Brochure IREM

n°101_2

Novembre 2023

Des ressources mathématiques pour les enseignants en classe de terminale

Fascicule 2 : pour la classe de terminale enseignement de spécialité

Monique Chappet-Paries
Jacqueline Penninxck
Françoise Pilorge
Aline Robert

ISSN : 0993-6947

INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES
UNIVERSITE DE PARIS

Imprimé par l’IREM de Paris – Université Paris Cité

Exemplaire **téléchargeable** sur notre site dans la section Publication
https://irem.u-paris.fr/

Coordonnées de l'IREM

Pour venir à l'IREM (il est possible de consulter et d'acheter les publications sur place):
Université Paris Cité, Bâtiment Sophie-Germain,
8 place Aurélie Nemours (sur l'avenue de France), huitième étage,
75013 Paris 13ème arrondissement
(métro 14 -Bibliothèque François Mitterrand ou tramway ligne T3a – Avenue de france)

Nous Contacter

Pour téléphoner: 01 57 27 91 93

Pour écrire à l'IREM concernant les publications:

par voie postale:
Locufier Nadine
IREM de Paris – Case 7018
Université Paris Cité
75205 Paris cedex 13

par voie électronique:
nlocufier@irem.univ-paris-diderot.fr

La liste des publications de l'IREM est mise à jour sur notre site web :

https://irem.u-paris.fr/ressources-en-ligne-de-lirem-de-paris-documents-videos-liens

Pour rester informé:

inscription à la liste de diffusion de l’IREM de Paris également sur le site de l'IREM

Des ressources mathématiques pour les enseignants en classe de terminale

Fascicule 2 : pour la classe de terminale enseignement de spécialité

Monique Chappet-Paries
Jacqueline Penninxck
Françoise Pilorge
Aline Robert

Des ressources mathématiques pour les enseignants en classe de terminale

Auteures : Monique Chappet-Paries, Jacqueline Penninxck, Françoise Pilorge, Aline Robert

Introduction

A l'origine des ressources présentées ici, une équipe d'auteur.e.s, proches de l'IREM, a produit en 2019, et pour les nouveaux programmes de cette année-là, deux manuels de 2de et 1re spécialité, édités chez Belin – c'est la collection Métamaths. Les livres du professeur associés à ces manuels présentent des analyses didactiques de certains chapitres, comportant notamment des commentaires méta. Ces manuels sont accompagnés de 6 vidéos pour les professeurs qui se trouvent sur le site de l'IREM de Paris à l'onglet : vidéos, sous-onglet : vidéos Manuels... Mais la collection s'est arrêtée là.

Les difficultés liées aux confinements, renforçant celles de la mise en œuvre simultanée des nouveaux programmes de seconde et de première, aggravées par l'éclatement du aux spécialités en première et terminale et à l'option « Mathématiques complémentaires » en terminale ont incité une petite partie de l'équipe à continuer à produire, hors édition scolaire, les quelques ressources qui constituent cette brochure, sur des thèmes choisis pour leur difficulté éventuelle.

Il y en a 3 pour le programme de mathématiques complémentaires et 3 pour les spécialités. Ces documents ont pour ambition de compléter ce que les enseignants peuvent consulter avant leur préparation, sur des chapitres « nouveaux », avec des retours sur les programmes. Deux ressources transversales peuvent être utilisées plus largement, notamment au lycée, et terminent cette offre[1].

En ce qui concerne les mathématiques complémentaires précisément, nous avons tenté de jouer le jeu des programmes en partant, dans les documents produits, des thèmes indiqués et non du découpage en chapitres.

Nous devons souligner que ces ressources n'ont rien à voir avec des chapitres de manuels, ne serait-ce qu'en raison de leur longueur et parce qu'il y a peu d'exercices. Ces documents, écrits pour les professeurs, diffèrent aussi de ressources IREM habituelles, en particulier parce qu'ils n'ont pas été expérimentés dans des classes, à une exception près (Inférence bayésienne) qui n'a pas été complètement analysée, même si cela a déjà donné lieu à quelques enrichissements – les enseignants n'ayant pas tout expérimenté, vu la taille du document. Cependant nous nous inscrivons dans la lignée des deux manuels cités en ce qui concerne la réflexion qui précède la production de ressources, intégrant les difficultés éventuelles des élèves et les liens entre les connaissances nouvelles et anciennes. De nombreux commentaires méta émaillent ces textes.

Pour chaque thème, deux fichiers complets sont mis à disposition, l'un en pdf et l'autre en doc, un lien vers ces fichiers est indiqué **dans la table des matières ci-jointe**. Ainsi, un collègue peut utiliser une partie de document doc, voire l'adapter pour s'en servir en classe (pour un exercice, une démonstration, etc.).

Cela nous semble d'autant plus important que les documents sont longs et trop complets pour la classe.

---

[1] F. Héraut a assuré la relecture de l'ensemble.

LISTE DES RESSOURCES

La numérotation est double, l'une pour l'ensemble du document (en bas, au milieu) indiquée dans la table des matières ci-dessous et l'autre pour chaque ressource (en bas à droite)

Fascicule 1 : pour la classe de terminale mathématiques complémentaires

- Corrélation et causalité (statistique à une variable, à deux variables) 4
- Inférences bayésiennes et Probabilités (conditionnelles, totales, formule de Bayes) 71
- Lois binomiale, géométrique, exponentielle, uniforme en liaison avec le thème « temps d'attente » 109

Liens pour télécharger les documents en docx ou en pdf

Correlation docx
http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/B101/Bayes_Maths_comp.docx

Correlation pdf
http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/B101/Correlation.pdf

Bayes docx
http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/B101/Bayes_Maths_comp.docx

Bayes pdf
http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/B101/Bayes_Maths_comp.pdf

Temps_d_attente docx
http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/B101/Temps_d_attente.docx

Temps_d_attente pdf
http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/B101/Temps_d_attente.pdf

Fascicule 2 : pour la classe de terminale enseignement de spécialité

- Combinatoire et dénombrement, dont combinaisons avec répétition 4
- Concentration, loi des grands nombres (inégalité de Bienaymé-Tchebychev, inégalité de concentration, loi des grands nombres) 28
- Manipulation des vecteurs, des droites, des plans de l'espace (avec quelques préalables de géométrie dans l'espace) 44

Deux ressources plus transversales

- Calcul d'aires (suites - calcul intégral) 68

Des calculs d'aires élémentaires, rappelés au début, on passe aux calculs plus compliqués (approximations), puis on aborde les aires comme surfaces sous une courbe associées aux intégrales. C'est donc une ressource adaptable à différents publics

- Nombre d'or et suites de Fibonacci – un vieux classique revisité 133

Cette ressource est indépendante des programmes en tant que tels mais peut être proposée dans différentes classes et à différents niveaux tant pour son intérêt historique que pour les problèmes qu'elle permet d'aborder. Plusieurs domaines sont en jeu (géométrie plane, nombres complexes, analyse, arithmétique, algèbre linéaire).

Liens pour télécharger les documents en docx ou en pdf

Combinatoire_et_denomb docx
http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/B101/Combinatoire_et_denomb.docx

Combinatoire_et_denomb
pdf http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/B101/Combinatoire_et_denomb.pdf

Concentration-Loi_GN docx
http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/B101/Concentration-Loi_GN.docx

Concentration-Loi_GN pdf
http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/B101/Concentration-Loi_GN.pdf

Vecteurs_droites_plans docx
http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/B101/Vecteurs_droites_plans.docx

Vecteurs_droites_plans pdf
http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/B101/Vecteurs_droites_plans.pdf

Calculs d_aires docx
http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/B101/Calculs_d_aires.docx

Calculs d_aires pdf
http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/B101/Calculs_d_aires.pdf

Nombre_d_or docx
http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/B101/Nombre_d_or.docx

Nombre_d_or pdf
http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/B101/Nombre_d_or.pdf

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

TERMINALE

Combinatoire et dénombrement

dont combinaisons avec répétitions

(22 pages)

Le document peut être téléchargé ici :

http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/B101/Combinatoire_et_denomb.docx

http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/B101/Combinatoire_et_denomb.pdf

Pourquoi une ressource sur le thème « Combinatoire et dénombrement » ?

Largement développée autrefois dans les programmes de mathématiques du lycée, l'analyse combinatoire avait disparu depuis de nombreuses années.

Dans le programme de 2012 on pouvait lire : *Si n est un entier naturel et si k est un entier compris entre 0 et n, on note* $\binom{n}{k}$ *et on lit « k parmi n » le nombre de chemins qui réalisent exactement k succès dans l'arbre à n niveaux, associé à un schéma de Bernoulli. Ces nombres sont appelés coefficients binomiaux.*

Pour la détermination de coefficients $\binom{n}{k}$ (où n et k sont des entiers naturels tels que $0 \leq k \leq n$), ainsi que des probabilités faisant intervenir la loi binomiale dans des cas simples, les élèves avaient recours à la calculatrice.

Le programme de la spécialité mathématique à la rentrée 2020 redonne une place assez importante à la combinatoire et au dénombrement.

Il s'agit de définir des objets et notations mathématiques permettant de compter le nombre d'éléments d'ensembles bien trop gros et compliqués pour être dénombrés à la main. Le dénombrement trouvera toute son utilité ensuite en probabilités.

Ce que dit le programme

« Combinatoire et dénombrement » est une section de la partie Algèbre et géométrie dont l'objectif est double :

- manipuler quelques notions ensemblistes, notamment celles de produit cartésien, de couple, de liste ou k-uplet, qui interviennent dans toutes les parties du programme ;
- dénombrer quelques objets combinatoires de base (listes d'éléments, combinaisons, permutations) pouvant être représentés diversement : parties d'un ensemble, mots, chemins dans un arbre.

Il s'agit ainsi d'enrichir le vocabulaire ensembliste des élèves et d'offrir une initiation aux mathématiques discrètes, qui jouent un rôle important dans le développement de l'informatique.

Cette partie donne également l'occasion de travailler le raisonnement par récurrence et de prolonger le travail engagé en classe de première sur les aspects algébriques ou combinatoires des suites.

Combinatoire et dénombrement

Les ensembles considérés dans cette section sont finis mais on introduit comme dans le cas général (ensembles quelconques) les notions suivantes : couple, triplet, k-uplet (ou k-liste) ; produit cartésien de deux, trois, k ensembles ; ensemble Ak des k-uplets d'éléments d'un ensemble A.

Contenus

1) Principe additif : nombre d'éléments d'une réunion d'ensembles deux à deux disjoints.

2) Principe multiplicatif : nombre d'éléments d'un produit cartésien. Nombre de k-uplets (ou k-listes) d'un ensemble à n éléments.

3) Nombre des parties d'un ensemble à n éléments. Lien avec les n-uplets de {0,1}, les mots de longueur n sur un alphabet à deux éléments, les chemins dans un arbre, les issues dans une succession de n épreuves de Bernoulli.

4) Nombre des k-uplets **d'éléments distincts** d'un ensemble à n éléments. Définition de n! Nombre de permutations d'un ensemble fini à n éléments.

5) Combinaisons de k éléments d'un ensemble à n éléments : parties à k éléments de l'ensemble. Représentation en termes de mots ou de chemins.

Pour $0 \leqslant k \leqslant n$, formules : $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

Explicitation pour k = 0, 1, 2. Symétrie. Relation et triangle de Pascal.

Cette ressource comporte trois grandes parties.

Pour la première partie, exposition des connaissances, nous avons choisi de suivre les paragraphes du programme. Chacun d'eux comporte un exemple introductif « pour comprendre ».

La seconde partie est un résumé des notions du programme dans lequel nous insistons sur les points importants qui peuvent servir à organiser les différentes notions (prise en compte dans la manière de décompter de l'ordre ou non, des répétitions ou non) suivi de trois séries d'exercices .
Dans la première série, on fait analyser rapidement l'énoncé afin de déterminer le type de dénombrement en jeu, puis on propose les solutions. La seconde série est un QCM permettant de revoir les formules du cours et la troisième propose quelques exercices non classés.
Les réponses à ces deux dernières séries d'exercices sont données à la fin du document.

La troisième partie développe le thème d'approfondissement « Combinaisons avec répétitions ». Dans la problématique des combinaisons avec répétitions, on s'intéresse au nombre de façons de choisir k objets parmi n objets distincts, mais en comptabilisant aussi bien les choix sans répétition que les choix comprenant des objets identiques, dans la limite du total imposé, k. Il se peut alors que k soit plus grand que n.

Comme dans la première partie, nous avons choisi de présenter, avant la définition et la formule permettant le calcul des combinaisons avec répétitions, quelques « exemples pour découvrir et comprendre ».

Table des matières

Première partie

I – Principe additif 3
II – Principe multiplicatif 4
III - Nombre de parties d'un ensemble à n éléments 5
IV - Nombre de k-uplets d'éléments distincts d'un ensemble à n éléments 7
V – Combinaisons de k éléments d'un ensemble à n éléments 8

Deuxième partie : résumé et exercices 11

Troisième partie : combinaisons avec répétitions 18

PREMIERE PARTIE

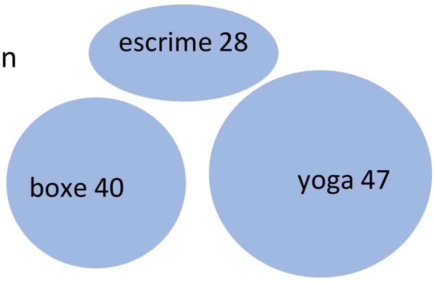
I - Principe additif :

<u>Objectif : **compter le nombre d'éléments pour une** </u>réunion d'ensembles deux à deux disjoints

Exemple : Parmi les adhérents d'un club de sport, 40 personnes font de la boxe, 28 de l'escrime et 47 du yoga.

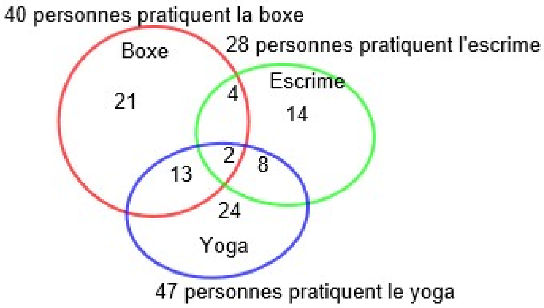
1. Si chaque adhérent n'avait choisi qu'un seul sport, combien le club compterait-t-il d'adhérents ?

   Les ensembles considérés sont disjoints donc le nombre total d'adhérents serait égal à la somme 40+28+47=115



2. En fait 15 personnes pratiquent la boxe et le yoga,
   10 pratiquent l'escrime et le yoga, 6 pratiquent escrime et boxe. 2 personnes pratiquent les trois disciplines à la fois. Combien le club compte-t-il d'adhérents ?

Cette fois les ensembles ne sont pas disjoints. On peut utiliser un diagramme (appelé diagramme de Venn) pour se ramener à des ensembles disjoints :



On sait que 2 personnes pratiquent les trois disciplines et que 15 pratiquent boxe et yoga. On peut donc en déduire que 15-2 = 13 personnes pratiquent boxe et yoga et seulement ces deux disciplines.

On peut compléter le schéma en indiquant les nombres de personnes qui font les trois sports et de celles qui font seulement de la boxe et du yoga. En continuant le raisonnement on obtient :

10-2=8 personnes pratiquent uniquement le yoga et l'escrime. On complète le schéma.
6-2=4 personnes pratiquent uniquement la boxe et l'escrime. On se ramène ainsi à des ensembles deux à deux disjoints.
On en déduit les nombres de personnes qui ne pratiquent qu'une seule discipline. Finalement, le club compte 86 adhérents

Définitions

Un ensemble est dit fini s'il a un nombre fini d'éléments, c'est-à-dire que l'on peut compter ses éléments.
Le nombre n d'éléments de l'ensemble fini E s'appelle son cardinal. On note card(E)=n

Propriété

Si A et B sont deux ensembles finis disjoints, ayant respectivement n_A et n_B éléments, alors leur réunion contient $n_A + n_B$ éléments, autrement dit card(A$\cup B$)=card(A)+card(B) = $n_A + n_B$

Plus généralement, p étant un entier naturel non nul, $E_1, E_2, \dots E_p$ sont des ensembles finis, deux à deux disjoints, contenant respectivement $n_1, n_2, \dots n_p$ éléments.

Leur réunion, notée $E_1 \cup E_2 \cup \dots E_p$ contient $n_1+n_2+\dots+n_p$ éléments.

Card$(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_p) = card(E_1) + card(E_2) + \cdots + card(E_p)$

Notation : $Card(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_p) = \sum_{i=1}^{i=p} card(E_i)$

II - Principe multiplicatif :

Objectif : compter le nombre d'éléments d'un produit cartésien

1) Nombre d'éléments d'un produit cartésien et arbre de choix

Exemple : un restaurant propose un menu composé d'une entrée et d'un plat. On a le choix entre cinq entrées et trois plats. Combien peut-on composer de menus différents ?

On peut dessiner un arbre : on a 5 choix pour l'entrée et 3 pour le plat donc 15 menus possibles.Si on note A l'ensemble des entrées et B l'ensemble des plats, chaque menu est un couple (a,b) formé d'un élément de A, suivi d'un élément de B. L'ensemble de tous les menus possibles compte 3×5 *soit 15 éléments.*

Définition :

Pour tout ensemble A et tout ensemble B, il existe un ensemble constitué de tous les **couples** dont la première composante appartient à A et la seconde composante appartient à B. Cet ensemble, noté A×B est appelé **produit cartésien** de A par B.

Pour « composante » on dit aussi « élément ».

Propriété : si A et B sont des ensembles finis, tels que A contient n_A éléments (distincts) et B contient n_B éléments, alors le produit cartésien A×B contient $n_A \times n_B$ éléments (ou couples)

Si card(A) = n_A et card(B) = n_B alors Card(A × B)= $n_A \times n_B$

On a en effet n_A façons de choisir un élément de A puis n_B façons de choisir un élément de B, donc $n_A \times n_B$ façons de choisir un couple de A×B : c'est le principe multiplicatif, illustré par un arbre de choix.

Plus généralement,

Définition : k est un entier naturel non nul et $E_1, E_2 \dots E_k$ sont des ensembles quelconques (finis ou non) ; il existe un ensemble constitué de tous les **k-uplets** ou k-listes de la forme $(e_1, e_2, \dots, e_k)$ où la première composante e_1 appartient à E_1, la deuxième à E_2 etc.
Cet ensemble, noté $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_k$ est appelé **produit cartésien** des ensembles $E_1, E_2, \dots E_k$

Remarque : une k-liste est parfois appelée « un arrangement avec répétition »

Propriété :
Si les ensembles $E_1, E_2, \dots E_k$ sont finis et contiennent respectivement n_1, n_2, … n_k éléments, le nombre d'éléments du produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_k$ est égal à $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$.

Remarque :

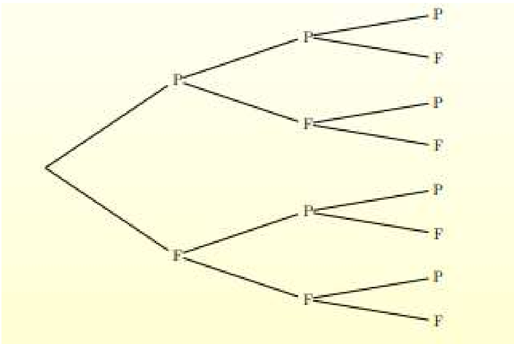
On a donné ci-dessus un exemple du produit cartésien de deux ensembles finis mais on peut aussi faire le produit cartésien de deux, voire plusieurs ensembles qui ne sont pas finis : c'est le cas, par exemple, des couples de coordonnées des vecteur du plan. Chaque couple $(x\,;\,y)$ est formé de deux réels, on dit que c'est un élément du produit cartésien $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, noté $\mathbb{R}^2$. Pas question de compter dans ce cas !

C'est aussi le cas des triplets de coordonnées des vecteur de l'espace. Chaque triplet $(x\,;\,y\,;z)$ est formé de trois réels, on dit que c'est un élément du produit cartésien $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, noté $\mathbb{R}^3$.

2) Nombre de k-uplets (ou k-listes) d'un ensemble à n éléments (1≤ n)

Exemple : on lance une pièce de monnaie trois fois de suite. A chaque lancer, le résultat est soit pile soit face. Dénombrer tous les résultats possibles à l'issue des trois lancers.

On peut réaliser un arbre.
A l'issue des trois lancers, on peut avoir par exemple (P, F, P) ou (F, F, P), etc. Si on note E l'ensemble {P, F}, chaque résultat est un élément du produit cartésien E × E × E noté E^3 *qui contient* $2^3 = 8$ *éléments. On a donc 8 résultats possibles.*



Définition
n et k sont des entiers naturels supérieurs ou égaux à 1.
E étant un ensemble fini à n éléments, un k-uplet ou une k-liste de E est une **suite ordonnée** de k éléments **distincts ou non** de E.
Un k-uplet de E est donc un élément du produit cartésien $\underbrace{E \times E \times \dots \times E}_{k\ termes}$ ou E^k

Propriété : Le nombre de k-uplets (ou k-listes) d'un ensemble à n éléments est égal à n^k

Remarque : k peut être supérieur à n puisque les éléments ne sont pas nécessairement distincts ; on dit qu'il y a répétition lorsqu'on retrouve plusieurs fois le même élément de E, comme on l'a vu ci-dessus.

III - Nombre de parties d'un ensemble à n éléments

Objectif : compter le nombre de parties (de sous-ensembles) d'un ensemble à n éléments.

Exemple : On considère l'ensemble $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{x_1}; \boldsymbol{x_2}; \boldsymbol{x_3}; \boldsymbol{x_4}\}$

L'ensemble $\wp(E)$ est formé de tous les sous-ensembles (toutes les parties) de *E*. Ainsi, par exemple, les ensembles $\{\emptyset\}$; $\{\boldsymbol{x_1}\}$; $\{\boldsymbol{x_2}; \boldsymbol{x_3}\}$; $\{\boldsymbol{x_1}; \boldsymbol{x_3}; \boldsymbol{x_4}\}$ appartiennent à $\wp(E)$

Il s'agit de compter le nombre d'éléments de $\wp(E)$. Pour cela, il y a plusieurs méthodes possibles. Dans le cas où le nombre d'éléments de E est « petit », comme dans notre exemple, il est possible de lister tous les éléments de $\wp(E)$.

En dehors de l'ensemble vide, on peut répertorier les parties à un élément (il y en a quatre), celles à deux éléments : $\{\boldsymbol{x_1}; \boldsymbol{x_2}\}$: $\{\boldsymbol{x_1}; \boldsymbol{x_3}\}$; $\{\boldsymbol{x_1}; \boldsymbol{x_4}\}$; $\{\boldsymbol{x_2}; \boldsymbol{x_3}\}$; $\{\boldsymbol{x_2}; \boldsymbol{x_4}\}$; $\{\boldsymbol{x_3}; \boldsymbol{x_4}\}$ (il y en a six). En continuant avec les parties à trois éléments puis la partie E elle-même, on trouve que $\wp(E)$ a seize éléments.

On voit qu'il faut travailler avec méthode et cela devient vite laborieux.

Autre méthode : pour chaque partie de E, un élément $\boldsymbol{x_i}$ appartient ou non à cette partie. On associe donc à cet élément la valeur 0 ou 1. Il s'agit donc de compter le nombre de 4-listes formées de 0 ou de 1, c'est-à-dire de l'ensemble $\{0; 1\}$. D'après le résultat du paragraphe III, on sait qu'il y en a $2^4 = 16$

Propriété :
n étant un entier naturel, le nombre de parties d'un ensemble E à n éléments est égal à 2^n

On note : $\text{Card}\big(P(E)\big) = 2^n$

Démonstration :
Il y a trois démonstrations possibles.

Démonstration 1 :

On peut ranger les n éléments de E que l'on va noter $e_1, e_2, \ldots\ e_n$. Former une partie A de E, c'est choisir pour chaque élément $e_1, e_2, \ldots\ e_n$ si on le met dans A ou non. Notons 0 lorsqu'on ne le met pas dans A et 1 lorsqu'on l'y met : on peut alors faire un arbre de choix comprenant n étapes. Chaque étape correspond à un élément de E qui peut être choisi pour faire partie de A (1) ou pas (0).

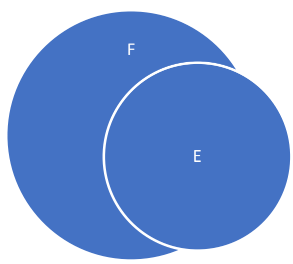
Une branche de l'arbre est un n-uplet de l'ensemble $E = \{0; 1\}$. Le nombre total de branches est donc égal au nombre d'éléments du produit cartésien E^n, soit 2^n d'après la propriété vue au II 2.

Démonstration 2 : démonstration par récurrence

- La propriété est vraie pour n=0 ; en effet l'ensemble vide n'a qu'un sous-ensemble (ou partie) qui est elle-même vide.

-supposons que pour k entier strictement positif, l'ensemble E à k éléments compte 2^k parties.

Considérons l'ensemble F, obtenu en « ajoutant » à E un élément a (n'appartenant pas à E) : F a donc k+1 éléments et E est inclus dans F



Parmi les parties de F, on peut distinguer :

- Celles qui ne contiennent pas a et qui sont donc des parties de E : il y en a 2^k d'après notre hypothèse de récurrence

- Celles qui contiennent a : on les obtient toutes en « ajoutant » a à chaque partie de E. Il y en a donc également 2^k

Au total, le nombre de parties de F est égal à $2^k + 2^k = 2 \times 2^k = 2^{k+1}$

- On a démontré par récurrence que pour tout entier naturel n, le nombre de parties d'un ensemble à n éléments est égal à 2^n.

Démonstration 3 : cette démonstration sera traitée exercice 14 du fichier « Résumé de cours – dénombrement » (elle nécessite d'avoir étudié le § IV)

IV - Nombre de k-uplets d'éléments distincts d'un ensemble à n éléments

Objectif : compter le nombre de k-uplets ou k-listes d'éléments distincts d'un ensemble à n éléments.

1) Nombre d'arrangements

Exemple : On doit établir une liste de cinq personnes pour une élection. Ces cinq personnes (sous-entendu distinctes) seront rangées sur la liste. Il y a douze candidats pour faire partie de la liste. Combien a-t-on de façons de constituer cette liste ?

On a 12 façons de choisir la tête de liste, puis 11 pour la deuxième personne, 10 pour la 3ème , 9 pour la 4ème et 8 pour la 5ème

On a 12×11×10×9×8 = 95040 façons de constituer cette liste.

Chaque liste est un 5-uplet d'éléments de l'ensemble A des 12 candidats mais comme les personnes doivent être différentes, on parle de 5-uplet d'éléments distincts de A ou 5-uplet sans répétition ou encore arrangement de 5 personnes parmi 12.

Définition et propriété

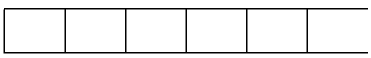
n est un entier naturel non nul et E un ensemble à n éléments.

Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, on appelle arrangement de k d'éléments de E tout k-uplet (ou k-liste) d'éléments **distincts** de E.

Pour k et n entiers tels que $1 \leq k \leq n$ le nombre d'arrangements de k éléments de E, noté A_n^k, est $A_n^k = n(n-1) \dots (n-k+1)$

C'est le produit de k entiers consécutifs dont le plus grand est n.

Démonstration
Obtenir un k-uplet d'éléments distincts de E revient à remplir k cases avec des éléments de E.



Pour la première case, on a n possibilités puisque E contient n éléments.
Pour la deuxième case, on doit choisir un autre élément parmi les n-1 restants donc on a n-1 possibilités
Pour la 3ème, on choisit encore un autre élément parmi les n-2 restants et ainsi de suite …
Pour la k^{ième} case, on a $n-(k-1)$ possibilités, soit $n-k+1$.
Le principe multiplicatif donne le résultat. On peut aussi réaliser un arbre.

2) Nombre de permutations d'un ensemble à n éléments

Exemple : Déterminer le nombre d'anagrammes du mot SUITE

On peut raisonner comme ci-dessus ou encore faire un arbre. On a 5 façons de choisir la 1ère lettre, puis 4 pour la deuxième, 3 pour la 3ème , 2 pour la 4ème et 1 pour la 5ème
Donc 5×4×3×2×1= 120 anagrammes possibles.
Chacun d'eux est un 5-uplet d'éléments distincts de l'ensemble $\{S, U, I, T, E\}$ *; comme cet ensemble ne compte que 5 éléments, cela revient à ordonner ces 5 éléments.*

Définition et propriété :

n est un entier naturel non nul et E un ensemble à n éléments (card(E)=n).
On appelle **permutation** de E tout n-uplet formé des n éléments distincts de E ou tout arrangement
des n éléments de E

Propriété : Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est égal à
$n(n-1)\ldots(n-n+1) = n(n-1)\ldots \times 3 \times 2 \times 1$
Ce nombre est le produit de tous les entiers non nuls inférieurs ou égaux à n : on l'appelle « factorielle n» et on le note n !
Par convention, $0! = 1$.

Démonstration : c'est un cas particulier de IV - 1 lorsque k=n.

<u>Remarque</u> : $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

Cette écriture est commode dans les expressions formelles

En effet : $n(n-1)\ldots(n-k+1) = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)(n-k)(n-k-1)(n-k-2)\ldots.\times 2\times 1}{(n-k)(n-k-1)(n-k-2)\ldots.\times 2\times 1} = \frac{n!}{(n-k)!}$

V – Combinaisons de k éléments d'un ensemble à n éléments :

1) Parties à k éléments distincts d'un ensemble à n éléments.

Exemple : De combien de façons peut-on former un comité de trois membres au sein d'un groupe de neuf personnes ?
On sait calculer le nombre de 3-uplets d'éléments distincts d'un ensemble comptant 9 éléments :
$A_9^3 = 9\times 8 \times 7$. De plus il y a 3! façons de ranger ces 3 éléments distincts (ou permutations).
On a donc $\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}$ =84 comités possibles de trois personnes.

Remarque : $\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1} = \frac{9!}{(9-3)!3!}$

Définition et notation :
Soit k et n des entiers naturels tels que 0 ⩽ k ⩽ n .
On appelle combinaison de k éléments d'un ensemble E à n éléments tout sous ensemble de E comprenant k éléments. Le nombre de combinaisons de k éléments d'un ensemble à n éléments est noté $\binom{n}{k}$

Propriété :
Le nombre de combinaisons de k éléments d'un ensemble à n éléments est

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

Démonstration :

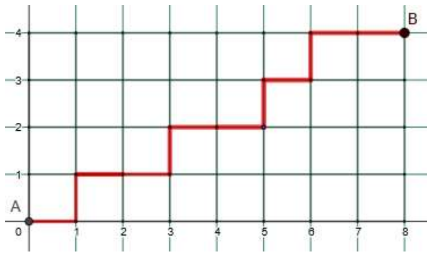
Le nombre de k uplets de E est égal à $A_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1)$. Or il existe k ! permutations de ces k u-plets donc le nombre de combinaisons de k éléments d'un ensemble à n éléments est égal à $\frac{A_n^k}{k!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

Cas particuliers

- Le seul sous ensemble contenant 0 éléments d'un ensemble à n élément est l'ensemble vide donc $\binom{n}{0}$ =1. On retrouve ce résultat avec la formule $\frac{n!}{(n)!0!}$ =1
- Il y a n sous-ensembles de E contenant un seul élément donc $\binom{n}{1}$=n.
  On retrouve ce résultat avec la formule $\frac{n!}{(n-1)!1!}$ =n.
- Nombre de sous-ensembles de E contenant 2 éléments $\binom{n}{2} = \frac{n!}{(n-2)!2!} = \frac{n(n-1)}{2}$

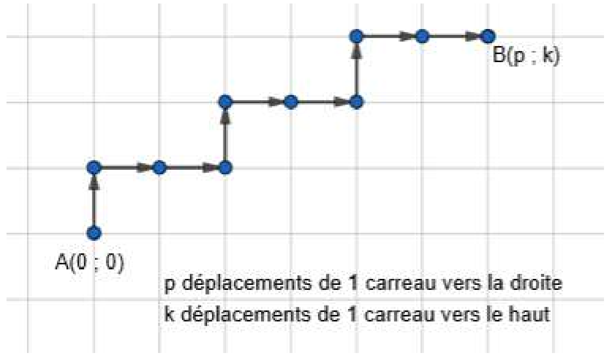
Propriété : pour tous entiers naturels n et k tels que $0 \leq k \leq n$, on a $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
Le nombre de sous-ensemble de E contenant k éléments est égal au nombre de sous-ensembles de E contenant n-k éléments. En effet pour toute combinaison de k éléments de E considérée, il reste une combinaison des n-k éléments de E restants. On a donc autant de parties de E à n éléments que de parties à n-k éléments. Ce qu'on retrouve avec la formule. $\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

2) Représentation en termes de chemins.



Exemple : On considère le quadrillage ci-contre.
On cherche le nombre de chemins, les plus courts possibles allant de A à B en se déplaçant sur les traits du quadrillage.
On note, par exemple, D un déplacement de un carreau vers la droite et H un déplacement de un carreau vers le haut.

Un chemin est donc une succession de 12 déplacements vers la droite ou vers le haut. Le chemin tracé sur le schéma est codé



D-H-D-D-H-D-D-H-D-H-D-D.

Le nombre de chemins possibles est donc le nombre de façons de choisir, parmi les 12 déplacements nécessaires, les 8 déplacements D (ou les 4 déplacements H).Il y a donc $\binom{12}{8} = 495$ chemins possibles. On retrouve la propriété précédente car on remarque que l'on a aussi $\binom{12}{4} = 495$.

Cas général : Soit *p* le nombre de déplacements vers la droite et *k* celui des déplacements vers le haut. On note $n = p + k$

Le nombre de chemins de A à B est égal à $\binom{n}{p} = \binom{n}{k} = \binom{n}{n-p}$

3) Représentation en termes de mots

On considère, par exemple, les lettres A et B (ou deux autres symboles distincts)

Le nombre de mots de n lettres que l'on peut faire avec k lettres A (ou symboles) et (n-k) lettres B est égal $\binom{n}{k}$

4) Triangle de Pascal

a) Propriété :

Quels que soient les entiers n et k tels que 0≤ $k \leq n$, on a l'égalité $\binom{n-1}{k-1}$+$\binom{n-1}{k}$ =$\binom{n}{k}$ appelée relation de Pascal.

	$k-1$	k
$n-1$	$\binom{n-1}{k-1}$	$\binom{n-1}{k}$
n		$\binom{n}{k}$

Démonstration

$\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k)!(n-k-1)!}$

Or k ! = (k-1)!k et (n-k)!=(n-k)(n-k-1)!

Donc $\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!(k+n-k)}{(k)!(n-k)!}=\frac{n!}{(k)!(n-k)!}=\binom{n}{k}$

b) Triangle de Pascal :

Si on dispose les nombres $\binom{n}{k}$ dans un tableau à double entrée en mettant n sur les lignes et k sur les colonnes on peut compléter le tableau de proche en proche en utilisant la propriété précédente. Par exemple, on obtient 10 comme somme de 4 et de 6 :

4	6
	10

k \ n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

DEUXIEME PARTIE

Ce document, en deux parties, propose :

- un résumé des notions du programme en insistant sur les points importants (ordre ou non, répétition ou non)

- trois séries d'exercices :

Dans la première série, on analyse rapidement l'énoncé afin de déterminer la catégorie de dénombrement en jeu, puis on propose les solutions. La seconde série est un QCM permettant de revoir les formules du cours et la troisième propose quelques exercices non classés.

Les réponses à ces deux dernières séries d'exercices sont données à la fin du document.

A) Le point sur le cours

Dans une **k-liste ou k-uplet**, les k éléments sont **ordonnés** et un élément peut figurer **plusieurs fois** (répétitions possibles).

Les listes modélisent des tirages successifs avec remise.

Le nombre de k-listes que l'on peut faire avec n éléments est n^k (k et n entiers naturels)

Dans un **arrangement** de k éléments d'un ensemble à n éléments, les éléments sont **ordonnés** et **distincts** (chaque élément ne peut figurer qu'une seule fois, pas de répétition).

Les arrangements modélisent des tirages successifs **sans** remise.

Le nombre d'arrangements de k éléments que l'on peut faire avec n éléments est :

$A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1)$ où k et n entiers tels que $0 \leq k \leq n$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Une **permutation** de n éléments est un arrangement de ces n éléments (on les prend tous sans répétition et on les ordonne).

Le nombre de permutations de n éléments distincts est n ! : c'est le nombre de façons d'ordonner les n éléments d'un ensemble.

Une **combinaison** est un ensemble : ses éléments ne sont **pas ordonnés** et ils sont **distincts**.

Les combinaisons modélisent des tirages **simultanés**.

Le nombre de combinaisons de k éléments parmi n est : $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

On peut résumer dans un tableau :

Les éléments sont	Distincts (pas de répétition)	Pas forcément distincts (répétitions possibles)
Ordonnés (on peut faire un arbre)	Arrangement	Liste
Pas ordonnés	Combinaison	Combinaison avec répétition (approfondissement)

B) Premiers exercices pour bien comprendre :

Exercice 1 : On considère l'ensemble $E = \{a, b, c, d, e, f, g\}$. Donner un exemple de :

1. une permutation d'éléments de E ;
2. une 4-liste d'éléments de E ;
3. un arrangement de 3 éléments de E ;
4. une combinaison de 3 éléments de E.
5. Déterminer le nombre de :
   a) permutations d'éléments de E ;
   b) 4-listes d'éléments de E ;
   c) arrangements de 3 éléments de E ;
   d) combinaisons de 3 éléments de E.

Exercice 2

Dans une boite, on a placé 9 jetons numérotés de 1 à 9. On prélève successivement 3 jetons que l'on dispose côte à côte pour former un nombre de 3 chiffres : le 1^{er} jeton donne le chiffre des centaines, le $2^{ème}$ le chiffre des dizaines, le $3^{ème}$ le chiffre des unités.

Combien de nombres peut-on ainsi former ?

Questions à se poser :

Les 3 jetons sont-ils ordonnés ? oui, par exemple 137 n'est pas égal à 317
Les jetons sont-ils distincts ? oui puisqu'on ne remet pas le jeton tiré dans la boite.

Exercice 3

1) Combien de mots de 5 lettres peut-on écrire avec les lettres du mot RAME ?
Par « mot », on entend suite de 5 lettres choisies parmi R, A, M, E. Le « mot » peut avoir un sens ou pas, comme MARRE ou RARRR.

Questions à se poser :

Les éléments sont-ils ordonnés ? oui
Les éléments sont-ils distincts ? non, il peut y avoir des répétitions (il y en a même nécessairement).

2) Déterminer le nombre d'anagrammes du mot RAME.

Questions à se poser :
Les éléments sont-ils ordonnés ? oui

Les éléments sont-ils distincts ? oui, pas de répétition.

Exercice 4

Combien a-t-on de façons de choisir une délégation de 4 personnes dans un groupe de 50 personnes ?

Questions à se poser :
Les éléments sont-ils ordonnés ? non, les 4 personnes ne sont pas rangées
Les éléments sont-ils distincts ? oui, pas de répétition.

Solutions

Ex 1 :**1.**(b ; c ; a ; d ; f ; e ; g) est une permutation de l'ensemble E.

5. a) Il y a 7 != 5040 permutations possibles

2. (a ; c ; c ; d) est une 4-liste d'éléments de E (g ;a ;d ;d) en est une autre.

5. b) Nombre de 4-listes avec les éléments de E :$7^4 = 2401$

3. (b ; c ; a) est un arrangement de 3 éléments de E

5. c) Il y a $7 \times 6 \times 5 = 210$ arrangements de 3 éléments de E

4. {b ;g ;e} est une combinaison de 3 éléments de E.

C'est un sous-ensemble (une partie) à 3 éléments de E

5. d) Il y a $\binom{7}{3} = \frac{7\times6\times5}{3\times2} = 35$ combinaisons de 3 éléments de E

Ex 2 : Chaque nombre est un arrangement de 3 jetons pris parmi les 9 jetons.

On a $9 \times 8 \times 7$=504 arrangements possibles. On peut obtenir 504 nombres distincts.

Ex 3 :

1) Un « mot » est une 5-liste (ou un 5-uplet) des 4 lettres RAME.

(On peut penser à un arbre)On peut écrire 4^5=1024 mots de 5 lettres.

2) Chaque mot est une permutation des 4 lettres (ou un arrangement des 4 lettres).

On a 4 !=24 anagrammes du mot RAME.

Ex 4 :

Chaque délégation est un ensemble de 4 personnes choisies parmi 50 : c'est donc une combinaison de 4 éléments parmi 50.

On a $\binom{50}{4} = \frac{50\times49\times48\times47}{4!} = 230300$ délégations possibles.

C) Un QCM

Dans chaque cas, indiquer la (les) réponse(s) exacte(s).

1. Le nombre 0 ! :
   a) est égal à 0
   b) est égal à 1
   c) n'a pas été défini

2. Le nombre de listes à k éléments distincts ou non, dans un ensemble à p éléments :
   a) est égal à k^p
   b) est égal à p^k
   c) est égal à A_p^k

3. L'expression $\frac{n!}{2!(n-2)!}$
   a) est la valeur de $\binom{n}{2}$
   b) est la valeur de $\binom{n}{n-2}$
   c) est la valeur de A_n^{n-2}

4. Le nombre de manières différentes de placer 5 croix et 5 ronds dans une liste de 10 éléments est égal à : a) 2^{10} b) A_{10}^5 c) $\binom{10}{5}$

5. Le nombre 4! est :
   a) le nombre de classements possibles d'un ensemble à 4 éléments distincts.
   b) le nombre des permutations possibles d'un ensemble à 4 éléments distincts.
   c) le nombre des arrangements de 4 éléments dans un ensemble à 6 éléments.

D) Exercices d'entrainement

Exercice 5 : Dans le plan, on considère 12 points distincts.

a) Déterminer le nombre de vecteurs non nuls que l'on peut nommer.
b) Déterminer le nombre de segments que l'on peut nommer.

Exercice 6 : Cendrillon possède dans sa garde-robe 3 robes, 4 paires de chaussure dont une en vair et 2 diadèmes. Cendrillon choisit au hasard sa tenue : une robe, une paire de chaussure et un diadème.

a) Combien peut-elle constituer de tenues différentes ?
b) Combien peut-elle constituer de tenues comportant la célèbre paire de vair ?

Exercice 7 : Cinq garçons et quatre filles vont au cinéma et s'installent sur la même rangée.

a) De combien de façons peuvent-ils s'asseoir ?
b) De combien de façons peuvent-ils s'asseoir s'ils veulent que chaque fille soit encadrée par deux garçons ?

Exercice 8: Cinq garçons et quatre filles dînent ensemble autour d'une table ronde.

a) De combien de façons peuvent-ils s'asseoir ?

b) De combien de façons peuvent-ils s'asseoir s'ils veulent que chaque fille soit encadrée par deux garçons ?

Exercice 9 :Déterminer le nombre d'anagrammes du mot ANATOLE.

Questions à se poser : L'ordre des lettres est-il important ?
Si toutes les lettres étaient distinctes, en numérotant les A combien y aurait-il d'anagrammes ?
Mais les A ne sont pas numérotés. Combien d'anagrammes compte-t-on en trop ?

Exercice 10 :

Déterminer le nombre d'anagrammes du mot SENTENCE.

Questions à se poser : L'ordre des lettres est-il important ?
Si toutes les lettres étaient distinctes (par exemple, en numérotant les E, d'une part et les N d'autre part) combien y aurait-il d'anagrammes ?
Mais les N ne sont pas numérotés. Combien d'anagrammes compte-t-on en trop ?
Et pour les E ?

Exercice 11 : un peu de calcul

Soit n un entier naturel non nul, simplifier (la notation ! ne devra pas figurer dans le résultat):

a) $\frac{n!}{(n-1)!}$ b) $\frac{(2n+3)!}{(2n+1)!}$ c) $\frac{n!}{(n-1)!}+\frac{(n+1)!}{(n-2)!}$ d) $\frac{(n-1)!}{n!}-\frac{n!}{(n+1)!}$

Exercice 12

Au loto une grille simple comprend 49 cases numérotées de 1 à 49. Pour jouer il faut cocher six numéros.

1) Quel est le nombre total de grilles possibles ?
2) Pauline joue toujours 6 numéros consécutifs : combien de grilles peut-elle jouer ?
3) La grille gagnante étant connue, déterminer le nombre de grilles contenant exactement 3 numéros gagnants.

Exercice 13 : Formule du binôme de Newton

On sait développer $(a+b)^2$ ou $(a+b)^3$ quels que soient les nombres réels a et b. Il s'agit de généraliser et d'établir le développement de $(a+b)^n$pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2.

1) Développer $(a+b)^n$ pour n=2, n=3 et n=4. Ordonner l'expression obtenue suivant les puissances décroissantes de *a* et comparer les coefficients numériques des développements avec les valeurs du triangle de Pascal pour les mêmes valeurs de n.

Quelle conjecture peut-on faire ?

2) Démontrer par récurrence la formule, dite du binôme de Newton :

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} \times b + \binom{n}{2} a^{n-2} \times b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a \times b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

que l'on peut écrire $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} a^k \times b^{n-k}$

Exercice 14 : Nombre de parties d'un ensemble à n éléments

Démonstration utilisant la formule du binôme de Newton

On considère un ensemble E ayant n éléments distincts.

Pour compter toutes les parties (tous les sous-ensembles) de E il suffit de compter celles ne comprenant aucun élément (la partie vide), celles comprenant 1 élément, celles comprenant 2 éléments, etc. et d'ajouter leurs nombres.

a) Combien y a-t-il de parties à 0 éléments ? à 1 élément ? à 2 éléments ? à k éléments ?

b) En déduire que le nombre de parties de E est égal à $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}$(que l'on peut écrire : $\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k}$)

c) En utilisant la formule du binôme de Newton dans le cas particulier où a=b=1, en déduire que le nombre de parties d'un ensemble à n éléments est égal à 2^n

Réponses au QCM

1) réponse b ;2) réponse b) ; 3) réponses a) et b) ; 4) réponse c) ; 5) réponses a) et b)

Réponses aux exercices 5 à 12

Exercice 5 : a) A_{12}^2 ; b) $\binom{12}{2}$ Exercice 6 : a) 3×4×2 b) 3×1×2

Exercice 7 : a) 9 ! b) (5 !)×(4 !) Exercice 8 : a) 8 ! b) $\frac{8!}{9}$ Exercice 9 : $\frac{7!}{2!}$

Exercice 10 : $\frac{8!}{2!3!}$ Exercice 11 : a) n ; b) (2n+3)(2n+2) ; c) n^3 ; d) $\frac{1}{n(n+1)}$

Exercice 12 : 1) $\binom{49}{6}$; 2) 44 ; 3) $\binom{6}{3} \times \binom{43}{3}$

TROISIEME PARTIE– Combinaisons avec répétitions (approfondissement)

Le thème « Combinaisons avec répétitions » est introduit en approfondissement dans la partie Combinatoire et dénombrement » du programme.
Jusqu'à présent nous n'avons introduit que les combinaisons « sans répétition », c'est-à-dire qu'on comptait le nombre de façons de choisir k objets tous différents parmi n éléments distincts. On avait donc $0 \leq k \leq n$.
Dans la problématique des combinaisons avec répétitions, on s'intéresse au nombre de façons de choisir k objets parmi n objets distincts, mais en comptabilisant aussi bien les choix sans répétition que les choix comprenant des objets identiques, dans la limite du total imposé, k. Il se peut alors que k soit plus grand que n. Par exemple k = n+1 implique qu'il y a un élément choisi au moins deux fois dans chaque combinaison à comptabiliser. Chaque élément peut même être choisi n+1 fois…
Notons que l'ordre des objets n'est pas pris en compte dans ces comptages.

Nous avons choisi de présenter, avant la définition et la formule permettant le calcul des combinaisons avec répétitions, quelques « exemples pour découvrir et comprendre ». Dans les premiers exemples on peut énumérer les choix et les compter « à la main », mais dans les cas plus compliqués, il devient indispensable de disposer d'une formule pour calculer le nombre de combinaisons avec répétitions de k objets pris dans un ensemble E comprenant n éléments, distincts. Ce nombre est noté K_n^p.
On donne ensuite une représentation astucieuse des éléments en jeu dans ce type de calculs, faisant intervenir le nombre d'objets distincts (n) à la base des choix et le nombre d'objets à choisir (k), qui permet d'introduire la formule. Pour conclure, nous indiquons une propriété du nombre K_n^p faisant intervenir une relation de récurrence.

I – Exemples pour découvrir et comprendre

Exemple 1 : Chloé prend au hasard deux chaussettes dans un tiroir où elles sont rangées en vrac. Elles ne sont que rouges, vertes ou bleues. Quels sont les choix de couleur possibles ?
Il s'agit, dans cet exemple, de choisir deux éléments (2 couleurs de chaussettes) dans un ensemble comprenant 3 éléments (3 couleurs) avec répétition possible, l'ordre n'ayant pas d'importance.
L'ensemble E est constitué de trois éléments, qui sont les couleurs et que l'on note R, V et B.
$E = \{R\,; V\,; B\}$. Chloé prend deux chaussettes au hasard. Elles peuvent donc être de la même couleurou pas. Les différents choix possibles sont des combinaisons dites « avec répétitions ».
On observe que le nombre de chaussettes présentes dans le tiroir n'intervient pas, pas plus que l'ordre dans lequel Chloé les tire.
Les choix possibles : BB, BV, BR, RR, RV, VV donc 6 choix.

C'est-à-dire qu'on ajoute les choix de 2 chaussettes de la même couleur (3 choix possibles) et les choix de 2 chaussettes de couleurs différentes ($\binom{3}{2}$ choix possibles).

Donc, d'après la relation de Pascal $\binom{3}{1}+\binom{3}{2}=\binom{4}{2}$ choix possibles

Exemple 2 : Dominos

Sur un domino sont inscrits deux nombres choisis de 0 à 6 avec répétitions possibles. Les dominos (0 ; 1) ou (1 ; 0) ne sont pas distingués.
Le nombre de dominos possibles est donc une combinaison avec répétitions de 2 éléments pris parmi 7.
Si l'un des nombres choisi est 0, pour le second on a 7 choix possibles.
Si l'un des nombres choisi est 1, pour le second on a 6 choix puisque $\{0\ ;1\}$ est déjà choisi
Si l'un des nombres choisi est 2, pour le second on a 5 choix puisque $\{0;\ 2\}$ et $\{1;\ 2\}$sont déjà choisis
Si l'un des nombres choisi est 3, pour le second on a 4 choix : $\{3;\ 3\}\{3;\ 4\}$, $\{3;\ 5\}$,$\{3;\ 6\}$
Si l'un des nombres choisi est 4, pour le second on a 3 choix : $\{4;\ 4\}$, $\{4;\ 5\}$, $\{4;\ 6\}$
Si l'un des nombres est 5, pour le second il reste 2 choix : $\{5;\ 5\}$, $\{5;\ 6\}$
Si l'un des nombres est 6 il ne reste plus qu'un choix 6 pour le second.
Au total il y a donc 7+6+5+4+3+2+1 =28 dominos distincts.

On peut aussi raisonner en considérant d'abord le nombre de dominos où les nombres inscrits sont distincts, il y en a $\binom{7}{2}$ puis le nombre de dominos où le nombre est répété, il y en a $\binom{7}{1}$.
Au total il y a $\binom{7}{2}$+$\binom{7}{1}$= $\binom{8}{2}$= $\frac{8!}{2!6!}$=28 dominos.

Exemple 3 : Un sac contient cinq lettres différentes, A, B, C, D, E. On tire successivement avec remise trois lettres du sac (on remet dans le sac la lettre tirée avant le tirage suivant).
Combien peut-on ainsi former de groupes de trois lettres (on qualifiera de « mot » un groupe de trois lettres mais ici l'ordre des lettres n'intervient pas) .

On peut noter $E=\{A\ ;B\ ;C\ ;D\ ;E\}$. Comment établir la liste des mots possibles ? Il faut travailler avec méthode afin de ne pas oublier de cas et ne pas en compter certains plus d'une fois.
Par exemple, on peut commencer à lister les cas où on a trois lettres différentes, comme A B C ou B A E etc. On sait qu'il y a $\binom{5}{3}$ cas possibles.
Puis on peut chercher comment constituer des mots avec deux lettres identiques exactement et une autre lettre, comme A A B ou B B A ou C C D ou A E E etc. Il s'agit donc de choisir deux lettres parmi les cinq lettres, puis, pour former un mot de trois lettres comptant deux fois l'une des lettres retenues, de compléter avec l'autre : , par exemple avec A et B on peut former A A B et B B A. Il y a donc 2×$\binom{5}{2}$ possibilités.

On peut encore former des mots de trois lettres identiques, comme par exemple C CC ou E EE.
On choisit donc simplement une lettre parmi les cinq lettres du mot . Il y a$\binom{5}{1}$ possibilités.
Le nombre total de mots est donc $N = \binom{5}{3} + 2 \times \binom{5}{2} + \binom{5}{1} = 10 + 2 \times 10 + 5 = 35$
Or, une remarque astucieuse (que l'on ne « voit » que parce que d'autres ont établi la formule générale), conduit à écrire cette somme sous la forme$\binom{5}{3} + \binom{5}{2} + \binom{5}{2} + \binom{5}{1}$.
En utilisant la relation $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}$ on obtient$\binom{5}{3} + \binom{5}{2} = \binom{6}{3}$ et $\binom{5}{2} + \binom{5}{1} = \binom{6}{2}$
D'où $N = \binom{6}{3} + \binom{6}{2} = \binom{7}{3} = \frac{7\times6\times5}{3\times2} = 35$

Exemple 4 : Combinaisons avec répétitions de 6 éléments pris parmi les 4 de l'ensemble
E = {A ; B ; C ; D}

* Tous les 6 éléments tirés successivement avec remise identiques, comme AAAAAA. Il y a 4 possibilités (4 lettres possibles) ;

* 5 identiques : type AAAAA complétés par B ou C ou D : il y a 4 choix pour la lettre répétée et 3 pour la lettre différente qui complète la combinaison donc au total 12 combinaisons ;

* 4 identiques : type AAAA complétés par BB, BC ,CC, BD, DD, CD soit 6 choix possibles donc au total 6x4 = 24 combinaisons ;

* 3 identiques seulement type AAA complétés par B , C et D : au total 4
2 fois 3 identiques type AAA BBB : au total 6 ;
Attention : il y en a un autre type qui est pris en compte plus loin (AAABBC, qui apparait comme BB AAA C).
* 2 identiques : il y en a de plusieurs types :

- premier type : AA BB C, D ; AA CC B, D ; AA DD B, C ; BB CC D, A ; BB DD C, A ; CC DD A, B ;

Attention à ne pas prendre deux fois le même : il y en a 6 ;

- Deuxième type : AA BBB C ou D ; AA CCC B ou D ; AA DDD B ou C : donc 6 pour AA et au total il y a 6X4 = 24.
- Troisième type : AABBCC ; AABBDD ; AACCDD ; BBCCDD donc 4 combinaisons

Ce qui fait un total de 84, ou bien $\binom{9}{6}$ ou encore $\binom{9}{3}$

II – Cas général

Définition : n et k sont des entiers naturels (n > 0)

Une combinaison avec répétitions de "k" objets pris parmi "n" objets distincts d'un ensemble E est une manière de sélectionner "k" objets parmi les "n" objets, sans tenir compte de l'ordre des "k" objets et avec des répétitions, c'est-à-dire que le même objet peut être sélectionné plusieurs fois.

Remarques : 1) Une combinaison avec répétition de "k" objets choisis parmi "n" objets peut être représentée comme le résultat du tirage avec remise de k éléments de E, sans tenir compte de l'ordre des éléments tirés(k peut évidemment être supérieur ou égal à n).

2) Une définition plus formelle ferait intervenir la notion d'application entre deux ensembles.

Notation et propriété : Le nombre de combinaisons avec répétition de k éléments d'un ensemble à n éléments est noté K_n^k. Il est égal à $\binom{n+k-1}{k}$.
Remarque : on dit aussi parfois : une k-combinaison.

Démonstration

Pour comprendre cette formule, il faut voir les choses un peu autrement. Choisir k objets parmi n, avec répétitions possibles, revient à décider combien d'objets du premier type nous allons prendre (appelons x_1 ce nombre), combien du deuxième type (disons x_2), ... et combien du nième type (disons x_n). Ces nombres doivent évidemment vérifier $x_1+\ldots+x_n=k$
A un tel choix de x1, …, x_n, on peut associer une suite de symboles "o" et "|" .
On écrit x_1 symboles "o", puis une barre de séparation "|", puis x_2 symboles "o", une barre de séparation, et ainsi de suite jusque x_n symboles "o".
Par exemple, pour n=4 et k=7, on peut écrire
oo|o|ooo|o pour $(x_1, x_2, x_3, x_4)=(2, 1, 3, 1)$,
|ooooo||oo pour $(x_1, x_2, x_3, x_4)=(0, 5, 0, 2)$.

Dans une telle suite, il y aura toujours $x_1+\ldots+x_n=k$ symboles "o" et n−1 symboles de séparation "|".
A partir d'une suite de symboles vérifiant ces conditions, on peut aisément retrouver les valeurs de $x_1, \ldots, x_n$. Cela signifie qu'il y a autant de combinaisons avec répétitions que de telles suites de symboles.
Le nombre de combinaisons revient donc à compter le nombre de suites de n+k−1 symboles : k symboles "o" et n−1 symboles "|". Or cela revient simplement à choisir à quels endroits on place les k symboles "o", et il y a $\binom{n+k-1}{k}$ tels choix possibles (en utilisant la formule pour les combinaisons sans répétitions).
On remarque que $\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$

Exemple

Trois personnes choisissent, pour le petit déjeuner, une viennoiserie parmi croissant (C) ou brioche (B). On place les viennoiseries dans un même sachet. Déterminer le nombre de sachets possibles.
n=2 et k=3.

Si on reprend les symboles o et I on a alors comme suites possibles ooo ; ooIo ; oIoo ; Iooo
Il s'agit de placer un élément I parmi 4 places possibles donc on a 4 choix.
On vérifie que $K_2^3 = \binom{4}{3} = 4$

III – Propriété

Quels que soient les entiers naturels n et k (n>0) on a : $K_n^k = K_{n-1}^k + K_n^{k-1}$

<u>Exemple pour comprendre</u>

Trois amis veulent consommer une boisson choisie parmi cinq boissons : du thé (T), du café (C), du soda (S), du jus de fruit (J), de l'eau (E).On veut déterminer le nombre de plateaux possibles que le serveur devra préparer.
Les plateaux peuvent contenir du thé au moins une fois ou pas de thé.
Il s'agit donc de choisir deux autres boissons parmi les cinq puisqu'il peut y avoir encore du thé (K_5^2 *choix possibles*) ou de choisir 3 boissons parmi les 4 qui ne sont pas du thé (K_4^3 *choix possibles*).
On a vu (exercice 3 que) $K_5^3=35$
K_5^2 est égal à la somme des choix de deux boissons identiques parmi les 5 proposées et de deux différentes soit $5+\binom{5}{2}=15$
K_4^3 est égal à la somme des choix de trois boissons identiques parmi les 4 proposées (4 choix), de deux boissons identiques parmi quatre ($4\times\binom{3}{2}$)et de trois boissons différentes$\binom{4}{3}$.
$K_4^3=4+12+4=20$
On vérifie ainsi que $K_5^3= K_5^2 + K_4^3$.

<u>**Démonstration**</u>

K_n^k est le nombre de combinaisons avec répétition de k éléments d'un ensemble E à n éléments (n>0). On veut démontrer que $K_n^k = K_{n-1}^k + K_n^{k-1}$.
Soit x_1 un élément de E. Les combinaisons contiennent x_1 une fois au moins ou ne le contiennent pas. Celles qui ne le contiennent pas sont au nombre de K_{n-1}^k et celles qui le contiennent au moins une fois sont au nombre de K_n^{k-1} car il faut choisir outre 1 fois x_1 les autres k-1 éléments parmi n puisque x_1 peut être à nouveau choisi.
Par ailleurs, $K_n^1=n$ donc $K_{n-1}^1 = n-1$ et $K_n^0=1$.
Ce qui permet de calculer les K_n^k de proche en proche.

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

TERMINALE

Concentration, loi des grands nombres

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev, Inégalité de concentration

Loi des grands nombres

(15 pages)

Le document peut être téléchargé ici :

http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/B101/Concentration-Loi_GN.docx

http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/B101/Concentration-Loi_GN.pdf

Préalable

Ce document comporte trois grandes parties

Dans la première partie on expose, à grands traits, des différences de conception entre le programme de probabilités de la classe de Terminale générale de 2020, en enseignement de spécialité, et celui des années précédant cette même rentrée, en soulignant certaines difficultés probables pour les élèves. Les deux premiers grands paragraphes du programme - Succession d'épreuves indépendantes, schéma de Bernoulli et Sommes de variables aléatoires - ne sont pas détaillés dans ce document. Le premier, parce qu'il n'est pas réellement nouveau ; il était auparavant étudié en classe de première, mais il est maintenant complété notamment par le retour de la combinatoire développée dans un autre le document. Le second parce qu'il ne pose pas, à notre sens, de réelle difficulté.

Nous avons choisi de centrer ce document sur la partie « Concentration, loi des grands nombres » où l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev réapparait après avoir disparu des programmes depuis de nombreuses années et où l'inégalité de concentration permet de démontrer la loi des grands nombres. C'est l'objet de la troisième partie de ce document.

Dans la deuxième partie, on propose deux séries d'exercices. Dans la première série, « Mobiliser », au début les exercices permettent de revenir sur l'utilisation du symbole Σ de sommation, les autres proposent ensuite des situations où intervient la loi binomiale.
Les exercices de la série « Découvrir » mettent en jeu des manipulations d'inégalités du genre $P(|X-\mu|>\sigma)$ qui interviendront dans la troisième partie.

Table des matières

Partie A - Quelques réflexions sur le programme de probabilités 1

Partie B – Exercices Mobiliser 3

Exercices Découvrir 5

Partie C – Concentration, loi des grands nombres 8

I – Inégalité de Bienaymé-Tchebychev 9

II - Inégalité de concentration 11

III – Loi des grands nombres et applications 12

Partie A : Réflexions sur la partie Probabilités du programme de Spécialité Mathématiques de Terminale

La lecture du programme de la spécialité de terminale applicable à la rentrée 2020 confirme un changement de point de vue pour l'enseignement des probabilités au lycée d'enseignement général.

