèves sont décrits.

Tableau 3. Critères de qualité relatifs à la dimension didactique

Dimension pédagogique. Cette dimension a pour objectif de questionner la présence d'un scénario pour faciliter la mise en œuvre des tâches proposées aux élèves. En appui sur le concept d'orchestration instrumentale (Trouche, 2005), le critère « configuration didactique » interroge la description des artefacts nécessaires et leur configuration et le critère « mode d'exploitation » aborde la manière dont ces artefacts sont utilisés au cours de l'activité. La complexité de la gestion de moments collectifs, notamment de moments de synthèse ou d'institutionnalisation,

dans une salle informatique, dont la quasi-disparition dans les pratiques des enseignants a été observée (voir par exemple Abboud-Blanchard, 2013), nous a conduites à ajouter le critère « gestion des temps collectifs » pour interroger la présence dans la ressource d'éléments visant à faciliter ces aspects. Le Tableau 4 présente les critères relatifs à la dimension pédagogique de la ressource.

Item général : La description de l'activité propose une mise en œuvre.	
Critère	Item
Configuration didactique	Une configuration matérielle possible (un ordinateur par élève ou classe entière avec vidéo projecteur etc...) est décrite.
Mode d'exploitation	Un déroulement temporel est proposé (travail individuel, collectif...).
Gestion des temps collectifs	Une gestion des mises en commun et de la conclusion de l'activité est proposée.

Tableau 4. Critères de qualité relatifs à la dimension pédagogique

L'ensemble des critères de qualité ont donné lieu à un formulaire qui a été implémenté sur la plateforme i2geo.net. Chacune des neuf dimensions d'une ressource de géométrie dynamique peut être évaluée soit globalement, en évaluant l'item général, ou bien de manière détaillée, en évaluant plusieurs, voire tous les critères. Dans ce cas, l'évaluation de la dimension est calculée à partir de celle des critères. Les évaluateurs ont également la possibilité de donner un commentaire textuel pour argumenter ou préciser leur évaluation.

Dans la suite, nous rapportons brièvement quelques résultats saillants des expérimentations que nous avons menées auprès des enseignants avec des objectifs de recherche variés.

Évaluation de la qualité de ressources de géométrie dynamique par des enseignants : quelques résultats

Nos études empiriques ont montré des usages différents du formulaire d'évaluation de ressources que nous pouvons analyser en termes de genèses instrumentales donnant lieu à divers instruments d'évaluation de ressources. Par ailleurs, nous avons pu constater des résultats plutôt encourageants de l'utilisation du formulaire dans un contexte de formation continue où cette utilisation a été accompagnée et cadrée : les enseignants appréciaient de manière générale l'analyse de ressources instrumentée par le formulaire qui a guidé leur analyse et les a conduits à questionner les dimensions de ressources qui sont rarement interrogées. Le formulaire a ainsi été perçu comme une aide à l'analyse de ressources dans une perspective de leur utilisation en classe ; autrement dit comme une aide à l'appropriation de ressources analysées (la section suivante est dédiée à cette problématique).

En revanche, les observations des traces des comportements des utilisateurs sur la plateforme ont montré peu d'investissement dans l'évaluation de ressources et des améliorations très rares de ressources évaluées. Une des raisons que l'on pourrait avancer serait le manque de temps de la part des utilisateurs. Cette raison est certainement trop simpliste, même si le facteur temps peut jouer un rôle, connaissant les conditions d'exercice du métier d'enseignant, au moins en France. Il nous semble cependant que d'autres éléments permettent d'expliquer cet « échec ». Nous en évoquons trois qui nous semblent ressortir de nos études.

Premièrement, un accompagnement des évaluateurs nous paraît, avec le recul, être un élément essentiel à mettre en place dans une démarche qualité. Nous avons en effet observé que les membres de la communauté i2geo qui n'avaient aucun lien avec projet Intergeo, montraient des comportements le moins en adéquation avec l'esprit communautaire que se proposaient de développer les partenaires du projet. Cet accompagnement aurait alors deux fonctions principales : d'une part, une « acculturation » de ces membres qui leur permettrait de comprendre les enjeux de la démarche qualité et, d'autre part, une aide à l'appropriation du

formulaire de qualité, ou en d'autres mots, un accompagnement de genèse instrumentale relative au formulaire. D'ailleurs, l'un des utilisateurs de la plateforme interrogés exprime bien ce besoin d'accompagnement notamment des enseignants débutants :

Au delà de l'utilisation d'une activité innovante et inédite, le professeur doit persévérer (sic), en se formant et en échangeant avec ses pairs malgré peut être des obstacles et des échecs rencontrés... C'est à ce niveau que la question de l'accompagnement est importante surtout au début.

Un autre point concerne les évaluations de ressources dont nous avons déploré un trop petit nombre par rapport au nombre d'utilisateurs inscrits. Il semblerait qu'il y a très peu d'évaluations de ressources spontanées. En effet, la majorité des évaluations ont été réalisées soit dans le cadre de formations où elles faisaient partie d'activités proposées par des formateurs, ou bien par des membres de la communauté partenaires du projet Intergeo, qui ont réalisé ces évaluations dans le cadre du projet. Les utilisateurs interrogés ont déclaré télécharger des ressources de la plateforme pour une utilisation personnelle, mais ils n'ont que très rarement fait part de leur expérience avec la ressource. Les activités des membres se limitaient ainsi au dépôt et au téléchargement de ressources, activités qui ne stimulent pas des échanges entre les membres. Comme le précisent Butler et al. (2002), une participation active, sous la forme de création et de consommation du contenu, joue un rôle fondamental dans une communauté virtuelle. Cependant, cette participation, selon les auteurs, doit conduire à des échanges entre ses membres :

In online groups, participation means generating messages, responding to messages, organizing discussion, and offering other online activities of interest to member. If members do not create relevant content, other community building activities are largely irrelevant. Participation also means consuming content; if members do not regularly read the material that others provide, the online group will not remain viable. Group identity and personal relationships are constructed through the messages that members send and read. Attending to and reading messages is a prerequisite for others to provide them. Thus, active participation by providing and consuming content plays a crucial role in sustaining an online group. (Butler et al., 2002⁴³)

Selon les auteurs, un défi majeur dans le maintien d'un groupe virtuel est d'inciter les membres à consacrer du temps et de l'effort nécessaires pour effectuer ces activités d'entretien communautaire. Cela suppose une sorte de gestion de la communauté et emmène l'idée de 'leader' (un membre ou un groupe) de la communauté. Ces considérations ouvrent des pistes de recherche dans la direction de gestion de communautés virtuelles.

Enfin, le peu de révisions de ressources suite au feedback reçu appelle une interrogation sur l'efficacité de ce type de feedback. Des travaux ont montré que dans certains cas, un feedback différé est moins efficace qu'un feedback immédiat (voir par exemple Bosc-Miné, 2014). Le fait que l'auteur reçoit en général une évaluation de la ressource bien après l'avoir déposée sur la plateforme peut être une raison de peu de motivation pour réviser la ressource. Nous n'avons cependant pas conduit d'étude permettant de valider cette hypothèse.

⁴³Page 7 dans la version en ligne, https://www.cs.cmu.edu/~kiesler/publications/2008pdfs/2008_Community-effort-groups.pdf

III. APPROPRIATION DE RESSOURCES NUMERIQUES

Avec la forte prolifération de ressources notamment sur internet, la question de leur utilisation et réutilisation est plus que jamais d'actualité. Selon Agostinho et al. (2004), la réutilisation de ressources disponibles (objets d'apprentissage) suppose que (1) les enseignants soient prêts à utiliser les ressources des autres, (2) les ressources soient accompagnées d'une description standard (métadonnées) pour permettre de les retrouver facilement et (3) une fois récupérés, les enseignants sachent comment les utiliser efficacement dans leur contexte pédagogique.

La dernière hypothèse soulève la question d'appropriation de ressources existantes sur laquelle des recherches devraient se pencher, comme le soulignent Bennett et al. (2005) :

more needs to be known about teachers' current understandings and uses of digital resources, and what approaches may be effective in enhancing their approaches (p. 2392).

Or, les processus d'appropriation de ressources font rarement l'objet d'étude de recherche en didactique des mathématiques. Les chercheurs explorent davantage comment les enseignants utilisent les programmes officiels, en étudiant l'écart entre la planification de leurs enseignements et leur mise en œuvre (Remillard, 2018). D'autres s'intéressent au travail documentaire des enseignants qui consiste à sélectionner, adapter et combiner les ressources existantes (Gueudet et Trouche, 2008). Dans le cas de ressources ou technologies numériques, le terme intégration est utilisé, signifiant l'adoption de ressources ou technologies par un enseignant qui se manifeste par l'utilisation régulière de ces ressources. Aslan et Zhu (2016) parlent d'intégration de ressources dans les pratiques pédagogiques, Poisard et al. (2011) évoquent leur intégration dans le système de ressources de l'enseignant. Le terme d'appropriation de ressources est utilisé souvent dans le sens commun, sans conceptualisation spécifique.

Les travaux de thèse de Laetitia Rousson (2017) ont cherché à mieux comprendre les processus qui se produisent lorsqu'un enseignant décide d'utiliser une nouvelle ressource, et les facteurs susceptibles d'impacter ces processus. Dans ce qui suit, nous revenons sur ces travaux, après avoir relaté comment le concept d'appropriation est abordé notamment en sciences sociales et en sciences de gestion.

1. Concept d'appropriation

La notion d'appropriation est généralement considérée comme une action visant à adapter quelque chose à un but précis (Grimand, 2012). Les recherches récentes sur l'appropriation dans différents domaines scientifiques semblent s'accorder sur le rejet d'une perspective technocentrée et convergent sur la considération de l'appropriation comme un processus cognitif du sujet.

En sciences de gestion, l'appropriation (d'un outil de gestion) est considérée comme

un processus long qui débute bien avant la phase d'utilisation de l'objet et se poursuit bien après l'apparition des premières routines d'utilisation (De Vaujany, 2006, p. 118).

L'auteur distingue plusieurs phases de ce processus : une phase de pré-appropriation, survenant lorsque l'outil est présenté, discuté ou évoqué pour la première fois où l'outil « est l'objet d'une première interprétation » (ibid.) ; une phase d'appropriation originelle, lorsque « l'outil fait l'objet d'une acceptation minimale », est utilisé et certaines routines d'utilisation sont développées ; suivie de plusieurs phases de ré-appropriation où l'outil sera amené « à évoluer

de façon récurrente et imprévisible au fil de l'arrivée d'outils concurrents, de nouveaux acteurs, de changement dans l'environnement institutionnel ou concurrentiel » (ibid.). Ainsi, comme le précise l'auteur, le processus d'appropriation ne prend pas fin avec le développement de routines permanentes (ibid.). De Vaujany (2006) construit sa conceptualisation de l'appropriation sur plusieurs axiomes dont le suivant qui semble être pour lui de la plus haute importance :

Tout outil et objet de gestion, conçu à distance des acteurs ou bien dans une logique de co-production, présente une certaine flexibilité instrumentale et interprétative (axiome 2) (p. 117).

Comme le précise l'auteur, « [s]ans ces deux types de flexibilité, les outils ne peuvent pas être “détournés”, ré-interprétés et même plus simplement, instrumentés » (ibid.). Cette considération rejoint l'approche de l'appropriation en psychologie environnementale exprimée par Serfaty-Garzon (2003) :

[L]’appropriation n’est possible qu’en relation à quelque chose qui peut être attribué et qui, en tant que tel, peut à la fois servir de support à l’intervention humaine et être possédé. [...] L’objectif de ce type de possession est précisément de rendre propre quelque chose, c’est-à-dire de l’adapter à soi et, ainsi, de transformer cette chose en un support de l’expression de soi. L’appropriation est ainsi à la fois une saisie de l’objet et une dynamique d’action sur le monde matériel et social dans une intention de construction du sujet. (p. 28)

La recherche sur l'appropriation s'est intensifiée avec l'intégration du numérique dans tous les secteurs de l'activité humaine, y compris l'éducation. Selon Proulx (2002), l'appropriation d'une technologie par un agent humain nécessite une combinaison de trois conditions :

a) une maîtrise cognitive et technique minimale de l'objet ou du dispositif technique ; b) une intégration sociale significative de l'usage de cette technologie dans la vie quotidienne de l'agent humain ; c) la possibilité qu'un geste de création soit rendu possible par la technologie, c'est-à-dire que l'usage de l'objet technique fasse émerger de la nouveauté dans la vie de l'utilisateur. (p. 182)

Carroll et al. (2002), proposent un modèle de l'appropriation de la technologie à trois niveaux qui reflètent le degré de familiarité avec la technologie et qui conduisent à trois issues possibles : non appropriation, désappropriation et appropriation. Le premier niveau concerne le filtrage (*filtering*) qui se produit lors de la première rencontre avec une technologie où les premières perceptions émergent sans une utilisation prolongée de la technologie. Le filtrage conduit soit à la non appropriation lorsque le sujet n'est pas intéressé par la technologie, ou bien le processus d'appropriation s'enclenche. Le deuxième niveau concerne une évaluation plus approfondie de la technologie à travers son utilisation. Deux issues sont possibles : soit l'appropriation se produit lorsque les participants essaient et évaluent la technologie, sélectionnent et adaptent certains attributs et prennent possession de ses capacités pour satisfaire leurs besoins, ou bien la désappropriation se produit si le sujet choisit d'abandonner la technologie. Le troisième niveau concerne une utilisation continue de la technologie, la technologie est appropriée et intégrée dans des routines quotidiennes du sujet. L'appropriation n'est pas une activité ponctuelle mais est plutôt soumise à renforcement. Ces trois niveaux font écho aux phases de pré-appropriation, appropriation originelle et réappropriation de De Vaujany (2006).

Mangiante-Orsolla (2011), dans son étude du travail des enseignants du primaire avec des ressources curriculaires, considère l'appropriation des ressources comme une contribution de l'enseignant, par son interprétation de la ressource et des adaptations qu'il fait. Cela fait écho à Hoyles et al. (2013) qui affirment que pour s'approprier une technologie, les enseignants

doivent passer de l'adoption à l'adaptation, avec une plus grande conscience du potentiel d'instrumentalisation.

Les différentes conceptualisations de l'appropriation semblent converger vers l'idée que l'appropriation d'un objet (un outil, une ressource) est un processus cognitif entraînant des modifications plus ou moins significatives de l'objet, ainsi que le développement des interprétations et des routines d'utilisation chez l'utilisateur. Pour étudier les processus d'appropriation, les chercheurs se concentrent généralement soit sur des transformations observables de l'objet (appropriation considéré comme une adaptation), ou bien ils tentent de capturer une utilisation à plus long terme de l'objet (appropriation vue comme intégration). Ces recherches s'intéressent donc le plus souvent aux résultats de l'appropriation. Les travaux de thèse de Rousson (Rousson, 2017, Trgalová et Rousson, 2017) cherchent à étudier les processus d'appropriation de ressources par des enseignants et les facteurs qui les influencent. Dans la suite, nous présentons un cadre proposé par Rousson dans sa thèse pour étudier ces processus et des principaux résultats obtenus dans une étude de cas.

2. Appropriation de ressources numériques par des enseignants

Comme nous l'avons plus haut, l'appropriation est un processus long, en évolution continue, à partir du moment de la première rencontre avec l'objet (dans notre cas une ressource). La transposition de la vision de De Vaujany (2006) de l'appropriation d'un outil de gestion sur l'appropriation de ressources par des enseignants semble prometteuse. En effet, dans de nombreux cas, les enseignants doivent s'approprier des ressources qu'ils n'ont pas conçues. On peut considérer que la décision de l'utilisation ou non d'une ressource donnée est le résultat d'un processus de pré-appropriation, alors que son utilisation effective et la réutilisation représentent respectivement des phases d'appropriation originelle et de ré-appropriation.

