



Actes du séminaire national de didactique des mathématiques

Année 2020

Édités par

Aurélie Chesnais & Hussein Sabra

PRESENTATION

Le séminaire de l'Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques (ARDM) a pour but de favoriser la mise en discussion et la diffusion des recherches en didactique des mathématiques. Il s'agit d'un outil que s'est donné l'ARDM pour soutenir la structuration de la communauté des chercheur-e-s de cette discipline. Ce séminaire a habituellement lieu 3 fois par an, une année sur deux, et 2 fois par an les années où l'ARDM organise le colloque de l'école d'été de didactique des mathématiques (EEDM). Il est organisé avec le partenariat de l'université Paris Diderot, du LDAR et de l'IREM de Paris.

Sous réserve de l'accord des intervenant-e-s, les présentations sont filmées et diffusées [en ligne](#). Le travail de capture, de montage et d'hébergement des vidéos est assuré par l'IREM de Paris.

Les auteurs sont également invités à rédiger un texte suite à leur communication. Par ailleurs, depuis 2014, le groupe des jeunes chercheur-e-s de l'ARDM organise une session de posters durant les sessions du séminaire. Les textes des communications ainsi que les textes courts associés aux posters sont ensuite regroupés en un volume. Le présent ouvrage regroupe les textes issus des séminaires de l'année 2020. Malheureusement, aucune proposition de poster n'a été faite pour les séminaires de 2020.

Les deux séminaires de l'année 2020 ont eu lieu en janvier et en novembre. Le premier a eu lieu à Paris. Le deuxième séminaire prévu pour l'année en avril, qui devait avoir lieu à Montpellier a dû être annulé du fait de la situation liée à la pandémie de COVID-19. Le séminaire de novembre a eu lieu en « distanciel » avec le soutien de la Faculté d'éducation (FDE) de l'Université de Montpellier. Il a accueilli, comme les années précédentes, le colloquium CFEM-ARDM, sur une demi-journée. Ce dernier a été organisé avec le soutien de l'Université Paris Diderot, du LDAR, de l'IREM de Paris et de la CFEM. Le thème était l'« Appropriation des mathématiques et usages dans la société (École, enseignement et formation) ». Le colloquium n'a pas donné lieu à des actes mais les vidéos des présentations sont disponibles [en ligne](#) sur le site de l'IREM de Paris.

Les textes de ce volume sont identifiés en fonction de la nature de l'intervention. Certains correspondent à la présentation d'une thèse ou d'une Habilitation à Diriger des Recherches, certains rendent compte de travaux en cours, d'autres sont des textes associés à des posters. La rubrique « ouverture sur » inclut également des textes de chercheurs dont les travaux ne relèvent pas de la didactique des mathématiques mais s'inscrivent dans un domaine connexe et dont, en tant qu'organisateur, nous avons estimé qu'ils pouvaient présenter un intérêt pour la communauté. Enfin, la rubrique « thématique filée » regroupe les textes qui correspondent à des interventions visant à discuter les fondements des théories et leurs arrière-plans. L'objectif (ambitieux !), était d'initier une démarche pour aborder l'évolution du paysage théorique dans les recherches en didactique des mathématiques et de rouvrir la discussion sur ce qui fonde la discipline (à la fois du point de vue culturel, philosophique, épistémologique voire politique), pour mieux penser son avenir.

Nous espérons que ce volume contribue ainsi à la dynamique de la communauté des chercheur.e.s en didactique des mathématiques.

Bonne lecture,

Aurélie Chesnais et Hussein Sabra,
Responsables du séminaire

SOMMAIRE

Séminaire des 30 et 31 janvier 2020

Thématique filée 5

Luc Trouche

De l'approche instrumentale à l'approche documentaire du didactique : une histoire d'appropriations croisées et d'hybridations théoriques.

Présentation de thèse 25

Sébastien Jolivet

Un modèle de description didactique de ressources de type exercices de mathématique : définition et perspectives pour la didactique et les EIAH.

Travaux en cours 27

Christine Chambris

Les unités dans l'enseignement de l'arithmétique à l'école.

Ouverture sur 29

Cédric Fluckiger

La didactique de l'informatique est-elle la science des conditions de diffusion des connaissances informatiques ?

Présentation d'HDR 47

Fabien Emprin

La question des savoirs dans la formation des enseignants aux mathématiques. De l'analyse des pratiques de formation à la simulation informatique en formation.

Thématique filée 69

Michèle Artigue

Networking entre théories : enjeux, conceptualisation et pratiques.

Présentation de thèse 89

Dominique Laval

Les Espaces de Travail Mathématique et Algorithmique connectés. Étude d'une activité algorithmique comme objet d'apprentissage de savoirs spécifiques et d'usage : Cas d'une ingénierie « dichotomie continue ».

Séminaire des 26 et 27 novembre 2021

Présentation de thèse 117

Sophie Rousse

Discret et continu au lycée. Enjeux de ces notions à travers l'étude de l'enseignement de l'analyse et des probabilités.

Thématique filée 135

Nùria Planas

Working with mathematics teachers on the understanding and promotion of content-specific classroom talk.

Présentation de thèse 147

Maud Chanudet

Résolution de problèmes en mathématiques au secondaire i en suisse romande : quelles pratiques évaluatives ?

Travaux en cours 173

Pierre-François Burgermeister, Maud Chanudet, Sylvie Coppé, Michel Coray, Sylvia Coutat, Marina De Simone, Jean-Luc Dorier, Nataly Essonnier, Stéphane Favier, Jana Lackova, Laurence Merminod, Céline Vendeira

La résolution de problèmes comme objet ou moyen d'enseignement au cœur des apprentissages dans la classe de mathématiques.

Travaux en cours 203

Magali Hersant

L'usage du cadre de l'apprentissage par problématisation en didactique des mathématiques : quels apports possibles ?

DE L'APPROCHE INSTRUMENTALE A L'APPROCHE DOCUMENTAIRE DU DIDACTIQUE : UNE HISTOIRE D'APPROPRIATIONS CROISEES ET D'HYBRIDATIONS THEORIQUES

Luc TROUCHE

Ecole normale supérieure de Lyon, laboratoire S2HEP

Luc.Trouche@ens-lyon.fr

Résumé

On proposera, dans cette intervention, une réflexion sur les sources et la dynamique d'une approche conceptuelle qui veut saisir le travail des enseignants à partir des outils qu'ils s'approprient, de l'œuvre qu'ils constituent et des collectifs qu'ils (ou qui les) rassemblent. C'est fondamentalement un entrelacement d'évolutions technologiques (l'émergence d'Internet) et conceptuelles (une appréhension holistique du travail du professeur ; et une compréhension plus profonde de la notion d'instrumentalisation) qui a conduit à l'extension de l'approche instrumentale (Guin, Ruthven et Trouche 2005) à l'approche documentaire, aux niveaux national et international (Gueudet et Trouche, 2008 ; Trouche, Gueudet et Pepin 2019), les deux niveaux étant d'emblée inter reliés. Le passage à la position de retraité est l'occasion de (se) poser la question de la cohérence d'un travail scientifique. Même si, bien sûr, on peut rendre compte de lignes de cohérence, on soulignera quelques éléments d'intranquillité (Said, 2012) qui peuvent éclairer ce qui a été fait, et ce qui n'a pas été fait (Trouche 2018).

Mots clés

Approche documentaire du didactique ; approche instrumentale ; instrumentation ; instrumentalisation ; schèmes ; système de ressources ; travail collectif.

Abstract

We will propose, in this intervention, a reflection on the sources and the dynamics of a conceptual approach which wants to understand the work of teachers from the tools they appropriate, the work they constitute and the collectives that they (or which brings them together). It is basically an intertwining of technological (the emergence of the Internet) and conceptual (a holistic understanding of the teacher's work; and a deeper understanding of the notion of instrumentalization) that has led to the extension of the instrumental approach (Guin, Ruthven and Trouche 2005) to the documentational approach, at the national and international levels (Gueudet and Trouche, 2008; Trouche, Gueudet and Pepin 2019), the two levels being immediately linked. The transition to the retired position is an opportunity to (question) the question of the coherence of scientific work. Even if, of course, we can account for lines of coherence, we will highlight some elements of tranquility (Said, 2012) which can shed light on what has been done, and what has not been done (Trouche 2018).

Keywords

Documentational approach to didactics ; documentational approach; instrumentation ; instrumentalisation ; schemes ; resource system; collective work.

Merci d'abord à l'ARDM et aux responsables du séminaire, Aurélie Chesnais et Hussein Sabra pour leur invitation. La dernière invitation à ce séminaire national, c'était en 2008, pour présenter, avec Ghislaine Gueudet, les premiers pas de l'approche documentaire du didactique. De 2008 à 2020, 12 ans, c'est une bonne période pour mesurer les évolutions de cette approche et évoquer des questions qui ont marqué son développement. Ce retour prospectif entre bien, il me semble, dans le cadre de la thématique filée de ce séminaire, qui s'intéresse aux « fondements et arrières plans » des approches théoriques en didactique des mathématiques.

Je suis d'ailleurs très heureux de proposer cette contribution en présence de plusieurs doctorants ou post-doctorants anciens ou actuels, Hussein Sabra, Chantal Tuffery, Rosita Paez et Mingyu Shao, Hussein étant le premier doctorant que j'ai encadré après mon HDR, et Mingyu la dernière doctorante que j'encadrerai, étant désormais professeur émérite.

Cette contribution est composée de quatre parties, de longueurs inégales : un prologue ; un retour sur l'approche instrumentale, ses forces et ses faiblesses ; une présentation de l'approche documentaire, du point de vue de ses premiers développements conceptuels et méthodologiques ; et la présentation de perspectives.

I. PROLOGUE : UN FIL ROUGE

Cet article traite de certains développements conceptuels de ces trente dernières années qui ont marqué une trajectoire personnelle (Trouche 2018). Je l'ai pensé avec un intérêt particulier pour les 'raisons d'être' des phénomènes et pour les *milieux* de la recherche. L'article est centré sur les questionnements de la communauté française de didactique des mathématiques, qui ne peuvent se comprendre sans une compréhension large (scientifique et internationale) des phénomènes. Le choix est fait de donner de nombreuses références, comme autant de jalons qui permettent de comprendre les ressorts et les produits de ces développements conceptuels.



Figure 1. *Triple Gong*, Calder, 1951, National Gallery of Art, Washington

L'image (Figure 1) par laquelle j'ai ouvert cet exposé est reprise de la couverture de l'ouvrage « Ressources vives. Le travail documentaire des enseignants en mathématiques ». Nous justifions cette approche métaphorique des ressources : « mobiles sonores, grâce aux collisions entre éléments métalliques produites au cours du mouvement ; élaboration visuelle et auditive, ressources visibles et invisibles ; ... parle de l'individu, d'interaction, de collectif... du nécessaire engagement de chacun pour une œuvre commune... » (Gueudet et Trouche 2010, p. 367).

C'est une bonne entrée pour cet article, dont le fil rouge est l'intérêt pour les supports et les produits (outils, instruments, ressources) de l'activité d'apprendre et de faire apprendre, l'intérêt pour les processus de conception, et l'intérêt pour les processus collectifs, impliquant

une variété d'acteurs : le premier ouvrage (Figure 2) auquel j'ai contribué a été celui écrit avec les 37 élèves d'une classe de terminale scientifique, autour d'une réflexion sur l'intégration de calculatrices complexes (Trouche et al. 1998) ; le dernier ouvrage (Trouche, Gueudet et Pepin 2019), autour de l'« approche ressource » de l'enseignement des mathématiques a été réalisé dans le cadre d'une large collaboration (3 éditeurs, une dizaine d'auteurs, une cinquantaine de contributeurs).

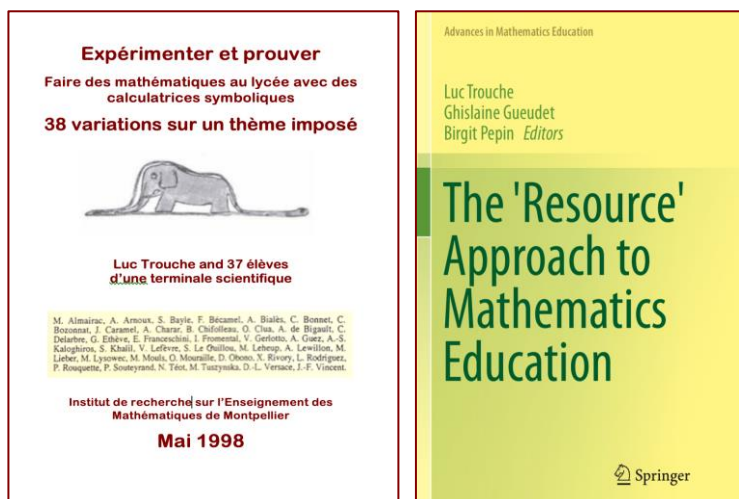


Figure 2. Deux couvertures d'ouvrages collectifs marquant un itinéraire de recherche

Entrons dans le vif du sujet, avec le développement de l'approche théorique qui a marqué mon entrée dans la didactique des mathématiques.

II. L'APPROCHE INSTRUMENTALE, FORCE ET FAIBLESSES

Je présente successivement, dans cette partie, le milieu qui a permis le développement de cette approche, la modélisation qui l'a structurée, son potentiel et enfin ce que l'on peut analyser, *a posteriori*, comme ses faiblesses.

1. Le milieu de l'approche instrumentale

Ce qui a suscité le développement de l'approche instrumentale, c'est la rencontre entre des questionnements didactiques, institutionnels, industriels et conceptuels.

Les questionnements didactiques se situent, en 1985, à la convergence de deux phénomènes technologiques : la complexification des calculatrices à disposition des élèves, et la miniaturisation des appareils informatiques. La réflexion débute dans le domaine de l'enseignement de l'analyse et du calcul formel (Artigue 2002), particulièrement sensibles à l'obtention 'automatique' d'une variété de représentations pour les objets mathématiques (numériques, graphique, algébriques). Ces questionnements se développent dans le cadre d'expérimentations, portées principalement par le réseau de IREM, sollicité par le Ministère français de l'éducation nationale (Artigue 1997, Trouche 1997). Ces expérimentations sont soutenues par les constructeurs du domaine, particulièrement Texas Instruments¹, doublement

¹ Texas Instruments développe d'ailleurs un réseau d'enseignants, T3 (Teacher Teaching with Technology) dont la mission est « To provide quality professional development that enables the mathematics and science educator

intéressés (à la fois par la possibilité de diffuser des produits ; et par l'intérêt de nourrir le processus de conception de retours d'usages fortement argumentés). Ce soutien ouvre d'emblée la voie à des interactions internationales (Guin 1998).

Ces questionnements ont bénéficié d'un milieu conceptuel particulièrement riche : la didactique des mathématiques, en plein essor en France, bénéficiant du réseau des IREM et des IUFM, et de théorisations puissantes, en particulier la théorie des situations didactiques (Brousseau 2011) et l'approche anthropologique du didactique (Chevallard 1997). C'est un troisième pilier de cette tradition didactique française (Artigue et al. 2019), la théorie des champs conceptuels (Vergnaud 2011) qui va jouer un rôle critique, sans doute du fait des ponts qu'elle permet, via la notion de *schème*, avec l'ergonomie cognitive et la conceptualisation des instruments (Rabardel 1995). Plus profondément sans doute, c'est une tradition philosophique (Vygotsky, Leontiev, Engeström, Wertsch) de prise en compte des médiations constitutives de toute activité humaine qui porte cette réflexion. Ce qui est en jeu : "*An irreducible tension between agent and mediational means*" (Monaghan 2016).

2. Une modélisation des apprentissages mathématiques instrumentés

Ce qui a été appelé ultérieurement approche instrumentale naît dans ce contexte. Ma thèse (Trouche 1996), dans le contexte de l'enseignement de l'analyse en lycée, mobilise les principaux concepts introduits par Rabardel (1995), qui seront développés ultérieurement. Le modèle de cette conceptualisation repose sur une double dialectique :

- une dialectique artefact / instrument : l'artefact, produit et moyen de l'activité humaine est *engagé* par le sujet dans le cours de son activité située ; l'instrument est *développé* par le sujet. Il est défini comme une entité hybride, composé de la partie de l'artefact effectivement utilisée et des schèmes d'utilisation, c'est-à-dire des connaissances qui guident l'activité du sujet pour atteindre ses buts en utilisant cet artefact ;
- une dialectique *instrumentation* / *instrumentalisation* : l'instrumentation est le processus par lequel l'utilisation de l'artefact influence l'activité du sujet ; l'instrumentalisation est le processus par lequel le sujet *adapte* l'artefact pour le rendre plus conforme à ses habitudes de travail et mieux adapté à ses buts.

Le processus de développement d'un artefact en instrument, appelé genèse instrumentale, combine instrumentation et instrumentalisation. Les façons de représenter cette genèse vont évoluer (Figure 3, Figure 4), mettant mieux en évidence, au cours du temps, à la fois les processus à l'œuvre et les dialectiques au cœur de cette modélisation.

On peut noter que, à son départ, cette modélisation est à la fois très générale (cf. le titre de l'article « La parabole du gaucher et de la casserole à bec verseur », Trouche 2000) et très spécifique, s'appliquant dans le contexte de l'analyse et du calcul formel. Cette approche va cependant rapidement se développer au sein de la didactique des mathématiques, et plus largement dans la communauté internationale de Mathematics Education.

to be successful in the classroom through the appropriate use of technology »
<https://education.ti.com/en/professional-development/t3-our-mission>

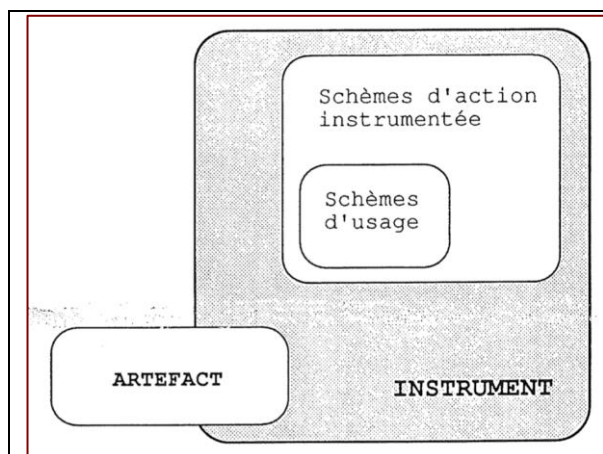


Figure 3. Une représentation d'une genèse instrumentale (Trouche 1996, p. 50)

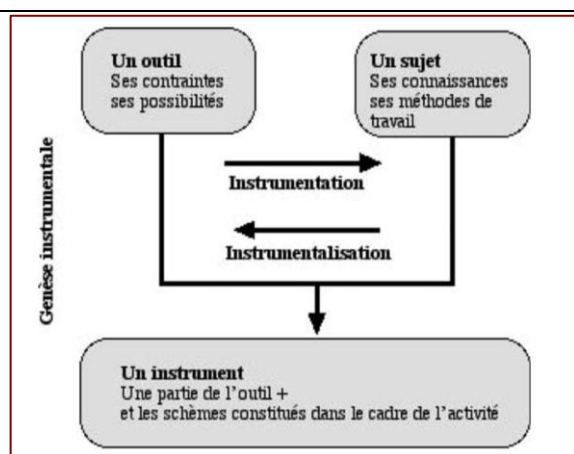


Figure 4. Une autre représentation d'une genèse instrumentale (Trouche 2004, p. 185)

3. Le potentiel de l'approche instrumentale

Un travail d'articulation avec les autres approches de la communauté, en particulier au moment de l'école d'été de didactique des mathématiques, en 1999, où le thème 2 est consacré aux *Instruments en mathématiques : travail, enseignement et apprentissages*, avec une conférence introductive de Pierre Rabardel (1999), proposant des *Eléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques*, et deux cours, le premier de Jean-Baptiste Lagrange (1999) sur *Les instruments de calcul formel*, le deuxième de Colette Laborde (1999) sur *L'activité instrumentée par des logiciels de géométrie dynamique*. La modélisation proposée par Rabardel (Figure 5) situe les instruments au centre d'un triangle constitué par le maître, l'élève et le savoir. Je me souviens que, à la fin de la conférence de Pierre Rabardel, Guy Brousseau l'avait interrogé, en questionnant la place du milieu didactique dans cette modélisation, questionnement qui suscitera des approfondissements ultérieurs de l'approche instrumentale du didactique en mathématiques.