(Bulletin Officiel Spécial n°8 du 25 juillet 2019)

Les grands paragraphes du programme de probabilités :

- Succession d'épreuves indépendantes, schéma de Bernoulli
- Sommes de variables aléatoires
- Concentration, loi des grands nombres

Concernant les contenus, par rapport au programme précédent c'est un tout autre point de vue qui est adopté : les lois continues (exponentielle et normale), le théorème de Moivre Laplace, les notions d'intervalles de fluctuation asymptotique et de confiance disparaissent du programme alors que sont introduites :

- La notion de somme de variables aléatoires
- La linéarité de l'espérance
- L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev et la loi des grands nombres.

On peut remarquer, que, si la notion d'intervalle de fluctuation disparait du programme, des recherches de seuils sont encore demandées. Par exemple, la détermination du plus petit entier *k* tel que $P(X > k) \ \leq 0{,}01$ (ou ε) où X suit une loi binomiale donnée est citée comme exemple d'algorithme, ce qui revient à déterminer un intervalle de fluctuation unilatéral. Dans le précédent programme on peut souligner qu'il s'agissait d'appliquer une formule.

Le parti-pris pour la terminale semble être celui d'une présentation beaucoup plus formelle que ce qui était jusqu'alors en usage au lycée. Quelques exemples pour illustrer cette impression :

- La loi binomiale passe de la classe de 1ère à celle de terminale, mais son introduction s'appuie sur la notion de somme de variables aléatoires indépendantes et ses propriétés.

Pour le schéma de Bernoulli l'univers est formalisé par $\{0,1\}^n$ (ou $\{a, b\}^n$)

Une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètres n et p est décrite comme une somme de variables de Bernoulli : $X \ = \sum_{i=1}^{n} X_i$ où les X_i sont des variables de Bernoulli indépendantes.

Le retour de la combinatoire permet d'exprimer la loi binomiale $B(n, p)$ en explicitant la formule et l'origine des coefficients binomiaux.

- La démonstration de la linéarité de l'espérance nécessite de formaliser les variables aléatoires comme des fonctions sur l'univers et d'utiliser l'expression de l'espérance comme moyenne pondérée sur l'ensemble des issues.
Il faut donc faire appel à une autre écriture de l'espérance que celle vue jusqu'à maintenant au lycée : $E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)p(\{\omega\})$et, par conséquent, à expliciter.

La linéarité de l'espérance, les propriétés de la variance pour une somme de variables aléatoires indépendantes étant établies, on en déduit l'espérance mathématique et la variance de la loi binomiale telle qu'introduite ici.

- Un échantillon de taille *n* d'une loi de probabilité est défini comme une liste (X_1, X_2,…X_n) de *n* variables X_i indépendantes suivant une même loi.

- La démonstration de l'inégalité Bienaymé-Tchebychev (enseignée encore dans les années 80 en terminale C), quelle qu'elle soit, peut tenir en quelques lignes mais elle suppose une grande aisance avec le formalisme précédent et la manipulation du symbole ∑ ainsi que celle des inégalités. Déduite de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, la démonstration de la loi faible des grands nombres, plus simplement appelée dans le programme « loi des grands nombres », nécessite le recours aux propriétés formelles de l'espérance mathématique (linéarité) et de la variance. Par ailleurs, la loi des grands nombres permet de faire un lien avec les observations faites en classe de seconde dans la partie « échantillonnage » du programme.

On peut remarquer que l'introduction de la notion de somme de variables aléatoires et de la linéarité de l'espérance mathématique permet de démontrer plusieurs propriétés (dans la partie loi binomiale par exemple), ce qui n'était pas le cas dans les programmes de 2012.

On pourrait regretter l'abandon des lois de probabilités continues, dont une partie est cependant au programme de l'option Mathématiques complémentaires. Il faut bien admettre que, si l'étude de la loi exponentielle s'appuyait sur des notions d'intégration accessibles aux élèves, l'introduction de la loi normale à partir de simulations de la loi binomiale a donné lieu à des exercices où, une fois la situation mathématisée, la calculatrice était utilisée comme une boite noire.

C'est la partie « Concentration, loi des grands nombres », qui revient dans le programme, que nous présentons ci-après, avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Nous supposons dans ce qui suit que les notions des deux paragraphes du programme « Succession d'épreuves indépendantes, schéma de Bernoulli » et « Sommes de variables aléatoires » ont été travaillées avec les élèves.

Partie B : Mobiliser et découvrir

I - Mobiliser

Mobiliser 1 : Comprendre et utiliser la notation Σ

1) On note S_n la somme des n premiers nombres entiers non nuls. Ecrire cette somme en utilisant la notation ∑
Que vaut cette somme (en fonction de n) ?

2) I_n est l'ensemble des nombres entiers naturels de n à 2n.

Expliciter (donner tous les éléments) de I_4.

Mobiliser 2 : On note I_n l'ensemble des nombres entiers naturels non nuls de n à 2n.

Soit $S_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots . + \frac{1}{2n}$.

a) Exprimer S_n en utilisant le symbole Σ (on ne demande pas de calculer cette somme).

b) Simplifier $S_{n+1} - S_n$. En déduire le sens de variation de la suite (S_n) où $n \epsilon N^*$ (N^* est l'ensemble des entiers naturels non nuls)

Mobiliser 3 : Soit $T = \sum_{k=1}^{k=5} 2^k + \sum_{k=10}^{k=15} 2^k$

Expliciter *T* et donner sa valeur

Mobiliser 4 : Linéarité de la somme

Soit (a_n) et (b_n) deux suites de nombres réels.
Pour n entier naturel fixé, démontrer que, pour tous nombres α et β réels,

$$\sum_{k=1}^{k=n} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{k=n} a_k + \beta \sum_{k=1}^{k=n} b_k$$

Mobiliser 5 :

1) Résoudre dans R les inéquations suivantes :
a) $|x-5| \leq 3$ b) $|x-5| > 3$
2) Résoudre dans l'intervalle [0 ;10] les inéquations suivantes :
a) $|x+2| \leq 5$ b) $|x+2| > 5$

Mobiliser 6 :
Soit n un entier naturel strictement supérieur à 1. On considère $(x_k)_{1 \leq k \leq n}$ une suite de nombres réels.
1) Soit l'ensemble $E = \{x_k / |x_k - 5| \leq 3\}$.

Vrai/Faux
E est l'ensemble des termes de la suite appartenant à l'intervalle $[2; 8]$

2) Soit l'ensemble $E = \{x_k / |x_k - 5| > 3\}$
Vrai/Faux
E est l'ensemble des termes de la suite appartenant à $]-\infty\,; 2] \cup [8\,;\ +\infty[$

Mobiliser 7 : Pour tout entier $k \epsilon [0; 10]$ donner la valeur de $\binom{10}{k}$. Préciser la méthode utilisée (calcul direct, utilisation de la calculatrice, script Python)

Mobiliser 8 : *Bac 2019 Polynésie*

Lors d'une communication électronique, tout échange d'information se fait par l'envoi d'une suite de 0 ou de 1, appelés bits, et cela par le biais d'un canal qui est généralement un câble électrique, des ondes radio, ... Une suite de 8 bits est appelé un octet. Par exemple, 10010110 est un octet.

On se place dans le cas où l'on envoie, sur le canal, successivement 8 bits qui forment un octet. On envoie un octet au hasard. On suppose la transmission de chaque bit indépendante de la transmission des bits précédents. On admet que la probabilité qu'un bit soit mal transmis est égale à 0,01. On note X la variable aléatoire égale au nombre de bits mal transmis dans l'octet lors de cette communication.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Justifier.

2. Déterminer la probabilité qu'exactement deux bits de l'octet soient mal transmis.

3. Que peut-on penser de l'affirmation suivante : « La probabilité que le nombre de bits mal transmis de l'octet soit au moins égal à trois est négligeable » ? Argumenter.

Mobiliser 9 : *D'après Métropole 2018*

Un laboratoire pharmaceutique mène une étude sur la vaccination contre la grippe dans cette ville. Après la période hivernale, on interroge au hasard n habitants de la ville, en admettant que ce choix se ramène à n tirages successifs indépendants et avec remise. On suppose que la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la ville soit vaccinée contre la grippe est égale à 0,4.

On note $X_n$la variable aléatoire égale au nombre de personnes vaccinées parmi les n interrogées.
1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X_n ?
2. Dans cette question, on suppose que n = 40.
a. Déterminer la probabilité qu'exactement 15 des 40 personnes interrogées soient vaccinées.
b. Calculer l'espérance mathématique de X_n.
3. Soit F_n la variable aléatoire égale à la proportion de personnes vaccinées dans des échantillons de n personnes. Quelle est en moyenne la proportion de personnes vaccinées ?

Mobiliser 10 : Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes.
On sait que :
$E(X) = 3{,}5$ et $E(Y) = 4$, que l'écart-type $\sigma(X)$ de X est égal à 1 et $\sigma(Y)$, celui de Y, est égal à 2,5
Calculer $E(X + Y)$ et $\sigma(X + Y)$ (justifier)

II - Découvrir

Découvrir 1 :

On considère la variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres n=16 et p=0,4.
On note $X = B(16\,;0{,}4)$
a) Calculer l'espérance μ et l'écart-type σ de la variable aléatoire X
b) Soit A l'événement $|X - \mu| \leq 2\sigma$. Déterminer A en extension (donner toutes les valeurs de A)
c) Déterminer $P(A)$

Découvrir 2 :

On considère la variable aléatoire X binomiale de paramètres n=10 et p=0,4.
Déterminer $P(|X - \mu| > \sigma)$ où μ et σ sont respectivement l'espérance et l'écart-type de X

Découvrir 3 : Une urne contient des boules bleues et des boules rouges. Il y a 25% de boules bleues. On tire successivement n boules, avec remise, de l'urne. Soit $X_n$la variable aléatoire égale au nombre de boules bleues obtenues à l'issue des n tirages.
Déterminer le nombre minimum de tirages pour que l'on ait : $P(X_n \leq 1) < 0{,}0001$ (on ne cherchera pas à résoudre l'inégalité algébriquement).

Corrigés des exercices

Mobiliser 1 Corrigé

1) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
2) $I_4 = \{4\,;\ 5\,;\ 6\,;\ 7\,;\ 8\}$

Mobiliser 2 Corrigé

1) $S_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots . + \frac{1}{2n} = \sum_{i=n}^{i=2n} \frac{1}{i}$

2) S_{n+1} - S_n = $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots . + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - (\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots . + \frac{1}{2n})$

$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n}$

Mobiliser 3 Corrigé

$T = \sum_{k=1}^{k=5} 2^k + \sum_{k=10}^{k=15} 2^k$

T= $(2+2^2+2^3+2^4+2^5)+(2^{10}+2^{11}+2^{12}+2^{13}+2^{14}+2^{15})$

T= 64574

Mobiliser 4 Corrigé

$$\sum_{k=1}^{k=n} (\alpha a_k + \beta b_k) = \sum_{k=1}^{k=n} \alpha a_k + \sum_{k=1}^{k=n} \beta b_k = \alpha \sum_{k=1}^{k=n} a_k + \beta \sum_{k=1}^{k=n} b_k$$

Mobiliser 5 Corrigé

1)

a) $|x-5| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x-5 \leq 3 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 8$. L'ensemble des solutions est [2 ; 8]

b) $|x-5| > 3 \Leftrightarrow x-5 > 3 \text{ } ou \text{ } x-5 < -3 \Leftrightarrow x > 8 \text{ } ou \text{ } x < 2$.

L'ensemble des solutions est]-∞ ; 2[∪]8 ; +∞[

2) Résoudre dans l'intervalle [0 ; 10] les inéquations suivantes :

a) Dans R, $|x+2| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq x+2 \leq 5 \Leftrightarrow -7 \leq x \leq 3$

L'ensemble des solutions dans l'intervalle [0 ;10] est [0 ; 3]

b) $|x+2| > 5 \Leftrightarrow x > 3 \text{ } ou \text{ } x < -7$

L'ensemble des solutions dans l'intervalle [0 ; 10] est]3 ; 10]

Mobiliser 6 Corrigé

1) Soit l'ensemble $E = \{x_k / |x_k - 5| \leq 3\}$.

E est l'ensemble des termes de la suite appartenant à l'intervalle $[2; 8]$

Vrai d'après mobiliser 5

2) Soit l'ensemble $E = \{x_k / |x_k - 5| > 3\}$

E est l'ensemble des termes de la suite appartenant à $]-\infty$; 2] ∪ [8 ; +∞[

Faux d'après mobiliser 5

Mobiliser 7 Corrigé

Avec un calcul direct

$\binom{10}{k} = \frac{10!}{k!\,(10-k)!}$.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\binom{10}{k}$	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Mobiliser 8 Corrigé

1) X suit une loi binomiale de paramètres n=8 ; p= 0,01 : répétition de manière indépendante d'une même épreuve (8 fois) à deux issues possibles (bonne ou mauvaise transmission).

2) Si deux bits sont mal transmis alors 6 ont été bien transmis. Il faut donc choisir 2 bits parmi 8 mal transmis puis les 6 restants bien transmis.
P(X=2) =$\binom{8}{2}0{,}01^2\times0{,}99^6\approx0{,}00263$

3) P(X$\geq$ 3) =1-(P(X=0)+P(X=1)+P(X=2) = 1- $(0{,}99^8+8\times0{,}01\times0{,}99^7+\binom{8}{2}0{,}01^2\times0{,}99^6)$
P(X$\geq$ 3) $\approx$1- 0,9999461 ; soit P(X $\geq$ 3) $\approx$ 0,0000539 ce qui est négligeable

Remarque : certaines calculatrices donnent directement le résultat de P(X$\geq$ 3)

Mobiliser 9 Corrigé

P=0,4

1. X_n suit une loi binomiale de paramètres n et 0,4
2. Dans cette question, on suppose que n = 40.

a. P(X_n=15)= $\binom{40}{15}0{,}4^{15}\times0{,}6^{25}\approx 0{,}1228$

b. E($X_{n)}$=$n\times p=$ 40×0,4 = 16

3. Soit F_n la variable aléatoire égale à la proportion de personnes vaccinées dans des échantillons de n personnes. $F_n=\frac{X_n}{n}$

En moyenne, la proportion de personnes vaccinées est égale à $E(F_n)=E\left(\frac{X_n}{n}\right)=0{,}4.$

Mobiliser 10 Corrigé

X et *Y* étant deux variables aléatoires, d'après la propriété de linéarité de l'espérance mathématique $E(X+Y)=E(X)+E(Y)=3{,}5+4=7{,}5,$

Comme, de plus, X et Y sont des variables indépendantes, $V(X+Y)=V(X)+V(Y)$

Or $V(X)=\sigma(X)^2=1$ et $V(Y)=\sigma(Y)^2=6{,}25$. D'où $V(X+Y)=7{,}25$

On a donc $\sigma(X+Y)=\sqrt{7{,}25}\approx 2{,}69$

Découvrir 1

On considère la variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres n=16 et p=0,4.

On note $X=B(16\,;0{,}4)$

a) µ = n×p =16× $0{,}4=6{,}4$; σ = $\sqrt{np(1-p)}$= $\sqrt{6{,}4\times0{,}6}$ =$\sqrt{3{,}84}\approx1{,}96$

b) A est l'événement $|X-6{,}4|\leq3{,}92$ qui équivaut à $2{,}48\leq X\leq10{,}32$ d'où

A =$\{3\,;4\,;5\,;6\,;7\,;8\,;9\,;10\}$

c) $P(A)$= $\sum_{i=3}^{i=10}P(\mathrm{X}=\mathrm{i})\approx0{,}96$

Découvrir 2

On considère la variable aléatoire X binomiale de paramètres n=10 et p=0,4.

μ=4 et σ=$\sqrt{10\times0{,}4\times0{,}6}$ ≈1,55

$|X-4|>1{,}55$ équivaut à X > 5,55 ou X <1,45 d'où X peut être égal à 0, 1, 6, 7, 8, 9 ou 10.

$P(|X-4|>1{,}55)$= P(X=0)+ P(X=1)+ P(X=6)+ P(X=7)+ P(X=8)+P(X=9)+ P(X=10) =1- 0,79= 0,21

Découvrir 3.
X_n suit une loi binomiale de paramètres n ; p= 0,25
$P(X_n \leq 1) < 0{,}0001$ équivaut à $P(X_n = 0) + P(X_n = 1) < 0{,}0001$
C'est-à-dire $0{,}75^n + n \times 0{,}25 \times 0{,}75^{n-1} < 0{,}0001$
En utilisant une table de valeurs on trouve n=42.

Partie C : Concentration, loi des grands nombres

Programme

Contenus

- Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Pour une variable aléatoire *X* d'espérance μ et de variance *V*, et quel que soit le réel strictement positif δ, on a $P(|X-\mu| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}$
- Inégalité de concentration. Si M_n est la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille *n* d'une variable aléatoire d'espérance μ et de variance *V*, alors pour tout $\delta > 0$, on a
$$P(|M_n-\mu| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{n\delta^2}$$
- Loi des grands nombres

Capacité attendue

- Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour définir une taille d'échantillon, en fonction de la précision et du risque choisi.

Exemples d'algorithme

Calculer la probabilité de $(|S_n - pn| > \sqrt{n})$, où S_n est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}$(n , p). Comparer avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

I - Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Remarques :
Comme cela est signalé dans le programme, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet la démonstration de la loi des grands nombres, **résultat important du point de vue des fondements théoriques** mais les majorations obtenues avec cette inégalité sont souvent sans intérêt dans la pratique.
Ainsi, pour une variable aléatoire X de moyenne μ et d'écart-type σ, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne :
Pour un écart supérieur ou égal à σ : $P(|X-\mu| \geq \sigma) \leq 1$ inégalité prévisible et qui ne donne aucune information intéressante !
Pour un écart supérieur ou égal à 2σ : $P(|X-\mu| \geq 2\sigma) \leq 0{,}25$.
Alors que si X suit, par exemple, une loi binomiale de paramètres n=100 , p=0,5 on a
$$P(|X-\mu| \geq 2\sigma) \approx 0{,}05$$
Cela peut déstabiliser les élèves (voir l'exercice d'application du cours qui permet de comparer les performances de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev et d'une loi binomiale ayant les mêmes paramètres μ et σ).

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

<u>Propriété</u> : On considère une variable aléatoire **finie** X d'espérance μ et de variance V.
Quel que soit le réel δ strictement positif : P (|X - μ |⩾ δ)⩽$\frac{V(X)}{\delta^2}$ **(1)**

<u>Démonstration 1</u> : On veut trouver un majorant de P (|X - μ |⩾ δ)

La variable aléatoire finie X prend n les valeurs, ordonnées dans le sens croissant,x_1, x_2, x_3, …,x_n avec les probabilités $p(x_1)$, $p(x_2)$, $p(x_3)$, … $p(x_n)$. On note μ son espérance mathématique et V(X) sa variance.

Rappel : $\mu = x_1p(x_1) + x_2p(x_2) + \cdots + x_{n-1}p(x_{n-1}) + x_np(x_n)$

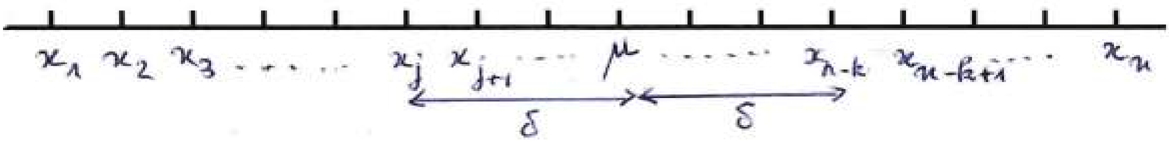
Quel que soit l'entier naturel *i* tel que $1 \leq i \leq n$, on a $|x_i - \mu| < \delta \Leftrightarrow \mu - \delta < x_i < \mu + \delta$

et $|x_i - \mu| \geq \delta \Leftrightarrow x_i \leq \mu - \delta$ou $x_i \geq \mu + \delta$

On sait que V(X)= $(x_1 - \mu)^2p(x_1)$ +$(x_2 - \mu)^2p(x_2)$ + $(x_3 - \mu)^2p(x_3)$+ … +$(x_n - \mu)^2p(x_n)$

On ne considère que les termes tels que $|x_i - \mu| \geq \delta$, par exemple, $x_1 - \mu$, $x_2 - \mu$, …,

$x_j - \mu$ et $x_{n-k} - \mu$, $x_{n-k+1} - \mu$, $x_{n-k+2} - \mu$, …, $x_n - \mu$.



On a alors :

V(X) ≥ [$(x_1 - \mu)^2p(x_1)$ +$(x_2 - \mu)^2p(x_2)$ +…+$\left(x_j - \mu\right)^2p(x_j)$] + [$(x_{n-k} - \mu)^2p(x_{n-k})$ +

$(x_{n-k+1} - \mu)^2p(x_{n-k+1})$+$(x_{n-k+2} - \mu)^2p(x_{n-k+2})$+…+$(x_n - \mu)^2p(x_n)$]

Or pour chaque terme de cette somme, $(x_i - \mu)^2 \geq \delta^2$, d'où

V(X) ≥$\delta^2[p(x_1) + p(x_2) + p(x_3) + \cdots + p\left(x_j\right) + p(x_{n-k}) + p(x_{n-k+1}) + p(x_{n-k+2}) + \cdots +$
$p(x_n)]$

On reconnait, dans la somme entre crochets, P (|X - μ |⩾ δ)

D'où : $\frac{V(X)}{\delta^2} \geq P(|X - \mu| \geq \delta)$

<u>Démonstration 2 (autre présentation) :</u>

Soit Ω l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X.

$\Omega = \{x_1; x_2; x_3; \dots; x_n\}$. On considère le sous-ensemble *E* de Ω formé de tous les éléments de Ω dont la distance à μ est supérieure ou égale à δ.

Pour tous les éléments de E on a donc $|x_i - \mu| \geq \delta$.
Pour tous les éléments du complémentaire $\bar{E}$ de E dans Ω on a $|x_j - \mu| < \delta$

E est l'ensemble des valeurs x_i de *Ω* telles que $\lvert x_i - \mu\rvert \geq \delta$	$\bar{E}$ est l'ensemble des valeurs x_j de *Ω* telles que $\lvert x_j - \mu\rvert < \delta$

V(X)= $(x_1 - \mu)^2 p(x_1)$ +$(x_2 - \mu)^2 p(x_2)$ + $(x_3 - \mu)^2 p(x_3)$ + … +$(x_n - \mu)^2 p(x_n)$.

Si, dans l'expression de V(X), on ne considère que les termes $x_i$de E, on obtient :

V(X) supérieur ou égal à la somme des $(x_i - \mu)^2 p(x_i)$ (que l'on pourrait écrire $\sum_E (x_i - \mu)^2 p(x_i)$, c'est-à-dire en effectuant la somme sur les x_i appartenant à *E*).

Or dans ce cas $(x_i - \mu)^2 \geq \delta^2$, donc V(X) ≥ $\sum_E \delta^2 p(x_i)$

Ou encore V(X) ≥ $\delta^2 \sum_E p(x_i)$, puisque δ^2 est un nombre constant.

Mais on reconnait que $\sum_E p(x_i)$ est égal à $P(|X - \mu| \geq \delta)$ et on obtient l'inégalité

$$P(|X - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}$$

Conséquence : Soit *t* un réel strictement positif, on a $P(|X - \mu| \geq t\sigma(X)) \leq \frac{1}{t^2}$
<u>Démonstration</u> : il suffit de remplacer δ par $t\sigma$ dans l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev en remarquant que $(\sigma(X))^2 = V(X)$
Sous cette forme, il apparait que, par exemple, la probabilité d'avoir un écart à μ supérieur à 2σ est inférieur ou égal à $\frac{1}{4}$.

Exercice d'application
Soit *X* une variable aléatoire binomiale de paramètres n=100 et p=0,25.
a) Déterminer son espérance mathématique μ et son écart-type σ (donner la valeur arrondie au centième de σ)
b) Traduire par des inégalités la proposition « l'écart entre *X* et μ est supérieur à 3σ ».
En déduire toutes les valeurs prises par X satisfaisant à cette proposition.
c) En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev déterminer un majorant de

$$P(|X - 25| \geq 12{,}99)$$

d) Comparer avec la valeur obtenue en appliquant la loi binomiale (on pourra utiliser la fonction d'une calculatrice ou un script Python)

Les élèves peuvent être étonnés par les résultats. Cela peut être l'occasion de souligner que l'intérêt de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est surtout théorique, comme on peut le voir un peu plus loin avec la loi des grands nombres

II - Inégalité de concentration

A partir de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev $P(|X-\mu| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}$ (1) les élèves devront déduire l'inégalité de concentration : $P(|M_n-\mu| \geq \delta) \leq \frac{V}{n\delta^2}$ (2) où M_n est la variable aléatoire « moyenne d'un échantillon de taille n d'une variable aléatoire d'espérance μ et de variance V ».
Ces inégalités pourront, par exemple, être comparées à celles obtenues pour une variable aléatoire binomiale B_n de paramètres *(n, p)* et pour la variable aléatoire $\frac{B_n}{n}$:

On a : $P(|B_n-np| \geq \sqrt{n}) \leq p(1-p)$ ou $P(|\frac{B_n}{n}-p| \geq \frac{1}{\sqrt{n}}) \leq p(1-p)$

Propriété : Soit M_n la variable aléatoire « moyenne d'un échantillon de taille n ».

On a : $P(|M_n-\mu| \geq \delta) \leq \frac{V}{n\delta^2}$ **(2) cette inégalité est appelée inégalité de concentration**

<u>Démonstration :</u>

Soit $(X_1;\ X_2;\ X_3 \ldots\ldots;\ X_n)$ une liste de n variables aléatoires **indépendantes** identiques d'une même loi de probabilité P. $(X_1;\ X_2;\ X_3 \ldots\ldots;\ X_n)$ constitue un échantillon de taille n de la loi de probabilité P.

Pour tout entier *i*, $1 \leq i \leq n$, $E(X_i)=\mu$ et $V(X_i)=V$

Soit $S_n = X_1 + X_2 + X_3 \ldots\ldots + X_n$.

D'après les propriétés de linéarité de l'espérance mathématique

$E(S_n)=n\mu$ et, puisque les variables aléatoires $X_1, X_2, X_3 \ldots\ldots, X_n$ sont indépendantes, $V(S_n)=nV$

C'est l'indépendance des variables aléatoires qui assure la propriété d'additivité de la variance de la somme.

Soit $M_n = \frac{X_1+X_2+X_3\ldots\ldots+X_n}{n}$ la variable aléatoire « moyenne de l'échantillon ».

On a $E(M_n)=\frac{n\mu}{n}=\mu$

et $V(M_n)=\frac{1}{n^2}V(S_n)=\frac{1}{n^2}nV=\frac{V}{n}$

On applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à la variable aléatoire M_n.

On obtient : $P(|M_n-\mu| \geq \delta) \leq \frac{V}{n\delta^2}$

Exercice d'application

Soit *X* une variable aléatoire d'espérance $\mu=20$ et d'écart-type σ=1,5. On note M_n la variable aléatoire égale à la moyenne d'un échantillon de taille n de la variable *X* .

En appliquant l'inégalité de concentration (2), déterminer *n* tel que $P(|M_n-\mu| < 2\sigma) > 0{,}95$

III- Loi des grands nombres et applications

1) Loi des grands nombres

a) Pourquoi introduire la variable aléatoire M_n ?

* Prenons l'exemple d'un dé tétraédrique à quatre faces numérotées de 1 à 4, supposé bien équilibré. Lancer le dé constitue une expérience aléatoire. Soit X la variable aléatoire qui prend les valeurs du point observé sur la face inférieure du dé.
Pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq 4$ on a $P(X = i) = \frac{1}{4}$ et $E(X) = \frac{1}{4}(1+2+3+4) = 2{,}5$

* On réalise un échantillon de taille 10 de la loi de probabilité de X en lançant 10 fois le dé et en notant les résultats obtenus.

Un échantillon de taille *n* d'une loi de probabilité est une liste $(X_1;\ X_2\ ; \dots ;\ X_n)$ de variables aléatoires indépendantes identiques suivant cette loi. Dans l'exemple ci-contre on note $(X_1;\ X_2\ ; \dots ;\ X_{10})$ la liste où les X_i sont égales à X.

X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	X10
2	4	4	3	3	2	1	4	1	1

On peut observer les fréquences d'apparition de chacune des éventualités dans cette liste.
On a $f(X = 1) = \frac{3}{10}$; $f(X = 2) = \frac{2}{10}$; $f(X = 3) = \frac{2}{10}$ et $f(X = 4) = \frac{3}{10}$
On a vu expérimentalement en classe de 2de que lorsque le nombre de lancers est « grand » la fréquence $f(X = 1)$, par exemple, se rapproche de la probabilité $P(X = 1) = \frac{1}{4}$.
On peut faire ce constat pour chaque $P(X = i)$ $(i \epsilon \{1; 2; 3; 4\})$

Ce résultat est justifié au paragraphe suivant.

* Dans cet exemple, *X* ne prend que quatre valeurs. Dans d'autres problématiques on ne peut plus procéder de la même manière. C'est l'objet des paragraphes suivants.

* Dans l'introduction de la loi binomiale (partie précédente du programme) on a introduit la notion de somme de variables aléatoires. Dans notre exemple, la somme $\sum_{k=1}^{k=1} X_k$ est une variable aléatoire, notéeS_{10} , qui peut prendre les valeurs entières de 10 (si à chaque lancer on obtient 1) à 40 (si à chaque lancer on obtient 4, ce qui est peu probable !)
Ci-contre on a généré 4 séries de 10 lancers du dé. On observe pour chacune de ces séries la réalisation de la variable « somme » S_{10} et de la variable « moyenne » $M_{10} = \frac{S_{10}}{10}$.

X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	X10	S10	M10
3	3	2	3	1	4	4	4	2	1	27	2,7
1	1	4	2	3	4	4	2	4	3	28	2,8
3	4	1	1	3	1	1	4	1	1	20	2
4	3	4	2	4	1	4	3	3	3	31	3,1

Au passage, on observe la fluctuation d'échantillonnage

* Si on augmente le nombre de lancers, c'est-à-dire la taille de l'échantillon, et si on a l'idée (non intuitive !) de comparer ce qu'on obtient et l'espérance $E(X) = 2{,}5$ de la variable aléatoire X, on constate un « rapprochement »… comme le montre la réalisation de simulations de lancers du dé pour n=10, 20, … 100, 200, 1000, 2000, 5000 du tableau ci-dessous.
L'idée d'introduire la variable aléatoire M_n était une bonne idée !

Et même cette idée est précisée dans la loi des grands nombres (paragraphe suivant)

F8 =ALEA.ENTRE.BORNES(1;4)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	U	AE	CW	GS	SG
1	X1	1	4	4	2	2	1	2	3	1	3	3	3	4	1	1
2	X2	3	4	1	3	2	4	3	4	4	1	1	4	3	4	4
3	X3	4	3	4	3	1	2	1	3	1	1	4	1	2	2	4
4	X4	3	2	2	1	4	2	4	2	2	1	4	4	1	1	1
5	X5	2	3	3	3	2	3	2	3	1	1	1	2	2	2	1
6	X6	3	1	2	4	4	1	1	1	4	1	4	1	3	1	3
7	X7	4	1	2	1	3	1	4	4	2	4	2	2	2	4	1
8	X8	4	2	4	3	1	3	3	2	2	2	4	4	3	2	4
9	X9	4	4	2	4	2	4	1	1	4	4	1	3	1	4	3
10	X10	3	2	3	2	3	3	1	3	4	2	1	1	4	1	1
11	N	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	200	300	1000	2000	5000
12	S	31	26	27	26	24	24	22	26	25	20	25	25	25	22	23
13			57	84	110	134	158	180	206	231	251	497	733	2478	4997	12524
14	M	3,1	2,85	2,8	2,75	2,68	2,633	2,571	2,575	2,567	2,51	2,485	2,443	2,478	2,499	2,5048

Dans la cellule F8 on voit le résultat de la simulation de la variable aléatoire. On lance une fois le dé (voir la ligne d'édition)

Ds chaque colonne, ligne 1 à 10 il y a 10 simulations de la variable aléatoire X

Ligne 11 on compte le nombre de simulations de la variable X en ajoutant des paquets de 10

Ligne 12 on fait la somme des valeurs prises par X (cela correspond à somme des Xi pour i de 1 à 10

Ligne 13, on fait la somme des valeurs prises par X pour i de 1 à N et ligne 14, on calcule la moyenne

b) Enoncé et démonstration de la loi des grands nombres

Enoncé : Avec les notations du paragraphe précédent : $\lim_{n\to\infty} P(|M_n - \mu| \geq \delta) = 0$

Démonstration : D'après l'inégalité de concentration (2) on a : $0 \leq P(|M_n - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V}{n\delta^2}$ **(3)**

Or, quel que soit δ strictement positif, $\lim_{n\to\infty} (\frac{V}{n\delta^2}) = 0$, par conséquent

$$\lim_{n\to\infty} P(|M_n - \mu| \geq \delta) = 0$$

Autrement dit, δ étant un réel positif donné, la probabilité pour que la moyenne M_ns'écarte de l'espérance μ de plus de δ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

Exprimée sous cette forme la loi est parfois appelée « loi *faible* des grands nombres ».

Ainsi, pour une longue suite d'expériences d'une variable aléatoire X d'espérance μ et de variance V la moyenne tend vers μ. Ou encore, la moyenne est une estimation de l'espérance.

Remarque 1 :

Cette loi justifie, a posteriori, la stabilisation des fréquences autour de la probabilité d'un événement.
En effet, on considère une variable aléatoire X d'espérance μ et un de ses évènements A, de probabilité p(A). On simule moultes fois (n fois) la réalisation de l'expérience aléatoire associée à cette variable, et on mesure la fréquence $f_n$de réalisation de A dans un échantillon de taille n.
On introduit la variable aléatoire intermédiaire Y qui prend la valeur 1 si A est réalisé et 0 sinon. La variable aléatoire Y suit une loi de Bernoulli de paramètre p qui est égal à P(A) et d'espérance $\mu = p$.
D'après la loi ci-dessus, lorsque le nombre n de répétitions de la même expérience aléatoire de la variable initiale X augmente, la suite des fréquences observées f_n de réalisations de l'événement A, tend vers l'espérance mathématique μ de X, cette espérance étant elle-même égale à P(A).

L'introduction de la variable Y est en quelque sorte une astuce

Remarque 2 : La loi « forte » des grands nombres fait appel à d'autres concepts mathématiques. Selon cette loi, sous certaines conditions, la probabilité pour que M_n ait une limite égale à l'espérance de X_i tend vers 1 quand n tend vers l'infini.

2) Application : loi des grands nombres de Jacques Bernoulli

Théorème de Bernoulli :
Soit X_n une variable aléatoire binomiale $B(n, p)$ de paramètres n et p.
On considère la variable aléatoire $F_n = \frac{X_n}{n}$.
Alors, quel que soit ε strictement positif, on a : $P(|F_n - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$

On peut présenter ce théorème et sa démonstration sous forme d'exercice (voir exercice 1)

Démonstration : C'est une application de l'inégalité de concentration. En effet, on sait que $E(X_n) = np$, $V(X_n) = np(1-p)$ et d'après, les propriétés de l'espérance mathématique et celle de la variance, on a $E(F_n) = p$ et $V(F_n) = \frac{p(1-p)}{n}$

Remarque : Pour tout $p \epsilon]0; 1[$ on a $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$ (on peut étudier la fonction $p \rightarrow p(1-p)$ et montrer que le maximum est obtenu pour $p = \frac{1}{2}$ et vaut $\frac{1}{4}$)
On en déduit : $P(|F_n - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$

Note (http://bibmath.net/dico/index.php?action=affiche&quoi=l/lgn.html) : C'est à Jacques Bernoulli que l'on doit le premier énoncé de la loi des grands nombres; il apparait dans son ouvrage *Ars Conjectandi* publié en 1713, huit ans après sa mort. Il avait pour cadre le jeu du pile ou face (schéma de Bernoulli). Le terme de "loi des grands nombres" est lui dû à Poisson. Ce terme juridique est à mettre en rapport avec le titre de l'ouvrage dans lequel il l'introduit, *Recherches sur les probabilités des jugements*, paru en 1837. De nombreux mathématiciens ont ensuite généralisé les énoncés de Bernoulli et Poisson, citons notamment Kolmogorov et Tchebychev.

Exercice 1
Soit X_n une variable aléatoire binomiale $B(n, p)$ de paramètres n et p.
On considère la variable aléatoire $F_n = \frac{X_n}{n}$.
1) Montrer que, quel que soit ε strictement positif, on a : $P(|F_n - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$

2) Etudier les variations de la fonction *f* définie sur $[0; 1]$ par $f(p) = p(1-p)$.
3) En déduire que l'on a $P(|F_n - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{4n^{\ 2}}$
4) On lance *n* fois une pièce de monnaie bien équilibrée.
Déterminer la plus petite valeur de *n* à partir de laquelle on est sûr que la probabilité que la fréquence d'apparition de « Pile » s'écarte de 0,5 de 0,01 est inférieure à 0,01. Autrement dit, si on note F_n la variable aléatoire égale à la fréquence d'apparition de « Pile », déterminer la plus petite valeur de *n* à partir de laquelle on est sûr que $P(|F_n - 0{,}5| \geq 0{,}01) \leq 0{,}01$

Exercice 2

On souhaite tester un dé à six faces afin de savoir s'il est truqué. On s'intéresse en particulier à l'apparition du 6. Soit p la probabilité d'obtenir 6.

Pour tester si le dé est truqué, on lance *n* fois le même dé. On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de 6 obtenus à l'issue de n lancers et F_n la fréquence d'apparition du 6.

1) Donner la loi de probabilité de X_n

2) Calculer l'espérance et la variance de F_n.

3) On suppose le dé non truqué. En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à F_n déterminer un nombre de lancers de dé permettant d'affirmer, avec un risque d'erreur inférieur à 0, 05, que la fréquence d'apparition du 6 au cours de ces lancers diffère de 1/6 d'au plus 0, 01.

Dans la 3ème question, il s'agit implicitement d'un test d'hypothèse.
Pour en savoir plus, on pourra se référer à :
http://mathsv-ressources.univ-lyon1.fr/cours/stats/chap7/c7p2/c7p2.html
Principe des tests :
Le principe des tests d'hypothèse est de poser une hypothèse de travail et de prédire les conséquences de cette hypothèse pour la population ou l'échantillon. On compare ces prédictions avec les observations et l'on conclut en acceptant ou en rejetant l'hypothèse de travail à partir de règles de décisions objectives.
Définir les hypothèses de travail, constitue un élément essentiel des tests d'hypothèses de même que vérifier les conditions d'application de ces dernières.

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

TERMINALE

Manipulation des vecteurs, des droites, des plans de l'espace

(avec quelques préalables de géométrie dans l'espace)

(23 pages)

Le document peut être téléchargé ici :

http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/B101/Vecteurs_droites_plans.docx

http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/B101/Vecteurs_droites_plans.pdf

Manipulation des vecteurs, des droites et des plans de l'espace

Rappel du programme

Cette section introduit **d'emblée le calcul vectoriel dans l'espace**, avec les notions qui l'accompagnent : translations, combinaisons linéaires de vecteurs, indépendance linéaire, directions de droites et de plans. Il s'agit de s'appuyer sur la perception de l'espace pour mettre en place une géométrie reliée au calcul vectoriel et adaptée aux besoins des autres disciplines. Les figures formées à partir des solides usuels (cube, pavé, tétraèdre) rencontrés au collège sont des supports privilégiés pour manipuler les notions vectorielles et appréhender la position relative de droites et de plans. Il est important de développer les représentations des objets géométriques, notamment à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, afin de permettre à l'élève d'exercer son regard et de développer sa vision dans l'espace.

Contenus
Vecteurs de l'espace – translations
Combinaisons linéaires de vecteurs de l'espace
Droites de l'espace. Vecteurs directeurs, vecteurs colinéaires.
Caractérisation d'une droite par un point et un vecteur directeur.
Plans de l'espace. Direction.
Caractérisation d'un plan par un point et un couple de vecteurs non colinéaires
Bases et repères de l'espace. Décomposition d'un vecteur
Capacités
Représenter des combinaisons linéaires de vecteurs donnés.
Exploiter une figure pour exprimer un vecteur comme combinaison linéaire de vecteurs
Décrire la position relative de deux droites, d'une droite et d'un plan, de deux plans.
Lire sur une figure si deux vecteurs d'un plan (trois de l'espace) forment une base.
Lire sur une figure la décomposition d'un vecteur dans une base.
Étudier géométriquement des problèmes simples de configurations (alignement, colinéarité, parallélisme, coplanarité).

Approfondissements possibles –

Barycentre d'une famille d'un système pondéré de deux, trois ou quatre points. Exemples d'utilisation des barycentres, en particulier de la propriété d'associativité, pour résoudre des problèmes de géométrie. – Fonction vectorielle de Leibniz.

Table des matières

Partie A – Introduction 2

Partie B – Exercices Mobiliser 6

Exercices Découvrir 8

Partie C – Vecteurs – Droites et plans de l'espace 10

Préalables géométriques
I - Vecteurs de l'espace
II – Opérations sur les vecteurs de l'espace
III – Droites de l'espace et vecteurs directeurs
IV – Plans et vecteurs coplanaires
V – Droites et plans : du vectoriel au géométrique
VI – Base, repère, coordonnées

Partie D – Exercices 20

Partie A – Des généralités en guise d'introduction

Pour les élèves
Les objets sur lesquels on travaille en géométrie de l'espace sont les points, les droites, les plans en géométrie non vectorielle et les vecteurs en géométrie vectorielle (associée).

On étend à l'espace les notions d'alignement, de parallélisme et de concourance puis d'orthogonalité ainsi que la notion de vecteurs. On introduit la notion de coplanarité pour qualifier des objets appartenant à un même plan. Dans ce qui suit, on commence par généraliser la notion de vecteurs, et on complète par les notions géométriques dont on a besoin dans l'espace.
Toutes les propriétés vues dans le plan restent vraies dans n'importe quel plan de l'espace. Un certain nombre de ces propriétés se généralisent même à l'espace mais il y a quelques « accidents » où l'extension ne se fait pas et qui seront signalés au fur et à mesure. Ainsi deux droites de l'espace qui n'ont aucun point commun ne sont pas « forcément » parallèles…

De plus on peut munir l'espace de repères qui permettent de remplacer un point (respectivement un vecteur) par ses trois coordonnées (au lieu de deux comme dans le plan) et de transformer certains problèmes géométriques en problèmes numériques ou algébriques. Comme dans le plan, on choisira des repères « orthonormés » dans lesquels les calculs sont simplifiés. Produit scalaire et orthogonalité se généralisent sans difficultés.

Pour les professeurs
Plusieurs questionnements se présentent lorsqu'on débute l'étude du paragraphe « Manipulation des vecteurs, des droites et des plans de l'espace » des nouveaux programmes de spécialité de Terminale qui suppriment la géométrie de l'espace non vectorielle en centrant directement les cours sur la notion de vecteurs.

*Les différences entre les programmes de 2012 et les nouveaux de 20*19 – qui, eux, démarrent d'emblée sur vecteurs de l'espace - peuvent faire penser qu'il ne s'agit pas de développer systématiquement un cours et des exercices de géométrie dans l'espace[1] avant le cours sur les vecteurs, comme auparavant, mais seulement de préciser le minimum dont on aura besoin pour développer le cours sur les vecteurs de l'espace. Pas question de viser toutes les propriétés, ni de respecter un ordre réfléchi, permettant de faire quelques démonstrations (cf. le document « quelques définitions et propriétés de base… »). Alors se posent des choix très difficiles pour l'enseignant pour le début de ce cours. En revanche, à partir du cours sur produit scalaire, on retrouve à peu près l'ancien enchainement des connaissances à présenter, à l'orthogonalité près – il y a en effet là encore un choix sur le moment de la donnée des définitions adoptées en géométrie non vectorielle, avant le cours sur produit scalaire ou au fur et à mesure.

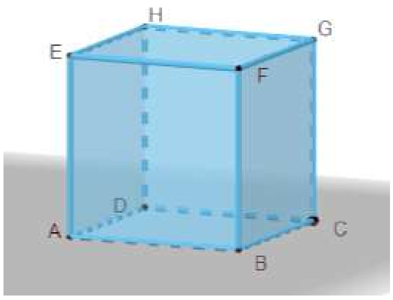
Soulignons qu'on ne peut pas définir les objets de base – notamment les plans. En revanche on peut illustrer la notion, qui ne pose pas de difficultés aux élèves, sur des figures de l'espace, et aussi lui associer une caractérisation vectorielle. Il est sans doute utile de dire aux élèves que, par exemple, le plan (ADE) est aussi le plan (EHD) ou (DAH).

[1] Souvent très difficiles pour une partie des élèves

Vu ce qu'on a dit sur les longueurs, il est aussi raisonnable de ne travailler qu'avec des repères orthonormés, dans lesquels, qui plus est, l'expression du produit scalaire est simple.

Il est néanmoins satisfaisant d'introduire les axiomes des espaces affines permettant de passer d'un vecteur $\vec{u}$ aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ qui le représentent (étant donné A et $\vec{u}$, il existe un unique point B tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et la relation de Chasles sur ces représentants). Évidemment sans signaler aux élèves que ce sont ces axiomes qui permettent le passage du vectoriel à l'affine.

Enfin, en ce qui concerne l'ordre du cours, on ne peut pas développer la géométrie vectorielle, dès lors qu'on fait travailler sur des représentants de vecteurs, sans disposer de propriétés géométriques élémentaires de l'espace, qui n'ont pas été établies hors contexte des solides de l'espace, et encore pas toutes.



Par exemple, dans le cube « usuel », est-ce qu'on va dire – comment et à quel moment du cours - que les droites (AC) et (EG) sont parallèles : en faisant appel à l'intuitif, ou en faisant appel à un parallélogramme, tout aussi intuitif, à partir des côtés [AE] et [CG] ? Va-t-on en déduire que ces droites sont coplanaires ou l'admettre ?

Va-t-on dire que si d_1 est parallèle à d_2 et d_2 parallèle à d_3, alors d_1 et d_3 sont parallèles ?

Pourquoi $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont-ils pas colinéaires ? Parce que les droites (AB) et (EG), bien que sans points communs, n'ont pas même direction ?

Que veut dire pour quatre points être coplanaires ?

Il s'agit donc de décider ce qu'on choisit de présenter comme notions géométriques dans l'espace – définitions et propriétés (admises) - pour travailler sur les vecteurs de l'espace. Que garder et quel ordre adopter, sachant qu'il n'y a pas eu de géométrie dans l'espace depuis le cycle 4 du collège[2] ? Doit-on introduire les notions au fur et à mesure des « besoins » ou faire un préambule regroupant l'ensemble ?

Nos choix

Le programme comporte trois chapitres : 1) Vecteurs de l'espace, droites et plans de l'espace, bases et repères ; 2) Produit scalaire et orthogonalité ; 3) Géométrie analytique dans l'espace (représentation paramétriques, équations cartésiennes, avec un travail algébrique sur les coordonnées dans un repère orthonormé).

Nous développons ici le premier chapitre (les autres chapitres nous semblent ne pas poser de problème particulier)

Premier chapitre (un préalable et 6 paragraphes)

Pour traiter de la géométrie non vectorielle dans l'espace, nous avons fait le choix de donner en préalable quatre groupes de définitions et propriétés (admises) sur les droites de l'espace, la coplanarité, les positions relatives de deux plans et d'une droite et d'un plan. Ainsi on peut s'y référer à chaque fois qu'on en a besoin – quitte à ne les introduire aux élèves dans un premier temps qu'au fur et à mesure.

---

[2] Rappelons aussi que, au collège, les élèves n'ont travaillé que sur des solides de l'espace mais le programme est assez léger : https://cache.media.eduscol.education.fr/file/programmes_2018/20/4/Cycle_4_programme_consolide_1038204.pdf

Nous avons ensuite fait le choix de présenter les vecteurs de l'espace comme extension des vecteurs du plan vus en seconde [puis en première pour le produit scalaire]. On ajoute aux opérations connues sur les vecteurs, la notion de combinaison linéaire. On donne ensuite les caractérisations vectorielles des droites et plans, en introduisant les directions des plans.

Cela amène à relier géométrie vectorielle et non vectorielle, par l'intermédiaire d'un travail sur les représentants de vecteurs, notamment attachés à des solides usuels. Cela peut permettre l'étude géométrique de problèmes simples de configuration, mettant en jeu droites et plans de l'espace.

On introduit pour finir les bases de l'espace et la décomposition des vecteurs sur une telle base.

Une remarque générale qui concernait déjà l'introduction des vecteurs dans le plan peut être faite ici. On définit ici un vecteur $\overrightarrow{AB}$ par sa direction, son sens et sa longueur ou norme (distance de A et B). Cela veut dire
1) qu'on a muni le plan ou l'espace d'une distance AB
2) qu'on définit un vecteur à partir de deux points, c'est-à-dire par un représentant du vecteur.
Or les vecteurs peuvent se définir de manière « intrinsèque » sans longueur ni points – comme éléments d'un espace vectoriel de dimension deux ou trois, muni d'une norme ou non. On peut considérer le plan ou l'espace, tels que Euclide y travaille, comme des espaces affines associés à cet espace vectoriel ; les vecteurs définis plus haut sont alors associés à un couple de points et à un vecteur de l'espace vectoriel. Si on munit ce dernier du produit scalaire usuel sur $|R^2$ ou $|R^3$ on retrouve la définition ci-dessus.
Autrement dit, on mélange une géométrie « à la Euclide », sans définition des points, droites, plans (avec des axiomes non cités aux élèves), et des éléments empruntés à la géométrie affine, introduite historiquement bien plus tard, alors que les espaces vectoriels sont bien installés (cf. Peano). Il faut noter que, historiquement, l'utilisation des vecteurs a cependant précédé cette mise au point formalisée, en particulier chez les physiciens. Mais il n'y avait pas de définition formalisée.

Points, droites, plans : des éléments aux ensembles / des ensembles aux éléments

Quel langage utiliser ?

Langage courant	Langage et écriture ensemblistes
Un point A est sur la droite D A est un point de la droite D La droite D contient le point A	A appartient à D $A \in D$
Un point M est dans le plan P M est un point du plan P Le plan P contient le point B	M appartient à P $M \in P$
Une droite D' est dans le plan Q Le plan Q contient la droite D'	D' est incluse dans Q D'C Q

Des inclusions successives

Si le plan Q contient la droite D', le plan Q contient tous les points de la droite D' (ou appartenant à la droite D').

Points et droites (alignement)

- Deux points distincts déterminent une (seule) droite. Ou encore une droite est déterminée par deux points distincts.
- Pour des points, « être alignés » équivaut à « appartenir à une même droite »

En particulier, les trois points M, N, O sont alignés équivaut à « il existe une droite D telle que $M \in D$, $N \in D$, $O \in D$ ».

Points, droites et plans (coplanarité)

Trois points non alignés déterminent un (seul) plan. Ou encore un plan est déterminé par trois points non alignés. Un plan est aussi déterminé par deux droites sécantes ou deux droites parallèles et distinctes.

- Pour des points ou des droites : « être coplanaires » équivaut à « appartenir à un même plan »

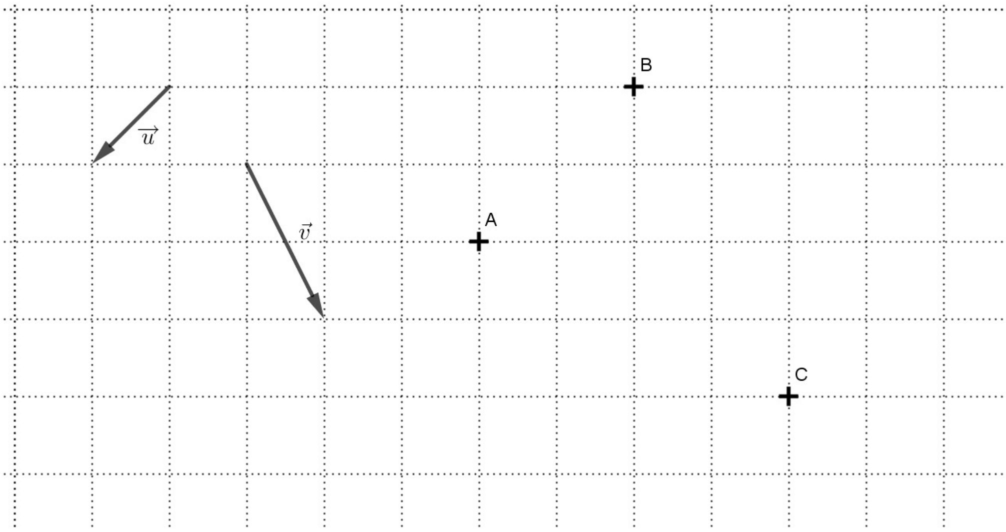
En particulier, les quatre points M, N, O, R sont coplanaires équivaut à « il existe un plan P telle que $M \in P$, $N \in P$, $O \in P$, $R \in P$ ».

- Deux droites distinctes sont coplanaires ou non – si elles sont coplanaires elles sont parallèles ou sécantes ; si elles ne sont pas coplanaires elles n'ont pas de point commun.

Partie B - Mobiliser et Découvrir

Mobiliser 1 : Des vecteurs sans repère

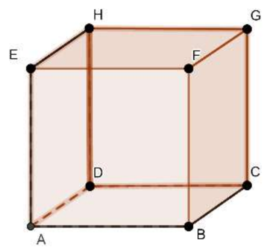
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan sont donnés par la figure ci-dessous :



1) En utilisant le quadrillage, écrire les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{BC}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
En déduire l'expression de $\overrightarrow{AC}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Vérifier sur le quadrillage.
2) Reproduire la figure et placer les points D et E définis par $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AE} = -\frac{3}{2}\,\vec{u} + 2\vec{v}$.
Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? Les points C, D et E sont-ils alignés ? Justifier.

Mobiliser 2 : Cube et vecteurs

ABCD est un cube, c'est-à-dire un solide à six faces carrées isométriques.



1. Montrer que $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}$
2. Montrer que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CG}$
3. Les points A, C, G, E sont-ils coplanaires.
4. Les plans (ABD) et (EFH) sont-ils parallèles

Mobiliser 3 : Droites et vecteurs directeurs

Dans le plan, une droite (d) a pour vecteur directeur $\vec{u}$ et une droite (d') a pour vecteur directeur $\vec{u}'$.
On donne cinq propositions :

(P1) (d) et (d') sont parallèles
(P2) $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont égaux
(P3) (d) et (d') ont la même direction
(P4) (d) et (d') n'ont aucun point commun
(P5) $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires

1) Compléter, sans justifier, les cases vides du tableau avec vrai ou faux (en lisant de la première colonne à la première ligne). Par exemple, si d et d’ n’ont aucun point commun (P4), alors d et d’ sont parallèles (P1) : on a indiqué «vrai » dans la case concernée (les cases de la diagonale ne sont concernées)

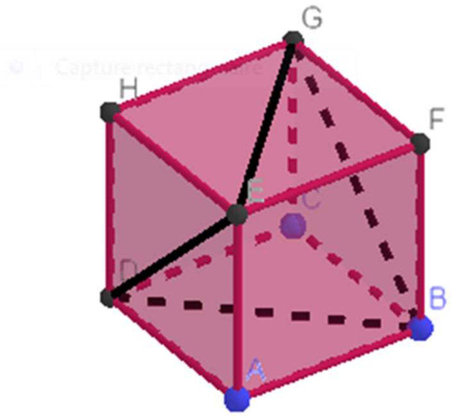
Implique	P1	P2	P3	P4	P5
P1					
P2					
P3					
P4	vrai				
P5					

2) Indiquer les propositions qui sont équivalentes.

Mobiliser 4 : Solide de l’espace

ABCDEFGH est un cube de côté 1.

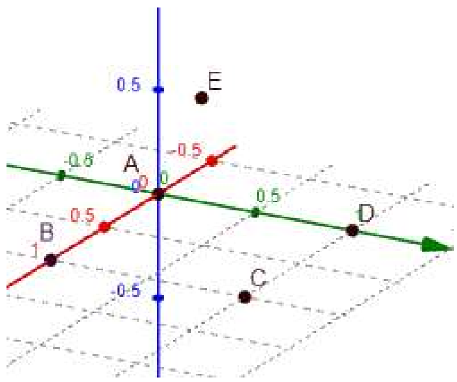
a) Comparer les longueurs DB, EG DE et GB.
b) Les points DEGB déterminent-ils un losange ? Pourquoi ?



Mobiliser 5 : Coordonnées dans l’espace

Dans un repère orthonormé de l’espace, on considère les points A(0, 0, 0), B(1, 0, 0), C(1, 1, 0), D(0, 1, 0) et E$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

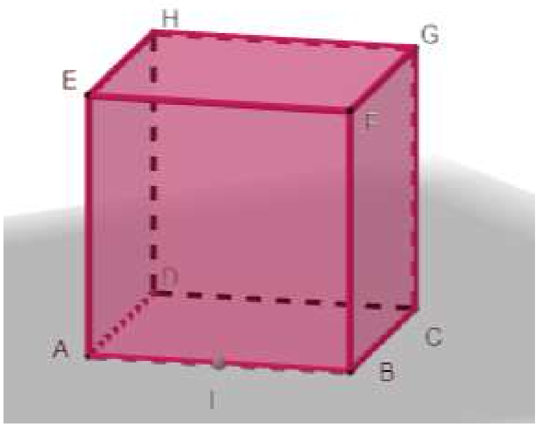
a) Démontrer que le quadrilatère ABCD est un carré
b) On a placé les points A, B, C, D, E dans le repère ci-joint.
   Calculer les longueurs BE, CE et DE.
c) Les points A, B, E et D définissent-ils un losange ? Pourquoi ?
d) Les points A, C et E définissent-ils un triangle ? Si oui, précisez sa nature.



Découvrir

On ne demande pas de justifications formalisées, on attend seulement un appui sur la figure.

Découvrir 1 : Du plan à un plan de l'espace.



On a représenté un cube ABCDEFGH ci-contre ; I est le milieu de [AB].
1) Démontrer que $\overrightarrow{IC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \vec{0}$.
Remarque : On travaille dans le plan ABCD de l'espace comme en géométrie plane.
2) Reproduire la figure.
Construire le point K tel que $\overrightarrow{\mathrm{AK}} = \overrightarrow{\mathrm{AI}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$. Démontrer que K est le milieu de [BC].

3) Vrai ou faux ? On se placera à chaque fois dans un plan bien choisi

- ☐ ACGE est un carré
- ☐ $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$
- ☐ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EG}$

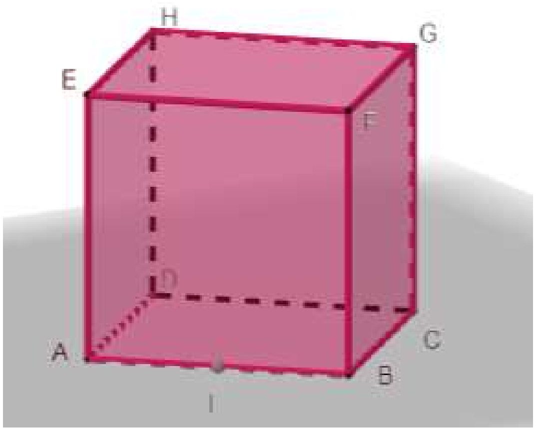
Découvrir 2 : Comment définir des droites parallèles dans l'espace ?

Dans le plan on trouve deux définitions pour des droites parallèles :

(1) Dans le plan deux droites distinctes sont parallèles si elles n'ont aucun point commun.

(2) Dans le plan deux droites distinctes sont dites parallèles si elles ont la même direction, c'est-à-dire si elles ont des vecteurs directeurs colinéaires.
Peut-on étendre ces « définitions » à la géométrie dans l'espace ?
Sinon, quelle définition adopter en géométrie dans l'espace ?
Argumenter en illustrant à l'aide de figures de l'espace.

Découvrir 3 : Comment caractériser un plan dans l'espace ?



1) On a représenté ci-contre un cube en perspective.
La face inférieure du cube est le carré ABCD.
I est le milieu de [AB].

Vrai ou faux ? Pour caractériser le plan grisé contenant cette face, il suffit de donner :

- Les 4 points A, B, C et D
- Les 3 points A, B et C
- Les 3 points A, B et I
- Les 2 points A et B
- Le point A et les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$
- Le point A et les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AI}$

- Les trois vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$
- Les trois vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$

2) Pour réaliser une photo, on peut poser l'appareil sur un tabouret à 3 pieds ou sur un tabouret à 4 pieds. Lequel vaut-il mieux choisir si on veut être sûr que l'appareil ne bougera pas ? Expliquer.

Partie C – Vecteurs de l’espace

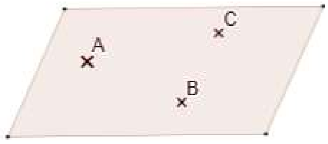
Terminale Enseignement de Spécialité Enseignement général

Pour étendre la notion de vecteurs du plan à la notion de vecteurs de l’espace et pouvoir faire les liens qui s’imposent entre les points de vue géométrique et vectoriel, il manque aux élèves une caractérisation d’un plan dans l’espace, les définitions de droites et plans parallèles dans l’espace et l’étude des positions relatives des droites et plans.
Nous introduisons donc les préalables géométriques ci-dessous, admis, qui suffisent à développer la suite.
Il y a d’autres façons de faire.

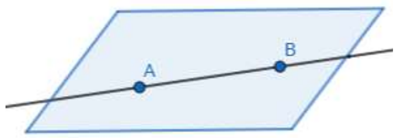
Préalables géométriques
On appelle P1, P2, P3, P4 les définitions ou les propriétés admises nécessaires pour introduire le cours sur les vecteurs de l’espace

- P1 : Deux droites **distinctes** de l’espace sont dites parallèles si elles sont dans un même plan et si, dans ce plan, elles sont parallèles. On dit aussi qu’elles ont même direction.

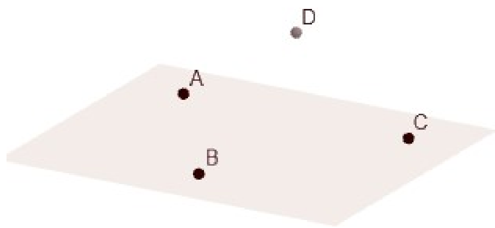
- P2 : Trois points **non alignés** appartiennent à un même plan de l’espace, c’est-à-dire qu’un plan de l’espace est défini par trois points non alignés. On note (ABC) le plan défini par les points A, B, C non alignés.



  Si deux points A et B sont dans un plan P, tous les points de la droite (AB) sont dans le plan P. La droite (AB) est incluse dans P.