Considérer l'appropriation d'un objet comme un processus qui donne lieu à des modifications de l'objet et au développement de routines d'utilisation chez l'utilisateur fait écho au processus de genèse instrumentale, concept central de l'approche instrumentale (Rabardel, 1995) développée pour mieux comprendre les interactions entre un sujet et un outil. Cette approche souligne la différence entre un artefact, disponible pour le sujet, et un instrument, qui est une construction mentale composée de l'artefact (ou d'une partie de celui-ci) et de schème d'utilisation associé. Trouche (2004) affirme que la construction d'un instrument, appelée genèse instrumentale,

is a complex process, needing time, and linked to the artefact characteristics (its potentialities and its constraints) and to the subject's activity, his/her knowledge and former method of working (pp. 285–286).

La genèse instrumentale est constituée de deux processus interdépendants : instrumentation dirigée vers le sujet et instrumentalisation dirigée vers l'artefact. Rabardel (1995) définit ces processus comme suit :

- *Les processus d'instrumentalisation concernent l'émergence et l'évolution des composantes artefact de l'instrument : sélection, regroupement, production et institution de fonctions, détournements et catachrèses, attribution de propriétés, transformation de l'artefact (structure, fonctionnement etc.) qui prolongent les créations et réalisations d'artefacts dont les limites sont de ce fait difficiles à déterminer ;*
- *Les processus d'instrumentation sont relatifs à l'émergence et à l'évolution des schèmes d'utilisation et d'action instrumentée : leur constitution, leur fonctionnement, leur évolution par accommodation, coordination combinaison, inclusion et assimilation réciproque, l'assimilation d'artefacts nouveaux à des schèmes déjà constitués etc. (p. 111)*

La genèse instrumentale semble s'aligner avec la perspective qui considère l'appropriation comme un double processus, impactant à la fois l'objet d'appropriation (artefact / ressource) par l'action d'un sujet, et le sujet chez qui l'évolution des connaissances ou des méthodes de travail se produit. Ainsi, le concept d'appropriation semble étroitement lié au concept de genèse instrumentale.

Dans notre cas, le sujet est un enseignant et l'artefact est une ressource numérique que l'enseignant cherche à utiliser dans son enseignement. La planification de la mise en œuvre de la ressource en classe nécessite de penser une organisation adéquate de l'espace de travail et du temps (Trouche, 2005). L'auteur introduit alors le concept d'orchestration instrumentale pour insister sur la nécessité de penser la « gestion didactique des artefacts présents » dans la classe. Une orchestration instrumentale définie par Trouche (2005) est

l'agencement systématique par un agent intentionnel des éléments (artefacts et humains) d'un environnement en vue de mettre en œuvre une situation donnée et, plus généralement, de guider les apprenants dans les genèses instrumentales et dans l'évolution et l'équilibrage de leurs systèmes d'instruments.

Une orchestration instrumentale est définie par une configuration didactique, qui est un agencement des artefacts dans l'environnement, et son mode d'exploitation, qui est la façon dont un enseignant décide d'exploiter la configuration didactique donnée au profit de ses intentions didactiques (Drijvers et al., 2010). Nous considérons que l'appropriation d'une ressource entraîne sa (ré)utilisation par l'enseignant, ce qui conduit à l'émergence de régularités dans ses orchestrations instrumentales. Celles-ci peuvent alors être considérées comme des schèmes d'utilisation liés à la ressource.

En nous inspirant de l'approche instrumentale, nous considérons le processus d'appropriation d'une ressource par un enseignant comme sa genèse instrumentale, où le processus d'instrumentalisation concerne l'adaptation de la ressource, et le processus de l'instrumentation correspond à l'évolution des connaissances professionnelles de l'enseignant. Suivant De Vaujany (2006), nous considérons trois phases dans le processus d'appropriation : (1) la pré-appropriation, correspondant à l'inspection a priori de la ressource par l'enseignant ; (2) l'appropriation originelle, correspondant à la première mise en œuvre de la ressource ; (3) la ré-appropriation, correspondant aux éventuelles révisions de la ressource et à ses utilisations ultérieures. L'orchestration instrumentale liée à la mise en œuvre de la ressource en classe a une importance particulière comme une fenêtre sur les processus instrumentaux et l'évolution des connaissances professionnelles de l'enseignant. Le processus d'appropriation donne naissance à une « ressource appropriée » qui, à l'instar de l'instrument dans l'approche instrumentale, peut être définie par l'équation suivante : ressource appropriée = ressource instrumentalisée + orchestrations instrumentales. Nous supposons que l'appropriation d'une ressource se manifeste par des orchestrations stables et efficaces, qui sont un signe du développement chez l'enseignant de schèmes d'utilisation associés à la ressource, et à travers l'intégration de la ressource dans le système de ressources de l'enseignant. La Figure 7 présente le modèle d'appropriation d'une ressource par un enseignant dans la perspective d'une mise en œuvre dans la classe :

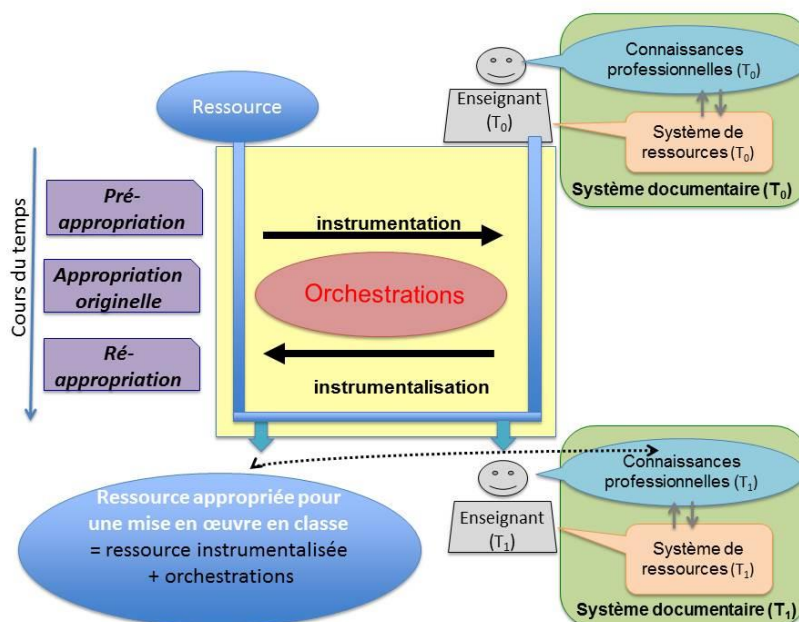


Figure 7. Schéma du processus d'appropriation d'une ressource par un enseignant (adapté de (Rousson, 2017, p. 212))

Rousson (2017) a étudié les processus d'appropriation d'un jeu numérique développé pour des tablettes tactiles et à destination des élèves de l'école maternelle. Le savoir mathématique en jeu est l'énumération. Quatre professeurs d'école ont participé à l'expérimentation, dont deux qui étaient impliqués dans la conception du jeu et deux autres en dehors du projet de conception de ce jeu, le but étant de pouvoir comparer dans quelle mesure la participation à la conception d'une ressource en facilite l'appropriation. Dans la suite, nous présentons quelques résultats de cette étude.

L'analyse du cas de l'appropriation de la ressource par un des enseignants, Tom, n'ayant pas participé à la conception du jeu en utilisant le modèle proposé (Figure 7) montre la pertinence de considérer différentes phases dans le processus d'appropriation, en particulier la pré-appropriation et l'appropriation originelle. Rousson (2017) a situé la phase de pré-appropriation en amont de l'utilisation de la ressource, en suivant Carroll et al. (2002) ou De Vaujany (2006). Il s'agit d'une première rencontre de l'enseignant avec la ressource où les premières perceptions émergent. Chez Tom, cette phase a enclenché le processus d'appropriation (appropriation originelle) de la ressource. Il a pu alors l'évaluer de manière plus approfondie à travers sa mise en œuvre en classe.

L'appropriation nécessite une flexibilité de la ressource permettant les processus d'instrumentalisation. Dans le cas de Tom, la possibilité de décider de l'ordre des activités et de proposer une activité spécifique qui favorise la stratégie correspondant à son objectif d'apprentissage ont été décisives pour l'appropriation de la ressource par Tom. D'autre part, l'appropriation des ressources contribue au développement professionnel de l'enseignant. Dans le cas de Tom, la nature de la ressource (un jeu avec des activités de difficulté croissante nécessitant une mise en œuvre en plusieurs séances) a conduit l'enseignant à penser à une évaluation formative continue pour suivre les progrès des élèves, à chercher les orchestrations instrumentales les plus appropriées et à adapter ses interventions pédagogiques.

Il semble que des connaissances mathématiques et didactiques solides liées au savoir en jeu dans la ressource jouent un rôle important dans le processus d'appropriation des enseignants. Dans le cas de Tom, ces connaissances sont apparues comme clés, lors de la phase de pré-

appropriation, pour la compréhension des choix de conception de la ressource et du potentiel d'apprentissage qui en résulte, ce qui lui a permis de prendre des décisions appropriées.

La thèse de Rousson (2017) ouvre de nombreuses perspectives pour des recherches ultérieures dans plusieurs directions qui concernent en particulier :

- l'analyse de ressources numériques pour identifier des éléments ou des caractéristiques facilitant leur appropriation. La flexibilité permettant une instrumentalisation de la ressource semble être une telle caractéristique. La dimension didactique proposant une « analyse a priori » de la ressource (explicitation de l'objectif d'apprentissage, des intentions des concepteurs, des choix didactiques avec leur justification...) pourrait également aider les enseignants à se l'approprier ;
- les facteurs relatifs aux enseignants. Dans sa thèse, Rousson (2017) a interrogé les connaissances professionnelles des enseignants en se référant au modèle TPACK (Mishra & Koehler, 2006) et leur influence sur les processus d'appropriation. Néanmoins, ses résultats mettent en évidence d'autres facteurs tels que le rapport de l'enseignant aux technologies numériques incluant des croyances, des valeurs ou des attitudes qui vont au-delà des éléments de nature cognitive ;
- la possibilité d'identifier et décrire des niveaux d'appropriation. En effet, les études de cas réalisées par Rousson (2017) montrent des processus d'appropriation différents et la question se pose si ces diverses manières de s'approprier une ressource peuvent être conceptualisées sous forme de niveaux d'appropriation. La notion de degré de fidélité (*degree of fidelity*) de la mise en œuvre de la ressource introduite par Clark-Wilson, Hoyles et Noss (2015) semble faire écho à ce questionnement.

IV. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Notre note de synthèse a été construite autour de deux problématiques au cœur de nos travaux de recherche : l'une liée aux ressources et à leur qualité et l'autre concernant les pratiques des enseignants de mathématiques en lien avec des ressources et notamment leur appropriation. Dans cette section nous évoquons quelques perspectives que nos travaux ouvrent.

1. Ressources numériques : conception et qualité

Les travaux autour de la qualité de ressources de géométrie dynamique (section II), ont nourri et continuent d'alimenter nos projets de recherche. La problématique de la qualité de ressources est toujours, bien qu'implicitement, au centre des projets qui comportent une dimension de conception ou co-conception de ressources. Elle conduit à la proposition d'un modèle de ressources qui joue le rôle d'un outil conceptuel pour à la fois guider le processus de conception de ressources et permettre leur partage au sein de la communauté du projet en question, voire au-delà. Ainsi, par exemple dans le cadre du projet Tactiléo, le modèle de ressources numériques, destiné à servir de guide pour la conception de situations d'apprentissage instrumentées avec des interfaces tactiles, comprend quatre dimensions : savoir, enseignant, élève et interface tactile (Bécu-Robinault et al., 2016). La dimension « savoir » décrit le savoir en jeu qui constitue l'objectif d'apprentissage et analyse la manière dont ce savoir est supposé être acquis à travers les activités proposées dans la ressource. Ce volet du modèle est inspiré des dimensions « contenu » et « didactique » de la qualité de ressources. La dimension

« enseignant » fournit une analyse didactique de la situation d'apprentissage en termes de variables didactiques pour aider les enseignants à saisir les enjeux et le potentiel d'apprentissage de la situation. Ce volet s'appuie sur les dimensions « instrumentale » et « didactique » de la qualité de ressources. La dimension « élève » aide à construire la situation d'apprentissage en tenant compte des différents niveaux d'appropriation des artefacts numériques par les élèves (Gonçalves, 2013). Ici, on retrouve également l'influence des dimensions « instrumentale », « didactique » et « pédagogique » de la qualité de ressources. Enfin, la dimension « interface tactile » décrit les fonctionnalités des interfaces tactiles qui peuvent être mobilisées dans la conception de situations d'apprentissage et leurs potentialités pour les apprentissages visés. Ce volet puise dans les dimensions « technique », « instrumentale » et « valeur ajoutée de la technologie ».

Dans le projet PREMaTT1, un modèle de ressources est né à partir d'un travail collaboratif entre enseignants et chercheurs dans le but de décrire une situation d'apprentissage, mais également de rendre compte « comment ça a marché » dans des classes (Alturkmani, 2019, p. 32). Ce modèle intègre une « carte d'identité » de la ressource qui décrit brièvement la ressource (dimension « métadonnées »), un « scénario » comportant un volet élève et un volet enseignant, qui présente de manière détaillée les activités mathématiques proposées et leur analyse a priori, et un « retour d'expérience » qui propose des éléments d'une analyse a posteriori appuyée éventuellement sur des extraits de productions d'élèves. Ce dernier élément est apparu comme ayant une importance particulière pour soutenir l'appropriation de la ressource par des enseignants non concepteurs.

Ces deux exemples de modèles de ressources s'inspirent des dimensions de qualité que nous avons définies pour les ressources de géométrie dynamique. Cependant, ils comportent des spécificités dans la mesure où ils répondent à des besoins particuliers des projets de recherche au sein desquels ils ont été conçus. Se pose alors naturellement la question des dimensions partagées par les différents types de ressources afin de proposer un modèle qui comporterait un « tronc commun » pertinent pour tout type de ressource auquel s'ajouteraient éventuellement d'autres dimensions plus spécifiques soit de la technologie numérique mobilisée ou de la finalité de la ressource par exemple.

Des travaux récents portant sur l'analyse de manuels numériques proposent de nouveaux outils conceptuels pour aborder la notion de qualité, par exemple la notion de connectivité (Pepin et al., 2016). Les auteurs distinguent la connectivité au niveau macro (ex. liens entre des parties du manuel et des pages web) et au niveau micro (ex. liens entre différentes représentations d'un concept mathématique établis par les auteurs du manuel). Ces travaux proposent des approches complémentaires de la qualité de ressources dont l'articulation avec nos propres approches, plus fines aux niveaux didactique et instrumental notamment, constituent des pistes prometteuses pour repenser la conceptualisation de la notion de qualité de ressources numériques.