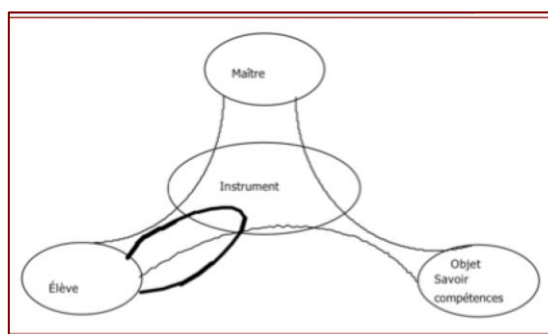


Figure 5. L'instrument au cœur des apprentissages (Rabardel 1999, p. 204)

L'approche se développe en effet, en analysant les modifications de ce milieu didactique dues à l'intégration d'artefacts spécifiques dans le domaine du calcul formel (Defouad 2000), mais aussi des tableurs (Haspekian 2005) et de la géométrie dynamique (Restrepo 2008). Elle donne matière à un ouvrage de synthèse en français (Guin et Trouche 2002), mettant en évidence le défi didactique de *Faire d'un outil un instrument du travail mathématique*, ouvrage qui s'élargit à de nouvelles collaborations pour une édition en anglais (Guin, Ruthven et Trouche 2005). Ce

dernier ouvrage sera l'un des trois ouvrages de référence² proposés par le document de discussion de l'étude ICMI-17 de 2006 *Mathematics education and technology, rethinking the terrain* (Hoyles et Lagrange 2010).

4. Des limitations qui apparaissent dans le cours du développement

Rétrospectivement, on peut repérer des faiblesses dans le développement de l'approche instrumentale, de trois points de vue :

- un point de vue réducteur sur les ressources des sujets, s'intéressant davantage à ce qui est nouveau, qu'à ce qui est déjà là (l'intérêt pour les logiciels de calcul formel est symptomatique de ce point de vue) ;
- un point de vue réducteur sur les expérimentations, qui se déroulent essentiellement dans des classes particulières, auprès d'enseignants pionniers (en particulier des enseignants fortement impliqués dans le réseau des IREM), une particularité qui est un point d'appui pour ces expérimentations, facilitant l'accès aux classes, mais qui en réduit aussi la portée et la possible extension ;
- un point de vue réducteur enfin sur l'instrumentalisation, peu prise en compte (dans l'ouvrage déjà cité de Guin, Ruthven et Trouche (2005), l'instrumentation est évoquée dans 62 pages, et l'instrumentalisation dans seulement 15 pages), et, quand elle est prise en compte, elle est, la plupart du temps, réduite aux 'catachrèses' (Rabardel 1995), c'est-à-dire aux détournements d'usage.

Un des aspects essentiels de l'instrumentalisation, l'aspect développement des artefacts, en germe dans tout processus d'appropriation, est ainsi négligé. Ce point de vue réducteur était peut-être lié à la lecture des textes classiques de Vygotsky (par exemple Vygotsky 1934), situant les instruments dans leur rôle essentiel de soutien au développement psychologique. Une réévaluation de l'œuvre de Vygotsky par Engeström et ses collaborateurs, à partir de textes dont l'Union soviétique avait limité la diffusion du fait de leur caractère non orthodoxe, a mis en évidence le potentiel du développement des artefacts eux-mêmes dans le cours de l'activité des sujets : « Vygotsky (...) not only examined the role of artifacts as mediators of cognition, but was also interested in how children created artifacts of their own to facilitate their performance » (Engeström et al. 1999, p. 26).

C'est sans doute une prise de conscience progressive de ces limitations qui va favoriser l'émergence de conceptualisations ultérieures.

5. Un faisceau d'évolutions convergentes

La revue de littérature (1994-1998) de Lagrange *et al.* (2003) révèle les évolutions en cours au niveau international à la fin du siècle dernier : la conscience de la complexité des processus d'intégration des nouvelles technologies, l'émergence des composantes institutionnelles, et instrumentales de ces processus d'intégration, et le rôle critique du professeur pour les soutenir dans la classe. Ces évolutions apparaissent clairement dans les problématiques de la communauté française de didactique des mathématiques, en particulier du point de vue de l'intérêt pour *la figure du professeur* (Chevallard 1997) et pour l'analyse de son activité (Margolinas 2002).

Les processus d'intégration des instruments sont alors conçus dans une double dimension, le professeur s'appropriant des artefacts pour lui-même, et assistant l'appropriation, par les élèves

² Avec ces deux autres références : (Hoyles and Noss 2003), et (Cornu and Ralston 1992).

eux-mêmes, de différents artefacts. La prise de conscience de cette dualité conduit alors à différentes conceptualisations, celle d'*orchestrations* (Trouche 2003), celle d'une double approche, didactique et ergonomique (Robert et Rogalski 2002), ou encore d'une double genèse didactique et mathématique (Haspekian 2005).

C'est ainsi un faisceau d'évolutions convergentes du point de vue de leur intérêt pour les ressources qui nourrissent l'activité du professeur, qui vont constituer le milieu de nouvelles approches.

III L'APPROCHE DOCUMENTAIRE DU DIDACTIQUE

Je présente successivement, dans cette partie, le milieu qui a permis le développement de cette approche, une première modélisation, et les premiers développements théoriques et méthodologiques.

1. Le milieu de l'approche documentaire

Au-delà du faisceau d'évolutions convergentes que nous venons d'évoquer, on peut distinguer des questions technologiques, professionnelles, et conceptuelles qui ont suscité le développement de l'approche documentaire³.

Les questions technologiques sont concentrées par l'émergence de l'Internet, et les phénomènes associés, en particulier la profusion de ressources en ligne et le développement de nouvelles formes de communication. Cette émergence va d'ailleurs de pair avec la généralisation de l'usage du mot *ressource*.

Les questionnements professionnels sont liés : comment repenser, dans ces conditions, la formation des enseignants et l'étude de leurs pratiques ? Il faut souligner, de ce point de vue, le rôle pionnier du SFoDEM (Suivi de formation à distance des enseignants de mathématiques, Guin et Trouche 2004), qui, bénéficiant d'un soutien institutionnel fort dans l'académie de Montpellier, a fait évoluer les problématiques de recherche, d'une centration sur les artefacts à une centration sur les *ressources pédagogiques* permettant de soutenir leur intégration. Les questions de modèle de ressource, de curriculum vitae d'une ressource, donnent corps à cette notion de ressources vivantes. Ce questionnement va se poursuivre pendant plusieurs années, autour de dispositifs institutionnels comme Pairform@nce (Soury-Lavergne, Gueudet, et Trouche 2009), ou l'étude plus générale des usages de ressources en ligne (Bueno-Ravel et Gueudet 2008). La thèse de Moustapha Sokhna (2006) sur *la genèse instrumentale de ressources pédagogiques* illustre bien cette évolution conceptuelle des instruments aux ressources.

Les avancées conceptuelles viennent de rencontres avec des propositions théoriques, ou avec d'autres communautés scientifiques. Au titre des premières rencontres, la proposition de Jill Adler (2000) de penser une ressource à partir de tout ce qui re-source, ou qui a le potentiel de re-sourcer, l'activité du professeur a sans doute joué un rôle décisif (et le fait que le jeu de mot autour de 're-sourcer' se comprend aussi bien en anglais qu'en français a été aussi important). Au titre des deuxièmes rencontres, il faut citer les interactions avec des historiens des

³ Pour la genèse de l'approche documentaire, voir aussi la communication (en anglais, sous-titrée en français) de Ghislaine Gueudet lors de la conférence Re(s)ources 2018 (Gueudet 2019)

mathématiques (Proust 2007, Trouche 2016) : l'étude du travail des maîtres et des élèves dans les écoles de scribes, il y a 4000 ans, s'appuie naturellement sur les ressources de l'enseignement qui y était dispensé (ressources toujours vivantes du fait de la pérennité des tablettes d'argiles qui les portent). Il faut citer enfin les interactions avec la communauté des environnements informatiques pour l'apprentissage humain (Baron et al. 2007) et avec la communauté des architectes de l'information (Pedaque 2006) qui conceptualise la notion de document.

2. Une première modélisation

Comme pour l'approche instrumentale en 1999, c'est une école d'été de didactique des mathématiques, celle de 2007, qui permettra de cristalliser une première modélisation. Son thème 2 était consacré à l'étude de la question : *Qu'est-ce qu'un document dans l'enseignement des mathématiques ?* Comme en 1999, le travail de ce thème a été structuré par trois apports. Le premier venait de l'extérieur de la communauté de didactique des mathématiques : Viviane Folcher (2009), de l'équipe de Pierre Rabardel, a proposé une réflexion sur *Conception pour l'usage, conception dans l'usage : quelles ressources pour quelles activités ?* Les deux autres apports venaient de la didactique des mathématiques : Gueudet et Trouche (2009a) : *Vers de nouveaux systèmes documentaires des professeurs de mathématiques* ; et Margolinas et Wozniak (2009) : *Place des documents dans l'élaboration d'un enseignement de mathématiques à l'école primaire*.

Les contributions Folcher et Gueudet-Trouche se situent dans le prolongement de l'école d'été de 1999 et de l'approche instrumentale, et celle de Margolinas et Wozniak se situe dans le double cadre de la théorie des situations didactiques, et de la théorie anthropologique du didactique. On retrouve dans les différentes contributions des mots communs (ressources et documents), mais utilisés différemment. Les différentes contributions partagent une même sensibilité aux contraintes institutionnelles et aux aspects collectifs, à la diversité des temps et des lieux de travail de l'enseignant et au temps long du développement des ressources. Les deux contributions didactiques s'appuient sur une méthodologie exploratoire, principalement basée sur des entretiens.

Gueudet et Trouche (2008) proposent une première modélisation, qui, fondamentalement, substitue (Figure 6) la dialectique ressource-document à la dialectique artefact-instrument. Le nouveau modèle conserve des traces de l'ancien (en particulier la dialectique instrumentation-instrumentalisation demeure, alors qu'elle aurait pu être remplacée par la dialectique documentation-documentalisation). A ce moment, la question de ce remplacement n'a pas été posée, tant ces termes d'instrumentation et d'instrumentalisation étaient intégrés dans le vocabulaire didactique, pour distinguer d'une part ce qui contribue à reconfigurer l'activité du professeur, et d'autre part ce qui constitue la marque du professeur sur les outils de son activité. Les modélisations instrumentales et documentaires sont proches, mais elles diffèrent cependant sur des points essentiels :

- il s'agit d'un point de vue holistique sur le travail du professeur, embrassant l'ensemble des ressources qui le nourrissent ;
- il considère avant tout les ressources déjà-là ;
- il prend en compte, d'emblée, le temps long du développement professionnel ;
- il reconnaît comme essentiel les processus d'instrumentalisation, considérant que adopter une ressource, c'est toujours l'adapter
- il privilégie l'étude des classes ordinaires

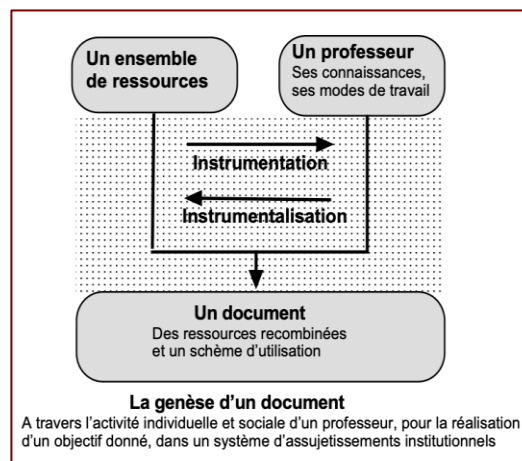


Figure 6. Une représentation d'une genèse documentaire (Gueudet et Trouche 2008, p. 10)

3. De premiers développements conceptuels et méthodologiques

Dans le fil de l'école d'été, les premiers travaux liés à l'approche documentaire ont visé un approfondissement méthodologique, une diffusion des travaux et des interactions avec les communautés de recherche aux niveaux national et international.

Une première manifestation de l'approfondissement méthodologique a été la communication (Gueudet et Trouche 2009b) au séminaire national de didactique des mathématiques. La méthodologie présentée allait au-delà de simples entretiens avec les professeurs, pour essayer d'approcher leur travail documentaire, et sur une durée liée à un contenu d'enseignement 'suffisant' : par exemple un chapitre du cours, avec un focus sur une leçon 'critique', du fait de son contenu plus difficile, ou nouveau pour le professeur, le conduisant à un renouvellement significatif des ressources mobilisées et mises en œuvre. Des outils méthodologiques complémentaires sont proposés au cours de cette période de suivi (Figure 7), en particulier : un journal de bord, une représentation schématique du vivier de ressources du professeur (RSVR), et un fragment de CV d'un document.

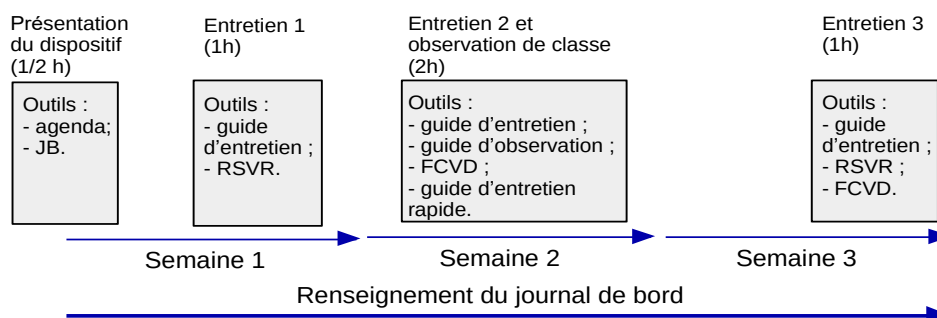


Figure 7. Une proposition méthodologique (Gueudet et Trouche 2009b)

Les outils de représentation graphique des ressources des professeurs ont d'emblée pris une grande importance dans l'approche documentaire (Figure 8, une des premières représentations, réalisée dans le cadre d'un mémoire de recherche). Représentation doit ici être entendu au double sens de représentation externe d'une représentation interne : c'est le professeur lui-même qui propose une représentation de la façon dont il se représente ses ressources et son organisation.

Notons que, dans ces premiers travaux, on ne propose pas de suivre le travail documentaire lui-même. On propose au professeur de faire visiter ses ressources, et de décrire la façon dont il les mobilise.

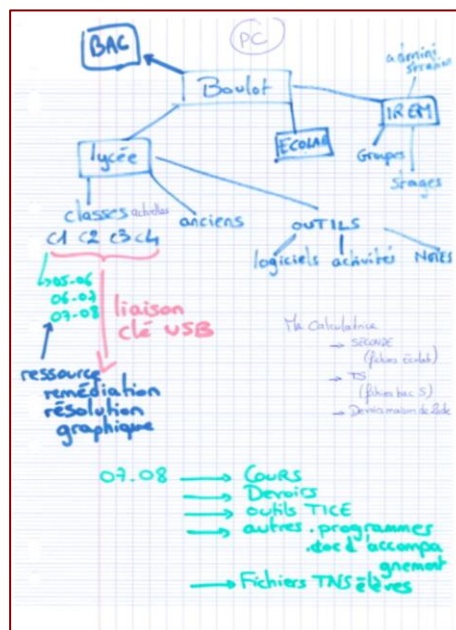


Figure 8. Une représentation graphique du vivier de ressources d'un professeur (Sabra 2008)

Dans cette même période, les concepteurs de l'approche développent une politique de diffusion active, avec un article en français dans *Education et didactique* (Gueudet et Trouche 2008) et en anglais dans *Educational Studies in Mathematics* (Gueudet et Trouche 2009c). Cette diffusion se fait aussi via un espace web⁴, hébergé par le site EducMath, et développé en collaboration avec les deux premiers doctorants qui ont situé leurs travaux dans le cadre de l'approche documentaire, Hussein Sabra (2011) et Rim Hammoud (2012). Il met en évidence l'entrelacement des questions conceptuelles et méthodologiques. La thèse de Sabra pose la question du *contrat méthodologique* entre un professeur et un chercheur qui souhaite analyser les ressorts de son travail documentaire. Rim Hammoud distingue, parmi les ressources qui sont au cœur du travail documentaire du professeur, les *ressources mères*, qui vont nourrir ce travail, et les *ressources filles*, produit de ce travail. Le site propose aussi un ensemble de matériaux pour comprendre la genèse de l'approche et les travaux en cours. Le site présente aussi⁵ des regards croisés sur les questions posées, venus de : la psychologie cognitive (Jean-Claude Coulet appelle à questionner les formes de régulation des schèmes et Catherine Loisy propose de mieux mettre en relation la structure des ressources et la structure de l'activité du sujet), des recherches en technologie éducative (Bernadette Charlier souligne la nécessité de l'étude des conditions de partage des ressources) et des recherches en éducation mathématique (Carolyn Kieran suggère de combiner, pour l'étude des genèses documentaires, la prise en compte de moments courts, où, par exemple, une nouvelle ressource est introduit, et la prise en compte de large empan temporels).

Deux ouvrages permettent de développer plus largement ces regards croisés :

- un premier ouvrage collectif (Gueudet et Trouche 2010), en français, qui intègre des communications venues d'une variété de champs : le champ de Mathematics Education, avec un article de Jill Adler, autour de la notion fructueuse de re-source, la didactique des mathématiques (en particulier celle de Margolinas et Wozniak, issue de l'école d'été de 2007), l'histoire des mathématiques (Christine Proust, déjà citée), l'informatique

⁴ http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/recherche/approche_documentaire

⁵ http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/recherche/approche_documentaire/presentation

(Bruno Bachimont) et les sciences d'information et de la communication (Eric Bruillard). Ce croisement de regards pousse à une clarification méthodologique et conceptuelle. C'est dans cet ouvrage, par exemple, qu'est proposée la méthodologie *d'investigation réflexive*, et des *principes méthodologiques*, pour fonder les analyses du travail documentaire des enseignants (voir § 4.1) ;

- le deuxième ouvrage collectif (Gueudet, Pepin et Trouche 2012) ouvre une nouvelle période de collaborations internationales portées par les trois éditeurs. Moins large sur le plan des champs scientifiques (on ne retrouve pas les champs de l'informatique ou des sciences de l'information et de la communication), il est par contre beaucoup plus ouvert sur les communautés internationales de Mathematics Education. Comme le sous-titre de l'ouvrage l'indique, il ouvre davantage sur les questions de ressources curriculaires et de développement professionnel. Enfin, la structure de l'ouvrage en 4 parties, conclues chacune par une réaction d'un chercheur reconnu au niveau international, mais non lié directement à l'approche documentaire⁶, élargit les questions posées, et souligne la nécessité de nouveaux développements.

IV UNE APPROCHE EN MOUVEMENT

Je présente, dans cette partie, les avancées méthodologiques, puis les questionnements portés par les thèses, enfin les perspectives de recherche. Ces développements ont été permis par des dispositifs de recherche au niveau national, en particulier le programme de recherche ReVEA (<https://www.anr-revea.fr/>), Ressources vivantes pour l'enseignement et l'apprentissage, qui s'est intéressé, de 2014 à 2018, à quatre disciplines d'enseignement (mathématiques, anglais, sciences physiques et chimiques, et sciences et technologies industrielles). Ils ont été permis aussi par des dispositifs de recherche au niveau international, comme le projet MC2 (<http://www.mc2-project.eu/>), s'intéressant à la créativité par et pour le processus de conception de ressources pour l'enseignement des mathématiques, et des séjours de recherche au Brésil (Bellemain et Trouche 2016), en Chine (Pepin et al. 2017) et au Mexique (Cuevas Vallejo et al. 2018).

1. Approcher le travail documentaire au plus près des pratiques

La réflexion méthodologique s'est cristallisée sur les questions de suivi du travail documentaire des professeurs, suivi complexe, dès lors que l'on veut suivre ce travail dans sa continuité et sa diversité. En 2012, on a donné un nom à ce suivi, l'investigation réflexive, marquant l'intention d'associer le professeur au dispositif de collecte de données, et, au-delà, aux questionnement de recherche. Cette investigation réflexive a été formalisée au cours du temps, autour de 5 principes énoncées dans l'entrée Documentational approach to didactics de l'Encyclopedia of Mathematics Education (Trouche, Gueudet et Pepin 2018) : collecte large des ressources utilisées et produites ; durée longue du suivi ; continuité du suivi hors classe et en classe ; implication des acteurs dans le recueil de données ; confrontation des discours du professeur avec la matérialité de son travail documentaire. À ces 5 principes s'en est rajouté un sixième, dans un texte récent consacré aux questions méthodologiques (Gueudet & Trouche, 2021) : la nécessité d'un contrat liant le chercheur et le, ou les professeurs, dont il veut suivre le travail

⁶ Les réacteurs des 4 parties, et de l'ouvrage global, sont Bill Barton, Malcolm Swan, Luis Radford, Barbara Jaworski, et Deborah Loewenberg Ball.

documentaire. Dans le cadre de cet article, je voudrais souligner deux aspects de cette prospection méthodologique : les dispositifs de captation de données, et les dispositifs de partage de données.