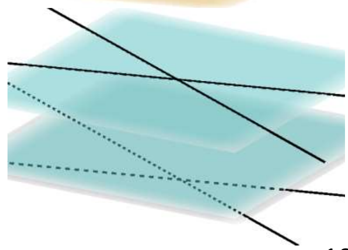


  Des points ou des droites qui sont dans un même plan sont dits **coplanaires**.
  En particulier, quatre points sont non coplanaires s’ils ne sont pas tous dans un même plan.
  Sur la figure, les points A, B, C sont coplanaires, les droites (AB), (AC) et (BC) sont coplanaires, le point D n’est pas dans le plan (ABC)



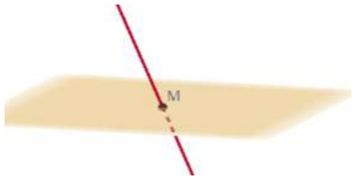
- P3 : Deux plans distincts sont dits parallèles s’ils n’ont aucun point commun.

On admet que deux plans sont parallèles si et seulement si deux droites sécantes de l’un sont respectivement parallèles à deux droites sécantes de l’autre.
Deux plans **distincts** qui ne sont pas parallèles sont dits sécants et leur intersection est une droite.



- P4 : Une droite est dite parallèle à un plan si elle n'a aucun point commun avec ce plan ou si elle est dans ce plan. On admet que si une droite est parallèle à une droite d'un plan, elle est parallèle à ce plan, et réciproquement.

- Si la droite n'est pas parallèle au plan, elle le coupe en un seul point. On dit que la droite et le plan sont sécants (en un point).

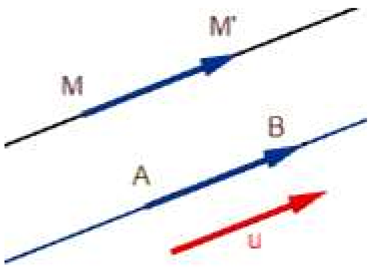


I - Vecteurs de l'espace

1) Définition

Par extension de la notion de vecteur du plan, si M et M' sont deux points de l'espace, le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour direction celle de la droite (MM'), pour sens celui de M vers M' et pour longueur (norme) MM'.

Si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MM'}$ sont tels que les droites (AB) et (MM') sont de même direction, le sens de A vers B est le même que celui de M vers M' et AB=MM', on dit que ces deux vecteurs sont deux représentants d'origines respectives A et M d'un même vecteur $\vec{u}$ et on a $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$.
La direction de $\vec{u}$ est la direction commune de (AB) et (MM'), son sens celui de $\overrightarrow{MM'}$et de $\overrightarrow{AB}$ et sa longueur (norme) est MM'=AB notée $\|\vec{u}\|$.



Remarque : Toutes les propriétés des vecteurs du plan s'appliquent dans un plan de l'espace.

Cas particulier

Si les points M et M' sont confondus, le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est appelé vecteur nul et noté $\vec{0}$. Ce vecteur n'a ni direction, ni sens et sa longueur (norme) est égale à 0.

2) Propriété admise

Etant donnés un vecteur $\vec{u}$ et un point O de l'espace, il existe un point M unique tel que $\overrightarrow{OM}=\vec{u}$.

Deux vecteurs ont toujours deux représentants coplanaires

Autrement dit : il existe un **représentant unique** d'un vecteur donné d'origine un point O donné.

Remarque

Souvent on a intérêt à travailler sur des représentants de vecteurs de même origine O. En particulier si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls et $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ leurs représentants de même origine O, **les trois points O, A, B sont coplanaires** (cf. P2). On dira aussi que les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont coplanaires.

3) Vecteurs égaux

Définition

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont égaux s'ils ont même direction, même sens, même longueur (norme).

Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ deux représentants respectifs de ces vecteurs, alors $\overrightarrow{AB}$=$\overrightarrow{CD}$ et les points A, B, C et D sont coplanaires car les droites (AB) et (DC) ont même direction donc sont coplanaires (cf. P1).

4) Vecteur et translation

Définition

Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace de représentant $\overrightarrow{MM'}$. La translation de vecteur $\vec{u}$ transforme M en M' et tout point N de l'espace en un point N' tel que $\overrightarrow{MM'}$= $\overrightarrow{NN'}$=$\vec{u}$.

5) Vecteur et parallélogramme

Pour tous points A, B, C, D de l'espace $\overrightarrow{AB}$=$\overrightarrow{CD}$ est équivalent à ABDC est un parallélogramme. En effet (AB) et (DC) ont même direction donc sont coplanaires (cf. P1) et on applique la propriété dans ce plan (cf. P5).

II - Opérations sur les vecteurs de l'espace

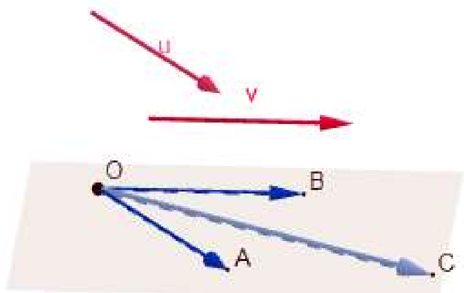
1) Somme de deux vecteurs : une extension du plan à l'espace

- Dans le plan, étant donnés deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on sait définir leur somme $\vec{u}$+ $\vec{v}$.

- Etant donnés deux vecteurs quelconques non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace on définit la somme $\vec{u} + \vec{v}$ à partir de la somme de deux représentants $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ de même origine O.

  Si les points O, A et B ne sont pas alignés, le vecteur $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ est un représentant du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ dans le plan (OAB).

  Sur la figure ci-contre, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ est un représentant d'origine O du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$



  Propriété admise

  Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace $\vec{u} + \vec{v}$=$\vec{v} + \vec{u}$

2) Relation de Chasles

Quels que soient les points A, B, C distincts de l'espace, $\overrightarrow{AB}$+$\overrightarrow{BC}$= $\overrightarrow{AC}$.

En effet, A, B, C appartiennent à un même plan (cf. P2) dans lequel on applique la relation de Chasles.

3) Règle du parallélogramme

Quels que soient les points A, B, C, D distincts tels que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}+ \overrightarrow{AC}$, le quadrilatère ABDC est un parallélogramme.

En effet on peut écrire d'après la relation de Chasles : $\overrightarrow{AC}+ \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}+ \overrightarrow{AC}$
On en déduit $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}$.
D'après I 5) A, B, C, D sont donc coplanaires et ABDC est un parallélogramme.

4) Opposé d'un vecteur

Définition et notation
On appelle **opposé** d'un vecteur $\vec{u}$ le vecteur de même direction, de sens contraire et de même norme que $\vec{u}$. On le note $-\vec{u}$.
L'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est donc le vecteur $\overrightarrow{BA}$, noté $-\overrightarrow{AB}$.

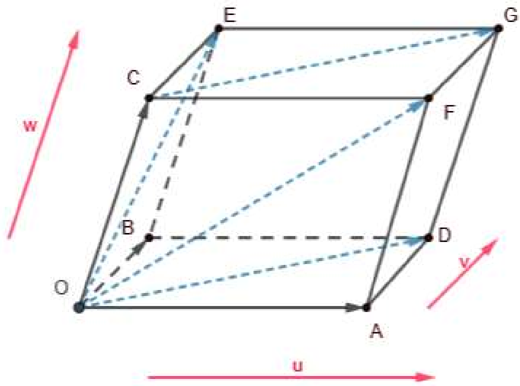
Propriétés
- Quel que soit le vecteur $\vec{u}$, $\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$
- Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on peut écrire $\vec{u} +(-\vec{v}) = \vec{u} - \vec{v}$.

5) Construction de la somme de trois vecteurs

$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont trois vecteurs distincts et O un point de l'espace. On construit les points A, B, C tels que $\overrightarrow{OA}= \vec{u}$; $\overrightarrow{OB}= \vec{v}$; $\overrightarrow{OC}= \vec{w}$. On se place dans le cas où O, A, B, C ne sont pas coplanaires.

On cherche à construire un représentant d'origine O de la somme $\vec{u}+ \vec{v}+ \vec{w}$. Pour cela on va construire un parallélépipède à partir des points O, A, B, C.

On construit les points D, E, F, G tels que :
$\overrightarrow{OA}+ \overrightarrow{OB}= \overrightarrow{OD}$ donc OADB est un parallélogramme du plan (OAB);
$\overrightarrow{OB}+ \overrightarrow{OC}= \overrightarrow{OE}$ donc OBEC est un parallélogramme du plan (OBC);
$\overrightarrow{OC}+ \overrightarrow{OA}= \overrightarrow{OF}$ donc OAFC est un parallélogramme du plan (OAC) et
$\overrightarrow{CE}+ \overrightarrow{CF}= \overrightarrow{CG}$ donc CEGF est un parallélogramme du plan (CEF).



On admet que OADBCFGE est un parallélépipède car toutes ses faces sont des parallélogrammes.

On a $\overrightarrow{OG}= \overrightarrow{OE}+ \overrightarrow{EG}= \overrightarrow{OA}+ \overrightarrow{OB}+ \overrightarrow{OC}$ grâce aux propriétés des différents parallélogrammes et à la relation de Chasles.
Donc $\overrightarrow{OG}$ est le représentant d'origine O de $\vec{u}+ \vec{v}+ \vec{w}$.

6) Produit d'un vecteur par un réel : une extension du plan à l'espace

Définition

- $\vec{u}$ est un vecteur non nul et k un réel non nul.

On appelle produit du vecteur $\vec{u}$ par le réel k le vecteur, noté k$\vec{u}$, de même direction que $\vec{u}$, de même sens que $\vec{u}$ si k est positif, de sens contraire si k est négatif et de norme $|k|\|\vec{u}\|$.

- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou si k=0 alors k$\vec{u}$= $\vec{0}$

Si $\overrightarrow{OA}$ est un représentant du vecteur $\vec{u}$, alors $k\overrightarrow{OA}$ est un représentant du vecteur $k\vec{u}$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même direction mais n'ont ni nécessairement même sens ni même norme.

Propriétés admises

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et les réels k et k' on a

k($\vec{u}$+ $\vec{v}$)=k$\vec{u}$ +k $\vec{v}$;

(k+k')$\vec{u}$ = k$\vec{u}$ + k'$\vec{u}$;

k(k'$\vec{u}$) = (kk')$\vec{u}$.

7) Vecteurs colinéaires : une extension du plan à l'espace

Définition

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe un réel k ou un réel k' tel que $\vec{v}$=k$\vec{u}$ ou $\vec{u}$ =k'$\vec{v}$.

Remarque : Si $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont deux représentants de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\vec{v}$=k$\vec{u}$, on a $\overrightarrow{OB} = k\overrightarrow{OA}$.
On dit aussi que $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont colinéaires.

Si $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont deux représentants de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\vec{v}$=k$\vec{u}$, on a $\overrightarrow{OB} = k\overrightarrow{OA}$.
On dit encore que $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires.

8) Combinaison linéaire de deux ou trois vecteurs

Définitions

1) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace et a et b deux réels quelconques.
Le vecteur a$\vec{u}$+b$\vec{v}$ est appelé combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

2) Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace et a, b, c trois réels quelconques.
Le vecteur a$\vec{u}$+b$\vec{v}$+c$\vec{w}$ est appelé combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$,$\vec{v}$, $\vec{w}$.

Par exemple, le vecteur $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ est la combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$,$\vec{v}$, $\vec{w}$ de coefficients 1,1,1

Propriété

Si une combinaison linéaire a$\vec{u}$+b$\vec{v}$ de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est nulle, a et b n'étant pas tous deux nuls, alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

En effet si a$\vec{u}$+b$\vec{v}$= $\vec{0}$, on peut écrire a$\vec{u} = -$b $\vec{v}$ et si, par exemple, a n'est pas nul, on a $\vec{u} = -\frac{b}{a}\vec{v}$

Une propriété concernant une combinaison de trois vecteurs égale au vecteur nul est énoncée au paragraphe IV 2)

III - Droites de l'espace et vecteurs directeurs

1) Vecteur directeur d'une droite

Définition

On appelle vecteur directeur d'une droite (d) tout vecteur $\vec{u}$ non nul tel qu'il existe deux points A et B de (d) vérifiant $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$

Deux vecteurs directeurs d'une droite sont colinéaires.
La direction d'une droite est celle d'un vecteur directeur quelconque de cette droite.

Propriété admise

Les points A, B, C de l'espace sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

2) Caractérisation vectorielle d'une droite passant par deux points

A et B sont deux points distincts de l'espace.
La droite (AB) est l'ensemble des points M tels que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires.
Autrement dit : La droite (AB) est l'ensemble des points M tels qu'il existe un
réel k vérifiant $\overrightarrow{AM}$ =k$\overrightarrow{AB}$

M est un point de (d) si et seulement si il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AM}$ =k$\overrightarrow{AB}$

3) Caractérisation vectorielle d'une droite passant par un point et de vecteur directeur donné

A est un point et $\vec{u}$ un vecteur non nul de l'espace
La droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

4) Droites parallèles

Propriété

Une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et une droite de vecteur directeur $\vec{v}$ sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

IV - Plans et vecteurs coplanaires

1) Plan de l'espace

Soient A, B, C trois points non alignés. Ils définissent un plan que l'on note P (cf. P2). On pose $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$. Ces vecteurs sont non colinéaires (sinon A, B, C seraient alignés).

Définition et vocabulaire

Le plan P est l'ensemble des points M tels qu'il existe deux réels x et y vérifiant $\overrightarrow{AM}= x\overrightarrow{AB} +y\overrightarrow{AC} = x\vec{u} + y\vec{v}$

Ce plan est appelé plan passant par A et de couple de vecteurs directeurs $(\vec{u}, \vec{v})$ ou de direction $(\vec{u}, \vec{v})$
Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires $(A, \vec{u}, \vec{v})$ est appelé repère du plan P.

Tout vecteur de représentant $\overrightarrow{AM}$ dans P peut s'écrire sous la forme $x\vec{u}+y\vec{v}$

2) Vecteurs coplanaires

Définition
Des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires lorsque, si O est un point quelconque de l'espace et A, B, C tels que $\overrightarrow{OA}= \vec{u}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$, alors O, A, B, C sont coplanaires ou encore $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ sont coplanaires.

Conséquence : On en déduit que, si $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont trois vecteurs non nuls coplanaires, chacun d'eux s'écrit comme combinaison linéaire des deux autres.
Autrement dit, par exemple, il existe x et y réels, tels que $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$ et, avec les notations précédentes, $\overrightarrow{OC} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$

Propriété Si $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont trois vecteurs non nuls non coplanaires alors $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$ si et seulement si $a=b=c=0$.

- Si a=b=c=0, on a évidemment $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$
- Réciproquement, si $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont trois vecteurs non nuls et non coplanaires tels que $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$. Supposons que l'un au moins des coefficients n'est pas nul, par exemple a. Alors $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$ équivaut à $\vec{u} = -\frac{b}{a}\vec{v} - \frac{c}{a}\vec{w}$ puisque $a \neq 0$. C'est impossible sinon $\vec{u}$ serait combinaison linéaire de $\vec{v}$ et $\vec{w}$.
  Donc $a = 0$. On démontrerait de même que b et c sont nuls.

3) Plans parallèles

On sait que deux plans parallèles distincts n'ont pas de points communs (cf. P3)

Propriété
Deux plans sont parallèles si et seulement s'il existe un couple de vecteurs directeurs commun à ces deux plans. Autrement dit : deux plans sont parallèles s'ils ont même direction.

Démonstration
- Si les plans **distincts** P et P' sont parallèles, il existe deux droites sécantes de l'un parallèles à deux droites sécantes de l'autre (Cf. P3).
  On considère A, B et C des points non alignés de P. Soit $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Le couple $(\vec{u}, \vec{v})$ est un couple de vecteurs directeurs de P (voir IV-1).

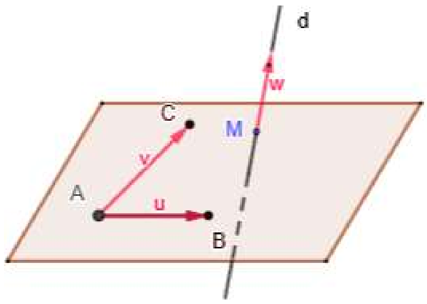
Soit A' un point de P'. Les droites passant par A' respectivement parallèles à (AB) et (AC) sont contenues dans P' (Cf. P3). On construit sur ces droites les points B' et C' de P' tels que $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC} = \vec{v}$

Le couple de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ est donc un couple de vecteurs directeurs commun à P et P'.

- Réciproquement, soient P et P' deux plans distincts et $(\vec{u}, \vec{v})$ la direction commune de P et P'.
  On raisonne par l'absurde. Soit A un point commun à P et à P'.
  P est l'ensemble des points M tels qu'il existe deux réels x et y vérifiant $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$.
  Or A appartient à P' et $(\vec{u}, \vec{v})$ est un couple de vecteurs directeurs de P', donc, quel que soit M, il appartient aussi à P'. Donc P=P' ce qui est contraire à l'hypothèse. P et P' sont donc parallèles.

On peut par exemple démontrer ainsi que deux faces opposées d'un parallélépipède AODBCFGE sont contenues dans des plans parallèles (voir figure § II-5)

V - Droites et plans : du vectoriel au géométrique



On considère un plan P de repère $(A, \vec{u}, \vec{v})$, M un point de l'espace et (d) la droite passant par M et de vecteur directeur $\vec{w}$.
On s'intéresse aux positions respectives de P et de (d) (cf. P4).

On propose ici deux présentations possibles pour chacun des deux paragraphes

1) Première présentation

Droite parallèle à un plan

Propriété : La droite (d) est parallèle au plan P si et seulement si $\vec{w}$ est combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Démonstration :

- Si $\vec{w}$ est combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ alors il existe x et y réels tels que $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$. Soit (d') la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{w}$.

Pour tout point M de cette droite, $\overrightarrow{AM} = k\vec{w} = k(x\vec{u} + y\vec{v}) = kx\vec{u} + ky\vec{v}$ ce qui prouve que M est dans P et donc (d') est incluse dans P. On a trouvé une droite (d') incluse dans P parallèle à (d). Donc (d) est parallèle à P.

- Réciproquement : si la droite (d) de vecteur directeur $\vec{w}$ est parallèle à P elle est parallèle à une droite (d') de P (Cf. P4). $\vec{w}$ est donc colinéaire à un vecteur directeur de (d') qui s'écrit comme combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Droite et plan sécants

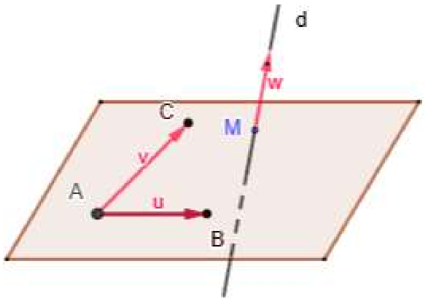
Propriété : On suppose que $\vec{w}$ n'est pas combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Alors la droite (d) et le plan P sont sécants.

En effet, la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{w}$ est parallèle à (d) et elle n'est pas incluse dans P, sinon ce vecteur directeur serait combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ d'après la propriété précédente (raisonnement par l'absurde).

Si la droite (d) et le plan P sont sécants, $\vec{w}$ n'est pas combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (raisonnement par l'absurde analogue au précédent).

2) Deuxième présentation

On considère un plan P de direction $(\vec{u}, \vec{v})$ et (d) une droite de vecteur directeur $\vec{w}$. On s'intéresse aux positions respectives de P et de (d) (cf. P4).



Droite parallèle à un plan

Propriété : La droite (d) est parallèle au plan P si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

Démonstration :

- Si la droite (d) est parallèle à P, alors elle est parallèle à une droite (D) de P (Cf. P4). Soient A et B deux points distincts de D : $\overrightarrow{AB}$ est colinéaire à $\vec{w}$ (car D est parallèle à d) et c'est un vecteur de P donc il est combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$
  On peut donc écrire $\overrightarrow{AB} = k\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$ d'où $\vec{w} = \frac{x}{k}\vec{u} + \frac{y}{k}\vec{v}$ (k n'est pas nul puisque A et B sont distincts)
  $\vec{w}$ est alors combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont coplanaires.
- Réciproquement : Si les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont coplanaires, alors $\vec{w}$ est combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ donc il existe x et y réels tels que $\vec{w} = \overline{x\vec{u}} + \overline{y\vec{v}}$. Soit A un point de P et (D) la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{w}$.
  Pour tout point M de (D), $\overrightarrow{AM} = k\vec{w} = k(x\vec{u} + y\vec{v}) = kx\vec{u} + ky\vec{v}$ ce qui prouve que M est dans P et donc (D) est incluse dans P. On a trouvé une droite (D) incluse dans P parallèle à (d). Donc (d) est parallèle à P.

Droite et plan sécants

Définition: Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires, alors la droite (d) et le plan P sont dits sécants.
Leur intersection est réduite à un point.

VI - Base, repère, coordonnées

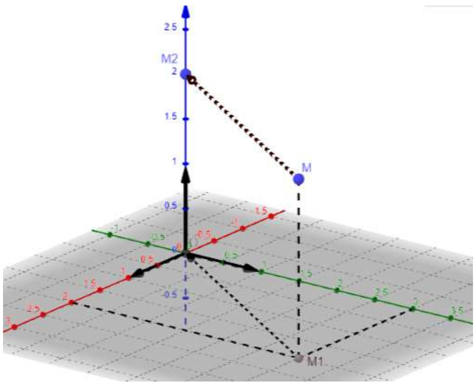
Définitions

- On appelle base tout triplet $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de vecteurs non coplanaires.
- O est un point de l'espace et $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ une base, alors $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est un repère de l'espace d'origine O

- <u>Théorème admis</u>

Une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ étant donnée, pour tout vecteur $\vec{u}$ il existe un unique triplet de nombres réels (x, y, z) tel que $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$

x, y et *z* sont les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$



<u>Conséquence</u> : si $x = y = z = 0$ alors $\vec{u} = \vec{0}$

- Soit *M* un point de l'espace.

Les coordonnées de M sont celles de $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

<u>Propriétés</u> : Les propriétés suivantes sont des extensions à l'espace des propriétés des vecteurs du plan.

Suivant les cas, on se place dans une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ ou un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$

On considère les vecteurs $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$

1) $\vec{u} = \vec{v}$ si et seulement si $x = x'$, $y = y'$ et $z = z'$

Cas particulier : $\vec{u} = \vec{o}$ si et seulement si $x=0$, $y=0$ *et* $z=0$

Ceci est une conséquence de la propriété IV 2)

2) $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(x + x', y + y', z + z')$

3) $k\vec{u}$ a pour coordonnées (kx, ky, kz)

En particulier $-\vec{u}$ a pour coordonnées $(-x, -y, -z)$

4) Soient les vecteurs $\vec{u}(x, y, z)$, $\vec{v}(x', y', z')$ et $\vec{w}(x'', y'', z'')$ et les réels a, b, c.

La combinaison linéaire $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$ des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ a pour coordonnées

$$(ax + bx' + cx, ay + by' + cy, az+bz'+cz'')$$

5) Soient les points $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$. Le milieu K du segment [AB] a pour coordonnées $x_K = \frac{x_A+x_B}{2}$; $y_K = \frac{y_A+y_B}{2}$; $z_K = \frac{z_A+z_B}{2}$

Partie D – Exercices

Les exercices qui suivent peuvent se résoudre sans utiliser de coordonnées.

Les premiers énoncés font travailler la relation de Chasles et les notions de vecteurs égaux et opposés, sur des représentants de vecteurs portés par un solide usuel de l'espace (cubes, tétraèdres...).

Les élèves peuvent ainsi s'aider de la visualisation associée pour résoudre les exercices.

Ensuite intervient la notion de combinaison linéaire. Il s'agit d'abord d'obtenir l'écriture de vecteurs donnés comme combinaison linéaire d'autres vecteurs donnés (en fait des bases), en mettant encore en jeu l'appui sur la figure.

Puis il est demandé des interprétations faisant intervenir la coplanarité des vecteurs, ou leur colinéarité, ou la caractérisation par combinaison linéaire des vecteurs non coplanaires.

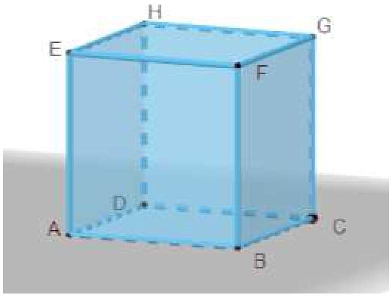
Dans les deux derniers exercices, le travail vectoriel conduit à un résultat de géométrie ponctuelle (faisant intervenir l'intersection d'une droite et d'un plan ou de deux plans).

Les élèves peuvent être un peu étonnés du fait que des représentants donnés de 3 vecteurs sont dits coplanaires même si les 6 points qui les définissent n'appartiennent pas à un même plan - il suffit qu'il existe des représentants coplanaires...

Une autre difficulté vient du manque de méthode pour trouver des décompositions de vecteurs sur une base donnée - les élèves peuvent tourner en rond, même en s'appuyant sur la figure...

Les connaissances en géométrie non vectorielle concernent les propriétés élémentaires des solides, en terme de parallélisme de faces ou d'arêtes, le fait qu'une droite coupe un plan en un point (s'il y a une intersection), que l'intersection de deux plans sécants est une droite, dont tous les points sont donc alignés ! et que si une droite est dans un plan tous les points de cette droite sont dans ce plan.
Les connaissances antérieures de géométrie vectorielle concernent pour une grande part les traductions vectorielles de milieux (et les propriétés planes).

Exercice 1 : Vrai-Faux (Justifier les réponses).



ABCDEFGH est un cube.

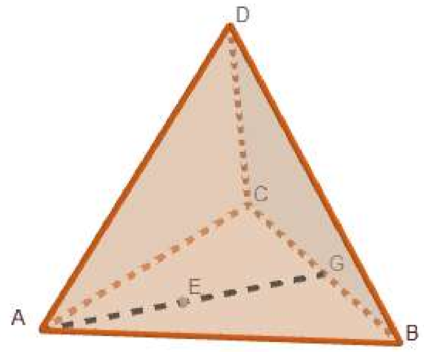
a) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AH}$

b) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{FG} = \vec{0}$

c) $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{HF} + \overrightarrow{AC}$

Exercice 2 : QCM (Indiquer la ou les bonnes réponses)

ABCD est un tétraèdre. G est le milieu de [BC] et E est le milieu de [AG].



1) a. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{CG}$ b. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{GB}$

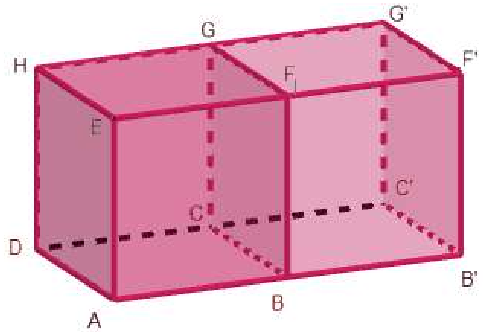
c. $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$

2) a. $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$ b. $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CG}$

c. $\overrightarrow{DG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB})$

3) a. $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{GE}$ b. $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB})$ c. $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{GE} = \vec{0}$

Exercice 3 : ABCDEFGH et BB'C'CFF'G'G sont deux cubes accolés par la face BFGC.



1) Vrai-Faux (Justifier)

a) $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB'} = \overrightarrow{HF'}$ b) $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{G'B} = \vec{0}$

2) Dans chaque cas, déterminer un vecteur vérifiant l'égalité :

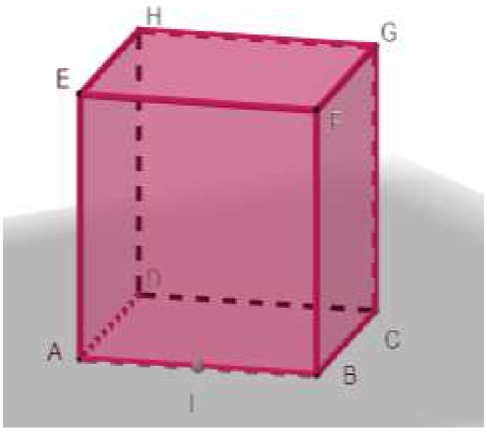
a) $\overrightarrow{HD} + \overrightarrow{C'B'} = \cdots$ b) $\overrightarrow{F'G} + \overrightarrow{HD} = \cdots$ c) $\overrightarrow{G'C'} + \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{AG} = \cdots$

3) Soit I le milieu de [EH] et J celui de [BC]. Exprimer $\overrightarrow{IJ}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.

4) K est le centre du carré BFGC. Exprimer $\overrightarrow{IK}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.

Exercice 4 :

Reproduire la figure ci-dessous d'un cube en perspective.



a) On note $\vec{u}$ le vecteur $\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}$ le vecteur $\overrightarrow{AD}$ et $\vec{w}$ le vecteur $\overrightarrow{AE}$

A partir du point A, construire les vecteurs $\vec{k} = \vec{u} + \vec{v}$,

$\vec{t} = \vec{k} + \vec{w}$, $\vec{p} = \vec{v} + \vec{w}$ et $\vec{s} = \vec{u} + \vec{p}$.

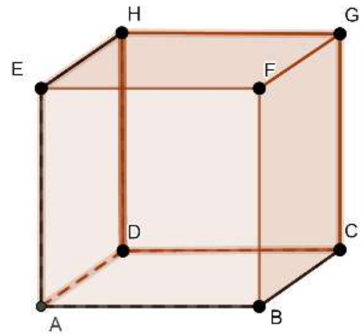
Quelle égalité vue dans le plan semble encore valide dans l'espace ?

b) Construire le point K tel que $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Le point K est-il dans le plan grisé de la face ABCD?

c) Construire le point L tel que $\overrightarrow{CL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$. Les points B, L et K sont-ils alignés ? Justifier.

d) Ecrire les vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AL}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$. Pensez-vous que l'on puisse écrire le vecteur $\overrightarrow{AF}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$?

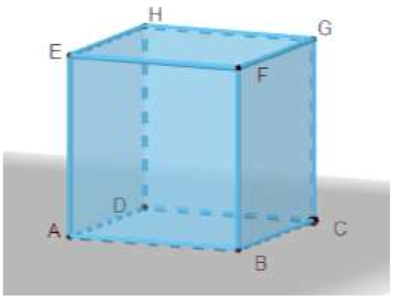
Exercice 5 :



ABCDEFGH est un cube.

5. Montrer que $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}$
6. Montrer que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CG}$
7. Montrer que les points A, C, G, E sont coplanaires.
8. Montrer que les plans (ABD) et (EFH) sont parallèles

Exercice 6 : ABCDEFGH est un cube.
I, J, K, L sont les milieux respectifs de [AE], [FG], [FB], [CG].
1) Expliquer pourquoi $(K, \overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KL})$ est un repère du plan (AKL)
2) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{KL}$ sont coplanaires.
3) Que peut-on en déduire pour la droite (IJ) et le plan (AKL) ?



Exercice 7 : ABCDEFGH est un cube. I est le milieu de [AB] et J celui de [EH].
1) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont coplanaires.
2) Exprimer le vecteur $2\overrightarrow{IJ}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{HB}$. Que peut-on en déduire pour les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{HB}$?

Exercice 8 : (d_1) et (d_2) sont deux droites de vecteur directeur un vecteur $\vec{u}$ donné. Elles sont donc parallèles.
P_1 et P_2 sont deux plans sécants contenant respectivement les droites (d_1) et (d_2).
On appelle (Δ) leur droite d'intersection.

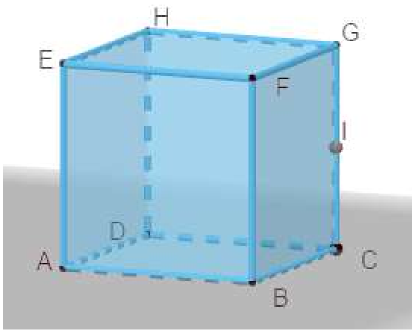
L'objet de cet exercice est de démontrer que les droites (d_1), (d_2) et (Δ) sont parallèles.

(Ce résultat est souvent appelé théorème du toit)

1) On considère deux couples de vecteurs directeurs des plans P_1 et P_2, $(\vec{u}, \overrightarrow{v1})$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{v2})$. Justifier que les vecteurs $\vec{u}$, $\overrightarrow{v1}$, $\overrightarrow{v2}$ ne sont pas coplanaires.

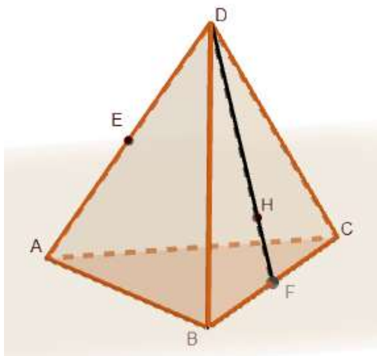
2) Soit $\vec{w}$ un vecteur directeur de (Δ). Justifier que $\vec{w}$ est combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$, $\overrightarrow{v1}$ mais aussi des vecteurs $\vec{u}$, $\overrightarrow{v2}$.
3) En déduire que $\vec{w}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires. Que peut-on en déduire pour les droites (d_1), (d_2) et (Δ) ?

Exercice 9 : Soit ABCDEFGH le cube ci-contre.
I est le milieu de [CG].



1) Expliquer pourquoi les points A, E, C et I sont coplanaires ?
2) Exprimer $\overrightarrow{AC}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$
3) Exprimer $\overrightarrow{EI}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.
4) Soit x un nombre réel et le point M tel que $\overrightarrow{EM} = x\overrightarrow{EI}$. Exprimer $\overrightarrow{EM}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$. Pour quelle valeur de x le point M est-il dans le plan (ABD) ?
5) Construire le point d'intersection de la droite(EI) et du plan (ABC).

Exercice 10 :
ABCD est un tétraèdre. E est le milieu de [AD], F celui de [BC] et soit H le point défini par $\overrightarrow{DH} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DF}$



1) a) Les points A, B, C, D sont-ils coplanaires ?
b) Les points A, E, H et F sont-ils coplanaires ? (Justifier)

2) Exprimer $\overrightarrow{EH}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$

3) a) Soit x un nombre réel et le point M tel que $\overrightarrow{EM} = x\overrightarrow{EH}$. Déterminer x pour M soit dans le plan (ABC).
b) Montrer que les points A, F et M sont alignés pour la valeur de x trouvée à la question 3) a).

Ressource transversale

CALCUL D’AIRES

(Suites, calcul intégral)

(64 pages)

Le document peut être téléchargé ici :

http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/B101/Calculs_d_aires.docx

http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/B101/Calculs_d_aires.pdf

Thème Calculs d'aires

Préalable

Le programme de terminale de Mathématiques complémentaires s'appuie sur le programme de première de Spécialité mathématique qu'il enrichit de nouvelles connaissances. Celles-ci peuvent être soit listées dans la deuxième partie du programme (contenus) soit apparaître dans des Thèmes d'étude (première partie du programme). Dans ces thèmes peuvent intervenir des notions mathématiques déjà vues en première ou dans l'année et/ou ces nouvelles connaissances. Pour un même thème d'étude, il est parfois nécessaire d'avoir recours à des notions qui figurent dans des champs différents du descriptif des contenus, comme l'analyse et les probabilités, notions qui ont pu être ou non déjà rencontrées au moment où on aborde le thème.

Il y a cependant, dans ce qui est proposé par le programme, davantage qu'une succession de thèmes et de contenus nécessaires à traiter les thèmes. Il y est stipulé en effet : « L'objectif est de traiter l'ensemble des contenus et capacités attendues au travers des thèmes d'étude ».

C'est pour suivre cette ambition que nous avons voulu entrer dans le thème ci-dessous sans nécessairement étudier **au préalable** tous les contenus nouveaux du programme qui permettent de l'aborder.

Introduction au thème « Calculs d'aires »

Nous avons réfléchi à la manière d'aborder le thème « calculs d'aires » sans avoir nécessairement abordé le chapitre intégration (c'est évidemment un des choix possibles, il y en a d'autres !). Ainsi la progression présentée ci-dessous peut être une démarche pour aborder les intégrales. En revanche, pour travailler comme nous le suggérons, il nous semble important de disposer de connaissances sur les suites. Cela dit, les ressources compilées ici ne sont pas originales, c'est leur organisation qui n'est pas tout à fait classique Nous espérons que les choix liés à la quantité des ressources présentées dans chacune des trois parties du texte, qui dépasse très nettement ce qu'on peut faire dans une classe, permettront les adaptations nécessaires à chaque cas d'enseignement.

En fait ces calculs d'aires ont été abordés en mathématiques depuis très longtemps, ne serait-ce que pour des raisons pratiques, ou scientifiques, liées à des besoins en mécanique ou en astronomie. Les anciens ont ainsi développé d'abord des calculs d'aires de surfaces limitées par des polygones (ce que nous appelons calculs d'‘aires élémentaires), puis limitées par un disque, une parabole et un segment, ou une hyperbole et un segment, ou une spirale etc.… Il s'agit alors de comparer des aires, notamment à celles du carré (quadratures). Pour les Grecs, les nombres sont les entiers supérieurs ou égaux à 2, ils connaissent aussi les rapports d'entiers mais distinguent les grandeurs géométriques, auxquelles on ne peut pas nécessairement attribuer un nombre ou un rapport, d'où ces comparaisons. Ainsi, depuis les Grecs, les mathématiciens mettent en jeu pour les cas plus compliqués à la fois leur connaissance des aires élémentaires (obtenues à partir de celles des carrés) et, souvent, des encadrements. Ils font des passages à la limite sans l'exprimer ainsi, ou appliquent des raisonnements par l'absurde (méthode d'exhaustion).

Dans les deux premières parties du document, on propose de faire travailler les élèves de cette manière, « à l'ancienne », d'abord en leur faisant retrouver les formules d'aires élémentaires à partir de celle du carré, puis en leur faisant « partager » quelques raisonnements de calculs d'aires qui ont été produits jusqu'au $17^{ème}$ siècle sur des figures plus compliquées. Cela restitue une unité dans ces problèmes qui pourraient sembler « disjoints » entre ce qui est fait jusqu'au collège et ce qui est fait en terminale.

Dans ces deux parties on alterne des énoncés d'exercices, plus ou moins simples, et quelques rappels historiques présentant certaines de ces manières de raisonner « à l'ancienne ». La partie A permet une révision des formules et calculs d'aires élémentaires, jusqu'au calcul de l'aire du disque qui est moins simple. Ce qui est présenté dépasse ce qu'on peut strictement attendre des élèves de terminale, mais peut servir y compris à d'autres occasions (en formation d'enseignants par exemple, voire en seconde).

Pas question donc encore d'intégrales pour calculer les aires sous les courbes, aires pourtant déjà travaillées (partie B). Les intégrales vont alors apparaitre comme une vraie simplification ! Certes, pour la première fois (semble-t-il) Oresme repère un lien entre une distance parcourue et l'aire sous la courbe de la vitesse. Ce lien est confirmé par Galilée - puis une loi de Kepler aussi utilise ce résultat. Mais cela reste compliqué.

En fait les derniers exercices de la partie B préparent tout de même l'idée de base, l'approximation de ces aires par des rectangles de mieux en mieux « coincés » dans la surface dont on cherche l'aire…
De nos jours, le calcul d'aires sous une courbe se fait en utilisant l'intégrale de la fonction dont la courbe est la représentation graphique (dès que les fonctions en jeu sont un peu régulières). C'est l'objet de la partie C, qui alterne aussi des exercices, notamment pour préparer le calcul de l'aire sous une courbe en relation avec la fonction qui est représentée par la courbe, et des présentations de cours. En particulier cette partie se poursuit sur l'exposition du théorème fondamental de l'analyse qui fait le lien entre intégrales et primitives (introduit au XVIIème), qui rend tous ces calculs encore plus faciles… On donne une idée de la démonstration de ce théorème dans le cas de fonctions suffisamment régulières. Puis on illustre l'utilisation des intégrales en dehors du calcul d'aires dans trois domaines différents (économie, SVT et physique) où l'on introduit aussi la notion de valeur moyenne d'une fonction.
Enfin on présente la méthode de Monte Carlo qui apparait au milieu du 20ème et constitue une alternative dans des cas où, justement, on ne peut pas trouver de primitive ! En revanche on ne développe pas les propriétés des primitives.
Quelques algorithmes rythment le texte…

Table des matières

Partie A – Aires élémentaires …………………………………………………...5

I - Aires de polygones

1) Rappels sur l'aire du rectangle………………………………………………... 6

2) Exercices pour retrouver diverses formules donnant l'aire d'un triangle, en fonction de mesures connues. ……………………………………………………..7

a) Aires de triangles dont on connait la longueur d'un côté et celle de la hauteur relative à ce côté

b) Aire de triangles dont on connait les longueurs de deux côtés et l'angle délimité par ces deux côtés.

c) Aires de triangles dont on connait les longueurs des trois côtés.

3) Aires de quadrilatères particuliers dont on connait certaines mesures (parallélogrammes, trapèzes, losanges) ……………………………………………10

4) Formulaires ………………………………………………………………. 11

5) Exercices d'application immédiate (10 exercices) …………………………… 12

6) Autres exercices (10 exercices) ……………………………………………….. 15

II Aire du disque et approximations de π

Introduction : Le problème de la reine Didon ……………………………………21

1) Aire du disque par découpage et recollement …………………………………23

2) Aire du disque par la méthode d'exhaustion……………………………….. 24

3) Aire du disque par la méthode des indivisibles………………………………. 25

4) Aire du disque par encadrement et valeurs approchées de π ………………... 26

Partie B - Méthodes historiques d'approximation des aires …………………..30

I - Quadrature de la parabole selon Archimède ………………………………………30

II - Quadrature de l'hyperbole …………………………………………………………34

1) La quadrature de l'hyperbole par Grégoire de Saint-Vincent ………………. 35

a) Exercice préparatoire à la méthode de Grégoire de Saint-Vincent dans un cas particulier

b) Cas général

2) La quadrature de l'hyperbole par la méthode de Brouncker……………… 39

Etude d'un cas particulier : a=1 et b=2

Algorithme de Brouncker

Partie C – Aire et intégrale – Aire et primitive ………………………………44

I - Aire du disque approchée par un calcul de la somme d'aires élémentaires « sous la courbe » - un point de vue différent de celui de la partie 1 et qui prépare la suite…. 44

II - Aire et intégrale ……………………………………………………………47

1) Exemple d'introduction : calcul de l'aire sous la parabole d'équation y=x²... 47

2) Cas général ………………………………………………………………… 50

III - Relation entre aire et primitive d'une fonction sous des hypothèses « fortes »... 51

1) Exercice d'introduction : lien entre aire sous la courbe et dérivée………….. 51

2) Cas d'une fonction positive et continue sur un intervalle *I*= [a ; b]………….. 52

IV - Intégrale et primitive ……………………………………………………… 53

1) Cas d'une fonction continue et positive sur un intervalle [a ; b]…………….. 53

2) Extension …………………………………………………………………… 54

3) Une intégrale peut être utile pour calculer une autre valeur qu'une aire. ….. 54

V - Méthode de Monte Carlo …………………………………………………….. 56

1) Méthode de Monte Carlo pour calculer l'aire $\mathcal{A}_{Cf}$ sous la courbe d'une fonction f sur un intervalle [a,b]……………………………………………….. 57

2) Exercice d'application ……………………………………………………… 58

ANNEXES ……………………………………………………………………60

1) Une alternative géométrique pour calculer $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$ ………………. 60

2) Calcul de l'aire sous la courbe pour une fonction non monotone…………………… 61

3) Plusieurs manières de calculer des aires « sous des courbes » sans le recours aux intégrales……………………………………………………………………….. 61

Partie A – Aires élémentaires

Dans cette partie, on rappelle certaines propriétés des aires puis on retrouve les formules d'aires des polygones usuels et on établit d'autres formules utiles. Deux séries d'exercices sont ensuite proposées : la première est constituée d'exercices rapides et la deuxième d'exercices moins immédiats comportant des questions enchainées et des démonstrations plus complexes.

Même si la notion d'aire nous est familière depuis l'école primaire, il a fallu en expliciter rigoureusement le sens et les règles.
Les anciens Egyptiens (vers 2500 jusqu'au IVe siècle avant J.-C.) mesuraient déjà des aires, notamment à cause des crues du Nil, qui effaçaient chaque année les limites des parcelles qu'ils cultivaient.[1]Mais ils n'envisageaient aucune définition. La géométrie grecque regorge de problèmes d'aire et au IIIème siècle avant J.-C., Euclide écrit dans le livre I de son célèbre ouvrage« Eléments de géométrie » :« une surface est ce qui a longueur et largeur seulement ». Ce n'est que récemment qu'on a précisé : « L'aire est un moyen de rendre compte de la place occupée par une surface dans le plan. Par le choix d'une unité, on peut associer un nombre à une vaste famille de surfaces du plan (contenant toutes celles qu'on rencontre à l'école élémentaire et au collège). Si l'on change d'unité, les nombres changent mais les nouvelles mesures sont proportionnelles aux anciennes. Cependant, contrairement à ce qui se passe pour les segments, deux surfaces connexes auxquelles on associe le même nombre ne sont pas nécessairement superposables.»[2]
Il convient donc de distinguer les surfaces, les aires et les mesures des aires, ces dernières comportant une unité ; cependant, pour plus de commodité, on confond parfois l'aire et la mesure de l'aire, ce que nous ferons bien souvent par la suite.
Quant aux règles suivies par les mesures des aires, donnons les trois propriétés les plus importantes.[3]

La première propriété est l'**additivité :** si l'on découpe une partie du plan en morceaux disjoints (c'est-à-dire qui ne se recouvrent pas), l'aire du tout est la somme des aires des parties. Une conséquence en est que si une partie A est contenue dans une partie B, l'aire de A est plus petite que celle de B (on trouve dans le livre I des Eléments d'Euclide « le tout est plus grand que la partie »). En effet, le tout B est alors réunion de la partie A et de son complémentaire, de sorte que son aire est la somme des aires des morceaux, donc plus grande que chacune d'elles. En fait, on utilise souvent une propriété un peu plus forte en demandant que l'additivité soit encore vraie si les morceaux sont « presque » disjoints, ce qui signifie qu'ils peuvent avoir en commun des parties considérées comme négligeables c'est-à-dire d'aire nulle comme, par exemple des segments ou des points.

---

[1]https://images.math.cnrs.fr/Aires-et-volumes-decoupage-et-recollement-I-847- 24 novembre 2010 - Daniel Perrin

[2]Régine Douady "Cahier de didactique des Mathématiques" de l'I.R.E.M. de Paris VII n° 37. Mai 1987 - R. DOUADY et M.J. GLORIAN.

[3]https://images.math.cnrs.fr/Aires-et-volumes-decoupage-et-recollement-I-847- 24 novembre 2010 - Daniel Perrin

La seconde propriété c'est que l'aire est **invariante par déplacement** ou par **isométrie** : l'aire d'une partie du plan ne change pas si on déplace cette partie ou si on la retourne.
Les deux propriétés d'additivité et d'invariance par déplacement mises ensemble donnent une méthode pour mesurer les aires à partir de celles des carrés. Si l'on a une partie A à mesurer, on la découpe en un nombre fini de morceaux puis on déplace ces morceaux, pour reconstituer une autre figure B. On dira alors que les parties A et B sont **équivalentes par découpage et recollement** (ou encore par puzzle ou tangram). Si l'opération est faite soigneusement, c'est-à-dire sans perte ni chevauchement, les aires de A et B sont égales. Ce procédé est utilisé pour ramener des figures complexes à d'autres, plus simples.

Les deux premières propriétés énoncées ici font penser aux notions communes du Livre I d'Euclide :
1. Les choses égales à une même chose sont égales entre elles.
2. Si, à des choses égales, on ajoute des choses égales, les tous sont égaux.
5. Les doubles du même sont égaux entre eux.
7. Les choses qui s'ajustent les unes aux autres sont égales entre elles.
8. Le tout est plus grand que la partie.

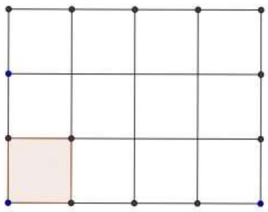
https://www.math93.com/index.php/histoire-des-maths/liste-complete/193-euclide

La troisième propriété importante est **l'homogénéité** : si, par exemple, on double les dimensions d'une figure, son aire est multipliée par 4 ; plus généralement, **si les dimensions d'une figure sont multipliées par un réel positif k, son aire est multipliée par k^2**.

I - Aires de polygones

C'est probablement à cause des crues du Nil qui effaçaient chaque année les limites des parcelles cultivées que les anciens Egyptiens (vers 2500 jusqu'au IV^e siècle avant J.-C.) ont été contraints d'évaluer des aires. On pense qu'ils savaient par exemple calculer l'aire d'un carré, d'un rectangle, d'un triangle ou d'un trapèze.

1) Rappels sur l'aire du rectangle[4].



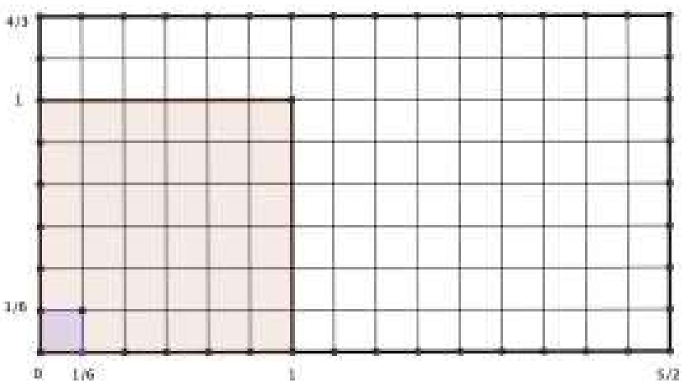
À partir des propriétés ci-dessus et du choix d'une unité, on peut déterminer l'aire d'un rectangle. Contrairement à ce qu'on pourrait penser, une preuve rigoureuse de la formule donnant l'aire d'un rectangle en fonction des longueurs des côtés[5] « $longueur \times largeur$ » n'est pas facile à établir pour toutes les valeurs des côtés. Bien sûr, lorsque les longueurs des côtés sont des nombres entiers d'unités, la preuve est immédiate en découpant le rectangle en carrés unités et en comptant les carreaux (sur la figure, l'aire du rectangle est égale à 3 fois 4, soit 12 unités d'aire).

On peut procéder de manière analogue lorsque les côtés ont pour longueurs des fractions d'unités.

[4] D'après https://images.math.cnrs.fr/Aires-et-volumes-decoupage-et-recollement-I-847 24 novembre 2010 - Daniel Perrin

[5] Le mot « côté » désigne ici un segment qui joint deux sommets mais il pourra désigner aussi la longueur de ce segment.

Par exemple dans la figure ci-contre, le rectangle a pour longueur $\frac{5}{2}$ et pour largeur $\frac{4}{3}$. Pour trouver son aire, on cherche un sous-multiple commun aux deux dimensions $\frac{4}{3}=\frac{8}{6}$ et $\frac{5}{2}=\frac{15}{6}$ (cela revient à chercher un dénominateur commun aux deux fractions). L'aire du rectangle est égale à $8\times 15=120$ fois celle du petit carré de côté $\frac{1}{6}$ et d'aire $\frac{1}{36}$ d'unité d'aire. Donc l'aire du rectangle est égale à $120\times\frac{1}{36}=\frac{120}{36}=\frac{20}{6}$.
On retrouve le produit $\frac{4}{3}\times\frac{5}{2}=longueur\times largeur$.



En revanche, lorsque a et b sont des nombres réels non rationnels, la démonstration est nettement plus délicate car il faut un passage à la limite, associé à la définition des réels comme limites de rationnels. Nous admettrons donc que si un rectangle a pour dimensions a et b où a et b sont deux réels positifs, son aire est égale à $a\times b$.

2) Exercices pour retrouver diverses formules donnant l'aire d'un triangle, en fonction de mesures connues.

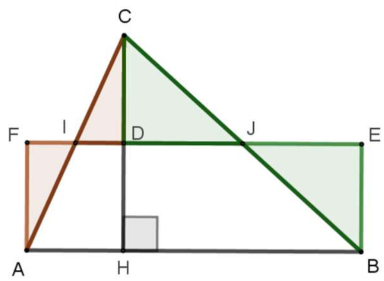
a) Aires de triangles dont on connait la longueur d'un côté et celle de la hauteur[6] relative à ce côté.

Exercice 1

1) Pour un triangle rectangle (dont on note a et b les longueurs des deux côtés de l'angle droit), expliquer comment on retrouve une formule de l'aire en construisant le triangle symétrique du premier par rapport au milieu de l'hypoténuse.

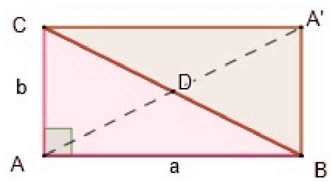
2) Expliquer comment on peut retrouver la formule de l'aire d'un triangle quelconque, résumée en « $\frac{1}{2}$base × hauteur », à partir de celle d'un triangle rectangle.

3) Expliquer comment on retrouve directement cette formule de l'aire d'un triangle quelconque ABC en utilisant le découpage illustré ci-contre où I et J sont les milieux respectifs des segments *[AC] et [BC].*



Indications

1) ABC est un triangle rectangle en A. Les longueurs des côtés de l'angle droit sont a et b.
A'BC est le symétrique de ABC par rapport au milieu D de [BC]. Les deux triangles ont la même aire (2ème propriété : aire invariante par symétrie). On démontre facilement que

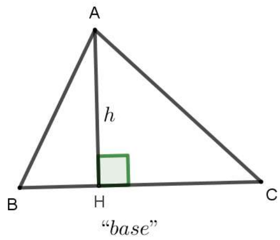


[6] Le mot « hauteur » désigne ici la distance du sommet au côté opposé, c'est-à-dire la longueur d'un segment.

ABA'C est un rectangle d'aire $a \times b$*donc l'aire du triangle est la moitié de celle du rectangle, soit*$\frac{a \times b}{2}$.

2) On trace une hauteur :

aire(ABC)=aire(ABH)+aire(ACH)=$\frac{1}{2}BH \times h + \frac{1}{2}HC \times h = \frac{1}{2}h(BH + HC) = \frac{1}{2}BC \times h$ *ou* $\frac{1}{2}base \times hauteur$ *(idem avec les deux autres hauteurs)*



3) On a tracé la parallèle à (AB) passant par I et J: elle coupe la hauteur issue de A en D. Les triangles AIF et CID sont symétriques par rapport à I et les triangles BJE et par rapport à J donc leurs aires sont égales. L'aire du triangle ABC est donc égale à celle du rectangle AFEB de dimensions AB et AF. Comme AF vaut la moitié de la hauteur CH, on retrouve la formule connue résumée en « $\frac{1}{2}base \times hauteur$ *».*

On peut choisir n'importe laquelle des trois bases avec la hauteur correspondante.

b) Aire de triangles dont on connait les longueurs de deux côtés et l'angle délimité par ces deux côtés.

Exercice 2

ABC est un triangle ; on note a la longueur BC, b la longueur CA et c la longueur AB.

Démontrer que l'aire du triangle ABC est $\mathrm{S} = \frac{1}{2}\mathrm{b.c.}\sin(\hat{\mathrm{A}}) = \frac{1}{2}\mathrm{a.c.}\sin(\hat{\mathrm{B}}) = \frac{1}{2}\mathrm{a.b.}\sin(\hat{\mathrm{C}})$.

On distinguera plusieurs cas suivant que le triangle a ou non tous ses angles aigus.

In*dications*

Dans le cas où l'angle de sommet A est aigu, avec les notations de la figure, l'aire de ABC est égale à $\frac{BH \times AC}{2}$.

Or $\sin(\hat{A}) = \frac{BH}{AB}$ *d'où BH =AB.sin (*$\hat{A}$*) et*

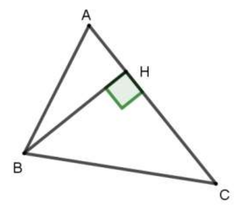
aire (ABC)=$\frac{1}{2}AB.AC.\sin(\hat{A}) = \frac{1}{2}bc\sin(\hat{A})$

Dans le cas où $\hat{A}$ *est obtus,* $\widehat{BAC}$ *et* $\widehat{BAH}$ *sont supplémentaires donc leurs sinus sont égaux : sin (*$\widehat{BAC}$*)=sin (*$\widehat{BAH}$*)* $= \frac{BH}{BA}$

On trouve le même résultat.

Enfin si $\hat{A}$ *est droit, son sinus est égal à 1 et la formule s'applique encore.*

Les deux autres égalités s'obtiennent de la même façon.



c) Aires de triangles dont on connait les longueurs des trois côtés.

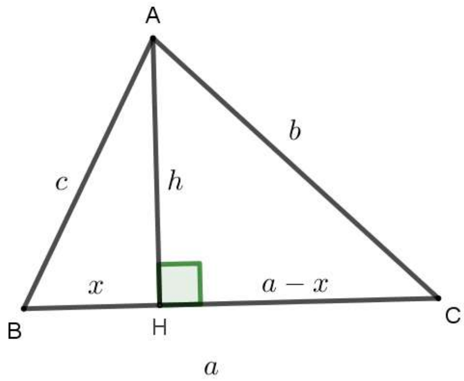
Si on ne connait ni hauteur ni angle mais seulement les longueurs des côtés, peut-on calculer l'aire du triangle ? Héron d'Alexandrie (1er siècle AP. J-C) apporta une réponse à cette question en énonçant et démontrant dans son traité *Les Métriques* le résultat suivant (donné en langage actuel) :

Si on appelle a, b, c les longueurs des côtés du triangle ABC (AB= c, AC= b et BC= a) et p le demi-périmètre de ABC $\left(p = \frac{a+b+c}{2}\right)$, alors l'aire du triangle ABC est égale à $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Cette formule, moins utilisée que les précédentes est aussi plus difficile à établir.

Exercice 3
La démonstration de Héron s'appuie sur les propriétés du cercle inscrit dans un triangle et l'exploitation des rapports de longueurs dans des triangles semblables.
Nous proposons dans cet exercice deux autres manières de démontrer la formule qui s'appuient sur des calculs algébriques et, pour la seconde, sur la trigonométrie.

<u>Enoncé 1</u> : utilise le théorème de Pythagore et des calculs algébriques.
On étudie ici le cas où les angles en B et C sont aigus ; on pourra vérifier que la démonstration est analogue dans le cas où l'un des deux est obtus.



1) On va d'abord écrire *x* en fonction des longueurs a, b, c.
En utilisant les notations de la figure ci-contre, démontrer que
$x = \frac{a^2-b^2+c^2}{2a}$
2) On va ensuite écrire *h* en fonction de a, b, c.
En utilisant deux fois la factorisation d'une différence de deux carrés, démontrer que
$h^2 = \frac{1}{4a^2}(b-a+c)(b+a-c)(a+c-b)(a+c+b)$
3) En remarquant que $b-a+c = 2p-2a$, en déduire la formule de Héron.

<u>Enoncé 2</u> : utilise la trigonométrie, en particulier la formule d'Al-Kashi qui est la suivante :
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b.c.cos\,(\hat{A})$$
Méthode : On a vu que l'aire du triangle ABC pouvait s'écrire $S = \frac{1}{2}b.c.sin(\hat{A})$ On va donc chercher à écrire sin(Â) en fonction des côtés *a, b, c* du triangle.
Or la formule d'Al-Kashi permet d'exprimer *cos(Â)* en fonction de *a, b, c* donc il suffit d'utiliser l'égalité liant sinus et cosinus d'un même angle ($sin^2(\hat{A}) + cos^2(\hat{A}) = 1$) pour arriver au résultat.
1) Démontrer que $sin^2(\hat{A}) = \frac{(2bc-b^2-c^2+a^2)(2bc+b^2+c^2-a^2)}{4b^2c^2}$ puis que
$sin(\hat{A}) = \frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
2) Conclure.

<u>Indications</u> :

Enoncé1 :
1) On utilise le théorème de Pythagore dans chaque triangle rectangle
$x^2 = c^2 - h^2$ *et* $(a-x)^2 = b^2 - h^2$ *donc* $a^2 - 2ax + c^2 - h^2 = b^2 - h^2$ *d'où le résultat*
2) $h^2 = c^2 - x^2$ *on utilise 1) et on réduit au même dénominateur*
$h^2 = \frac{4a^2c^2-(a^2-b^2+c^2)^2}{4a^2} = \frac{1}{4a^2}[2ac-(a^2-b^2+c^2)][2ac+(a^2-b^2+c^2)] =$
$\frac{1}{4a^2}[b^2-(a^2+c^2-2ac)][(a^2+c^2+2ac)-b^2]$ *On reconnait des développements dans les parenthèses.*
$h^2 = \frac{1}{4a^2}[b^2-(a-c)^2][(a+c)^2-b^2]$ *et on factorise encore…*

$$h^2 = \frac{1}{4a^2}(b-a+c)(b+a-c)(a+c-b)(a+c+b)$$

3) $b-a+c = a+b+c-2a = 2p-2a$ *puisque* $a+b+c=2p$ *on fait de même pour les autres parenthèses* $b+a-c = a+b+c-2c = 2p-2c$ *et* $a+c-b = 2p-2b$

On obtient $h^2 = \frac{1}{4a^2}(2p-2a)(2p-2c)(2p-2b)(2p)$ *en mettant 2 en facteur 4 fois et en prenant la racine carrée (tous les nombres sont positifs car dans un vrai triangle, la somme des longueurs de 2 côtés est inférieure à celle du 3ème côté)*

$h = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ *donc l'aire* $S = \frac{1}{2}ah = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Enoncé2 :

1) $a^2 = b^2 + c^2 - 2b.c.\cos(\hat{A})$ donc $\cos(\hat{A}) = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

D'où $sin^2(\hat{A}) = 1-\cos^2(\hat{A}) = (1-\cos(\hat{A}))(1+\cos(\hat{A})) =$

$$\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) = \frac{(2bc-b^2-c^2+a^2)(2bc+b^2+c^2-a^2)}{4b^2c^2}$$

$$= \frac{[a^2-(b-c)^2][(b+c)^2-a^2]}{4b^2c^2}$$

On factorise :

$$sin^2(\hat{A}) = \frac{(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)(b+c+a)}{4b^2c^2}$$

Or (comme dans dém1) $a-b+c = a+b+c-2b = 2p-2a$ *car* $a+b+c=2p$ *et de même pour les autres parenthèses.*

On obtient

$$sin^2(\hat{A}) = \frac{(2p-2b)(2p-2c)(2p-2a)(2p)}{4b^2c^2} = \frac{4}{b^2c^2}p(p-a)(p-b)(p-c)$$

Ce qui donne l'expression demandée. On remplace dans la formule de l'aire

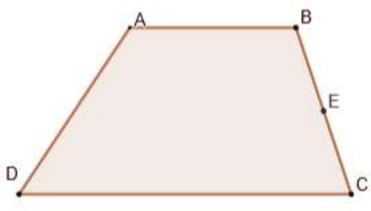
$$S = \frac{1}{2}b.c.sin(\hat{A}) = \frac{1}{2}bc \times \frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

3) Aires de quadrilatères particuliers dont on connait certaines mesures (parallélogrammes, trapèzes, losanges)

Exercice 4

1) Retrouver par découpage et recollement la formule de l'aire d'un parallélogramme et celle d'un losange.