2. Pratiques des enseignants avec des ressources : appropriation et usages

Une enquête sur les pratiques numériques des enseignants de mathématiques que nous avons menée récemment a montré un décalage dans leur utilisation fréquente de ressources numériques pour préparer les enseignements (en dehors de la classe) et leur utilisation épisodique, voire inexistante du numérique en classe (Trgalová & Tabach, 2020). Dans la période marquée par une grande disponibilité de ressources numériques et un accès facile à ces ressources, une hypothèse explicative de leur utilisation peu fréquente peut résider dans la complexité des processus d'appropriation. Comme évoqué dans la section III, selon Carroll et al. (2002), le premier niveau d'appropriation d'une ressource (première rencontre) peut

conduire à sa non appropriation lorsque le sujet n'y trouve pas d'intérêt ou qu'elle ne répond pas à ses besoins. Le deuxième niveau d'appropriation (première utilisation) peut conduire à la désappropriation si le sujet décide d'abandonner la ressource, par exemple peu convaincu de son apport. Ces observations ouvrent des pistes de recherche focalisées sur des enseignants qui utilisent peu ou pas les ressources numériques en classe et qui interrogeraient les raisons de non appropriation ou désappropriation de ces ressources par ces enseignants.

Il nous semble important aussi de penser de nouvelles formes de formation des enseignants de mathématiques dans le but de soutenir des processus d'appropriation de ressources, numériques ou non. Courbon (2020) propose d'approcher l'étude de l'appropriation de ressources en questionnant leur utilité et utilisabilité. L'auteur affirme que le sujet ne peut transformer une ressource (artefact) en instrument que s'il la perçoit comme utile, c'est-à-dire qu'elle répond à un besoin. Elle doit également être perçue comme utilisable, c'est-à-dire adaptable et facile à utiliser dans le contexte du sujet. L'articulation de ces outils conceptuels empruntés de l'ergonomie cognitive avec le modèle d'appropriation proposé par Rousson (2017) constitue une autre piste de recherche que nous souhaitons poursuivre.

Les travaux de Rousson (2017) ont mis en évidence que d'autres facteurs en plus des connaissances professionnelles des enseignants ont un impact sur les processus d'appropriation de ressources. Ceci nous conduit à interroger les compétences numériques des enseignants de mathématiques qui intègrent des connaissances, des savoir-faire et des attitudes (ex. Ala-Mutka, 2011). Le paragraphe suivant présente les grandes lignes de cette problématique articulant le questionnement de qualité des ressources et de leur appropriation.

3. Compétences numériques des enseignants de mathématiques

Les recherches s'accordent sur le fait que des connaissances et des savoir-faire spécifiques sont nécessaires pour l'enseignement des mathématiques avec la technologie numérique. Pourtant, ces connaissances et savoir-faire ne sont pas définis suffisamment clairement pour aider à concevoir des formations efficaces autour du numérique. En effet, la plupart des recherches se rapportant à ce genre de formations, initiales ou continues, concluent par des résultats insatisfaisants en termes d'écart entre les attentes et les besoins des enseignants et le contenu des formations (voir par exemple Hegedus et al., 2016). Abboud-Blanchard et Emprin (2009) constatent également que « l'absence de pratiques régulières des TICE est soulignée comme étant directement liée à un problème de formation » (p. 125). Notre projet de recherche dans cette direction cherche à proposer un cadre conceptuel permettant d'une part de définir, a priori, des compétences numériques des enseignants de mathématiques, et d'autre part, de permettre de les observer dans des pratiques de ces enseignants. Les travaux que nous avons déjà conduits à ce sujet (ex. Tabach & Trgalová, 2020 ; Trgalová & Tabach, 2018) nous amènent à faire l'hypothèse de l'importance de la *double genèse instrumentale* (Haspekian, 2011) des technologies numériques et de la nécessité à prendre en compte les *orientations* personnelles des enseignants qui, selon Schoenfeld (2011) déterminent leur prise de décisions, y compris donc concernant l'utilisation ou non du numérique dans leur enseignement.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- ABBOUD-BLANCHARD, M. (2013). *Les technologies dans l'enseignement des mathématiques. Etudes des pratiques et de la formation des enseignants. Synthèses et nouvelles perspectives*. Université Paris-Diderot - Paris VII. <https://halshs.archives-ouvertes.fr/tel-00846323/>
- ABBOUD-BLANCHARD, M., & EMPRIN, F. (2009). Pour mieux comprendre les pratiques des formateurs et de formations TICE. *Recherche et formation*, 62, 125-140.
- ADLER, J. (2019). Foreword. In L. Trouche, G. Gueudet, & B. Pepin (Eds.), *The 'Resource' approach to mathematics education* (pp. v-viii). Cham: Springer.
- ADLER, J. (2000). Conceptualising resources as a theme for teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 3, 205-224.

- AGOSTINHO, S., BENNETT, S., LOCKYER, L., & HARPER, B. (2004). Developing a learning object metadata application profile based on LOM suitable for Australian higher education context. *Australasian Journal of Educational Technology*, 20(2), 191–208.
- ALA-MUTKA, K. (2011). *Mapping digital competence: Towards a conceptual understanding*. JRC Technical Note. Luxembourg: European Union.
- ALTURKMAI, M. D. (Coord., 2019). *Penser les ressources de l'enseignement des mathématiques dans un temps de transitions, 2016-2019*. Projet d'action éducative et de recherche de l'institut Carnot de l'éducation. Rapport scientifique des composantes PAE et PR.
- ARTIGUE, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematics Learning*, 7, 245-274.
- ASLAN, A. & ZHU, C. (2016). Influencing factors and integration of ICT into teaching practices of pre-service and starting teachers. *International Journal of Research in Education and Science (IJRES)*, 2(2), 359–370.
- BÉCU-ROBINAULT, K., DAUBIAS, P., JOLIVET, S., KNIBBE, C., MÉGARD, C., MONOD-ANSALDI, R., PRIEUR, M., PEREZ, T., SANCHEZ, E., & TRGALOVÁ, J. (2016). *Rapport décrivant le modèle de ressources à partir des expérimentations dans les classes - novembre 2015*. Livrable D2-B, Tactiléo.
- BENNETT, S. J., LOCKYER, L. & BROWN, I. M. (2005). Investigating the factors that influence the use of digital learning resources in the K-12 educational context. In P. Kommers & G. Richards (Eds.), *Proceedings of EDMEDIA 2005 World Conference on Educational Multimedia, Hypermedia and Telecommunications* (pp. 2391–2397). Norfolk: Association for the Advancement of Computing in Education.
- BIBEAU, R. (2005). Les TIC à l'école : proposition de taxonomie et analyse des obstacles à leur intégration. *EpiNet* 81. <http://www.epi.asso.fr/revue/articles/a0511a.htm>
- BOSC-MINÉ, C. (2014). Caractéristiques et fonctions des feed-back dans les apprentissages. *L'Année Psychologique*, 2(114), 315-353. <https://www.cairn.info/revue-l-annee-psychologique1-2014-2-page-315.htm>
- BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des situations didactiques* (Textes rassemblés et préparés par Nicolas Balacheff, Martin Cooper, Rosamund Sutherland, Virginia Warfield). Grenoble : La pensée sauvage.
- BUTLER, B., SPROULL, L., KIESLER, S., & KRAUT, R. (2002). Community effort in online groups: who does the work and why? In S. Weisband (Ed.), *Leadership at a distance: research in technologically-supported work* (pp. 171-194). NYJ: Lawrence Erlbaum Associates/Taylor Francis.
- CAMILLERI, A. F., EHLERS, U. D., & PAWLOWSKI, J. (2014). *State of the Art Review of Quality Issues Related to Open Educational Resources (OER)*. Luxembourg: Publications Office of the European Union.
- CARROLL, J., HOWARD, S., PECK, J., & MURPHY, J. (2002). A Field Study of Perceptions and Use of Mobile Telephones by 16 to 22 Year Olds. *The Journal of Information Technology Theory and Application (JITTA)*, 4(2), 49-61.
- CCDMD (2003). *Réaliser des ressources d'enseignement et d'apprentissage informatisées*. <https://www.ccdmd.qc.ca/system/files/rea-guide.pdf>
- CLARK-WILSON, A., HOYLES, C., & NOSS, R. (2015). Scaling mathematics teachers' professional development in relation to technology –probing the fidelity of implementation through landmark activities. In Krainer, K. & Vondrová, N. (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2333-2339). Prague: Charles University, Faculty of Education & ERME.
- COURBON, L. (2020). *À quelles conditions les apports de la recherche proposés en formation de formateurs sont-ils appropriables ?* Mémoire de Master 2, INSPE et Université Claude Bernard Lyon 1.
- DE VAUJANY, F. X. (2006). Pour une théorie de l'appropriation des outils de gestion : Vers un dépassement de l'opposition conception-usage. *Management & Avenir*, 9(3), 109-126.
- DEL MORAL, M.E., & CERNEA, D. A. (2005). Design and evaluate learning objects in the new framework of the semantic web. In A. Mendez-Vila et al. (Eds.) *Recent research developments in learning technologies*. Badajoz: FORMATEX.
- DELVOSALLE, C. (2002). La qualité : des concepts à la pratique. *Pyramides*, 5, 137-154. <http://journals.openedition.org/pyramides/480>
- DRIJVERS, P., DOORMAN, M., BOON, P., & VAN GISBERGEN, S. (2010). Instrumental orchestration: theory and practice. In V. Durrand-Guerrier et al. (Eds.), *Proceedings of the Sixth CERME Congress* (pp. 1349–58). Lyon: Claude Bernard University and ERME.
- DUVAL, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 5, 37-65.
- GONÇALVES, C. (2013). *Appropriation & Authenticity - A didactical study on students' learning experience while playing a serious game in epidemiology*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble.
- GUEUDET, G., & TROUCHE, L. (2011). Développement de l'Internet dans l'enseignement : vers un essor du collectif ? In C. Develotte, & F. Poyet (Dir.), *L'éducation à l'heure du numérique, état des lieux, enjeux et perspectives* (pp. 145-165). Lyon : IFÉ-ENSL.
- GUEUDET, G., & TROUCHE, L. (2008). Du travail documentaire des enseignants : genèses, collectifs, communautés. Le cas des mathématiques. *Education et didactique*, 2(3), 7-33.
- HASPEKIAN, M. (2011). The co-construction of a mathematical and a didactical instrument. In M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the 7th congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME7)* (pp. 2298–2307). Rzeszów, Poland: University of Rzeszów.
- HEALY, L. (2000). Identifying and explaining geometrical relationship: Interactions with robust and soft Cabri constructions. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th PME Conference* (pp. 103-117), Hiroshima, Japan.

- HEGEDUS, S., LABORDE, C., BRADY, C., DALTON, S., SILLER, H. S., TABACH, M., TRGALOVÁ, J., & MORENO-ARMELLA, L. (2016). *Uses of technology in upper secondary mathematics education*. ICME-13 Topical Surveys. Cham: Springer.
- HOYLES, C., NOSS, R., VAHEY, P. et al. (2013). Cornerstone Mathematics: designing digital technology for teacher adaptation and scaling. *ZDM Mathematics Education* 45, 1057–1070.
- JOLIVET, S. (2018). *Modèle de description didactique de ressources d'apprentissage en mathématiques, pour l'indexation et des services EIAH*. Thèse de doctorat, Université Grenoble –Alpes.
- KAWACHI, P. (2014). *Quality Assurance Guidelines for Open Educational Resources: TIPS Framework*. Version 2.0. New Delhi: CEMCA.
- KORTENKAMP, U., BLESSING, A.M., DOHRMANN, C., KREIS, Y., LIBBRECHT, P., & MERCAT, C. (2009), Interoperable interactive geometry for Europe – First technological and educational results and future challenges of the Intergeo project. In V. Durrand-Guerrier et al. (Eds.), *Proceedings of the CERME6 conference* (pp. 1150-1160), Lyon, France.
- LABORDE, C. (2002). Integration of technology in the design of Geometry tasks with Cabri-Geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6, 283–317.
- MAGNIANTE-ORSOLA, C. (2011). Etude du processus d'appropriation de ressources par des professeurs des écoles enseignant les mathématiques : entre travail au quotidien et développement des pratiques. *Le travail enseignant au XXIe siècle Perspectives croisées : didactiques et didactique professionnelle*. Colloque international INRP.
- MAHE, A., & NOËL, E. (2006). Description et évaluation des ressources pédagogiques : Quels modèles? *Colloque TICE Méditerranée*, Gênes. <https://www.researchgate.net/publication/237530555>
- MAR, A. (2013). 7 definitions of quality. *Simplicable*. <https://business.simplicable.com/business/new/7-definitions-of-quality>
- MERCAT, C., HAŠEK, R., LEISTENSCHNEIDER, M., PECH, P., RECIO, T., SOURY-LAVERGNE, S., & TRGALOVÁ, J. (2009). *Report on best practices for the use of DGS content*. Deliverable n°6.2, Intergeo European project.
- MISHRA, P., & KOEHLER, M. J. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A new framework for teacher knowledge. *Teachers College Record*, 108(6), 1017–1054.
- PEPIN, B. (2020). Quality of (digital) resources for curriculum innovation. In A. Donevska-Todorova et al. (Eds.), *Proceedings of the Tenth ERME Topic Conference (ETC 10) on Mathematics Education in the Digital Age (MEDA)* (pp. 19-26). Linz: Johannes Kepler University and ERME.
- PEPIN, B., GUEUDET, G., YERUSHALMY, M., TROUCHE, L., & CHAZAN, D. (2016). E-textbooks in/for teaching and learning mathematics: A potentially transformative educational technology. In L. English & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 636–661). New York: Taylor & Francis.
- POISARD, C., BUENO-RAVEL, L., & GUEUDET, G. (2011). Comprendre l'intégration de ressources technologiques en mathématiques par des professeurs des écoles. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 31(2), 151–189.
- PROULX, S. (2002). Trajectoires d'usages des technologies de communication : les formes d'appropriation d'une culture numérique comme enjeu d'une société du savoir. *Annales des télécommunications*, 57(3–4), 180–189.
- RABARDEL, P. (1995). *Les hommes et les technologies ; approche cognitive des instruments contemporains*. Paris : Armand Colin. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01017462>
- REMILLARD, J. T. (2018). Examining teachers' interactions with curriculum resource to uncover pedagogical design capacity. In L. Fan et al. (Eds.), *Research on mathematics textbooks and teachers' resources* (pp. 69–88). ICME-13 Monographs. Cham: Springer.
- REVERDY, C. (2014). *Du programme vers la classe : des ressources pour enseigner*. Dossier de veille de l'IFE n°96. <http://veille-et-analyses.ens-lyon.fr/DA-Veille/96-novembre-2014.pdf>
- ROBERTSON, A. (2006). *Introduction aux banques d'objets d'apprentissage en français au Canada*. Rapport pour le Réseau d'enseignement francophone à distance du Canada. <http://www.refad.ca>
- ROUSSON, L. (2017). *Conception d'un jeu-situation numérique et son appropriation par des professeurs : le cas de l'enseignement de l'énumération à l'école maternelle*. Thèse de doctorat, Université Lyon 1.
- SCHOENFELD, A. H. (2011). Toward professional development for teachers grounded in a theory of decision making. *ZDM Mathematics Education*, 43, 457-469.
- SERFATY-GARZON, P. (2003). L'appropriation. In M. Segaud, J. Brun, J.-C. Driant (Eds), *Dictionnaire de l'habitat et du logement* (pp. 27–30). Paris : Editions Armand Colin.
- TABACH, M., & TRGALOVÁ, J. (2020). Teaching Mathematics in the Digital Era: Standards and Beyond. In B.-D. Kolikant Y., Martinovic D., & Milner-Bolotin M. (Eds.), *STEM Teachers and Teaching in the Digital Era* (pp. 221-242). Cham: Springer.
- TRGALOVÁ, J., & JAHN, A. P. (2013), Quality issue in the design and use of resources by mathematics teachers. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 45(7), 973–986.
- TRGALOVÁ, J., & ROUSSON, L. (2017). Model of Appropriation of a Curricular Resource: A Case of a Digital Game for the Teaching of Enumeration Skills in Kindergarten. *ZDM Mathematics Education*, 49(5), 769–784.
- TRGALOVÁ, J., SOURY-LAVERGNE, S., & JAHN, A. P. (2011), Quality assessment process for dynamic geometry resources in Intergeo project: rationale and experiments. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 43(3), 337-351.
- TRGALOVÁ, J. & TABACH, M. (2020). Bi-national survey on mathematics teachers' digital competences. In A. Donevska-Todorova et al. (Eds.), *Proceedings of the 10th ERME Topic Conference on Mathematics Education in the Digital Age (MEDA)* (pp. 117-124). Linz: Johannes Kepler University and ERME.