L'investigation réflexive est partie (§ 3.3) d'une démarche de visite des ressources du professeur et d'un récit de son travail documentaire. Elle s'est orientée ensuite vers le suivi d'épisodes de suivi de ses interactions avec les ressources de son enseignement, à l'aide d'une diversité de dispositifs, en particulier : les valises documentaires, les partenaires documentaires, et les auto-captations :

- le dispositif de valise documentaire⁷, inspiré de la métaphore du travail documentaire comme la préparation d'un voyage, reposait sur le suivi du *cycle d'une leçon* (Figure 9), en application des principes de l'investigation réflexive : suivi de la préparation, suivi de son implémentation, analyse de ses effets à partir du travail réalisé par les élèves, auto-confrontation du professeur avec les données recueillies. Même si le contrat avec le professeur est soigneusement construit (le professeur prépare sa leçon à haute voix, comme s'il expliquait les différentes étapes de son travail à un collègue), le regard du chercheur présent a sans doute un effet difficilement contrôlable ;



Figure 9. Les quatre étapes de recueil des données d'une valise documentaire

- C'est pour limiter cet effet que Wang (2019), dans sa thèse, a conçu un dispositif reposant sur le suivi du travail de partenaires documentaires (*'documentation-working mates'*). Les partenaires documentaires sont des professeurs interagissant régulièrement pour préparer leurs cours, et préparant effectivement parfois leurs cours ensemble. Il s'agit alors de suivre l'une de ces préparations. L'interaction se développe alors entre les deux professeurs, le chercheur étant en retrait. Naturellement, ce dispositif ne peut être mis en œuvre que dans des conditions très spécifiques d'existence d'un travail collectif privilégié entre deux enseignants ;
- Messaoui (2019), dans sa thèse, a conçu un dispositif s'adaptant à des conditions plus ordinaires (en France en tout cas), de préparation d'une leçon, au domicile du professeur. Ce dispositif d'auto-captation (Figure 10) repose sur la demande au professeur de s'enregistrer préparant une leçon (pratiquement, cela revient à enregistrer l'écran de son ordinateur, avec, en vignette, son visage. Comme pour la valise documentaire, on demande au professeur d'explicitier, à l'adresse d'un collègue, les différentes actions entreprises. Le chercheur est alors mis à distance (physiquement, bien sûr, pas symboliquement). Et, surtout, le professeur peut préparer sa leçon, dans des conditions moins contraintes: il commence et s'arrête quand il veut, et réalise sa préparation en autant d'épisodes qu'il le souhaite.

⁷ Un exemple sur le site EducMath : http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/recherche/approche_documentaire/documentation-valise

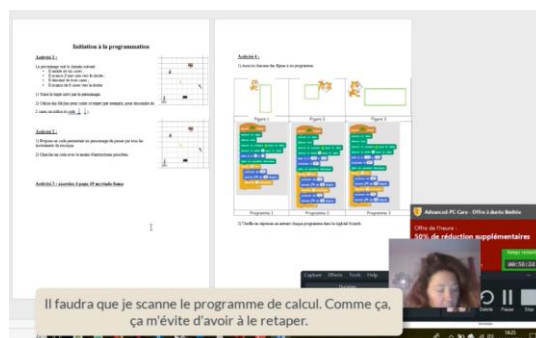


Figure 10. Une copie d'écran de la vidéo d'auto-captation de la préparation d'une leçon

Il n'y a pas de dispositifs « modèles », mais cette diversité de dispositifs constitue autant de pistes à adapter en fonction des contextes et des problématiques de recherche.

La deuxième question méthodologique que je voudrais aborder ici est celle du partage de données entre chercheurs. Cette question a été abordée d'abord au cours d'un séjour d'étude au Brésil (Lucena et Assis 2015), conduisant au développement de webdocuments, c'est-à-dire d'interfaces en ligne permettant le partage de données sous des formats variés (en particulier vidéos). Elle a été retravaillée au sein du projet ReVEA, rassemblant des chercheurs de disciplines diverses dans un objectif d'analyse des interactions des professeurs avec les ressources de leur enseignement. Ce travail a conduit à la conception de la plateforme AnA.doc (Figure 11), dédiée au stockage et à l'analyse des données du travail documentaire (Alturkmani et al., 2019). Cette plateforme est structurée en trois niveaux : un niveau de situations du travail documentaire, un niveau d'analyses de ces situations, et un niveau de glossaire précisant le sens des concepts mobilisés. Chaque situation est décrite suivant un modèle donné, et elle intègre les données recueillies au cours de l'interaction (ressources textuelles, audio ou vidéo, utilisées ou produites par cette interaction). Chaque analyse tente d'éclairer une question précise par un texte court, reposant sur un petit nombre de données (extrait de vidéo) par exemple. La plateforme donne des outils pour sélectionner et éditer ces données. Le format court est pensé pour faciliter l'appropriation de cette analyse au sein d'une communauté de recherche, et pour susciter des analyses alternatives. Le glossaire est pensé pour favoriser l'émergence d'un ensemble de concepts partagés, ou controversés, au sein de cette communauté.



Figure 11. Une copie d'écran de la plateforme AnA.doc

AnA.doc constitue un prototype, qui a été développé dans le cadre d'un programme de recherche et pourrait être réinvesti dans le cadre de projets ultérieurs. Au-delà de fonctionnalités techniques, il a permis de travailler des modèles de description de situation et des modèles d'analyse (Messaoui, 2018).

2. Les questionnements portés par les thèses et les HDR

Les développements méthodologiques sont liés aux développements théoriques. Une bonne façon de les présenter, dans le cadre de ce séminaire, est de la faire par le biais des thèses et des HDR, à partir d'une sélection de travaux mettant en évidence leur diversité, les premiers résultats et le caractère fructueux des articulations avec d'autres cadres théoriques (Artigue, 2019, Trouche et al. 2019) :

- Hussein Sabra (2011) s'est intéressé au rapport entre documentations individuelles et collectives des enseignants de mathématiques, dans le cadre de l'association Sesamath (conception d'un manuel scolaire) et d'un lycée (intégration de calculatrices complexes). Il a introduit le concept d'incidents documentaires, et a étudié leur effets sur le travail documentaire. Il a articulé l'approche documentaire avec d'autres cadres théoriques, en particulier les communautés de pratique ;
- Gilles Aldon (2011) s'est intéressé aux processus d'intégration de calculatrices complexes dans une diversité de contextes. Il a introduit la notion d'incident didactique. Il a croisé l'analyse du travail documentaire des professeurs et l'analyse des apprentissages des élèves en étudiant leurs effets mutuels. Il a articulé l'approche documentaire avec d'autres cadres théoriques, en particulier la théorie des situations didactiques ;
- Rim Hammoud (2012) s'est intéressé à la mise en œuvre de démarches d'investigation dans les classes de physique et de chimie. Elle a introduit les concepts de ressources mères et de ressources filles et a développé les méthodes d'analyse des représentations schématiques produites par les professeurs pour décrire leurs systèmes de ressources ou leurs systèmes d'interactions avec leurs collègues de travail. Elle a articulé l'approche documentaire avec la théorie de l'activité ;
- Mohammad Alturkmani (2015) a étudié les rapports différenciés que les professeurs de physique et de chimie entretiennent avec les deux disciplines qu'ils enseignent, en fonction de leur formation initiale. Il a introduit les concepts d'affinités disciplinaire et didactique, et a mis ces affinités en relation avec la nature des ressources utilisées ou produites. Il a conçu une cartographie de ses affinités. Son travail articule l'approche documentaire du didactique et la théorie anthropologique du didactique ;
- Sylvaine Besnier (2016) s'est intéressée à l'enseignement du nombre à l'école primaire impliquant l'utilisation de ressources technologiques. Elle a mis en évidence de éléments de structure des systèmes de ressources des enseignants sous la forme de 'blocs de ressources' en relation avec les situations didactiques mises en œuvre. Elle articule dans son travail d'approche documentaire et les orchestrations instrumentales ;
- Chantal Tuffery (2016) s'intéresse aux conditions de l'enseignement d'exploration MPS (Méthodes et pratiques scientifiques) en classe de seconde, du point de vue des ressources que les professeurs de mathématiques sélectionnent et adaptent. Elle met en évidence le caractère déterminant du travail collectif des enseignants de mathématiques pour développer des ressources soutenant les interactions interdisciplinaires avec des enseignants de physique-chimie ou de biologie ;
- Wang (2019) contraste les formes collectives de travail documentaire de enseignants en Chine et en France. Elle propose un modèle de l'expertise documentaire des enseignants qui se nourrit de, et nourrit, ces formes collectives. Elle met en évidence l'intérêt de micro-collectifs pour une analyse approfondie des interactions entre enseignants et de

leurs effets sur leur développement professionnel. L'approche documentaire est combinée avec la théorie de l'activité ;

- Rocha (2019) s'intéresse au travail documentaire des enseignants de mathématiques à la charnière de changements de programme. Elle propose les concepts d'expérience et de trajectoires documentaires pour analyser, sur le long terme, l'évolution de la documentation des enseignants. La compréhension des évolutions, à des moments de rupture (comme les changements curriculaires) suppose la prise en compte des évolutions sur le long terme (et réciproquement). La théorie des collectifs de pensée est mobilisée en complément de l'approche documentaire ;
- Messaoui (2019) contraste le travail documentaire des professeurs de mathématiques et des professeurs d'anglais dans des moments mutation de leur enseignement (changement de curriculum, ou changement d'établissement). Elle met en évidence deux niveaux de schèmes documentaires, un premier niveau plus directement tourné vers la gestion technique de l'information, un deuxième niveau plus directement tourné vers la réalisation de l'activité, et montre l'imbrication forte de ces deux niveaux. La théorie des systèmes personnels d'information est mobilisée ;
- Trois HDR ont été soutenues récemment en relation avec l'approche documentaire. Soury-Lavergne (2017) développe une étude des duos d'artefacts (tangibles vs. numériques) dans la perspective de la formation des enseignants de mathématiques. Elle met en évidence l'imbrication des genèses instrumentales et des genèses documentaires. Sayac (2017), dans une approche didactique de l'évaluation et de ses pratiques, propose les notions d'épisode évaluatif en relation avec la notion d'épisode évaluatif. Enfin Loisy (2018), dans une approche psychologique du développement professionnel des enseignants à l'heure du numérique, introduit la notion de document intermédiaire et met en évidence l'intérêt de son étude comme indice de développement professionnel.

La diversité de ces travaux est un signe de l'ampleur du champ de l'étude, et des ressources nécessaires au développement, méthodologique et conceptuel, de l'approche documentaire.

3. Chantiers ouverts ou à ouvrir

La conférence Re(s)sources 2018 (Gitirana et al. 2018 ; Trouche et al. 2019) a permis de faire le point sur ces chantiers. En clôture de cette conférence, un ensemble de 10 programmes de recherche/développement a été proposé (Trouche 2019). Dans le cadre de ce séminaire, je voudrais juste en citer quelques uns dans lesquels je suis davantage impliqué.

Il y a d'abord les travaux que je co-encadre actuellement : le doctorat de Luxizi Zhang (cotutelle Shanghai, début 2017), situant les variations au cœur du travail documentaire des enseignants de mathématiques et croisant les traditions didactiques françaises et chinoises, et contrastant les contextes d'enseignement (Gosztonyi, de Varent, Zhang, & Ramploud 2020) ; le doctorat de Mingyu Shao (co-encadrement Jana Trgalova et cotutelle avec Jiansheng Bao à Shanghai, début 2018) , qui porte sur l'orchestration de situations de géométrie 3D avec GeoGebra et connaissances des enseignants, contrastant les situations chinoises et françaises pour modéliser les processus de performance didactique (Shao 2020) ; enfin le post-doctorat de Ulises Salinas (Cinvestav, Mexico), pensant le développement d'un « modèle de l'enseignement » par le croisement de trois cadres théoriques dont il étudie les *affinités* : approche documentaire, CHAT (Cultural and Historical Activity Theory) et épistémologie historique (Salinas et al. 2020). Cette étude met en évidence l'intérêt d'intégrer les gestes de l'enseignant, comme incarnation de ses connaissances et ressource particulière de son enseignement.

Sur le plan théorique, la relation entre systèmes de ressources et systèmes documentaires des enseignants doit être davantage travaillée. Jusqu'à présent, nous avons considéré, de façon un peu cyclique, la structure du système de ressources comme émergeant de celle du système documentaire : « Le système documentaire est composé du système de ressources et de connaissances professionnelles associées ; le tout est articulé avec le système d'activité des professeurs [...] Cette structure du système documentaire engendre naturellement celle du système de ressources qui en émerge » (Gueudet & Trouche 2010, p. 60 / p. 68). Comment exploiter au mieux les cartographies des systèmes de ressources (Sayah 2018, Wang 2019) et les points de vue statique et dynamique associés pour en inférer des éléments de structure : des systèmes de ressources au système documentaire, la question est à ce jour largement ouverte.

Prendre en compte les *niveaux de détermination didactique* 'école' et 'société' (Chevallard 2002), contraster différents contextes, et remonter de la structure des *systèmes de dénomination* à celle des *systèmes des ressources*, cela était en germe dans plusieurs thèses (voir en particulier Wang, 2019). Dans le fil du projet Lexicon (Clarke et al. 2017), mais dans ce cas centré sur le travail documentaire des enseignants, différentes études ont été engagées pour les cas ukrainien et chinois (Rafalska et al. 2019), ou chinois et espagnol (Wang et al. 2019). Récemment, un projet a été lancé, *Documentational Approach to Didactics-Multilingual*⁸, visant à adapter l'article de présentation de l'approche documentaire dans l'*Encyclopedia of Mathematics Education* (Trouche, Gueudet et Pepin, 2018) dans une quinzaine de langues, et à tirer profit de ces traductions pour questionner les concepts en jeu. Les premiers développements de ce projet sont prometteurs, à suivre !

Je pense enfin à un projet de mise en œuvre des outils développés par l'approche documentaire au profit de la compréhension de la dynamique des communautés de recherche. Si on admet que tout chercheur est défini par sa production de recherche (ses 'ressources filles'), et que deux chercheurs sont d'autant plus proches que leurs articles partagent plus de références communes (leurs 'ressources mères'), alors on peut concevoir des algorithmes calculant des distances entre articles, et construisant des regroupements d'articles en fonction de la densité de leurs relations. C'est de travail qui a été réalisé récemment (Drijvers, Grauwin & Trouche, 2020), combinant des outils bibliométriques et des outils conceptuels pour examiner le développement des communautés s'intéressant au concept d'orchestration instrumentale. Des perspectives pour analyser les dynamiques de constitution d'autres communautés scientifiques ?

Proche du terme d'une carrière de chercheur, je porte un regard rétrospectif sur une trajectoire. Dans son dernier ouvrage, Edward Said (2012) souligne combien les dernières œuvres demeurent marquées par l'intranquillité qui caractérise la relation que tout auteur entretient avec le monde. Chercheur tardif, à la frontière de plusieurs communautés (didactique, EIAH...), je mesure combien une sensibilité aux « ressources manquantes » pousse à créer du nouveau, en marge des grands cadres théoriques reconnus par une communauté scientifique (Artigue et al. 2019), davantage qu'à développer l'existant. Un positionnement à la fois productif et réducteur, qui permet en tout cas de prendre conscience de la nécessité des ponts et des réseaux !

Addendum

Au moment du séminaire, la pandémie Covid-19 n'était pas encore apparue dans son caractère universel, et avec toute sa force de remise en question. Depuis cette date, une grande partie de l'humanité, quand elle en avait les moyens, a vécu confinée, des mesures dites de « distanciation sociale » ont été mises en œuvre, et les processus, essentiellement sociaux

⁸ <https://hal.archives-ouvertes.fr/DAD-MULTILINGUAL>

d'apprendre et de faire apprendre se sont développés à distance. Les professeurs ont du alors, en un temps très bref, reconfigurer leurs systèmes de ressources, et penser de nouvelles formes d'interaction, tant avec leurs élèves qu'avec leurs collègues.

C'est sans doute une situation critique pour les chercheurs en éducation en général, dans le domaine de la didactique des mathématiques en particulier. Les concepts sont mis à l'épreuve, et il s'agit, à la fois, de développer de nouvelles connaissances sur ce qu'est qu'apprendre, de réagir aux nouvelles politiques éducatives, et, de soutenir les acteurs dans leurs efforts pour maintenir une 'continuité pédagogique' et repenser les formes de leur action didactique.

Dans la suite des projets de collaboration avec des chercheurs chinois, j'ai suivi ces processus dans le cas des écoles primaires à Shanghai (Huang, Huang, et Trouche, soumis). Pour l'approche documentaire du didactique, qui s'est intéressé depuis son origine aux interactions des professeurs avec les ressources, en particulier dans leurs dimensions collectives, et dans des moments de mutation de leur enseignement, il s'agit là d'un défi, humain autant que conceptuel.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

QUATRE SITES A CONSULTER :

EDUCMATH (2008). Le site qui a soutenu les premiers développements de l'approche http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/recherche/approche_documentaire

ANA.DOC (2016). Plateforme de partage et d'analyse de données du travail documentaire <https://www.anr-revea.fr/anadoc/>

RE(S)OURCES 2018. Le site de la conférence internationale <https://resources-2018.sciencesconf.org/>

DES INSTRUMENTS AUX RESSOURCES VIVANTES EN MATHÉMATIQUES (2018). Autour des travaux de Luc Trouche <https://luctrouche.sciencesconf.org/>

PUBLICATIONS

ADLER, J. (2000). Conceptualising resources as a theme for teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 3, 205-224.

ALDON, G. (2011). *Interactions didactiques dans la classe de mathématiques en environnement numérique : construction et mise à l'épreuve d'un cadre d'analyse exploitant la notion d'incident*. Thèse UCBL Lyon 1. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00679121>.

ALTURKMANI, M. (2015). *Genèse des affinités disciplinaire et didactique et genèse documentaire : le cas des professeurs de physique-chimie en France* Thèse ENS de Lyon. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01256020>.

ALTURKMANI, M., DAUBIAS, P., LOISY, C., MESSAOUI, A. & TROUCHE, L. (2019). Instrumenter les recherches sur le travail enseignant : le projet AnA.doc. *Education & didactique*, 13(2), 31-60.

ARTIGUE, L. (1997). Rapports entre dimensions technique et conceptuelle dans l'activité mathématique avec des systèmes de mathématiques symboliques. In *Actes de l'Université d'été « Des outils informatiques dans la classe aux calculatrices symboliques et géométriques : quelles perspectives pour l'enseignement des mathématiques ? »*, pp. 19-40. Rennes : IREM.

ARTIGUE, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment. The Genesis of a Reflection about Instrumentation and the Dialectics between Technical and Conceptual Work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7, 245, 245 (2002). <https://doi.org/10.1023/A:1022103903080>

ARTIGUE, M. (2019). Reflecting on a Theoretical Approach from a Networking Perspective. The case of the documentational approach to didactics. In L. Trouche, G. Gueudet & B. Pepin, *The 'Resource' Approach to Mathematics Education* (pp. 89-118). Cham: Springer.

ARTIGUE, M., BOSCH, M., CHAACHOUA, C., CHELLOUGUI, F., CHESNAIS, C., DURAND-GUERRIER, V., KNIPPING, K., MASCHIETTO, M., ROMO-VÁZQUEZ, A. & TROUCHE, L. (2019), The French didactics tradition in mathematics. In W. Blum, M. Artigue, M. A. Mariotti, R. Sträßer & M. Van den Heuvel-Panhuizen (Eds.), *European traditions in didactics of mathematics (ICME-13 Monograph)* (pp. 11-55). Cham, Switzerland: Springer.