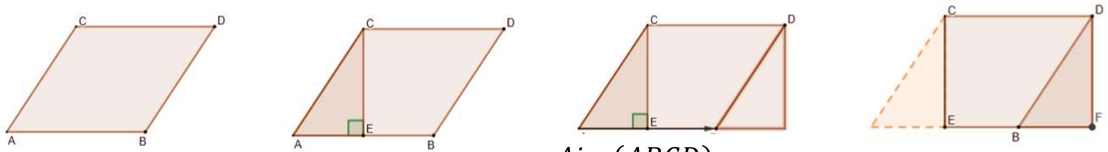
2) ABCD est un trapèze quelconque (ses « bases » [AB] et [CD] sont parallèles) ; construire le symétrique du trapèze par rapport au milieu E du côté [BC] et en déduire la formule de l'aire d'un trapèze. (on pourra noter H le projeté orthogonal de A sur (CD) et h la longueur AH)



AB=a et CD=b E milieu de [BC]

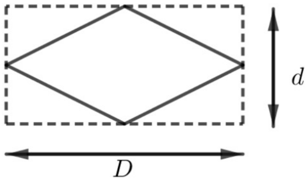
Indications

1) Aire du parallélogramme



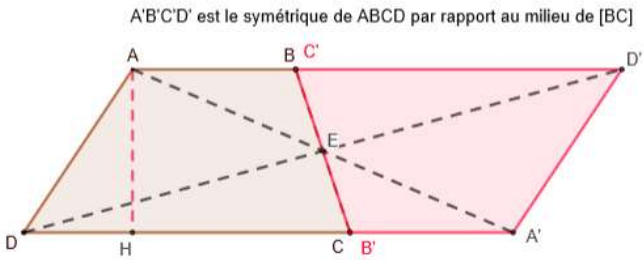
$Aire(ABCD) = Aire(EFDC) = AB \times CE$, que l'on résume souvent en $base \times hauteur$.

Aire du losange $\frac{D \times d}{2}$ *où D et d sont les longueurs des diagonales (découpage et recollement)*



2) Trapèze ABCD ; AB=a (aussi appelée « petite base ») CD=b (appelée « grande base »)

L'aire du trapèze est égale à la moitié de l'aire du parallélogramme AD'A'D obtenu en construisant A'B'C'D', symétrique de ABCD par rapport à E.

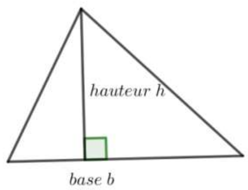
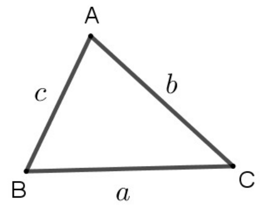


$$Aire(ABCD) = \frac{AD' \times AH}{2} = \frac{(AB + DC) \times AH}{2} = \frac{(a+b) \times h}{2}$$

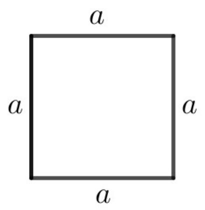
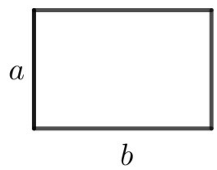
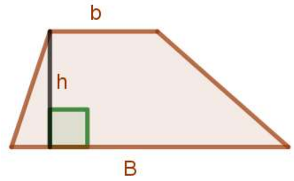
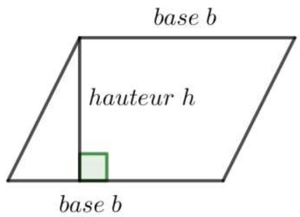
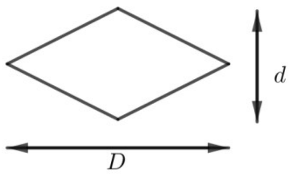
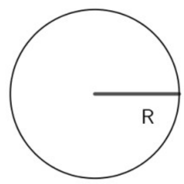
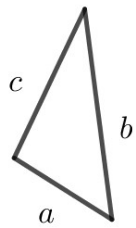
Ce que l'on exprime parfois sous la forme $\frac{(petite\ base + grande\ base) \times ha}{2}$

4) Formulaires

a) Triangles

On connait		Aire S
la longueur d'un côté et celle de la hauteur relative à ce côté.		$S = \frac{B \times h}{2}$
les longueurs de deux côtés et l'angle délimité par ces deux côtés.		$S = \frac{1}{2} b.c.sin(\hat{A}) = \frac{1}{2} a.c.sin(\hat{B}) = \frac{1}{2} a.b.sin(\hat{C})$.

11

Carré  $S = a^2$	Rectangle  $S = ab$	Trapèze  $S = \frac{(B+b)h}{2}$
Parallélogramme  $S = b \times h$	Losange (D grande diagonale et d petite diagonale)  $S = \frac{1}{2} D \times d$	Disque de rayon R  $S = \pi R^2$
les longueurs des trois côtés		Formule de Héron : p est le demi-périmètre $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

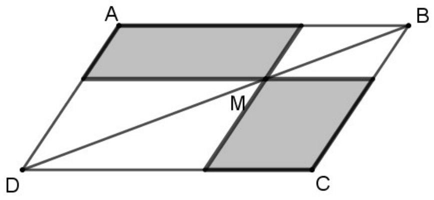
b) Quadrilatères et disque (l'aire est notée *S*)

5) Exercices d'application immédiate

Les énoncés des exercices qui suivent sont formulés de manières variées et certains comportent des unités tandis que d'autres sont plus généraux. Dans chaque cas, il s'agit de choisir et mettre en œuvre la(les) propriété(s) ou formule(s) à utiliser.

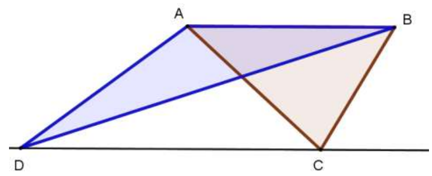
Exercice 1
ABCD est un parallélogramme.

1) Quelle propriété des aires permet d'affirmer que la diagonale [BD] partage le parallélogramme en deux triangles d'aires égales ?
2) Par un point M quelconque de la diagonale [BD], on trace les parallèles aux côtés. Démontrer que les deux quadrilatères grisés ont des aires égales.



Indications
1) L'aire est invariante par isométrie (2ème propriété des aires) : les deux triangles symétriques par rapport au centre du parallélogramme ont donc des aires égales.
2) D'après 1) les deux parallélogrammes blancs (côtés parallèles deux à deux) sont formés de deux triangles de même aire. On utilise la propriété d'additivité : l'aire du parallélogramme grisé de sommet A est égale à l'aire de ABD moins les aires des deux triangles blancs ; celle du parallélogramme grisé de sommet C est égale à l'aire de BCD moins les aires des deux triangles blancs. Comme les triangles ont deux à deux des aires égales, les deux quadrilatères grisés ont la même aire.

Exercice 2
Sur la figure, on a tracé deux triangles ABC et ABD tels que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
a) Lequel des deux triangles a la plus grande aire ?
b) Où placer le point E pour que l'aire du triangle ABE soit égale à celle de ABC ?



Indications
a) Les deux triangles ont même aire (même base AB et hauteurs égales car les droites sont parallèles)
b) h= hauteur de ABC=distance de C à (AB)
E étant un point quelconque du plan, la hauteur de ABE issue de E est égale à la distance d de E à la droite (AB).L'aire de ABE est égale à l'aire de ABC si et seulement si $\frac{1}{2}AB \times d = \frac{1}{2}AB \times h$*c'est-à-dire si et seulement si d=h ou encore si et seulement si E appartient soit à (DC), soit à la droite symétrique de (DC) par rapport à A (ou B) et qui est donc parallèle à (AB) et (DC).*
On dit que l'ensemble des points E tels que les aires des triangles ABC et ABE soient égales est formé de deux droites parallèles : la droite (BC) et la droite symétrique de (DC) par rapport à A.

Exercice 3
Un carré est inscrit dans un cercle de rayon 5cm : quelle est son aire ?

Indications : On peut par exemple, le découper en deux triangles rectangles isocèles de base 10 et de hauteur 5 donc 50cm².

Exercice 4
Si un disque a une aire 3 fois supérieure à celle d'un autre disque, quel est le rapport de leurs rayons ?

Indications : Leurs rayons sont dans un rapport $\sqrt{3}$ d'après la propriété d'homogénéité.

Exercice 5

Lequel des deux triangles a la plus grande aire, celui de côtés 5, 5,6 ou celui de côtés 5, 5,8 ?

Indications : La formule de Héron donne des aires égales à 12 pour les deux triangles.

Exercice 6

Calculer l'aire d'un triangle équilatéral de côté 5cm (valeur exacte) puis de côté *a* (*a* réel positif donné)

Indications : On utilise le théorème de Pythagore : la hauteur vaut $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ *d'oùles aires demandées :* $\frac{25\sqrt{3}}{4}cm^2$ *et* $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

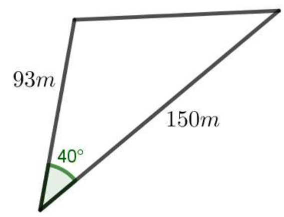
Exercice 7

a) Construire à la règle et au compas un hexagone régulier (ses côtés ont la même longueur et ses angles ont la même mesure) inscrit dans un cercle de rayon 5cm.
Calculer son aire (valeur exacte).
b) Un hexagone régulier est inscrit dans un cercle de rayon R. Ecrire son périmètre et son aire en fonction de R. (R est un réel positif)

Indications : On retrouve la construction qui consiste à reporter le rayon six fois à partir d'un point quelconque du cercle ; l'hexagone est formé de 6 triangles équilatéraux isométriques donc en utilisant la formule établie à l'exercice 6, son aire est $6 \times \frac{25\sqrt{3}}{4} = \frac{75\sqrt{3}}{2}$
b) Le périmètre est 6R et l'aire est $6 \times \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}R^2$

Exercice 8

Un terrain triangulaire est représenté ci-dessous ; en utilisant les mesures indiquées sur le schéma, donner une valeur arrondie de son aire au m² près.



Indications : L'aire vaut $\frac{1}{2} \times 93 \times 150 \times \sin(40°)$ *soit environ 4483m²*

Exercice 9

a) Calculer l'aire d'un triangle isocèle OAB tel que OA=OB=1m et $\widehat{AOB} = 30°$ (valeur exacte)
b) Plus généralement, OAB est un triangle isocèle en O ; on appelle *a* la longueur OA.
Exprimer l'aire du triangle OAB en fonction de *a* et de $\hat{O}$.

Indications
a) $\frac{1}{2} sin\,(30)$*=0,25*

b) ½ a²sin (Ô)

Exercice 10

Dans un rectangle, les diagonales mesurent 6cm et forment un angle de 45°. Calculer l'aire de ce rectangle (valeur exacte).

Indications : on ajoute les aires des 4 triangles formés par les diagonales (on rappelle que deux angles supplémentaires ont même sinus)

$$4 \times \frac{1}{2} \times 3 \times 3 \times \sin(45°) = 9\sqrt{2}$$

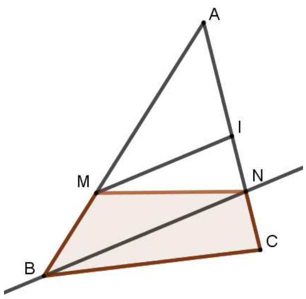
6) Autres exercices

Un certain nombre de comparaisons d'aires font l'objet des exercices suivants dans lesquels, le plus souvent, on ne donne ni les longueurs des segments ni les mesures des angles. On peut cependant mettre en œuvre dans les raisonnements des résultats vus précédemment.

Exercice 1 : Partager un jardin triangulaire en deux parcelles de même aire

Dans cet exercice, on utilise un fameux théorème suggéré par la figure ainsi que la formule vue précédemment (aire d'un triangle dont on connait les longueurs de deux côtés et l'angle délimité par ces deux côtés) afin d'estimer le rapport des aires de deux triangles.

ABC est un triangle, I est le milieu de [AC], M est un point de [AB] et N un point de [AC] tels que les droites (MI) et (BN) sont parallèles (cf. figure).Démontrer que le triangle AMN et le quadrilatère BMNC ont des aires égales.



Indications

L'aire de AMN est égale à $\frac{1}{2} AM \times AN \times \sin(\hat{A})$

Celle de ABC est $\frac{1}{2} AB \times AC \times \sin(\hat{A})$

Le théorème de Thalès permet d'écrire $\frac{AM}{AB} = \frac{AI}{AN}$

Par suite le rapport des aires des triangles AMN et ABC vaut

$$\frac{\frac{1}{2} AM \times AN \times \sin(\hat{A})}{\frac{1}{2} AB \times AC \times \sin(\hat{A})} = \frac{AM \times AN}{AB \times AC} = \frac{AI}{AN} \times \frac{AN}{AC} = \frac{AI}{AC} = \frac{1}{2}$$

L'aire de AMN est donc égale à la moitié de l'aire de ABC et donc égale à celle de MNBC.

Exercice 2 : Trouver le rapport des aires de deux triangles

Il s'agit d'un prolongement de l'exercice 1. On estime les rapports des aires de triangles grâce à la formule donnant l'aire d'un triangle dont on connait les longueurs de deux côtés et l'angle délimité par ces deux côtés. La propriété d'additivité permet d'arriver au résultat.

On place les points M, N et P respectivement sur les côtés [AB], [AC] et [BC] d'un triangle tels que M est le milieu de [AB], $\text{AN} = \frac{1}{3}\text{AC}$ et $\text{BP} = \frac{3}{4}\text{BC}$. Démontrer que l'aire du triangle MNP est égale à $\frac{7}{24}$ de l'aire du triangle ABC.

Indications
Comme dans l'exercice 1 $\frac{aire(AMN)}{aire\ (ABC)} = \frac{AM \times AN}{AB \times AC} = \frac{AM}{AB} \times \frac{AN}{AC} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$
$\frac{aire(BMP)}{aire\ (BAC)} = \frac{BM}{BA} \times \frac{BP}{BC} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$ *et* $\frac{aire(CNP)}{aire\ (ABC)} = \frac{CN \times CP}{CA \times CB} = \frac{CN}{CA} \times \frac{CP}{CB} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$
Par additivité, l'aire de MNP est donc égale à $1 - \left(\frac{1}{6} + \frac{3}{8} + \frac{1}{6}\right)$ *de l'aire de ABC, soit* $\frac{7}{24}$ *de l'aire de ABC.*

Exercice 3 : Partager un triangle en triangles d'aires égales.

Dans cet exercice où aucune mesure n'est donnée, on raisonne en toute généralité ; on partage un triangle en deux puis trois triangles dont les aires sont égales. On retrouve une propriété importante caractérisant les points qui sont sur une médiane d'un triangle, droite qui joint un sommet au milieu du côté opposé. La formule de l'aire d'un triangle $\frac{1}{2} base \times hauteur$ est utile pour comparer des aires.

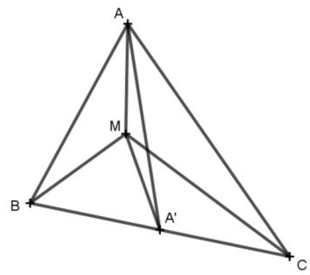
Soit ABC un triangle. On appelle A' le milieu du segment [BC].
1) Démontrer que les triangles AA'B et AA'C ont des aires égales.
2) Soit M un point quelconque du segment [AA'] ; démontrer que les triangles AMB et AMC ont des aires égales. Est-ce toujours le cas si M est un point quelconque de la droite (AA') ?
3) Réciproquement, démontrer que si un point M intérieur au triangle vérifie l'égalité aire(AMB)=aire(AMC), alors ce point appartient au segment [AA']. En déduire l'ensemble des points M intérieurs au triangle et tels que aire(AMB)=aire(AMC).
4) On appelle B' le milieu de [AC] et C' le milieu de [AB]. On sait que les médianes (AA'), (BB') et (CC') du triangle ABC sont concourantes en un point qu'on appelle G[7].

a) Démontrer que les triangles AGB, BGC et CGA ont des aires égales.
b) Démontrer que le seul point M intérieur au triangle ABC qui vérifie aire(AMB)=aire(BMC)=aire(CMA) est le point G.
c) Application : construire un triangle dont les côtés mesurent respectivement 4, 6 et 8cm et le partager en trois triangles de même aire.

Indications :
1) Les deux triangles ont même hauteur et des bases de même mesure (BA'=A'B) donc leurs aires sont égales.

[7] G s'appelle le centre de gravité du triangle

2) D'après 1) aire (AA'B)=aire (AA'C) et aire (MBA')=aire (MCA') donc par différence aire(AMB)=aire(AMC). Par un raisonnement analogue, on prouve que c'est encore vrai lorsque M est sur la droite (AA') sans être sur le segment [AA'].



3) Supposons que M, placé comme sur la figure, vérifie : aire(AMB)=aire(AMC). On a d'après 1) aire (MBA')=aire (MCA') donc aire(AMB) +aire (MBA')=aire(AMC) +aire (MCA')= 1/2aire(ABC)=aire (ABA')
On en déduit que l'aire de AMA' est nulle et donc que M est sur [AA'].
Remarque : on peut aussi appeler A'' le point d'intersection de (AM) et (BC) et démontrer que A'' est le milieu de [BC]
Même raisonnement dans les autres cas de figure.
L'ensemble cherché est le segment [AA'].

4) a) G est sur (AA') donc d'après la question 2) aire (AGB)=aire(AGC)
G est sur (BB') donc aire (AGB)=aire(BGC) ; G est sur (CC') donc aire (BGC)=aire(CGA)
On en déduit les égalités aire(AGB)=aire(BGC)=aire(CGA)=1/3aire(ABC)
b) On utilise la question 3)

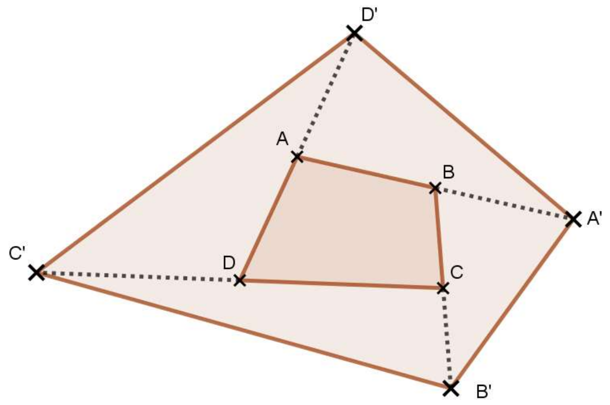
Exercice 4 : Comparer des aires de triangles

Toujours sans donner de mesures, on compare l'aire d'un triangle (question 1) ou d'un quadrilatère (question 2) à celle de la figure obtenue en construisant des symétriques des sommets par rapport à d'autres sommets.
On peut utiliser les résultats de l'exercice 3 et s'aider d'un logiciel de géométrie pour réaliser les figures et faire des conjectures. Il y a d'autres méthodes (par exemple vectorielle) pour résoudre cet exercice.

1) ABC est un triangle quelconque. On appelle A' le symétrique de A par rapport à B, B' le symétrique de B par rapport à C et C' le symétrique de C par rapport à A.
Réaliser la figure et démontrer que l'aire du triangle A'B'C' est égale à 7 fois l'aire du triangle ABC.
2) ABCD est un quadrilatère quelconque. On appelle A' le symétrique de A par rapport à B, B' le symétrique de B par rapport à C, C' le symétrique de C par rapport à D et D' le symétrique de D par rapport à A. Comparer les aires des quadrilatères ABCD et A'B'C'D'.

Indications :
1) D'après l'exercice 3
A est le milieu de [CC'] donc aire(ABC)=aire (ABC') et aire (AB'C)=aire (AB'C')
B est le milieu de [AA'] donc aire(ABC)=aire (A'BC) et aire (ABC')=aire (A'BC')
C est le milieu de [BB'] donc aire(ABC)=aire (AB'C) et aire (A'BC)=aire (A'B'C)
On en déduit que tous les triangles de la figure ont la même aire, celle du triangle ABC d'où le résultat.

2) On procède comme dans 1) en découpant ABCD en deux triangles de deux façons :



1ère façon :
On note $\mathcal{A}$ l'aire de ABD égale à l'aire de AD'B et à l'aire de A'BD
On note $\mathcal{B}$ l'aire de BCD égale à l'aire de B'CD et à l'aire de B'C'D
Aire(ABCD)=$\mathcal{A}+\mathcal{B}$ et aire (AA'D')=2$\mathcal{A}$ et aire (CC'B')=2$\mathcal{B}$ donc aire (AA'D) +aire (CC'B)=2aire(ABCD)

2ème façon :
On note α l'aire de ABC égale à l'aire de BCA' et à l'aire de CB'A'
On note β l'aire de ACD égale à l'aire de ADC' égale à l'aire de AC'D'
Aire (A'BB') +aire (C'DD')=2 $\alpha+2\beta=2(\alpha+\beta)$ =2aire(ABCD)
On en déduit que l'aire de A'B'C'D' est égale à 5 fois celle de ABCD, ce que l'on peut vérifier aisément avec un logiciel de géométrie.

Exercice 5 : des constructions à la règle (non graduée) et au compas

Pour les Grecs, règle et compas correspondent à droite et cercle qui sont les figures fondamentales à partir desquelles on construit toutes les autres. C'est pourquoi on trouve fréquemment en géométrie grecque de telles constructions. Dans cet exercice, aucune indication n'est donnée. Il faut donc parfois prendre l'initiative de nommer les côtés pour retrouver un théorème utile.

a) Construire un carré d'aire double de celle d'un carré donné.
b) Construire un carré d'aire égale à la somme des aires de deux carrés donnés.
c) Construire un triangle équilatéral d'aire égale à la somme des aires de deux triangles équilatéraux donnés. On rappelle que l'aire d'un triangle équilatéral de côté a est égale à $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

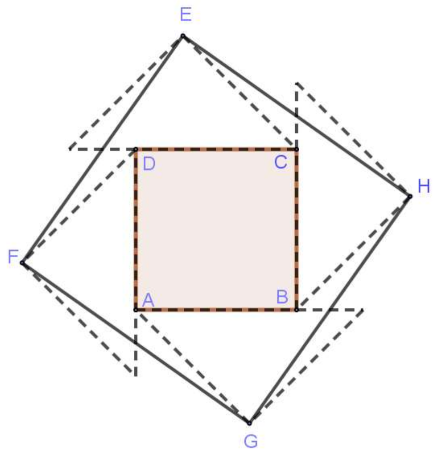
Indications :
a) On construit un carré ayant pour côté une diagonale du carré initial (on peut aussi procéder par découpage et recollement à partir de deux carrés de même aire)

b) Si on note a et b les longueurs des côtés des deux carrés donnés, le problème revient à construire un carré de côté c tel que $c^2=a^2+b^2$, ce qui fait penser au théorème de Pythagore : on construit donc un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit ont pour longueurs a et b. Il suffit alors de construire un carré qui a pour côté l'hypoténuse de ce triangle.

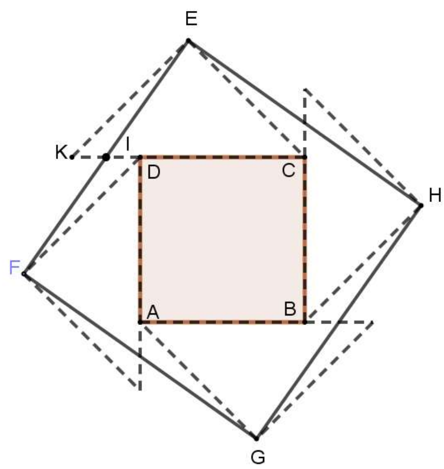
c) même méthode que b)

Exercice 6

Au début du 9ème siècle, les savants arabes développent les calculs d'aires, sans doute à cause de problèmes d'arpentage ou d'architecture. L'exercice ci-dessous montre le type de justification que l'on pouvait trouver : ce n'est pas une « démonstration » comme on l'entend aujourd'hui.



Pour construire un carré EFGH trois fois plus grand qu'un carré ABCD donné, Abu-l'Wafa utilise trois petits carrés : il en découpe deux suivant leur diagonale et les accole aux côtés du troisième. En reliant les sommets E, F, G, H, il obtient un carré dont l'aire est égale au triple de l'aire de ABCD ; il justifie sa construction en expliquant que les petits triangles qui dépassent le carré EFGH sont égaux aux petits triangles situés à l'intérieur de ce carré. Démontrer le résultat énoncé en utilisant les outils mathématiques à votre disposition.



<u>Indications</u> :

1ère méthode (« à l'ancienne »)

Soit I le point d'intersection de [FE] et [KC]

Les angles $\widehat{EKI}$ et $\widehat{IDF}$ sont en position d'angles alternes-internes et $\widehat{EKI} = \widehat{IDF} = 45°$ donc (EK) et (DF) sont parallèles ; on en déduit $\widehat{KEI} = \widehat{IFD}$ et comme EK=FD par construction, les triangles EKI et IDF sont égaux (un côté égal entre deux angles égaux). On a démontré que « les petits triangles qui dépassent le carré EFGH sont égaux aux petits triangles situés à l'intérieur ».On vérifie alors aisément que EFGH est un carré en utilisant les 8 triangles égaux (il a ses côtés de même longueur et un angle droit par exemple) et par découpage et recollement, l'aire de EFGH est bien égale à 3 fois celle de ABCD

2ème méthode (analytique)

On peut aussi utiliser par exemple un repère orthonormé d'origine A, l'unité étant AB. On démontre d'abord que EFGH est bien un carré puis on calcule son aire.

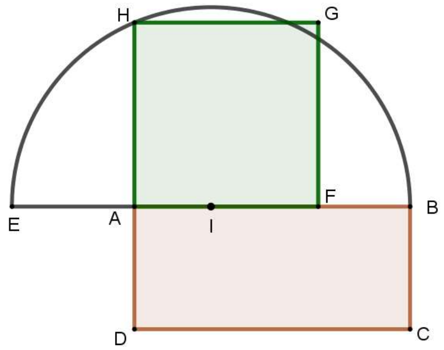
La diagonale du petit carré de côté 1 vaut $\sqrt{2}$ donc la distance de E à la droite (DC) est égale à $\frac{\sqrt{2}}{2}$. D'où $E\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2};1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $F\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $G\left(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $H\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

On en déduit les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{FE}(1;\sqrt{2})$ et $\overrightarrow{GH}(1;\sqrt{2})$; ils sont égaux donc EFGH est un parallélogramme. Le produit scalaire de $\overrightarrow{FE}(1;\sqrt{2})$ par $\overrightarrow{FG}(\sqrt{2};-1)$ est égal à $1\times\sqrt{2}-1\times\sqrt{2}=0$ donc EFGH a un angle droit. De plus FE=FG=$\sqrt{3}$. Ainsi EFGH est bien un carré et son aire est égale à $\left(\sqrt{3}\right)^2=3$ c'est-à-dire trois fois celle du carré ABCD.

Remarque : On peut aussi penser à des rotations d'angle 90° et dont le centre est celui du carré ABCD.

Exercice 7 : Quadrature du rectangle

Plusieurs problèmes sont laissés en suspens par les Grecs, en particulier celui de la quadrature du cercle : réaliser la quadrature du cercle, c'est construire à la règle et au compas un carré de même aire qu'un disque donné. Longtemps après les Grecs, on a montré que ce problème est impossible[8]. D'autres quadratures ont été développées en géométrie grecque. Il s'agit ici de valider la construction à la règle non graduée et au compas d'un carré qui a la même aire qu'un rectangle donné.



Une agricultrice possède un terrain rectangulaire ABCD représenté sur la figure (AB>AD). A cause d'un glissement de terrain, elle doit l'échanger contre un terrain carré AFGH qui aura exactement la même aire (F devra appartenir au segment [AB] comme sur la figure).
Ne disposant que d'une longue corde et de piquets, elle trace [AE] tel que B, A, E sont alignés dans cet ordre et AE=AD. Elle trace ensuite un demi-cercle de diamètre [EB] à l'extérieur de son terrain (on appelle I son centre) et elle plante un piquet en H, point d'intersection du demi-cercle et de la droite (AD). Elle prétend alors que le carré AHGF, construit à partir de [AH] a exactement la même aire que ABCD.
Vérifions qu'elle a raison.
1) Démontrer que l'aire du nouveau terrain est égale à la différence IH^2-IA^2.
2) En remarquant que IH et IE sont deux rayons du demi-cercle, démontrer que l'aire de AHGF est bien égale à celle de ABCD.

Indications
1) D'après le théorème de Pythagore, on a $AH^2=HI^2-AI^2$

2) Comme HI=EI=IB (rayons du demi-cercle),
$AH^2 = EI^2 - AI^2 = (EI - AI)(EI + AI) = EA(IB + AI) = EA \times AB = AD \times AB$
qui est l'aire du rectangle ABCD.

Exercice 8 : Aire d'un quadrilatère convexe
On établit une formule permettant de déterminer l'aire d'un quadrilatère convexe lorsqu'on connait les longueurs de ses diagonales et un des angles qu'elles forment. On l'applique ensuite dans un cas particulier.

1) Soit ABCD un quadrilatère convexe et O le point d'intersection de ses diagonales. On note α la mesure de l'un des angles de sommet O formés par les diagonales. Démontrer que l'aire du quadrilatère ABCD est égale à $\frac{1}{2}AC \times BD \times \sin(\alpha)$

[8]La réponse à ce problème géométrique vint de l'algèbre en considérant les nombres constructibles à la règle et au compas plutôt que les points, c'est-à-dire les distances entre les points constructibles. Pierre-Laurent Wantzel (1814 - 1848) montra que ces nombres sont racines d'équations algébriques à coefficients entiers. Ferdinand von Lindemann (1852 - 1939) conclut en montrant que Π n'était pas algébrique (c'est-à-dire qu'il est transcendant) ce qui mit un terme à la quête de la quadrature du cercle.

2) Un champ a la forme d'un quadrilatère convexe ABCD ; ses diagonales se coupent en O et on sait que : AB= 400m, AC= 300m, AD= 150m, $\widehat{DAB} = 90°$ et $\widehat{AOB} = 115°$.
Calculer son aire, arrondie au m². (On admet qu'on pourrait construire un tel quadrilatère, c'est-à-dire que les données sont compatibles)

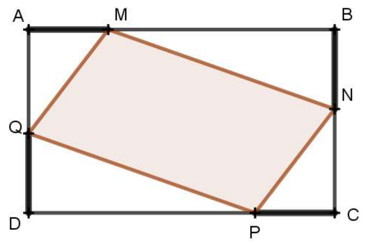
Indications
1) Soit α la mesure de $\widehat{AOB}$: on utilise la formule donnant l'aire d'un triangle connaissant deux côtés et l'angle délimité par ces côtés pour chacun des 4 triangles AOB, BOC… en se souvenant que deux angles supplémentaires ont le même sinus. On fait ensuite la somme et on obtient
$\frac{1}{2}\sin(\alpha)\,(OA \times OB + OB \times OC + OC \times OD + OD \times OA)$ *Il reste à factoriser*
$\frac{1}{2}\sin(\alpha)\,(OA + OC)(OB + OD) = \frac{1}{2}AC \times BD \times \sin(\alpha)$

2) On utilise le théorème de Pythagore : $BD = 50\sqrt{73}$ donc en appliquant la formule vue en 1) l'aire de ABCD vaut environ 58076m².

Exercice 9 : aire minimale
Il semblerait que le problème le plus ancien qu'on peut rattacher au calcul des variations soit le problème de la reine Didon que l'on retrouvera en introduction de la partie B : limiter au moyen d'une corde de longueur donnée posée à terre, une pièce de terrain renfermant la plus grande aire possible. Les exercices 8 et 9 mobilisent des outils plus récents (calculs algébriques et surtout dérivation) pour déterminer la valeur minimale ou maximale d'une aire.

Soit ABCD un rectangle tel que AB=5cm et BC=3cm. On place les points M sur [AB], N sur [BC], P sur [CD] et Q sur [DA] tels que AM=BN=CP=DQ.
Déterminer la position de M sur [AB] pour laquelle l'aire de MNPQ est minimale et calculer cette aire minimale.
Aide : on peut appeler x la longueur AM et exprimer l'aire de MNPQ en fonction de x.

Indications : L'aire de MNPQ est égale à la différence entre l'aire du rectangle et la somme des aires des 4 triangles,
$\mathcal{A}(x) = 15 - x(3 - x) - x(5 - x) = 15 - 8x + 2x^2$
où x est un réel de [0 ; 3]
La fonction $\mathcal{A}$ admet un minimum égal à 7 pour $x = 2$ donc l'aire de MNPQ est minimale lorsque M est à 2cm de A ; elle vaut alors 7cm².



Exercice 10 : aire maximale
Une plaque métallique a la forme d'un secteur circulaire de centre O ; on note x le rayon OA,α la mesure en radians de l'angle $\widehat{AOB}$ et p le périmètre de la plaque.
Parmi les plaques de périmètre p donné, quelle est celle dont l'aire est maximale ? Préciser la valeur de α correspondante.

Indications : La longueur de l'arc AB et l'aire de la plaque sont proportionnels à α
$p = \alpha x + 2x$ *donc* $\alpha = \frac{p-2x}{x}$.

L'aire vaut $\frac{1}{2}\alpha x^2 = \frac{1}{2}x(p-2x) = f(x)$
Une étude rapide de la fonction f ainsi définie montre qu'elle admet un maximum égal à $\frac{p^2}{16}$ *pour* $x = \frac{p}{4}$ *donc il faut choisir un rayon égal à* $\frac{p}{4}$.. α *est alors égal à 2 radians.*

II - Aire du disque et approximations de π

Dans cette partie, on examine différentes méthodes, en particulier celles d'Archimède, qui ont permis de déterminer l'aire d'un disque et d'approcher le nombre π, toujours sans utiliser le calcul intégral.
Certaines parties ne sont pas présentées comme des exercices.

Dès l'Antiquité, on découvre que le rapport entre la circonférence d'un cercle et son diamètre est constant[9]. Euler en 1748 a donné un nom à ce rapport : c'est le célèbre nombre π. Ainsi, pour tout cercle, on a ***par définition*** la relation $\pi = \frac{P}{d}$ où $d$désigne le diamètre de ce cercle et P sa longueur (P s'appelle aussi circonférence du cercle ou périmètre du disque). On peut encore s'écrire$P = 2\pi R$ où R désigne le rayon du cercle.
Et pour l'aire du disque ? Est-ce le même nombre π que l'on va retrouver dans la formule ? Peut-on le prouver ?

Introduction : Le problème de la reine Didon[10]
Selon la légende, au 9è siècle avant Jésus-Christ, Didon (ou) est une princesse phénicienne, fille du roi de Tyr (dans l'actuel Liban). Son accès au trône est entravé par son frère Pygmalion qui devient roi, et assassine son mari. Pour éviter probablement une guerre civile, Didon quitte Tyr avec une suite nombreuse ; elle débarque en Afrique du Nord, à Byrsa (nom qui signifie « la peau de bœuf ») près de la ville actuelle de Tunis où elle souhaite fonder une nouvelle capitale pour le peuple phénicien, laquelle s'appellera Carthage. On lui concède des terres pour s'établir « autant qu'il en pourrait tenir dans la peau d'un bœuf ». Elle fait alors découper une peau de bœuf en lanières extrêmement fines, qui mises bout à bout lui permettent de délimiter un espace bien plus vaste que ce qu'avait imaginé le seigneur local…

Le mythe de Didon a été repris par Virgile dans son œuvre, l'*Énéide*. Il a également fait l'objet de nombreuses utilisations dans les autres arts : en musique, en peinture, en sculpture, etc.

Ci-contre : *Didon construisant Carthage*, par William Turner, 1815.

Le problème

---

[9] D'après https://blog.maths-en-vrac.fr/2018/07/30/laire-dun-disque-facon-archimede/

[10] D'après Wikipédia

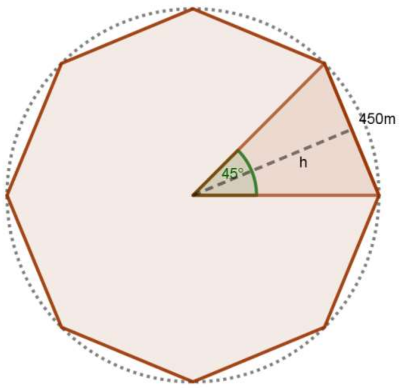
Il s'agit de délimiter un terrain dont l'aire est la plus grande possible avec une corde de longueur donnée, c'est-à-dire de trouver une figure géométrique de périmètre donné et d'aire maximale. On parle aussi de problème isopérimétrique.

On va supposer ici que la lanière obtenue mesure 3600m (la légende parle de près de 4 km). Les résultats pourront être arrondis au m².
1) Imaginons que Didon envisage dans un premier temps un terrain rectangulaire : parmi tous les rectangles de périmètre 3600m, quelles sont les dimensions de celui qui a la plus grande aire ?
2) Si Didon envisage ensuite un hexagone régulier de périmètre 3600m, quelle sera son aire ? Est-elle supérieure à l'aire obtenue à la question précédente ?
3) Mêmes questions avec un octogone régulier puis avec un dodécagone régulier (12 côtés).
4) On dit que Didon a choisi un terrain circulaire. Calculer l'aire du disque de périmètre 3600m et vérifier qu'elle a eu raison.

Remarque : On peut démontrer le résultat conjecturé ici : de toutes les figures planes de périmètre P, celle qui a la plus grande aire est le disque.

Indications

1) si a et b sont les dimensions du rectangle, 2(a+b)=3600 donc b=1800-a ; l'aire du rectangle vaut a (1800-a)=1800a-a². C'est une fonction du second degré en a, réel positif. Elle admet un maximum pour a=900. Dans ce cas b=900 donc celui qui a la plus grande aire est un carré d'aire 810000m²



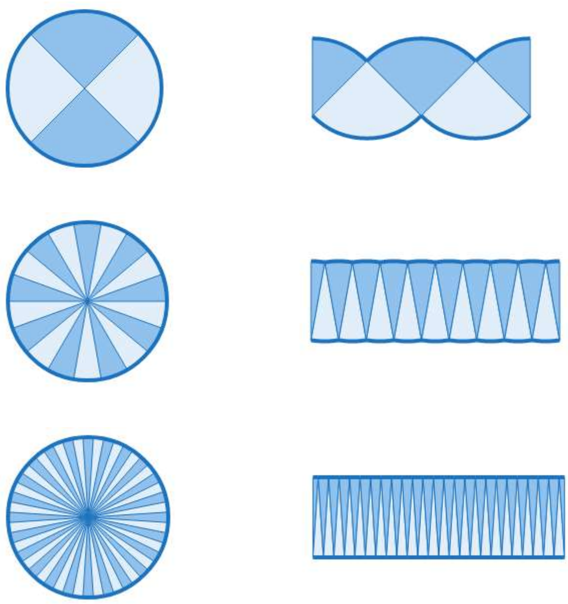
2) On sait que l'hexagone régulier peut être inscrit dans un cercle ; il est formé de 6 triangles équilatéraux de 600m de côté ; son aire $6 \times 600^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4}$ *(voirexercice 6)*
Soit environ 935307m² : elle est supérieure à celle obtenue en 1) comme on pouvait s'y attendre en observant la figure !

3) L'octogone est formé de 8 triangles isocèles d'angle au sommet $\frac{360}{12} = 45°$
Le côté opposé à cet angle mesure 3600/8=450m
On peut écrire la hauteur h en fonction de tan (22,5°) : $h = \frac{225}{tan\ (22{,}5)}$ *ce qui donne l'aire de l'octogone*
$8\left(\frac{1}{2} \times 450 \times \frac{225}{\tan(22{,}5)}\right) = 8 \times \frac{225^2}{\tan\ (22{,}5)}$ *Soit environ 977757m².*
De la même façon pour le dodécagone, on trouve une aire égale à $12 \times \frac{150^2}{\tan\ (15°)}$
La calculatrice donne environ 1 007 654 m²

4) Le rayon R d'un cercle de périmètre 3600m est $\frac{3600}{2\pi}$ *donc son aire est* $\pi R^2 = \frac{1800^2}{\pi}$ *environ 1 022 828m² ce qui correspond à la plus grande surface que l'on peut clore avec une lanière de 3600m.*

1) Aire du disque par découpage et recollement

C'est peut-être le scientifique grec Archimède qui aurait proposé une méthode approximative pour retrouver la formule de l'aire d'un disque qu'il découpe en plusieurs secteurs circulaires et qu'il réarrange de manière astucieuse, comme ci-dessous[11].



Plus le nombre de pièces augmente, plus la figure obtenue ressemble à un rectangle. Comme le disque et la figure sont formés des mêmes pièces, Archimède en conclut qu'ils ont la même aire.
En effet la largeur ℓ du rectangle est égale au rayon du disque et sa longueur L (traits épais de la figure) provient des bords courbes de chaque secteur angulaire. Lorsque le nombre de pièces devient très grand, on peut considérer que les deux longueurs du rectangle correspondent à la circonférence du disque initial donc $2L = 2\pi r$ ou $L = \pi r$. Ainsi, bien que ce ne soit qu'une approximation, on retrouve que l'aire du rectangle ou du disque est :
$A = \ell \times L = r \times \pi r = \pi r^2$

2) Aire du disque par la méthode d'exhaustion

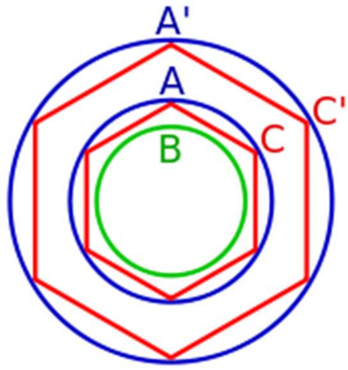
Dans leur recherche d'une unité de mesure commune à toutes les grandeurs, les géomètres grecs auraient pu considérer les grandeurs divisibles à l'infini (ce que l'on appelle aujourd'hui le calcul infinitésimal), mais l'idée d'infini les plongeait dans un profond désarroi. Si les spéculations sur l'infini allaient bon train, les Grecs ont toujours tenté dans leurs théories mathématiques de le contourner et de l'évacuer[12]. Cependant la théorie des proportions

[11] https://blog.maths-en-vrac.fr/2018/07/30/laire-dun-disque-facon-archimede/
[12] A. Dahan-Dalmedico et J. Peiffer, *Une histoire des mathématiques : Routes et dédales*, 1986.

d'Eudoxe de Cnide (né vers 408 avant J.-C) est à la base de la méthode d'exhaustion, qui permettra aux Grecs de résoudre des problèmes qui relèveront plus tard du calcul infinitésimal. Bien que lourde à mettre en œuvre, elle resta, dans son domaine, la seule méthode de démonstration considérée comme vraiment rigoureuse, pendant plusieurs siècles. Même l'apparition de la méthode des indivisibles, au début du XVII^e siècle, ne la rendit pas complètement obsolète. Elle fut cependant dépassée, quelques décennies plus tard, par les succès du calcul infinitésimal.

Euclide démontre avec cette méthode que l'aire d'un disque est proportionnelle au carré de son diamètre : en voici le principe.[13]

Il a déjà établi la propriété analogue suivante : pour deux polygones réguliers semblables (mêmes angles et côtés proportionnels) d'aires C et C' inscrits dans des cercles de diamètres respectifs D et D', on a : $\frac{C}{C'} = \frac{D^2}{D'^2}$.



Soit un disque de diamètre D et d'aire A, et un deuxième disque de diamètre D' et d'aire A'. Il s'agit à présent de montrer que

$\frac{A}{A'} = \frac{D^2}{D'^2}$(E)

On va raisonner par l'absurde en supposant l'égalité (E) fausse.

Alors on a, soit $\frac{A}{A'} > \frac{D^2}{D'^2}$, soit $\frac{A}{A'} < \frac{D^2}{D'^2}$

Supposons $\frac{A}{A'} > \frac{D^2}{D'^2}$ et considérons une aire B telle que $\frac{B}{A'} = \frac{D^2}{D'^2}$

On a alors $A > B$.

Inscrivons dans le disque d'aire A un polygone d'aire C tel que $A>C>B$ et dans le disque d'aire A' un polygone d'aire C' semblable au polygone d'aire C.

D'après la proposition ci-dessus montrée sur les polygones, on a $\frac{C}{C'} = \frac{D^2}{D'^2} = \frac{B}{A'}$. Or C<A' donc $\frac{B}{C'} > \frac{B}{A'}$ d'où $\frac{B}{C'} > \frac{C}{C'}$.

On en déduit $B > C$. Or on avait supposé $C > B$; on aboutit donc à une contradiction. On a raisonné par l'absurde et prouvé que notre hypothèse $\frac{A}{A'} > \frac{D^2}{D'^2}$ est fausse.

De la même manière, en supposant que $\frac{A}{A'} < \frac{D^2}{D'^2}$, on aboutit à une contradiction.

On a donc démontré l'égalité $\frac{A}{A'} = \frac{D^2}{D'^2}$

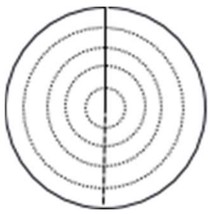
Archimède démontre ensuite par cette même méthode qu'un cercle délimite une aire égale à celle d'un triangle rectangle dont l'un des côtés adjacents à l'angle droit est égal au rayon de ce cercle, et l'autre est égal à la circonférence de celui-ci. Ceci établit que le rapport de l'aire d'un disque au carré du rayon est identique au rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre, résultat qui est à l'origine du nombre π.

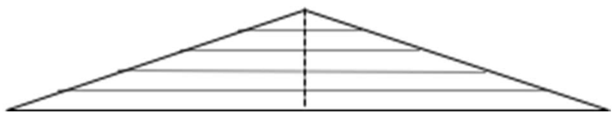
3) Aire du disque par la méthode des indivisibles.

[13] D'après Wikipédia

En géométrie, la **méthode des indivisibles** ou **principe de Cavalieri** est une méthode de calcul d'aires et de volumes développée par Bonaventura Cavalieri(1598-1647), puis par Gilles Personne de Roberval, Evangelista Torricelli et Blaise Pascal, plus efficace que la méthode d'exhaustion d'Archimède mais aussi plus risquée à appliquer.
Le principe est déjà énoncé par Liu Hui au III^e^ siècle.

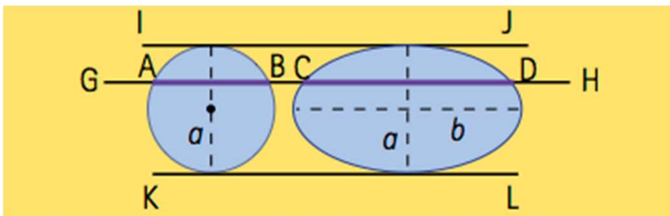
Cavalieri considère qu'une ligne est formée de points comme un collier de perles, qu'une surface est formée de lignes comme un tissu de fils et qu'un volume est constitué de plans comme un livre de pages : c'est ainsi qu'il caractérise les « indivisibles » qui sont les éléments infinitésimaux dont se composent lignes, surfaces et volumes.
Ainsi une surface est une juxtaposition de lignes *parallèles*. Pour Cavalieri, des lignes parallèles sont des segments de droites parallèles ou des arcs de cercles concentriques.[14]Chaque ligne est appelée un **indivisible** de la surface dont on cherche l'aire et si deux surfaces sont constituées de lignes de mêmes longueurs, alors leurs aires sont égales.





Le disque est constitué de cercles concentriques dont la longueur est $2\pi r$ où r varie de 0 à R.
Ces cercles sont les « indivisibles » du disque.
Un triangle de base $L = 2\pi R$ et de hauteur R est aussi constitué de lignes de longueur $2\pi r$ où r varie de 0 à R. Ces segments sont les indivisibles du triangle.
Ces deux surfaces ont des indivisibles de même longueur, elles ont donc même aire. L'aire du triangle est égale à $(2\pi R \times R)/2 = \pi R^2$ (base × hauteur / 2)
On retrouve ainsi que l'aire d'un disque de rayon R est égale à πR^2

Exercice
Kepler a utilisé cette méthode pour déterminer l'aire d'une ellipse dont la demi-longueur du grand axe est b et dont la demi-longueur du petit axe est a. Il compare les sections de cette ellipse à celles d'un cercle de rayon a. Dans la figure suivante, le cercle et l'ellipse sont deux figures planes comprises entre deux droites parallèles(IJ) et (KL).[15]



Il considère que l'ellipse est obtenue à partir du cercle par un « étirement horizontal » d'un facteur$\frac{b}{a}$, (autrement dit chaque indivisible [AB] du cercle parallèle à (IJ) est transformé en un segment [CD] joignant deux points de l'ellipse et de longueur $AB \times \frac{b}{a}$)
Cette caractéristique étant vraie pour tous les segments, quelle est la formule obtenue pour l'aire de l'ellipse ?

---

[14] D'après Wikipedia
[15] http://accromath

Indications : il trouve que l'aire de l'ellipse est égale au produit de l'aire du disque par $\frac{b}{a}$. Il obtient pour l'aire de l'ellipse $\frac{b}{a} \times \pi a^2 = \pi ab$.

4) Aire du disque par encadrement et valeurs approchées de π

Si l'on trouve déjà des calculs de valeurs approchées de π dans des tablettes babyloniennes 2000 ans av. J.-C., le mathématicien Archimède est le premier à décrire une méthode qui permet (en théorie) d'obtenir autant de décimales de π que l'on souhaite, au III^e siècle av. J.-C. Dans son traité "De la mesure du cercle", il commence par démontrer que l'aire du disque est égale à l'aire du triangle ayant pour base la circonférence du cercle et pour hauteur son diamètre, comme on l'a vu précédemment. Pour trouver la valeur de la circonférence, il inscrit dans le cercle des polygones réguliers à un nombre croissant de côtés et calcule leurs périmètres. Il utilise également les polygones réguliers circonscrits et obtient ainsi, avec deux polygones à 96 côtés, l'encadrement suivant :

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}.$$

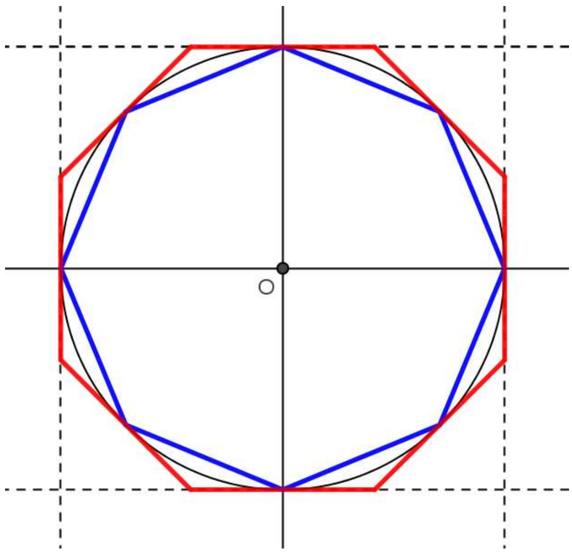
Ce calcul absolument sidérant fut mené en utilisant une numération additive comme les Romains, sans aucune notation algébrique, ni connaissance de la trigonométrie, et avec la seule géométrie d'Euclide.

Le problème suivant s'inspire de la méthode d'Archimède mais cette fois, on cherche à encadrer l'aire du disque de rayon 1 par les aires des polygones réguliers à 2^n côtés (n est un entier supérieur ou égal à 2) inscrits et circonscrits. [16]
On pourra utiliser un logiciel de géométrie.
Remarque : Les mesures des angles sont en radians (180°=π radians), c'est-à-dire exprimées en fonction de π, ce qui peut paraitre curieux, étant donné qu'on cherche justement une valeur approchée de π ! Mais cette façon est plus commode pour écrire les mesures des angles.

1) Dans le cas n=2, on note P_4 le carré inscrit dans le disque($2^2 = 4$) (ses sommets sont sur le cercle) et Q_4 le carré circonscrit (ses côtés sont tangents au cercle). Faire une figure et en déduire un premier encadrement de π.

[16] D'après Article REPERES - IREM. N° 54 - janvier 2004 PROBLEMES D'INTRODUCTION ET AUTRES PROBLEMES DE RECHERCHE AU LYCEE. Auteurs : Robert. Rogalski

2) Dans le cas n=3, on construit le polygone régulier à 8 côtés ou octogone P_8 inscrit dans le disque de rayon 1(en bleu sur la figure), de telle façon que les sommets de P_4 sont des sommets de P_8 et P_4 est inclus dans P_8.
On construit également l'octogone régulier Q_8 (en rouge) tel que ses côtés sont tangents au cercle de rayon 1 en leurs milieux qui sont les sommets de P_8 et Q_8 est inclus dansQ_4.
Démontrer que l'aire de P_8 est égale à $4\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$et que l'aire de Q_8 est égale à $8\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$. En arrondissant les résultats au centième, donner un nouvel encadrement de π.

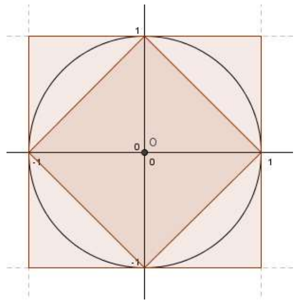


3) Pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on pose $N = 2^n$, et on note (P_N) la suite des polygones réguliers à N côtés inscrits dans le disque de rayon 1 (les sommets de P_N sont des sommets de P_{2N} et $P_N \subset P_{2N}$). On note aussi (Q_N) la suite des polygones réguliers à N côtés dont les côtés sont tangents au cercle de rayon 1 en leurs milieux, sommets de P_N . On a donc $Q_{2N} \subset Q_N$.

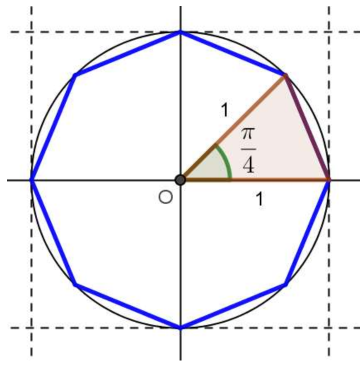
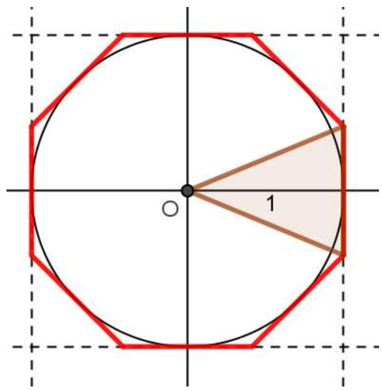
a) En procédant comme à la question 2, déterminer en fonction de N l'aire des polygones P_N et Q_N.
b) En utilisant la relation $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$, vérifier que l'aire de P_N , notée a_n est égale à $2^n \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$ et démontrer que l'aire de Q_N notée b_n est égale à $2^n \tan\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$
c) On a ainsi défini deux suites de nombres réels (a_n) et (b_n). Calculer a_n et b_n pour n=3 et n=4. Quel nouvel encadrement de π peut-on écrire ? On donnera des valeurs approchées au centième.
d) Comparer a_3 et a_4 ainsi que b_3 et b_4. Déterminer sans calcul, le sens de variation de chacune des suites (a_n) et (b_n).

4) Les deux suites (a_n) et (b_n)définies à la question 3) sont dites adjacentes : cela signifie que l'une,(a_n) est croissante, l'autre,(b_n) décroissante et que la différence $b_n - a_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, ce que l'on admet ici. On peut alors démontrer qu'elles ont toutes les deux la même limite (admis également) : cette limite est égale à l'aire du disque de rayon 1, c'est-à-dire à π.
En utilisant la calculatrice, déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle on obtient un encadrement de π d'amplitude 10^{-2} ; préciser le nombre de côtés des polygones dans ce cas.

<u>Indications</u>
1) L'aire du disque $\pi \times 1^2$ *est comprise entre les aires des carrés. On trouve 2< π<4*



2)

P_8 *est formé de 8 triangles isocèles ; chacun d'eux a pour aire (voir formule triangle dont on connait deux côtés et un angle)* $\frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ *donc* $aire(P_8) = 4\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2} \approx 2{,}82$ *en arrondissant au centième par défaut.*	
Q_8 *est formé de 8 triangles isocèles de même aire ; leur hauteur vaut 1 et leur base* $2tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$*donc leur aire est égale à* $tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$ *et* $aire(Q_8) = 8\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) \approx 3{,}31$ *en arrondissant au centième par excès.*	

On obtient l'encadrement $2{,}82 < \pi < 3{,}31$

3) On généralise ce qu'on a fait dans la question 2.

a) On a N triangles isocèles isométriques donc l'aire de P_N est $N \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin\left(\frac{2\pi}{N}\right) = \frac{N}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{N}\right)$ *; de même pour Q_N, on a N triangles isocèles de hauteur 1 et de base* $2\tan\left(\frac{\pi}{N}\right)$ *donc l'aire de Q_N est* $Ntan\left(\frac{\pi}{N}\right)$

b) on remplace N par 2^n *et on utilise la formule*
$a_n = \frac{2^n}{2}\sin\left(2 \times \frac{\pi}{2^n}\right) = 2^n\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$*et* $b_n = 2^n\tan\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$

c) Pour n=3, N=8 on retrouve les valeurs calculées à la question 2).
Pour n=4, on obtient $3{,}06 < \pi < 3{,}18$

d) a_3 *est l'aire de* P_8 *et* a_4 *est l'aire de* P_{16} *: par construction* $a_3 < a_4$

b_3 est l'aire de Q_8 et b_4 est l'aire de Q_{16} : par construction $b_3 > b_4$.
Plus généralement $P_N \subset P_{2N}$ donc $a_n < a_{n+1}$ $(2N = 2 \times 2^n = 2^{n+1})$
Et $Q_{2N} \subset Q_N$ donc $b_{n+1} < b_n$
La suite (a_n) *est croissante et la suite* (b_n)*est décroissante*

4) On peut procéder par essais n=5 donne l'encadrement $3{,}12 < \pi < 3{,}16$ *;*
n=6 donne $3{,}13 < \pi < 3{,}15$ *;*
n=7 donne $3{,}23 < \pi < 3{,}25$ *;*
n=8 donne $3{,}14 < \pi < 3{,}15$ *pour un polygone à 128 côtés.*

Partie B - Méthodes historiques d'approximation des aires

Nous illustrons dans ce qui suit des méthodes particulières, utilisées avant d'avoir le calcul intégral, pour calculer des aires sous la parabole et l'hyperbole. *A priori* on parle de quadrature d'une surface lorsqu'on trouve un carré d'aire égale à celle de la surface, ce qui permet d'en calculer directement l'aire. Ainsi la quadrature du cercle est impossible (voir A II). Ici il faut cependant prendre quadrature dans un sens un peu plus général, de calcul d'aire se ramenant à des surfaces élémentaires connues formées de carrés, rectangles, triangles ou trapèzes.

I - Quadrature[17] de la parabole selon Archimède

Références historiques : Archimède

Archimède est né vers 287 av J-C à Syracuse. Très peu de sources donnent des informations sur sa vie, seuls quelques épisodes sont racontés par Plutarque, écrivain grec très postérieur au scientifique. On pense qu'il étudia quelques années en Egypte, à Alexandrie, auprès des successeurs d'Euclide.

Avant tout, Archimède excelle en géométrie, où il invente des méthodes d'avant-garde. Il calcule notamment la longueur du cercle en l'approchant par des polygones réguliers inscrits et exinscrits.

Le traité de La quadrature de la parabole (de titre apocryphe) indique la méthode utilisée. "Je ne sache pas qu'il se soit encore trouvé une seule personne qui ait cherché à quarrer la surface comprise sous une droite et une section de cône rectangle (parabole); ce que nous avons certainement fait aujourd'hui. car nous démontrons qu'un segment quelconque compris par une droite et par une section de cône rectangle est égal à quatre fois le tiers du triangle qui a la même base et la même hauteur que le segment... Tu verras comment il a été résolu d'abord par des considérations mécaniques et ensuite par des raisonnements géométriques".
Dans cette méthode Archimède utilise un levier fictif ayant un point fixe autour duquel sont opérées des pesées fictives de trapèzes et d'aires puis la méthode d'exhaustion.

Mise en œuvre de la méthode géométrique d'Archimède sur un cas particulier
L'exercice qui suit permet de calculer l'aire comprise entre une parabole particulière d'équation$y = x^2$ et une droite parallèle à l'axe des abscisses dans un repère orthonormé en l'approchant par des aires de polygones obtenus par juxtapositions de triangles.
Il permet de revoir l'équation d'une tangente à une courbe, le calcul des coordonnées de l'intersection de deux droites, la caractérisation de deux droites parallèles, de points alignés, le calcul de la somme des termes d'une suite géométrique, la méthode d'exhaustion.

[17]Quadrature : pour une surface donnée S, il s'agit de chercher un carré de même aire. L'idée est donc de déterminer l'aire de la surface S.

La quadrature de la parabole selon Archimède (librement adaptée de l'article de Daniel Perrin[18])

Théorème

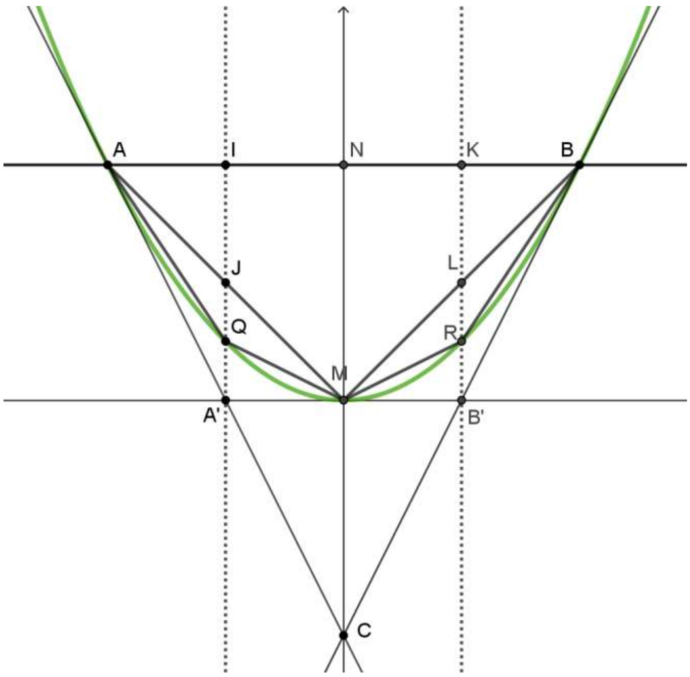
L'aire du secteur de parabole S limité par le segment [AB] et la parabole est égale à $\frac{2}{3} \times$ (Aire ABC)

Démonstration dans un cas particulier

On considère dans un repère la parabole P d'équation $y = x^2$ (Rappel : la figure est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées) et deux points A et B de P symétriques par rapport à l'axe des ordonnées d'abscisses respectives –a et a où a>0.