- TRGALOVÁ, J., & TABACH, M. (2018). In search for standards: Teaching mathematics in technological environment. In L., Ball, P., Drijvers, S., Ladel, H-S., Siller, M., Tabach, & C., Vale, (Eds.), *Uses of technology in primary and secondary mathematics education* (pp. 387-397). Cham: Springer.
- TROUCHE, L. (2005). Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques : nécessité des orchestrations. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 25(1), 91-138.
- TROUCHE, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematics Learning*, 9, 281–307.
- WILEY, D. A. (2002). Connecting learning objects to instructional design theory: A definition, a metaphor, and a taxonomy. In D. A. Wiley (Ed.), *The instructional use of learning objects* (pp. 3-23). Bloomington: Agency for Instructional Technology and Association for Educational Communications & Technology.

DENSE AND DENUMERABLE ORDERED SETS - PARADOXICAL OBJECTS? ENSEMBLES ORDONNÉS DENSES ET DÉNOMBRABLES - DES OBJETS PARADOXAUX ?

Laura BRANCHETTI

Département des Mathématiques, Université de Milan, Italie

branchetti.laura@gmail.com

Viviane DURAND-GUERRIER

IMAG, CNRS, Université de Montpellier, France

viviane.durand-guerrier@umontpellier.fr

Abstract

How is it possible that an infinite set is both dense and countable? This intriguing question from a student led us to explore what could have originated it (Branchetti and Durand-Guerrier, 2018). We will give the main elements of the epistemological analysis that we conducted as a prolegomenon for our didactic study. We will then justify our choice to place ourselves in the cognitive perspective of the articulation between concept image and concept definition (Tall & Vinner, 1981). We will then give the concept-images and concept-definitions that we have identified and retained for our empirical study. We will finally present our main results and open on the implications in terms of curriculum.

Résumé

Comment est-il possible qu'un ensemble infini soit à la fois dense et dénombrable ? Cette question intrigante nous a conduites à explorer ce qui pouvait être à son origine (Branchetti et Durand-Guerrier 2018). Nous donnerons les principaux éléments de l'analyse épistémologique que nous avons conduite comme préalable à notre étude didactique. Nous motiverons ensuite notre choix de nous placer dans la perspective cognitive de l'articulation entre concept image et concept définition (Tall & Vinner 1981). Nous donnerons ensuite les concept-images et concept-définitions que nous avons identifiés et retenus pour notre étude empirique dont nous présenterons les principaux résultats. Nous concluons en ouvrant sur les implications en termes de curriculum.

RÉFÉRENCES

- BRANCHETTI, L., & DURAND-GUERRIER, V. (2018). Are all denumerable sets of numbers order-isomorphic? INDRUM 2018 Proceedings, pp. 14–23.
- TALL, D., VINNER, S. (1981). Concept images and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151–169.

L'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES DANS LA FORMATION DES ENSEIGNANTS : ELEMENTS POUR LA CONSTRUCTION D'UNE COMPÉTENCE HISTORIQUE

Ana Jimena LEMES

Université de Lille

ana-jimena.lemes@univ-lille.fr

Résumé

Présente dans de nombreux pays dans le monde, la place de l'histoire des mathématiques dans la formation des enseignants ne cesse de questionner une vaste communauté de chercheurs et d'enseignants. C'est ainsi qu'au cours des années 2000, cette communauté s'est penchée sur l'importance de l'intégration d'une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques. Dans ce travail de recherche doctorale (Lemes, 2019) nous nous sommes axée sur le rôle de l'histoire des mathématiques dans la formation initiale des enseignants de cette manière en France et en Uruguay. Nous nous sommes particulièrement intéressée à l'influence d'un cours d'histoire des mathématiques sur les conceptions des futurs enseignants de mathématiques. À cette fin, nous mobilisons le cadre théorique défini par Ball, Thames et Phelps (2008), les Connaissances Mathématiques pour l'Enseignement, qui nous permet de préciser les connaissances professionnelles nécessaires à l'acte pédagogique liées à l'intégration de l'histoire. Pour mener cette recherche nous nous sommes concentrée sur trois communautés : un groupe d'étudiants stagiaires qui suivent un cours d'histoire des mathématiques à l'université, un groupe d'enseignants de mathématiques qui incluent une perspective historique dans leurs cours et enfin, un groupe d'enseignants-chercheurs reconnus comme experts en histoire des mathématiques, formateurs d'enseignants. Ces trois communautés sont originaires de France et d'Uruguay. A la fin de notre étude nous avons élaboré une synthèse des résultats dans ces deux pays permettant de déterminer les caractéristiques propres à l'intégration de l'histoire des mathématiques dans la formation des enseignants. Ces caractéristiques, que nous qualifions de complémentaires, rendent visible la construction d'une compétence historique liée à l'intégration de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement des mathématiques.

Mots clés

Histoire des mathématiques, Didactiques des mathématiques, Formation des enseignants des mathématiques.

I. INTRODUCTION

Notre expérience en tant que professeur de mathématiques dans le secondaire en Uruguay, nous a sensibilisé à l'intégration de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement. Il en est ressorti toute une série des questions que sont liées aux potentialités de l'histoire des mathématiques, aux difficultés de mise en œuvre de cette intégration, au type de matériel nécessaire et en particulier

aux compétences qu'un enseignant doit développer pour introduire une perspective historique dans ses cours. Cet article est l'un des résultats de notre recherche doctorale dans laquelle nous nous sommes intéressée à cette intégration, aux objectifs, aux difficultés et à ce que nous avons appelé la compétence historique des enseignants de mathématiques.

L'état de l'art de cette recherche fut élaboré à partir d'une littérature internationale (espagnol, anglais, français et portugais). Parmi les ouvrages utilisés on peut citer : la perspective historique en France (Barbin, 2010), la socio-épistémologie du Mexique (Montiel et Buendía, 2012), história da ciência e ensino du Brésil (Beltran, Saito et Trindade, 2014 ; Pereira et Saito, 2018), Didáctica de la historia de las matemáticas de Colombie (Torres, Guacaneme et Arboleda, 2014 ; Guacaneme, 2016), les travaux de Jankvist en Danemark (Jankvist, 2013 ; Smestad, Jankvist et Clark, 2014) et Guillemette au Canada (Guillemette, 2015 ; Guillemette, 2017).

Ces travaux qui réfléchissent sur l'enseignement dans la formation des enseignants ont trois points communs : a) ils défendent l'introduction de l'histoire des mathématiques dès la formation initiale, et certaines insistent également sur la formation continue, b) ils sont unanimes sur le fait que cette expérience peut être motivée par la lecture et l'analyse des sources historiques et, c) ils partagent tous la préoccupation du manque de matériel adéquat et du manque de formateurs ayant des connaissances spécifiques dans le traitement de l'histoire, ainsi que le manque d'approches méthodologiques pour la recherche.

En parallèle nous avons lu les travaux de Abd-El-Khalick et Lederman (2000) au sujet de l'intégration de l'histoire des sciences dans l'enseignement des sciences (NOS). Ces auteurs affirment qu'il n'y a pas eu de résultats significatifs confirmant l'amélioration de l'apprentissage des sciences. Ce constat nous a interpellé et nous nous sommes demandée quelle formation est suivie par les étudiants stagiaires et quelles compétences sont nécessaires pour accomplir cette tâche. Toutes ces remarques confirment la pertinence de notre thème de recherche.

En partant de ces trois points communs mentionnés ci-dessus, nous nous sommes interrogée sur le contenu de la formation des étudiants qui suivent le cours d'histoire des mathématiques. Dans ce sens, nous nous sommes demandée si nous pouvions identifier de changements dans les conceptions sur les mathématiques et leur enseignement après ce cours. C'est ainsi que, les objectifs spécifiques proposés pour cette recherche sont :

1. Effectuer une analyse des conceptions des futurs enseignants de mathématiques, sur les mathématiques et son enseignement, *a priori* et *a posteriori* d'un cours d'histoire des mathématiques.
2. Identifier l'influence de ce cours sur les conceptions des futurs enseignants.
3. Étudier les liens entre ces conceptions et le développement des compétences nécessaires pour introduire une perspective historique dans la classe.
4. Effectuer l'étude en France (Lille) et en Uruguay (Montevideo).

II. LE CADRE THEORIQUE

Le *Mathematical Knowledge for Teaching*, ou dans la version francophone, les *Connaissances Mathématiques pour l'Enseignement*⁴⁴ (CME), est un cadre théorique développé par Ball,

⁴⁴Dans notre thèse nous avons utilisé la nomenclature traduit par Clivaz (2011, p. 28).

Thames et Phelps (2008) pour la recherche scientifique autour de la connaissance pédagogique du contenu proposé par Shulman (1987). L'effort de Ball et de ses collaborateurs se concrétise dans le cadre CME qu'ils présentent en 2008, où ils tentent de préciser les définitions des termes utilisés et les catégories des connaissances des enseignants, tout en améliorant les mesures et déterminant l'effet de ces connaissances sur la performance des élèves. Relevant ainsi le défi proposé par Shulman, ces chercheurs se sont concentrés sur le développement d'un cadre théorique qui tente de répondre aux exigences de l'enseignement des mathématiques aux États Unis. Ils ont défini les CME comme « les connaissances mathématiques nécessaires pour effectuer le travail d'enseignement des mathématiques » (Ball, Thames et Phelps, 2008, p. 395, notre traduction).

Nous présentons ici le modèle des CME proposé par ces auteurs :

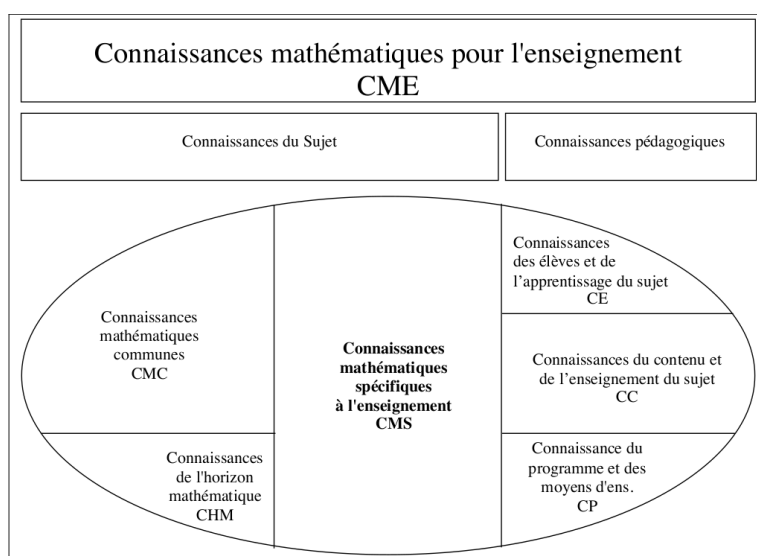


Figure 1. Modèle des CME, traduction de Clivaz (2011, p. 28)

1. Les sous-domaines des CME

Les connaissances pédagogiques

Les auteurs définissent les *Connaissances des élèves et de l'apprentissage du sujet* – CE, comme la capacité d'un enseignant à anticiper les difficultés et les motivations des élèves par rapport au sujet proposé. Cette connaissance intervient dans des situations qui exigent l'articulation entre ce que les élèves savent ou ne savent pas, et les connaissances mathématiques à enseigner.

La catégorie des *Connaissances du contenu et de l'enseignement du sujet* – CC, définit les capacités qui permettent d'identifier les représentations, les méthodes et les procédures les plus appropriées pour l'enseignement de connaissances spécifiques, elle comporte des tâches telles que le choix du matériel, les exemples à proposer, le rythme de la classe, etc.

Pour la catégorie des *Connaissances du programme et des moyens d'enseignement* – CP, les auteurs reprennent l'idée développée par Shulman, qui la définit comme celle qui représente l'ensemble des programmes conçus pour l'enseignement à un niveau donné, la variété des matériels pédagogiques disponibles par rapport à ces programmes, etc. (Shulman, 1987, p. 10, notre traduction).

Les connaissances du sujet

Le sous-domaine des Connaissances mathématiques communes – CMC, comprend les connaissances et les compétences nécessaires pour résoudre les tâches que les élèves exécutent, il s'agit du savoir-faire. Ces connaissances correspondent à celles acquises dans le processus de scolarisation, au sens traditionnel, et sont communes à toutes personnes ayant une formation universitaire (Ball et al., 2008 ; Ferreira, Ribeiro et Ribeiro, 2017 ; Sosa et Carrillo, 2010).

Les Connaissances mathématiques spécifiques à l'enseignement – CMS, correspondent aux connaissances mathématiques nécessaires uniquement aux enseignants des mathématiques. Chez Ferreira et al. (2017), c'est à partir de ces connaissances particulières que l'enseignant s'appuie par exemple pour faire comprendre à ses élèves pourquoi il faut procéder d'une façon et non d'une autre, pour ne pas exécuter un ensemble de procédures dénuées de sens, etc. Avoir un répertoire de différents types d'exemples, de contre-exemples et de non-exemples fait partie de ce sous-domaine. Sosa et Carrillo (2010) l'expliquent comme étant des connaissances et des compétences mathématiques propres à la profession enseignante, car elle comprend leur capacité de distinguer, de déterminer, de valoriser et d'interpréter la validité des réponses diverses et imprévues des élèves.

Les auteurs présentent le sous-domaine de la Connaissance de l'horizon mathématique – CHM, comme la capacité d'établir un lien entre les sujets mathématiques tout au long du plan d'études. Il s'agit d'une vision générale mathématique, une vision plus large du paysage mathématique :

[...] il existe une sorte de connaissance du contenu qui n'est ni commune ni spécifique. Elle n'est pas directement déployée dans l'enseignement, mais elle soutient un type de conscience, de sensibilité, de disposition qui informe, oriente et encadre culturellement la pratique pédagogique. Nous considérons cela comme une espèce de vision périphérique ou de conscience de l'horizon mathématique. (Ball et Bass, 2009, p. 5, notre traduction)

Cette « vision périphérique » mathématique ou « conscience du paysage mathématique » dans laquelle se situent l'expérience et l'enseignement, peut guider l'enseignant à écouter, parler et prendre des décisions par rapport aux concepts mathématiques qui seront proposés dans l'avenir.

Dans la suite Ball et Bass définissent la CHM :

Nous définissons la connaissance de l'horizon comme une prise de conscience [...] du grand paysage mathématique dans lequel l'expérience et l'enseignement actuels sont situés. Il fait intervenir les aspects des mathématiques qui, bien qu'ils ne fassent peut-être pas partie du programme d'études, sont néanmoins utiles à l'apprentissage actuel des élèves, qui éclairent et confèrent un sens compréhensible de la signification plus large de ce qui peut n'être que partiellement révélé dans les mathématiques du moment. (2009, p. 6, notre traduction)

Cette connaissance peut aider les enseignants à : porter des jugements sur l'importance des mathématiques, mettre en évidence les points clés d'une notion, anticiper et établir des liens parmi plusieurs notions, repérer les distorsions mathématiques ou les précurseurs possibles d'une confusion.