BARON, M., GUIN, D. & TROUCHE, L. (dir.) (2007). *Environnements informatisés et ressources numériques pour l'apprentissage : conception et usages, regards croisés*. Paris : Hermès

BELLEMAIN, F., & TROUCHE, L. (2016). *Comprendre le travail des professeurs avec les ressources de leur enseignement, un questionnaire didactique et informatique*, I Simpósio Latinoamericano de Didática da Matemática, 01 a 06 de novembro de 2016, Bonito - Mato Grosso do Sul - Brasil, retrieved at, <https://drive.google.com/file/d/0B6OphkgfrkD3ZFRtTDJ2anRfSWM/view>

BESNIER, S. (2016). *Le travail documentaire des professeurs à l'épreuve des ressources technologiques. Le cas de l'enseignement du nombre à l'école maternelle*. Thèse Université de Bretagne <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01326826>

- BROUSSEAU, G. (2011). La théorie des situations didactiques en mathématiques. *Education & didactique* 5(1), 101-104, <https://journals.openedition.org/educationdidactique/1005>
- BUENO-RAVEL, L. & GUEUDET, G. (2008). Online resources in mathematics: teachers' genesis of use. In D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (dir.), *Proceedings of the fifth congress of ERME* (pp.1369-1378). Larnaca, Chypre.
- CHEVALLARD, Y. (1997). Familiale et problématique, la figure du professeur. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 17(3), 1997, 17-54.
- CHEVALLARD, Y. (2002). Organiser l'étude 3. Ecologie et régulation. In J.-L. Dorier *et al.* (Eds.) *Actes de la 11e École d'Été de Didactique des Mathématiques* (pp. 41–56). Grenoble : La Pensée sauvage.
- CLARKE, D., MESITI, C., CAO, Y. & NOVOTNA, J. (2017). The lexicon project: examining the consequences for international comparative research of pedagogical naming systems from different cultures, In T. Dooley, & G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 10, February 1–5, 2017)* (pp. 1610–1617). Dublin, Ireland: DCU Institute of Education and ERME.
- CORNU, B., & RALSTON, A. (1992). The influence of computers and informatics on mathematics and its teaching. 2nd edition. UNESCO <https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000093772>
- CUEVAS VALLEJO, C.A., MARTINEZ REYES, M., & TROUCHE, L. (2018). Considerando la complejidad del aprendizaje y enseñanza del cálculo a partir de un experimento de diseño de software. In C. A. Cuevas Vallejo, M. Martínez Reyes, & R. G. Cruz Flores (Eds.), *Tendencias actuales en enseñanza de las ciencias, una perspectiva para investigadores y docentes*. México: Pearson. ISBN: 978-607-32-4865-5
- DEFOUAD, B. (2000). *Etude de genèses instrumentales liées à l'utilisation de calculatrices symboliques en classe de première S*, thèse de l'université Paris 7, <http://www.theses.fr/2000PA070042>
- DRIJVERS, P., GRAUWIN, S. & TROUCHE, L. (2020). The genesis of instrumental orchestration: revisiting its development and use. *ZDM Mathematics Education*, 20(7), 1455–1469, <http://link.springer.com/article/10.1007/s11858-020-01169-3>
- ENGESTRÖM, Y., MIETTINEN, R. & PUNAMÄKI, R.-L. (1999). *Perspectives on Activity Theory*. Cambridge: Cambridge University Press
- FLECK, L. (1935/2005). *Genèse et développement d'un fait scientifique*. Paris : Les belles lettres.
- FOLCHER, V. (2009). Conception pour l'usage, conception dans l'usage : quelles ressources pour quelles activités ? In I. Bloch & F. Conne (dir.), *Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques* (pp. xxx-xxx). Grenoble : La Pensée sauvage
- GITIRANA, V., MIYAKAWA, T., RAFALSKA, M., SOURY-LAVERGNE, S., & TROUCHE, L. (Eds.) (2018). *Proceedings of the Re(s)ources 2018 International Conference*. ENS de Lyon, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01764563v3/document>
- GOSZTONYI, K., DE VARENT, C., ZHANG, L. & RAMPOUD A. (2020). *Variations and series of tasks, crossing the approaches*. Discussion group at ICME-14, Shanghai.
- GUEUDET, G. (2019). Studying Teachers' Documentation Work: Emergence of a Theoretical Approach. In L. Trouche, G. Gueudet & B. Pepin (Eds.), *The 'resource' approach to Mathematics Education*. Springer series Advances in Mathematics Education (pp. 17-42). Cham: Springer. Vidéo de la conférence ayant donné naissance à ce chapitre, sous-titrée en français, à cette adresse https://www.canal-u.tv/video/ecole_normale_superieure_de_lyon/studying_teachers_documentation_work_emergence_of_a_theoretical_approach.45765
- GUEUDET, G., PEPIN, B. & TROUCHE, L. (Eds.) (2012). *From Text to 'Lived' Resources: Mathematics Curriculum Materials and Teacher Development*, New York : Springer.
- GUEUDET, G. & TROUCHE, L. (2008). Du travail documentaire des enseignants : genèses, collectifs, communautés. Le cas des mathématiques. *Education & didactique*, 2(3), 7-33
- GUEUDET, G. & TROUCHE, L. (2009a). Vers de nouveaux systèmes documentaires des professeurs de mathématiques. In I. Bloch, & F. Conne (Dir.), *Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques* (pp. 109-133). Grenoble : La Pensée sauvage
- GUEUDET, G. & TROUCHE, L. (2009b). La documentation des professeurs de mathématiques. In L. Coulangue & C. Hache, *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques* (pp. 249-269). Paris: ARDM & IREM Paris 7.
- GUEUDET, G. & TROUCHE, L. (2009c). Towards new documentation systems for mathematics teachers? *Educational Studies in Mathematics*, 71(3), 199-218
- GUEUDET, G. & TROUCHE, L. (dir.) (2010). *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques*. Rennes : PUR.
- GUEUDET, G., & TROUCHE, L. (2021). Étudier les interactions professeurs-ressources : questions de méthode. *Education & Didactique*, 15(2), 141-158
- GUIN, D. (Dir.) (1998). *Calculatrices graphiques et symboliques dans l'enseignement des mathématiques*. Actes du colloque international francophone de la Grande-Motte. Montpellier : IREM de Montpellier, Université Montpellier 2.
- GUIN, D., & TROUCHE, L. (Dir.) (2002). *Calculatrices symboliques. Faire d'un outil un instrument du travail mathématique : un problème didactique*. Grenoble : La Pensée sauvage.
- GUIN, D., RUTHVEN, K., & TROUCHE, L. (Dir.) (2002). *The didactical challenge of symbolic calculators: turning a computational device into a mathematical instrument*. New York: Springer.
- GUIN, D., & TROUCHE, L. (2004). Intégration des TICE : concevoir, expérimenter et mutualiser des ressources pédagogiques, *Repères-IREM*, 55, 81-100
- HAMMOUD, R. (2012). *Le travail collectif des professeurs en chimie comme levier pour la mise en œuvre de démarches d'investigation et le développement de connaissances professionnelles*. Contribution au

- développement de l'approche documentaire du didactique. Thèse de l'Université Lyon 1. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00762964>
- HASPEKIAN, M. (2005). *Intégration d'outils informatiques dans l'enseignement des mathématiques, étude du cas des tableaux*, thèse de l'Université Paris 7, <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00011388>
- HOYLES, C., & LAGRANGE, J.B. (2010). *Mathematics education and technology-rethinking the terrain. The 17th ICMI study*. New York : Springer
- HOYLES, C., & NOSS, R. (2003). What can digital technologies take from and bring to research in mathematics education? In A.J. Bishop, M.A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, and F.K.S. Leung (Eds.), *Second International Handbook of Mathematics Education* (pp. 323-349). Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.
- HUANG, X., HUANG, R., & TROUCHE, L. (soumis). Learning to address the challenges of remote teaching through technological means and teacher collaboration in a time of epidemic: A case in Shanghai
- LABORDE, C. (1999). L'activité instrumentée par des logiciels de géométrie dynamique. In M. Bailleul, *Actes de la dixième université d'été de didactique des mathématiques* (pp. 214-234). Caen : IUFM & ARDM.
- LAGRANGE, J.-B. (1999). Les instruments de calcul formel. In M. Bailleul, *Actes de la dixième université d'été de didactique des mathématiques* (pp. 235-244). Caen : IUFM & ARDM.
- LAGRANGE, J.-B., ARTIGUE, M., LABORDE, C. & TROUCHE, L. (2003). Technology and Mathematics Education: a Multidimensional Study of the Evolution of Research and Innovation. In A.J. Bishop, M.A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F.K.S. Leung (eds.), *Second International Handbook of Mathematics Education* (pp. 239-271). Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.
- LOISY, C. (2018). *Le développement professionnel des enseignants à l'heure du numérique, le cas du supérieur. Propositions théoriques et méthodologiques*. HDR de l'ENS de Lyon.
- LUCENA, R., & ASSIS, C. (2015). Sistema de Recursos e o Trabalho Coletivo do Professor: Uma Via de Mão Dupla. Webdocument. LEMATEC. Recife: UFPE (<http://lematec.net.br/webdocs/webdoc2/>)
- MARGOLINAS, C. (2002). Situations, milieux, connaissances : analyse de l'activité du professeur. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris. *Actes de la 11ème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques* (pp.141-156). Grenoble : La Pensée sauvage.
- MARGOLINAS, C. & WOZNIK, F. (2009). Place des documents dans l'élaboration d'un enseignement de mathématiques à l'école primaire. In I. Bloch & F. Conne. *Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques* (pp. 135-146). Grenoble : La Pensée sauvage.
- MESSAOUI, A. (2018). Concevoir des ressources pour enseigner, un levier pour le développement des compétences informationnelles des professeurs? In J. Thiburce & B. Ursi (Eds.). *SHS Web Conf. Volume 52, ICODOC 2017* https://www.shs-conferences.org/articles/shsconf/pdf/2018/13/shsconf_icodoc2017_02003.pdf
- MESSAOUI, A. (2019). *Développement de l'expertise documentaire des professeurs dans des situations de mutation de leur enseignement : le cas de professeurs de mathématiques et d'anglais*. Thèse de l'ENS de Lyon. <https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-02448482v1>
- MONAGHAN, J. (2016). The calculator debate. In J. Monaghan, L. Trouche, & J. Borwein, *Tools and Mathematics: Instruments for Learning* (pp. 305-332). New York: Springer
- PÉDAUQUE, R. T. (coll.) (2006). *Le Document à la lumière du numérique*. Caen : C&F éditions.
- PEPIN, B., XU, B., TROUCHE, L., & WANG, C. (2017). Developing a deeper understanding of mathematics teaching expertise: Chinese mathematics teachers' resource systems as windows into their work, *Educational Studies in Mathematics*, 94(3), 257–274, <http://rdcu.be/koXk>
- PROUST, C. (2007). *Tablettes mathématiques de Nippur* (Vol. XVIII). Istanbul: IFEA, De Boccard.
- RABARDEL, P. (1995). *Les hommes et les technologies : approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: Armand Colin.
- RABARDEL, P. (1999). Éléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques. In M. Bailleul, *Actes de la dixième université d'été de didactique des mathématiques* (pp. 203-213). Caen : IUFM & ARDM.
- RAFALSKA, M. WANG, C. & TROUCHE, L. (2019). Comparing naming systems used by Chinese and Ukrainian teachers: exploring teachers' resource systems. Contribution to TSG 41, ICME-14, Shanghai.
- RESTREPO, A. (2008). *Genèse instrumentale du déplacement en géométrie dynamique chez des élèves de 6ème*, Thèse de l'université de Grenoble, <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00334253>.
- ROBERT, A. & ROGALSKI, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche, *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, 2(4), 505–528.
- ROCHA, K. (2019). *Une étude des effets du travail documentaire et collectif sur le développement professionnel des enseignants de mathématiques : apport des concepts d'expérience et de trajectoire documentaires*. Thèse de l'ENS de Lyon. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-02399664/>
- SABRA, H. (2008). *Interaction entre systèmes documentaires personnels et communautaire. Etude dans le cadre du projet e-CoLab*, mémoire de master HPDS. Lyon : Université de Lyon.
- SABRA, H. (2011). *Contribution à l'étude du travail documentaire des enseignants de mathématiques : les incidents comme révélateurs des rapports entre documentations individuelle et communautaire* Thèse Université Lyon 1 <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00768508>
- SAID, E. (2012). *Du style tardif. Musique et littérature à contre-courant* (M.-C. Vacher Eds.). Actes Sud.
- SALINAS, U., MORENO-ARMELLA, L. & MIRANDA, I. (2020). Configuration of the theoretical-methodological construct «The teaching model » by affinity between theories. TSG presentation at ICME-14, Shanghai.
- SAYAC, N. (2017). *Approche didactique de l'évaluation et de ses pratiques en mathématiques : enjeux d'apprentissages et de formation*. HDR de l'Université Paris-Diderot. <https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01723752>
- SAYAH, K. (2018). *L'intégration des ressources de Sésamath au collège : un moteur pour le développement du travail collectif des enseignants de mathématiques en Algérie*. Thèse Université Lyon 1. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-02071684>

- SHAO, M. (2020). Integrating Geogebra in 3D in classroom teaching of 3D Geometry, contrasting a French and Chinese cases. *TSG presentation at ICME-14*, Shanghai.
- SOKHNA, M. (2006). *Formation à distance des professeurs de mathématiques au Sénégal, genèse instrumentale de ressources pédagogiques*. Thèse Université Montpellier. <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00917620>
- SOURY-LAVERGNE, S. (2017). *Duos d'artefacts tangibles et numériques et objets connectés pour apprendre et faire apprendre*. HDR de l'ENS de Lyon. <https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01610658>.
- SOURY-LAVERGNE S., TROUCHE, L. & GUEUDET, G. (2009). *Recherche INRP-Pairform@nce, Parcours de formation en ligne, étude de processus d'appropriation*, rapport à destination du MEN. Lyon : INRP
- TROUCHE, L. (1996). *A propos de l'apprentissage des limites de fonction dans un environnement calculatrices, étude des rapports entre processus d'instrumentation et processus de conceptualisation*, thèse de l'Université de Montpellier, <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-02374810>
- TROUCHE, L. (1997). A la recherche d'une méthode d'étude de "l'action instrumentée". In *Actes de l'Université d'été Des outils informatiques dans la classe aux calculatrices symboliques et géométriques : quelles perspectives pour l'enseignement des mathématiques* (pp. 113-148). Rennes : IREM.
- TROUCHE, L. et 37 élèves d'une classe de terminale S (1998). *Faire des mathématiques avec des calculatrices symboliques, conjecturer et prouver. 37 variations sur un thème imposé*. Montpellier : IREM, Université Montpellier 2.
- TROUCHE, L. (2000). La parabole du gaucher et de la casserole à bec verseur, éléments de méthode pour une étude des processus d'apprentissage dans un environnement de calculatrices complexes, *Educational Studies in Mathematics*, 41(3), 239-264
- TROUCHE, L. (2003). *Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques, nécessité des orchestrations*. HDR, Université Paris 7.
- TROUCHE, L. (2004). Environnements informatisés et mathématiques, quels usages pour quels apprentissages ? *Educational Studies in Mathematics*, 55, 181-197
- TROUCHE, L. (2016). The Development of Mathematics Practices in the Mesopotamian Scribal Schools. In J. Monaghan, L. Trouche, & J.M. Borwein, *Tools and mathematics, instruments for learning* (pp. 117-138). Ney-York : Springer
- TROUCHE, L. (2018). Comprendre le travail des professeurs à travers leurs interactions avec les ressources de leur enseignement - Une histoire de trajectoires, *Educación Matemática*, 30(3), 9-40 http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/vol30/3/01_REM_30_3_f.pdf
- TROUCHE, L. (2019). Evidencing missing resources of the documentational approach to didactics. Towards ten programs of research / development for enriching this approach. In L. Trouche, G. Gueudet, & B. Pepin (Eds.), *The 'resource' approach to Mathematics Education*. Springer series Advances in Mathematics Education (pp. 447-489). Cham: Springer - Vidéo de la conférence ayant donné naissance à ce chapitre, sous-titrée en français, à cette adresse http://video.ens-lyon.fr/ife/2018/2018-05-30_009_Ressources2018_Luc_Trouche_v1.mp4
- TROUCHE, L., GITIRANA, V., MIYAKAWA, T., PEPIN, B. & WANG, C. (2019). Studying mathematics teachers interactions with curriculum materials through different lenses: towards a deeper understanding of the processes at stake. *International Journal of Educational Research* 93, 53-67
- TROUCHE, L., GUEUDET, G. & PEPIN, B. (2018). The documentational approach to didactics. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education*. New-York: Springer.
- TROUCHE, L., GUEUDET, G. & PEPIN, B. (2019). The 'resource' approach to mathematics education. Cham: Springer.
- TUFFERY, C. (2016). *Les ressources au cœur des pratiques des professeurs de mathématiques: Le cas de l'enseignement d'exploration MPS en Seconde*. Thèse Université de la Réunion. <https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01391464>
- VERGNAUD, G. (2011). Au fond de l'action, la conceptualisation. In J. M. Barbier (Éd.), *Savoirs théoriques et savoirs d'action* (p.275-292). Paris : PUF.
- VYGOTSKI, L. (1934/1997). *Pensée et Langage*, éditions La Dispute.
- WANG, C. (2019). *An investigation of mathematics teachers' documentation expertise and its development in collectives: two contrasting cases in China and France*. Thèse ENS de Lyon et ECNU de Shanghai <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-02275820>.
- WANG, C., SALINAS, U. & TROUCHE, L. (2019). From teachers' naming systems of resources to teachers' resource systems: Contrasting a Chinese and a Mexican case. In U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen, & M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 4356-4363). Utrecht, the Netherlands: Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.

UN MODELE DE DESCRIPTION DIDACTIQUE DE RESSOURCES DE TYPE EXERCICES DE MATHEMATIQUE : DEFINITION ET PERSPECTIVES POUR LA DIDACTIQUE ET LES EIAH

Sébastien JOLIVET

LDAR, Université de Paris

sebastien.jolivet@univ-grenoble-alpes.fr

Résumé

Dans un contexte où les outils numériques et le WEB permettent la diffusion et le partage massif de ressources l'enjeu actuel est de trouver la bonne ressource. Cela nécessite en particulier que la ressource soit « bien » décrite. Dans la perspective de permettre la recherche de ressources sur la base de critères didactiques nous présentons un *modèle de description didactique de ressources* (M2DR) de type exercices de mathématiques (Jolivet, 2018). Le modèle M2DR est construit à partir de la décomposition des exercices en *tâches* et de l'exploitation de *modèles praxéologiques de référence* (MPR) structurés à l'aide de T4TEL (Chaachoua, 2018). Pour cela nous introduisons une formalisation de la *tâche* et la notion de *type de tâches optimum* comme moyen de lier la tâche au MPR. Le modèle M2DR est structuré en trois dimensions qui permettent de caractériser à la fois les savoirs en jeu et la manière dont le travail de ces savoirs est organisé dans l'exercice. Une fois le modèle explicité et illustré nous montrons en quoi la description d'un exercice à l'aide de ce modèle permet d'interroger à la fois son adéquation à un curriculum et sa pertinence relativement à une intention didactique.

Pour prolonger cet exposé nous proposons diverses pistes relatives à l'exploitation du modèle M2DR, que ce soit pour des questions spécifiquement didactiques, ou en inscrivant ce questionnement dans le domaine des environnements informatiques pour l'apprentissage humain (EIAH).

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- CHAACHOUA, H. (2018). T4TEL, un cadre de référence didactique pour la conception des EIAH. In J. Pilet & C. Venda (Ed.), *Pré-actes du séminaire national de l'ARDM*. Consulté à l'adresse : <https://ardm.eu/wp-content/uploads/2018/10/Pr%C3%A9actes-ARDM-fevrier2018.pdf#page=5>
- JOLIVET, S. (2018). Modèle de description didactique de ressources d'apprentissage en mathématiques, pour l'indexation et des services EIAH, *Thèse de doctorat, Université Grenoble Alpes*. Consulté à l'adresse <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-02079412/document>

LES UNITÉS DANS L'ENSEIGNEMENT DE L'ARITHMÉTIQUE À L'ÉCOLE

Christine Chambris

LDAR, Cergy Paris Université

christine.chambris@u-cergy.fr

Résumé

Dans ma thèse, j'avais mis en évidence la modification du savoir de référence d'une part pour l'arithmétique au moment de la réforme des mathématiques modernes (1970), d'autre part pour la numération à la fin des années 1970. Les savoirs de référence antérieurs (d'un côté les grandeurs au socle de l'arithmétique et de l'autre les différents ordres d'unités – les unités, dizaines, centaines que j'ai appelées unités de la numération- au socle de la numération) sont remplacés par ceux à l'œuvre dans les mathématiques académiques actuelles. Une conséquence de la seconde modification est l'impossibilité (théorique et observée dans des manuels) d'exprimer les relations entre les unités, e.g., $1c=10d$, une autre est que le nombre 1 est la seule unité enseignée en numération au début des années 2000 en France. Si la seconde modification semble possible en particulier parce que le système métrique se désolidarise de la numération du fait de la première modification, l'articulation entre les deux modifications ne va pas de soi.