Les tangentes à P en A et B se coupent en C. M est le sommet de P, J et L sont les milieux respectifs des segments [AM] et [BM]. Les parallèles à l'axe des ordonnées passant par J et L coupent respectivement P en Q et R et les tangentes en A et B en A' et B'.

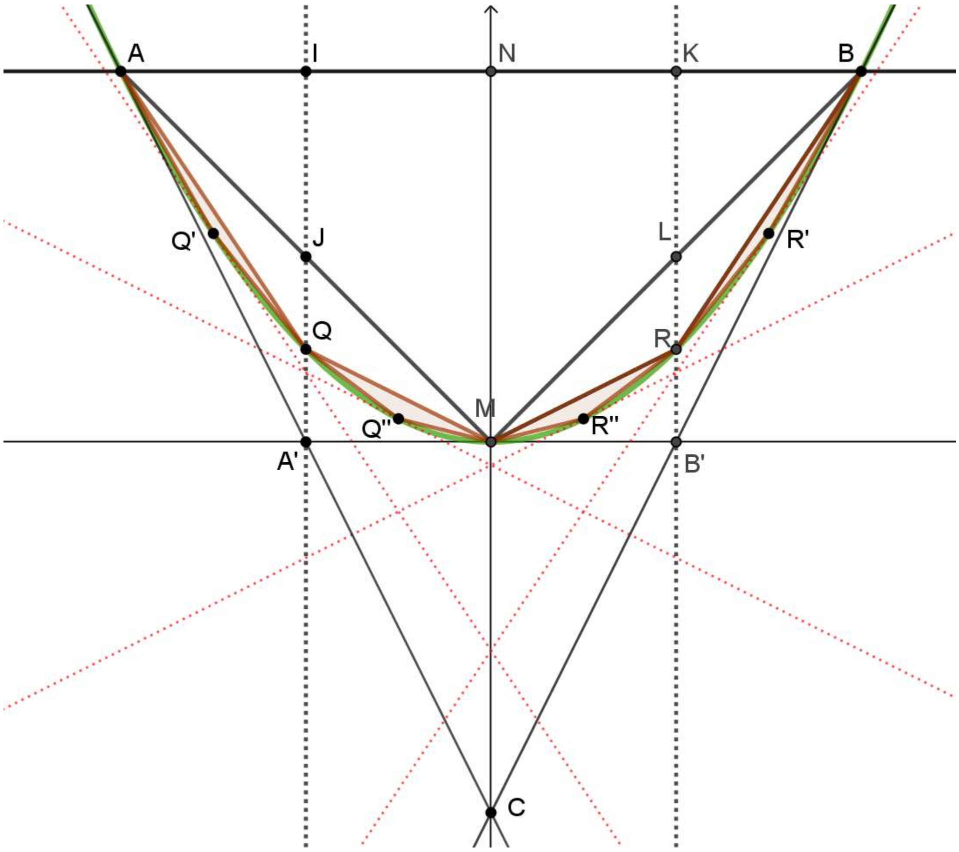
On pose T = Aire (ABM) et T'= Aire(ABC)



1) Démontrer que T'= 2T
2) Déterminer les coordonnées des points A', B', Q et R.
3) Démontrer que l'aire des triangles AQM et BRM est égale à $\frac{T}{8}$

   Dans les questions 4) et 5) il s'agit de comparer l'aire de S et celle du polygone AQMRB.
4) Justifier que Aire(S)≥ $T + \frac{T}{4}$
5) On introduit les points de la parabole situés au-dessous de la droite (AB) où les tangentes sont parallèles à (AQ), (QM), (MR) et (RB) et on ajoute les points obtenus (voir figure ci-dessous)

[18] Mathématiques d'école - Nombres mesures et géométrie- Daniel Perrin chez Cassini



Montrer que Aire(S) $\geq T + \frac{T}{4} + \frac{T}{16}$

6) a. On admet qu'en itérant le processus on montre que

Aire(S) $\geq T(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{4^n})$.

Justifier que Aire(S)$\geq \frac{4}{3}T$

b. Montrer que Aire(S)$\leq T' - \frac{T'}{4}$.

c. On introduit le polygone AA'MB'B à la place du précédent et on utilise le même procédé dans les triangles AA'M et BB'M puis en itérant la méthode on montre que

Aire(S) $\leq$T'$-\frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{4^n}\right)$.

Justifier que Aire(S) $\leq \frac{2}{3}T'$ou encore Aire(S) $\leq \frac{4}{3}T$

d. Que peut-on en déduire ?

Indications

1) *On démontre que* $T' = 2T$

$T = Aire\ (AMB) = a^3\ et\ T' = Aire(ABC) = 2a^3\ donc\ T' = 2T$

2) *et 3) On démontre que* $Aire\ (AQM) = Aire\ (BRM) = \frac{T}{8}$

L'équation de la tangente en B à P est $y = 2ax - a^2$, *elle coupe la parallèle à l'axe des ordonnées passant par* $L(\frac{a}{2}\,;\frac{a^2}{2})$ *en B'*$(\frac{a}{2}\,;0)$. *On démontre de même (ou par symétriepar rapport à l'axe des ordonnées) que les coordonnées de A' sont* $(-\frac{a}{2}\,;0)$

M est le milieu de [A' B']. On a $I(-\frac{a}{2}\,;a^2)$; $J(-\frac{a}{2}\,;\frac{a^2}{2})$; $Q(-\frac{a}{2}\,;\frac{a^2}{4})$

IJ=$\frac{a^2}{2}$ *; JQ=*$\frac{a^2}{4}$ *donc IJ=2JQ*

Aire (AQM)=Aire(AJQ)+Aire(QJM)= $\frac{JQ\times AI}{2}+\frac{A\prime M\times JQ}{2}=\frac{\frac{a}{2}\times\frac{a^2}{4}}{2}+\frac{\frac{a}{2}\times\frac{a^2}{4}}{2}=\frac{a^3}{8}=\frac{T}{8}$

Par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, l'aire du triangle BRM est égale à $\frac{T}{8}$

4) *On démontre que Aire(S)≥ T+*$\frac{T}{4}$

On calcule l'aire du polygone AQMRB.

Elle est égale à Aire (AQM)+Aire(BRM)+Aire(AMB).

D'où Aire(AQMRB)=T+$\frac{T}{4}$*. Le polygone AQMRB est situé à l'intérieur de S donc*

Aire(S) $\geq T+\frac{T}{4}$

5) *On introduit les points de la parabole situés au-dessous de la droite (AB) où les tangentes sont parallèles à (AQ), (QM), (MR) et (RB) et on ajoute au polygone AQMRB les points obtenus. On montre que Aire(S)* $\geq T+\frac{T}{4}+\frac{T}{16}$

Le coefficient directeur de la droite (AQ) est égal à $\frac{\frac{a^2}{4}-a^2}{-\frac{a}{2}+a}=-\frac{3}{2}a$

On cherche le point de P *où la tangente est parallèle à (AQ) c'est-à-dire la valeur de* x *telle que* $2x=-\frac{3}{2}a$ *; soit*$x=-\frac{3}{4}a$*. On appelle Q' le point de* P *d'abscisse* $-\frac{3}{4}a$*.*

Q'($-\frac{3}{4}a$ *;* $\frac{9a^2}{16}$*).*

Son symétrique par rapport à l'axe des ordonnées est le point R'($\frac{3}{4}a$ *;* $\frac{9a^2}{16}$*).*

De même, on cherche le point Q'' de P où la tangente est parallèle à (QM) c'est-à-dire la valeur de x *telle que* $2x=-\frac{a}{2}$ *; Q'' a pour abscisse* $-\frac{a}{4}$ *et son symétrique par rapport à l'axe des ordonnées est le point R''(*$\frac{a}{4};\frac{a^2}{16}$*)*

On calcule l'aire du polygone AQ'QQ ''MR''RR'B

Aire(AQ'QMRR'B)=Aire(AQMRB)+Aire (AQ'Q)+
Aire(QQ''M)+Aire(MR''R)+Aire(RR'B)

sachant que Aire (AQ'Q)= Aire(RR'B) et que Aire (QQ''M)= Aire(MR''R)

<u>Calcul de l'aire du triangle AQ'Q.</u>

Soit I' le point de (AB) de même abscisse que Q' et J' le point de (AQ) de même abscisse que I'. On note y l'ordonnée de J'. Les coordonnées de I' sont ($-\frac{3}{4}a$ *;* a^2*).*

Les vecteurs $\overrightarrow{AJ'}$ $(-\frac{3}{4}a+a\,;y-a^2)$ *et* $\overrightarrow{AQ}$ $(-\frac{a}{2}+a\,;\frac{a^2}{4}-a^2)$ *sont colinéaires, leur*

déterminant est nul $\begin{vmatrix}\frac{a}{4} & \frac{a}{2}\\ y-a^2 & \frac{-3a^2}{4}\end{vmatrix}=0$ *donc y=*$\frac{5a^2}{8}$ *et J'(*$-\frac{3}{4}a$ *;*$\frac{5a^2}{8}$*).*

D'où I'J'= $\frac{3a^2}{8}$ *et J'Q'=* $\frac{a^2}{16}$

Aire (AQ'Q)= Aire(AJ'Q')+Aire (J'Q'Q) $=\frac{\boldsymbol{AI'\times Q'J'}}{\boldsymbol{2}}+\frac{\boldsymbol{I'I\times J'Q'}}{\boldsymbol{2}}=\frac{\frac{a}{4}\times\frac{a^2}{16}}{2}+\frac{\frac{a}{4}\times\frac{a^2}{16}}{2}=\frac{\boldsymbol{a^3}}{\boldsymbol{64}}$

On cherche le point de P *où la tangente est parallèle à (QM) c'est-à-dire la valeur de x telle que 2x=*$-\frac{1}{2}a$*, c'est-à-dire x=* $-\frac{1}{4}a$*.*

On appelle Q'' le point de P d'abscisse $-\frac{1}{4}a$.On a *Q''* $(-\frac{1}{4}a;\ \frac{1}{16}a^2)$.
Son symétrique par rapport à l'axe des ordonnées est le point R''$(\frac{1}{4}a\ ;\ \frac{1}{16}a^2)$.

<u>Calcul de l'aire du triangle QQ''M</u>
Soit I'' le point de (AB) de même abscisse que Q'' et J'' le point de (QM) de même abscisse que I''. Les coordonnées de I'' sont $(-\frac{1}{4}a\ ;\ a^2)$ *et celles de J''*$(-\frac{1}{4}a\ ;\ \frac{a^2}{8})$ *(car l'équation de (QM) est* $y=-\frac{a}{2}x$*)*

Aire (QQ''M)= Aire(QQ''J'')+ Aire(J''Q''M)= $\frac{\boldsymbol{J''Q''\times II''}}{\mathbf{2}}+\frac{\boldsymbol{J''Q''\times I''N}}{\mathbf{2}}=\frac{\frac{a^2}{16}\times\frac{a}{4}}{\mathbf{2}}+\frac{\frac{a^2}{16}\times\frac{a}{4}}{\mathbf{2}}=\frac{\boldsymbol{a^3}}{\mathbf{64}}$

Aire(AQ'QQ''MR''RR'B)= $\boldsymbol{T}+\frac{\boldsymbol{T}}{\mathbf{4}}+\mathbf{2}\times\frac{\boldsymbol{a^3}}{\mathbf{64}}+\mathbf{2}\times\frac{\boldsymbol{a^3}}{\mathbf{64}}=\boldsymbol{T}+\frac{\boldsymbol{T}}{\mathbf{4}}+\frac{\boldsymbol{T}}{\mathbf{16}}$

6) *a. En itérant le processus on montre que Aire(S)* $\geq T(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{4^n})$
d'où Aire(S) $\geq \frac{4}{3}T$
b. Le quadrilatère AA'B'B est situé à l'extérieur de S donc Aire(S)≤ Aire(AA'B'B)
Aire(S) ≤Aire(ACB) - Aire(A'CB') donc Aire(S) ≤T'- $\frac{T'}{4}$.
c. On utilise le même procédé dans les triangles AA'M et BB'M puis en itérant la méthode on montre que Aire(S) $\leq T'-\frac{1}{4}\ (1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{4^n})$
On utilise la somme des termes d'une suite géométrique donc Aire(S) $\leq\ \frac{2}{3}T'$
ou encore Aire(S) $\leq\ \frac{4}{3}\ T$
d. On en déduit que $\frac{4}{3}\ T\leq$*Aire(S)* $\leq\ \frac{4}{3}\ T$ ***donc A(S)=*** $\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}\ \boldsymbol{T}$

II - Quadrature de l'hyperbole

Les deux exercices que nous proposons dans ce paragraphe concernent la quadrature de l'hyperbole par deux méthodes différentes.
Le premier exercice inspiré de la méthode de Grégoire de Saint-Vincent consiste à approcher l'aire sous la courbe (entre la courbe l'axe des ordonnées et deux droites d'équation respective $x=a$ et $x=b$ pour $0<a<b$) en l'encadrant par des aires de trapèzes et de rectangles. Pour ce faire on aborde les calculs d'aires de ces figures mais aussi l'équation d'une droite, la position d'une droite par rapport à une courbe, des calculs de limites. A cette occasion on revoit la définition du nombre dérivé d'une fonction en un point.
Le second exercice inspiré de la méthode de Brouncker approche l'aire sous la courbe par l'aire d'une suite de rectangles juxtaposés selon un processus très particulier. Cet exercice permet de se familiariser pas à pas avec le processus pour arriver à calculer les coordonnées de tous les points permettant d'arriver aux aires des différents rectangles. On aborde également la notion de limite après avoir admis certains résultats.

1) La quadrature de l’hyperbole par Grégoire de Saint-Vincent

Le projet de Grégoire Saint-Vincent est de « quarrer » le cercle [19]mais après avoir échoué avec une première tentative avec la spirale, il s’oriente vers la quadrature des coniques dont il espère déduire celle du cercle par analogie.

Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667) jésuite, mathématicien et géomètre flamand,

	Grégoire Saint-Vincent dans son œuvre Opus Geometricum Quadraturae circuli et sectionum coni tente la quadrature du cercle et de l’hyperbole en se détachant du principe d’exhaustion[20] par une approche ”infinitésimale”, très critiquée, notamment par Marin Mersenne (1588-1648). « Si les abscisses d'une hyperbole équilatère croissent en progression géométrique, les aires des surfaces découpées entre l'hyperbole et son asymptote par les lignes ordonnées correspondantes croissent en progression arithmétique. » Il sera appuyé par son ami Sarasa puis par Gottfried Whilhelm Leibniz (1646-1716) qui dira des travaux de Saint-Vincent : « Et si Grégoire Saint Vincent n’a pas résolu entièrement la quadrature de l’hyperbole, il n’en reste pas moins qu’il a livré des résultats remarquables.» Grégoire Saint-Vincent ne parle pas de logarithme, et n'obtient pas de quadrature de l'hyperbole.

Alphonse Antoine de Saraza (1617-1667) fera un lien entre l’hyperbole et les logarithmes puis Christian Huygens (1629-1695) calcule des logarithmes hyperboliques. Pour une progression géométrique de raison q sur l’axe des abscisses, on a une progression arithmétique de raison ln(q) des aires sous l’hyperbole sur des intervalles du type $[aq^{n-1} ; aq^{n}]$ où a est un réel positif.

a) Exercice préparatoire à la méthode de Grégoire de Saint-Vincent dans un cas particulier

Dans le cas général, a est un réel strictement positif , q un réel strictement supérieur à 1 et n est un entier supérieur à 1. On raisonne sur un intervalle $[a ; aq^n]$, divisé en sous intervalles $[aq^i ; aq^{i+1}]$pour i variant de 0 à n-1.

Cas particulier :

L’objet de cet exercice est d’encadrer l’aire comprise entre la courbe d’équation $y = \frac{1}{x}$ et l’axe des abscisses sur l’intervalle $[1 ; 2^3]$. On a donc a=1, q=2, n=3 et i varie de 0 à 2.

[19] C’est-à-dire trouver un carré de même aire, ce qui est impossible (voir partie B)

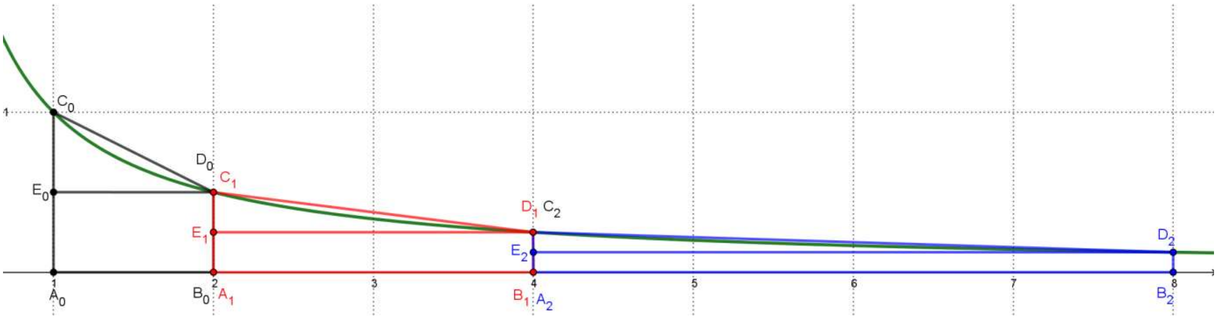
[20] Méthode d’exhaustion : Le principe date d’Archimède (287 - 212 av. J.-C), il s’agit d’un procédé ancien de calcul d’aires, de volumes et de longueurs de figures géométriques complexes. Le principe est celui d’un double raisonnement par l’absurde : Pour une surface d’aire A on suppose que son aire est strictement supérieure à A, puis on aboutit à une contradiction ; on suppose ensuite que son aire est strictement inférieure à A, puis on aboutit à une autre contradiction. On parvient ainsi à montrer que l’aire de la figure est A.

On considère les points $A_i(2^i\ ;\ 0)$, $B_i(2^{i+1}\ ;\ 0)$ et la branche d'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$ avec $x>0$

On appelle C_i le point de l'hyperbole de même abscisse que A_i, D_i le point de l'hyperbole de même abscisse que B_i et E_i le point de même abscisse que A_i et de même ordonnée que D_i.

On note T_i les trapèzes $A_iB_iD_iC_i$ et R_i les rectangles $A_iB_iD_iE_i$ pour i variant de 0 à 2.

L'objet de cet exercice est donc de comparer la somme des aires des trapèzes T_i, l'aire sous la courbe et la somme des aires des rectangles R_i sur l'intervalle [1 ; 8]



1) Calculer les coordonnées des points C_i et D_i en fonction de i.
2) Calculer les aires des trapèzes T_i et des rectangles R_i pour i variant de 0 à 2.
3) a) Calculer la somme des aires des trapèzes T_i et des rectangles R_i pour i variant de 0 à 2.

b) Vérifier que la somme des aires des trapèzes est égale à $n\frac{q^2-1}{q}$ et que la somme des aires des rectangles est égale à $n\frac{q-1}{q}$ pour les valeurs n et q choisies.

c) Encadrer l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe et l'axe des abscisses sur l'intervalle [1 ; 8].

Indications

1) $C_i(1\times 2^i, \frac{1}{1\times 2^i})$; $D_i(1 \times 2^{i+1}\ ;\ \frac{1}{1\times 2^{i+1}})$; $E_i(1 \times 2^i\ ;\ \frac{1}{1\times 2^{i+1}})$

i	0	1	2
Coordonnées de C_i	$(1\ ;\ 1)$	$(2\ ;\ \frac{1}{2})$	$(4;\ \frac{1}{4})$
Coordonnées de D_i	$(2\ ;\ \frac{1}{2})$	$(4;\ \frac{1}{4})$	$(8\ ;\ \frac{1}{8})$
Coordonnées de E_i	$(1\ ;\ \frac{1}{2})$	$(2;\ \frac{1}{4})$	$(4\ ;\ \frac{1}{8})$
Aire de T_i	$\frac{(1+\frac{1}{2})\times 1}{2} = \frac{3}{4}$	$\frac{(\frac{1}{2}+\frac{1}{4})\times 2}{2} = \frac{3}{4}$	$\frac{(\frac{1}{4}+\frac{1}{8})\times 4}{2} = \frac{3}{4}$
Aire de R_i	$1\times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	$(2\times \frac{1}{4}) = \frac{1}{2}$	$4 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$

2) Tous les trapèzes ont pour aire $\frac{3}{4}$ *et tous les triangles ont pour aire* $\frac{1}{2}$

3) a) La somme des aires des trapèzes est égale à $3 \times \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$

La somme des aires des rectangles est égale à $3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

b) On vérifie que $\frac{9}{4} = 3\times \frac{2^2-1}{2\times 2}$ *et que* $3\times \frac{1}{2} = 3\times \frac{2-1}{2}$

c) $\frac{3}{2} \leq Aire\ cherchée \leq \frac{9}{4}$

b) Cas général

Remarque : ici les indications sont données pour chaque question afin de ne pas perdre de vue ce que l'on cherche à démontrer.

Dans le cas général, a est un réel strictement positif , q un réel strictement supérieur à 1. n est un entier supérieur à 1. On raisonne sur un intervalle $[a ; aq^n]$, divisé en sous intervalles $[aq^i ; aq^{i+1}]$ pour i variant de 0 à $n-1$.

On considère les points $A_i(aq^i ; 0)$, $B_i(aq^{i+1} ; 0)$ et la branche d'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$ avec $x > 0$.

On appelle C_i le point de l'hyperbole de même abscisse que A_i. On note D_i le point de l'hyperbole de même abscisse que B_i et E_i le point de l'hyperbole de même ordonnée que D_i. On note T_i les trapèzes $A_iB_iD_iC_i$ et R_i les rectangles $A_iB_iD_iE_i$ pour i variant de 0 à $n-1$.

L'objet de cet exercice est de comparer la somme des aires des trapèzes T_i, l'aire sous la courbe et la somme des aires des rectangles R_i sur l'intervalle $[a ; aq^n]$.

4) Calculer l'aire d'un trapèze T_i en fonction de q .

<u>*Indication*</u>

L'aire d'un trapèze T_i sur l'intervalle $[aq^i ; aq^{i+1}]$ est égale à

$$\frac{\left(\frac{1}{aq^i} + \frac{1}{aq^{i+1}}\right) \times (aq^{i+1} - aq^i)}{2} = \frac{aq^i(q-1) \times aq^i(q+1)}{2aq^{i+1}} = \frac{q^2-1}{2q}$$

5) En déduire la somme des aires des trapèzes Ti sur l'intervalle $[a; aq^n]$

<u>*Indication*</u>

La somme des aires des trapèzes Ti sur l'intervalle $[a; aq^n]$ est $n\frac{q^2-1}{2q}$.

On remarque qu'à une progression géométrique des abscisses de raison q et de premier terme a, on associe une progression arithmétique des aires des trapèzes de raison $\frac{q^2-1}{2q}$ et de premier terme 0.

Les travaux de Saint-Vincent ne vont pas plus loin. Saint-Vincent ne fait pas le lien avec le logarithme de Napier, c'est Sarasa qui fera le lien avec un comportement logarithme.

6) **Il s'agit maintenant de faire un lien entre les aires des trapèzes et le logarithme (si on a étudié cette notion).**

On pose $b = aq^n$; on a donc $ln(b) - ln(a) = ln(aq^n) - ln(a) = nln(q)$

a. Montrer que le nombre n de trapèzes vérifie $\frac{b}{a} = q^n$ soit $n = \frac{\ln(\frac{b}{a})}{\ln(q)}$.

b. En déduire que la somme des aires des trapèzes est $t_n = \frac{\ln(\frac{b}{a})}{\ln(q)} \times \frac{q^2-1}{2q}$

c. Sachant que q >1, démontrer que $\lim\limits_{q \to 1} \frac{q^2-1}{2q\ln(q)} = 1$

d. En déduire que la suite des sommes t_n des aires des trapèzes T_i tend vers ln(b) − ln(a) lorsque n tend vers $+\infty$.

Indications

a. *ln(b)-ln(a)= ln(aq^n)-ln(a) = nln(q)*

b. *Ainsi sur [a;b] où b= aq^n, la somme des aires des trapèzes est* $t_n = \frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{\ln(q)} \times \frac{q^2-1}{2q}$

c. *q > 1 ;* $\lim\limits_{q \to 1} \frac{q^2-1}{2q\ln(q)} = 1$ *en effet* $\lim\limits_{q \to 1} \frac{q^2-1}{2q\ln(q)} = \lim\limits_{q \to 1} \frac{q+1}{2q} \times \frac{q-1}{\ln(q)} = 1$ *car* $\lim\limits_{q \to 1} \frac{\ln(q)-\ln 1}{q-1}$ *est le nombre dérivé de la fonction ln en 1 ; il est égal à 1 et son inverse est aussi égal à 1 de plus* $\lim\limits_{q \to 1} \frac{q+1}{2q} = 1$.

d. *La suite des sommes t_n des aires des trapèzes T_i tend vers* $\ln\frac{b}{a} = \ln(b) - \ln(a)$

7) a. Calculer l'aire d'un rectangle R_i

b. En déduire la somme des aires des rectangles r_n pour i variant de 0 à n

c. Démontrer que la suite des sommes (r_n) des aires des rectangles a pour limite ln(b) − ln(a) quand n tend vers $+\infty$.

Indications

a. *Le rectangle R_i a pour aire* $(aq^{i+1} - aq^i) \times \frac{1}{aq^{i+1}} = \frac{q-1}{q}$.

b. *Le nombre de rectangles R_i est le même que celui des trapèzes T_i.*
La somme des aires des rectangles r_n pour i variant de 0 à n est égale à $n\frac{q-1}{q} = \frac{\ln(b)}{\ln(a)} \times \frac{q-1}{q}$. *Elle est croissante (dépend de n)*

c. $\lim\limits_{q \to 1} \frac{q-1}{q\ln(q)} = 1$ *(comme on a vu précédemment* $\lim\limits_{q \to 1} \frac{\ln(q)-\ln 1}{q-1} = 1$*)*

Ainsi la suite des sommes (r_n) des aires des rectangles a pour limite $\ln\frac{b}{a} = \ln(b) - \ln(a)$ *quand n tend vers* $+\infty$.

8) Détermination de la position de la branche d'hyperbole par rapport au trapèze T_i et par rapport au rectangle R_i.

On considère l'aire sous la branche d'hyperbole sur l'intervalle $[aq^i; aq^{i+1}]$ pour i variant de 0 à $n-1$.
Comme x appartient à l'intervalle $[aq^i\ ;\ aq^{i+1}]$, on a $\frac{1}{aq^{i+1}} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{aq^i}$
Il s'agit de montrer que la branche d'hyperbole sur l'intervalle $[aq^i\ ; aq^{i+1}]$est située en dessous de la droite (CD).

a. Déterminer l'équation de la droite (CD)
b. Démontrer que la droite (CD) est située au-dessus de l'hyperbole.
c. Déterminer la position de l'hyperbole par rapport à chaque rectangle R_i

Indications

a. *L'équation de la droite (CD) est* $y = -\frac{x}{a^2q^{2i+1}} + \frac{1+q}{aq^{i+1}}$

b. *On calcule la différence entre l'ordonnée d'un point de la droite (CD) et un point de même abscisse de la branche d'hyperbole qu'on note* $\Delta(x)$.

On trouve $\Delta(x) = -\frac{x}{a^2q^{2i+1}} + \frac{1+q}{aq^{i+1}} - \frac{1}{x} = \frac{-x^2+x(aq^{i+1}+aq^i)-a^2q^{2i+1}}{xa^2q^{2i+1}}$.

Les racines du numérateur sont aq^i *et* aq^{i+1}.

Sur l'intervalle $[aq^i ; aq^{i+1}]$, *le trinôme est positif donc* $\Delta(x)$ *est un nombre positif.*
La branche d'hyperbole est située au-dessous de la droite (CD) pour chaque trapèze T_i.

c. *Comme* $\frac{1}{aq^{i+1}} \leq \frac{1}{x}$ *la branche d'hyperbole est située au-dessous de la droite (DE) pour chaque rectangle* R_i.

Conclusion : L'aire sous la courbe sur l'intervalle [a ;b] et l'axe des abscisses notée $\int_a^b \frac{1}{x}dx$ **est donc comprise entre** r_n **et** t_n.

$r_n \leq \int_a^b \frac{1}{x}dx \leq t_n$. **Or** $\lim_{q\to 1} r_n = \ln(b) - \ln(a)$ *et* $\lim_{q\to 1} t_n = \ln(b) - \ln(a)$

Par passage à la limite quand q tend vers 1 on trouve que l'aire cherchée est égale à $ln(b) - ln(a)$.

2) La quadrature de l'hyperbole par la méthode de Brouncker

	William Brouncker (anglais 1620-1684), était un linguiste et mathématicien. Docteur de philosophie (université d'Oxford) en 1647, il est l'un des fondateurs et le premier président de la Royal Society, en 1660. En 1662, il devient chancelier de la reine Catherine, puis maître de l'hôpital Sainte-Catherine. Ses travaux mathématiques portent en particulier sur la rectification (mesure des longueurs) de la parabole et de la cycloïde ainsi que sur la quadrature (mesure des aires) de l'hyperbole.

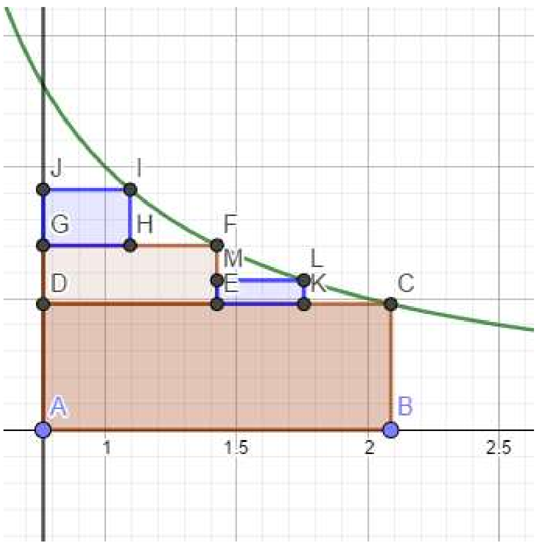
Dans un repère orthonormé, on considère la portion d'hyperbole sur un intervalle [a ; b] avec 0 < a < b, représentation graphique de la fonction inverse sur l'intervalle [a ; b]. Il s'agit d'approcher l'aire sous la courbe par la somme des aires des rectangles construits successivement comme le montre la figure ci-dessous.

Principe

Première étape : on construit le rectangle ABCD à partir des points A et B et du point de la courbe de même abscisse que B (en rose foncé).	Le premier rectangle construit est formé par les points de coordonnées A(a ; 0),B(b ; 0),

40

Deuxième étape : on complète la figure par un rectangle DEFG où E est le milieu de [DC] et F le point de la courbe de même abscisse que E (en rose clair).
Troisième étape : on complète la figure par deux rectangles, le rectangle GHIJ où H est le milieu de [GF] et I le point de la courbe de même abscisse que H ainsi que le rectangle EKLM où K est le milieu de [EC] et L le point de la courbe de même abscisse que K.
Pour la quatrième étape on construit quatre rectangles à partir des points J, H, E, K et des points respectivement situés au milieu des segments [JI], [HF], [ML], [KC].
On continue d'appliquer le même processus pour les étapes suivantes.



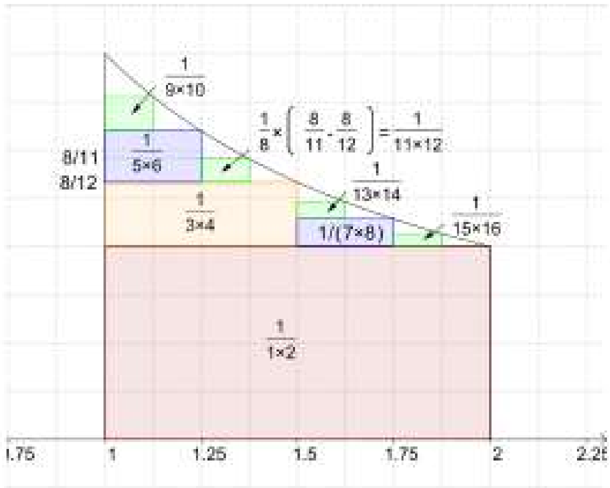
C(b ; $\frac{1}{b}$), $D\left(a;\ \frac{1}{b}\right)$.

Pour la seconde étape on complète la figure par le rectangle formé par les points de coordonnées D(a ;$\frac{1}{b}$), E milieu de [CD] donc E($\frac{b+a}{2}$; $\frac{1}{b}$),
$F(\frac{b+a}{2};\frac{1}{\frac{b+a}{2}})$; $G\left(a;\ \frac{1}{\frac{b+a}{2}}\right)$

Pour la troisième étape on complète par le rectangle formé par les points de coordonnées $G\left(a;\ \frac{1}{\frac{b+a}{2}}\right)$, H milieu de [GF] donc
H ($\frac{b+3a}{4}$; $\frac{1}{\frac{b+a}{2}}$), I($\frac{b+3a}{4}$; $\frac{1}{\frac{b+3a}{4}}$), J $\left(a;\ \frac{1}{\frac{b+3a}{4}}\right)$ et le rectangle formé par les points de coordonnées E($\frac{b+a}{2}$; $\frac{1}{b}$), K milieu de [EC] donc K($\frac{a+3b}{4}$; $\frac{1}{b}$), L($\frac{a+3b}{4}$; $\frac{1}{\frac{a+3b}{4}}$) , M ($\frac{b+a}{2}$; $\frac{1}{\frac{a+3b}{4}}$)

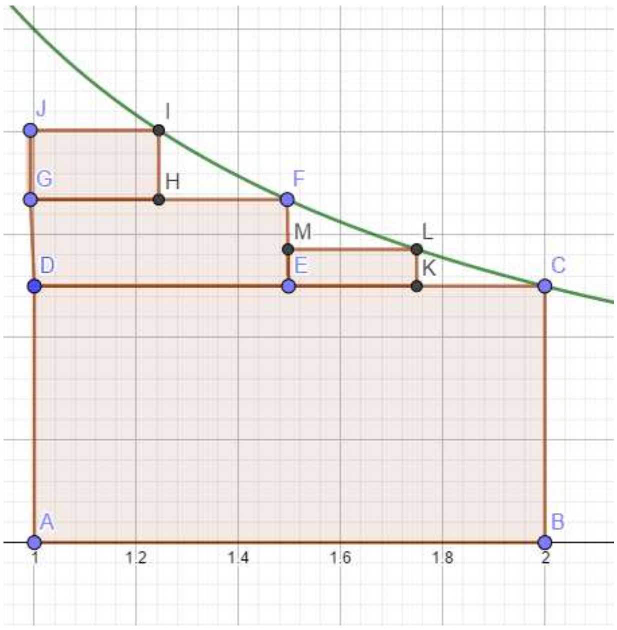
Etude d'un cas particulier : a=1 et b=2

1) A l'aide de Geogebra tracer la figure correspondant aux trois premières étapes et calculer la somme des aires des rectangles obtenus.
2) a. A quelle étape correspond la figure ci-dessous ?
   b. Calculer la somme des aires des rectangles obtenus.



3) On admet qu'en introduisant des rectangles analogues à ceux construits précédemment le calcul conduit à une somme des aires des rectangles égale à $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i+1)\times(2i+2)}$
Comparer la valeur obtenue dans le 2) avec la valeur de ln2.

Indications



1) *Coordonnées des points A, B, C et D : A (1 ; 0) ; B(2 ; 0) ;* $C\left(2; \frac{1}{2}\right)$ *; D (1 ;* $\frac{1}{2}$*)*
Aire ABCD = $1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ *;*
Coordonnées des points D, E, F et G : D (1 ; $\frac{1}{2}$*) ; E(*$\frac{3}{2}$*;* $\frac{1}{2}$*) ; F(*$\frac{3}{2}$ *;* $\frac{2}{3}$*) ; G(1 ;* $\frac{2}{3}$*)*
Aire DEFG= $\frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$
Coordonnées des points G, H, I et J : G(1 ; $\frac{2}{3}$*) ; H(*$\frac{5}{4}$*;* $\frac{2}{3}$*) ; I(*$\frac{5}{4}$*;* $\frac{4}{5}$*) ; J(1 ;* $\frac{4}{5}$*)*
Aire GHIJ= $\frac{1}{4} \times \left(\frac{4}{5} - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{15} = \frac{1}{30}$
Coordonnées des points E, K, L et M : E($\frac{3}{2}$*;* $\frac{1}{2}$*) ; K(*$\frac{7}{4}$ *;*$\frac{1}{2}$*) ; L(*$\frac{7}{4}$ *;* $\frac{4}{7}$*) ; M(*$\frac{3}{2}$*;*$\frac{4}{7}$*)*
Aire EKLM=$\frac{1}{4} \times \left(\frac{4}{7} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{14} = \frac{1}{56}$
Somme des aires des 4 rectangles = $\frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \frac{1}{56}$ *≈0,52*

2) *La figure présentée correspond à l'étape 4*

42

La somme des aires des rectangles est égale à

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{12}+\frac{1}{30}+\frac{1}{56}+\frac{1}{90}+\frac{1}{121}+\frac{1}{182}+\frac{1}{240}\approx 0,66$$

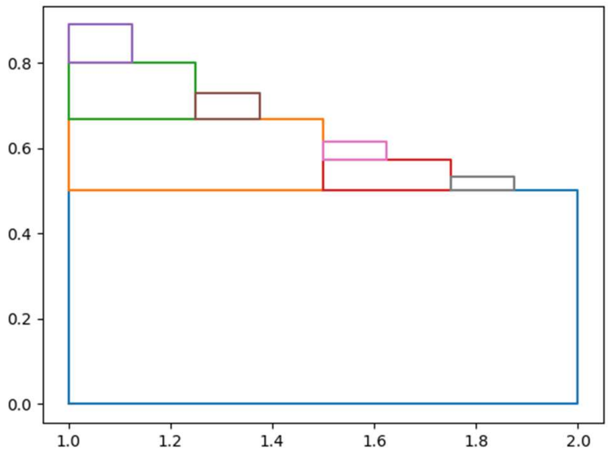
3) *ln2≈0,69*

Algorithme de Brouncker

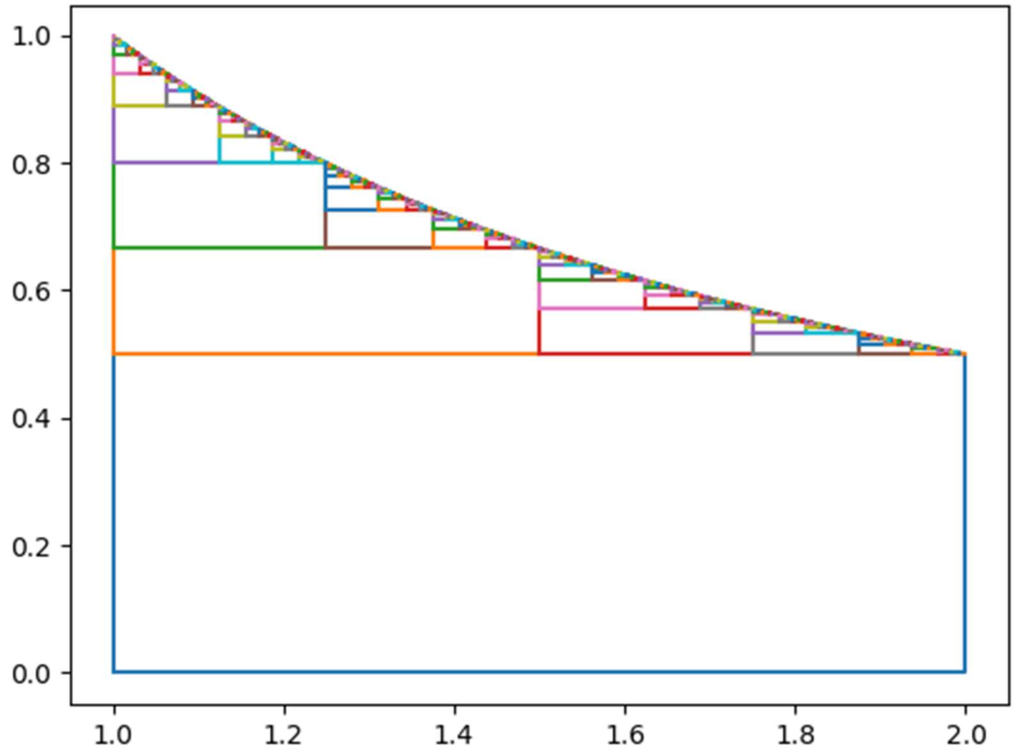
```
#algorithme de Brouncker

import matplotlib.pyplot as plt


def f(x):
    return 1/x

def aire_rectangle(A,B,C,D):
    return (B[0]-A[0])*(D[1]-A[1])

def rectangle(A,B,C,D):
    return plt.plot([A[0],B[0],C[0],D[0],A[0]],[A[1],B[1],C[1],D[1],A[1]] ,linewidth=1.5)

def brouncker(a,b,n):
    A=[a,0]
    B=[b,0]
    C=[b,f(b)]
    D=[a,f(b)]
    rectangle(A,B,C,D)
    s=aire_rectangle(A,B,C,D)
    for j in range(1,n):
        h=(b-a)/(2**j)
        for i in range(0,int(2**(j)),2):
            A=[a+h*i,f(a+h*(i+2))]
            B=[a+h*(i+1),f(a+h*(i+2))]
            C=[a+h*(i+1),f(a+h*(i+1))]
            D=[a+h*i,f(a+h*(i+1))]
            rectangle(A,B,C,D)
            s=s+aire_rectangle(A,B,C,D)
    plt.show()
    return s
```

Pour a=1 et b=2 nombre d'itérations n=4

```
>>> brouncker(1,2,4)
0.6628718503718503
>>> |
```



Pour a=1 et b=2 nombre d'itérations n=10



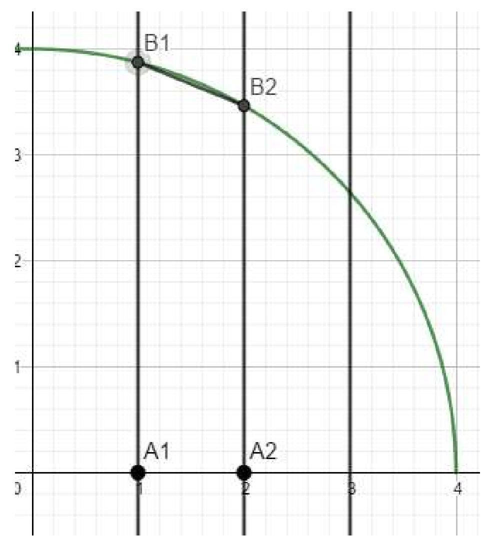

```
>>> brouncker(1,2,10)
0.6926591377284118
```

Partie C – Aire et intégrale – Aire et primitive

On a vu que, au cours de l'histoire, on a cherché à calculer des aires en faisant appel à des encadrements à l'aide de surfaces polygonales.
Dans cette partie, on utilise des aires de trapèzes ou de rectangles, tracés sous une courbe associée à une fonction, pour approcher l'aire sous la courbe de cette fonction f, supposée continue et positive sur un intervalle [a ; b], d'abord à l'aide d'un encadrement par deux suites (deux premiers paragraphes), ce qui conduit à la définition de l'intégrale d'une fonction positive sur un intervalle.
On fait ensuite le lien avec la notion de primitive (troisième paragraphe) et on reprend en toute généralité les liens intégrale/primitive dans le quatrième paragraphe.
Enfin, dans un cinquième et dernier paragraphe on aborde le calcul d'une aire par la méthode plus récente dite de Monte-Carlo, qui est une méthode numérique moins précise que les précédentes mais qui a l'avantage de permettre le calcul pour des surfaces assez « tarabiscotées » ou dont l'aire sous la courbe correspond à une fonction qu'on ne sait pas facilement intégrer.
Cette partie fait alterner des exercices détaillés, dont on précise les objectifs dans la démarche globale suivie et des paragraphes présentant les connaissances générales préparées par ce qui précède. Les exercices sont, ou corrigés, ou au moins suivis d'indications suffisamment précises pour que soit garanti l'avancement de la résolution et peuvent inclure des algorithmes illustrant certains calculs. Les énoncés généraux peuvent donner lieu à des exercices.

I - Aire du disque approchée par un calcul de la somme d'aires élémentaires « sous la courbe » - un point de vue différent de celui de la partie 1 et qui prépare la suite

Cas particulier : $a = 4$ et n=4



L'objectif de cet exercice est d'approcher le calcul de l'aire d'un quart de disque de rayon a (a réel strictement positif) et de centre O à l'aide d'aires de trapèzes juxtaposés de hauteur $\frac{a}{n}$ tracés « sous la courbe » représentant ce quart de disque (quart de cercle), en prenant n de plus en plus grand.

1) Déterminer l'équation du quart de cercle dans le repère (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$)
2) On partage le quart de disque en « bandes » adjacentes de largeur $\frac{a}{n}$. On obtient n trapèzes $A_kA_{k+1}B_{k+1}B_k$ analogues au trapèze $A_1A_2B_2B_1$ ci-contre où $A_k(\frac{ka}{n}\,;0)$ et $A_{k+1}(\frac{(k+1)a}{n}\,;0)$ qui pavent la surface. Déterminer les coordonnées des points B_k et B_{k+1}.

3) Calculer l'aire du trapèze $A_kA_{k+1}B_{k+1}B_k$.

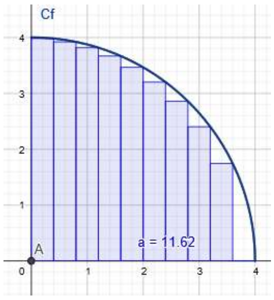
4) En déduire l'expression de la somme des aires des trapèzes qui pavent le quart de disque.

5) En déduire une expression de la valeur approchée $\mathcal{A}$ de l'aire du disque en utilisant la propriété d'invariance de l'aire par isométrie et celle d'additivité.

6) Calculer la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-3} près de cette aire pour n=4 et a=4.

7) Puis, à l'aide d'un algorithme, calculer à 10^{-3} près cette aire lorsque n=4 et lorsque n=20.
Comparer à l'expression que vous connaissez de l'aire du disque.

<u>Remarque</u>: on pourrait utiliser un découpage avec des rectangles ; on constate sur la figure ci-contre que le découpage avec des rectangles est moins précis car ils épousent moins bien le quart de cercle. Cette méthode des rectangles est cependant utilisée en encadrant la surface par des rectangles « au-dessous » et « au-dessus » de la courbe (voir paragraphe II) et introduit la notion d'intégrale pour l'aire « sous la courbe ».



Indications

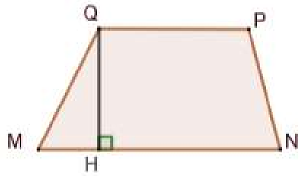
1) *Le quart de cercle a pour équation* $y=\sqrt{a^2-x^2}$ *et* $0 \leq x \leq a$.

2) *Calcul de l'ordonnée de* B_k : $\sqrt{a^2-(\frac{ka}{n})^2} = \frac{a}{n}\sqrt{n^2-k^2}$.

Calcul de l'ordonnée de B_{k+1} : $\sqrt{a^2-(\frac{(k+1)a}{n})^2} = \frac{a}{n}\sqrt{n^2-(k+1)^2}$

$B_k(\frac{ka}{n} ; \frac{a}{n}\sqrt{n^2-k^2})$ *et* $B_{k+1}(\frac{(k+1)a}{n} ; \frac{a}{n}\sqrt{n^2-(k+1)^2})$.

3) *L'aire d'un trapèze* $MNPQ$ *de bases* $[MN]$ *et* $[PQ]$ *et de hauteur* $[QH]$ *est égale à* $\frac{MN+PQ}{2} \times QH$



Les trapèzes $A_kA_{k+1}B_{k+1}B_k$ *ont pour hauteur* $[A_kA_{k+1}]$ *et pour bases* $[A_kB_k]$ *et* $[A_{k+1}B_{k+1}]$. *D'où l'aire du trapèze* $A_kA_{k+1}B_{k+1}B_k$ *est égale à :*

$$\frac{(\frac{a}{n}\sqrt{n^2-(k+1)^2}+\frac{a}{n}\sqrt{n^2-k^2})\times\frac{a}{n}}{2} = \frac{a^2}{2n^2}(\sqrt{n^2-(k+1)^2}+\sqrt{n^2-k^2})$$

4) *La somme des aires des trapèzes sur l'intervalle [0 ; a] est égale à*
$\sum_{k=0}^{n-1}[\frac{a^2}{2n^2}(\sqrt{n^2-(k+1)^2}) + \sqrt{n^2-k^2})]$

5) *Une valeur approchée de l'aire du disque est alors égale à*
$4\times \sum_{k=0}^{n-1}[\frac{a^2}{2n^2}(\sqrt{n^2-(k+1)^2}) + \sqrt{n^2-k^2})]$

6) *Pour n=4 et a=4, la somme des aires des trapèzes qui pavent le quart de disque est égale à*
$\sum_{k=0}^{3}\frac{4^2}{2\times4^2}(\sqrt{4^2-(k+1)^2}) + \sqrt{4^2-k^2}) =$
$\frac{1}{2}(\sqrt{4^2-1^2}+\sqrt{4^2-0^2}+\sqrt{4^2-2^2}+\sqrt{4^2-1^2}+\sqrt{4^2-3^2}+\sqrt{4^2-2^2}+\sqrt{4^2-4^2}+\sqrt{4^2-3^2})=$
$\frac{1}{2}(\sqrt{15}+4+\sqrt{12}+\sqrt{15}+\sqrt{5}+\sqrt{12}+0+\sqrt{5}) \approx 11{,}573$

Remarque : étant donnée la méthode utilisée, $\frac{1}{2}(\sqrt{15}+4+\sqrt{12}+\sqrt{15}+\sqrt{5}+\sqrt{12}+0+\sqrt{5})$ est une valeur approchée par défaut de l'aire du quart de disque et 11,573 est une valeur approchée de cette valeur, obtenue avec une calculatrice.
L'aire du disque (égale à 4 fois l'aire du quart du disque, grâce aux propriétés des aires) est environ égale à 46,293.

Avec la formule de l'aire du disque de rayon 4, égale à $\pi \times 4^2$, *on trouve à la calculatrice environ 50,265.*

7) Un algorithme en Python par la méthode des trapèzes : complément
Cette méthode de calcul d'aire utilise une somme d'aires de trapèzes comme indiqué ci-dessus.
Sur chaque intervalle $I_k = [x_k; x_{k+1}]$, on réalise alors l'approximation suivante de l'aire cherchée par l'aire du trapèze $\mathcal{A}_{I_k} = \frac{[f(x_k)+f(x_{k+1})]\times(x_{k+1}-x_k)}{2}$

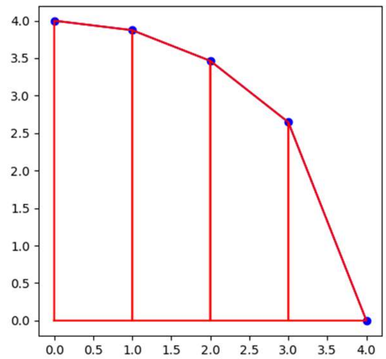
Script de l'algorithme

```
# calcul d'aire par la methode des trapèzes - quart de disque de rayon 4

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

xmin = 0
xmax = 4 # rayon du quart de disque
nbx = 5 # nombre de points de subdivisions de l'intervalle [0;4]
nbi = nbx - 1 # nombre d'intervalles (ici 4 intervalles)

x = np.linspace(xmin, xmax, nbx)
y = np.sqrt(16-x**2)
plt.plot(x,y,"bo-")

aire = 0
for i in range(nbi):
    aire = aire + ((y[i]+y[i+1])/2)*(x[i+1]-x[i])
    # dessin du trapeze
    x_trap = [x[i], x[i], x[i+1], x[i+1], x[i]] # abscisses des sommets
    y_trap = [0    , y[i], y[i+1]  , 0      , 0    ] # ordonnees des sommets
    plt.plot(x_trap, y_trap,"r")
print("aire =", aire)

plt.show()
```

Résultat pour n=4

```
aire = 11.982836272409761
>>> |
```

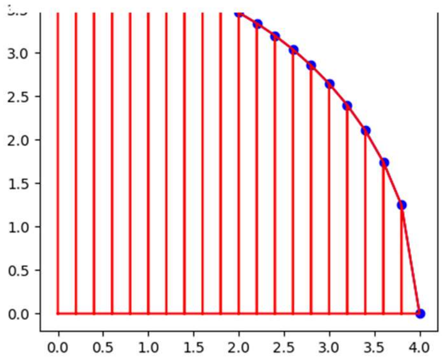
Valeur approchée à 10^{-3} près : 11,983



Résultat pour n=20

```
aire = 12.513859519019924
>>> |
```

Valeur approchée à 10^{-3} près : 12,514
Valeur approchée par défaut de l'aire du disque : 50,056 – on est très proche de l'aire calculée à partir de la formule !



II - Aire et intégrale

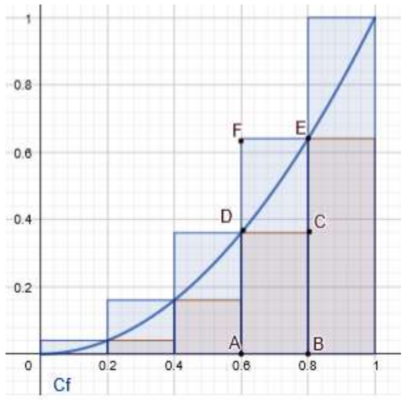
Dans ce qui suit on montre grâce à un exercice sur un exemple, puis à un énoncé transformable en exercice dans le cas général, comment trouver une aire sous une courbe représentant une fonction f. Il s'agit de l'encadrer par deux suites convergeant vers le même nombre (l'aire cherchée). Ces suites, minorant et majorant l'aire, sont obtenues comme des sommes d'aires de rectangles, placés sous et au-dessus de la courbe, remplissant, pour les premiers, de plus en plus l'espace sous la courbe, et de plus en plus près au-dessus de la courbe pour les seconds.
On suppose que la courbe est dans le premier quadrant. L'idée mise en œuvre est donc simple, les aires de rectangles s'obtiennent en utilisant la formule élémentaire $L \times \ell$. C'est le côté « technique » qui introduit une certaine complication dans les calculs, parce qu'on est obligé d'indexer d'une façon ou d'une autre les rectangles de plus en plus nombreux qu'on utilise et parce qu'on travaille sur des expressions algébriques « lourdes ». De plus la détermination des limites des suites minorant et majorant l'aire peut aussi être délicate. On pourra donc éventuellement ne pas effectuer les calculs « jusqu'au bout » !
La largeur d'un rectangle de remplissage correspond au découpage choisi sur l'axe des x, obtenu en prenant des x_i placés régulièrement dans l'intervalle en jeu : la largeur de chaque rectangle est la distance entre deux x_i successifs – très souvent $\frac{1}{n}$. La longueur correspond aux ordonnées des points sur la courbe d'abscisse x_i. Remplir de plus en plus l'espace revient à diminuer la largeur de chaque rectangle, ce qui permet d'en « caser » davantage tout en « collant » de mieux en mieux à la courbe.

1) Exemple d'introduction[21] : calcul de l'aire sous la parabole $\mathcal{C}$d'équation $y = x^2$

Il s'agit dans cet exercice de calculer l'aire sous la courbe C d'équation y = x², l'axe des abscisses entre les droites d'équation x=0 et x=a où a est un nombre réel strictement positif. On note $\mathcal{A}(a)$ cette aire.

<u>Méthode</u> : on découpe l'intervalle [0, a] en n intervalles (n entier >0) $[0\,;\frac{a}{n}]$, $[\frac{a}{n}\,;\frac{2a}{n}]$, … , $[\frac{(n-1)a}{n}\,;\frac{na}{n}]$ et on encadre l'aire sous la courbe C sur chacun des intervalles par des aires de rectangles sous la courbe et au-dessus.

L'objectif est de déterminer deux nombres σ_n et Σ_n vérifiant $\sigma_n \leq \mathcal{A}(a) \leq \Sigma_n$ et d'en déduire $\mathcal{A}(a)$ soit par approximation soit par passage à la limite.



1) <u>Mise en œuvre dans des cas particuliers</u>

a) On prend $a = 1$ et $n = 5$

On a représenté ci-contre la courbe C_f représentant la fonction f définie par $f(x) = x^2$ sur l'intervalle $[0\,;1]$et des rectangles de largeur 0,2 et de hauteurs respectives f(0), f(0,2), f(0,4), f(0,6) et f(0,8) (comme par exemple, le rectangle ABCD) et cinq rectangles de largeur 0,2 et de hauteurs f(0,2), f(0,4),f(0,6), f(0,8) et f(1) (comme par exemple, le rectangle ABEF).

$\sigma_5 = 0{,}2 \times (0^2 + 0{,}2^2 + 0{,}4^2 + 0{,}6^2 + 0{,}8^2) = 0{,}24$

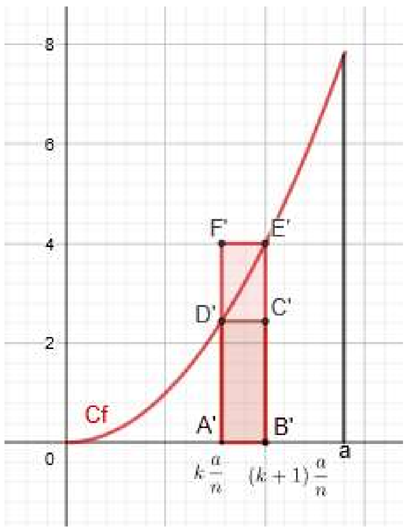
Vérifier que $\Sigma_5 = 0{,}44$

On en déduit que l'aire cherchée est comprise entre ces deux nombres. On voit que ce n'est pas très bon !

b) Calculer de même σ_{10} et Σ_{10} dans le cas où $a = 1$ et $n = 10$.
Vérifier que l'on trouve $\sigma_{10} = 0{,}29$ et $\Sigma_{10} = 0{,}39$. C'est meilleur !

c) Avec GeoGebra on a directement $\sigma_{20} = 0{,}31$ et $\Sigma_{20} = 0{,}36$ (mais un calcul « à la main » donne les mêmes résultats exacts).

Au vu des différents résultats obtenus avec n=5 ; n=10 et n=20 quelle remarque peut-on faire ?



<u>2) On se place maintenant dans le cas général : expression des suites encadrant l'aire</u>

a) Calculer, en fonction de a, k et n, les aires des deux rectangles encadrant l'aire sous la courbe sur un intervalle $[\frac{ka}{n}\,;\frac{(k+1)a}{n}]$ où k est un entier naturel, $0 \leq k \leq n-1$.

Pour cela on pourra s'aider de la figure ci-contre (A'B'C'D' et A'B'E'F' sont les deux rectangles en question)

b) Exprimer σ_n et Σ_n en fonction de a et de n.

<u>3) L'objectif de cette question est de faire le calcul de la limite commune des deux suites</u>

a) On introduit un calcul intermédiaire :

[21] D'après Aline Robert et Marc Rogalski

Soit $S_2(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$, où n est un entier naturel non nul. A l'aide des sommes $S_2(n)$ et $S_2(n-1)$, calculer $\Sigma_n - \sigma_n$ puis montrer que $\Sigma_n - \sigma_n$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

b) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

> Suivant la progression adoptée en cours les élèves peuvent avoir déjà rencontré le résultat de la question b). On peut aussi l'admettre ou le faire démontrer au préalable en exercice. On trouvera en annexe 1 une variante géométrique pour l'établir.

c) Calculer σ_n et Σ_n à l'aide de l'égalité démontrée ci-dessus.

d) En déduire que l'aire sous la courbe $\mathcal{A}(a)$ est égale à $\frac{a^3}{3}$.

Retour aux cas particuliers : pour a = 1, l'aire est donc à peu près égale à 0,333… les résultats trouvés sont cohérents !

4) Lien entre la fonction aire et la fonction $f : x \to x^2$

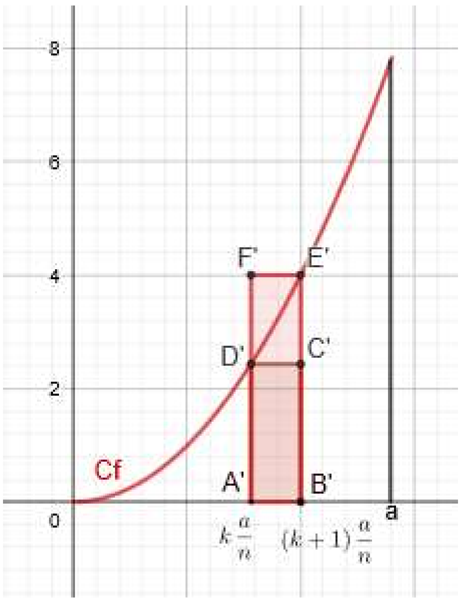
On considère la fonction $F : x \to \mathcal{A}(x)$, où x désigne le réel a, considéré maintenant comme variable.

On a donc $\mathcal{A}(x) = F(x) = \frac{x^3}{3}$. Calculer $F'(x)$. Que remarque-t-on ?

<u>Indications pour les questions 2 ; 3 et 4</u>

2) <u>Expression des suites encadrant l'aire</u>

a) Sur la figure ci-contre les coordonnées des points A', B', C', D', E', F' sont A'$(\frac{ka}{n} ; 0)$, B'$(\frac{(k+1)a}{n} ; 0)$; C'$(\frac{(k+1)a}{n} ; \frac{k^2a^2}{n^2})$, D'$(\frac{ka}{n} ; \frac{k^2a^2}{n^2})$, E'$(\frac{(k+1)a}{n} ; \frac{(k+1)^2a^2}{n^2})$, F'$(\frac{ka}{n} ; \frac{(k+1)^2a^2}{n^2})$.



L'aire de la portion de parabole située entre les droites (A'D') et (B'C') et l'axe des abscisses est comprise entre l'aire des rectangles A'B'C'D' et A'B'E'F'

Aire (A'B'C'D')$=\frac{a}{n} \times \frac{k^2a^2}{n^2} = \frac{k^2a^3}{n^3}$; *Aire (A'B'E'F')*$=\frac{a}{n} \times \frac{(k+1)^2a^2}{n^2} = \frac{(k+1)^2a^3}{n^3}$

b) Pour k variant de 0 à n-1, on appelle σ_n la somme des aires des rectangles A'B'C'D' et Σ_n la somme des aires des rectangles $A'B'E'F'$.