Ensuite Ball et Bass présentent les quatre éléments constitutifs de la CHM :

- un sens de l'environnement mathématique entourant le « moment présent » où l'enseignement a lieu ;
- les principales idées et structures disciplinaires ;
- les pratiques mathématiques clés ;

- Les valeurs et perceptions mathématiques fondamentales.

De ces appréciations on peut déduire que pour Ball et ses collaborateurs, certaines décisions de l'enseignant sont liées à la CHM. Nous considérons, entre autres, que cette connaissance guide par exemple, l'organisation annuelle des contenus mathématiques, les connexions interdisciplinaires, l'introduction des contenus culturels et notamment l'introduction des aspects historiques, entre autres.

2. Les CME et l'histoire des mathématiques

En réfléchissant à notre thématique de recherche sur les liens entre l'histoire des mathématiques et la formation des enseignants, nous avons besoin d'un modèle qui envisagea ces domaines ou catégories dans lesquels la pratique de l'enseignant peut être vue. De plus, nous avons besoin d'un modèle offrant un espace pour ce « quelque chose de plus » qui peut bénéficier à la formation d'un enseignant, comme c'est le cas de l'histoire des mathématiques. Considérant les colorations de la CHM qui permettent à l'enseignant de développer une vision périphérique, nous nous sommes demandé s'il est possible que l'histoire nourrisse ce sous-domaine lorsqu'elle favorise plusieurs aspects bénéfiques à l'enseignement, tels que : la lecture de textes ou de sources historiques, la contextualisation d'une notion, le dépaysement épistémologique⁴⁵, l'empathie, l'altérité, etc.

Un autre point qui nous semble pertinent, c'est que le cadre CME continue d'être reconnu comme un modèle qui offre des outils permettant de différencier les composantes des connaissances qu'un enseignant doit posséder et qui peuvent être intéressantes pour un enseignement efficace, comme le soutiennent Rojas, Flores et Carrillo (2013).

En ce qui concerne la formation des enseignants et son influence sur les performances des élèves, nous ne sommes pas en mesure de nous prononcer. Dans cette recherche doctorale, nous avons observé l'influence de l'histoire des mathématiques dans la CHM d'un enseignant, mais nous ne pouvons pas observer d'indices ou traces d'histoire dans les pratiques *in situ* des enseignants ou dans les performances des élèves. Cependant, certaines études montrent que les connaissances des enseignants influent directement sur la réussite des élèves (Can et Clark, 2020 ; Ferreira, Ribeiro & Ribeiro, 2017 ; Ma, 2009 ; Clivaz, 2011).

Suivant les idées de Ball (1988), Ernest (1989) affirme que les enseignants commencent à acquérir leurs connaissances pédagogiques au cours de leurs années d'études, en fonction de leurs expériences d'apprentissage. Ils peuvent apprendre les rudiments didactiques des mathématiques au cours de leur formation initiale d'enseignant, mais la partie la plus importante de l'apprentissage a probablement lieu pendant l'enseignement réel basé sur l'expérience pratique.

Pour en revenir à notre problématique de recherche, nous nous intéressons à la façon dont ces conceptions sont constituées chez les futurs enseignants de mathématiques, en ce qui concerne les mathématiques et leurs modèles d'enseignement et d'apprentissage.

En suivant la ligne d'Ernest, par rapport à la formation des enseignants, le système formé par les connaissances, les conceptions et les attitudes, influencent les modèles d'enseignement et d'apprentissage. Nous considérons ce système comme un filtre à travers lequel l'enseignant prend des décisions pour développer sa tâche, en tenant compte du contexte institutionnel. Ces conceptions et attitudes qui se traduisent dans la pratique produisent des effets sur

⁴⁵Barbin définit comme dépaysement épistémologique, expérience qui provoque une remise en question des savoirs et des procédures qui « vont de soi » (2010, p. 82-83).

l'apprentissage des élèves. Nous sommes particulièrement intéressée à identifier l'influence que l'histoire des mathématiques peut avoir sur les conceptions des futurs enseignants.

Par rapport au cadre CME, on peut dire que les conceptions sur la nature des mathématiques se manifestent dans le sous-domaine de la CHM. Comme nous l'avons vu, il y a quatre éléments constitutifs de la CHM et nous pouvons penser que la nature des mathématiques se reflète au moins dans le deuxième : « principales idées et structures disciplinaires », et dans le quatrième « valeurs et sensibilités mathématiques fondamentales ». Il est donc naturel de considérer que ces conceptions se manifestent dans la CHM.

Dans ce qui suit, nous présentons un aperçu de la manière dont les conceptions d'un enseignant sont influencées par l'histoire des mathématiques. Selon Ernest, les connaissances, les conceptions et les attitudes sont liées les unes aux autres et forment un système dans lequel elles interagissent.

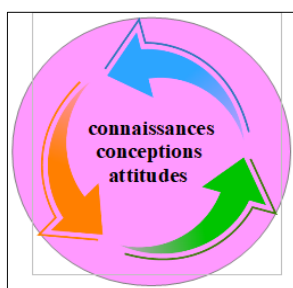


Figure 2. Interaction entre les connaissances, les conceptions et les attitudes.

L'histoire des mathématiques influence ce filtre des connaissances, des conceptions et des attitudes, et celles-ci se manifestent dans le CHM de l'enseignant.

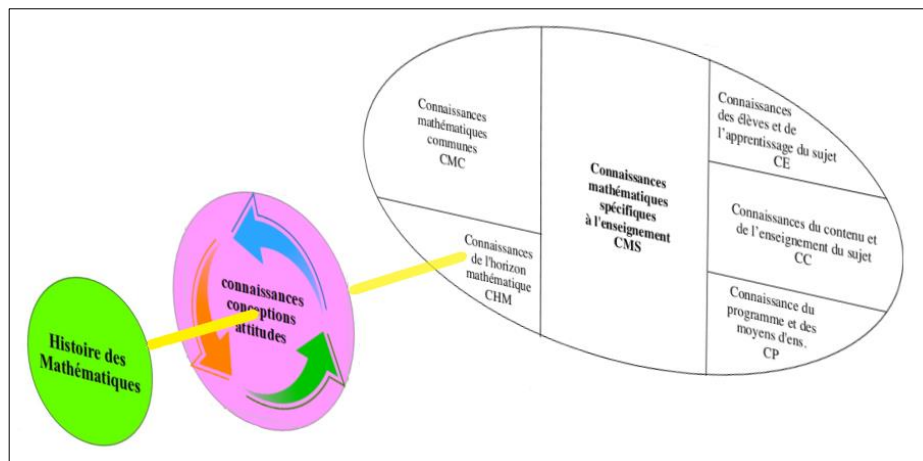


Figure 3. Influence de l'histoire des mathématiques dans les conceptions des enseignants.

Pour représenter cette idée, nous pouvons penser à l'histoire des mathématiques passant « à travers » ce **filtre de** connaissances, de conceptions et d'attitudes. Ainsi, l'histoire des mathématiques « imprègne » le futur enseignant, produisant deux types d'influence qui se manifestent dans leurs CME : une influence directe qui se manifeste sous forme de conceptions dans la CHM, et une influence indirecte qui se manifeste à travers les attitudes et les connaissances dans les autres sous-domaines des CME.

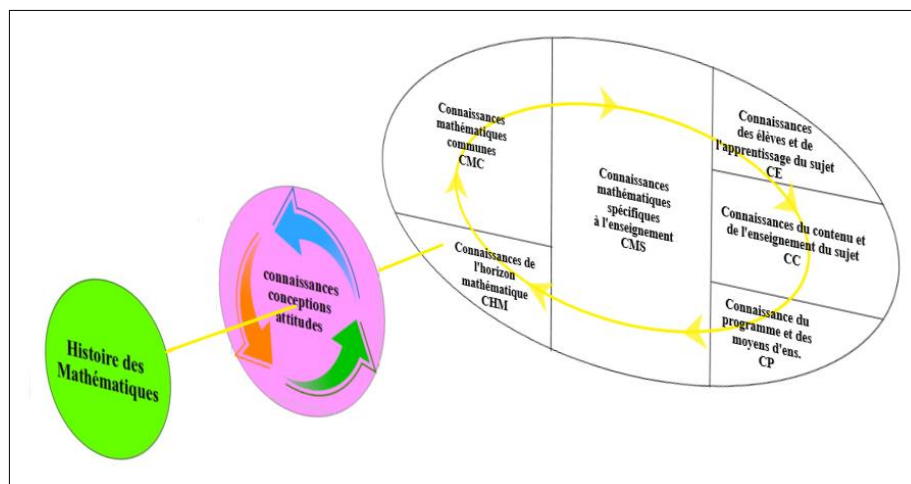


Figure 4. L'histoire des mathématiques se manifeste dans les CME.

III. METHODOLOGIE

Dans cette section nous introduisons les procédures et les outils qui ont été employés dans l'analyse des données recueillies. Puis, nous passons en revue le traitement quantitatif des questionnaires et le traitement qualitatif des entretiens, en particulier la création et intégration des catégories.

1. La recherche

Après Van der Maren (1996, p. 91), il y a quatre types d'enjeux dans les pratiques de recherche en éducation, qui sont en rapport avec des problématiques déterminées : les nomothétiques qui cherchent à produire un savoir savant, les politiques qui tentent de changer les pratiques des individus et des institutions, les pragmatiques qui cherchent à résoudre les problèmes de dysfonctionnement, et les ontogénétiques qui cherchent à se perfectionner ou à se développer par la réflexion et par l'action. Pour cet auteur, dans le domaine de l'éducation, l'un des principaux instruments d'intervention est le praticien : par ses actions, ses gestes et son discours. Dans la recherche ontogénétique, l'un des principaux intérêts est l'amélioration de la pratique par le développement des connaissances et des compétences. C'est dans ce sens que nous nous concentrerons sur les enjeux ontogénétiques.

2. Les participants

105 étudiants stagiaires ont participé à la recherche en France pour le premier questionnaire, 86 pour le second. Tous étaient étudiants stagiaires en mathématiques et suivaient le cours d'histoire des mathématiques du master Métiers de l'Enseignement, de l'Éducation et de la Formation (MEEF) ou pour l'obtention du Diplôme Universitaire (DU), à l'université de Lille. Ce cours a été dispensé dans les années académiques 2017-2018 et 2018-2019. De ces stagiaires 9 ont accepté d'être interviewés.

Dans le cours d'histoire des mathématiques, essentiellement avec un format du cours magistral, ont été abordés des sujets tels que : systèmes de numération, mathématiciens d'entre-deux-guerres, et textes d'enseignement des mathématiques anciennes.

Parmi les formateurs experts et les enseignants ayant de l'expérience dans l'intégration d'histoire des mathématiques en classe, 9 ont accepté d'être interviewés.

En Uruguay, les étudiants stagiaires participants à la recherche à l'Uruguay étaient : 45 au premier questionnaire et 31 au deuxième. Tous suivaient un cours d'histoire des mathématiques de la dernière année du diplôme permettant de devenir enseignants de mathématiques. Cette formation avait lieu à l'Instituto de Profesores Artigas de Montevideo, au cours de l'année académique 2018. Sur le nombre total d'étudiants, 9 ont accepté d'être interviewés.

Avec une organisation essentiellement chronologique, les sujets abordés dans ce cours étaient : systèmes de numération, premières grandes cultures (Babyloniens, Égyptiens, Indiens, Mayas, Incas et Aztèques), Grèce antique, mathématiques médiévales.

Parmi les formateurs experts et les enseignants ayant une expérience dans l'intégration de l'histoire des mathématiques dans leurs cours, 9 ont accepté d'être interviewés.

3. Analyse du contenu

Sur la base de ses idées préconçues, le chercheur décide si le discours de l'interviewé doit être considéré strictement ou peut être analysé.

Nous avons fait des entretiens avec différentes communautés, où nous savons qu'ils existent différents niveaux de conscience sur les enjeux abordés.

Cette même remarque a été faite par Flores (2004), affirmant que les conceptions ne sont pas directement observables, mais que pour y accéder une méthode indirecte est nécessaire pour inciter les interviewés à exprimer leurs points de vue.

Dans une première lecture du texte ou d'un entretien, l'analyste cherche à trouver les passages qui pourraient être des signes et des indices de la présence d'une trame théorique : les éléments de l'entretien qui peuvent être interprétables. Nous utilisons l'analyse du contenu sur un entretien pour identifier et coder les unités d'analyse en catégories. Nous regroupons ensuite ces catégories en fonction de nos intérêts de recherche, tels que définis auparavant : objectifs de l'intégration de l'histoire, méthodes d'intégration et difficultés de mise en œuvre.

4. La collecte des données

Les questionnaires

La collecte des données s'est faite en plusieurs étapes entre octobre 2017 et mai 2019, en France (Lille) et Uruguay (Montevideo). Nous avons élaboré, avec le questionnaire, un profil d'étudiant. La passation a été faite *à priori* et *à posteriori* du cours d'histoire des mathématiques. Nous avons profité du deuxième questionnaire pour demander aux étudiants de participer aux entretiens.

Les deux questionnaires recherchent les mêmes informations dans les deux pays et sont similaires, la seule différence étant bien entendu la langue utilisée (française et espagnole).

En France, les questionnaires ont été proposés face à face, par contre, en Uruguay, les questionnaires ont été formulés et proposés en ligne. Pour les deux passations en Uruguay, nous avons eu le soutien de l'enseignant responsable du cours.

Le questionnaire comporte 14 questions réparties en 5 sections :

1. la première –questions 1 à 7– porte sur des questions démographiques (âge, sexe, type de diplôme obtenu, expérience professionnelle, etc.).

2. la deuxième section –questions 8 et 9– est axée sur la formation et la rencontre avec l'histoire des mathématiques au cours de la scolarité.
3. la troisième section –question 10– comporte 14 énoncés dont les réponses sont faites à l'aide d'une échelle de likert, avec laquelle nous cherchons à interpréter les positions de l'étudiant sur la construction de la discipline et de son enseignement (voir figure 5).
4. la quatrième section –question 11– est constituée d'une série de 5 questions fermées, avec lesquelles on cherche à vérifier l'interprétation donnée aux réponses de la question précédente ;
5. la cinquième section –question 12 à 14– est composée de 3 questions ouvertes avec lesquelles nous cherchons l'opinion de l'étudiant sur la construction et le développement des mathématiques et leur contexte de production. La dernière question est une invitation à un entretien individuel.

Questions sur différentes dimensions des mathématiques						
10. Sur une échelle de 1 à 5 (1 = totalement en désaccord ; 2 = modérément en désaccord; 3 = indifférent ; 4 = modérément d'accord ; 5 = totalement d'accord), ou 0 si vous n'avez pas pensé au sujet, veuillez indiquer vo tre opinion dans les cases ci-dessous:						
	1	2	3	4	5	0
	totalement en désaccord	modérément en désaccord	indifférent	modérément d'accord	totalement d'accord	je n'y ai pas pensé
a) Les mathématiques sont une construction qui dépend de la culture ou la civilisation.						

Figure 5. Question en éventail proposée dans le questionnaire.