Dans une première partie, je reviendrai sur cette articulation. En particulier je m'attacherai à préciser le lien entre les grandeurs et les unités et j'introduirai la notion de *système d'unités*, notion transversale qui apparaît comme une clé pour comprendre ces changements (et certains de leurs effets). Dans une deuxième partie, je prendrai quelques exemples (dans la littérature ou dans des travaux en cours) dans différents sous-domaines de l'arithmétique dans l'enseignement actuel, à la fois en termes de potentialités des systèmes d'unités et en termes de difficultés qui semblent liées à leur absence au niveau institutionnel.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- BEZOUT, E., & REYNAUD, A. A. L. (1821). *Traité d'arithmétique à l'usage de la marine et de l'artillerie*. 9^e édition. (1^e édition du Cours de Bezout, 1781)
- CHAMBRIS, C. (2008). Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20^e siècle. Connaissances des élèves actuels (Thèse, Université Paris-Diderot).
- CHAMBRIS, C., COULANGE, L., RINALDI, A.-M., & TRAIN, G. (prép.). Unités et systèmes d'unités pour l'enseignement et l'apprentissage des nombres et du calcul à l'école. Contribution à un état des lieux, potentialités. TD EEDDM 20, Autrans.

LA DIDACTIQUE DE L'INFORMATIQUE EST-ELLE LA SCIENCE DES CONDITIONS DE DIFFUSION DES CONNAISSANCES INFORMATIQUES ?

Cédric FLUCKIGER

Théodile-CIREL (ULR 4354) – Université de Lille

cedric.fluckiger@univ-lille.fr

Résumé

Ce texte, issu d'une communication au séminaire national de l'ARDM, est une occasion d'ouvrir un dialogue entre didactiques en revenant aux bases mêmes du projet des didactiques. Y sont discutées en premier lieu les différences de statut entre informatique et mathématiques et les différences qui en découlent pour leurs didactiques. Est abordée ensuite la question de l'identification des contenus, envisagée comme une opération dont le didacticien doit endosser la responsabilité. La notion de contenu, qui souligne le fait que les contenus scolaires font l'objet d'une élaboration sociale et d'une réappropriation subjective est ensuite détaillée, ainsi que le programme scientifique qu'elle ouvre.

Mots clés

Didactique de l'informatique ; didactique comparée ; contenu ; critique

I. INTRODUCTION

« La didactique des mathématiques est la science des conditions spécifiques de la diffusion des connaissances mathématiques ». Tout didacticien des mathématiques connaît cette définition classique proposée par Guy Brousseau (1994, p. 1) et reconnaît qu'elle vaut pour les connaissances de la *discipline scientifique* mathématique. Implicitement, les mathématiques scolaires ne sont qu'une instance de la diffusion de ces connaissances. Ce qui m'interroge en tant que didacticien de l'informatique, c'est qu'elle ne me semble pas directement opératoire pour ce qui s'enseigne en informatique à l'école. Peut-on dire que « la didactique de l'informatique est la science des conditions spécifiques de la diffusion des connaissances informatiques » ? Car y compris ce que l'école désigne comme « informatique » peut-il être désigné comme relevant des « connaissances informatiques » ? Plus précisément, l'école enseigne-t-elle des connaissances qu'un informaticien reconnaîtrait comme informatiques ?

C'est cette intuition d'un écart entre ce que mettent au cœur de leur travail les didacticiens des mathématiques et ceux de l'informatique qui constitue le point de départ de cette contribution, car elle me semble ouvrir la discussion sur l'importance qu'accordent les uns et les autres à la discipline scolaire comme institution de la diffusion des connaissances qui les occupent.

J'ai été invité à présenter mes travaux, inscrits en didactique de l'informatique, lors du séminaire national de l'ARDM, en janvier 2020, suite à mon Habilitation à Diriger des Recherches et à l'ouvrage qui en est issu (Fluckiger, 2019). Ce texte en est le reflet, écrit dans une langue plus oralisée et personnelle qu'un article académique. Il s'agit, par ce texte, d'ouvrir

un dialogue entre didactiques en revenant aux bases mêmes du projet didactique : discuter de ce qui est spécifique aux contenus dans les enseignements/apprentissages. Mais qu'est-ce qui est spécifique ? On peut distinguer ce qui est

- spécifique à la nature même des contenus (le type d'opérations cognitives nécessaires à leur apprentissage, leur structure interne...) ;
- spécifique à la forme que prend son organisation curriculaire à l'école ;
- ou encore spécifique à la manière dont les acteurs éducatifs (enseignants, élèves, parents...) se les représentent, leur assignent des finalités, etc.

Les trois peuvent avoir des effets sur les enseignements et les apprentissages.

Pour les discuter, je commencerai (partie 2) par revenir sur les différences de statut entre informatique scolaire et mathématiques scolaires et sur les différences qui en découlent pour leurs didactiques ; je discuterai ensuite du problème, crucial pour l'informatique, mais qui se pose pour toutes les didactiques, d'identification des contenus (partie 3) ; enfin je reviendrai sur la notion de contenu et le programme scientifique qu'elle ouvre si l'on considère qu'un contenu fait toujours l'objet d'une double construction, élaboration sociale et réappropriation subjective (partie 4).

II. MATHEMATIQUES, INFORMATIQUE ET LEURS DIDACTIQUES

1. Des différences dans les conditions d'enseignement entre mathématiques et informatique...

Cette communication d'un didacticien de l'informatique s'adressant à des didacticiens des mathématiques s'inscrit dans une logique de comparatisme en didactique (Mercier, Schubauer-Léoni et Sensevy, 2002). Ce qui peut parfois sembler une évidence dans le cadre d'une discipline donnée peut être questionné à nouveaux frais par contraste avec une autre discipline, constituée et enseignée dans d'autres conditions.

Un effet, une proximité entre les deux disciplines a été soulignée de longue date (par exemple Lang, 1998, affirmait de l'informatique qu'on « y rencontre des problèmes de logique, des questions strictement mathématiques, des problématiques apparentées à la physique la plus théorique... »). Informatique et mathématiques ont d'ailleurs pu sembler si proches que ces dernières années, en France, ce sont souvent les enseignants de mathématiques qui ont été sollicités pour enseigner les nouvelles options et spécialités d'informatique au lycée¹.

Or malgré cette proximité, on peut noter des différences importantes dans les conditions dans lesquelles les deux disciplines s'enseignent.

On peut déjà relever des différences de statut. Les mathématiques ont longtemps joué un rôle central de sélection et d'orientation des élèves, l'informatique demeure anecdotique dans le parcours scolaire des élèves. Les mathématiques disposent encore d'un fort volume horaire et, partant, d'un corps enseignant nombreux, l'informatique n'est redevenue une discipline scolaire du lycée que tout récemment, plus de vingt ans après la disparition de l'option informatique, et

¹ Ce qui ouvre de nouvelles questions didactiques passionnantes. Dans le cadre de sa thèse codirigée par Ghislaine Gueudet et moi-même, Matthieu Branthôme cherche ainsi à identifier des différences dans la manière dont de enseignants de mathématiques et de technologie enseignent l'informatique.

encore sous la forme de spécialité et d'option. Un CAPES informatique n'a vu le jour que cette année, en 2020, une agrégation n'est prévue que pour 2021.

Ces différences de statut se combinent à des différences dans les représentations, sur l'utilité sociale et professionnelle de l'une et de l'autre. Devenir informaticien ou mathématicien ne recouvre à l'évidence pas les mêmes perspectives d'emploi. Si l'on interroge la légitimité de l'une ou de l'autre, elles semblent ne pas correspondre non plus. On peut penser à l'utilité perçue des deux : il peut certes arriver qu'il soit demandé à quoi cela sert d'enseigner des notions d'informatique aux élèves puisque, paraît-il, il n'est pas besoin de les connaître pour utiliser les applications courantes, tout comme il peut arriver aux mathématiques d'être questionnées sur l'utilité d'enseigner le théorème de Pythagore, rarement mis en œuvre dans la vie courante pour calculer par exemple la longueur du tuyau d'arrosage nécessaire dans un jardin. Pour autant, l'idée que les mathématiques développent des compétences (supposées générales) de rigueur et raisonnement est assez largement répandue. À l'inverse, il est sans doute plus aisé d'imaginer des « usages » courants d'outils reliés à l'informatique qu'à ceux des mathématiques. Dans des entretiens menés actuellement² avec des professeurs des écoles (maternelle et élémentaire) sur leurs enseignements liés à l'informatique, revient systématiquement l'idée que les élèves « en auront besoin », au collège (pour les outils de bureautique ou de recherche d'information sur le Web) ou dans leur future vie professionnelle, bien plus que l'idée que l'informatique apporterait des capacités de raisonnement, de rigueur ou la capacité à traiter une tâche complexe en la décomposant en sous-tâches simples (toutes idées défendues par les informaticiens et les promoteurs de son enseignement dès le plus jeune âge).

Nous voyons donc que malgré la proximité souvent soulignée avec les mathématiques, existe une différence majeure : la discipline scolaire, son existence même, son poids, son statut, sa légitimité, son utilité sociale perçue par les enseignants, les élèves, les parents..., bref les institutions au sein de laquelle se diffusent les connaissances, praxéologies, etc.

2. ... qui ont aussi une incidence sur leurs didactiques respectives

Toutes les différences rapidement esquissées ci-dessus ont également des conséquences sur les deux didactiques car, comme le rappelle Lebeaume (2012), le fonctionnement des didactiques n'est pas étranger au fonctionnement des disciplines scolaires. Un corps enseignant nombreux et les nécessités de sa formation initiale et continue contribuent à faire exister un corps de spécialistes de cet enseignement. Ainsi, le fait qu'existe une revue de didactique des mathématiques ou que l'ARDM organise le séminaire qui m'invite fait ressortir le fait que, suite à ce que Rogalski (2015, p. 284) a appelé un « tarissement » des recherches en didactique de l'informatique, l'AFDI (Association Francophone de Didactique de l'Informatique) a été mise en sommeil après son dernier colloque... en 1996. Et si des travaux sur les enseignements et apprentissages de l'informatique semblent plus fréquents récemment, peu de chercheurs travaillant sur l'informatique scolaire mobilisent effectivement des concepts et cadres théoriques didactiques. Ils leur préfèrent le plus souvent des notions issues directement de la psychologie ou de l'ergonomie, ou s'inscrivent dans des questionnements sociologiques ou historiques.

Historiquement, c'est surtout aux objets d'enseignement liés à la programmation et l'algorithmique que se sont intéressés les didacticiens de l'informatique, surtout lorsque la place de la programmation dans l'enseignement était une question vive (Rogalski, 1990). Des

² Dans le cadre du projet ANR IE CARE, qui porte sur l'enseignement de l'informatique à l'école obligatoire et regroupe des informaticiens, spécialistes de la discipline de référence, et des spécialistes de son enseignement scolaire et de la formation des enseignants.

enseignements d'informatique ont été mis en place dès les années 1960 dans le supérieur avant que des enseignements optionnels ne soient dispensés au lycée dans les années 1980 (Baron, 1987 ; Baron, Bruillard et Drot-Delange, 2015). Ces enseignements ont donné lieu à des recherches relativement importantes, d'autant plus que les uns et les autres s'accompagnaient souvent d'une forme de « militantisme » pour l'enseignement de l'informatique. Le retour de ces enseignements, sous forme de nouvelles options ou spécialités au lycée, mais aussi de prescriptions dès l'école maternelle, la création cette année d'un CAPES ne sont pas non plus étrangers au retour de préoccupations plus nettement didactiques, dont témoigne par exemple le colloque Didapro 8, qui s'est tenu à Lille en février 2020 (Caron, Fluckiger *et al.*, 2020), regroupant chercheurs en éducation et en informatique autour des questions d'enseignement/apprentissage de l'informatique, de la maternelle à l'université.

Reste que, si l'on parle de didactique des mathématiques, on se réfère à un ensemble de travaux et de chercheurs qui produisent, publient, discutent, depuis de nombreuses années et sans interruption, alors que la didactique de l'informatique demeure largement un projet.

III. IDENTIFIER DES CONTENUS INFORMATIQUES

Malgré ces différences de statut ou de poids entre les disciplines ou les didactiques de l'informatique et des mathématiques, ou peut-être justement grâce à ces différences, l'un des apports de réflexions en didactique de l'informatique, pour les didacticiens des mathématiques, est sans doute de mettre au jour des opérations qui peuvent être masquées sous le poids de l'évidence dans une didactique constituée, portant sur une matière scolaire légitime et bien installée comme les mathématiques. Il en est ainsi de la manière dont les didacticiens identifient les objets de savoir qu'ils peuvent considérer comme légitimes dans leur didactique.

1. La variété de la manière de se définir comme didacticien

Ainsi, les « connaissances mathématiques » qu'évoque Brousseau dans sa définition ont une forme d'évidence qui mérite pourtant d'être interrogée dès que l'on s'intéresse à ce qui s'enseigne dans l'institution particulière qu'est l'école. Qui décide de ce qu'est une « connaissance mathématique » dans cette institution ? Les mathématiciens certes, cela ne fait pas de doute pour Brousseau. Mais les enseignants, élèves ou didacticiens peuvent avoir une vue divergente. On sait en effet la variabilité des modes de construction et reconstruction des disciplines scolaires par les élèves et les enseignants (Reuter, 2007 ; Cohen-Azria *et al.*, 2013). Ce que *eux* reconstruisent comme un élément des mathématiques peut varier considérablement d'avec ce que les mathématiciens identifient. Ainsi les tables de multiplication sont-elles une « connaissance mathématique » ? Et la comptine numérique chantonnée à l'école maternelle ? Elles peuvent l'être pour un élève alors qu'un mathématicien pourrait ne pas reconnaître un objet de sa discipline. Dit autrement, dans le processus de transposition didactique, les sujets didactiques reconstruisent aussi les connaissances qu'ils *reconnaissent* comme relevant de telle ou telle discipline. C'est bien l'épistémologie de la discipline de référence qui permet de se faire une idée des enjeux de savoir, mais les opinions qu'ont les sujets didactiques ne sont pas non plus sans effet sur les apprentissages. Elles doivent donc être connues, comprises et prises en compte pour les analyses didactiques.

Cette question pourrait paraître triviale. Elle est plus délicate qu'il n'y paraît et renvoie en réalité au projet même des didactiques et à leurs délimitations. C'est ce sur quoi Yves

Chevallard attirait notre attention quand il affirmait qu'« [i]l existe aujourd'hui, notamment dans le cadre des IUFM³, un obstacle sérieux au développement de ce que j'appellerai d'abord la science du didactique. Cet obstacle, paradoxalement, consiste en cela même qui a donné naissance à la plupart des didactiques disciplinaires, à savoir les disciplines enseignées (au primaire et au secondaire surtout) » (Chevallard, 2006, p. 1). Les didactiques se comportaient selon lui, en « humbles servantes » des disciplines scolaires, desquelles elles croyaient devoir tirer leur légitimité.

Je reviendrai sur le fait qu'on peut avoir des raisons scientifiques, construites et pensées, de prendre pour objet les contenus d'une matière scolaire, telle que définie par l'institution scolaire : il ne s'agit pas nécessairement d'une absence d'esprit critique de la part du didacticien, soumis aux caprices des découpages scolaires. Mais le fond de la question posée par Chevallard mérite que l'on s'y arrête : les disciplines doivent-elles étudier les contenus désignés comme relevant de leur champ par les disciplines de référence ou par les disciplines scolaires ? La question a été relativement vite tranchée pour les mathématiques, où elle se pose de manière moins cruciale que pour d'autres matières, comme pour le français. En effet, discipline scolaire et discipline scientifique (et même universitaire), pour les mathématiques, coïncident assez largement pour que la question préoccupe assez peu les didacticiens des mathématiques. Les didacticiens du français n'ont pas cette chance. Quelles sont les disciplines de références dans l'apprentissage et la récitation d'une poésie ? La linguistique est-elle réellement la discipline de référence de la grammaire scolaire, dont Chervel (1977) montre qu'elle est largement une création de l'école ? Cette difficulté à faire, dans leur cas, une bijection entre discipline scolaire et discipline scientifique, a conduit les didacticiens du français à questionner plus avant la nature des disciplines scolaires (par exemple dans Reuter et Lahanier-Reuter, 2004), leurs modes de construction et d'évolution, ainsi que les effets qu'avaient ces constructions sur les formes de travail, les apprentissages des élèves, la clarté cognitive des objets qui y trouvent leur place, etc. En d'autres termes, la didactique du français a fait d'une faiblesse épistémologique une force pour poser de nouvelles questions didactiques.

Car se pose alors la question de la référence des contenus disciplinaires (Daunay, 2010), tous n'étant à l'évidence pas construits sur un modèle transpositif depuis une discipline « savante ». Cela ne fait guère débat, mais ouvre en conséquence la question de ce qui permet de délimiter le champ des connaissances sur lequel peuvent se pencher les didacticiens, lorsque les objets dont ils s'occupent n'ont pas une unité épistémologique suffisante pour que cela règle le problème. Si les didacticiens du français ne sont pas les didacticiens d'une discipline scientifique idoine, quels sont donc leurs objets ? La question se pose aussi pour l'informatique, bien plus nettement que pour les mathématiques.

Se pose donc la question des délimitations que les didacticiens donnent eux-mêmes aux contenus qu'ils se sentent légitimes à appréhender. Car finalement, à regarder comment les didacticiens se définissent eux-mêmes (au sein de l'ARCD⁴ par exemple), bien des didacticiens ne se définissent ni par la référence à une discipline savante, ni par celle à une matière scolaire : il existe certes des didacticiens de l'Histoire, de la philosophie ou de la physique, mais aussi des didacticiens de l'Histoire-géographie, de l'EPS, du français ou encore de l'oral, des questions socialement vives, des langues, des sciences, des SVT, de l'informatique (y compris lorsque l'informatique n'est pas une matière scolaire), etc. Ces dénominations ne renvoient ni de manière univoque ni de manière évidente à une discipline scientifique unique. Certaines ne renvoient d'ailleurs ni à une discipline scientifique, ni à une discipline scolaire, mais à un ensemble qui peut être un regroupement des uns ou des autres (langues, SVT, APS...) ou une

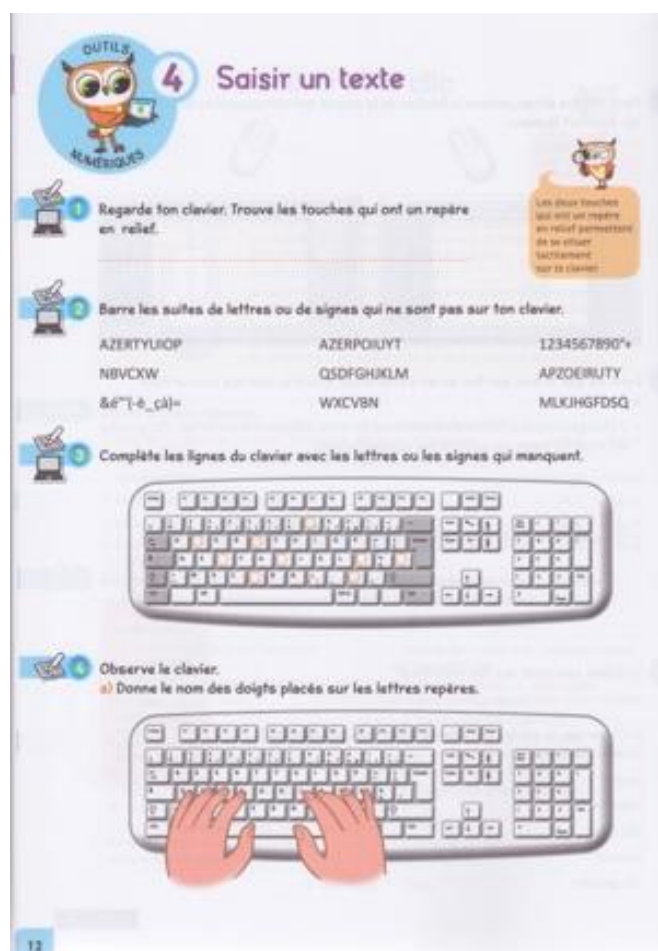
³ Institut Universitaire de Formation des Maîtres, qui a précédé les ESPE puis les INSPE actuels.