$\sigma_n = \frac{a^3}{n^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2)$ *et*

$\Sigma_n = \frac{a^3}{n^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2)$

3) <u>Limite commune des deux suites</u>

a) $\Sigma_n - \sigma_n = \frac{a^3}{n^3}(n^2-(n-1)^2) = \frac{a^3}{n^3}(2n-1)$ *et* $\lim_{n\to+\infty}(\Sigma_n - \sigma_n) = 0$

b) On démontre par récurrence que $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

** L'égalité est vraie pour n=1 en effet* $1^2 = 1 = \frac{1\times2\times3}{6}$.

** Si on suppose que* $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ *alors*

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$ *donc l'égalité est vérifiée pour n+1*

** Pour tout n>0,* $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

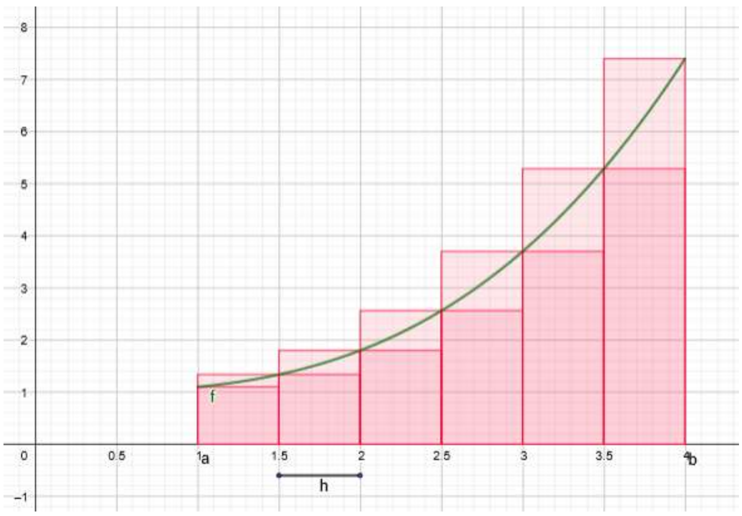
On en déduit que $\sigma_n = \frac{a^3}{n^3} \times \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6}$ *et* $\Sigma_n = \frac{a^3}{n^3} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
En développant on a $\sigma_n = a^3\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right)$ *et* $\Sigma_n = a^3\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right)$
D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \sigma_n = \frac{a^3}{3}$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} \Sigma_n = \frac{a^3}{3}$
d) En faisant la somme terme à terme de ces inégalités pour k variant de 0 à n on a $\sigma_n \leq \mathcal{A}(a) \leq \Sigma_n$.
D'après le résultat de la question c. on en déduit $\mathcal{A}(a) = \frac{a^3}{3}$

4) *<u>Lien entre la fonction aire et la fonction</u>* $f : x \to x^2$
On a montré que pour tout a réel strictement positif on a $\mathcal{A}(a) = \frac{a^3}{3}$.
On considère la fonction $F : x \to \mathcal{A}(x)$*, d'où pour tout réel* $x \geq 0, F(x) = \frac{x^3}{3}$ *et on remarque que* $F'(x) = x^2$

2) Cas général :

* Il s'agit d'une généralisation de ce qui a été fait dans l'exemple : f n'est plus explicite, l'intervalle est [a ; b] au lieu de [0 ; a]. Le principe reste exactement le même. Cependant on ne peut pas calculer la valeur de l'aire à partir de l'encadrement !
L'énoncé qui suit n'est pas présenté tout à fait comme un exercice – il pourrait cependant être transformé en exercice, quitte à faire admettre certaines parties, trop techniques.

Soit f estune fonction continue et positive sur un intervalle $I = [a\,; b]$. On noteC_f la courbe représentative de f dans un repère et S la surface limitée par C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.
$\mathcal{A}$ est l'aire de S (aire sous la courbe). Pour déterminer $\mathcal{A}$ on découpe [a, b] en n intervalles d'amplitude $\frac{b-a}{n}$, à savoir
$\left[a; \frac{b-a}{n}\right]$,$\left[a + \frac{b-a}{n}; a + \frac{2(b-a)}{n}\right]$, … , $\left[a + \frac{(n-1)(b-a)}{n}; a + \frac{n(b-a)}{n} = b\right]$
Pour simplifier les notations, on pose $h = \frac{b-a}{n}$



On construit n rectangles de largeur h et de hauteur $f(a + k \times h)$ pour k variant de 0 à $n - 1$ qui sont donc situés sous la courbe et n rectangles de même largeur h et de hauteur $f(a + k \times h)$ pour k variant de 1 à n et qui sont situés au-dessus de la courbe (comme sur la figure ci-contre)
On obtient ainsi deux suites (u_n) et (v_n) définies respectivement par

$$u_n = \sum_{k=0}^{k=n-1} h \times f(a + k \times h)$$

et

$$v_n = \sum_{k=1}^{k=n} h \times f(a + k \times h)$$

(u_n) et (v_n) mesurent respectivement les sommes totales des rectangles sous la courbe et au-dessus de la courbe. En s'appuyant sur la figure on a $u_n \leq \mathcal{A} \leq v_n$

De plus, pour tout entier n, on a $v_n - u_n = h \times [f(b) - f(a)] = \frac{b-a}{n} \times [f(b) - f(a)]$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$.

On note $\int_a^b f(x)dx$ l'aire $\mathcal{A}$ sous la courbe.

$\int_a^b f(x)dx$ se lit « intégrale de a à b de $f(x)dx$

ou « somme de a à b de $f(x)dx$ »

On a donc $u_n \leq \int_a^b f(x)dx \leq v_n$ et on peut ob petite que l'on veut, il suffit de choisir n pour que $\frac{b-a}{n} \times [f(b) - f(a)]$ soit plus petit que ε

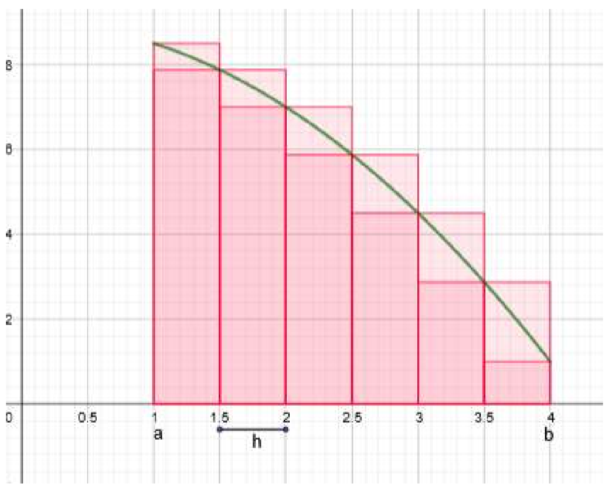
La notation $\int_a^b f(x)dx$ est en quelque sorte une généralisation de $\sum_{k=0}^{k=n}(f(k)\Delta x)$ pour des petits intervalles Δx. Le symbole $\int$, parfois dénommé « S long », a été introduit par Leibniz.

Il manque cependant le calcul explicite de cette limite commune… On montre dans le paragraphe suivant un moyen tout à fait différent pour y parvenir.

** On ferait un raisonnement analogue pour une fonction continue et décroissante sur [a ; b]

L'encadrement devient $v_n \leq \int_a^b f(x)dx \leq u_n$

*** Le cas d'une fonction continue sur un intervalle $[a\,; b]$ mais non monotone sur cet intervalle est donné en annexe 2.



En annexe 3 on reprend les différentes méthodes utilisées pour calculer des aires sous des courbes avant de disposer du calcul intégral.

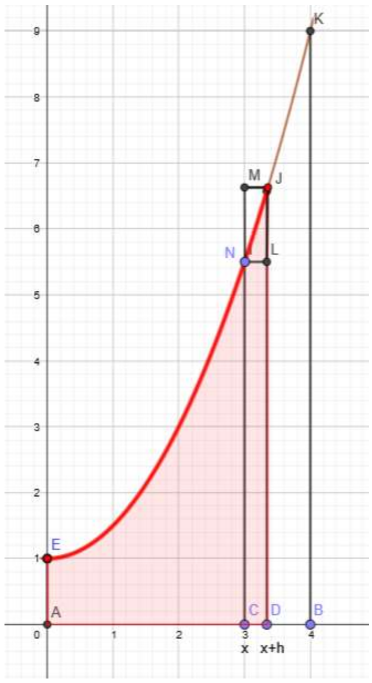
III - Relation entre aire et primitive d'une fonction sous des hypothèses « fortes »

Dans ce paragraphe, dans un exercice d'introduction, on énonce et on démontre que l'aire sous la courbe d'une fonction particulière f sur l'intervalle [a ; x] est une nouvelle fonction dont la dérivée est f.

Puis, étant donnée la difficulté, dans un exposé plus général on énonce et on démontre le même résultat pour toute fonction continue et positive f sur l'intervalle [a ; x].

Certains appellent ce résultat le théorème fondamental de l'analyse.

Selon les notions déjà établies, ou non dans la classe, ce peut être une introduction à la notion de primitive d'une fonction continue sur un intervalle et au calcul de « l'aire sous la courbe » pour une fonction continue ou le lien entre calcul de l'aire et l'utilisation de $\int_a^b f(x)dx$ par F(b)-F(a) où F est une primitive de f.



1) Exercice d'introduction : lien entre aire sous la courbe et dérivée.

Soit f la fonction définie sur [0 ; 4] par $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$

S est la surface sous la courbe, limitée par l'axe de abscisse et les droites d'équation x=0 et x=4. On note $\mathcal{A}$ l'aire de S.

a) On admet que si une fonction est dérivable sur un intervalle, alors elle est continue sur cet intervalle.
Démontrer que f est continue et croissante sur [0 ;4]

b) On note respectivement $\mathcal{A}(x)$ et $\mathcal{A}(x+h)$ les aires du domaine sous la courbe sur l'intervalle [0 ; x] et sur l'intervalle [0 ; $x+h$] où h est un nombre réel strictement positif.
Justifier que l'on a $h \times f(x) \leq \mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x) \leq h \times f(x+h)$
Quel encadrement de $\mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x)$ peut-on écrire si h est strictement négatif ?

c) En déduire, en revenant à la définition de la dérivée d'une fonction en un point, que la fonction $\mathcal{A}: x \rightarrow \mathcal{A}(x)$ est dérivable sur [0 ;4]
et que sa dérivée est la fonction f.

d) Déterminer la dérivée de la fonction F définie par $F(x) = \frac{1}{6}x^3 + x$ et en déduire $\mathcal{A}$

2) Cas d'une fonction positive et continue sur un intervalle *I*= [a ; b]

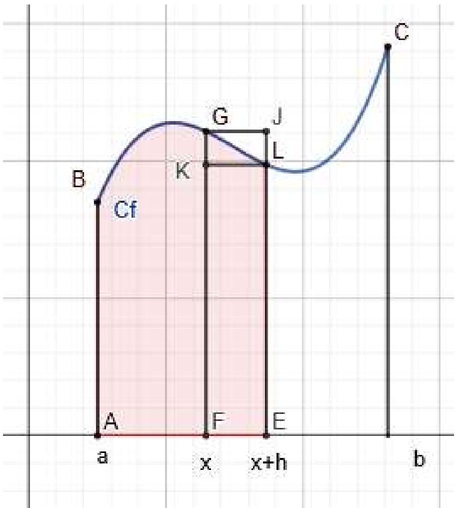
Théorème :

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $I = [a; b]$.
Pour tout réel x de l'intervalle I on note $F(x)$ l'aire sous la courbe de la fonction f sur l'intervalle $[a; x]$.
La fonction F définie sur $[a; b]$ a pour dérivée f. On dit que c'est une primitive de f

<u>Démonstration</u>

On montre en quatre étapes que l'aire sous la courbe pour une fonction f continue et positive sur un intervalle [a ;b] peut être déterminée à partir d'une fonction F primitive de f sur cet intervalle (c'est-à-dire une fonction F dont la dérivée est f).
En fait on revient à la définition de la dérivée, en montrant que $f(x)$ est la limite de $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ quand h tend vers 0. Ce rapport apparait quand on traduit l'encadrement de la portion d'aire sous la courbe entre x et $x + h$ par deux rectangles au-dessus et au-dessous de la courbe.

a) Soit h un réel strictement positif.
On note $S(x)$ le domaine sous la courbe de la fonction f limité à l'intervalle [a ; x] et $F(x)$ son aire. De même $S(x+h)$ est le domaine limité à l'intervalle [a ; x+h] et $F(x+h)$ son aire.
On fait l'hypothèse que la fonction F est définie sur [a ; b]
On suppose que la fonction f est positive et continue sur [a ; b] et que sur chaque intervalle J inclus dans [a ; b] elle admet un maximum et un minimum
* Par exemple, sur le schéma ci-contre, le maximum de f sur l'intervalle $[x\,;\ x+h]$ est $f(x)$ et son minimum est $f(x+h)$ car f est décroissante sur cet intervalle.



S est le domaine sur l'intervalle [a;b] limité par Cf et l'axe des abscisse

On peut donc encadrer l'aire « sous la courbe » sur l'intervalle $[x\,;\ x+h]$ par les aires des rectangles FEJG et FELK
On a $h \times f(x+h) \leq F(x+h) - F(x) \leq h \times f(x)$
ou encore $f(x+h) \leq \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \leq f(x)$
Or f est continue sur [a ; b] et donc en x donc $\lim\limits_{h \to 0^+} f(x+h) = f(x)$.

On a pris h >0, on obtient donc la limite quand h tend vers 0 en étant supérieur à 0, que l'on note $\lim\limits_{h \to 0^+} f(x+h)$

b) Si h est un réel strictement négatif on montrerait de même que $\lim\limits_{h \to 0^-} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$
c) On en déduit que, pour tout x réel de l'intervalle [a ; b] et pour tout réel h tel que $x+h$ appartienne à [a ; b] on a $\lim\limits_{h \to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$.
Donc la fonction F est dérivable sur [a ; b] et sa dérivée est f.

Si la notion de primitive a été étudiée, on peut en déduire que la fonction qui à x associe l'aire $F(x)$ sur l'intervalle [a ; x] est une primitive de *f*.
Sinon, on peut introduire la notion de primitive à cette occasion.

d) On en déduit que « l'aire sous la courbe » sur l'intervalle [a ; b] est égale à $F(b) - F(a)$ où F est une fonction primitive de f
* On ferait une démonstration analogue sur un intervalle où f est croissante.
* Sinon on encadre $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ par le minimum et le maximum de *f* sur $[x\,;\ x+h]$ (voir annexe2)

IV - Intégrale et primitive

On fait le bilan général des deux paragraphes précédents.
On n'aborde cependant pas ici les calculs de primitives ni les propriétés des intégrales.

1) Cas d'une fonction continue et positive sur un intervalle [a ; b]

Si f est une fonction continue et positive sur un intervalle [a ; b], on a introduit au paragraphe 1) $\int_a^b f(x)dx$ comme l'aire sous la courbe C_f de la fonction f sur cet intervalle dont on a des valeurs approchées par des suites.

Au paragraphe 2) on a vu que cette aire peut être calculée à l'aide d'une fonction F primitive de f.

Plus précisément cette aire est égale à $F(b) - F(a)$.

On en déduit $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ que l'on peut noter $[F(x)]_a^b$

2) Extension

Pour toute fonction continue f sur un intervalle [a ; b], on définit $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f, quel que soit le signe de la fonction sur cet intervalle.

Par exemple : soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 + 5x - 2$. Une primitive de f est la fonction F définie par $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 2x$

$$\int_{-3}^{4}(x^2 + 5x - 2)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 2x\right]_{-3}^{4}$$

$$= \left(\frac{1}{3}4^3 + \frac{5}{2}4^2 - 2 \times 4\right) - \left(\frac{1}{3}(-3)^3 + \frac{5}{2}(-3)^2 - 2(-3)\right)$$

$$\int_{-3}^{4}(x^2 + 5x - 2)dx = \frac{203}{6} \approx 33{,}83$$

3) Une intégrale peut être utile pour calculer une autre valeur qu'une aire

Exemple 1 : valeur moyenne d'une fonction

Nouvelle-Calédonie 3 novembre 2008 (bac ES)

Dans une entreprise, le résultat mensuel, exprimé en milliers d'euros, réalisé en vendant x centaines d'objets fabriqués, est modélisé par la fonction B définie et dérivable sur l'intervalle [1 ; 15] par :

$B(x) = (x - 5)e^{u(x)} + 2$ avec $u(x) = -0{,}02x^2 + 0{,}2x - 0{,}5$. Si B(x) est positif il s'agit d'un bénéfice, s'il est négatif il s'agit d'une perte.

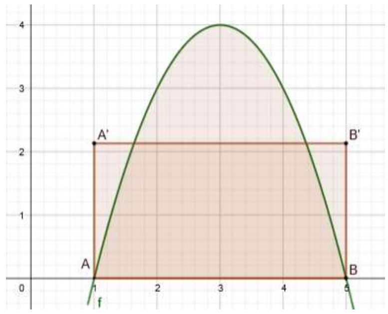
1. On note B ′ la fonction dérivée de la fonction B et u ′ la fonction dérivée de la fonction u.

a. Calculer u ′ (x) et démontrer que, pour tout x de l'intervalle [1 ; 15], on a :

$B'(x) = (-0{,}04x^2 + 0{,}4x)e^{u(x)}$.

b. Étudier le signe de B ′ (x) sur l'intervalle [1 ; 15] puis dresser le tableau de variations de la fonction B

2. La valeur moyenne m d'une fonction f qui admet des primitives sur un intervalle [a ; b] avec a < b est : m = $\frac{1}{b-a}\int_a^b f\,(t)\,dt$



D'après la définition de la valeur moyenne d'une fonction positive sur un intervalle [a ; b], on a
$m \times (b-a) = \int_a^b f(t)dt$ où $\int_a^b f(t)dt$ est égale à l'aire sous la courbe.
m est donc la hauteur du rectangle de longueur $b-a$ qui a la même aire que la surface sous la courbe sur [a ;b].

a. Vérifier que $B(x) = -25\times u'(x)e^{u(x)} + 2$.
b. En déduire l'arrondi au millième de la valeur moyenne de B sur [1 ; 15].
c. Interpréter ce résultat pour l'entreprise.

Indications

1) *a.* $u'(x) = -0{,}04x + 0{,}2$;

$B'(x) = e^{u(x)} + (x-5)u'(x)\,e^{u(x)} = e^{u(x)}(1+(x-5)(-0{,}04x+0{,}2)) = e^{u(x)}(-0{,}04x^2+0{,}4x)$

2) *$e^{u(x)} > 0$ donc $B'(x)$ a le signe de $-0{,}04x^2+0{,}4x$ dont les racines sont 0 et 10. On en déduit le tableau de variation de B*

$B(1) \approx -0{,}905$; $B(10) \approx 5{,}033$; $B(15) \approx 3{,}353$

x	1	10	15
$B'(x)$	$+$		$-$
$B(x)$	$B(1)$ ↗	$B(10)$	↘ $B(15)$

3) *a.* $-25\times u'(x)e^{u(x)} + 2 = -25(-0{,}04x+0{,}2)\,e^{u(x)} + 2 = (x-5)\,e^{u(x)} + 2 = B(x)$

b. La valeur moyenne m de b sur [1 ; 15] est égale à $\frac{1}{15-1}\int_1^{15} B\,(t)\,dt$

$m = \frac{1}{14}\int_1^{15}(-25\times u'(t)e^{u(t)} + 2)\,dt = \frac{1}{14}\left[-25\,e^{u(t)} + 2t\right]_1^{15}$

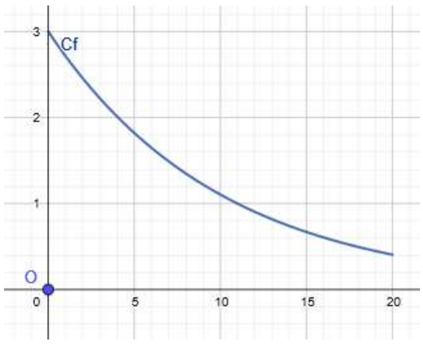
$m = \frac{1}{14}(-25e^{u(15)} + 30 + 25e^{u(1)} - 2)$

$m \approx 3{,}055$

c. Le bénéfice moyen de cette entreprise est d'environ 3055 €.

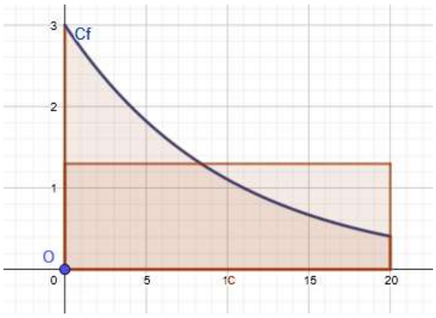
Exemple 2 (en Biologie)

La quantité d'un certain médicament, en cl, dans le sang après injection, pendant une période de 20h qui suit l'injection, est une fonction du temps définie par $f(t) = 3e^{-0{,}1t}$. La représentation graphique de cette fonction est donnée ci-dessous.



On peut calculer la quantité moyenne de médicament présente dans le sang à l'issue des 20 h.

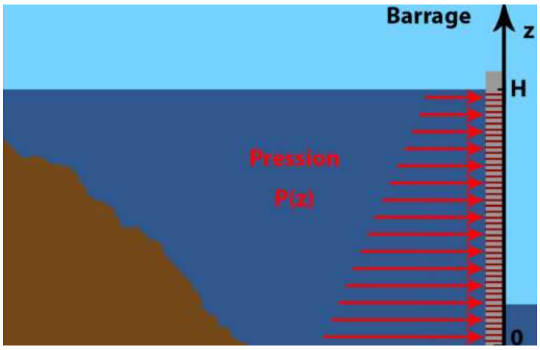
On sait que la valeur moyenne est égale $\mu = \frac{1}{20}\int_0^{20} f(t)dt$ (voir exemple 1)

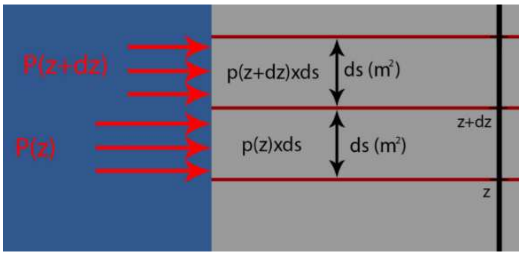


Pour faire ce calcul on doit déterminer une primitive de f.
Soit F la fonction définie par $F(t) = 3 \times \frac{1}{-0,1} \times e^{-0,1t}$. On calcule F' et on vérifie que F est une primitive de f.
D'où $\mu = \frac{1}{20}\left[-30e^{-0,1t}\right]_0^{20} \approx 1,297$ cl

Exemple 3 (en Physique)
Force totale exercée sur un mur de barrage

Il s'agit de calculer la force qu'exerce la pression de l'eau sur le barrage. Si une plaque de surface S reçoit une pression uniforme P alors la force que subit la plaque est égale à PxS. Cependant, la pression de l'eau exercée sur un barrage n'est pas uniforme ! Elle varie en fonction de la profondeur.
On partage alors le barrage en surfaces horizontales très petites (infinitésimales) ds.





La force subie par cette petite surface vaut $p(z)$ (pression de l'eau à la profondeur z) multiplié par la surface ds. Pour calculer la force totale exercée sur le barrage, il faut ajouter chaque force sur toute la surface du barrage. On a recours à une intégrale :
1) La pression $p(z)$ (en Pascal) de l'eau à la profondeur z est donnée par $p(z) = \rho g z$ où ρ est la densité de l'eau et g est la pression atmosphérique. Laforce de l'eau dF qui s'exerce sur une section de barrage de longueur ℓ et de très petite hauteur dz est fonction de la profondeur : $dF(z) = \rho g z \ell . dz$
Justifier ce résultat.
2) La force totale F exercée par l'eau sur un barrage de hauteur H est donc égale à
$\int_0^H \rho g z \ell . dz$
Calculer la force totale exercée sur un barrage de longueur 5 m, de hauteur H
(on donne : $g = 10 m.s^{-2}$ et $\rho = 1000 kg.m^3$)

<u>Réponses</u> :
1) $ds = z \times \ell$
2) $F = 1000 \times 10 \times 5 \int_0^H z dz = 25000 H^2$ *Newton*

V - Méthode de Monte Carlo

D’après http://www.tangentex.com/MonteCarlo.htm#Par1

Toutes les méthodes citées ci-dessus partent de l'hypothèse que l'aire à calculer (la fonction à intégrer) n'est pas trop tourmentée et que la surface peut être facilement découpée en rectangles ou trapèzes. Si l'aire est « tarabiscotée », ces méthodes sont difficilement applicables, et encore plus lorsqu'il s'agit de volumes ou de dimensions supérieures ! Il a fallu trouver autre chose. La solution est venue des probabilités et de l'aléatoire. Elle repose sur la méthode de Monte-Carlo, universellement exploitée dans le monde de la simulation pour sa puissance et son efficacité.

Cependant la méthode de Monte-Carlo est une méthode moins précise que les méthodes d'intégration vues ci-dessus. Son manque de précision est dû à son principe, mais aussi à l'usage obligatoire d'un générateur de nombres aléatoires, dont la qualité influe sur la précision du calcul.

Pour comprendre la méthode : imaginons que vous vouliez mesurer la surface d'un étang. Les contours de cet étang sont loin d'être réguliers ! Et vous ne disposez que d'un tas de cailloux, d'une chaine d'arpenteur et de votre intelligence... Voici le moyen proposé par Rubin H Landau, professeur à l’université de l’Oregon (qui, semble-t-il, a emprunté cet exemple à H. Gould) :

- vous entourez l'étang dans un carré dont vous mesurez les côtés avec la chaine d'arpenteur et calculez l’aire, ce qui devrait être simple... Soit Ac l'aire du carré et Ae l'aire de l'étang.
- on a Ae <Ac
- vous jetez les cailloux, beaucoup de cailloux, dans le carré ainsi délimité, en prenant soin de varier de façon aléatoire la direction et la distance de jet. Sans doute plus facile à écrire qu'à faire !
- à chaque jet, vous écoutez le bruit provoqué par la chute du caillou : s'il tombe dans l'eau, vous ajoutez 1 à la somme des cailloux tombés dans l'eau, nommée Se, et s'il tombe au sol, vous ajoutez 1 à la somme des cailloux tombés au sol dans le carré, nommée Ss. Vous ignorez les cailloux tombés hors du carré.
- Vous lancez un bon millier de cailloux ou plus si vous avez la patience...Eton admet que la proportion du nombre de cailloux tombés dans l’étang sur le nombre total de cailloux est égale au rapport des aires, $\frac{\text{Ae}}{\text{Ac}}$.

1) Méthode de Monte Carlo pour calculer l'aire $\mathcal{A}_{Cf}$ sous la courbe d'une fonction f sur un intervalle [a,b]

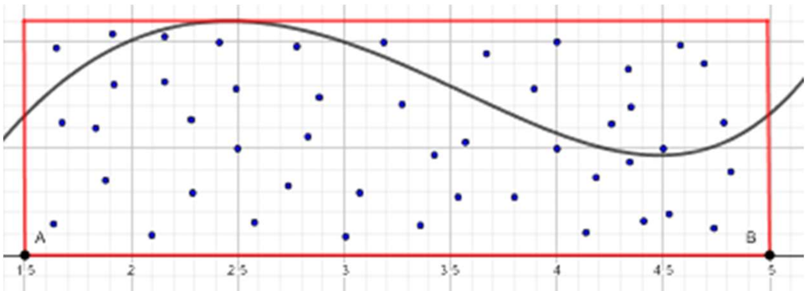
D’après https://www.codingame.com/playgrounds/17176/recueil-dexercices-pour-apprendre-python-au-lycee/la-methode-de-monte-carlo

1. On choisit un rectangle qui contient l'aire $\mathcal{A}_{Cf}$ que l'on veut calculer. Le plus simple est de prendre le rectangle dont un coté est le segment [AB] où A(a,0) et B(b,0) et dont l'autre côté vaut le maximum M de f sur $[a\ ;\ b]$.

   L'aire $\mathcal{A}$ de ce rectangle est donc

   $$(b-a) \times M$$

2. A l'aide d'un algorithme on génère des points au hasard dans le rectangle. On admet que la probabilité qu'un point soit dans la surface « sous la courbe » est égale au rapport de l'aire de cette surface sur celle du rectangle.
3. Soit N_0 le nombre des points situés dans le rectangle (plus le nombre de points est important plus le résultat sera précis).



4. On compte le nombre N de points qui sont dans la surface que l'on cherche à approximer (ici on compte les points sous la courbe).
5. On a admis que $\frac{N}{N_0}$ est égal au rapport des aires $\frac{\mathcal{A}_{Cf}}{\mathcal{A}}$.

   L'approximation de l'aire cherchée est alors $\frac{N}{N_0} \times \mathcal{A}$.

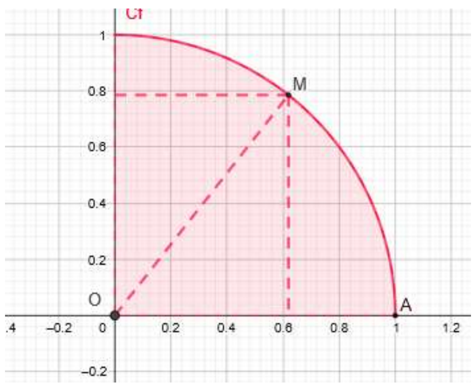
2) Exercice d'application (voir Belin 1ère Métamaths page 289)

Dans un repère orthonormé (O, I, J), le quart de cercle ci-dessous, de centre O et de rayon 1, est la représentation graphique d'une fonction f définie sur [0 ;1]. Pour tout point M un point du quart de cercle de coordonnées (x, y) dans le repère (O, I, J) on a $^2 + y^2 = 1$.

La fonction f est donc définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

Pour tout x de [0 ;1], $f(x) \geq 0$ donc l'aire du quart de disque est donnée par l'intégrale

$A = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx.$



A ce niveau de classe, on ne sait pas calculer cette intégrale mais on peut utiliser la méthode de Monte-Carlo pour en déterminer une valeur approchée, ce qui, au passage, nous en donne une de $\frac{\pi}{4}$.

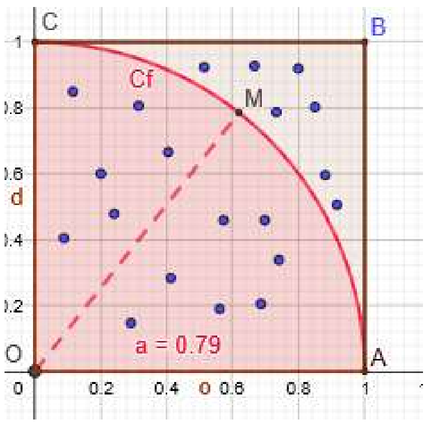
<u>Script Python</u> :

La fonction « def point ( ) : » génère, pour x et pour y, des nombres aléatoires dans l'intervalle $[0; 1]$. Elle affiche 1 si le nombre vérifie $x^2 + y^2 \leq 1$ et 0 sinon.

La fonction « echantillon (n) : » comptabilise le nombre de « points » qui vérifient $x^2 + y^2 \leq 1$ dans un échantillon de taille n, c'est-à-dire les points situés dans le quart de disque et affiche ensuite la fréquence de ces points dans l'échantillon.

```
from random import *
def point():
    x=random()
    y=random()
    if x**2+y**2<=1:
        p=1
    else:
        p=0
    return p


def echantillon(n):
    s=0
    for i in range(n):
        s=s+point()
    return s/n
```

a) Quelle est l'aire du carré OABC dessiné ci-dessous ? Expliquer pourquoi le résultat s/n du programme donne une approximation de l'aire du quart de disque.



b) On a fait fonctionner ce programme pour différentes valeurs de n et plusieurs fois pour n=1 000 000.

Les résultats sont indiqués ci-contre. Quelles remarques peut-on faire ?

```
>>> echantillon(100)
0.78
>>> echantillon(1000)
0.794
>>> echantillon(1000000)
0.784955
>>> echantillon(1000000)
0.785889
>>> echantillon(1000000)
0.785529
```

ANNEXES

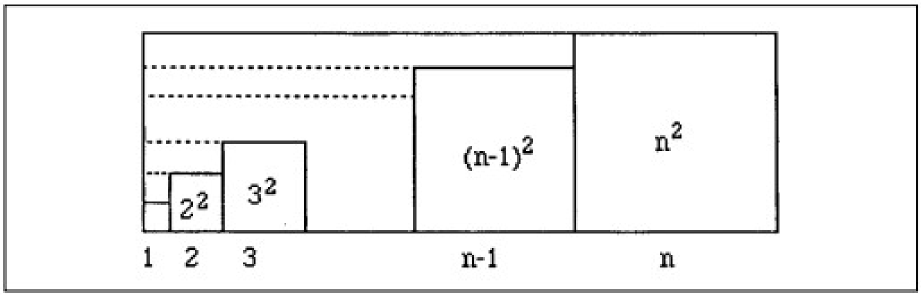
Annexe 1 : Une alternative géométrique pour calculer $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$

Partie C– Aire et intégrale

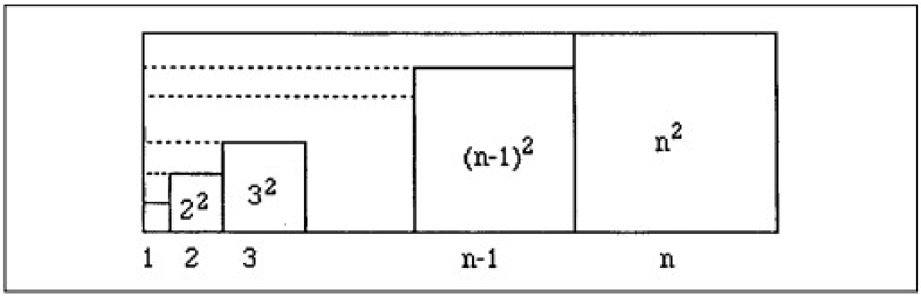
Exemple d'introduction : Une alternative à la question 2) b) pour montrer que $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

On peut aussi en donner une variante géométrique à la place de la récurrence pour la deuxième partie de la question 2)b), en proposant d'établir, à partir du dessin de la figure ci-dessous, la relation :

$S_2(n) = n(1 + 2 + 3 + \ldots + n) - \{ 1 + [1 + 2] + [1 + 2 + 3] + \ldots \ldots + [1 + 2 + \ldots + (n - 1)] \}$,
en enlevant de l'aire du rectangle la somme de celles des bandes horizontales, et en utilisant l'égalité $1+2+\ldots n= \frac{n(n+1)}{2}$



Indications



S_2 (n)= $1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2+n^2$= Aire du rectangle à laquelle on enlève les aires des « bandes » de largeur 1 dessinées ci-dessus

S_2 (n)= (1+2+3+…(n-1)+n)×n - (1+(1+2)+(1+2+3)+...(1+2+3+ …+(n2))+(1+2+3+ …+ (n-2)+(n-1))

$S_2(n)=$ (1+2+3+…(n-1)+n)×n- $\sum_1^{n-1}\frac{k(k+1)}{2}=\frac{n^2(n+1)}{2}$ - $\sum_1^{n-1}(\frac{k^2}{2}+\frac{k}{2})=\frac{n^2(n+1)}{2}-\frac{S_2(n-1)\ )}{2}-\frac{(n-1)(n)}{4}$

Or $S_2(n-1) = S_2$ (n)-n². On en déduit que

$\frac{3S_{2(n)}}{2}=\frac{n^2(n+1)}{2}+\frac{n^2}{2}-\frac{(n-1)(n)}{4}=\frac{2n^3+3n^2+n}{4}$ d'où S_2 (n)= $\frac{2n^3+3n^2+n}{6}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Annexe 2 : Calcul de l'aire sous la courbe pour une fonction non monotone

Partie CI – 2) Cas d'une fonction continue mais non monotone sur [a ; b]

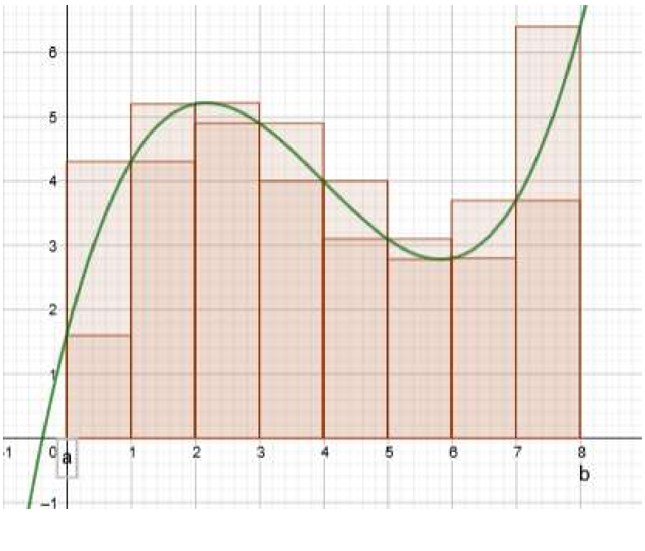
Sur chaque intervalle $I_k = [a + k \times h\,; a + (k+1) \times h]$ où $0 \leq k \leq n-1$ on considère les rectangles de hauteurs respectives les valeurs minimum et maximum de $f(x)$ et on introduit les suites (u_n) et (v_n) comme précédemment mais où les valeurs de $f(x)$ sont les minimum et maximum $f(x)$ sur chaque intervalle I_k que l'on note respectivement $minf(x)_{I_k}$ et $maxf(x)_{I_k}$.

Or pour tout k on a $minf(x)_{[a;b]} \leq minf(x)_{I_k}$ et $maxf(x)_{I_k} \leq maxf(x)_{[a;b]}$.

D'où

$v_n - u_n \leq \frac{b-a}{n} \times \left[maxf(x)_{[a;b]} - minf(x)_{[a;b]}\right]$

Finalement $u_n \leq \int_a^b f(x)dx \leq v_n$



Annexe 3 : Plusieurs manières de calculer des aires « sous des courbes » sans le recours aux intégrales

1) La méthode d'exhaustion.

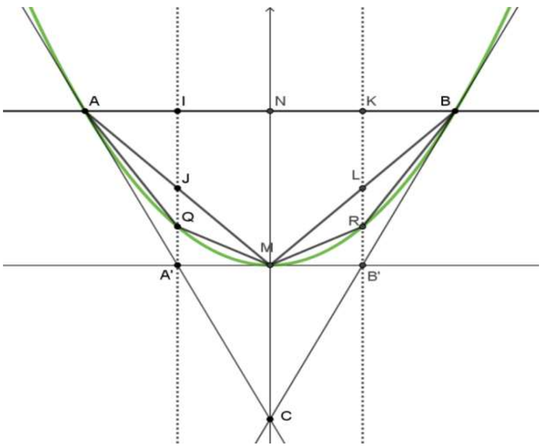
Cette méthode était utilisée dès les travaux d'Euclide et d'Archimède, alors que ces mathématiciens ne disposaient ni de la notion de limite de suite ni même de la notion de nombre réel. Ils travaillaient sur des grandeurs (par exemple des aires).

Le principe, pour montrer qu'une aire est égale à S, consiste à comparer S et une autre grandeur L et à montrer qu'on ne peut avoir ni S > L ni S < L.

Mais cette utilisation doit être adaptée à chaque situation.

Euclide démontre avec cette méthode que l'aire du disque est proportionnelle au carré de son diamètre (cf. page 24). Pour arriver aux deux contradictions, il utilise des polygones « intermédiaires ».

Archimède utilise cette méthode pour calculer l'aire Σ d'un segment de parabole (cf. page 30).



En fait, dans la méthode originelle[22], il a besoin pour cela à la fois de ce qui s'appellera l'axiome d'Archimède, qui correspond à une propriété des nombres réels et de l'égalité donnant la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison ¼.

Nous en donnons les énoncés, qui éclairent bien la difficulté de « se passer » des limites :

Axiome d'Archimède : étant donné deux grandeurs inégales, si de la plus grande on retranche plus que sa moitié, puis du reste on retranche encore plus que sa moitié, et ainsi de suite, on aboutit à une grandeur inférieure à la plus petite des grandeurs données.

Autrement dit si b>a, on fait b – c où c > b/2, puis b – c – d où d > (b-c)/2 etc…
alors b – c- d - … < a

Autrement dit encore, de manière moderne, il existe un entier n tel que na > b (ou a > b/n)

Somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison ¼

On appelle T l'aire du triangle AMB.

On calcule de proche en proche l'aire des triangles successifs inscrits dans le segment de parabole en suivant le même procédé que pour passer de AMB à AQM et BRN.

[22] Ici on donne un arrangement de la méthode qui est plus accessible aux élèves

On a

$$\boldsymbol{T_n = T + \frac{1}{4}T + \cdots + \frac{1}{4^n}T = T[1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{4}\right)^n]}$$

Or $\mathbf{1} + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1-(\frac{1}{4})^n}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}[\mathbf{1} - (\frac{1}{4})^{n+1}]$

On a donc $T_n = \frac{4}{3}T - \frac{1}{3} \times \frac{T}{4^n}$ ou encore $T_n + \frac{1}{3} \times \frac{T}{4^n} = \frac{4}{3}T$ (égalité utilisée par Archimède)

Grâce à ces deux propriétés Archimède démontre que l'aire cherchée est égale à 4/3 T en démontrant que les deux inégalités $\Sigma < 4/3T$ et $\Sigma > 4/3T$ sont impossibles.

2) **Approximation par des suites**
Les deux démarches sont proches mais ne mettent pas en jeu les mêmes théorèmes relatifs à la convergence des suites.

On appelle S l'aire cherchée. On trouve deux suites (u_n) et (v_n) telles que pour tout n $u_n < S < v_n$ (les inégalités peuvent être larges).
Ces suites peuvent être la suite des aires de rectangles ou de trapèzes ou de polygones réguliers, respectivement sous et au-dessus de la courbe, ou inscrites et circonscrites à la courbe, et approchant de mieux en mieux l'aire S.

i) On peut montrer directement que les deux suites ont la même limite L.
Alors S = L car $L \leq S \leq L$
En effet on peut revenir à la définition des limites ou évoquer l'analogue du théorème des gendarmes. C'est ce qui est mis en fonctionnement par exemple dans la méthode des rectangles pages 46-47.

ii) On peut montrer que les deux suites sont adjacentes : (u_n) croissante, (v_n) décroissante et $\lim (u_n - v_n) = 0$.
Alors ces deux suites convergent vers S, qui reste à déterminer.
C'est ce qui est utilisé par exemple pages27-28, comme pour approcher l'aire du disque.

iii) On peut aussi ne considérer qu'une suite d'aires de rectangles ou trapèzes et montrer que cette suite converge vers l'aire cherchée (cf. page 43).

Ressource transversale

NOMBRE D'OR ET SUITES DE FIBONACCI

Un vieux classique revisité

(55 pages)

Le document peut être téléchargé ici :

http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/B101/Nombre_d_or.docx

http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/B101/Nombre_d_or.pdf

Un vieux classique revisité : nombre d'or et suites de Fibonacci(de la seconde à la terminale).

Les ressources ci-dessous ne sont pas originales, elles sont réunies et classées en fonction des connaissances mises en œuvre dans les différents domaines où on retrouve ces nombres.

Ce texte propose plusieurs types d'écrits : une introduction générale présente rapidement les définitions (sur lesquelles on revient ensuite) et positionne le nombre d'or et les suites de Fibonacci dans l'histoire. Puis des exercices classiques sont proposés, classés en quatre parties, indexées par le principal domaine des mathématiques qui est en jeu (géométrie plane, analyse, arithmétique, algèbre linéaire) et accompagnés de commentaires. Presque tous les exercices peuvent être traités conformément aux programmes, qui sont d'ailleurs précisés. Cependant dans quelques cas, on admet (en l'indiquant) des éléments hors-programme à utiliser pour résoudre l'exercice : cela prépare à certains énoncés, y compris de baccalauréat, où il faut s'approprier des connaissances inconnues pour avancer. Des annexes offrent des pistes complémentaires ou des enrichissements.

Chaque partie est ainsi introduite par un aperçu sur l'intervention du nombre d'or et/ou des suites de Fibonacci dans le domaine mathématique considéré.

Les exercices ont en général un titre, et, avant la correction, on indique ce que l'énoncé permet de travailler, en distinguant, le cas échéant, selon les niveaux scolaires et les programmes, les (diverses) connaissances mobilisables.

Les corrections prennent plusieurs formes, ce peuvent être des démonstrations rédigées, des corrigés succincts ou des indications.

La table de matière classique est doublée par une table par niveau scolaire.

Signalons une vidéo, de vulgarisation pour le grand public, qui développe des aspects non mathématiques du nombre d'or (liés au monde la peinture et de l'architecture et à la botanique). Cela peut intéresser des élèves voulant produire un dossier couvrant plusieurs champs disciplinaires :
https://www.youtube.com/watch?v=wm736xfNINQ

Table matières I

I Introduction - pour la (petite) histoire : attention aux mythes ! p. 5
II En géométrie plane p. 9
III En analyse p. 27
IV En arithmétique p. 36
V En algèbre linéaire p. 41
Références bibliographiques p. 44
Annexes p. 46
- **Anciennes mesures**
- **Axiomes de l'ensemble des entiers**
- **Rectangles de Fibonacci**
- **Pavages de Penrose**
- **Fibonacci : des modélisations…**

Développements récents
Spirales
Vers des applications en botanique
Entiers : routes et dédales

Une chronologie du début de l'histoire du nombre d'or
Autres pistes

Table des matières II

Géométrie

Seconde		Connaissances mobilisables
Exercice 1 Caractériser les rectangles d'or à partir des mesures de leurs côtés **Exercice 2** Caractériser géométriquement les rectangles d'or	p. 10 p. 11	Ces exercices font travailler une condition nécessaire et suffisante (raisonnement logique) et des calculs de rapports.
Exercice 3 Une propriété géométrique élémentaire « amusante » : un alignement	p. 12	Théorème de Thalès: on montre que deux points sont confondus – ou colinéarité de deux vecteurs
Exercice 4 Triangles d'or	p. 14	Calculs d'angles dans des triangles, angles et droites parallèles, théorème de Thalès : cela utilise des propriétés de la bissectrice d'un angle du triangle
Exercice 4 bis Caractérisation angulaire des triangles d'or d'angles aigus (deux méthodes)	p. 16	La notion de triangles semblables (niveau collège) est rappelée et utilisée et suffit pour la première méthode.
Exercice 5 Lignes trigonométriques liées au nombre d'or	p. 17	On démontre que $\Phi = 2cos(36°)$ Utilise la trigonométrie dans un triangle rectangle
Exercice 6 Le triangle de Kepler	p. 19	
Exercice 7 Le nombre d'or dans les pentagones réguliers	p. 21	Deux méthodes pour les calculs d'angles dans un pentagone régulier. Angle inscrit, angle au centre
Exercice 8 Construire à la règle et au compas une longueur égale au nombre d'or	p. 21	Théorème de Pythagore
Exercice 9 Un programme de construction d'un rectangle d'or à la règle et au compas	p.22	Suivre un programme de construction et justifier le résultat de cette construction. Théorème de Pythagore.

Première		Connaissances mobilisables
Exercice 3 Une propriété géométrique élémentaire « amusante » : vecteurs	p.12	Colinéarité de deux vecteurs
Exercice 5 Lignes trigonométriques liées au nombre d'or	p.17	On démontre que $cos(\frac{\pi}{5}) = \frac{\phi}{2}$ et $2cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{1}{\phi}$ Trigonométrie dans un triangle rectangle.

Terminale		Connaissances mobilisables
Problème10 Nombres complexes et rectangles d'or	p. 24	Nombres complexes : forme algébrique, interprétation géométrique, caractérisation de l'alignement et de l'orthogonalité. La notion de similitude est sous-jacente.
Exercice 11 Calculs de cos($2\pi/5$) et cos($\pi/5$) en fonction du nombre d'or avec les nombres complexes	p. 26	Forme trigonométrique des nombres complexes, racines cinquièmes de l'unité, équation du 2d degré à coefficients réels.

Analyse

Première		Connaissances mobilisables
Exercice 1 Le nombre d'or solution d'une équation du second degré	p. 27	Equation du 2d degré

Terminale en enseignement de spécialité		Connaissances mobilisables
Exercice 2 Une relation entre nombre d'or et nombres de Fibonacci : calcul des puissances du nombre d'or	p. 28	Raisonnement par récurrence
Exercices 3 et 4 Le nombre d'or limite d'une suite croissante associée à une fonction croissante	p. 29 p. 29	Etude du sens de variation d'une suite par un raisonnement par récurrence ou directement par calculs algébriques.
Exercice 5 Le nombre d'or limite d'une suite associée à une fonction croissante en faisant intervenir une suite intermédiaire	p. 31	Fait intervenir une suite géométrique intermédiaire.
Exercice 6 Le nombre d'or comme limite d'une suite associée à une fonction décroissante, faisant intervenir la limite commune de deux sous suites extraites.	p. 32	Fait intervenir des suites adjacentes (cf. approfondissement).
Exercice 7 Le nombre d'or comme limite d'une suite associée à une fonction décroissante, limite obtenue en majorant $v_n - \varphi$	p. 33	Majoration par une suite géométrique convergente
Exercice 8 Etude de la limite du rapport (a_{n+1}/a_n) de deux termes successifs de la suite de Fibonacci.	p. 35	

Arithmétique

Terminale Mathématiques expertes		Connaissances mobilisables
Exercice 1 L'irrationalité du nombre d'or	p. 36	Plusieurs démonstrations : * Raisonnement par l'absurde * En utilisant un axiome vérifié par l'ensemble des entiers
Exercice 2 Une relation algébrique entre un terme de la suite et la somme de termes bien choisis	p. 37	Calcul algébrique et raisonnement par récurrence

Exercice 3 Une deuxième relation entre termes, somme des termes et carrés des termes	p. 38	Calcul algébrique et raisonnement par récurrence
Exercice 4 Nombres premiers entre eux	p. 38	Algorithme d'Euclide
Exercice 5 Calcul des longueurs et largeurs des rectangles d'or successifs (imbriqués)	p. 39	La figure est celle du problème 9 pages 18 et 19

Algèbre linéaire

Exercice 1 Une structure sur l'ensemble des suites doublement linéaires	p. 41	Cet exercice est en dehors du programme. Il utilise la notion d'espace vectoriel, les définitions des suites arithmétiques et géométriques.
Exercice 2 Une matrice formée de nombres de Fibonacci, notés a(n), pour établir des propriétés arithmétiques de ces nombres	p. 42	Relève de Mathématiques expertes. Produit de matrices, raisonnement par récurrence.
Exercice 3 Une matrice à diagonaliser pour obtenir la formule de Binet	p. 43	Relève de Mathématiques expertes. Produit de matrices, raisonnement par récurrence.

Introduction - pour la (petite) histoire : attention aux mythes !

Il y a beaucoup d'écrits très divers sur le nombre d'or et la suite de Fibonacci, livres, articles (dont un certain nombre sur internet), exercices, … Des expositions sont encore consacrées à ce sujet, ainsi que des vidéos et même des mémoires d'élèves! Cependant ces textes sont très variés, voire hétéroclites, et les historiens nous apprennent à nous méfier de certains d'entre eux, surtout hors mathématiques. On peut ainsi signaler que les documents sur Internet ayant trait aux arts ou même à l'irruption du nombre d'or dans la nature ne sont pas tous exacts, peuvent être incomplets. De plus ce sont souvent les mêmes choses qui manquent dans tous les documents. Enfin ce qui est signalé à partir de différents mots clefs peut quelquefois révéler des surprises : un document sur le nombre d'or peut échapper à la première sélection trouvée et n'apparaître qu'à la suite d'un changement insignifiant ou non de mot clef.

Nous nous intéressons d'abord au nombre d'or puis à la suite de Fibonacci (et à ses termes, les nombres de Fibonacci)

Une des curiosités de ce nombre est son apparition dans des domaines variés – art et sciences. Et même mesures (Moyen Age)- en annexe, anatomie peut-être (Vitruve, Vinci ?) et musique ! Cependant il s'agit le plus souvent d'une reconnaissance de la présence du nombre, et même d'une approximation de ce nombre, mais très rarement d'un moyen de production ou outil avéré dans la situation considérée. On « reconnait » ainsi par exemple le nombre d'or en architecture et en peinture à partir de mesures prises sur des rectangles ou des pentagones que l'on fait apparaître sur des monuments ou des tableaux. Répétons-le, beaucoup d'approximations sont inévitablement en jeu lorsqu'on affecte le nombre d'or à des constructions réelles ou à des phénomènes naturels mesurés. Plus troublant peut-être, on peut reconnaître le nombre d'or ou ses approximations en phyllotaxie (étude de l'organisation des feuilles sur une tige de plante) et même en physique. En fait beaucoup des écrits où le nombre d'or apparait sont assez récents (19ème, 20ème). D'ailleurs il existait un autre nombre d'or, relié à des cycles lunaires jusqu'à récemment (cf. annexe).

En fait deux problèmes philosophiques font irruption ici. D'une part se pose la question de l'association de la beauté (esthétique, harmonie) à des nombres, comme le pensaient les grecs : cela donne lieu, surtout à partir du 19ème siècle, à beaucoup d'approximations[1], pour retrouver artificiellement le nombre d'or ou des figures qui y sont liées dans des productions artistiques pourtant vraisemblablement effectuées indépendamment. D'autre part se pose la question de l'utilisation des mathématiques dans d'autres domaines scientifiques. Dans ce cas, souvent ce ne sont pas des problèmes liés à ces domaines qui sont à l'origine des développements mathématiques utilisés, ce qui peut interpeler[2]. Ainsi les irruptions du nombre d'or ou des suites de Fibonacci en sciences expérimentales, y compris assez récentes, sont, sauf exception, bien postérieures à l'apparition de ces notions en mathématiques.

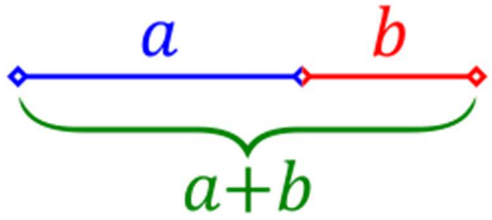
[1] voire à des théories.
[2] On peut écouter à ce sujet la conférence de E. Klein sur le thème « à quoi servent les mathématiques ? »

Le nombre d'or est apparu chez Euclide (dans les éléments, volume VI, 300 av J.C.), si ce n'est avant[3], sous forme d'une définition (la 3) précisant un rapport (ou une proportion) particulier(e) :

> « Une droite est dite divisée en moyenne et extrême raison quand la longueur totale de la droite est à la grande partie ce que cette dernière est à la petite partie. »

Il faut comprendre segment à la place de droite… Raison se dirait plutôt « ratio »

De manière moderne, cela s'écrit (1) $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$ (rapport égal au futur nombre d'or), où a et b sont non nuls et a > b (cf. « la grande partie » ci-dessus)



Remarquons tout de suite qu'on peut écrire (1) de manière équivalente $\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b}$ car les deux égalités se ramènent à $a^2 - ab = b^2$

Le (futur) nombre d'or est la valeur commune des rapports qui interviennent. Ce nombre en tant que tel est complétement hors champ pour Euclide, qui en reste à une proportion[4]. Il ne peut non plus être question chez Euclide d'approximation décimale !

Il convient de fait d'être attentif à la signification de ces rapports, écrits en écriture fractionnaire.
En effet on pourrait se demander que peuvent valoir a et b pour que (a +b) : a = a : b ?
Ou encore (a + b)/a = a/b ou encore 1 + b/a = a/b ?
Il ne faut pas déduire de l'écriture qu'il existerait des entiers vérifiant l'égalité

Essayons avec des entiers pour en avoir une première idée :

a = 8, b = 5 (a+b)/b = **1,625** ≠ (a/b = **1,6**)

a = 10, b = 6 (a+b)/b = 16/10 = **1,60** ≠ (a/b = 10/6 = **1,66**…)

a = 100, b = 61, (a+b)/b = 161/100 = **1,61** ≠ (a/b = **1,639**…)

a = 1000, b = 618, (a+b)/b= **1,6180** ≠ (a/b = **1,6181**…)

a = 10000, b = 6180, (a+b)/b = **1,6180** ≠ (a/b = **1,6181**)

En fait **on ne peut pas trouver deux entiers a et b** tels que a/b vérifie cette égalité, ce nombre d'or est un « irrationnel » et c'est l'objet d'un exercice ultérieur.

[3] Il y a encore des discussions entre historiens sur les origines et les apparitions du nombre d'or, dans lesquelles nous ne rentrons pas ici. Comme le pentagramme semble cher aux Pythagoriciens, et que le nombre d'or apparait dans les pentagones réguliers associés, d'aucuns associent le nombre et Pythagore (5ème siècle avant J.C).

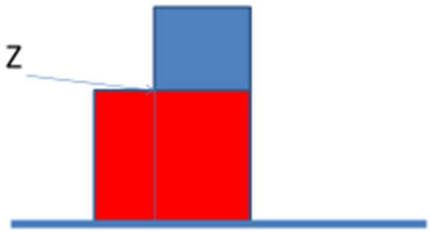
[4] Pour les Grecs de l'Antiquité, le problème fondamental est l'existence de grandeurs incommensurables, comme le côté et la diagonale d'un carré. Or, pour eux, les nombres sont les nombres entiers supérieurs ou égaux à 2. On peut considérer des proportions entre ces nombres, mais les nombres entiers et les proportions entre nombres entiers ne suffisent pas à rendre compte des grandeurs géométriques.

Il suffit d'arranger l'équation (1) pour trouver l'équation (2) $x^2 = x + 1$, dont le nombre d'or est la solution positive $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. La calculatrice donne l'approximation décimale ϕ =1,618… Cette écriture décimale illimitée (non périodique du fait de l'irrationalité du nombre) aurait été trouvée en 1597, par Mästlin (astronome et mathématicien allemand) – trouvé dans une lettre à son collègue de Kepler

On peut ainsi écrire que ϕ est l'unique nombre positif tel que

$$\boxed{\phi^2 = \phi + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \frac{1}{\phi} = \phi \quad (3)}$$

D'où sort l'intérêt pour ce rapport ?
Cela aurait une relation avec des problèmes de champs au temps des Égyptiens (cf. Deledicq)
Folklore ou non, le problème suivant est traité dans le livre II des éléments d'Euclide, donc avant la définition donnée ci-dessus.
Un paysan possède le champ carré rouge initial représenté sur la figure et doit céder, suite à l'inondation du Nil et à la restructuration des terres, le rectangle rouge dessiné à gauche. Il demande à récupérer un champ carré au-dessus de son bien, représenté en bleu, de même surface que le rectangle qu'il doit céder.



On part d'un carré (rouge) de côté A + B.
Le carré bleu doit avoir la même surface que le rectangle rouge à gauche
Euclide propose une construction de Z dans un livre antérieur à celui qui donne la définition qui met en jeu (**implicitement**) la proportion « nombre d'or » (II, prop. 11)
Dans notre façon d'écrire moderne :
$A^2 = (A + B) \times B$

Changements de noms

Au fur et à mesure du développement des mathématiques, le nombre d'or a pu être calculé de différentes manières, grâce aux progrès dans les résolutions d'équations, les calculs de racines carrées, l'introduction des décimaux, etc. Cependant il est revenu de temps en temps sur le devant de la scène notamment avec des changements de noms.

Ainsi, au 15ème siècle, Pacioli parlera de « divine proportion », au 16ième siècle Kepler et Girard utiliseront « section dorée ». Ces appellations section dorée, puis section d'or, sont apparues d'ailleurs de manière diverse, selon les auteurs, quelquefois déjà sous la plume de Vinci, ami de Pacioli, ou encore de Zeiting ou de Ohm au 19ème siècle. Quant au « nombre d'or », c'est ainsi que l'a appelé un écrivain roumain Ghyka, au 20ème siècle dans un traité sur l'esthétique (1932). Ce nom s'est alors diffusé éclipsant l'autre sens du mot (lié aux cycles lunaires et solaires en astronomie !) – voir annexe.

Le symbole phi (ϕ), utilisé pour le noter aujourd'hui, n'a été introduit qu'au début du XXème (par un sculpteur, Cook, à cause de Phidias, architecte du Parthénon).

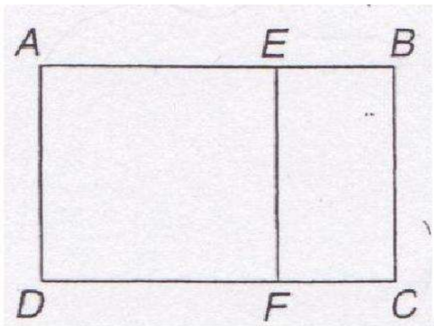
En résumé, le nombre d'or peut apparaître de plusieurs manières équivalentes, démontrées ci-dessous, comme :

- le nombre égal au quotient $\frac{a}{b}$ où a≠ 0 et a>b tel que $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$ ou encore $\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b}$ (1)

- la solution positive de l'équation $x^2 = x + 1$ (2)

- l'unique nombre positif tel que $\phi^2 = \phi + 1$ ou $1 + \frac{1}{\phi} = \phi$ (3)

On peut signaler aussi les rectangles d'or (dénomination d'origine moderne !), dont le format (longueur/largeur) est égal au nombre d'or. La proportion précédente est matérialisée par



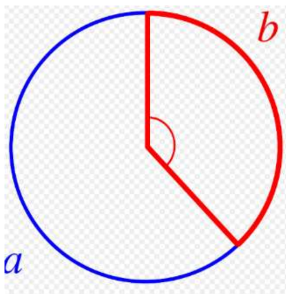
$\frac{AB}{AE} = \frac{AE}{EB}$; autrement dit le rectangle ABCD et le rectangle EBCF, obtenu à partir du premier en enlevant le carré construit sur AD ont le même format. On y reviendra, ainsi qu'aux pentagones réguliers dans lesquels on retrouve aussi cette proportion (entre diagonales et côtés).

On peut signaler un autre format très usuel : on prend une feuille de papier A4 ou A5 (par exemple A4 : 21x29,7) ; on coupe en deux la feuille (par une droite qui passe par les milieux des longueurs) – on obtient deux feuilles A5 (14,85x21) ; on constate que 29,7:21 ≈ 1,41 = 21:14,85… Cela caractérise les rectangles de ce format (différent du précédent) : en fait ici L/ l = l /(L:2) soit (L: l)² = 2 et $\frac{L}{l} = \sqrt{2}$.

De fait le nombre d'or est intervenu aussi dans des calculs de longueurs liés à des solides de l'espace : par exemple pour le calcul de la distance du sommet d'un icosaèdre régulier au plan opposé ou pour des calculs de mesures dans le dodécaèdre régulier. En fait ces calculs font intervenir une bonne connaissance de ces solides et des théorèmes de géométrie élémentaire. On n'y reviendra pas.