Les entretiens

Pour accéder aux conceptions des formateurs, des enseignants et des étudiants stagiaires, nous avons fait des entretiens semi-directifs avec chacune de ces communautés, tant en France qu'en Uruguay.

En France l'invitation à la recherche a été faite directement aux participants du groupe EMTA⁴⁶ et aux participants du séminaire d'histoire des mathématiques à Lille. D'autres invitations ont été faites par e-mail. Nous avons envoyé également des invitations par e-mail aux formateurs français et à tous les participants en Uruguay. Tous les entretiens avec les participants uruguayens ont été réalisés sur place.

En France, outre leur formation d'enseignants niveau licence et master, les formateurs interrogés ont une formation en histoire des mathématiques ou disciplines connexes. Certains parmi eux ont aussi l'expérience de direction de thèse, l'organisation et la participation à des événements liés à l'histoire des mathématiques et similaires. Notre intérêt est de connaître leurs conceptions sur l'histoire des mathématiques, de son enseignement et de ses potentialités en tant que ressource pédagogique. Cela peut nous offrir des éléments pour la constitution de cette compétence historique.

En Uruguay, la formation des formateurs porte essentiellement sur la didactique des mathématiques (Matemática Educativa en provenance du Mexique). Leur formation et les objectifs proposés dans le cours d'histoire des mathématiques sont liés à la formation des

⁴⁶Groupe de travail « Enseignement des Mathématiques et Textes Anciens » de l'IREM de Lille.

enseignants, en considérant l'histoire comme une ressource pédagogique. Notre intérêt ici est de comprendre cette dimension pédagogique de l'histoire des mathématiques, afin de nourrir l'aspect pédagogique que nous voulons pour la construction de la compétence historique.

De même, les enseignants qui ont plusieurs années d'expérience dans leur poste et dans l'intégration de l'histoire des mathématiques dans leurs cours, font de cette communauté un groupe doté de caractéristiques pertinentes. Nous sommes intéressés par leurs conceptions, leurs motivations, leurs objectifs, la mise en œuvre, et leurs impressions sur leur impact au niveau de leur enseignement.

L'entretien avec les enseignants et les formateurs s'est déroulé en six parties :

1. La première vise à ce que l'interviewé se présente, et présente son parcours professionnel.
2. La deuxième porte sur la place de l'histoire des mathématiques dans sa formation.
3. Dans la troisième partie, nous cherchons à savoir si le contact avec l'histoire des mathématiques a modifié la réflexion pédagogique sur l'enseignement des mathématiques.
4. Dans la quatrième partie, nous nous intéressons à savoir si l'interviewé utilise l'histoire dans ses cours et comment.
5. Dans la cinquième partie, nous voulons connaître les objectifs de cette intégration.
6. Dans la sixième partie, nous cherchons à connaître les difficultés rencontrées dans la mise en œuvre.

Partie 4 : Utilisation de l'histoire des mathématiques

Quelle est votre utilisation de l'histoire des mathématiques et de quelle façon ?
Pouvez-vous raconter une expérience d'utilisation en classe ?

Justification : Cette question me permet de savoir quel type d'histoire des mathématiques est utilisée chez l'enseignant, quelles sources (livres, vidéos, sources historiques, construction de matériaux ou d'instruments, etc.) et de quelle façon.

Questions guides :

- Dans vos cours, intégrez-vous l'histoire des mathématiques d'une période particulière ?
- Quel type de matériel ou d'activités utilisez-vous ?
- Comment utilisez-vous l'histoire des mathématiques dans vos cours ?

Figure 6. Extrait d'entretien avec les enseignants et formateurs.

Concernant les entretiens des étudiants stagiaires, nous sommes conscients qu'ils sont en formation et que, pour la plupart d'entre eux, le stage est leur première expérience professionnelle en tant qu'enseignant. Cette période est instable (Robert, 2001; 2005) en ce qui concerne leurs conceptions des mathématiques et leur enseignement et il est donc tout à fait compréhensible que certaines de leurs réponses soient confuses ou peu réfléchies.

De la même manière que l'entretien avec les enseignants et les formateurs, l'entretien avec les étudiants stagiaires a débuté dans une atmosphère conviviale au cours de laquelle nous avons expliqué notre motivation et nos objectifs de recherche. L'entretien s'est déroulé en cinq parties :

1. La première partie sur la présentation et parcours académique de l'étudiant.
2. La deuxième partie sur l'histoire des mathématiques tout au long de sa scolarité.

3. La troisième, sur l'influence dans sa formation comme enseignant.
4. La quatrième partie sur les potentialités de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement des mathématiques.
5. La cinquième partie, sur les difficultés de l'utilisation de l'histoire des mathématiques dans le secondaire.

Partie 3 : Influence dans la formation comme enseignant

Si vous pensez à votre formation comme futur enseignant : quel type de contribution pensez-vous avoir obtenu d'un cours d'histoire des mathématiques ? Par exemple, en faisant de petits exposés autour des sujets d'histoire des mathématiques.

Questions guides :

- Considérez-vous que l'histoire des mathématiques possède certaines potentialités qui peuvent être exploitées en faveur de la formation des futures enseignants des mathématiques ? Quel type de potentiel ? De quelle manière ?
- Quel type de changement à partir du cours d'histoire des mathématiques percevez-vous dans votre façon de penser les mathématiques ?
- Quel type de réflexion les questions présentées dans le cours d'histoire des mathématiques vous ont-elles laissées ?

Figure 7. Entretien aux étudiants stagiaires, partie 3

5. Traitement des données

Les données recueillies à partir des questionnaires ont été traitées quantitativement, et le corpus élaboré à partir des entretiens a été traité qualitativement.

En ce qui concerne l'analyse des questionnaires, avec les questions de 1 à 7 nous sommes intéressée en termes quantitatifs au profil académique des étudiants et à leur parcours scolaire. On peut ainsi parler d'un profil général. Les questions 8 et 9 sont spécifiques à la formation « licence » et « master » et à d'éventuels cas d'approximation à l'histoire des mathématiques. La question 10 comprend 14 énoncés traitant principalement de la dimension culturelle des mathématiques, à laquelle on doit répondre en utilisant le degré d'accord sur une échelle de likert. En particulier, pour les données obtenues à partir de cette question, nous avons procédé à une analyse en composantes principales.

À propos des entretiens, ils ont été enregistrés et transcrits, puis codifiés en catégories, et ces catégories ont été regroupées si elles représentaient des idées similaires. Pour Vilatte (2007, p. 37-38) une catégorie est une notion générale représentant un ensemble de signifiés. L'opération de catégorisation permet de classer les éléments constitutifs d'un ensemble par différenciation puis se regrouper par analogie d'après ces critères préalablement définis.

Voici un exemple de deux extraits d'entretiens des enseignants et des formateurs, que nous avons rassemblés dans la même catégorie (T1) liée à la difficulté d'intégrer une perspective historique dans la classe en raison du texte historique approprié :

La difficulté c'est déjà de choisir un sujet qui soit en même temps, un sujet qui concerne le thème enseigné, qui montre des bons exemples pour montrer comme les choses se sont construites. Donc il faut trouver des textes, des jalons, et d'éviter surtout quelque chose que soit trop schématique. (E1)

Pour moi la difficulté était de trouver des sujets pas rouillés, un peu de travail à faire pour eux, sans que ce soit trop compliqué. Ce genre de travaux a coïncidé avec le développement d'internet qui a bien facilité les choses, en particulier pour accéder à certains textes historiques. C'était quand même du temps pour trouver des sujets. Il faut y passer du temps parce que le matériel on l'a pas sous la main. (D1)

Figure 8. Catégorie T1

Le corpus échantillon est constitué par la communauté de formateurs et d'enseignants puisqu'il s'agit d'identifier les caractéristiques des deux communautés pour constituer la grille à appliquer aux données recueillies auprès des étudiants stagiaires.

Une fois les extraits de texte réunis et les catégories définies, nous effectuons une intégration entre les extraits, et définissons la caractéristique principale qui représente cette catégorie. De cette façon, nous élaborons une grille des catégories associée aux sous-domaines des Connaissances Mathématiques pour l'Enseignement définis par Ball et ses collègues, en relation avec l'histoire des mathématiques.

6. Aspects éthiques

Tant les questionnaires que les entretiens ont été anonymes, en France et en Uruguay. Le processus de retouche des entretiens a été effectué exclusivement dans le but d'améliorer la lecture et la compréhension des extraits. Les extraits sélectionnés des entretiens effectués en Uruguay ont été traduits et peuvent donc présenter des légères différences d'interprétation.

IV. RESULTATS

L'analyse quantitative des questionnaires proposés aux stagiaires, nous a permis d'élaborer un profil et de faire une analyse en composantes principales avec le logiciel R, à partir de laquelle nous avons cherché des signes de modification dans les conceptions.

En ce qui concerne l'analyse du contenu des entretiens, nous avons élaboré un cadre de référence pour la lecture des entretiens avec les stagiaires, sur la base des entretiens avec les enseignants et les formateurs. Ce cadre a été construit à partir d'un ensemble de catégories élaborées à partir d'extraits significatifs des entretiens.

1. Analyse quantitative des questionnaires

France

Le groupe des stagiaires français est composé à 60 % de ceux qui suivent un parcours MEEF et à 40 % un DU. Cette différence provient du fait que les stagiaires du MEEF ont un diplôme

de mathématiques générales, alors que les stagiaires du DU ont un diplôme d'ingénieur (ou similaire).

La moitié de ce groupe a moins de 25 ans et le stage professionnel constitue leur première expérience d'enseignement, après avoir obtenu le concours national (CAPES).

Environ 84 % de toute la population interrogée provient d'une formation initiale avec un volume horaire « important » et « très important » en mathématiques. Face à la même question concernant la didactique des mathématiques, la pédagogie et l'histoire des mathématiques, environ 80 % de la population répond que ces disciplines « ne concernent pas » leurs formations initiales, qu'elles sont « pas importantes » ou « peu importantes ».

Grâce à l'analyse en composantes principales, nous avons identifié deux lignes de positionnement par rapport aux mathématiques et leur enseignement. Dans une première ligne, se trouvent les stagiaires qui ont tendance à considérer les vérités mathématiques comme universelles et irréfutables et, liés à cette tendance, les stagiaires jugent qu'il n'est pas nécessaire de contextualiser le contenu mathématique pour l'enseigner. Dans une deuxième, on a également tendance à penser que les mathématiques se construisent individuellement et uniquement dans des espaces reconnus comme académiques (universités, centres de recherche, etc.).

Uruguay

Le groupe d'étudiants uruguayens prépare un diplôme spécifique pour devenir professeur de mathématiques dans le secondaire.

Environ le 50 % des étudiants participant aux deux passations du questionnaire sont âgés de 25 à 34 ans. La plupart des étudiants déclarent qu'ils poursuivent des études supérieures pour la première fois (plus de 80%) et n'ont pas d'autre diplôme. Interrogés sur l'expérience professionnelle et le nombre d'années de travail, environ 90 % de la population a répondu avoir une expérience de travail comme enseignant de mathématiques et près de la moitié a répondu avoir une expérience de moins de 5 ans.

Environ 90 % de la population interrogée a eu une formation « importante » et « très importante » en mathématiques et aussi en didactique des mathématiques. Pour la même question concernant la formation en histoire des mathématiques, 57 % ont répondu « importante » et « très importante ».

En ce qui concerne la question analysée à l'aide de l'analyse en composantes principales, la plupart des étudiants interrogés ont tendance à considérer que les vérités mathématiques ne sont pas universelles et que leur enseignement doit être contextualisé.

Une explication possible de cette différence entre les cas français et uruguayens est que la formation des enseignants en Uruguay se caractérise par une trajectoire simultanée au sens de Tatto, Lerman et Novotná (2008). Pour ces auteurs affirment qu'une trajectoire simultanée se caractérise par une formation dans laquelle l'étudiant reçoit simultanément une formation dans la discipline, une formation pédagogique et une pratique pédagogique. Conformément aux auteurs, nous pouvons identifier le parcours de formation suivie par les étudiants français de notre étude comme une trajectoire consécutive puisque l'étudiant reçoit d'abord une formation disciplinaire, et de façon indépendante de la première, une préparation au métier d'enseignant.

Nous avons constaté que, dans les deux pays, nous n'avons pas été en mesure d'identifier des modifications significatives qui nous permettraient d'affirmer un changement dans les conceptions après le cours d'histoire des mathématiques.

2. Analyse qualitative des entretiens

Dans cette section, nous faisons une analyse globale des entretiens menés avec les enseignants et les formateurs en France et en Uruguay.

L'entretien des enseignants et formateurs en France

Les entretiens menés avec les formateurs et les enseignants nous permettent de proposer le schéma suivant, basé sur les catégories définies à partir de l'analyse de contenu.

Globalement, ce schéma montre deux manières différentes de considérer l'histoire des mathématiques. D'une part, cette discipline est considérée avec ses objets d'étude, sa méthodologie de recherche dont l'un des objectifs, parmi d'autres, est d'enrichir la formation d'un futur enseignant ou mathématicien. D'autre part, elle est considérée comme une ressource pédagogique pour l'enseignement des mathématiques, où une réflexion pédagogique du futur enseignant est recherchée.

Dans chacune de ces lignes, les catégories identifiées ont été regroupées comme suit : des objectifs spécifiques du travail avec l'histoire, une façon particulière de travailler l'histoire liée à ces objectifs, et certaines difficultés liées à ceux-ci.

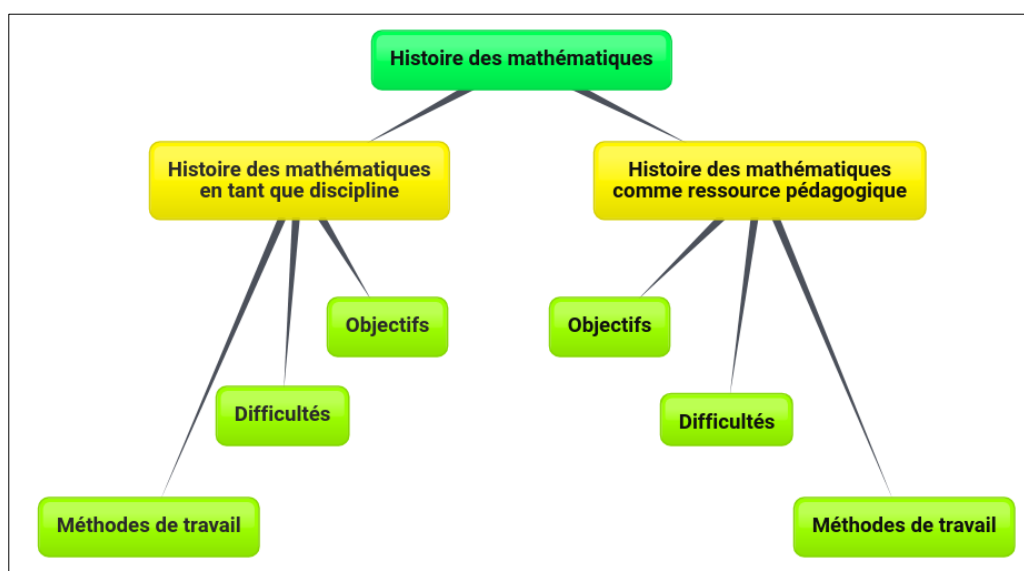


Figure 9. Deux courants de pensée concernant la prise en compte de l'histoire des mathématiques dans le cas français.