⁴ Association pour des Recherches Comparatistes en Didactique

subdivision (oral, littérature...). À regarder comment ils se désignent, les didacticiens ne semblent pas tant se comporter en « humbles servants » des découpages contingents de l'institution scolaire ni de ceux des universitaires.

Mais cela ne règle pas la question de fond sur laquelle repose la remarque de Chevallard : un didacticien de l'informatique doit-il ne s'intéresser qu'à des contenus identifiés comme informatiques par des informaticiens (qui peuvent d'ailleurs ne pas être d'accord entre eux pour savoir si faire un collier de perles en suivant un algorithme, en moyenne section de maternelle, est ou non un préapprentissage de l'informatique et de l'algorithmique) ? Ou bien doivent-ils s'intéresser à ce qui est désigné par les programmes scolaires ou les manuels ? Ou encore à ce que les élèves, les enseignants ou les parents identifient comme tel ?

Par exemple, apprendre à taper au clavier n'est certainement pas un contenu que beaucoup d'informaticiens considèrent comme relevant de leur discipline. Mais les acteurs du système scolaire peuvent l'identifier comme tel, comme c'est le cas dans cette page d'un manuel d'informatique destiné aux enfants de 6 à 8 ans (cycle 2 de l'école primaire française) :



Extrait de l'ouvrage « Mon cahier pour apprendre à programmer », destiné au cycle 2 (6 à 8 ans) : Croq, A., Farnet, P., Payet, N., & Trannoy, G. (2015b). *Mon cahier pour apprendre à programmer*. Bordas.

Il s'agit bien ici d'un contenu scolaire, dans un manuel centré sur l'informatique. Enseignants et élèves sont donc invités à considérer qu'il s'agit d'un contenu informatique. Si l'on considère (ce qui peut être épistémologiquement légitime) qu'il ne s'agit pas d'informatique, quel didacticien, alors, est légitime à étudier un tel contenu scolaire ? Ou alors les didacticiens doivent-ils se désintéresser de contenus scolaires, identifiés comme informatiques par les

éditeurs de manuels, les élèves ou les enseignants, s'ils ne sont pas indexés directement à la discipline scientifique qui porte le même nom ?

Concernant l'informatique scolaire, en l'absence pendant longtemps d'une matière scolaire clairement identifiée, des contenus étaient bel et bien enseignés à l'école, dans le cadre d'autres matières scolaires (le tableur ou des éléments d'algorithmique en mathématiques...). Plus encore, de mêmes activités peuvent donner lieu ou non à des contenus d'enseignement/apprentissage relevant de l'informatique. Prenons par exemple une activité scolaire de recherche d'information, sur l'arrivée des Romains en Gaule, dans le cadre d'un cours d'Histoire. Une telle activité peut ne porter que sur ce qui fait l'objet de la recherche, et ne relever alors que de l'Histoire. Elle peut porter sur les méthodologies de recherche documentaire et relever alors d'un enseignement en documentation. Elle peut encore porter sur la nature des sources et l'apprentissage d'un regard critique face à l'information et relever de l'éducation aux médias. Elle peut enfin porter sur les mécanismes de « page ranking » des moteurs de recherche et relever d'une acculturation à des processus algorithmiques, relevant bel et bien de l'informatique. La même activité de recherche d'information peut donc conduire à aborder ou non des connaissances spécifiquement informatiques, et de manière plus ou moins centrale dans le propos de l'enseignant. Ces contenus spécifiques peuvent d'ailleurs ou non avoir fait l'objet d'une programmation par l'enseignant, faire l'objet ou non d'une évaluation, être perçus ou non par les élèves, etc.

L'une des questions de recherche qui se pose, et qui est l'un des questionnements investigués dans le projet ANR IE CARE⁵ est précisément de savoir si des *contenus*⁶ informatiques surgissent lors de telles activités, s'ils sont planifiés par l'enseignant, quelle importance l'enseignant leur donne dans le cours de l'activité, s'ils font l'objet d'une évaluation spécifique, etc. En première approximation, disons que pour moi, à la suite de la définition proposée par Delcambre, un *contenu* « renvoie à des choses aussi diverses que les savoirs, les savoir-faire ou les compétences qui sont les objets d'enseignement et/ou d'apprentissages les plus immédiatement identifiables dans un système didactique, mais aussi à des valeurs, des pratiques, des « rapports à », voire des comportements ou des attitudes » (Delcambre, 2007/2013, p. 43).

On voit que de telles questions ne se posent pas du tout de la même manière pour des contenus mieux installés dans l'école et les pratiques scolaires, mieux identifiées par les universitaires, centraux dans les programmes et qui font l'objet d'une programmation didactique explicite. À entendre les enseignants d'école primaire, concernant des éléments touchant à l'informatique (la place des touches, enregistrer un fichier...), ces contenus informatiques semblent très largement imprévus, opportunistes et individualisés : c'est souvent quand un élève pose une question ou se trouve face à une difficulté d'action, au cours d'une activité conçue pour enseigner d'autres contenus disciplinaires, que l'enseignant apporte un savoir-faire ou une connaissance plus générale. Par exemple lors d'une séance, l'ordinateur d'un binôme d'élève a mis du temps à démarrer, ce qui a donné l'occasion à l'enseignant d'apporter un élément de vocabulaire, le « système d'exploitation », et d'expliquer qu'il s'agit du programme qui permet à l'ordinateur de fonctionner. Ce *contenu* n'était pas programmé, c'est en situation que l'enseignant a choisi d'apporter une connaissance de nature informatique aux élèves. L'une des justifications avancées par les enseignants est l'hétérogénéité des habitudes et connaissances

⁵ IE-CARE est un projet ANR pluridisciplinaire associant des chercheurs en Informatique et en sciences humaines et sociales (Sciences de l'éducation, didactiques, psychologie des apprentissages, sociologie) dont l'objectif est de produire des connaissances fondamentales et opératoires sur l'informatique, son enseignement et son apprentissage, à l'école obligatoire.

⁶ Je reviens sur la notion de contenu dans une partie ultérieure, pour justifier le choix du recours à ce terme et ce qu'il ouvre comme questionnement.

des élèves. On peut aussi y voir l'absence de pratiques fortement établies chez les enseignants, de formation des enseignants à identifier les enjeux de savoir centraux de cette discipline et de clarté du curriculum.

2. La difficulté à dire ce qu'est l'informatique – et donc une « connaissance informatique »

Si l'on cherche à définir ce qu'est une connaissance informatique, on se heurte rapidement de nombreuses difficultés.

En premier lieu, si l'informatique est bel et bien une discipline scientifique, avec ses cursus, ses enseignants-chercheurs, sa section CNU, etc., même cette informatique-là n'occupe qu'une partie des « informaticiens », sans doute minoritaire. Il est alors possible qu'une part non négligeable des contenus possibles ou effectifs à l'école soit davantage liée à des pratiques sociales et professionnelles d'informaticiens non « scientifiques ».

On peut encore remarquer que la question de la nature ontologique de l'informatique « n'est pas triviale » (Drot-Delange, 2016, p. 39). La plupart des auteurs insistent sur une pluralité de l'informatique et proposent des définitions composites, comme Bruillard, qui affirme :

À ma connaissance, il n'y a pas d'ontologie du domaine permettant de rendre compte de tous ses aspects. Domaine complexe aux contours multiples, on peut le représenter autour de trois attracteurs : algorithmes ; matériels et réseaux ; activités humaines. Pour Gilles Dowek (2011⁷), dans une vision plus ontologique, les quatre concepts clés sont ceux de machine, d'information, d'algorithme et de langage. La combinaison de ces quatre ingrédients conduit à la spécificité de ce champ scientifique. (Bruillard, 2014, p. 2)

Seize ans plus tôt, Lang avançait l'idée d'une triple nature de l'informatique :

Comme beaucoup de disciplines scientifiques, l'informatique est à la fois une science, une technologie de l'utilisation de cette science et un ensemble d'outils qu'elle permet de réaliser. La confusion entre ces trois aspects est une première source d'incompréhension et de désaccord (Lang, 1998, p. 1).

De fait, puisque l'on dit, dans la vie courante, que l'on va au « rayon informatique » d'une grande surface, il n'est guère étonnant que l'usage d'un ordinateur puisse être perçu comme étant « faire de l'informatique », dans les discours des élèves (Fluckiger et Reuter, 2014) comme dans ceux des enseignants⁸.

D'ailleurs, d'un point de vue didactique, sur ce point, le sens commun n'est pas forcément en décalage avec la réalité des apprentissages. Car tout usage d'un matériel informatique est aussi une occasion d'une rencontre avec la *technicité* d'un objet, comme a pu le montrer Grugier (2016) pour des usages du tableau numérique interactif dès l'école maternelle. Un rapport technique à des objets qui sont aussi des objets d'usage courant, dans les pratiques de loisir, culturelles et de sociabilité des enfants et adolescents (Fluckiger, 2008) est donc aussi un contenu possible à l'école, d'autant que les usages ordinaires, hors de l'école, donnent très peu l'occasion aux élèves de développer des éléments de connaissance et de compréhension techniques (*ibid.*).

La posture épistémologique prise par de nombreux didacticiens des mathématiques, qui se reconnaissent comme une branche des mathématiques, ne peut donc valoir pour l'informatique

⁷ Bruillard fait ici référence à l'intervention au colloque Didapro, publiée dans Dowek (2012).

⁸ Je conduis en ce moment une série d'entretiens avec des enseignants d'école primaire dans le cadre du projet ANR IE CARE, en prenant soin de ne pas sélectionner que les enseignants manifestant une appétence pour l'informatique, mais aussi des enseignants peu intéressés, qui se sentent peu compétents, ou des enseignants qui se disent eux-mêmes réfractaires.

(sauf à considérer que les didacticiens de l'informatique ne s'intéresseraient qu'à une toute petite partie de ce dont l'école, les enseignants ou les élèves parlent lorsqu'ils disent faire de l'informatique). Pour la didactique de l'informatique, il est nécessaire de considérer qu'aucune des deux options consistant à déléguer la responsabilité de l'identification des contenus, soit aux matières scolaires (options, spécialités ou enseignements de l'école primaire), soit à la discipline de recherche, n'est pleinement satisfaisante. Il est bien probable que ce constat vaille pour d'autres disciplines ou types de contenus (je le sou mets à la discussion aux spécialistes de ces autres disciplines). Dans les deux cas, effectivement, la didactique serait une « humble servante », pour reprendre l'expression de Chevallard, soit des matières scolaires, soit des disciplines scientifiques. Que les dernières soient socialement plus légitimes ne retire rien au fait qu'il s'agit bel et bien d'un découpage externe aux didactiques, relevant d'une épistémologie construite sans relation avec les questions d'enseignement/apprentissage.

Je propose au contraire de considérer que la première responsabilité d'un didacticien est de délimiter et définir les contenus qui sont pertinents. On peut d'ailleurs envisager que ces délimitations et définitions ne soient pas les mêmes pour les différents didacticiens, en fonction de leurs questions de recherches et des objets qui les intéressent. Les didacticiens doivent alors distinguer nettement d'une part dans quel cadre curriculaire ces contenus sont enchâssés, d'autre part à quels savoirs académiques, pratiques de références ou savoirs d'usage ils renvoient. C'est le sens de la remarque de Brousseau qui insiste sur la spécificité de la didactique, qui seule peut envisager des mathématiques différentes de celles des mathématiciens :

« Une situation didactique n'est pas bien décrite par la juxtaposition des études réduites à ces différents domaines [(l'anthropologie, la sociologie, la psychologie évidemment, ou la linguistique)]. La psychologie par exemple ne peut pas légitimement envisager des mathématiques différentes de celles qui lui ont été choisies par les mathématiciens. Elle ne peut pas envisager des organisations didactiques différentes de celles qui ont nourri ses concepts sans s'engager dans une ingénierie dont les ressorts sortent de son domaine, ni intégrer dans la psychologie les modélisations des milieux et de leurs interactions, ni inscrire sérieusement ses observations dans une perspective historique, etc. » (Brousseau, 2011, p. 104)

Ainsi, pour lui, la didactique construit ses propres objets de recherche, en lien avec ceux de la discipline de référence, bien entendu, mais c'est bien le didacticien qui identifie un certain nombre de contenus, les construit comme des contenus didactiques (ici mathématiques), c'est-à-dire comme des objets pertinents pour lui :

« La discipline connexe devient théorie et impose ses propres objets et ses questions, en occultant les aspects qui sortent de son champ. L'objet didactique de l'étude se trouve réduit à sa trace dans cette discipline qui ne peut pas assurer en retour que ses résultats resteront valides dans le domaine de la didactique. » (ibid., p. 104)

Pourtant, la démarche générale que je propose peut être vue comme inverse de celle de Brousseau⁹, qui part des théories mathématiques pour aller vers les situations didactiques : si pour lui le didacticien construit des contenus distincts, c'est parce qu'il les pense dans le cadre des situations, les situations didactiques n'en étant qu'une instance particulière. La démarche en informatique serait plus proche de celle qu'on observe par exemple pour la didactique des langues : en informatique comme en langues, faute de pouvoir nous référer à une discipline scientifique unique et bien identifiée, nous sommes contraints à une démarche *ascendante*, partant des contenus scolaires tels qu'ils sont enseignés, à tenter d'en proposer des typologies

⁹ Je remercie Jean Brun pour son amicale relecture et ses remarques qui m'ont conduit à formuler ce paragraphe (qui n'engage évidemment pas sa responsabilité), notamment la distinction entre les démarches ascendantes et descendantes de Bronckart et Brousseau.

et, peut-être, à constituer une discipline de référence de ces contenus. Pour l'informatique, j'ai ainsi été amené (Fluckiger, 2019) à proposer une typologie des contenus scolaires (présents dans les discours sur l'informatique scolaire, dans les programmes, les manuels ou encore les pratiques observées) :

- Des contenus liés aux usages des outils numériques (taper au clavier, écrire en gras dans un document texte, inclure une formule dans un tableau, envoyer un courriel, connaître la charte d'utilisation de l'établissement, etc.) ;
- Des contenus liés à la technologie (comprendre le fonctionnement d'un disque dur, décrire l'architecture d'un ordinateur, nommer les périphériques courants, etc.) ;
- Des contenus liés aux langages informatiques, l'algorithmique et la programmation (la notion de boucle « for » ou « while », représenter un déplacement sur un quadrillage à l'aide de flèches, etc.).

3. Relations des didactiques et des institutions

La définition que donne Brousseau n'insiste pas sur les institutions au sein de laquelle se diffusent les connaissances, contrairement à Chevallard pour qui la didactique est la science « des conditions et des contraintes de la diffusion (et de la non-diffusion) des praxéologies au sein des institutions de la société » (Chevallard, 2010, p. 137), laissant ouvert de quelle(s) institution(s) il peut s'agir. Notons que Reuter, depuis sa perspective en didactique du français, donne une définition qui limite le champ de pertinence des didactiques à l'institution scolaire et même à l'institution que constitue la discipline scolaire : « disciplines de recherches qui analysent les contenus (savoirs, savoir-faire...) en tant qu'ils sont objets d'enseignement et d'apprentissages, référés/référables à des matières scolaires [...] Plus précisément encore, les didacticiens sont des spécialistes de disciplines scolaires (français, mathématiques, sciences, musique...). » (Reuter, 2007).

Si cette dernière définition peut être problématique¹⁰, elle me semble attirer l'attention sur le fait que la didactique des mathématiques, par son histoire, a relativement moins interrogé sa discipline d'enseignement comme institution, le travail conceptuel sur les disciplines scolaires a plutôt été le fait de didactiques portant sur des disciplines dont la place était moins assurée dans le système scolaire.

Un didacticien peut certes avoir de très bonnes raisons de prendre à son compte les découpages définis par la discipline de référence, notamment s'il travaille essentiellement dans l'axe de travail didactique que Halté (1992) qualifiait d'épistémique (qu'il distinguait des axes psychologique et praxéologique). D'autres didacticiens peuvent cependant argumenter que les questions qu'ils posent renvoient moins à l'épistémologie des contenus qu'à la manière dont ils sont organisés et présentés du point de vue des apprenants ou des enseignants, et qu'en conséquence c'est la manière dont les élèves reconstruisent les disciplines qui leur importe avant tout (position tenue par exemple en Histoire-Géographie par Nicole Tutiaux-Guillon, 2004).

Sur ces questions, l'informatique, avec son statut scolaire incertain, peut être vue comme un révélateur de cette nécessité d'une identification des contenus par le didacticien lui-même, puisqu'aucun des implicites usuels ne fonctionne pour savoir de quoi on parle exactement.

¹⁰ Les « sciences » ne sont précisément pas une discipline scolaire de l'école française, la « musique », c'est « l'éducation musicale » qui est une matière actuelle de l'école française et il existait des chercheurs se revendiquant de la didactique de l'informatique avant que n'existe une discipline associée.

C'est pourquoi j'ai été amené à proposer une définition de la didactique de l'informatique qui met cette question de l'identification en premier : « La didactique de l'informatique est la science qui *identifie* des contenus informatiques d'enseignement/apprentissage, les construit en tant qu'objets scientifiques, et étudie leurs conditions d'élaboration, de diffusion, de structuration et/ou d'appropriation par les différents acteurs d'un système éducatif. » (Fluckiger, 2019). On remarquera que cette définition est restreinte à la diffusion dans un système éducatif et non dans toute institution, ce qui me semble important pour l'informatique bien que je sois conscient qu'il ne s'agit pas de la position de tous les didacticiens. Elle est par ailleurs certes valable pour une didactique dont les contenus ne sont pas préalablement « donnés », mais elle permet aussi de considérer une pluralité de manières d'identifier les contenus, soit par le fait que ce sont des objets d'une discipline savante particulière, soit qu'ils sont identifiés comme tels par les sujets didactiques, par l'institution scolaire, etc. En d'autres termes, elle part de l'idée qu'il n'y a pas une manière unique de délimiter les objets en didactique.

4. Comment les enseignants identifient-ils les contenus ?

Nous avons donc vu qu'il n'y a pas d'évidence, pour un didacticien de l'informatique, à définir et délimiter ses objets d'étude : il est obligé de préciser s'il parle des objets ayant fait l'objet d'un processus transpositif depuis la science informatique, de ce que les programmes ou les manuels désignent comme tel, de ce que les enseignants ou les élèves identifient comme informatique, etc.

Cette difficulté à simplement *dire* ce qu'est l'informatique conduit à une autre piste de recherche : comprendre ce que les enseignants entendent par ce terme, déterminer ce qu'ils identifient comme faisant ou non partie de l'informatique. Dans le vocabulaire de l'Éducation Nationale française, les termes se sont succédés pour désigner peu ou prou le même domaine : l'informatique, l'outil informatique, les TIC, le numérique... Ces variations sémantiques (voir Baron et Boulc'h, 2012) ne contribuent pas à la clarté de ce qu'il y aurait à enseigner aux élèves pour atteindre une culture technique minimum attendue à la fin de l'école primaire ou du secondaire. Il n'est alors guère surprenant que, interrogés sur ce qu'ils *enseignent* sur l'informatique, la plupart des enseignants mentionnent les outils informatisés mobilisés pour enseigner : les tableaux numériques interactifs, tablettes mobiles, etc. L'Éducation Nationale parlant depuis une trentaine d'années d'informatique presque exclusivement comme d'un moyen d'enseignement, les enseignants peinent à y voir un contenu d'enseignement et d'apprentissage.