Pourquoi se restreindre à diviser un segment ? L'angle d'or

On peut aussi diviser le cercle en respectant la même proportion : on place un arc de cercle sur la circonférence d'un cercle tel que celle-ci soit divisée en deux arcs de cercle dont les longueurs sont dans un rapport égal au nombre d'or φ. L'angle d'or est l'angle correspondant au plus petit arc.



On peut écrire, en appelant c la longueur de la circonférence (c = a + b)

$$\frac{a}{b} = \varphi = \frac{c}{a}$$

On sait que les longueurs des arcs sont proportionnelles aux angles au centre correspondants :

Par suite, en appelant λ l'angle d'or on a $\frac{\lambda}{b} = \frac{2\pi}{a+b}$ d'où $\lambda = \frac{b2\pi}{a+b} = \frac{2\pi}{\frac{a}{b}+1} = \frac{2\pi}{\varphi+1} = \frac{2\pi}{\varphi^2}$

L'angle d'or, sous-tendu par l'arc de cercle b, mesure en radians :$\frac{2\pi}{\varphi^2}$ (en degrés environ 137,5°)

Venons-en à la suite de Fibonacci.

La suite de Fibonacci (dont les éléments s'appellent les nombres de Fibonacci) a été introduite aux 12-13ème siècles par le mathématicien du même nom, lequel semble n'avoir pas eu connaissance du nombre d'or. C'est la suite définie par $a_1 = a_2 = 1$, et pour tout entier $n \geq 3$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Le début des nombres de la liste est joint en note[5]. Cette suite « modélisait (!) une histoire de reproduction de lapins bien connue (cf. annexe).

Ce serait justement au temps du moine mathématicien Pacioli (15ème) qu'aurait été mise en évidence la relation entre le nombre d'or et la suite de Fibonacci (dans une note anonyme) : le quotient d'un terme de la suite par son précédent tend vers une approximation très proche du nombre d'or quand on prend des nombres élevés – on va en effet démontrer que la limite de la suite (a_n / a_{n-1}) est le nombre d'or. D'autres attribuent cette propriété à Kepler.

D'autres relations seront indiquées entre nombre d'or et nombres de Fibonacci, en particulier le calcul de ϕ^n en fonction de ϕ donne : $\boxed{\phi^n = a_n\phi + a_{n-1}}$

Nous allons maintenant développer les interventions du nombre d'or dans les différents domaines des mathématiques que nous avons retenus ici.

II En géométrie plane

Ce thème peut donner lieu à un travail de révision sur les théorèmes de géométrie élémentaires, par exemple en seconde. Il peut aussi être l'occasion, en terminale « Mathématiques expertes », de travailler les nombres complexes et les similitudes (sans expliciter complétement la notion de similitude). On peut aussi y trouver un problème de première, avec de la géométrie analytique plane, donnant lieu à un travail sur les vecteurs et le produit scalaire. Enfin, la trigonométrie peut aussi s'inviter dans un exercice à partir du nombre d'or, par le calcul de lignes trigonométriques particulières (sinus, cosinus) que ce soit à la fin du collège, en seconde ou grâce aux nombres complexes en terminale. De nombreuses constructions (avec ou sans GeoGebra) sont associées à ce nombre, mais il en reste peu dans les programmes !

Plusieurs configurations sont en jeu : rectangles, triangles, pentagones et pentagrammes, spirale.

Les exercices qui suivent sont classés en fonction du type de configuration en jeu et des programmes scolaires. Les principales connaissances à mobiliser sont indiquées.

1) Rectangles d'or (ou dorés)

Dans tout ce qui suit on appelle L et l les mesures des côtés des rectangles d'or donnés, avec L>l. On remarque que $\frac{L}{l}$> 1 (et non nul).

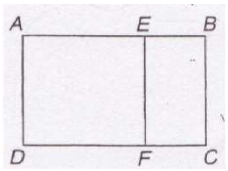
On pose comme définition : un rectangle est doré si $\frac{L}{l} = \phi$.

[5] 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377 …

Remarquons que cela sous-entend qu'on a défini auparavant le nombre d'orϕ. Cela peut être fait comme dans l'introduction, soit comme solution positive de l'équation (2) soit comme nombre positif vérifiant (3) dont on admet l'existence et l'unicité s'il y a lieu.

Remarquons aussi qu'il y a une infinité de rectangles d'or, seul leur format[6] est fixé.

On va faire démontrer en exercice des caractérisations des rectangles d'or puis une propriété géométrique « amusante ».



La première caractérisation est « numérique ». Elle fait intervenir des égalités de rapports. Cela peut donner lieu à une définition équivalente du rectangle d'or, à partir des deux rectangles précédents. Ceci a l'avantage de ne pas introduire la valeur du nombre d'or : un rectangle est doré si et seulement si le nouveau rectangle construit sur le plus petit côté du rectangle initial donné (en enlevant le carré construit sur la largeur) a le même format que ce rectangle initial.

Il faut cependant préciser, notamment si on travaille en seconde, la définition du nombre d'or adoptée, dans la mesure où les équations générales du second degré ne sont pas encore au programme.

Exercice 1 : caractériser les rectangles d'or à partir des mesures de leurs côtés

Montrer qu'un rectangle de longueur L et de largeur $l$est doré si et seulement si

$$\textbf{(1)}\ \frac{L}{l} = \frac{l}{L-l}$$

Cet exercice fait travailler une condition nécessaire et suffisante (donc un peu de raisonnement logique) et des calculs de rapports.

On part de la définition des rectangles d'or que nous nous sommes donnée : $\frac{L}{l} = \phi$.

Corrigé succinct

En première (faisant intervenir une équation du second degré)

On peut adopter comme définition du nombre d'or : c'est la solution positive de l'équation

$$x^2 - x - 1 = 0$$

On suppose l'égalité (1)$\frac{L}{l} = \frac{l}{L-l}$vérifiée.

Alors, en posant $x = \frac{L}{l}$ et en divisant numérateur et dénominateur de la fraction du deuxième membre par l, $\frac{L}{l} = \frac{l}{L-l}$ est équivalent à $x = \frac{1}{x-1}$soit $x^2 - x = 1$. La solution positive de cette équation est $x = \phi$ (car x est positif, comme rapport de longueurs).

[6] On rappelle qu'on appelle format d'un rectangle le rapport de la longueur sur la largeur (c'est un nombre plus grand que 1).

Le rectangle vérifie $\frac{L}{l}$= ϕ, il est donc doré.

Réciproquement, si $\frac{L}{l}$ = ϕ = x, alors on obtient l'égalité (1) à partir de $x^2 - x - 1 = 0$.

On a en effet$x(x - 1) = 1$. La solution positive de cette équation vérifie $x = \frac{1}{x-1}$

Or $\frac{l}{L-l} = \frac{1}{\frac{L}{l}-1}$ (obtenu en divisant numérateur et dénominateur de la fraction par l).

On a donc $\frac{l}{L-l} = \frac{1}{x-1} = x = \frac{L}{l}$

En seconde (travail sur les fractions)

On peut adopter ici comme définition du nombre d'or : c'est l'unique nombre positif tel que 1+1/ϕ=ϕ

[Rappel : Pour tous nombres réels *a*, *b*, *c* et *d*, tels que *b* et *d* non nuls, si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}$

Il suffit de poser $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ et de remplacer *a* par *kb* et *c* par *kd*]

Si on applique cette propriété à l'égalité (1)$\frac{L}{l} = \frac{l}{L-l}$on obtient

$\frac{L}{l} = \frac{l}{L-l} = \frac{L+l}{L}$ c'est-à-dire, en posant $x = \frac{L}{l}$, on a $x = 1 + \frac{1}{x}$d'où le résultat.

Réciproquement, si $\frac{L}{l} = 1 + \frac{l}{L} = \frac{L+l}{L}$, alors, en utilisant la propriété $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}$ on a $\frac{L+l}{L} = \frac{L}{l} = \frac{L+l-L}{L-l}$ ou encore $\frac{L}{l} = \frac{l}{L-l}$. Ce qui démontre qu'un rectangle de dimensions L et l vérifie $\frac{L}{l} = \frac{l}{L-l}$ est doré.

Exercice 2 : caractériser géométriquement les rectangles d'or

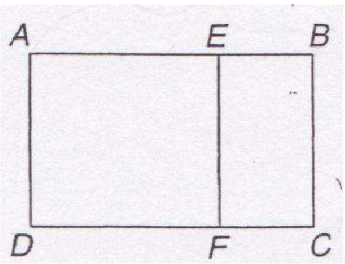
Cet exercice permet de définir géométriquement un rectangle d'or.

Contrairement à l'exercice 1, on raisonne directement par équivalences.

On part de la définition des rectangles d'or que nous nous sommes donnée : $\frac{L}{l}$= ϕ.

On pose AB = L et AE = AD= l.

On construit le rectangle EBCF à partir du rectangle ABCD en « enlevant » le carré AEFD.



1) Montrer que ABCD est doré si et seulement si$\frac{AB}{AD} = \frac{EF}{EB}$

11

2) Interpréter cette condition nécessaire et suffisante (CNS) et donner une nouvelle définition des rectangles d'or équivalente à la première.
3) Peut-on réitérer la construction ?

Indications

1) Le rapport des mesures des côtés du rectangle ABCD, $\frac{L}{l}$, est égal au rapport $\frac{l}{L-l}$ des mesures des côtés du rectangle EBCF :$\frac{AB}{AD} = \frac{EF}{EB} \Leftrightarrow \frac{L}{l} = \frac{l}{L-l}$

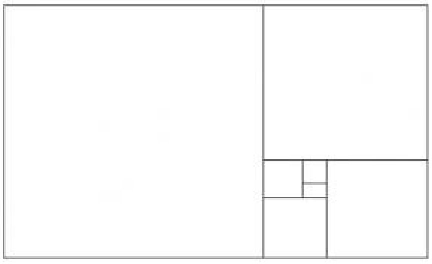
En utilisant les mêmes calculs que dans l'exercice précédent cela est équivalent à $\frac{L}{l}$ = ϕ.

Donc l'égalité des formats des deux rectangles est équivalente à la propriété : le rectangle ABCD est doré.

2) Si ABCD est doré, on a l'égalité des rapports (cf. l'exercice précédent).

Réciproquement, si on a l'égalité des rapports, le rectangle ABCD est doré et le rectangle EBCF quia le même format que ABCD, est doré d'après la définition que nous avons adoptée.

D'où une condition géométrique nécessaire et suffisante pour que ABCD soit doré : il a le même format que le rectangle EBCF. Cela pourrait servir de définition : un rectangle est doré si, en enlevant le carré construit sur sa largeur, le nouveau rectangle obtenu a le même format que le rectangle initial.



3) On peut réitérer la même construction, en enlevant à EBCF le carré construit sur [EB].Il résulte de ce qui précède que le nouveau rectangle obtenu (le 3ème) est doré. Et ainsi de suite (cf. figure ci-contre).

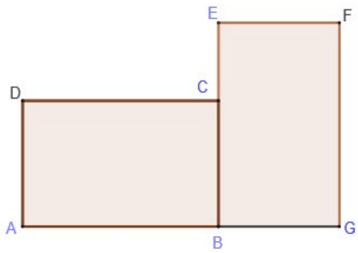
Exercice 3 : Une propriété géométrique élémentaire « amusante » : un alignement inattendu

On peut facilement faire visualiser cette propriété sur des cartes de crédit ou vertes, qui ont presque le format des rectangles d'or.

On considère les rectangles d'or ADCB et BEFG isométriques

du même côté de (AB) et tels que A, B et G soient alignés

(cf. figure ci-contre). On pose AB= L et AD=l



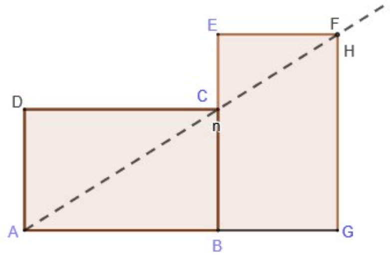
1) Montrer que la diagonale (AC) du rectangle « de gauche » passe

par le sommet F « en haut à droite » du rectangle de droite (figure ci-dessous).

On traduira en langage mathématique la propriété visuelle énoncée.

12

2) Énoncer la réciproque



1) Il s'agit de démontrer que A, C, F sont alignés ou encore que le sommet F appartient à la diagonale (AC).

Cette démonstration peut se faire ici par un raisonnement en deux temps : on considère l'intersection H des deux droites (AC) et (GF) en jeu et on montre, en utilisant le théorème de Thalès, que H et F sont confondus. Ce mode de raisonnement est assez inhabituel pour les élèves (ou on raisonne par l'absurde ou directement).

On peut aussi utiliser un repère et introduire des vecteurs dont on montre qu'ils sont colinéaires pour vérifier l'alignement des points A, C et F.

<u>Démonstration 1</u> (à partir de la seconde) : théorème de Thalès

On place les points A, B, C, D, E, F, G.

On appelle H l'intersection de la diagonale (AC) du premier rectangle ABCD et de la droite (FG).

a) Première piste : appelons k le nombre relatif qu'il faut ajouter à GF pour trouver la longueur GH. Ce nombre peut être positif ou négatif.

D'après le théorème de Thalès, $\frac{GH}{CB} = \frac{AG}{AB} \Leftrightarrow \frac{L+k}{l} = \frac{L+l}{L} \Leftrightarrow \frac{L+k}{l} = 1 + \frac{l}{L}$

Or $\frac{l}{L} = \frac{1}{\phi}$ donc $\frac{GH}{CB} = \frac{AG}{AB} \Leftrightarrow \phi + \frac{k}{l} = 1 + \frac{1}{\phi}$ Comme $1 + \frac{1}{\phi} = \phi$ on obtient k=0 et H=F.

b) Deuxième piste : $\frac{GH}{CB} = \frac{AG}{AB}$ soit $\frac{GH}{l} = \frac{L+l}{l} = 1 + \frac{1}{\phi} = \phi = \frac{L}{l}$ donc $GH = L$, donc H et F sont confondus, d'où H = F.

<u>Démonstration 2</u> (à partir de la seconde) : repère et vecteurs colinéaires

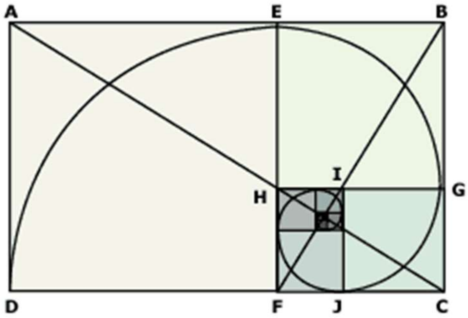
On se place dans un repère orthonormé d'origine A tel que B a pour coordonnées (L ; 0) et D(0 ; l). On a ainsi les coordonnées des points C(L ; l) et F : (L+l ; L) On en déduit les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AF}$.On a $\overrightarrow{AC}$(L ; l) et $\overrightarrow{AF}$(L+l ; L).

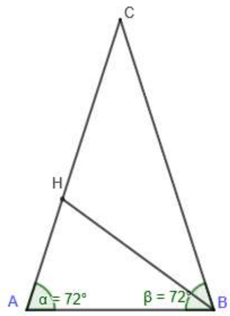
D'après les propriétés de ϕ on sait que 1+1/ϕ=ϕ (3) c'est à dire ici $\frac{L+l}{L} = \frac{L}{l}$.

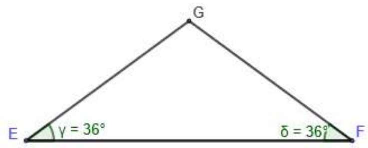
Par suite les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont colinéaires et donc les point A, C, F sont alignés.

2) Réciproque : si la diagonale (AC) passe par F, alors les deux rectangles (isométriques par hypothèse) sont dorés. Pour le démontrer on « remonte » les calculs précédents.

2) Rectangles et spirale : on trace un quart de cercle dans chaque carré successif construit sur les largeurs des rectangles successifs construits comme ci-dessus. On obtient un tracé très proche d'une spirale « logarithmique ».







*Une **spirale d'or** est une spirale logarithmique avec un facteur de croissance égal au nombre d'or. Une spirale d'or devient « plus large » d'un facteur de φ pour chaque quart de tour qu'elle fait.*

Un développement sur cette spirale est donné en annexe (en partie hors-programme).

3) Triangles d'or et lignes trigonométriques

Il y a deux triangles d'or : ce sont des triangles isocèles tels que, par définition, le rapport d'un côté du sommet sur la base (ou l'inverse) est égal au nombre d'or. Le triangle obtus, pour lequel c'est le rapport de la base sur le côté qui est égal au nombre d'or, s'appelle parfois triangle d'argent…

Les exercices qui suivent font travailler les propriétés angulaires élémentaires des configurations usuelles, ainsi qu'une propriété des bissectrices intérieures d'un triangle (ou les triangles semblables).

Exercice 4 : caractérisations angulaires des triangles d'or

Démontrer que les deux triangles représentés sont des triangles d'or (aux deux sens précédents).

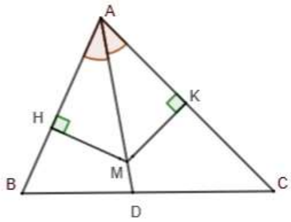
Il y a donc une infinité de triangles d'or, ayant leurs angles respectivement égaux, soit (72°, 72°,36°) soit (36°, 36°, 108°).

Démonstration (on travaille sur le triangle dont tous les angles sont aigus)

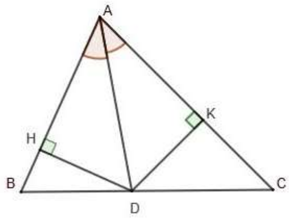
La démonstration, faite en 2), nécessite l'utilisation d'une des propriétés de la bissectrice, pour établir que $\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC}$. Elles sont rappelées ci-dessous.

1) Rappel 1 : tout point M de la bissectrice d'un angle est équidistant des côtés de cet angle (on se limite à des points de [AD]).

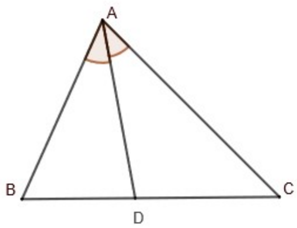
Pour le montrer, on introduit les projetés orthogonaux H et K de M sur (AB) et (AC). On peut comparer les triangles AMH et AMK : ils ont un côté commun, [AM] et les deux angles dont un des côtés est [AD] sont égaux. En effet, comme (AD) est bissectrice de CAB, les angles $\widehat{KAD\ et}\ \widehat{HAD}$ ont égaux, les deux autres angles en jeu sont les complémentaires de ces angles égaux donc sont aussi égaux. D'après un cas d'égalité des triangles, les triangles AMH et AMK sont égaux (isométriques) et, par suite, MH = MK.



D'où en particulier, en appelant H et K les projetés de D sur (AB) et (AD) : DH = DK. On évalue alors les aires des triangles ABD et ADC de deux manières : en introduisant la hauteur issue de A, (AL) ou en introduisant les hauteurs issues de D, (DH) et (DK). Le quotient des aires des deux triangles, calculé des deux manières donne l'égalité cherchée, $\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC}$

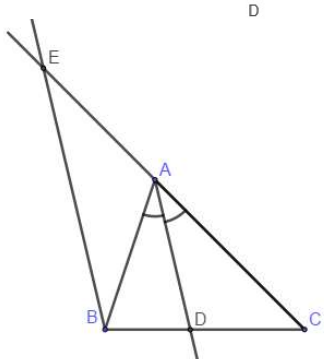


Rappel 2 : Le pied de la bissectrice d'un angle d'un triangle divise le côté opposé dans le rapport des deux autres côtés.



Avec les notations de la figure ci-contre on a : $\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC}$

En effet, dans le triangle ABC, on appelle D le pied de la bissectrice issue de A .



On trace par B la parallèle à la bissectrice issue de A qui coupe [AC] en E.

D'après le théorème de Thalès $\frac{CD}{CB} = \frac{AD}{EB} = \frac{CA}{CE}$ (*)

Or les angles correspondants $\widehat{CAD}$ et $\widehat{CEB}$ ont la même mesure, de même que les angles alternes-internes $\widehat{DAB}$et $\widehat{ABE}$. Par suite le triangle AEB est isocèle. Donc *AE* = *AB.*

De plus $\frac{DB}{DC}$= $\frac{CB-CD}{DC}$ = $\frac{CB}{DC} - 1$ et $\frac{AB}{AC}$ = $\frac{AE}{AC}$ = $\frac{CE-AC}{AC}$ = $\frac{CE}{AC}$ - 1

d'où, comme on a montré en (*), en remplaçant les rapports par leurs inverses, que $\frac{CB}{CD}$ = $\frac{CE}{CA}$ et enlevant 1 à chaque terme, on a finalement l'égalité cherchée : $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$

2) On revient aux triangles isocèles d'angles « à la base » de 72° et 36°.
Dans le triangle ABC, l'angle $\widehat{ACB}$ mesure 36° (somme des angles d'un triangle). On trace la bissectrice de l'angle $\hat{B}$. Les angles $\widehat{HBC}$, $\widehat{HCB}$ mesurent 36°, le triangle HCB est donc isocèle. De plus l'angle $\widehat{AHB}$ mesure 72° comme $\widehat{HAB}$ et donc AHB est isocèle. La bissectrice [BH) coupe le côté [AC] en H qui vérifie $\frac{HC}{HA} = \frac{BC}{BA}$ (propriété du pied de la bissectrice).
Or BC=CA et on a aussi HB = HC (triangles isocèles).
Et BA = HB (AHB triangle isocèle). On a donc BA = HC
Donc $\frac{HC}{HA} = \frac{AC}{HC}$: autrement dit H divise [AC] selon la proportion dorée. Et du même coup le rapport du côté [AC] sur le côté [AB] est égal au nombre d'or.

3) Les triangles BAH et CBA sont semblables (ils ont les mêmes angles). Cela permet d'obtenir l'égalité cherchée : $\frac{BA}{CA} = \frac{HC}{HA}$ qui assure que le premier rapport est le nombre d'or.

La démarche est la même pour le deuxième triangle.

Exercice 4 bis: Caractérisation angulaire des triangles d'or d'angles aigus (pour 2nde)

C'est un exercice équivalent au précédent mais posé d'une autre façon.

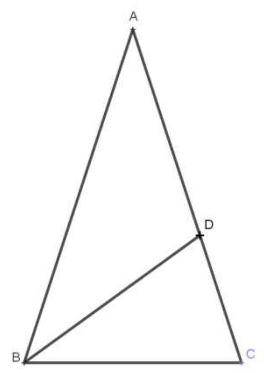
Partie 1 : de la propriété des mesures des côtés à une propriété angulaire

On veut déterminer les mesures des angles d'un triangle d'or (dans le cas où les angles sont aigus) en utilisant les propriétés de triangles semblables.

On rappelle que deux triangles sont semblables si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

- Leurs angles sont égaux deux à deux (1)
- Leurs côtés sont proportionnels (2)
- Ils ont un angle de même mesure compris entre deux côtés proportionnels (3)

Sur la figure, ABC est un triangle d'or ; on note a la longueur AB (ou AC) et b la longueur BC ; D est le point du segment [AC] tel que AD=b.



1) Démontrer l'égalité $\frac{CB}{CA} = \frac{CD}{CB}$

2) Démontrer que les triangles ABC et BDC sont semblables. En déduire que BD=b et que BDC est un triangle d'or.

3) On appelle α la mesure en degrés de l'angle $\widehat{\mathrm{BAC}}$.

a) Démontrer que (BD) est la bissectrice de l'angle $\widehat{\mathrm{ABC}}$.
b) Démontrer que la somme des mesures des angles du triangle BCD est égale à 5α.
c) En déduire la valeur de α et donner les mesures des angles du triangle d'or.

Partie 2 : la réciproque

On veut démontrer que si les mesures des angles d'un triangle sont 36, 72 et 72°, alors c'est un triangle d'or.

Soit ABC un triangle tel que $\widehat{\mathrm{A}} = 36°$ et $\widehat{\mathrm{B}} = \widehat{\mathrm{C}} = 72°$ (on peut choisir arbitrairement la longueur d'un côté). La bissectrice de $\widehat{\mathrm{B}}$ coupe (AC) en D.

1) Déterminer la mesure de $\widehat{\mathrm{BDC}}$. En déduire que les triangles ABC et DBC sont semblables.

2) On appelle a la longueur AB (ou AC) et b la longueur BC. Démontrer l'égalité : $\frac{a}{b} = 1 + \frac{b}{a}$

3) En déduire que ABC est un triangle d'or.

Indications

Partie 1

1) $\frac{CB}{CA} = \frac{b}{a} = \frac{1}{\phi}$ et $\frac{CD}{CB} = \frac{a-b}{b} = \frac{a}{b} - 1 = \phi - 1$ or $\phi - 1 = \frac{1}{\phi}$ d'où l'égalité

2) les triangles ABC et BDC ont l'angle $\hat{C}$ en commun, compris entre 2 côtés proportionnels d'après 1. Donc ils sont semblables par (3). BDC est donc isocèle en B et BD=b.

$\frac{BC}{CD} = \frac{b}{a-b} = \frac{a}{b} = \phi$ donc BCD est un triangle d'or.

3) a) ADB isocèle en D donc $\widehat{ABD} = \alpha$; ABC et BDC semblables donc $\widehat{\mathrm{DBC}} = \alpha$

b) ABC isocèle en A donc $\widehat{\mathrm{ACB}} = \widehat{\mathrm{ABC}} = 2\alpha$

BDC isocèle en B donc $\widehat{BDC} = 2\alpha$

La somme des trois angles vaut 5α et 180° donc $\alpha = 36°$ et les angles à la base mesurent 72°.

Partie 2

1) $\widehat{\mathrm{BDC}} = 180 - 36 - 72 = 72°$

Les triangles ABC et DBC ont leurs angles égaux deux à deux : ils sont semblables.

2) Les côtés des triangles ABC et DBC sont proportionnels (2) $\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{CD}$

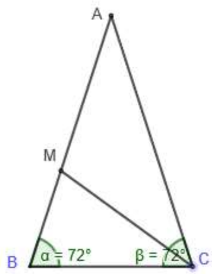
Or BD=b (BCD isocèle) et AD=b (ADB isocèle) donc DC=a-b

l'égalité ci-dessus s'écrit

$\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b}$ qui équivaut à $\frac{b}{a} = \frac{a-b}{b}$ ou $\frac{b}{a} = \frac{a}{b} - 1$ ou $\frac{a}{b} = 1 + \frac{b}{a}$

3) $\frac{a}{b}$ est un nombre positif qui vérifie $x = 1 + \frac{1}{x}$ il est donc égal à ϕ et ABC est un triangle d'or.

Exercice 5 : lignes trigonométriques liées au nombre d'or



Dans cet exercice ϕ est le nombre égal au quotient $\frac{a}{b}$ tel que $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$

1) Démontrer que $\phi = 2cos(36°)$ en trois étapes

ABC est un triangle isocèle dont les angles « à la base » mesurent 72°.

[CM] est la bissectrice de l'angle $\widehat{ACB}$.

1ère étape : Calculer les mesures des angles des triangles ABC, BMC et AMC.

En déduire que les triangles AMC et MBC sont isocèles.

2ème étape : On note J le projeté orthogonal de M sur [AC]. Démontrer que $AJ = AMcos(36°)$ puis en déduire $\frac{AB}{AM} = 2\cos(36°)$

17

3ème étape : Soit A' le milieu de [BC]. La droite (AA') coupe [MC] en K.

a) En calculant les mesures de tous les angles démontrer que le triangle BKC est isocèle et en calculant les angles du triangle BMK en déduire qu'il est aussi isocèle.

b) En déduire que $\frac{AB}{AM} = \frac{BC}{BM}$

c) En considérant le triangle ABA', démontrer que $\frac{BC}{BM} = 2\cos(36°)$

Conclusion : Déduire des questions précédentes que $\frac{AB}{AM} = \frac{AM}{MB} = 2cos(36°)$

puis que $\phi = 2\cos(36°)$

2) Démontrer que **cos(π/5)** = $\phi/2$ et 2**cos(2π/5)** = $1/\phi$

Indications

1) La première question relève des programmes de seconde et antérieurs.

On écrit que la somme des mesures de angles d'un triangle est égale à 180° tout comme la somme des mesures de deux angles supplémentaires, d'où le calcul des angles demandés. On déduit du caractère isocèle des triangles AMC et BMC que AM = MC = BC.

Dans le triangle rectangle AMJ, on a AJ = AM cos(36°)

J est le milieu de [AC] (triangle AMC isocèle), donc 2AJ = AC = AB (ABC isocèle) et $\frac{AB}{AM} = 2\cos(36°)$

Ce sont les mêmes outils qui servent à la troisième étape.

2) la deuxième question relève des programmes de première.

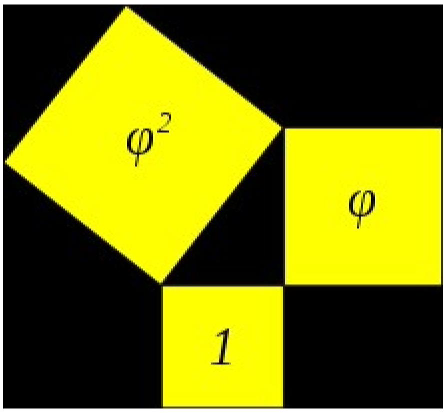
D'après ce qui précède on a directement cos(π/5)) = $\phi/2$ ((π/5 = 36°).

Et 2cos (2(π/5)) = 2cos 72° = 2[2cos²((π/5)) – 1] = $2(\phi^2/2 - 1) = \phi - 1 = 1/\phi$ (on aurait pu reprendre aussi un calcul direct)

Cet exercice est repris ci-dessous avec les nombres complexes

18

Exercice 6 : le triangle de Kepler



1) Montrer que ce triangle est rectangle.
2) Comparer le périmètre du cercle circonscrit au triangle à celui du carré de côté $\sqrt{\emptyset}$.
3) Quelle approximation de φ en fonction de π peut-on en déduire ?
4) On veut montrer que, pour deux nombres réels positifs, leurs moyenne arithmétique, leur moyenne géométrique, et leur moyenne harmonique sont les longueurs des côtés d'un triangle rectangle si et seulement s'il s'agit d'un triangle de Kepler[3].

Rappel : soient a et b deux nombres positifs non nuls distincts. Les moyennes arithmétique, géométrique et harmonique (inverse de la moyenne arithmétique des inverses) sont respectivement $\frac{a+b}{2}$, $\sqrt{ab}$ et $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$

a) Montrer qu'on a : $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$

b) En déduire le résultat demandé en 4).

Indications

1) Le nombre indiqué dans chacun des carrés est égal à son aire ;
2) Il s'agit de comparer $4\sqrt{\varphi}$ et $2\pi\frac{\varphi}{2} = \varphi$.

Avec la calculatrice on trouve : $4\sqrt{\varphi} \approx$ 5,08808 et $\pi\varphi$ $\approx$5,08320.

3) $4\sqrt{\varphi} \approx \pi\varphi$ d'où $16\varphi \approx \pi^2\varphi^2$. On en déduit $\varphi \approx \frac{16}{\pi^2}$.

Remarque : Une autre relation entre φ et π est $\varphi^{\,2} \approx \frac{5}{6}\,\pi$.

Une relation exacte entre φ et π est $\pi = 4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}(\varphi^{-2k-1}+\varphi^{-6k-3})$

4) a) On compare successivement $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ et $\sqrt{ab}$ puis $\sqrt{ab}$ et $\frac{a+b}{2}$.

Les nombres étant positifs on compare leurs carrés.

$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2a}{a+b}$; $(\frac{2a}{a+b})^2$- ab $= \frac{ab(4ab-(a+b)^2)}{(a+b)^2} = \frac{-ab(a-b)^2}{(a+b)^2}$ ce nombre étant négatif, $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} < \sqrt{ab}$

19

$\frac{(a+b)^2}{4}$ – ab = $\frac{(a-b)^2}{4}$ Ce nombre étant positif $\frac{a+b}{2}$.> $\sqrt{ab}$

On a donc finalement : $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ <$\sqrt{ab}$ <$\frac{a+b}{2}$.

b) Si $\frac{a+b}{2} = \varphi$, $\sqrt{ab} = \sqrt{\varphi}$ et $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ =1 alors le triangle est rectangle.(cf. 1))

Remarque : a et b sont racines de l'équation $x^2 - \varphi x+ \varphi = 0$.

Réciproque

On suppose que le triangle est rectangle soit que $(\frac{a+b}{2})^2$ = ab+$(\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}})^2$

On a alors $\frac{(a+b)^2}{4} = ab(1 + \frac{4ab}{(a+b)^2})$ c'est-à-dire $\frac{(a+b)^4}{4(a+b^2)} = \frac{4a^3b+24a^2b^2+4ab^3}{4(a+b)^2}$

Or $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Pour que les deux quantités ci-dessus soient égales il faut donc que

$a^4 + b^4 = 18a^2b^2$ ou $a^4 + b^4 - 2\,a^2b^2 = 16a^2b^2$ c'est-à-dire $(a^2-b^2)^2= (4ab)^2$ donc

$a^2-b^2= 4ab$ si on suppose a>b.

On calcule a en fonction de b.

$a^2-4ab-b^2=0$ d'où $a=b(2+\sqrt{5})$.

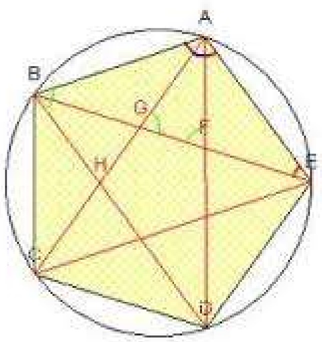
On a alors $\frac{a+b}{2} = \frac{b(3+\sqrt{5})}{2} = \mathbf{b}\,\boldsymbol{\varphi}^2$; ab = $b^2(2+\sqrt{5}) = b^2\,\varphi^2 \times \varphi$

d'où $\sqrt{ab} = \mathbf{b}\boldsymbol{\varphi}\sqrt{\boldsymbol{\varphi}}$; $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2b^2(2+\sqrt{5})}{b(3+\sqrt{5})} = \frac{2b((2+\sqrt{5})((3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})} = \mathbf{b}\,\boldsymbol{\varphi}$.

Le triangle est un triangle de Képler.

Une curiosité sur les triangles d'or : les pavages de Penrose (annexe)

4) Pentagones réguliers et pentagrammes (étoile à 5 branches)



20

Exercice 7 : le nombre d'or dans les pentagones réguliers

On rappelle la définition d'un pentagone régulier (convexe) : tous ses angles et tous ses côtés sont égaux. Le pentagramme est le polygone étoilé (non convexe) associé.

1) Montrer que les triangles ABC, AED, ABE … sont des triangles d'argent (cf. ci-dessus) et ACD, BEC, BED, … sont des triangles d'or.

2) Montrer que les diagonales d'un pentagone régulier convexe de côté *a* forment un pentagramme de côté ϕ x *a*, où ϕ est le nombre d'or.

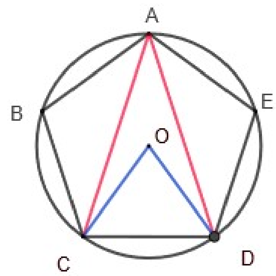
Indications

1) On se ramène aux triangles d'or précédents en calculant les angles du pentagone régulier. On peut aussi utiliser le théorème comparant un angle au centre et un angle inscrit dans le même arc.

a) La somme de ses angles est égale à 3π(540°) – on peut pour s'en convaincre décomposer le pentagone en un quadrilatère et un triangle, ou trois triangles, pour lesquels on connait déjà ce que vaut la somme des angles. Donc chaque angle du pentagone, comme l'angle A marqué sur la figure, vaut 108° (540/5) ; le triangle ABE, isocèle, est donc d'argent. Par suite BE/AB, ainsi que tous les rapports analogues, sont égaux au nombre d'or. Comme les triangles ABE, ADE et ABC sont égaux, parce que le pentagone est régulier, l'angle $\widehat{DAC}$ vaut 108° - (2x36°) = 36° et comme le triangle DAC est isocèle, il est doré, ainsi que tous les triangles analogues de la figure.

b) Les arcs AB, BC, CD, etc. ont la même mesure puisque les côtés du pentagone ont la même longueur.

Par conséquent les angles au centre $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{COD}$, etc. ont pour mesure $\frac{360°}{5} = 72°$ et les angles inscrits qui interceptent ces angles mesurent $\frac{72°}{2} = 36°$. Par exemple, $\widehat{CAD}$ mesure 36°



2) Il suffit de constater que les diagonales du pentagone sont les côtés du pentagramme. On a vu au 1) que par exemple BE/AB est égal au nombre d'or donc $BE = \varphi \text{ x } a$.

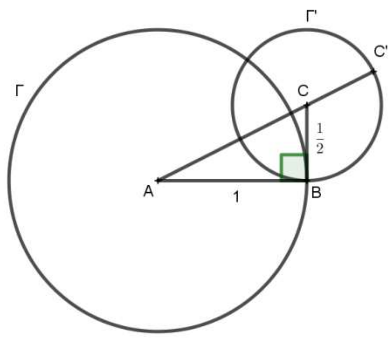
5) Des constructions

Exercice 8 : construire à la règle et au compas une longueur égale au nombre d'or

On construit le triangle ABC rectangle en B tel que AB=1 et BC=1/2 et les cercles Γ et Γ' de centres A et C passant par B. La droite (AC) coupe Γ' en deux points. On nomme C' le point n'appartenant pas au segment [AC].

Calculer AC et en déduire que AC'= ϕ

Correction succincte : figure ci-contre



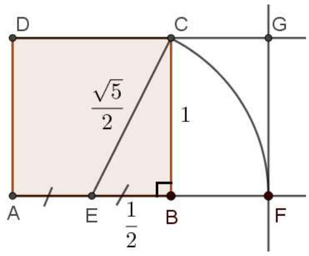
Exercice 9 : un programme de construction d'un rectangle d'or à la règle et au compas

Construire un segment [AB] de longueur 1 (10 cm comme unité)

- Construire le carré ABCD.
- Prolonger (à droite) les demi-droites [AB) et [DC).
- Placer le point E milieu du segment [AB].
- L'arc de cercle de centre E et passant par C coupe la demi-droite [AB) en F.
- La perpendiculaire à[AB) passant par F, coupe [DC) en G.

1. Montrer que $EC = \frac{\sqrt{5}}{2}$
2. En déduire que $AF = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$
3. Montrer que AFGD et BFGC sont des rectangles d'or.

Correction succincte : figure ci-contre

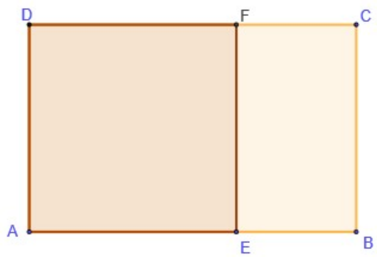


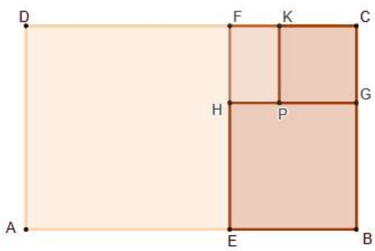
Remarque : Il existe aussi une construction du pentagone régulier.

6) Nombres complexes *(programme de terminale de mathématiques expertes)*

Les nombres complexes sont utilisés ici dans un problème de géométrie sur le rectangle d'or et dans des calculs trigonométriques (reprise de l'exercice5).

Dans le problème 10, *on explore la configuration ci-dessous liée aux rectangles d'or successifs que l'on peut construire à partir d'un rectangle d'or initial. On part ainsi des rectangles dorés ABCD et EBCF, on réitère ensuite la construction d'un rectangle doré à partir de EBCF et ainsi de suite.*





L'idée première est de trouver une transformation du plan telle que l'image du rectangle initial ABCD soit le rectangle EBCF, puis de l'utiliser à nouveau pour étudier la suite des rectangles d'or obtenus de la même façon et ainsi imbriqués. On admet que cette transformation est une similitude (hors-programme) et on en donne l'expression complexe (admise) avec laquelle on travaille. C'est cette alternative avec les nombres complexes pour résoudre un problème de géométrie qui est utilisée dans le problème ci-dessous.

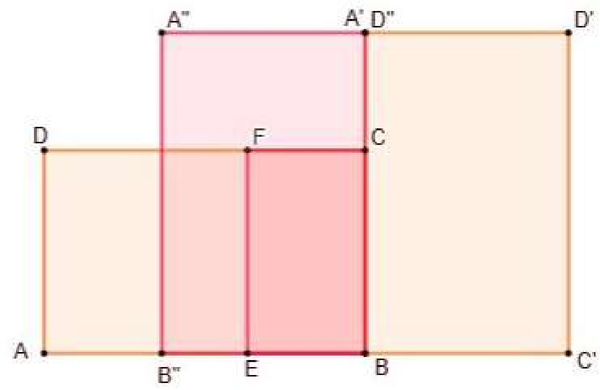
Comment « passer » du rectangle ABCD au rectangle EBCF ?

En guise d'introduction on fait visualiser les transformations en jeu

ABCD et EBCF sont deux rectangles d'or

On sait que $\frac{EB}{AD} = \frac{EF}{AB} = \frac{1}{\phi}$ *(le rectangle EBCF est une réduction du rectangle ABCD de rapport* $\frac{1}{\phi}$*)*

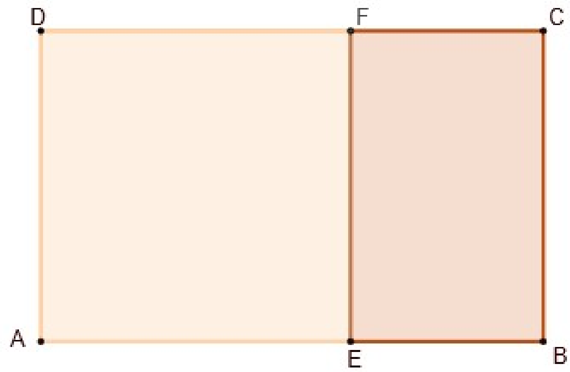
Il faut faire tourner puis glisser le rectangle ABCD pour retrouver l'homothétie (réduction) entre les deux rectangles, ABCD dans sa nouvelle position et EBCF. Ainsi on peut vérifier que l'on peut passer du rectangle ABCD au rectangle EBCF par la combinaison d'une rotation d'angle 90° - ou 270° - (qui amène le rectangle ABCD en position « verticale »), puis d'un glissement qui l'amène exactement en position homothétique de EBCF et d'une homothétie de rapport $\frac{1}{\phi}$ *(voir figure ci-dessous).*



On retrouve la définition d'une similitude, composée d'une rotation, d'une homothétie et d'une translation (hors programme).

On n'a que deux possibilités pour réaliser cette « opération » en respectant la réduction et le sens de parcours autour des rectangles à conserver : le segment [AB] peut avoir comme image le segment [BC] ou le segment [FE].

D'où les points homologues : A ->B ; B -> C ; C -> F ; D - > E ; ou A - >F ;B->E ; C - > B ; D - >C.



On admet qu'une similitude directe a comme traduction complexe z' = az + b où a et b sont des complexes et où Arg(a) est l'angle de la similitude (c'est-à-dire l'angle de la rotation), |a| est le rapport de la similitude (c'est-à-dire le rapport de l'homothétie) et b correspond au vecteur de la translation.

On pourrait aussi introduire des similitudes « indirectes » changeant le sens de parcours.

23

En dans l'annexe (cf. spirales) on retrouve l'étude analytique de la deuxième similitude directe en jeu (d'angle 270°, de rapport $\frac{1}{\phi}$ et de centre l'intersection de (BD) et (CE)).

Problème 10 : nombres complexes et rectangles d'or

On pose AB = L et AD = l= AE.

On choisit un repère orthonormé d'origine A, l'axe des abscisses est porté par (AB) et l'axe des ordonnées est porté par (AD).

1) Écrire les affixes des points A, B, C, D, E, F.

2) A tout point M d'affixe z on associe le point M' d'affixe z' défini par z' = az + b où a et b sont des nombres complexes donnés et on appelle S la transformation du plan correspondante.

Déterminer a et b pour la transformation S telle que A et B ont comme images respectives B et C.

Dans toute la suite on travaille sur cette transformation particulière.

3) a) Quel est le module du nombre complexe a ? Son argument ?

b) Quelles sont les images de C et D par S ?

c) Trouver le nombre complexe z_0 tel que $z_0 = a\, z_0 + b$.

4) On appelle O le point d'affixe z_0.

On veut identifier géométriquement ce point

a) Montrer que (AC) est perpendiculaire à (BF), ainsi que (DB) et (CE)

b) Montrer que O est l'intersection des droites (AC) et (BF).

5) Identifier le point H intersection de (AC) et (EF), ainsi que le point G tel que EBGH soit un carré.

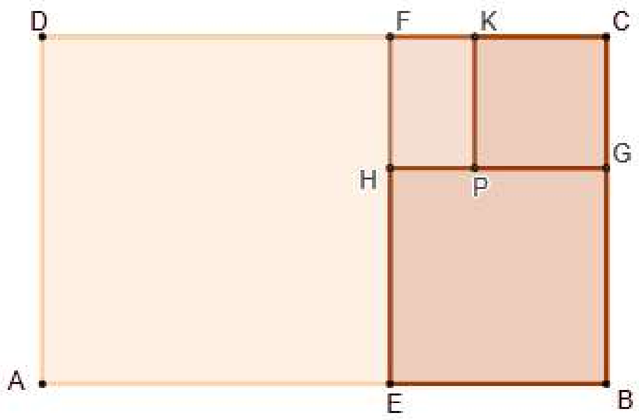
6) Quelle est l'image de BCFE par la transformation S précédente ?

Interpréter.

7) Identifier les transformations S^2, S^3, ... S^n.

Que se passe-t-il quand n tend vers $+\infty$?

Que peut-on en déduire ?



<u>Indications</u>

Lorsque cela simplifie, on note z_M l'affixe $x + iy$ d'un point M de coordonnées $(x\,;y)$.

1) L'affixe de A est 0 ($z_A = 0$) ; B a comme coordonnées (L , 0) donc comme affixe L ($z_B = L$) ; C a comme affixe $L + il$ ($z_C = L + il$). De même, $z_D = il$; $z_E = l$; $z_F = l + il$.

2) a) On cherche a et b tels que l'affixe de B soit le transformé de l'affixe de A et l'affixe de C le transformé de l'affixe de B, c'est-à-dire que A et B ont comme images B et C.

Ceci se traduit par $z_B = az_A + b$ et $z_C = az_B + b$

Cela donne b = L ; et aL+ L= L + i l d'où a = i $(\frac{l}{L})$

On a donc l'expression générale z' = i $(\frac{l}{L})$z + L

On peut remarquer que la donnée de deux points et leurs images suffit à déterminer la similitude directe, sous forme complexe ou géométrique.

24

3) a) Le module de a est $\frac{l}{L}$ (en fait c'est le rapport de la similitude, $\frac{1}{\phi}$) ; l'argument de a est $\frac{\pi}{2}$ (en fait c'est l'angle de la similitude).

b) L'image de C a comme affixe s(L + i l). Donc $z_C = i\left(\frac{l}{L}\right)(L + i\,l) + L = i\,l + L - \frac{l^2}{L}$.
En utilisant la définition de $\frac{L}{l}$ (le nombre d'or), on obtient $(\frac{L}{l})^2 = \frac{L}{l} + 1$ (propriété (2))
soit L = l + $(\frac{L}{l})^2$ ou encore s(L + i l) = l + i l ; on reconnait l'affixe de F, donc S(C)=F.
On pourrait aussi utiliser la caractérisation (3) du nombre d'or.
De même on vérifie que D a comme image E.
c) On cherche z_0 tel que z_0= a z_0 + b. Cela correspond à la recherche d'un point fixe de S.
On trouve $z_O = \frac{b}{1-a} = \frac{\mathrm{L}^2(\mathrm{L}+\mathrm{il})}{\mathrm{L}^2+\mathrm{l}^2}$(a est différent de 1).

4) a) Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ d'affixes respectives Z et Z' sont orthogonaux ou leurs droites supports perpendiculaires si et seulement si Z'/Z est imaginaire pur[7]. On pose $Z_{\overrightarrow{AC}}$ affixe de $\overrightarrow{AC}$ et $Z_{\overrightarrow{BF}}$ affixe de $\overrightarrow{BF}$. Alors $Z_{\overrightarrow{AC}}$ = L + i l ; $Z_{\overrightarrow{BF}}$ = l – L + i l

d'où $Re\left(\frac{Z_{\overrightarrow{BF}}}{Z_{\overrightarrow{AC}}}\right) = \frac{Ll-L^2+l^2}{L^2-l^2}$ = 0 (on utilise la propriété (3) du nombre d'or). On a ainsi montré que (AC) et (BF) sont perpendiculaires.

b) Pour avoir l'alignement de A, O et C, on montre la colinéarité de $\overrightarrow{AO}$ et de $\overrightarrow{AC}$: en travaillant sur les affixes correspondants, $Z_{\overrightarrow{AO}}$ affixe de $\overrightarrow{AO}$ et $Z_{\overrightarrow{AC}}$ affixe de $\overrightarrow{AC}$, la colinéarité est équivalente à la propriété $Z_{\overrightarrow{AO}}/Z_{\overrightarrow{AC}}$ est réel. On vérifie que $Im\left(\frac{Z_{\overrightarrow{AC}}}{Z_{\overrightarrow{AO}}}\right)$ = 0.

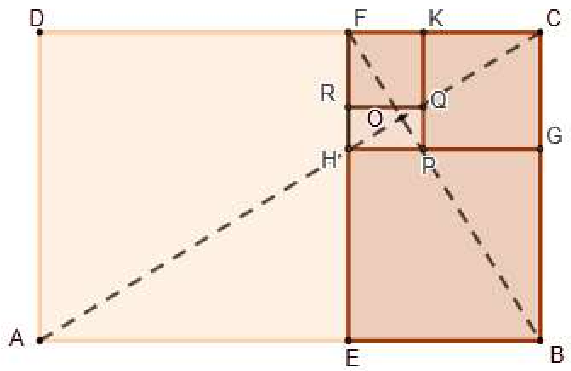
5) H a comme coordonnées $(l\,, y)$ tel que $\frac{y}{L} = \frac{l}{L}$; donc $y = l$ et H est le point de [EF] tel que HF = l (côté du carré construit sur [EB])

D'où d'ailleurs les coordonnées de G(L, l) tel que HEBG soit le carré en question

6) BCFE a comme image CFHG. Etc…

---

[7]On peut aussi remarquer que la similitude a nécessairement un angle de ±90°, ce qui implique, comme A -> B, B -> C, C-> F, D ->E, (AC) perpendiculaire à (BF) son image… De même que (BD) et (CF).
On peut aussi considérer S², homothétie d'angle 180°…
Cette orthogonalité peut aussi s'établir à partir des théorèmes de Pythagore et de Thalès.



7) En fait $s^n = a^n z + b(1 + a + a^2 + \dots a^{n-1}) = a^n z + b(1-a^n)/(1-a)$[8]
On a la suite des rectangles transformés : ABCD -> BCFE -> CFHG ->FHPK- >HPQR…
Lorsque n ->+∞ , la similitude « tend vers » une transformation constante, Z = b/(1-a), qui est l'affixe du point O centre de la similitude S et intersection des droites (AC) et (BF) qui sont « communes » à tous les rectangles considérés.

Exercice 11 : calculs de cos(2π/5) et cos(π/5) en fonction du nombre d'or avec les nombres complexes.

Certaines calculatrices permettent d'obtenir des valeurs exactes ou approchées de ces lignes trigonométriques. On propose ci-dessous une démonstration très classique des valeurs exactes, qui peut d'ailleurs amener à la construction à la règle et au compas du pentagone régulier.

On utilise les racines cinquièmes de l'unité, des propriétés élémentaires des équations du second degré dans les complexes et des relations trigonométriques élémentaires.

On appelle ω la racine 5ème de l'unité d'argument **2π/5.** On a $\omega = e^{2i\pi/5}$.

1) Montrer que $\omega^4 + \omega^3 + \omega^2 + \omega + 1 = 0$.

2) Montrer que ω^4 est le conjugué de ω et ω^3 celui de ω^2.

En déduire que $2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + 1 = 0$

3) Trouver le produit $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \times \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$

On donne la formule $\cos(p) \times \cos(q) = \frac{1}{2}[\cos(p-q) + \cos(p+q)]$

4) En déduire que $2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \phi - 1$.

5) Montrer que $2\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{3+\sqrt{5}}{4}$

[8] C'est successivement une homothétie (négative), une similitude d'angle $3\pi/2$, une homothétie (positive), S, etc… toutes de même centre O et de rapport $(1/\Phi)^n$.

6) Montrer que $2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$

Indications

1) on peut établir et utiliser l'égalité

$\omega^5 - 1 = (\omega - 1)(\omega^4 + \omega^3 + \omega^2 + \omega + 1)$.

2) On montre que les arguments de ω^4 et ω sont opposés : $8\pi/5 = 2\pi - (2\pi/5)$ et on en déduit que ω^4 et ω sont des nombres complexes conjugués.

Il en est de même pour ω^2 et ω^3

On développe l'égalité obtenue en 1) en écrivant chaque nombre complexe sous forme algébrique, et en utilisant le résultat de 2).

On déduit $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = -1/2$

3) On a $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \times \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right] = -\frac{1}{4}$ car $\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$

4) On connait la somme et le produit des deux nombres $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$. On déduit que ces nombres sont les racines de l'équation $x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = 0$.

D'où la racine positive $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ vaut $\frac{-1+\sqrt{5}}{4} = \phi - 1$.

5) et 6) on applique la formule qui donne cos(2a) en fonction de cos(a).

On peut remarquer que $3 + \sqrt{5} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})^2$ pour conclure.

III En analyse

Le nombre d'or peut donner lieu à un travail sur les équations du second degré et les suites récurrentes

1) Équations du second degré et applications

Cela relève du programme de première

Exercice 1 : Le nombre d'or solution d'une équation du second degré

1) Montrer que dans R l'équation $x^2 = x + 1$ a deux solutions.
2) Trouver le signe de ces solutions.
3) On rappelle que le nombre d'or est la solution positive. Exprimer la deuxième solution en fonction de ϕ.
4) Vérifier que $\phi^2 = \phi + 1$, que $\phi = 1 + (1/\phi)$, que $-1/\phi = 1 - \phi$ et que $\phi = \sqrt{\phi + 1}$

Indications

27

L'équation $x^2 - x - 1 = 0$ a deux solutions, dont la somme est 1 et le produit -1.

Le calcul classique des racines de l'équation donne les solutions $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

On vérifie que $\sqrt{5}$ est supérieur à 1

Ces solutions sont donc ϕ et $-1/\phi$.

On peut écrire : $\phi^2 = \phi + 1$; ou encore $\phi = 1 + (1/\phi)$; ou $-1/\phi = 1 - \phi$; $\phi = \sqrt{\Phi + 1}$

Exercice 2 : une relation entre nombre d'or et nombres de Fibonacci : calcul des puissances du nombre d'or

Cet exercice est une occasion en or de faire travailler simplement le raisonnement par récurrence…

On appelle (a_n) les nombres de la suite de Fibonacci.

Rappelons que ce sont les termes de la suite définie par :

$a_1 = a_2 = 1$, et pour tout entier $n \geq 3$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

Démontrer que, pour tout n, $\phi^{n+1} = a_{n+1}\phi + a_n$

Démonstration

Rappelons les propriétés des nombres en jeu :

ϕ vérifie l'équation $\phi^2 = \phi + 1$ (*) et les nombres a_n vérifient $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ (avec $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$)

Par récurrence : appelons P(n) la propriété cherchée, à démontrer pour tout n.

$$P(n) : \phi^n = a_n\phi + a_{n-1}$$

a) La propriété est vraie pour 2, c'est la définition même de ce nombre.

Autrement dit on a P(2)

b) Si on suppose P(n) vraie, en multipliant par ϕ les deux membres de l'égalité (*) on obtient

$\phi^{n+1} = a_n\phi^2 + a_{n-1}\phi$

Soit $\phi^{n+1} = a_n(\phi + 1) + a_{n-1}\phi = (a_n + a_{n-1})\,\phi + a_n = a_{n+1}\phi + a_n$

2) Suites récurrentes

Cela relève du programme de première et de terminale spécialité.

Le nombre d'or est la limite de plusieurs suites récurrentes associées à deux fonctions différentes dont nous donnons des exemples.

Dans les exercices 3, 4, 5 la suite est associée à la fonction f définie sur [0 ; +∞[par f(x) = $\sqrt{1+x}$ *qui est croissante. Nous y proposons successivement 3 démonstrations. Les deux premières suivent un* *schéma classique, où seule varie la valeur du premier terme de la suite, et la dernière un peu plus « bricolée » faisant intervenir une suite intermédiaire comparée à une suite géométrique.*

Les exercices 3 et 4 sont l'occasion d'illustrer l'importance de l'initialisation du raisonnement par récurrence utilisé pour démontrer le sens de variation d'une suite définie à partir d'une fonction croissante. Les deux suites étudiées sont définies à partir de la même fonction croissante, l'une est croissante et l'autre est décroissante car pour la première $u_1 < u_2$ et pour la seconde $u_1 > u_2$. Une représentation graphique complète l'illustration.

Dans les exercices 6 et 7 la suite est associée à la fonction f définie sur [1 ; +∞[par $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ qui est décroissante. L'exercice 8 permet de trouver la limite de la suite des rapports de deux termes successifs de la suite de Fibonacci (en faisant intervenir cette même fonction).

La plupart de ces exercices utilisent les résultats de l'énoncé 1.

Exercice 3 : Le nombre d'or limite d'une suite croissante associée à une fonction croissante

On considère la suite U définie par $u_1=1$ et pour tout $n > 1$ $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$.

On se propose de démontrer que cette suite a comme limite le nombre d'or ϕ.

1) Démontrer que pour tout entier $n \geq 2$, $\sqrt{2} \leq u_n \leq \phi$.

2) Soit f la fonction définie sur[0 ; +∞[par $f(x) = \sqrt{1+x}$. Démontrer que f est croissante sur cet intervalle.

3) Démontrer que la suite U est croissante.

4) Démontrer que U admet une limite l

5) Calculer cette limite (on admettra que l est unique et l vérifie $l=\sqrt{1+l}$)

Indications

1) On utilise un raisonnement par récurrence ainsi que la propriété $\Phi = \sqrt{1+\phi}$ (déduite de la définition (2) du nombre d'or).

La propriété est vérifiée pour u_1. Si onsuppose vérifiée au rang *n* l'inégalité $\sqrt{2} \leq u_n \leq \phi$, on peut écrire $\sqrt{2} + 1 \leq u_n + 1 \leq \phi + 1$; toutes les quantités qui interviennent étant positives, et $\sqrt{2} + 1 > \sqrt{2}$ on peut donc encore écrire $\sqrt{2} \leq \sqrt{(1+u_n)} < \sqrt{1+\phi}$, d'où l'hérédité.

3) On peut utiliser encore un raisonnement par récurrence associé au sens de variation de la fonction *f*, en vérifiant que $u_1 < u_2$, ou déterminer directement le signe de $u_{n+1} - u_n$:

on a $\frac{\sqrt{1+u_n}-u_n)(\sqrt{1+u_n}+u_n}{\sqrt{1+u_n}+u_n} = \frac{1+u_n-{u_n}^2}{\sqrt{1+u_n}+u_n}$ et on vérifie que le numérateur est positif car u_n est compris entre les racines de l'équation $1 + x - x^2 = 0$.

4) on utilise le théorème admis « toute suite croissante majorée converge ».

5) La limite l vérifie $l = \sqrt{1+l}$, et l est positive donc c'est ϕ

Exercice 4 : Le nombre d'or limite d'une suite décroissante associée à une fonction croissante

On considère la suite U définie par $u_1=2$ et, pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$.

On se propose de démontrer que cette suite a comme limite le nombre d'or φ .

1) Démontrer que pour tout entier n ≥2 , $u_n \geq \varphi$.

2) Démontrer que la suite U est décroissante.

3) Calculer sa limite.

<u>Indications</u>

1) On démontre par récurrence que pour tout entier n ≥2 , $u_n \geq \varphi$.

$u_2=\sqrt{3}$ et $\sqrt{3} \geq \varphi$ la propriété est vérifiée pour u_2. Si on suppose vérifiée au rang n l'inégalité $u_n \geq \varphi$ alors $\sqrt{u_n+1} \geq \sqrt{\varphi+1}$ c'est-à-dire $\sqrt{u_n+1} \geq \varphi$ (car $\sqrt{\varphi+1}=\varphi$) ou encore $u_{n+1} \geq \varphi$

Donc pour tout entier n ≥2 , $u_n \geq \varphi$.

2) Pour démontrer que la suite U est décroissante, on calcule $u_{n+1}-u_n$

$$u_{n+1}-u_n=\sqrt{u_n+1}-u_n=\frac{(\sqrt{u_n+1}-u_n)(\sqrt{u_n+1}+u_n)}{\sqrt{u_n+1}+u_n}=\frac{u_n+1-{u_n}^2}{\sqrt{u_n+1}+u_n}.$$

Le numérateur est négatif car u_n est supérieur aux racines de l'équation.

On peut aussi utiliser comme dans l'exercice précédent la croissance de f, en partant de $u_1 > u_2$ et en démontrant la décroissance de la suite par récurrence.

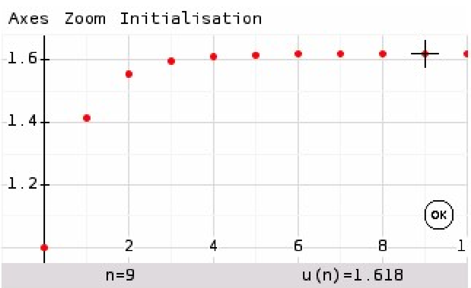
3) On utilise le théorème admis « toute suite décroissante minorée converge. »

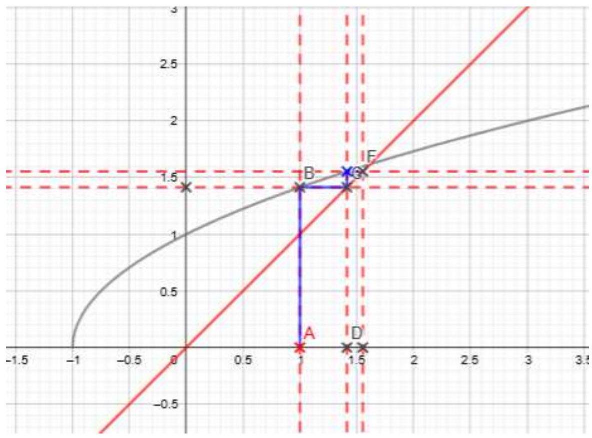
Le même calcul que dans l'exercice 3 donne la limite de la suite.