En France, nous avons trouvé un total de 22 catégories (annexe 1), parmi lesquelles nous pouvons citer les suivantes :

- « les mathématiques sont une construction humaine et vivante », cette catégorie est associée à l'un des objectifs du travail avec l'histoire ;
- « la lecture de textes historiques » est une des catégories que nous associons à la manière d'intégrer l'histoire dans les cours, et ;
- « la recherche de texte historique adapté » nous associons cette catégorie à l'une des difficultés rencontrées.

L'entretien des enseignants et formateurs en Uruguay

Grâce aux entretiens avec les formateurs, nous avons identifié qu'en Uruguay, il existe deux grands courants de pensée qui orientent la formation des enseignants de mathématiques. D'une part, les formateurs diplômés des instituts de formation des enseignants défendent le métier d'enseignant et affirment qu'il est nécessaire de le différencier des chercheurs en mathématiques. Dans ce cas, les formateurs considèrent que les étudiants vont se consacrer à l'enseignement des mathématiques et que cela nécessite des connaissances spécifiques, différentes de celles d'un mathématicien. D'autre part, les formateurs qui ont reçu une formation de mathématicien ou similaire, constatent des lacunes liées à la didactique des mathématiques dans leur propre formation et dans leur approche pédagogique. Cependant, tous les formateurs s'accordent à dire que l'histoire des mathématiques doit être abordée avec des objectifs pédagogiques.

Nous pensons que le fait de travailler dans le milieu de l'enseignement des mathématiques, avec un public exclusivement constitué de futurs enseignants et d'avoir une formation autodidacte en histoire des mathématiques favorise l'introduction de cette discipline uniquement avec des objectifs pédagogiques. Cela ne signifie pas que l'on n'étudie pas l'histoire des mathématiques, mais plutôt que les objectifs ultimes débouchent sur une réflexion pédagogique.

Dans le schéma suivant, nous représentons l'histoire des mathématiques comme une ressource pédagogique pour l'enseignement des mathématiques :

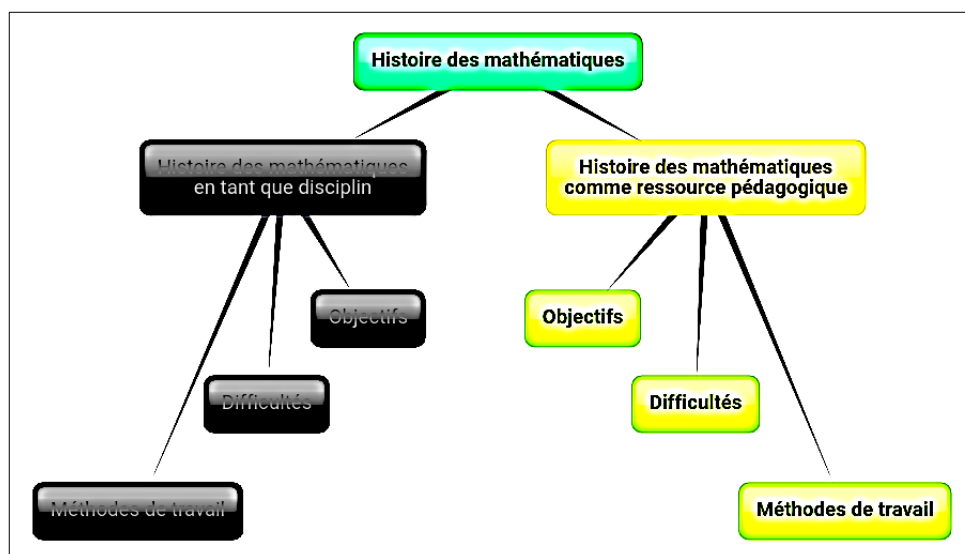


Figure 10. L'histoire des mathématiques comme un ressource pédagogique

Après l'analyse du contenu des entretiens avec les enseignants et les formateurs en Uruguay, nous avons trouvé 20 catégories (annexe 2), parmi lesquelles nous pouvons citer les suivantes :

- « Vivre l'expérience de faire des mathématiques et de ressentir de l'empathie pour les élèves » : cette catégorie est associée à l'un des objectifs du travail avec l'histoire.
- « Utiliser du matériel audiovisuel » : il s'agit d'une des catégories à laquelle nous associons la manière d'intégrer l'histoire dans les cours.
- « Formation autodidacte des formateurs » avec pour conséquence une certaine insécurité : cette catégorie est associée à l'une des difficultés rencontrées.

3. La grille des catégories

Une fois que chaque catégorie a été identifiée comme « objectif », « méthode » ou « difficulté », nous l'associons à l'un des sous-domaines définis par le modèle des CME de Ball, ces sous-domaines décrivant les compétences nécessaires à l'enseignement. Ainsi, nous avons proposé les actions suivantes :

1. Élaborer un modèle des CME à partir de toutes les catégories identifiées. Ce modèle des CME n'est pas individuel et ne représente pas non plus les catégories partagées par les individus du groupe interrogé, mais rassemble toutes les catégories identifiées. Nous appelons ce modèle CME*France.
2. Élaborer les CME de chaque étudiant stagiaire français.
3. Élaborer un modèle des CME basé sur les entretiens avec les enseignants et les formateurs en Uruguay, défini dans les mêmes termes que CME*France. Nous l'appelons : CME*Uruguay.
4. Élaborer les CME de chaque étudiant stagiaire uruguayen.
5. Élaborer la notion de compétence historique en superposant les modèles des CME*France et CME*Uruguay. Par superposer, nous entendons l'identification de catégories communes et de catégories différentes qui pourraient enrichir chaque modèle. D'une part, la vision d'histoire des mathématiques comme discipline que nous avons identifiée en France, offre des catégories non identifiées en Uruguay. D'autre part, la vision de l'histoire des mathématiques liée à la pratique de l'enseignement secondaire en Uruguay, offre des catégories qu'on ne trouve pas en France. Il ne s'agit évidemment pas d'« exporter » des modèles d'un pays à l'autre, mais de prendre en compte la possibilité d'intégrer les catégories qui pourraient enrichir chaque modèle.

4. La lecture des entretiens des stagiaires en France et en Uruguay

Notre question initiale au début de cette recherche portait sur l'influence d'un cours d'histoire des mathématiques sur les conceptions des étudiants, futurs enseignants de mathématiques. Nous avons pu constater que les questionnaires ne nous ont pas permis d'observer des changements majeurs au niveau des conceptions, mais avec les entretiens, nous avons identifié des manifestations de l'influence de l'histoire des mathématiques. Si nous parlons en termes de sous-domaines définis par Ball, Thames et Phelps (2008), nous pouvons identifier l'influence de l'histoire des mathématiques sur eux. Afin de montrer ces résultats, nous avons décidé de présenter ci-dessous les CME d'un étudiant stagiaire français (S4) et les CME d'un étudiant stagiaire uruguayen (US1).

Les CME d'un étudiant stagiaire français - S4

Nous avons sélectionné cet étudiant car il présentait dans son entretien le plus grand nombre de catégories relatives à l'intégration de l'histoire des mathématiques dans sa réflexion pédagogique.

Les connaissances des élèves et de l'apprentissage du sujet – CE : catégorie M5

Ce stagiaire exprime la nécessité d'identifier dans l'histoire des mathématiques les difficultés qui existaient à un certain moment et qui sont reconnues comme des obstacles, car elles seront aussi des difficultés pour leurs élèves.

Les connaissances du programme et des moyens d'enseignement – CP : catégorie T8

Le stagiaire affirme qu'il est difficile d'intégrer une perspective historique dans la classe de mathématiques si on considère la densité du programme du cours, sa durée et l'intérêt des élèves. Il s'interroge également sur une éventuelle évaluation des contenus historiques pour les motiver, bien que ce soit sous la forme de « devoirs surveillés ».

Les connaissances du contenu et de l'enseignement du sujet – CC : catégorie T9

Le stagiaire manifeste le manque d'expérience en tant qu'enseignant : il déclare ne pas savoir combien de temps est nécessaire pour boucler le programme qui lui est imposé dans le cadre de ses cours et il souligne son inquiétude sur la « perte » de temps imparti à des activités inspirées par l'histoire.

Les connaissances mathématiques spécifiques à l'enseignement – CMS : catégories P2 et P3

En ce qui concerne les méthodes d'intégration, le stagiaire se prononce contre l'utilisation de textes historiques au collège, mais n'est pas opposé à proposer des problèmes et à simplifier l'histoire en racontant certaines anecdotes et informations sur le sujet à travailler.

La connaissance de l'horizon mathématique – CHM : catégories M1 et M4

Le stagiaire considère qu'il est important de montrer l'évolution de la discipline et faire des liens des notions mathématiques entre les différents programmes dans lesquels il travaille. Il croit aussi que l'histoire des mathématiques lui apporte de la culture générale.

Si nous représentons ces catégories dans le modèle de Ball, Thames et Phelps nous obtenons la figure suivante :

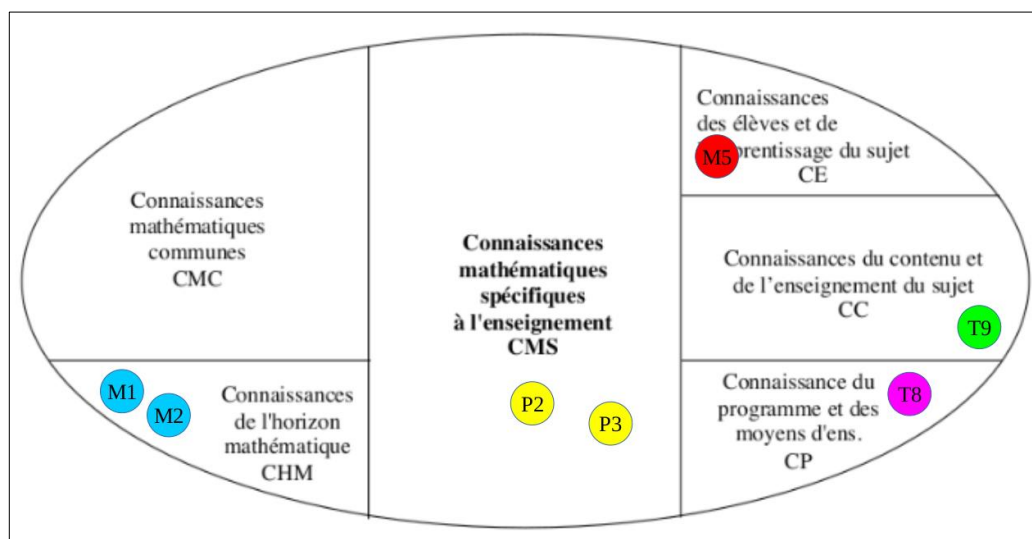


Figure 11. CME de l'étudiant stagiaire S4

Les CME d'un étudiant stagiaire uruguayen - US1

De la même manière que nous avons choisi l'étudiant français, nous avons également choisi l'étudiant uruguayen ayant exprimé le plus grand nombre de catégories dans son entretien.

Les connaissances des élèves et de l'apprentissage du sujet – CE : A6, C1

L'étudiant affirme que l'approfondissement des connaissances de l'histoire des mathématiques liées aux programmes du secondaire l'a aidé à faire attention au niveau de ses élèves. Comme difficulté associée à ce sous-domaine, le stagiaire déclare que les élèves sont habitués à la

fragmentation des savoirs et que proposer une activité dans une perspective historique doit être enchaînée au thème à travailler, pour être cohérent avec le reste du programme.

Les connaissances du programme et des moyens d'enseignement – CP : B5, B3, C3, C6, B1

L'étudiant manifeste la fonction interdisciplinaire que l'histoire des mathématiques pourrait avoir. Il reconnaît l'utilisation des ressources audiovisuelles comme matériel pédagogique. Il cite le temps de préparation et d'étude de l'histoire comme principale difficulté, en plus du fait de se sentir à l'aise pour créer des activités dans une perspective historique. Il reconnaît que dans les manuels scolaires des informations historiques et des anecdotes pourraient être proposées dans ses cours. En tant qu'étudiant du cours d'histoire, il mentionne plusieurs livres d'histoire des mathématiques, assez classiques, et un livre spécifique pour la formation des enseignants.

Les connaissances mathématiques spécifiques à l'enseignement – CMS : A5

L'étudiant exprime l'importance de travailler des concepts mathématiques spécifiques dans le cours d'histoire des mathématiques.

La connaissance de l'horizon mathématique – CHM : A6, A7

L'étudiant s'intéresse aux activités liées à l'histoire des mathématiques chez ses élèves du secondaire. Il affirme que comprendre comment certaines idées ont été construites, l'aide à penser aux différentes façons de les enseigner en classe. En ce sens, il exprime ouvertement avoir compris l'intérêt d'intégrer l'histoire des mathématiques durant ses cours.

Si nous représentons ces catégories dans le modèle de Ball, Thames et Phelps nous obtenons la figure suivante :

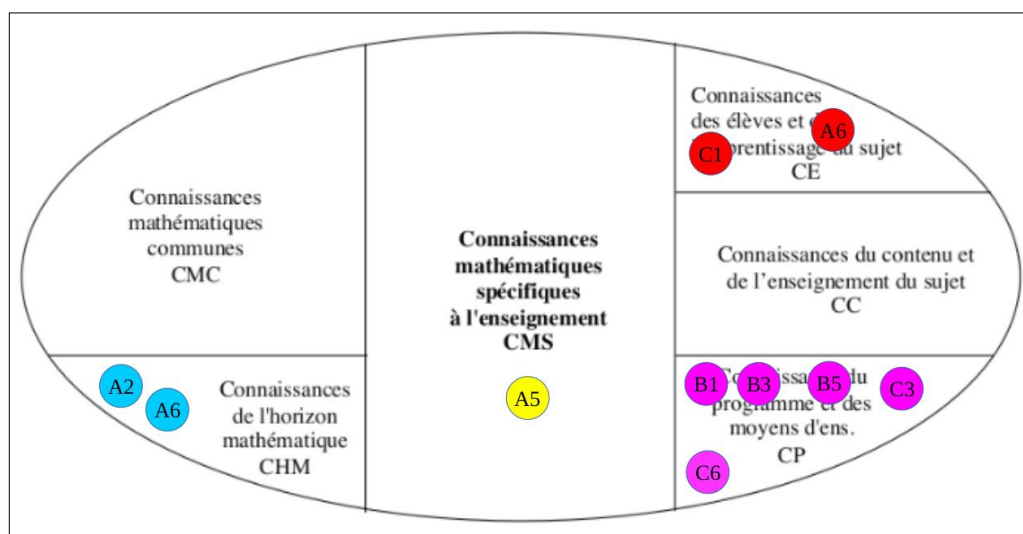


Figure 12. CME de l'étudiant stagiaire USI

V. DISCUSSION

1. Notion de compétence historique

Afin de construire la notion de compétence historique, nous proposons une intégration des catégories identifiées dans les entretiens français et uruguayens. Pour cela, nous faisons une

lecture des catégories par sous-domaine des CME*France et des CME*Uruguay, en cherchant à identifier celles qui sont similaires et celles qui se manifestent uniquement en France ou en Uruguay. Ces catégories qu'on ne retrouve que dans l'un des modèles peuvent être considérées comme enrichissantes pour l'autre, c'est pourquoi nous proposons un modèle qui rassemble toutes les catégories.

Nous avons ainsi élaboré une première approche de la compétence historique, en réfléchissant aux objectifs, aux méthodes d'intégration et aux difficultés que peuvent rencontrer les futurs enseignants de mathématiques.