Il est également révélateur que, lorsque les enseignants identifient des choses *que les élèves apprennent* concernant l'informatique, il s'agisse presque toujours de deux des trois dimensions identifiées précédemment pour les contenus informatiques de l'école :

- La plupart des enseignants évoquent alors des *savoirs d'usages* : taper au clavier, envoyer un courriel, déplacer un document dans une arborescence. Les enseignants disent tous que, contrairement aux discours médiatiques sur les *natifs numériques*, les élèves doivent apprendre tout ce qui concerne ces usages. Pour eux, l'école a pour mission de compenser les inégalités sociales (entre ceux qui ont un ordinateur à disposition et ceux qui n'ont qu'une tablette notamment, voire ceux qui n'ont rien). Mais plus encore, si l'école a cette mission c'est, pour les enseignants interrogés, parce que les élèves auront besoin de ces savoirs d'usages, pour continuer au collège puis dans leur vie professionnelle (plus rarement personnelle). C'est donc bien l'utilité scolaire ou extrascolaire, mais en tous cas les applications extradisciplinaires qui justifient, pour les enseignants, que ces contenus soient enseignés à l'école.

- Bien plus rarement, des enseignants évoquent des connaissances algorithmiques ou de programmation : identifier et répéter un motif, faire une boucle, la notion de variable, etc. Cela est d'autant plus notable que même les enseignants qui mobilisent des outils d'apprentissage de la programmation, soit avec des robots scolaires (type BlueBot ou Thymio), soit avec des outils de programmation comme Scratch, ne mentionnent pas spontanément des connaissances liées à la programmation dans ce que les élèves ont appris.

Pour autant, la dimension qui est la plus minorée dans les discours des enseignants est la dimension technologique. On l'a vu avec l'exemple du système d'exploitation : il arrive que les enseignants parlent de (ou même expliquent) des éléments technologiques, comme la mémoire, les périphériques, etc. Mais ces éléments ne sont pourtant jamais identifiés dans les discours des enseignants comme faisant partie de ce qu'ils enseignent aux élèves : cette dimension est occultée dans les discours comme elle l'est dans assez largement dans les programmes scolaires et dans les discours institutionnels (Vandeveldt et Fluckiger, 2020).

Ainsi, pour un domaine dans lequel les contenus à enseigner ne sont que peu explicités dans les programmes, la question de l'identification des contenus est cruciale. On voit aussi qu'il y a là une conception en partie subjectiviste du contenu : une analyse épistémologique des contenus est nécessaire, pour identifier les enjeux de savoir au regard de la discipline de référence, l'informatique. Mais pour comprendre les conditions et les modalités dans lesquelles ces contenus sont « mis en texte » dans le contexte de la classe, il est nécessaire de tenir compte de la manière dont les sujets didactiques les appréhendent subjectivement. C'est ce que je développe dans la partie suivante de ce texte, en revenant à la notion même de contenu et la manière dont elle a été construite conceptuellement dans le cadre d'un programme pluriannuel de mon laboratoire (voir Daunay, Fluckiger et Hassan, 2015).

IV. RETOUR SUR LA NOTION DE CONTENUS

1. Le choix de la notion de contenu, position par rapport à d'autres propositions conceptuelles

La définition que je donnais précédemment de la didactique de l'informatique, mettant l'*identification* des contenus au centre du travail didactique, accorde également une place centrale à la notion de *contenu d'enseignement/apprentissage*. Cela n'est guère surprenant tant la centration sur les contenus (au sens très général de « ce dont un système didactique peut susciter l'apprentissage par les apprenants du fait d'un enseignement », Daunay, 2015), est constitutive du projet même d'au moins une partie des didactiques. C'est cette place centrale que reconnaît Martinand (Martinand, Reuter et Lebeaume, 2007) lorsqu'il parle de « responsabilité » par rapport aux contenus qu'assume le didacticien ou Romian quand elle juge que « les contenus d'enseignement sont à la didactique ce que le langage est à l'enseignement du français : son objet même. » (Romian, 1990, citée par Ropé, 1990, p. 124).

Cependant, ce qui fait l'objet des recherches en didactique connaît des variations qui ne sont pas que sémantiques : on l'a vu, Brousseau fonde sa définition sur les « connaissances », Schneuwly évoque plutôt des « savoirs » (Schneuwly, 2014, p. 14), alors que d'autres mettent l'accent sur les pratiques, comme Sensevy : « la didactique est la science dont les pratiques d'éducation font l'objet » (Sensevy, 2011, p. 10), ou les praxéologies : « la didactique est la

science des conditions et des contraintes de la diffusion (et de la non-diffusion) des praxéologies au sein des institutions de la société » (Chevallard, 2010, p. 137). Ces distinctions ne sont pas que sémantiques, notamment parce que les « connaissances » existent au sein de situations, contrairement aux « savoirs », qui vivent dans une institution (voir Margolinas, 2014).

Pour traiter des problèmes qui me préoccupent, la notion de *contenu*, pour peu qu'on la prenne au sérieux, présente plusieurs avantages.

En premier lieu et c'est ce sur quoi insiste la définition proposée par Delcambre (2007/2013) que j'ai donnée plus haut, la notion de contenu ne renvoie pas qu'à la dimension cognitive de ce qui s'enseigne et s'apprend, ni à une dimension uniquement pratique, mais aussi à des valeurs, des pratiques, des « rapports à », des comportements (le fair-play peut être un contenu de l'EPS), etc. C'est bien le cas en informatique : à l'école, on peut apprendre des savoirs informatiques (ce qu'est une unité centrale ou une boucle), des savoir-faire, mais aussi, par exemple, une familiarisation technique et pratique (Martinand, 1986 ; Lebeaume et Martinand, 1988) aux objets numériques, qui n'est pas nécessairement celle que développent les enfants dans leurs pratiques numériques et médiatiques extrascolaires. Parler de contenu renvoie à toute la diversité de ce qui peut s'apprendre en informatique à l'école.

Ensuite, le contenu se situe sur le double plan du subjectif et de l'objectif : alors que le savoir est objectivé, dépersonnalisé et décontextualisé (Delcambre, 2007/2013, p. 43), que la connaissance est le « résultat intériorisé de son expérience » (*ibid.*, p.43), le contenu est un objet relationnel, relevant d'une part de la construction sociale, d'autre part de la reconstruction personnelle et *in situ* par les acteurs. La construction sociale renvoie aux phénomènes transpositifs et la notion, sur ce plan, peut être proche de celle de *praxéologie* proposée par Yves Chevallard. Mais ils font aussi, toujours, l'objet d'une reconstruction par les institutions et les acteurs, comme le rappelle Bertrand Daunay :

« Par construction des contenus d'enseignement et de formation, on entend à la fois les processus d'élaboration des contenus d'enseignement et de formation en amont de toute situation d'apprentissage (par les institutions comme par les acteurs) et les processus de construction/appropriation des contenus par les élèves et les formés – ce qui amène à interroger à la fois l'influence réciproque que ces deux processus ont l'un sur l'autre et les distorsions qui peuvent apparaître entre eux. » (Daunay, 2010, p. 2).

Cette remarque, et l'emploi de la notion de *contenu*, ne sont pas gratuits. Considérer que les contenus font l'objet d'une double construction permet d'envisager les deux dimensions, objectiviste et subjectiviste, de ce qui s'enseigne et qui s'apprend et donc de dessiner deux programmes fondamentaux en didactique :

- comment les *contenus* sont construits socialement, reconnus en tant que contenus (Brousseau rappelle que « [e]n didactique ce n'est pas de n'importe quels apprentissages qu'il s'agit, c'est de l'apprentissage des connaissances reconnues par une société comme objet d'enseignement » (Brousseau, 2005, p. 23), et Chevallard insiste sur l'inscription dans une *institution*), font l'objet de processus de transposition, etc. ;
- et comment ils sont appropriés subjectivement. Cette idée découle d'ailleurs du caractère systémique des approches didactiques, puisque, comme le rappelle Daunay, « fondamentalement, ce que l'on décrit, c'est un contenu en interaction avec des sujets didactiques » (Daunay, 2016, p. 124).

Il s'agit là de ce que je perçois comme la principale différence avec la notion de praxéologie, qui insiste (à juste titre) sur la différence entre tâche, technique et technologie, alors que celle de contenu, tout en reconnaissant la variété de ce qui peut faire l'objet d'un enseignement et

d'un apprentissage, met surtout l'accent sur son caractère interactionniste, « non donné d'avance », labile, situé, subjectif autant qu'objectif¹¹.

2. Parler de contenu en didactique de l'informatique : pistes de recherches possibles

On l'a vu, bien des didacticiens parlent des contenus. En didactique de l'informatique, ce n'est pourtant pas une évidence de focaliser l'attention sur ce qui s'enseigne. Il s'agit là d'une conséquence de l'histoire de cette didactique, elle-même liée à l'absence d'une matière qui prenne directement et explicitement en charge de tels contenus. Les chercheurs en didactique de l'informatique se sont davantage intéressés aux « activités » mettant en jeu des outils ou des concepts informatiques. Cette centration sur l'activité a conduit à privilégier des références théoriques psychologiques ou ergonomiques plus que les travaux des autres didactiques, comme ceux de la didactique des mathématiques voisine. Or, comme le rappelle Halté (1992), la composante psychologique n'est qu'une des dimensions des questionnements en didactique. Poser la question des *contenus*, de leurs référents, de leurs modes de constructions, de l'image que s'en font les acteurs, de leurs modes de réappropriation et reconstruction subjective fait également partie des questions didactiques, qui ne sont guère éclairées par les concepts psychologiques (ce qui est bien au cœur de la démarche de Brousseau notamment).

Poser la question des *contenus*, entendus dans le sens défini précédemment, permet d'ouvrir de nouvelles perspectives de recherche en didactique de l'informatique, sans se limiter à une analyse de l'activité d'apprentissage des élèves. Cela permet par exemple de s'intéresser à d'autres espaces, comme les espaces des prescriptions et des recommandations, de ce que Reuter et Lahanier-Reuter (2004) identifiaient comme des « configurations disciplinaires ». Cette notion permet de distinguer la discipline scolaire « en tant qu'elle est *prescrite*, en tant qu'elle est *recommandée*, en tant qu'elle est *représentée* et en tant qu'elle est *actualisée* dans les pratiques (« réelles »), chacun de ces « niveaux » ainsi que leurs relations faisant/pouvant faire l'objet de recherches afin de saisir la *configuration* » (*ibid.*, p. 4-5)...

C'est ce que nous avons fait pour les contenus informatiques prescrits et recommandés à l'école primaire française (Vandeveldt et Fluckiger, 2020). Nous avons analysé les programmes d'enseignement, textes et discours institutionnels et des manuels scolaires. Nous avons cherché à identifier les contenus dans ces espaces, en les indexant à trois dimensions de l'informatique construites en nous appuyant sur les caractérisations épistémologiques de l'informatique de Mirabail (1990), de Bruillard (2009) et de Dowek (2012):

- L'apprentissage du fonctionnement des technologies, par exemple lorsque les programmes scolaires prescrivent de « décrire l'architecture simple d'un dispositif informatique » (MEN, 2015, p. 67) ou qu'un manuel scolaire montre comment des périphériques sont reliés à une unité centrale ;
- L'apprentissage de l'algorithmique, des langages, du code binaire ou d'éléments de cryptographie : « coder et décoder pour prévoir, représenter et réaliser des déplacements dans des espaces familiers, sur un quadrillage, sur un écran » (MEN, 2015b, p. 84) ou la lecture d'un message codé sur un damier à l'aide d'une suite de flèches ;

¹¹ Je dois encore à la relecture que Jean Brun a fait de ce texte de remarquer que dans la conception de Brousseau, on ne peut concevoir de contenu mathématique qu'en situation, car la situation engage un enjeu autour de la connaissance, sinon la connaissance n'est qu'un texte ou une définition. Il me semble que cette conception rejoint celle du contenu portée par l'équipe Théodile-CIREL dans laquelle un contenu ne préexiste pas à la situation, c'est en situation que naît le contenu spécifique, dépendant (aussi) de ce qu'enseignants ou élèves y verront ou y mettront (voir Daunay, Fluckiger et Hassan, 2015).

- L'apprentissage de l'utilisation d'outils informatisés : « écrire avec un clavier rapidement et efficacement » (MEN, 2015, p. 111), ou s'approprier des fonctions simples d'un logiciel de traitement de texte.

Parmi les résultats de cette étude, deux me semblent pouvoir être soulignés ici.

En premier lieu, il existe dans les ouvrages qui peuvent servir de manuels scolaires d'informatique à l'école primaire un lien statistique entre le type de contenus, tel que défini ci-dessus et la modalité pédagogique textuelle/transmissive ou exercice/mise en activité de l'élève :

Type de contenu	Texte	exercice	total
algorithmique	502	193	695
utilisation	180	219	399
technologie	48	28	76
Total	730	440	1170

Tableau1. Tableau croisé : les modalités texte ou exercice en fonction du type de contenu.

On peut constater que les manuels sont majoritairement constitués de textes explicatifs, les exercices étant minoritaires. Les contenus sont par ailleurs très inégalement répartis, puisque la majorité d'entre eux concernent ce que nous avons regroupé derrière le terme d'algorithmique, la technologie étant manifestement sous représentée dans les manuels. Mais surtout, la corrélation est forte entre modalités et type de contenu ($\chi^2 = 73.16$, $df = 2$, $p < 0.001$) : l'algorithmique est surtout présente dans une forme expositive, alors que l'utilisation des ordinateurs et logiciels est davantage présente sous forme d'exercices.

Plus encore, mais les analyses sur ce point sont encore en cours, il apparaît que dans les livres destinés à l'enseignement scolaire de l'informatique pour les élèves les plus jeunes (aux cycles 1 et 2 de l'école primaire), les concepts et notions se réfèrent bien plus souvent au monde non numérique qu'au monde numérique. Par exemple, le concept d'algorithme peut être présenté en montrant une fillette en train de construire une échelle en bois, sous forme de boucle : prendre un barreau, le lier à gauche, le lier à droite et recommencer jusqu'en haut. Une telle présentation doit beaucoup à l'idée qu'il faudrait que les exercices scolaires soient « proches de la vie réelle », qui imprègne par exemple les grandes évaluations comme le PISA (Bart et Fluckiger, 2015 ; Bart et Daunay, 2016). Or, tout le capital des travaux en didactique montre que si un informaticien reconnaît sans problème un algorithme dans cette situation, penser que les enfants feront de même, c'est supposer qu'ils ont déjà conscience de ce qu'est un algorithme, c'est-à-dire qu'ils possèdent déjà les savoirs qui sont l'objet de cet apprentissage. Voir la construction d'une échelle comme un algorithme est bel et bien une construction disciplinaire, ce que pourront réaliser certains élèves, mais pas tous, ce qui risque de renforcer les inégalités scolaires.

V. CONCLUSION

Le comparatisme, en didactique, n'est pas que l'occasion de *croiser* des analyses, dans un sens restrictif du terme. C'est aussi une occasion de renouveler les questionnements sur les objets centraux de chaque didactique et sur la manière de les aborder.

Bien des manières d'interroger l'enseignement de l'informatique qui ont marqué le parcours dont j'ai rendu brièvement compte ici sont en réalité issues... de la didactique du français. Les questions qui s'y posaient sur la manière dont l'organisation en discipline scolaire façonne les apprentissages, m'ont conduit à interroger la manière particulière dont l'informatique était enseignée à l'école, à me demander comme elle jouait dans la manière qu'ont enseignants et élèves de l'aborder, de la concevoir, de se faire une idée de ses finalités, etc.

De même, j'ai la conviction que la diversité des conditions d'enseignement en mathématiques et en informatique permet une *confrontation* et une discussion à nouveaux frais de certaines évidences. Pour des didactiques bien constituées, portant sur des matières installées et légitimes socialement et scolairement, la confrontation avec des travaux didactiques portant sur des contenus moins assurés et épistémologiquement instables peut permettre de faire ressortir le fait qu'il existe toujours une opération d'*identification* des contenus pertinents pour lui. La position consistant à considérer que cette identification procède du travail de la discipline de référence est légitime. Cette position semble d'ailleurs majoritaire en mathématiques, plus que dans d'autres didactiques, qu'elles soient disciplinaires ou se définissent autrement. On peut cependant considérer que pour l'informatique, un simple décalque de cette position ne permet pas d'appréhender certains objets scolaires aux contours moins nets. Par ailleurs, partir d'une position subjectiviste, attentive à ce que les sujets didactiques identifient, ouvre la voie à d'autres questionnements, qui éclairent une autre dimension des apprentissages scolaires : la nature et les modalités de fonctionnement de la discipline scolaire, considérée comme l'institution de diffusion des connaissances informatiques.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- BARON, G.-L. (1987). *La constitution de l'informatique comme discipline scolaire*. Thèse de doctorat, Paris.
- BARON, G.-L., & BOULC'H, L. (2012). Les technologies de l'information et de la communication à l'école primaire. État de question en 2011. *EpiNet*.
- BARON, G.-L., BRUILLARD, É. & DROT-DELANGE, B. (2015). Introduction. In G.-L. Baron, É. Bruillard & Drot-Delange B. (Eds.), *Informatique en éducation : perspectives curriculaires et didactiques* (pp. 11-18). Clermont-Ferrand : Presses Universitaires Blaise Pascal.
- BART, D. & DAUNAY, B. (2016). *Les blagues à PISA. Le discours sur l'école d'une institution internationale*. Vulaines sur Seine : Éditions du Croquant.
- BART, D. & FLUCKIGER, C. (2015). Évaluation, fabrication des contenus et disciplines d'enseignement. In B. Daunay, C. Fluckiger & R. Hassan (Eds.), *Les Contenus d'enseignement et d'apprentissage. Approches didactiques* (pp. 91-102). Bordeaux : Presses Universitaires de Bordeaux.
- BROUSSEAU, G. (1994). Perspectives pour la didactique des mathématiques. In M. Artigue, R. Gras, C. Laborde & P. Tavnigot (Eds.), *Vingt ans de Didactique des mathématiques en France* (pp. 51-66). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- BROUSSEAU, G. (2005). Questions de Gérard Vergnaud. In M.-H. Salin, P. Clanché & B. Sarrazy (Eds.), *Sur la théorie des situations didactiques. Questions, réponses, ouvertures. Hommage à Guy Brousseau* (pp. 18-28). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- BROUSSEAU, G. (2011). La théorie des situations didactiques en mathématiques. *Éducation & didactique*, 5(1), 101-104.
- BRUILLARD, É. (2009). Place de l'informatique dans l'enseignement secondaire, réflexions introductives. In G.-L. Baron, É. Bruillard & L.-O. Pochon (Eds.), *Informatique et progiciels en éducation et en formation* (pp. 21-27). Lyon : INRP.
- BRUILLARD, É. (2014). Une voie pour penser et construire une formation à l'informatique pour les élèves de l'école primaire ?. *STEF, document inédit*.
- CARON, P.A., FLUCKIGER, C., MARQUET, P., PETER, Y. & SECQ, Y. (2020). L'informatique, objets d'enseignements -enjeux épistémologiques, didactiques et de formation. Editorial des actes du colloque. *Colloque Didapro-Didastic 8*, Feb 2020, Lille, France.
- CHAPTAL, A. (2003). *L'efficacité des technologies éducatives dans l'enseignement scolaire. Analyse critique des approches française et américaine*. Paris : L'Harmattan.
- CHERVEL, A. (1977). *... et il fallut apprendre à écrire à tous les petits Français: histoire de la grammaire scolaire*. Paris : Payot.
- CHEVALLARD, Y. (2006). Émanciper la didactique ? La tension entre allégeance « disciplinaire » et scientificité. *Note personnelle de l'auteur, séminaire de l'axe II de l'UMR ADEF*, mercredi 8 février 2006. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Emanciper_la_didactique.pdf.
- CHEVALLARD, Y. (20010). La didactique, dites-vous ?. *Éducation & Didactique*, 4(1), 136-143.