Remarque : on pourra insister sur la différence entre les résultats des énoncés 3 et 4 aux questions sur le sens de variation de la suite, comme le montrent les figures ci-dessous obtenues avec une calculatrice et avec GeoGebra. La fonction est croissante mais c'est l'initialisation qui diffère.

Illustrations de l'exercice 3

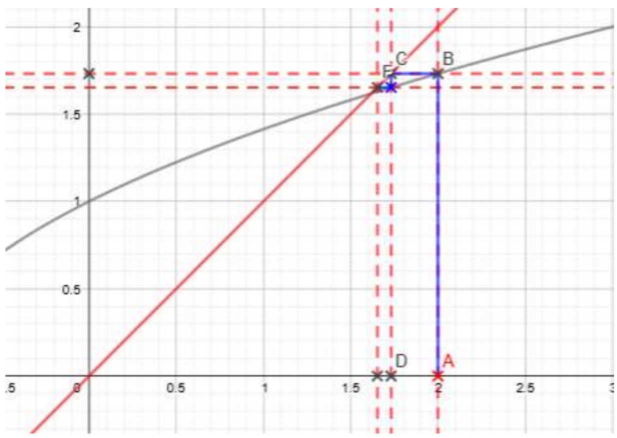
Suite $u_{n+1}=\sqrt{1+u_n}$ et $u_0=1$

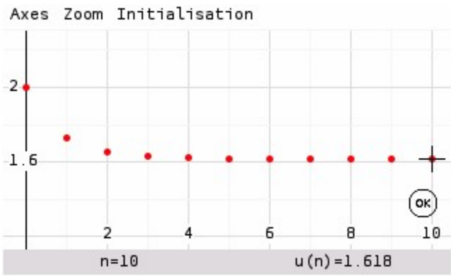




Illustrations de l'exercice 4

Suite $u_{n+1}=\sqrt{1+u_n}$ et $u_0=2$





Exercice 5 : Le nombre d'or limite d'une suite associée à une fonction croissante en faisant intervenir une suite intermédiaire

Cet exercice utilise les résultats qui concernent la limite d'une suite géométrique convergente.

On considère la suite U définie par $u_1=1$ et, pour tout $n\geq 1$, $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$.

On se propose de démontrer que cette suite a comme limite le nombre d'or ϕ.

1) Démontrer que pour tout entier $n \geq 2$, $\sqrt{2} \leq u_n \leq \phi$.

2) On considère la suite V définie pour tout entier naturel non nul par $v_n=\phi-u_n$. Justifier que V est une suite à termes positifs et que $v_{n+1}=\frac{\phi-u_n}{\phi+\sqrt{1+u_n}}$.

3) En déduire que, pour tout entier naturel non nul, $v_{n+1}\leq \frac{v_n}{3}$

4) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, $v_n\leq (\frac{1}{3})^{n-1}$

5) En déduire la limite de la suite U

Indications

1) Voir les indications données dans l'exercice 3
2) On sait que pour $n \geq 1$, $u_n\leq\phi$, on en déduit que V est une suite à termes positifs.
$v_{n+1}=\phi - u_{n+1} = \phi - \sqrt{1+u_n} = \frac{(\phi-\sqrt{1+u_n})(\phi+\sqrt{1+u_n})}{\phi+\sqrt{1+u_n}} = \frac{\phi^2-1-u_n}{\phi+\sqrt{1+u_n}}=\frac{\phi-u_n}{\phi+\sqrt{1+u_n}}$ (car on a $\phi^2-1=\phi$)
3) On sait que pour tout $n \geq 2$, $\sqrt{2} \leq u_n\leq\phi$ donc $\phi + u_{n+1} \geq \sqrt{2}+\phi \geq 3$.
Or $\frac{\phi-u_n}{\phi+\sqrt{1+u_n}} = \frac{v_n}{\phi+u_{n+1}}$ et $\phi + u_{n+1} \geq 3$ on en déduit que pour tout $n \geq 2$, $\frac{\phi-u_n}{\phi+\sqrt{1+u_n}} \leq \frac{v_n}{3}$
4) On démontre par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, $v_n\leq (\frac{1}{3})^{n-1}$
$v_1 = \phi - 1$ et $(\frac{1}{3})^0 = 1$ donc la propriété est vérifiée pour n=1.
On a démontré en 3) que, $v_{n+1}=\frac{\phi-u_n}{\phi+\sqrt{1+u_n}} = \frac{v_n}{\phi+\sqrt{1+u_n}}$ et $\phi + \sqrt{1+u_n} \geq 3$ on a donc
$v_{n+1}\leq \frac{v_n}{3}$. Et donc si on suppose vérifiée au rang n l'inégalité $v_n\leq (\frac{1}{3})^{n-1}$alors $v_{n+1}\leq(\frac{1}{3})^n$
Donc, pour tout entier naturel non nul n, $v_n\leq (\frac{1}{3})^{n-1}$.
5) Pour tout entier non nul on a donc $0\leq v_n \leq (\frac{1}{3})^{n-1}$. On en déduit que la suite V a pour limite 0 lorsque n tend vers $+\infty$, et donc que la suite U a pour limite ϕ.
(les limites de suites géométriques ont été vues en 1ère)

31

Pour les exercices 6 et 7proposant d'autres suites récurrentes qui convergent vers le nombre d'or, nous proposons également plusieurs démonstrations. Les deux premières (exercice 6) sont classiques et font intervenir l'étude de deux sous-suites (l'une associée aux termes d'indice pair, l'autre associée aux termes d'indice impair) l'une croissante, l'autre décroissante, ayant la même limite. Changer la valeur du premier terme de la suite est une variante. La troisième démonstration (exercice 7) permet de minorer la différence entre les termes de la suite et le nombre d'or puis d'en déduire la limite de la suite.

L'exercice 8 reprend encore la même suite récurrente, cette fois associée à l'étude du rapport de deux termes successifs de la suite de Fibonacci.

Exercice6 : Le nombre d'or comme limite d'une suite associée à une fonction décroissante, faisant intervenir la limite commune de deux sous suites extraites.

Première partie :

On considère la suite V définie par v_0=1 et pour tout entier n ≥ 1 v_{n+1}= 1+ $\frac{1}{v_n}$

1) Montrer que la fonction *f* définie sur[1 ; +∞[par $f(x)$ =*1+* $\frac{1}{x}$est décroissante.

2) Montrer que pour tout entier naturel 1≤ $v_n \leq 2$

3) Démontrer que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - \varphi$ et $v_n - \varphi$ sont de signes opposés

4) En déduire que pour tout entier naturel n, $v_{2n} \leq \varphi$ et que $v_{2n+1} \geq \varphi$

5) On pose W la suite définie pour tout entier naturel non nul par w_n =v_{2n} et T la suite définie pour tout entier naturel non nul par t_n =v_{2n+1}. Montrer que la suite W est croissante et que la suite T est décroissante.

6) Justifier que W et T sont convergentes et déterminer leur limite. Conclure

Deuxième partie :

1) On considère maintenant la suite A définie par a_0=2 et pour tout entier n, a_{n+1}= 1+ $\frac{1}{a_n}$

2) Montrer que pour tout entier naturel 1≤ $a_n \leq 2$

3) Démontrer que pour tout entier naturel n, $a_{n+1}-\varphi$ et $a_n-\varphi$ sont de signes opposés

4) On pose B la suite définie pour tout entier naturel non nul par b_n =a_{2n} et C la suite définie pour tout entier naturel non nul par c_n = a_{2n+1}. Montrer que la suite B est décroissante et que la suite C est croissante.

5) Justifier que les suites B et C sont convergentes et déterminer leur limite. Conclure

Indications pour la première partie

Pour les questions 2) et 3) un raisonnement par récurrence permet d'obtenir les résultats.

Pour la question 3) on peut aussi calculer $v_{n+1} - \varphi = 1 + \frac{1}{v_n} - \varphi = \frac{v_n+1-\varphi v_n}{v_n}$ et en utilisant la relation $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$ on trouve $v_{n+1} - \varphi = \frac{\varphi - v_n}{\varphi v_n}$. Comme φv_n est positif, alors $v_{n+1} - \varphi$ et $v_n - \varphi$ sont de signes opposés.

4)v_0=1 donc $v_0 - \varphi$ est négatif. On en déduit que $v_1 - \varphi$est positif puis, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $v_{2n} \leq \varphi$ et que $v_{2n+1} \geq \varphi$

5) Pour déterminer le sens de variation des suites W et T, on cherche le signe de w_{n+1}-w_n et celui de t_{n+1}-t_n pour n entier naturel.

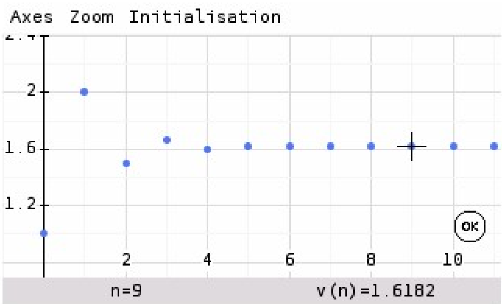
w_{n+1}-w_n=$v_{2n+2} - v_{2n} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{v_{2n}}} - v_{2n} = \frac{v_{2n}+1-{v_{2n}}^2}{v_{2n}+1}$. Comme on a$1 \leq v_{2n} \leq \varphi$ alors
$v_{2n} + 1 - {v_{2n}}^2$ est positif donc w_{n+1}-w_n est positif et la suite W est croissante.
Un calcul analogue permet demontrer que le signe de t_{n+1}-t_n est négatif pour tout n et que la suite T est décroissante.

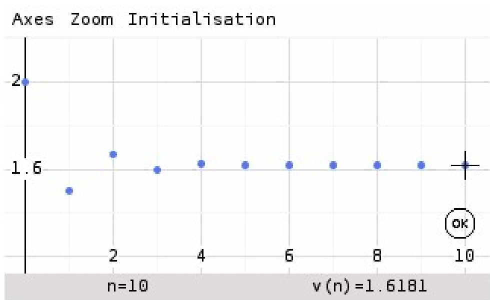
6) La suite W est donc croissante et majorée. On utilise le théorème admis « toute suite croissante majorée converge » donc la suite W converge. La suite T est minorée et décroissante. On utilise le théorème admis « toute suite décroissante minorée converge» donc la suite T converge. Leur limite commune l vérifie l=1+$\frac{1}{l}$; elle est égale à φ.

Dans la deuxième partie, on tient des raisonnements analogues à ceux de la première partie.
Les figures ci-dessous illustrent la différence de comportement selon la valeur du premier terme.

Première partie : suite $v_{n+1} = 1 + \frac{1}{v_n}$ et $v_0 = 1$

Deuxième partie : suite $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$ et $a = 2$





Remarque : une alternative, l'introduction de la limite de deux suites adjacentes.
On pourrait démontrer que les suites W et T sont adjacentes et ont pour limite communeφ.
On sait que la suite W est croissante, que la suite T est décroissante et que, pour tout entier naturel n, $w_n \leq \varphi \leq t_n$.
On démontre d'abord que pour tout entier naturel n ≥ 2, $\frac{3}{2} \leq v_n \leq 2$.
On démontre ensuite par récurrence que $|v_{n+1} - v_n| \leq (\frac{4}{9})^n$
On en déduit que pour tout entier naturel n≥1, $0 \leq t_n - w_n \leq (\frac{4}{9})^{2n}$
$t_n - w_n$ tend vers 0 quand n tend vers +∞.
Les suites W et T sont adjacentes et ont pour limite commune φ.

Exercice 7 : Le nombre d'or comme limite d'une suite associée à une fonction décroissante, limite obtenue en majorant v_n- φ.

On considère la suite V définie par v_1=1 et pour tout entier n ≥ 2, v_{n+1}=1+$\frac{1}{v_n}$

1) Démontrer que pour tout entier naturel n ≥ 2, $\frac{3}{2} \leq v_n \leq 2$

2) Montrer que φ est la solution positive de l'équation $x = 1 + \frac{1}{x}$ et vérifier que $\frac{3}{2} \leq \varphi \leq 2$

3) Démontrer que pour tout réel x$\geq \frac{3}{2}$, $\left|\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \left(1 + \frac{1}{\varphi}\right)\right| \leq \frac{4}{9}|x - \varphi|$

4) En déduire que pour tout entier naturel n ≥ 2, $|v_{n+1} - \varphi| \leq \frac{4}{9}|v_n - \varphi|$

5) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n ≥ 2, $|v_n\text{-}\ \varphi\ | \leq \left(\frac{4}{9}\right)^{n-2}|v_2\text{-}\ \varphi\ |$

6) Déterminer la limite de V.

Indications

Pour la question 1) on raisonne par récurrence. La question 2) relève du second degré.

3) et 4) Un artifice de calcul ($\left|\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \left(1 + \frac{1}{\varphi}\right)\right| = \left|\frac{\varphi - x}{\varphi x}\right|$) et l'utilisation des règles portant sur les inégalités dans l'ensemble des réels positifs ($\varphi \geq \frac{3}{2}$et x$\geq \frac{3}{2}$ donc 0 <$\frac{1}{\varphi x} \leq \frac{4}{9}$) permettent d'arriver au résultat attendu en écrivant $|v_{n+1} - \varphi| \leq \left|\left(1 + \frac{1}{v_n}\right) - \left(1 + \frac{1}{\varphi}\right)\right|$d'où $|v_{n+1} - \varphi| \leq \frac{4}{9}|v_n - \varphi|$

5) On démontre par récurrence que pour tout entier naturel n ≥ 2, $|v_n\text{-}\ \varphi\ | \leq \left(\frac{4}{9}\right)^{n-2}|v_2\text{-}\ \varphi\ |$

v_2=2. La propriété est vérifiée pour n=2.

Si on suppose vérifiée au rang n l'inégalité $|v_n\text{-}\ \varphi\ | \leq \left(\frac{4}{9}\right)^{n-2}|v_2\text{-}\ \varphi\ |$,

comme $|v_{n+1} - \varphi| \leq \frac{4}{9}|v_n - \varphi|$alors $|v_{n+1} - \varphi| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}|v_2\text{-}\ \varphi\ |$.

On peut donc conclure que pour tout entier naturel n ≥ 2, $|v_n\text{-}\ \varphi\ | \leq \left(\frac{4}{9}\right)^{n-2}|v_2\text{-}\ \varphi\ |$.

6) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-2} = 0$. On en déduit que $\lim_{n\to\infty}|v_n - \ \varphi\ | = 0$. La limite de V est φ.

Remarque : le nombre d'or et les fractions continues

On sait que $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$. Si on remplace au dénominateur φ par $1 + \frac{1}{\varphi}$ on obtient $\varphi = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\varphi}}$ et si on réitère ce processus on trouve $\varphi = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\varphi}}}$. On constate qu'on peut continuer à l'infini ce qui suggère qu'on peut écrire $= 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\cdots}}}}}$.

Si on arrête le processus aux différentes étapes on trouve successivement 1, 2, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{8}{5}$,… suite qui converge vers le nombre d'or et alterne successivement des termes inférieurs à φ et des termes supérieurs à φ comme nous l'avons montré dans l'exercice précédent.

Remarque : des développements datant de la fin du 19ème siècle permettent d'étudier « la manière » dont ces fractions se rapprochent du nombre d'or, en particulier le théorème de Hurwitz. On peut dire que ce nombre est le plus mal approché possible par des rationnels (le plus irrationnel des irrationnels).

Exercice 8 : étude de la limite du rapport (a_{n+1}/a_n) de deux termes successifs de la suite de Fibonacci.

On rappelle que la suite de Fibonacci est définie par $a_1 = a_2 = 1$ et, pour $n \geq 2$, $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ (*).

On étudie la suite (v_n) de terme général $v_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

On appelle f la fonction définie sur[1 ; +∞[par $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$

1) Montrer que la suite (v_n) vérifie $v_{n+1} = 1 + (\frac{1}{v_n}) = f(v_n)$ (**)

2) Montrer que la sous-suite W = (w_n) définie par $w_n = v_{2n}$ est croissante, majorée et vérifie

$w_n = g(w_{n-1})$ où g est la fonction définie sur[1 ; +∞[par $g(x) = \frac{2x+1}{x+1}$.

En déduire sa limite.

3) Refaire le raisonnement pour la sous-suite T = (t_n) définie par $t_n = v_{2n+1}$.

4) On admet que si les deux sous-suites des termes d'indice pair et impair convergent vers la même limite, alors la suite (v_n) admet aussi cette limite. En déduite le résultat cherché.

C'est une des manières de démontrer que ce rapport a comme limite le nombre d'or.

Indications

1) Tous les nombres de Fibonacci sont positifs (car ils croissent à partir de 1).

Il suffit de diviser par a_n les deux membres de l'équation (*) pour obtenir le résultat (**) demandé.

2) Dans l'égalité (**) on remplace v_n par son expression en fonction de v_{n-1}. En effet $1 + \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{2x+1}{x+1}$.

On obtient $v_{n+1} = g(v_{n-1})$

La fonction g est croissante ($g'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$). (On peut aussi remarquer que g =f°f et comme f est décroissante alors g est croissante)

Si on étudie les termes d'indice pair de la suite, on a $w_1 = 2$, $w_2 = \frac{5}{3}$, puis par un raisonnement par récurrence on montre que la suite est décroissante(car g est croissante et $w_1 > w_2$). Elle est minorée par 0 donc elle a une limite qui vérifie $l = \frac{2l+1}{l+1}$, soit $l^2 + l = 2l + 1$, c'est-à-dire que l est le nombre d'or (car c'est un nombre positif qui vérifie $l^2 = l + 1$.

3) On montre que la suite est croissante ($t_1 = \frac{3}{2}$, $t_2 = \frac{8}{5}$) et, par un raisonnement analogue à celui de la question 2, qu'elle a comme limite également $l = \varphi$

4) La suite (v_n) a donc aussi comme limite $l = \varphi$.

Remarque : page 36 on trouvera deux algorithmes qui permettent d'engendrer un nombre n de nombres de Fibonacci et de quotients de deux de ces nombres consécutifs.

IV En arithmétique

Les exercices qui suivent sont l'occasion de travailler le raisonnement par récurrence, quelques propriétés des entiers et la notion d'irrationalité.

1) Le nombre d'or

Exercice 1 : l'irrationalité du nombre d'or

Montrer que le nombre d'or est un irrationnel

Plusieurs démonstrations sont proposées, la première « classique » par l'absurde, supposant que le nombre est rationnel et la deuxième liée aux propriétés (et même axiomes) de l'ensemble des entiers.

Démonstration

1) Par l'absurde

Supposons que $\varphi=a/b$, avec a et b entiers premiers entre eux. Notons d'abord que les entiers a et b satisfont $a>b$. On a aussi $\varphi=b/(a-b)$, et il est facile de vérifier que les entiers b et $a-b$ sont également premiers entre eux. Ceci est en contradiction avec le fait qu'un nombre rationnel (comme φ selon l'hypothèse faite au début de cette démonstration) n'a qu'une écriture réduite.

2) En utilisant un axiome vérifié par l'ensemble des entiers

On considère l'ensemble des entiers b tels que il existe a (entier) tel que $\varphi=a/b$. Si cet ensemble est vide, on a le résultat attendu. Sinon c'est une partie non vide de N, donc il existe un plus petit élément (axiome de base). Or $\varphi=b/(a-b)$ et $a - b$ est plus petit que b, d'où une contradiction.

En fait cet exercice peut être complété par des théorèmes beaucoup plus compliqués sur cette irrationalité dont certains disent que c'est l'irrationnel qui s'approxime le plus mal par des fractions. Ainsi, dans le domaine de la théorie des nombres, le théorème de Hurwitz (1891) exprime une majoration de la différence entre un irrationnel x et des rationnels : $|x - h/k|$. Il existe toujours une infinité de rationnels h/k tels que cette différence soit majorée par $1/(\sqrt{5}\,k^2)$. Mais, pour le nombre d'or par exemple, on ne peut pas remplacer $\sqrt{5}$ par un nombre plus grand –ce qui aurait pu améliorer l'approximation (sauf à n'avoir qu'un nombre fini de rationnels qui vérifient encore l'inégalité). Cependant les approximations peuvent être améliorées pour certains nombre irrationnels.

C'est en relation avec le développement en fractions continues évoqué ci-dessus page 28.

Une expression différente du nombre d'or

En 1150, un mathématicien, Al-Samawal, en travaillant à Bagdad donne une expression qui correspond au nombre d'or : $\frac{\sqrt{125}-5}{15-\sqrt{125}}$. A première vue elle semble différente de celle que nous connaissons actuellement mais en la simplifiant on obtient des expressions identiques :

$$\frac{\sqrt{125}-5}{15-\sqrt{125}}.=\frac{5\sqrt{5}-5}{15-5\sqrt{5}}=\frac{5(\sqrt{5}-1)}{5(3-\sqrt{5})}=\frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}}\times\frac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}+5-3-\sqrt{5}}{9-5}=\frac{2(\sqrt{5}+1)}{4}=\frac{2(\sqrt{5}+1)}{2\times 2}=\boxed{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$$

2) Quelques propriétés arithmétiques des nombres de Fibonacci

La plupart de ces propriétés mettent en jeu du calcul algébrique et souvent un raisonnement par récurrence. La difficulté peut tenir à l'écriture des indices des nombres de Fibonacci et au travail correspondant.
La première propriété peut donner lieu à « un tour de magie » qu'on trouve souvent associé à ces nombres. Nous en donnons aussi une généralisation.

Exercice 2 : une relation algébrique entre un terme de la suite et la somme de termes bien choisis

1) Un tour de magie : faites écrire une liste de 10 nombres (pas trop grands !) tels que, à partir du 3ème, chaque nouveau nombre est la somme des deux précédents. Demandez le 7ème nombre de la liste et devinez la somme de tous les nombres de la liste. Ou trouvez le 7ème terme à partir de la somme !

2) La somme de 10 termes consécutifs d'une suite vérifiant la même relation que celle de Fibonacci ($F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$), quels qu'en soient les deux premiers termes, est égale au produit du 7ème terme de la liste considérée par 11.

Démonstration

1) On peut deviner la somme de ces nombres à partir du 7ème de la liste ! En effet la somme de ces 10 nombres est… 11 fois le 7ème… En voici la preuve :

Soient a et b les deux nombres initiaux : 1.a ,2.b, 3. a+b, 4. a + 2b, 5. 2a + 3b, 6. 3a + 5b, 7. 5a + 8b, 8. 8a + 13b, 9. 13a + 21b, 10. 21a + 34b. La somme est : 55a + 88b ce qui est égal à 11(5a + 8b).

Cela permet les deux formes du tour proposées.

2) Il s'agit de montrer que $F_n+F_{n+1}+F_{n+2} + \dots \dots + F_{n+9}=11\times F_{n+6}$

En effet, si l'on pose : $F_n=x$ et $F_{n+1}=y$, on obtient (en remarquant que n = n + 0, ce qui implique que le 10ème terme est F_{n+9}) :
$F_{n+2}=x+y$;
$F_{n+3}=x+2y$;
$F_{n+4}=2x+3y$;
$F_{n+5}=3x+5y$;
$F_{n+6}=5x+8y$;
$F_{n+7}=8x+13y$;
$F_{n+8}=13x+21y$
$F_{n+9}=21x+34y$.

$F_n+F_{n+1}+F_{n+2}+\dots+F_{n+9} = 55x+88y = 11(5x+8y) = 11\times F_{n+6}$

L'exercice suivant fait essentiellement travailler le raisonnement par récurrence et le calcul sur des sommes de n termes.

Exercice 3: une deuxième relation entre termes, somme des termes et carrés des termes

1) Montrer que le terme de rang (n+2) de la suite de Fibonacci est égal à la somme des (n+1) premiers termes de cette suite, à laquelle on ajoute 1.

2) Montrer que $a_{n-1}a_{n+1} - a^2_n = (-1)^n$

Là encore on utilise des raisonnements par récurrence

Démonstration

1) Il faut montrer que pour tout n $a_{n+2} = a_0+a_1+a_2+\ldots +a_n+1$.

Attention aux indices : le $(n+1)^{ème}$ terme est a_n (resp. a_{n+1}) si on commence à a_0 (resp. a_1).

On pose : $S_n = a_0+a_1+a_2+\ldots+a_n+1$ pour $n \geq 2$.

Soit P_n la proposition $S_n = a_{n+2}$ pour $n \geq 2$.

Initialisation

Pour n = 2

$S_2 = a_0+a_1+a_2+1=0+1+1+1=3$ et $a_{2+2}=a_4= a_2+a_3 =1+2=3$ donc P_n est vraie pour n = 2.

Hérédité

On suppose que pour un entier n, avec $n \geq 2$, on a P_n est vraie, soit $S_n = a_{n+2}$.

$S_{n+1} = a_0+a_1+a_2+\ldots+a_{n+1} + 1$

$S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$

$S_{n+1} = a_{n+2} + a_{n+1} = a_{n+3}$

Et donc $S_{n+1} = a_{(n+1)+2}$

donc P_{n+1} est encore vraie.

D'où, d'après le raisonnement par récurrence, pour tout $n \geq 2$, P_n est vraie.

Remarque : on peut aussi faire une démonstration directe, en travaillant sur les égalités écrites pour n =2, 3, n+1 et en simplifiant dans la somme des termes de gauche qui est égale à la somme des termes de droite.

2) En premier lieu, l'égalité $a_0a_2-a^2_1 = 0-1=-1 = (-1)^1$montre que la propriété est vérifiée lorsque n=1.

En supposant la propriété vraie jusqu'au rang n, il suffit de transformer l'égalité correspondante : $a_{n-1}a_{n+1} - a^2_n = (-1)^n$

On remplace a_{n-1} par son expression $a_{n+1} - a_n$ d'où $(a_{n+1} - a_n)a_{n+1} - a^2_n= (-1)^n$

Soit $a^2_{n+1}- a_na_{n+1}- a^2_n= (-1)^n$

Ou encore $a^2_{n+1}- a_n(a_{n+1}+a_n) = (-1)^n$

Ce qui s'écrit $a^2_{n+1} - a_na_{n+2} = (-1)^n \Leftrightarrow a_na_{n+2} - a^2_{n+1}= (-1)^{n+1}$

Exercice 4: Nombres premiers entre eux

Montrer que deux nombres de Fibonacci successifs sont premiers entre eux

Indications

1) Si deux nombres successifs a_n et a_{n+1} ont un diviseur commun (différent de 1), ce nombre divise aussi leur différence, soit a_{n-1}. On peut ainsi « descendre » jusqu'à 1 qui aurait un diviseur différent de 1 ce qui est impossible.

Retour aux rectangles d'or : calculs, en fonction des nombres de Fibonacci, des longueurs des côtés successifs des rectangles d'or emboîtés construits à partir d'un premier rectangle d'or.

On considère le rectangle ABCD et le rectangle EBCF, obtenu à partir du premier en enlevant le carré construit sur [AD]. On sait que si ABCD est doré, alors EBCF aussi. On continue cette construction,

On suppose que le rectangle initial a comme longueurs de côtés (L, l) et le deuxième rectangle $(l, L - l)$.

Exercice 5 : calcul des longueurs et largeurs des rectangles d'or successifs (imbriqués)

On rappelle que tous ces rectangles ont même format.

Montrer que, pour n>2, le nième rectangle a des côtés de mesures $(-1)^n(a_{n-1}l - a_{n-2}L, a_{n-1} L - a_n l)$

Indications

On vérifie la formule pour n=3 : on trouve $(L- l, 2l - L)$.

On suppose la formule vérifiée pour le nième rectangle et on cherche les longueurs des côtés du (n+1)ième. On sait que le rapport des longueurs de ces rectangles tous de même format est l'inverse de ce format, $\frac{l}{L}$.

On doit donc avoir pour la première longueur : $(-1)^n(a_{n-1}l - a_{n-2}L)\times\frac{l}{L}$, ce qui donne, en remplaçant l^2 par $L^2 - L\,l$ (cf. propriété (3) du nombre d'or), $(-1)^n(a_{n-1} L - (a_{n-1} + a_{n-2})\, l)$ ou encore, en introduisant a_n et en utilisant $(-1)^{n+1} = (-1)(-1)^n$:

$(-1)^{n+1}(a_n l - a_{n-1}L)$.

Le même type de calcul permet de vérifier l'hérédité de la propriété annoncée pour la deuxième longueur et donc la propriété annoncée pour le rectangle (n+1)ième.

Par suite la propriété est vraie pour tout n (raisonnement par récurrence).

C) Deux algorithmes en Python

1) Nombres de Fibonacci

```python
n = int(input("Entrez n:"))

a = 0
b = 1
c = 0

for i in range(n-1):
    a = b
    b = c
    c = a + b
    print(c)
```

```
Entrez n:20
2
3
5
8
13
21
34
55
89
144
233
377
610
987
1597
2584
4181
6765
10946
17711
>>> 
```

2) Nombre d'or

```python
from math import *
n=int(input("Entrez n:"))
a = 1
b = 1
c = b

for i in range (n):
    a = b
    b = c
    c =a+b
    d=c
    e=d/b
    print(e)
```

```
Entrez n:20
2.0
1.5
1.6666666666666667
1.6
1.625
1.6153846153846154
1.619047619047619
1.6176470588235294
1.6181818181818182
1.6179775280898876
1.6180555555555556
1.6180257510729614
1.6180371352785146
1.618032786885246
1.618034447821682
1.6180338134001253
1.618034055727554
1.6180339631667064
1.6180339985218033
1.618033985017358
>>> 
```

V En algèbre linéaire : espace vectoriel et base… (formule de Binet) : les suites qui vérifient

$u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$. Matrices

Les exercices qui suivent sont en partie hors programme.

1) Un sous-espace vectoriel de dimension 2 l'espace vectoriel des suites réelles – la formule de Binet

Exercice 1 : une structure sur l'ensemble des suites doublement linéaires

1) Montrer que l'ensemble E des suites (u_n) vérifiant pour n >1, $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ et u_0 et u_1 donnés est un espace vectoriel

2) Est-ce que l'ensemble des suites arithmétiques est un espace vectoriel ? L'ensemble des suites géométriques ?

3) Chercher des suites géométriques dans E.

4) Montrer que E est un espace vectoriel de dimension 2.

5) En déduire l'expression du terme général de la suite de Fibonacci en fonction du nombre d'or et de son inverse (la formule de Binet), en choisissant la base formée des deux suites ϕ^n et $(-1/\phi)^n$

Indications

1) On considère l'ensemble E des suites qui vérifient cette relation. Il n'est pas vide puisque la suite de Fibonacci y appartient !

Si deux suites (u_n) et (v_n) appartiennent à E, leur somme aussi, ainsi que la suite produit $\lambda(u_n)$.

C'est la stabilité pour ces lois.

On a donc un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites réelles.

2) L'ensemble des suites arithmétiques est-il un sous-espace vectoriel des suites réelles ?

Les deux lois sont stables : on se donne deux suites arithmétiques (u_n) et (v_n)

Si $u_n = rn + a$ et $v_n = sn + b$, alors $u_n + v_n = (r + s)\, n + a + b$ et la suite ($u_n + v_n$) est arithmétique.

Même démonstration pour la loi externe.

Exemple d'un sous ensemble qui n'est pas un espace vectoriel : les suites géométriques

On exhibe un contre-exemple : (2^n) + (3^n) n'est pas une suite géométrique : 5, 13, 35…

donc l'ensemble des suites géométriques n'est pas stable pour l'addition.

3) On cherche des suites particulières de E, sous forme de suites géométriques.

On trouve : ϕ^n et $(-1/\phi)^n$

On démontre qu'elles ne sont pas « proportionnelles » (dépendantes, liées).

On aurait une combinaison linéaire nulle

$a(\phi^n) + b(-1/\phi)^n = 0$

donc $a + b = 0$ et $a\phi - (b/\phi) = 0$, impossible sauf si $a = b = 0$.

Puis on exprime toutes les suites de E comme combinaison linéaire de ces deux suites.

En particulier celle de Fibonacci : c'est la formule de Binet… $F_n = \dfrac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}$

Remarque : on peut retrouver à partir de cette formule la limite ϕ du rapport F_{n+1}/F_n.

2) Matrices et suites de Fibonacci

On peut aussi utiliser les matrices pour étudier les suites de Fibonacci, de deux manières très différentes.

Exercice 2 : une matrice formée de nombres de Fibonacci, notés a(n), pour établir des propriétés arithmétiques de ces nombres – Cet exercice peut être abordé en mathématiques expertes.

On rappelle qu'on définit la suite de Fibonacci par a(0) = 0, a(1) = a(2) = 1, et pour tout n > 2

a(n) = a(n-1) + a(n-2). Selon les cas on donne ou non a(0), d'où la donnée des deux termes a(1) et a(2) – même si la donnée de a(2) est inutile si on donne a(0).

On considère la matrice A= $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

1) Calculer A^2, A^3 et vérifier que $A^n = \begin{pmatrix} a(n+1) & a(n) \\ a(n) & a(n-1) \end{pmatrix}$ (P)

2) Soit p et q deux entiers non nuls. Calculer $A^p \times A^q$ et en déduire que

a(p+q) = a(p) x a(q+1) + a(p-1) x a(q)

3) En déduire que si k est un entier qui divise a(p) et a(q) il divise aussi a(p+q).

4) Démontrer que pour tout n non nul, a(p) divise a(pn).

5) Montrer que si n non premier, a(n) non premier.

Indications

1) On vérifie que A^2 a la forme attendue : c'est la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, qui vérifie

$A^2 = \begin{pmatrix} a(2+1) & a(2) \\ a(2) & a(1) \end{pmatrix}$

Supposons que A^n a la forme attendue et calculons A^{n+1}.

On trouve $\begin{pmatrix} a(n+1)+a(n) & a(n+1) \\ a(n)+a(n-1) & a(n) \end{pmatrix}$, ce qui est la forme attendue

$$\begin{pmatrix} a(n+2) & a(n+1) \\ a(n+1) & a(n) \end{pmatrix}$$

L'application du raisonnement par récurrence permet d'affirmer que la relation (P) annoncée est vraie pour tout n.

2) On a $A^p \times A^q = A^{p+q}$

En identifiant les termes placés en deuxième ligne première colonne des deux matrices égales ci-dessus on obtient : a(p+q) = a(p)a(q+1) + a(p-1)a(q) – c'est la formule cherchée.

3) Il en résulte que si k divise a(p) et a(q), k divise aussi la somme du deuxième membre de l'égalité ci-dessus et donc aussi le premier membre qui est précisément a(p+q).

4) En prenant p=q dans la formule obtenue en 2) , on obtient a(2p) = a(p)a(p+1) + a(p-1)a(p) : par suite a(p) divise a(2p). En appliquant la question 3) il en résulte que a(p) qui divise a(p) et a(2p) divise a(3p). Par récurrence on démontre ainsi que a(p) divise a(np) pour tout n.

5) On montre la contraposée : si a(n) est premier, n est premier.

En effet si a(n) premier et n non premier, on aurait n = kp et a(p) diviserait a(n)= a(kp) d'après la question 4). Ce qui contredit l'hypothèse a(n) premier.

Exercice 3 : une matrice à diagonaliser pour obtenir la formule de Binet

1) Vérifier que $\begin{pmatrix} a(n) \\ a(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(n-1) \\ a(n) \end{pmatrix}$

On appelle B la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose $F_n = \begin{pmatrix} a(n) \\ a(n+1) \end{pmatrix}$

2) Montrer que $F_n = B^n F_0$

3) Trouver les valeurs propres et une base de vecteurs propres de B.

4) En déduire la formule de Binet.

Indications

1) Calcul matriciel élémentaire qui s'interprète en $F_n = BF_{n-1}$

2) On en déduit que $F_n = B^2F_{n-2} = B^{n-0} F_0$

3) On cherche le polynôme caractéristique de B : on trouve $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$.

Les deux valeurs propres sont donc les deux racines ϕ et $-1/\phi$ de l'équation ci-dessus.

La recherche des vecteurs propres donne par exemple $\begin{pmatrix}1\\ \varphi\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\ -\frac{1}{\varphi}\end{pmatrix}$

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, ils forment une base et si on pose P = $\begin{pmatrix}1 & 1\\ \varphi & -\frac{1}{\varphi}\end{pmatrix}$

On peut écrire B = P D P^{-1} où D est la matrice diagonale $\begin{pmatrix}\varphi & 0\\ 0 & -\frac{1}{\varphi}\end{pmatrix}$.

4) On en déduit que $A^n = PD^n P^{-1}$. Le calcul de D^n est facile. Le calcul de P^{-1}, par exemple en résolvant un système obtenu à partir de $PP^{-1} = Id$, $P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3-\varphi & 2\varphi-1\\ \varphi+2 & -2\varphi+1\end{pmatrix}$

permet enfin d'obtenir la formule cherchée.

Quelques références bibliographiques

Mots clefs mathématiques : le nombre d'or, le rectangle d'or, l'angle d'or, les triangles d'or, la spirale d'or, la suite de Fibonacci, les nombres de Fibonacci…

Il y a de très nombreuses références sur Internet, dont un article de Wikipédia ou des travaux personnels encadrés (TPE) sur le sujet. De fait beaucoup de documents donnent des informations qui se recoupent.

Nous avons donc fait un choix très restreint, en ne gardant que quelques sources qui nous semblent couvrir pas mal de choses. Rien n'empêche de compléter à sa guise ! Notez que chaque mot clef donne accès à des documents un peu différents…

Livres (hors manuels scolaires)

Cleyet-Michaud M. (réédition 2020). *Le nombre d'or*. Paris : Puf, Que sais-je.

Corbalan F. (2019) *Le nombre d'or, le langage mathématique de la beauté.* RBA.

Livio M. (2018). *Le nombre d'or, les clefs du mystère*. Paris : Odile Jacob.

Neveux, Marguerite, et Herbert E. Huntley. (1995). *Le nombre d'or: radiographie d'un mythe*. Traduit par E. Doisneau et B. Turle. Paris: Seuil.

Articles sur internet

Thérèse Eveilleau Le nombre d'or (mathématiques magiques)

Yvan Monka le nombre d'or (Maths-et-Tiques)

Gérard Villemain Le nombre d'or, ce qu'il faut savoir en bref

Christiane Rousseau Nautile, nombre d'or et spirale dorée (Uqam)

Dans *Images des mathématiques (CNRS) :*

1) débat sur le livre chez RBA –

2) Pierre de la Harpe (2009) LE NOMBRE D'OR EN MATHEMATIQUE (beaucoup plus difficile)

Vidéos

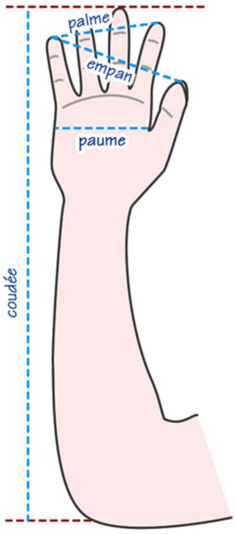
Mickaël Launay (deux vidéos) : le nombre d'or – la suite de Fibonacci et le nombre d'or

Dans la deuxième vidéo, un peu plus difficile à la fin, vous aurez la surprise de retrouver … André Deledicq !

45

Annexes

Une illustration : les anciennes mesures (Au moyen âge, les bâtisseurs de cathédrales utilisent 5 unités de mesure relatives au corps humain :



- la paume = 34 lignes = 7,64 cm
- la palme = 55 lignes = 12,36 cm
- l'empan = 89 lignes = 20 cm
- le pied = 144 lignes = 32,36 cm
- la coudée = 233 lignes = 52,36 cm

Avec une unité de base : la ligne = 2,247 mm

On peut faire 2 constatations surprenantes :

on passe d'une mesure à l'autre en la multipliant par le nombre d'or (une approximation !)

- la palme = la paume x 1,618 (7,64 x 1,618) = 12,36 cm
- le pied = l'empan x 1,618 (20 x 1,618) = 32,36 cm
- la coudée = le pied x 1,618 (32,36 x 1,618) = 52,36 cm

Une unité de mesure est égale à la somme des deux précédentes

- empan = palme + paume (12,36 + 7,64) = 20 cm
- pied = empan + palme (20 + 12,36) = 32,36 cm
- coudée = empan + pied (20 + 32,36) = 52,36 cm

Un autre nombre d'or

En astronomie, on appelle **Nombre d'or** le rang d'une année dans le cycle de Méton qui comporte 19 années et permet de faire coïncider, à quelques heures près, cycles lunaires et cycles solaires. Il existe alors 19 Nombres d'or (de 1 à 19) et chaque année possède son Nombre d'or. Cette notion n'a donc aucun rapport avec le nombre d'or φ en mathématiques.

L'ensemble des entiers

Quelle que soit la façon d'introduire les entiers naturels, ceux-ci ont les mêmes propriétés fondamentales à partir desquelles on développe l'arithmétique. Richard Dedekind et Giuseppe Peano en ont proposé indépendamment des axiomatisations qui étaient essentiellement équivalentes. Il s'agissait d'axiomatisation que l'on dit parfois aujourd'hui du second ordre : la notion d'ensemble (ou de prédicat) est supposée connue et n'est pas prise en compte par l'axiomatisation. Voici une présentation moderne de ces axiomes (dits axiomes de Peano) :

1. L'élément appelé zéro et noté 0, est un entier naturel[14].
2. Tout entier naturel n a un unique successeur, souvent noté $s(n)$ ou S n (ou autres variantes).
3. Aucun entier naturel n'a 0 pour successeur.
4. Deux entiers naturels ayant même successeur sont égaux.
5. Si un ensemble d'entiers naturels contient 0 et contient le successeur de chacun de ses éléments, alors cet ensemble est égal à **N**.

Le premier axiome permet de poser que l'ensemble des entiers naturels n'est pas vide, le second que le successeur est une fonction, le quatrième que cette fonction est injective, le troisième qu'il possède un premier élément (ces deux axiomes assurent que l'ensemble des entiers naturels est infini). Le cinquième est une formulation du principe de récurrence.

Une propriété importante, démontrée par Richard Dedekind à partir de ces axiomes, est le principe de définition par récurrence. Il permet par exemple de définir les opérations usuelles.

Axiomatisation équivalente

Les axiomes 1 à 5 ci-dessus (associés à la définition de ≤ qu'ils permettent : $a \leq b$ si et seulement s'il existe un nombre c tel que $a + c = b$) sont équivalents à :

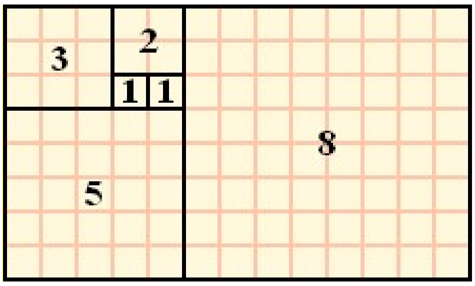
N est un ensemble ordonné non vide et bien ordonné vérifiant :

- (N1) : Toute partie non vide de **N** admet un plus petit élément,
- (N2) : Toute partie non vide et majorée de **N** admet un plus grand élément,
- (N3) : **N** lui-même n'a pas de plus grand élément.

Une autre approximation des rectangles d'or : les rectangles de Fibonacci

Une autre bonne approximation du rectangle d'or peut être construite à l'aide de carrés dont les côtés sont égaux aux nombres de la suite de Fibonacci, et cela indéfiniment tout comme le sont les nombres de la suite de Fibonacci. Voici ci-dessous un exemple de rectangle d'or construit selon les nombres de la suite de Fibonacci.

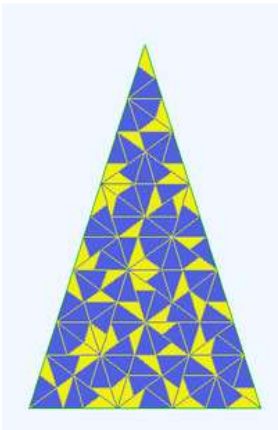
Quelle propriété des nombres de Fibonacci permet d'affirmer cette approximation ? (c'est leur définition)



Les pavages de Penrose : une application inattendue !

Les **pavages de Penrose** sont, en géométrie, des pavages du plan découverts par le mathématicien et physicien britannique Roger Penrose dans les années 1970. Ils ne sont pas périodiques (ne se reproduisent jamais à l'identique). En 1984, ils ont été utilisés comme un modèle intéressant de la structure des quasi-cristaux (cf. wikipédia). Les quasi-cristaux font partie du monde minéral, ils présentent des symétries mais ne sont pas périodiques.

Voici un tel pavage du triangle d'or.



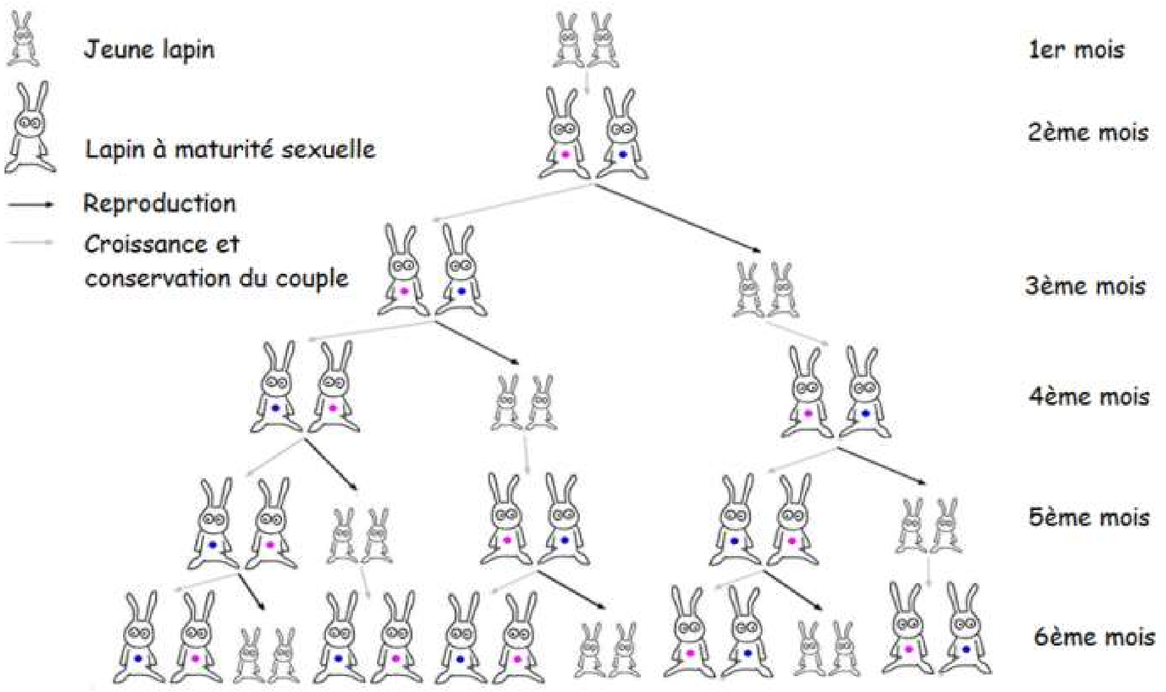
Modélisations conduisant à une suite de Fibonacci

Les lapins de Fibonacci

Fibonacci pose le problème suivant : Ayant, au départ, un couple de lapins, combien de couples obtient-on en 12 mois si chaque couple, à compter du second mois de son existence, engendre tous les mois un nouveau couple?

Pour résoudre son problème, Fibonacci émet trois hypothèses : 1) La maturité sexuelle du lapin est atteinte après un mois, qui correspond également à la durée de gestation. 2) Chaque portée comporte toujours un mâle et une femelle. 3) Les spécimens sont en pleine santé ; aucun lapin ne meurt.

Prolifération des lapins : un jeune couple peut engendrer un nouveau jeune couple au bout de deux mois. A partir de ce moment-là il engendre un nouveau couple chaque mois. Aucun couple ne disparait. (plusieurs versions !)



Et ainsi de suite...

La suite des nombres de lapins est 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144…

Chaque nombre est la somme des deux précédents.

Cette suite (dont les nombres deviennent très vite très grands) a de nombreuses propriétés.

Lien avec le nombre d'or

la division d'un terme de la suite par son précédent tend vers une approximation très proche du nombre d'or quand on prend des nombres élevés (successivement plus grande et plus petite)…

On démontre en effet que la suite des rapports de deux termes consécutifs (le dernier sur l'avant-dernier) a comme limite le nombre d'or (la dernière colonne du tableau présente les valeurs de (n+1)/n).

n	n+1	n+1/n
1	1	1
1	2	2
2	3	1,5
3	5	1,66667
5	8	1,6
8	13	1,625
13	21	1,61538
21	34	1,61905
34	55	1,61764
55	89	1,61818
89	144	1,61798
144	233	1,61805
233	377	1,61803
377	610	1,61804
610	987	1,61803

Voir TP3 p 161 le nombre d'or dans Maths 1re enseignement de spécialité métamaths ; exercice 83 p 169 Prolifération de lapins : la suite de Fibonacci.

Il y a d'autres modélisations, notamment on peut évoquer un modèle linéaire d'une épidémie : le nombre de malades du jour n est la somme des nombres de malades du jour n-1 et du jour n-2…

Développements récents

Théorème de Zeckendorff (1952) Tout entier k ∈ N peut s'écrire de façon unique comme une somme de $(u_n F_n)$ où (u_n) est une suite finie de 0 et de 1 qui ne contient pas deux 1 consécutifs et les F_n sont les nombres de Fibonacci.

Etude des nombres de Tribonnaci

Ce sont les solutions de l'équation $x^3 = x^2 + x + 1$

Nombre d'or et fractales

Un objet fractal est tel que toute portion est identique au tout (autosimilarité)

Un objet est dit fractal si une partie de cet objet agrandi d'un facteur k donne l'objet entier, constitué de N répliques de cette partie. La dimension fractale est alors $\frac{\ln N}{lnk}$

Cela évoque la spirale logarithmique citée plus haut.

Spirales (tiré de « Nautile, Nombre d'or et spirale dorée » de Christiane Rousseau, Uqam) – vers la botanique

La spirale dorée est une très bonne approximation de la spirale logarithmique associée au nombre d'or.

Une spirale logarithmique est une courbe du plan qui, dans un repère orthonormé : c'est l'ensemble des points dont les coordonnées polaires (r, θ) satisfont à une équation de la forme $r = ae^{b\theta}$, où a >0 et b est non nul.

Qu'est-ce qui différencie une spirale logarithmique d'une spirale qui ne l'est pas? Graphiquement, la différence est la suivante : si on fait une copie d'une spirale logarithmique en imposant une contraction ou une dilatation, il est toujours possible de superposer exactement la copie sur l'original en faisant effectuer à la copie une rotation qui dépend du coefficient de contraction ou de dilatation.

C'est cette caractéristique de la spirale logarithmique que le mathématicien Jacques Bernoulli (1654-1705) a décrite en ces termes : « *eadem mutata resurgo* » qui signifie « déplacée (mutata), je réapparais (resurgo) à l'identique (eadem) ».

Dans le cas d'une spirale dorée, les courbes se superposent seulement si la contraction est $1/\phi$ et si elle est accompagnée d'une rotation d'un angle de $-\pi/2$ radians.

Cette caractéristique de la spirale logarithmique se retrouve dans la description algébrique de la courbe. Les coordonnées polaires (r, θ) d'un point $P = (x, y)$ d'une spirale logarithmique sont reliées par une équation de la forme $r = ae^{b\theta}$ avec $a > 0$ et $b \neq 0$. Le paramètre important d'une spirale logarithmique est le paramètre b. En effet, si on fait effectuer à une spirale logarithmique une rotation d'un angle ψ, ce qui revient à changer θ pour $\theta + \psi$, on change le paramètre a en $a' = ae^{b\psi}$. Donc le paramètre a contrôle la position de la spirale, alors que le paramètre b contrôle sa forme. On peut superposer exactement par une rotation deux spirales de même paramètre b, alors que deux spirales de paramètres b et b' distincts ne sont jamais superposables.

Dans l'équation $r = ae^{b\theta}$, le paramètre b a la propriété suivante : si on prend un point de départ sur la spirale de coordonnées (r, θ) et si on fait un tour (θ s'accroît de 2π), alors r s'accroît par un facteur $e^{2\pi b}$. La difficulté à trouver le paramètre b de la spirale logarithmique approchant la spirale dorée consiste à trouver le centre de la spirale dorée!

Pour cela, il nous faut être un peu astucieux comme nous le révèle le théorème suivant. Par ailleurs, le théorème d'après nous indique que le paramètre b de la spirale logarithmique approximant la spirale dorée est $3\phi + 2$, soit environ 6,854.

Théorème Soit une spirale dorée inscrite dans un rectangle (L ;1).

On prend un système d'axes [AB], [AD], et on considère la similitude d'angle $3\pi/2$, de rapport $1/\phi$ et de translation (1,1).

Le centre de cette similitude est le point de coordonnées $[(2\phi+1) /(\phi + 2), 1/(\phi + 2)]$

Remarque : on a fait ce travail avec les nombres complexes pour l'autre similitude qui convient, de même rapport mais d'angle $\pi/2$ (elle n'a pas le même centre).

Démonstration

La similitude de centre O qui envoie un rectangle d'or dans le suivant a comme expression analytique

$(x,y) \to (y/\phi, x/\phi)$.

Par suite lorsqu'on tourne de $-\pi/2$, on se rapproche de 0 d'un facteur $1/\phi$. A l'inverse lorsqu'on tourne de 2π, on s'éloigne de ϕ^4.

On écrit la composition de l'homothétie de rapport $1/\phi$, de la rotation d'angle $-\pi/2$, et de la translation (1,1).

On obtient $(x',y') = [(y/\phi)+ 1, (-x/\phi) + 1]$

D'où le point fixe : $x' = x$, $y' = y$ (on rappelle que $1/\phi = \phi - 1$).

Théorème Le paramètre b de la spirale logarithmique approximant la spirale dorée est donné par

$b= (2/\pi)\ln(\phi)$, soit environ $b \approx 0{,}30635$. En un tour, la distance au centre de la spirale s'accroît par un facteur : $\phi^4 = 3\phi + 2 \approx 6{,}8541$.

Démonstration : On doit avoir $e^{2\pi b} = \phi^4$. En prenant le logarithme des deux côtés, on obtient

$2\pi b = 4 \ln\phi$, ce qui donne bien : $b= (2/\pi)\ln(\phi)$.

Si on parcourt un morceau de la spirale correspondant à un accroissement de l'angle de 2π, alors la distance au centre de la spirale s'accroît par un facteur :

$e^{2\pi b} = \phi^4 = (\phi^2)^2 = (\phi + 1)^2 = \phi^2 + 2\phi + 1 = 3\phi + 2$.

Vers les applications en botanique : Angle d'or et spirales

Le remplissage du plan par des points placés sur des cercles concentriques à des distances associées à un angle donné est d'autant plus dense que cet angle est « mal approché » par des rationnels. Cela met en jeu le développement en fraction continue. Plus les dénominateurs sont grands, meilleure est l'approximation. Donc s'ils valent tous 1 le nombre est le plus mal approché…

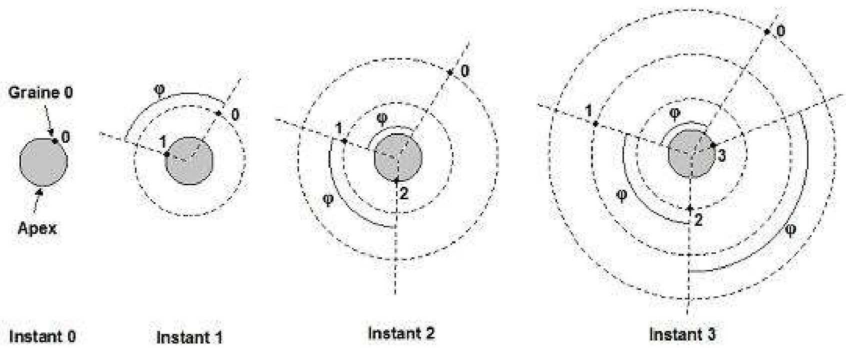


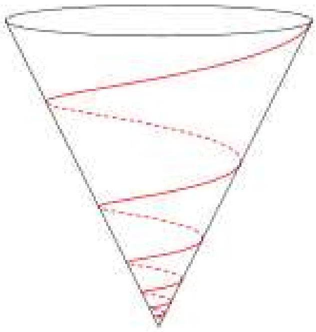
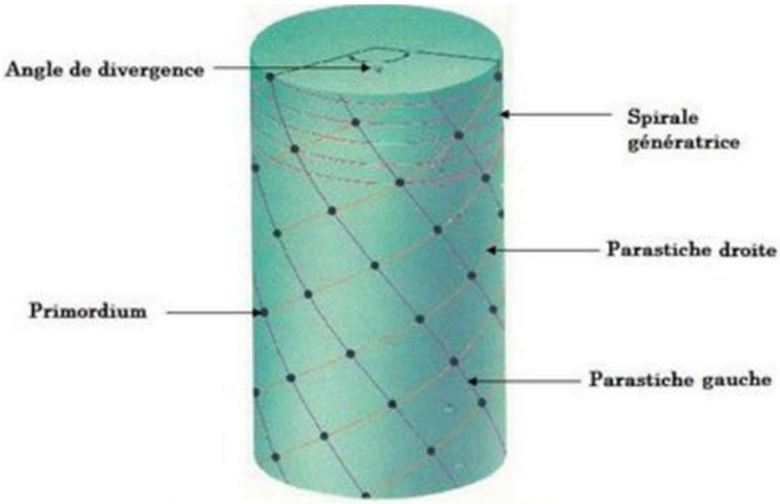
Schéma de la pousse des graines pour un angle φ.
La vitesse d'éloignement des graines du centre est supposée constante.

Hélices et spirales

En géométrie, l'hélice est une courbe dont la tangente en chaque point fait un angle constant avec une direction donnée.

Il existe de nombreux types d'hélices, certaines sont désignées en référence à leur courbe directrice (Γ), d'autres en référence à la surface sur laquelle elles sont tracées.

52

Cône et spirale	Cylindre et spirale
	 Spirale génératrice, parastiches et angle de divergence

53

Les nombres : routes et dédales

- Entiers, fractions simples ou moins simples – différentes « numérations » (à la fois façons de regrouper et d'écrire)
- Racines simples connues depuis l'antiquité ! Mais chez les grecs ce ne sont pas des nombres, mais des grandeurs.
- Chiffres indiens : de 1 à 9 ($2^{ème}$ av JC ?), puis 0 y compris pour marquer l'absence (position) –cf. Bramagupta
- Décimaux (fractions décimales) développées chez les mathématiciens arabes ($8^{ème}$, $9^{ème}$,$10^{ème}$) : Abu Djafar Muhammad ibn Musa al Khawarizmi - Bagdad - Perse (780 ; 850) : système décimal, opérations, extraction de racines carrées
- Nombres décimaux : viennent du monde arabe ; transmis en occident par Fibonacci (écriture), Stevin (nombres décimaux)(deuxième moitié $16^{ème}$ siècle) –
- Nombres rationnels : des Égyptiens à Oresme ($14^{ème}$), Viète
- Irrationnels : du statut de grandeur au statut de nombre, c'est long… chez les savants arabes, puis Stevin…
- Négatifs : dur, dur ! L'introduction des quantités négatives en occident est cependant difficile et connaît en prime l'obstacle du zéro. Clairault (1746 !) clarifie les règles opératoires…
- Complexes…

Une chronologie succincte autour des étapes du début de l'histoire du nombre d'or

- Babyloniens (-1800-1500) et égyptiens (-5000 ->…) : les tablettes conservent une foule d'informations notamment pour résoudre les équations du second degré
- Pythagore (6ème siècle av J.C.),
- **Euclide (autour de 300 av J.C**.),
- Archimède (-287;-212)
- Diophante (3ème siècle) : résolution « en actes » des équations du 2d degré
- Les mathématiciens arabes (8ème ->10ème siècle) : calculs de racines, écritures décimales
- Le mathématicien indien Sridhar Acharya propose une méthode pour calculer les deux racines réelles
- Le mathématicien arable AL-Khwarizmi (820-830) décrit des transformations algébriques permettant de résoudre des équations du second degré
- **Fibonacci** (12ème – 13ème) :
- **Pacioli** (deuxième moitié 15ème)
- Stevin (deuxième moitié 16ème), Viete (deuxième moitié 16ème),
- Les racines négatives sont ignorées jusqu'au 16ème siècle
- Cardan, Bombelli (16ème)…
- **Kepler** (16ème-17ème)
- Girard (première moitié 17ème)
- Descartes (17ème)
- Newton (1642-1727), Leibniz (1646 -1716)
- Euler (1707-1783)
- Cauchy (1789-1857) : formalisation de la notion de limite

Autres pistes

Voici à nouveau le lien avec la vidéo de vulgarisation où sont présentés des aspects du nombre d'or mathématiques, artistiques et liés aux sciences de la nature :

https://www.youtube.com/watch?v=wm736xfNINQ

Le nombre d'or en peinture et architecture

Le nombre d'or en phyllotaxie

55

TITRE :

Des ressources pour les enseignants mathématiques de terminale

AUTEURES:

Monique Chappet-Paries, Jacqueline Penninxck, Françoise Pilorge et Aline Robert

RESUMÉ :

Cette brochure, en deux fascicules, présente des ressources pour les mathématiques de terminale et, pour deux d'entre elles, plus larges. L'ambition est de servir à la préparation des séances. Inscrits dans les programmes (sauf les deux dernières), ces documents, réservés aux enseignants, sont longs, sans beaucoup d'exercices, et n'ont pas donné lieu à expérimentation sauf exception.

Fascicule 2 : pour la classe de terminale enseignement de spécialité

- Combinatoire et dénombrement dont combinaisons avec répétition
- Concentration, loi des grands nombres (inégalité de Bienaymé-Tchebychev, inégalité de concentration, loi des grands nombres)
- Manipulation des vecteurs, des droites, des plans de l'espace (avec quelques préalables de géométrie dans l'espace)

Et deux ressources transversales

- Calcul d'aires (élémentaires – avec des suites – avec le calcul intégral).
- Nombre d'or et suites de Fibonacci – un vieux classique revisité (géométrie plane, nombres complexes, analyse, arithmétique, algèbre linéaire).

MOTS- CLÉS :

corrélation et causalité, inférence bayésienne, temps d'attente, combinatoire, Bienaymé-Tchebychev, vecteurs de l'espace, aires, nombre d'or et Fibonacci.

Éditeur: IREM de Paris
Responsable de la publication: C.Hache
IREM de Paris – Case 7018
Université de Paris
75205 Paris cedex 13
irem_de_paris@univ-paris-diderot.fr
https://irem.u-paris.fr/

Dépôt légal : 2023
ISBN : 978-2-86612-409-0