Première approche de la compétence historique

L'un des objectifs de l'apprentissage de l'histoire des mathématiques est de comprendre que la manière dont une notion mathématique est abordée aujourd'hui est forcément incomplète, aride dans sa structure et peu en rapport avec ses origines. L'histoire offre à l'enseignant la possibilité de donner des réponses sur les besoins de la construction de ces notions à ses élèves. Avec des connaissances en histoire des mathématiques, il est possible de montrer que la discipline est en constante évolution et qu'elle est vivante. Connaître l'évolution historique de la discipline, permet de montrer la cohérence interne de la structure et les étapes nécessaires qui permettent certaines démarches. Il est possible aussi, de réaliser qu'il n'y a pas de réponse unique à chaque problème, ni de vérité absolue, mais que les réponses peuvent être différentes et dépendre des besoins d'une époque. L'histoire nous permet de reconnaître le travail collectif et aussi l'effort individuel des personnes qui se sont consacrées à développer une idée, avec leurs succès et leurs erreurs. La connaissance de l'histoire des mathématiques favorise la vision large de l'enseignant. Cette connaissance, associée à la connaissance des programmes d'un curriculum, peut aider l'enseignant à « naviguer » dans le contenu et à comprendre la cohérence temporelle dans laquelle il est enseigné.

Du point de vue de l'enseignant et de sa formation, l'histoire des mathématiques peut être considérée comme bagage culturel de l'enseignant, bien que, comme nous l'avons déjà justifié auparavant, les conceptions élaborées à partir de l'influence de l'histoire, sont filtrées dans leurs pratiques. À partir de cette vision large, l'utilisation d'anecdotes, de commentaires ponctuels, ainsi que l'élaboration d'un fil rouge historique qui relie les divers sujets du programme, sont des options qui suggèrent l'intégration de l'histoire dans les cours.

Bien que l'un des principaux inconvénients soit de ne pas savoir comment intégrer une perspective historique dans les cours, les sources historiques en sont l'une des suggestions. Cependant, il faut être conscient du danger d'une vision anachronique qui peut déformer les faits historiques ou d'une simplification excessive qui pourrait la transformer en caricature. Il est également suggéré de se plonger dans l'histoire des mathématiques pour avoir plusieurs exemples spécifiques et différentes façons de résoudre un problème.

L'interdisciplinarité est également l'une des propositions d'intégration de l'histoire, bien qu'elle exige la connaissance des programmes des disciplines du même niveau et la volonté de travailler avec d'autres enseignants. Connaître les programmes peut aussi permettre aux enseignants de proposer l'analyse de films ou de matériels audiovisuels liés à plusieurs sujets.

Les difficultés rencontrées par un enseignant qui choisit d'intégrer cette perspective dans sa classe peuvent être liées au matériel ou au public cible. En ce qui concerne le matériel, la principale difficulté est de trouver une source historique appropriée pour le sujet enseigné et dans la langue dans laquelle elle est enseignée (ou une traduction possible), ainsi que d'avoir le temps nécessaire pour développer l'activité. L'une des suggestions est de proposer dans l'introduction de chaque thème des problèmes ouverts tirés de l'histoire des mathématiques.

Une autre difficulté qui peut se poser vient des élèves et de leur compétence en matière de lecture. Cela nous oblige à être conscients des difficultés et des limites de nos élèves et de l'hétérogénéité du groupe.

L'emploi du temps du programme représente un problème majeur pour de nombreux enseignants, car la structure du cours ne permet pas une intégration facile du contenu historique. De plus, si les contenus ne sont pas évalués, il est clair qu'un enseignant donne la priorité aux contenus qui seront exigés, en laissant les contenus « supplémentaires » au second plan.

VI. LIMITE ET PERSPECTIVES

L'une des limites que nous avons constatées dans notre recherche est liée au questionnaire, puisque nous n'avons pas pu identifier un changement significatif dans les conceptions des étudiants. Nous avons trouvé deux causes possibles à ce résultat : la première est liée à la finesse du questionnaire, qui ne nous permet peut-être pas d'identifier ces changements, la seconde est liée à la nature des conceptions, car peut-être, n'est-il pas si simple de les faire évoluer. Ces deux causes potentielles feront l'objet de prochaines recherches.

En ce qui concerne les perspectives de recherche, le contact avec les étudiants stagiaires nous a amené à nous interroger sur l'évolution des compétences. Nous nous intéressons donc, à l'évolution des CME d'un enseignant par rapport à l'histoire des mathématiques. Cela nous amène à observer l'évolution des sous-domaines des CME qui sont activés chez l'enseignant, lorsqu'il veut intégrer l'histoire des mathématiques dans ses cours. Plus précisément décrire l'évolution des compétences par sous-domaine, en lien avec la notion de compétence historique que nous avons présentée.

Remerciement

Aux chercheurs français, aux enseignants de l'IREM de Lille et aux stagiaires du master MEEF de l'Université de Lille qui ont gentiment accepté de participer à l'entretien et de remplir les questionnaires.

Aux chercheurs du Consejo de Formación en Educación, enseignants et étudiants en formation uruguayens qui ont également accepté de participer à cette recherche.

A l'ANII qui a financé mon doctorat.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- ABD-EL-KHALICK, F., & LEDERMAN, N. (2000). The influence of history of science courses on students' views of nature of science. *Journal of Research in Science Teaching: The Official Journal of the National Association for Research in Science Teaching*, 37(10), 1057-1095.
- BALL, D. (1988). *Knowledge and reasoning in mathematical pedagogy: Examining what prospective teachers bring to teacher education*. Thèse de Doctorat, Michigan State University, East Lansing.
- BALL, D., THAMES, M. & PHELPS, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special?. *Journal of teacher education*, 59(5), 389-407.
- BALL, D. & BASS, H. (2009). *With an eye on the mathematical horizon: Knowing mathematics for teaching to learners' mathematical futures*. Universitätsbibliothek Dortmund.
- BARBIN, E. (2010). Epistemologie et histoire dans la formation mathématique. *Reperes-IREM*, 80, 74–86. <https://numerisation.univ-irem.fr/WR/IWR18016/IWR18016.pdf>
- BELTRAN, M., SAITO, F., & TRINDADE, L. (2014). *História da Ciência para formação de professores*. São Paulo: Livraria da Física.
- CAN, C., & CLARK, K. M. (2020). Because you're exploring this huge abstract jungle: one student's evolving conceptions of axiomatic structure in mathematics. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 15(3). <https://doi.org/10.29333/iejme/8566>

- CLIVAZ, S. (2011). *Des mathématiques pour enseigner, analyse de l'influence des connaissances mathématiques d'enseignants vaudois sur leur enseignement des mathématiques à l'école primaire*. Thèse de Doctorat en Education, Université de Genève.
- ERNEST, P. (1989). The knowledge, beliefs and attitudes of the mathematics teacher: A model. *Journal of education for teaching*, 15(1), 13-33.
- FERREIRA, M. C. N., RIBEIRO, M., & RIBEIRO, A. J. (2017). Conhecimento matemático para ensinar Álgebra nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. *Zetetike*, 25(3), 496-514. <https://doi.org/10.20396/zet.v25i3.8648585>
- FLORES MARTINEZ, P. (2004). *Creencias y concepciones de los futuros profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje: evolución durante las prácticas de enseñanza*. Thèse de Doctorat, Université de Grenade, Espagne.
- GUACANEME, E. (2016). *Potencial formativo de la historia de la teoría euclidiana de la proporción en la constitución del conocimiento del profesor de matemáticas*. Thèse de Doctorat, Université del Valle, Colombia.
- GUILLEMETTE, D. (2015). *L'histoire des mathématiques et la formation des enseignants du secondaire: sur l'expérience du dépaysement épistémologique des étudiants*. Thèse de Doctorat, Université du Québec à Montréal, Canada.
- GUILLEMETTE, D. (2017). History of mathematics in secondary school teachers' training: towards a nonviolent mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 96(3), 349-365.
- JANKVIST, U. T. (2013). History, applications, and philosophy in mathematics education: HAPh—A use of primary sources. *Science & Education*, 22(3), 635–656.
- LEMES, A. J. (2019). *L'histoire des mathématiques dans la formation des enseignants : éléments pour la construction d'une compétence historique*. Thèse de Doctorat, Université de Lille. Consulté à l'adresse <http://theses.fr/24518953X>
- MA, L. (2009). *Saber e ensinar: Matemática elementar*. Lisboa: Gradiva.
- MONTIEL, G., & BUENDIA, G. (2012). Un esquema metodológico para la investigación socioepistemológica: ejemplos e ilustraciones. In A. Rosas & A. Romo (Eds.), *Metodología en matemática educativa: visiones y reflexiones* (pp. 61-88). México : Lectorum.
- PEREIRA, A. & SAITO, F. (2018). Os instrumentos matemáticos na interface entre História e ensino de matemática: compreendendo o Cenário nacional nos últimos 10 anos. *Boletim Cearense De Educação E História Da Matemática*, 5(14), 109–122. <https://doi.org/10.30938/bocehm.v5i14.225>
- ROBERT, A. (2001). Les recherches sur les pratiques des enseignants et les contraintes de l'exercice du métier d'enseignant. *Recherches en didactique des mathématiques*, 21(1), 57-80.
- ROBERT, A. (2005). Sur la formation des pratiques des enseignants de mathématiques du second degré. *Recherche & formation*, 50(1), 75-89.
- ROJAS, N., FLORES, P., & CARRILLO, C. (2013). Caracterización del conocimiento matemático para la enseñanza de los números racionales. *Avances de investigación en Educación Matemática*, 4, 47-64.
- SHULMAN, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard educational review*, 57(1), 1-23.
- SOSA, L., & CARRILLO, J. (2010). Caracterización del conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) de matrices en bachillerato. In M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo & T. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 569-580). Lleida: SEIEM.
- SMESTAD, B., JANKVIST, U. T., & CLARK, K. (2014). Teachers' mathematical knowledge for teaching in relation to the inclusion of history of mathematics in teaching. *Nordic Stud Math Educ*, 19(3/4), 169-183.
- TATTO, M. T., LERMAN, S., & NOVOTNÁ, J. (2009). Overview of teacher education systems across the world. In R. Even & D. Ball (Eds.), *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics. New ICMI Study Series, vol 11* (pp. 15-23). Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-09601-8_3
- TORRES, L., GUACANEME, E., & ARBOLEDA, L. (2014). La Historia de las Matemáticas en la formación de profesores de Matemáticas. *Quipu*, 16(2), 203–224.
- VAN DER MAREN, J. (1996). *Méthodes de recherche pour l'éducation*. Montréal : Presses de l'Université de Montréal et de Boeck.

ANNEXE 1

Catégories identifiées dans les entretiens avec les enseignants et formateurs français		
Objectif	Méthode d'intégration	Difficulté
M1) Les mathématiques en tant que construction humaine, vivante et en constante évolution.	P1) Lecture de textes historiques.	T1) La recherche de texte historique adapté.
M2) La cohérence interne et l'enchaînement de la discipline, ainsi que le fait qu'il n'y a pas de vérité absolue.	P2) Problèmes ouverts dans l'introduction des sujets ou analyser différentes démonstrations et erreurs.	T2) Manque d'habitudes de lecture, de débat et de compréhension des textes du côté des élèves.
M3) Encourage la lecture, la curiosité, la motivation et le repos entre deux passages techniques.	P3) Anecdotes et simplifications.	T3) Accès aux documents (source, langue, temps disponible).
M4) Connaître les mathématiques ne suffit pas, il est nécessaire d'avoir une connaissance plus large, par exemple connaître les programmes de mathématiques.	P4) Intégrer l'histoire sans faire référence à l'épisode historique et nourrir ses propres conceptions.	T4) Hétérogénéité dans la formation des élèves.
M5) Source des problèmes et identification des obstacles épistémologiques.		T5) Activités accessibles et liées au programme.
M6) Liens entre les élèves « perdus » ou moins intéressés.		T6) « Blocage » en général algébrique.
M7) Déclencheur du dépaysement épistémologique, empathie, modestie et surprise.		T7) Anachronisme ou simplification d'un épisode historique.
M8) Rôle de l'enseignement des mathématiques dans la société, différentes versions des mathématiques, rigueur et compréhension.		T8) Volume horaire du programme, aucune obligation d'enseigner avec une perspective historique. Pas d'évaluation.
M9) Repenser les pratiques d'enseignement.		T9) Ne pas savoir comment intégrer ce type de perspective dans le cours de mathématiques.

ANNEXE 2

Catégories identifiées dans les entretiens avec les enseignants et formateurs uruguayens		
Objectif	Méthode d'intégration	Difficulté
A1) Donner du sens aux notions mathématiques.	B1) Anecdotes historiques.	C1) Les mathématiques sont étudiées de façon structurée et si l'histoire ne compte pas pour l'évaluation, les élèves sont contrariés d'avoir à l'étudier.
A2) Les mathématiques en tant qu'activité humaine.	B2) Histoire comme fil rouge dans un cours.	C2) Hétérogénéité des élèves : par exemple, problèmes de lecture.
A3) Souligner l'effort humain et le génie.	B3) Avec de matériel audiovisuel.	C3) Temps de préparation.
A4) Les mathématiciens font aussi des erreurs.	B4) Des problèmes proposés dans un certain contexte historique, sans fournir les outils mathématiques nécessaires à leur résolution.	C4) Programmes très vastes.
A5) Vivre l'expérience de faire mathématiques, se sentir à la place des élèves et ressentir de l'empathie.	B5) Histoire des mathématiques comme porte d'entrée à la recherche et en lien avec les programmes du secondaire ou d'autres disciplines.	C5) Les ressources matérielles ne sont pas toujours accessibles. Il n'y pas d'histoire des mathématiques pour chaque sujet mathématique.
A6) Enrichir les connaissances historiques permet de connaître différentes réponses pour le même problème.	B6) L'évaluation se propose en reliant un épisode historique avec les programmes du secondaire.	C6) Formation autodidacte des formateurs.
A7) L'histoire peut rassembler des éléments du savoir qui ont été fragmentés. Connaître le contexte historique du développement d'une notion contribue à la sécurité du futur enseignant.		
A8) Connaître les obstacles et les difficultés qui ont existé dans le développement de certaines notions et que les élèves peuvent avoir.		

TITRE

Actes du séminaire de didactique des mathématiques de l'ARDM, 2021

Editeurs

Aurélié Chesnais et Hussein Sabra

RESUME

Le séminaire de l'Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques (ARDM) a pour but de favoriser la mise en discussion et la diffusion des recherches en didactique des mathématiques. Il s'agit d'un outil que s'est donné l'ARDM pour soutenir la structuration de la communauté des chercheur-e-s de cette discipline. Le présent ouvrage regroupe les textes issus des séminaires de l'année 2021. Les deux séminaires de l'année 2021 ont eu lieu en janvier et en avril. Les textes de ce volume sont identifiés en fonction de la nature de l'intervention. Certains correspondent à la présentation d'une thèse ou d'une Habilitation à Diriger des Recherches, certains rendent compte de travaux en cours, d'autres sont des textes associés à des « travaux en cours ». Enfin, la rubrique « thématique filée » portent sur des présentations qui correspondent à des interventions visant à discuter les fondements des théories et leurs arrière-plans. L'objectif (ambitieux !), était d'initier une démarche pour aborder l'évolution du paysage théorique dans les recherches en didactique des mathématiques et de rouvrir la discussion sur ce qui fonde la discipline (à la fois du point de vue culturel, philosophique, épistémologique voire politique), pour mieux penser son avenir.

IREM de Paris – Université Paris Cité
Directeur de publication Christophe Hache
<https://irem.u-paris.fr>

Dépôt légal : 2023 – ISBN : 978-2-86612-406-9