- COHEN-AZRIA, C., LAHANIER-REUTER, D. & REUTER, Y. (2013). *Conscience disciplinaire, Les représentations des disciplines à la fin de l'école primaire*. Rennes : Presses Universitaires de Rennes.
- CUBAN, L. (2001). *Oversold and underused: computers in the classroom*. Cambridge : Harvard University Press.
- DAUNAY, B. (2010). Ouverture du séminaire. *Séminaire MESHS "La construction des contenus d'enseignement et de formation"*, Lille, 18 octobre 2010. https://www.meshs.fr/datas/files/docs/sem/2010-11/ccef_10-10-18.pdf.
- DAUNAY B.(2015). Contenus et disciplines : une problématique didactique. In B. Daunay, C. Fluckiger et R. Hassan (Eds), *Les contenus d'enseignement et d'apprentissage. Approches didactiques* (pp. 19-41). Presses Universitaires de Bordeaux.
- DAUNAY, B. (2016). Quelques réflexions sur le sujet d'une description didactique. *Éducation & didactique*, 10(2), p. 123-136.
- DAUNAY B., FLUCKIGER F. & HASSAN R. (2015). *Les contenus d'enseignement et d'apprentissage. Approches didactiques*. Bordeaux : Presses Universitaires de Bordeaux
- DELCAMBRE, I. (2007/2013). Contenus d'enseignement et d'apprentissage. In Y. Reuter (Ed.), *Dictionnaire des concepts fondamentaux des didactiques*, 3e édition (pp. 43-48). Bruxelles : De Boeck.
- DOWEK, G. (2012). Les quatre concepts de l'informatique. In G.-L. Baron, É. Bruillard et V. Komis (Eds.), *Actes du quatrième colloque international DIDAPRO 4 - Dida&Stic* (pp. 21-29). Athènes : New Technologies Editions.
- DROT-DELANGE, B. (2016). *Internet en éducation : objets de savoirs*. Synthèse pour l'habilitation à diriger des recherches. Clermont-Ferrand, Université Blaise Pascal.
- FLUCKIGER, C. (2008). L'école à l'épreuve de la culture numérique des élèves. *Revue Française de Pédagogie*, 163, 51-61.
- FLUCKIGER, C. (2019). *Une didactique de l'informatique scolaire*. Rennes : Presses Universitaires de Rennes.
- FLUCKIGER, C. & REUTER, Y. (2014). Les contenus "informatiques" et leur(s) reconstruction(s) par des élèves de CM2. Étude didactique ». *Recherches en Éducation*, 18, 64-78.
- GRUGIER, O. (2016). Rencontre avec de nouveaux objets à écrans tactiles à l'école et moments d'éducation technologique. *Sticef*, 23(1), 133-157.
- HALTE, F. (1992). *La didactique du français*. Paris : PUF.
- LAHIRE, B. (1993). *Culture écrite et inégalités scolaires : sociologie de l'« échec scolaire » à l'école primaire*. Lyon : Presses universitaires de Lyon.
- LANG, B. (1998). L'Informatique : Science, Techniques et Outils. *LexiPraxi 98, journée de réflexion sur le thème « Former des citoyens pour maîtriser la société de l'information »*, Paris, Maison de l'Europe, 9 décembre 1998, <http://bat8.inria.fr/~lang/ecrits/ailf/>.
- LEBEAUME, J. (2012). La didactique de la technologie à la croisée des curriculums, des apprentissages et des enseignements disciplinaires, dans une perspective socio-historique générale. In M.-L. Elalouf, A. Robert & M.-L. Bishop (Eds.), *Les didactiques en question(s), Etat des lieux et perspectives pour la recherche et la formation*, Bruxelles (pp. 48-55). Bruxelles : De Boeck.
- LEBEAUME, J. & MARTINAND, J.-L. (1998). *Enseigner la technologie au collège*. Paris : Hachette.
- MARGOLINAS, C. (2014). Connaissance et savoir. Concepts didactiques et perspectives sociologiques ? *Revue française de pédagogie*, 188, 13-2.
- MARTINAND, J.-L. (1986). *Connaître et transformer la matière : des objectifs pour l'initiation aux sciences et techniques*. Berne : Peter Lang.
- MARTINAND J.-L., REUTER Y. ET LEBEAUME J. (2007). Contenus, didactiques, disciplines, formation », *Recherche et Formation*, 55, 107-117.
- MERCIER A., SCHUBAUER-LEONI M., SENSEVY G. (2002). Vers une didactique comparée. *Revue française de pédagogie*, 141, 5-16.
- MIRABAIL, M. (1990). La culture informatique. *ASTER*, 11, 11-28.
- REUTER, Y. (2007). La conscience disciplinaire. Présentation d'un concept. *Éducation & didactique*, 1(2), 57-71.
- REUTER, Y. & LAHANIER-REUTER, D. (2004). L'analyse de la discipline. Quelques problèmes pour la recherche en didactique. *Communication au 9e colloque de l'AIRDF*, Québec, 26-28 août 2004.
- ROGALSKI, J. (1990). Didactique de l'informatique et acquisition de la programmation. *Recherches en didactique des mathématiques*, 9(3), 407-425.
- ROGALSKI, J., (2015). Psychologie de la programmation, didactique de l'informatique, déjà une histoire... In G.-L. Baron, É. Bruillard & B. Drot-Delange (Eds.), *Informatique en éducation : perspectives curriculaires et didactiques* (pp. 279-306). Clermont-Ferrand : Presses Universitaires Blaise Pascal.
- ROPE, F., (1990). Didactique des disciplines. *Recherche & Formation*, 8(1), 123-132.
- SCHNEUWLY, B. (2014). Didactique : construction d'un champ disciplinaire. *Éducation & Didactique*, 1(8), 13-22.
- SENSEVY, G. (2011). *Le sens du savoir. Eléments pour une théorie de l'action conjointe en didactique*. Bruxelles : De Boeck.
- TUTIAUX-GUILLON N. (2004). *L'histoire-géographie dans le secondaire. Analyses didactiques d'une inertie scolaire*. Habilitation à Diriger des Recherches, Université Lyon 2.
- VANDEVELDE, I. & FLUCKIGER, C. (2020). L'informatique prescrite à l'école primaire. Analyse de programmes, ouvrages d'enseignement et discours institutionnels. *Colloque Didapro-Didastoc 8*, Lille, France. <https://hal.univ-lille3.fr/hal-02462385/document>

LA QUESTION DES SAVOIRS DANS LA FORMATION DES ENSEIGNANTS AUX MATHEMATIQUES.

DE L'ANALYSE DES PRATIQUES DE FORMATION A LA SIMULATION INFORMATIQUE EN FORMATION

Fabien EMPRIN

URCA — CEREP (EA 4692)

fabien.emprin@univ-reims.fr

Résumé

Dans cette présentation d'Habilitation à Diriger des Recherches (HDR) la question centrale est celle des savoirs de formation. Le point de départ de ce travail est l'analyse des pratiques de formation à l'enseignement des mathématiques avec les technologies numériques. Cela nous conduit à envisager des scénarios de formation mettant d'abord en jeu de l'analyse de pratiques sur vidéos puis avec des artefacts dont l'usage est familier dans de nombreux milieux professionnels, mais dont l'entrée reste timide en formation des enseignants : les simulateurs informatiques. Ce travail interroge sur la nature des savoirs et connaissances en jeu dans la formation des enseignants. La distinction entre savoirs et connaissances fait l'objet d'un travail spécifique qui conduit à une modélisation permettant l'analyse du système de formation et à en vérifier la fonctionnalité en concevant des situations de formation sur simulateurs. Ce modèle met au jour des questions qui constituent un programme de recherche.

Mots clés : Savoirs de formation, connaissances, pratiques de formation, simulation

I. DE L'ANALYSE DES FORMATIONS A LA QUESTION DES SAVOIRS DE FORMATION

Le point de départ de ce travail, qui nous mènera à la question des savoirs de formation, est l'analyse des pratiques de formation à l'enseignement des mathématiques avec les technologies numériques. Il y a une filiation forte avec le travail pionnier réalisé par Abboud-Blanchard (1994) qui étudiait le plan Informatique Pour Tous (IPT). D'ailleurs Maha Abboud a co-encadré notre thèse de doctorat avec Jean-Baptiste Lagrange sur cette question.

1. L'analyse des pratiques de formation

Pour analyser les pratiques de formation, nous avons utilisé et spécifié à la situation de formation, deux cadres théoriques : la double approche didactique et ergonomique (DADE) (Robert 1999, 2003 et 2005 ; Robert et Rogalski 2002, 2005 ; Rogalski et Robert, 2015) et l'approche instrumentale (AI) (Rabardel 1995, 1999, 2005a et 2005b). Ces deux cadres ont été

développés à l'origine, ou utilisés dans des recherches ultérieures, surtout pour l'analyse des pratiques d'enseignement. Pour la DADE, il s'agit : « de présenter et de justifier un cadrage théorique pour mettre en place des recherches didactiques sur les formations professionnelles des enseignants de mathématiques » (Robert 1999, p 124). L'AI est, quant à elle, utilisée pour analyser l'intégration des outils technologiques dans les pratiques d'enseignement comme cela a été fait par plusieurs chercheurs comme Abboud-Blanchard et Lagrange (2007), Artigue (2002c et 2004), Beguin et Rabardel (2000), Guin et Trouche (2002), Lagrange (1999 et 2000), Trouche (2003 et 2004), en particulier pour l'analyse de l'intégration des Calculatrices Algébriques et Symboliques (CAS).

En spécifiant DADE et AI à la situation de formation, nous postulons que la situation de formation est une forme de situation d'enseignement-apprentissage. La DADE est née dans le contexte de la didactique des mathématiques ce qui pose la question de sa transposition, non seulement à d'autres disciplines, mais également à la situation de formation.

Ce postulat semble raisonnable dans la mesure où la DADE s'est avérée être un cadre robuste, permettant d'obtenir des résultats dans des situations d'enseignement portant sur d'autres champs que les mathématiques. C'est ce qu'a montré le travail de Kermen et Barroso (2013) pour l'enseignement de la chimie ou des recherches auxquelles nous avons participé sur l'analyse des pratiques en technologie (Emprin et Riera, 2014 ; Riera et Al., 2016 ; Philippot et al., 2017), l'analyse des pratiques en ligne sur un portfolio numérique (Connan et Emprin, 2010), l'enseignement d'odontologie (Brunot-Gohin et Emprin, 2012 ; Emprin et Brunot-Gohin, 2019) ou que nous avons encadrées sur les formations continues en ligne (Bisilliat-Donnet, 2017) et la formation des adultes à la vente (Vriet, 2018). Pour illustrer ces résultats, nous prenons l'exemple du projet Domus¹ qui a conduit à la conception du logiciel HOME I/O² et à un travail d'analyse des pratiques des enseignants de technologie.

2. Des résultats sur l'usage de la DADE et de l'AI : l'exemple de HOME I/O

L'enjeu du projet était de concevoir un logiciel, lieu de découvertes et d'expérimentations à la façon des jeux First Person Shooter (FPS) ou encore à la « première personne », pour enseigner l'automatique et la domotique de l'école à l'université. Notre travail a consisté à analyser les pratiques d'enseignement et à comprendre ce que l'introduction d'un tel outil ouvrait comme nouvelles possibilités, mais également quels étaient les freins à son usage en classe. Pour cela le cadre de l'ingénierie didactique (Artigue, 2002a et b) a été appliqué à la situation de formation comme nous l'avons déjà fait (Emprin, 2007). L'ingénierie didactique est basée sur un processus de validation interne : il s'agit donc de confronter des hypothèses a priori, à une expérimentation. Les hypothèses a priori concernaient les usages du logiciel que les enseignants pourraient construire dans la formation, les différents types de genèses instrumentales possibles autour de cet artefact. Un retour sur les hypothèses de départ (Emprin et Riera, 2014 ; Riera et Al., 2016 ; Philippot et al., 2017) a donné des informations sur les pratiques d'enseignement des professeurs de technologie et a permis ainsi de déterminer les leviers de formation professionnelle potentiels à l'usage de cet artefact. Nous avons mis en évidence trois grands types d'instruments construits par les enseignants de technologie : le premier associé à des schèmes d'usages se centrant sur la résolution de problèmes au sein de l'espace virtuel, un autre

¹ Domus est un projet R&D de 36 mois, démarré en octobre 2011, financé en partie par le ministère de l'éducation nationale et mobilisant deux acteurs principaux : le CRÉSTIC de l'université de Reims Champagne Ardenne (Centre de Recherche en Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication - EA 3804) et la société Real Game

² <https://teachathomeio.com>

pour lequel il y a articulation entre réel et virtuel et un troisième où permettant et de construire une expérience de concepts fondamentaux de la discipline comme l'énergie ou le confort.

Dans notre analyse a priori, seul le premier type d'instrument était envisagé et la découverte, lors de la formation, des deux autres, a conduit à des évolutions du logiciel pour le rendre plus compatible avec ces usages et concevoir des nouveaux dispositifs de formation. L'analyse montre également des tensions entre les différentes composantes des pratiques : les enseignants affirment que leur discipline est avant tout centrée sur la construction des savoirs au travers de la résolution de problèmes (composante personnelle et sociale), mais décrivent des pratiques centrées sur la vidéo projection pilotée par l'enseignant des contenus des savoirs (composante médiative). Dans les deux problèmes suivants :

- Je veux 19° de 6 h 30 à 8 h et de 17 h 30 à 22 h. Il fait -5° dehors. Comment faire pour consommer le moins d'énergie possible ? (Quelle température ECO choisir, ouvrir ou fermer les volets, côté soleil ou côté ombre...)

ou

- La maison appartient à un médecin qui, lorsqu'il part en urgence, veut mettre sa maison en sécurité et en économie d'énergie avec un seul bouton (sans entrer de code...)

Ces situations amènent potentiellement les élèves à trouver des démarches permettant d'émettre et de tester des hypothèses, à concevoir des programmes mobilisant les concepts de domotique et d'automatique, éventuellement à travailler à plusieurs et partager la tâche. Cette démarche semble conforme aux critères énoncés dans le paragraphe précédent, caractérisant la manière dont la discipline doit être enseignée. Mais il apparaît que la composante médiative rompt cette cohérence, car les enseignants prévoient des fiches décrivant toutes les étapes de la démarche à suivre, toutes les tâches et sous tâches à réaliser ainsi que les réponses attendues à chacune des étapes afin de pouvoir les donner aux élèves, si besoin.

Ces travaux sur les pratiques enseignantes nous ont amené à nous intéresser à l'analyse du discours. En effet, une grande partie de nos corpus était constituée du discours des enseignants obtenu dans différentes formes d'entretiens ou des échanges enseignants-élèves issus des observations de classe.

3. Un outil d'analyse lexicométrique du discours pour aborder la composante médiative : la méthode Reinert

Rogalski (2006) ou Chappet-Paries (2006) mettent en évidence la place du discours de l'enseignant et le fait qu'il permette une analyse de son activité. En effet, une grande partie de l'activité de l'enseignant consiste en des interactions verbales avec l'élève. Les fonctions du discours « permettent de différencier des relations entre la tâche proposée [par l'enseignant] et les activités possibles attendues [des élèves] », les buts illocutoires « indiquent ce que cherche à produire le contenu du discours » (Chappet-Paries, 2006). Mais les corpus auxquels nous sommes confrontés sont de très grande taille et les analyses de discours nécessitent un travail très important de traitement. Par comparaison Labbé et Labbé (2012, p. 5) montrent qu'un sondage d'opinion avec questions ouvertes les amène à traiter un corpus de 78 813 mots pour 1010 personnes alors qu'en transcrivant les paroles des formateurs et des stagiaires durant seulement 5 formations nous avons obtenu un corpus de 79 298 mots (Emprin, 2007).

Nous avons donc cherché des outils lexicométriques permettant de prétraiter ces données de façon automatique, soit pour dégager des hypothèses, soit pour confirmer des résultats obtenus par un travail de lecture des textes.

Nous avons fait le choix d'utiliser la méthode Reinert (1993) implémentée dans le logiciel Iramuteq³. Les deux hypothèses de base de cette démarche sont que :

- des phrases riches en cooccurrences de mots se situent dans le même « monde lexical » ;
- c'est à la lecture des mots et des phrases qu'ils contiennent que les « mondes lexicaux » feront sens.

En effet « pour pouvoir énoncer, le sujet énonçant doit se représenter ce qu'il va dire dans un certain espace mental (qui lui sert de "référence"). Le choix de cet espace référentiel, de ce "lieu" - qui ne dépend pas forcément d'une opération consciente - implique le choix d'un type d'objet : il implique, par là même, un type de vocabulaire. En conséquence, l'étude statistique de la distribution du vocabulaire dans les différents énoncés d'un corpus doit permettre une discrimination de ce vocabulaire révélatrice des différents choix référentiels effectués par l'énonciateur. » (Reinert, 1993, p. 2)

Le fonctionnement du logiciel est le suivant. L'utilisateur constitue son corpus en associant, à chaque portion de texte, des paramètres tels que la personne qui énonce, son sexe, la date, la question à laquelle il répond, le statut... Ces paramètres permettront d'identifier si certains mondes lexicaux peuvent être reliés à certains de ces paramètres. Le logiciel lemmatise alors le corpus de façon à diminuer le nombre de formes à traiter. Il identifie les lexèmes dans les mots, c'est-à-dire, dans la plupart des cas, son radical. Il découpe le texte en fragments de texte (Unités de Contexte élémentaire) puis constitue un tableau de cooccurrences c'est-à-dire dénombrant dans chaque fragment les présences simultanées de lexèmes. Les logiciels calculent ensuite l'Analyse Factorielle des Correspondances (AFC) (Benzécri, 1973 ; Benzécri & Benzécri, 1984) et cherchent à maximiser l'inertie interclasses. En utilisant une double classification (ascendante et descendante), il est possible d'identifier les classes stables. Les classes stables permettent d'analyser les mondes lexicaux présents dans le discours.

L'analyse des pratiques de formation nécessite d'analyser les échanges lors des formations, les textes institutionnels et les entretiens avec les formateurs, ce qui engendre des corpus textuels importants. La méthode Reinert nous permet de prétraiter ces corpus, de les comparer et de vérifier nos traitements manuels.

4. La simulation informatique pour la formation des enseignants

La combinaison de l'utilisation de la DADE et de l'AI a permis de mettre en évidence des résultats sur les pratiques de formation aux technologies numériques des enseignants de mathématiques. Tout d'abord nous avons mis en évidence une forte personnalisation des contenus de formation qui restent très attachés aux pratiques du formateur. Les formations sont également le plus souvent portées par des enseignants convaincus et passionnés par les technologies qui cherchent à en promouvoir l'usage. Ce résultat confirme une forme de dérive militante déjà mis en évidence par Abboud-Blanchard (1994). De plus nous avons noté, à la suite d'Houdement et Kuzniak (1996) une forte présence de l'homologie qui induit une confusion des genèses instrumentales des enseignants et des élèves. En effet mettre les stagiaires en position d'élèves rend difficile la distinction entre ce que l'élève doit savoir faire avec l'artefact numérique objet de la formation et ce que l'enseignant doit faire en tant qu'enseignant. Enfin nous avons mis en évidence le fait que peu de dimensions des pratiques (au sens de la DADE) étaient réellement questionnées ou abordées dans les formations.

L'ensemble de ces résultats nous a amené à émettre l'hypothèse qu'une formation basée sur l'analyse de pratiques et visant la réflexivité (Schön, 1994) permettrait de répondre à ces difficultés. Pour cela, nous avons développé une ingénierie de formation basée sur l'analyse de

³ Iramuteq : Interface de R pour les Analyses Multidimensionnelles de Textes et de Questionnaires. IRaMuTeQ © 2008-2020 Pierre Ratinaud. Distribué sous les termes de la licence GNU GPL.

pratiques filmées (Emprin, 2007). Cette ingénierie nous a permis de vérifier cette hypothèse, mais nous a amené à questionner le caractère opportuniste des connaissances émergeant de ce travail tel que Rogalki et Robert (2015) l'ont mis en évidence à propos d'une formation de formateurs :

« On voit la justification d'un temps long pour cette formation [formation de formateur basée sur l'analyse des pratiques des formés], dans la mesure où chaque analyse a un caractère opportuniste, dépendant de ce qui sort dans la séance. Sur la durée, l'aléatoire des apports des participants amène à rencontrer suffisamment de thèmes pour donner matière aux participants pour les adaptations dont ils auront besoin pour conduire leurs propres formations d'enseignants »

Les connaissances dépendent de ce qui s'est passé durant les expérimentations qui serviront à l'analyse de pratiques, des formés, de ce qu'ils identifient durant cette analyse, de leur propre expérience et de la capacité du formateur à les identifier en direct.

Pour pallier cette difficulté, nous nous sommes tournés vers des moyens de contrôler les situations qui sont analysées. Au lieu de s'appuyer sur les pratiques des formés ou d'enseignants volontaires nous avons choisi de les faire travailler sur des simulations informatiques. Nous obtenons ainsi une expérience identique pour tous dont nous connaissons les caractéristiques puisque nous les avons déterminées.

Les simulateurs de classe existants ne correspondant pas à nos besoins c'est-à-dire qu'ils ne permettent pas de gérer à la fois les composantes cognitive et médiative des pratiques : ils sont pour la plupart centrés uniquement sur la gestion de classe (attention des élèves, élèves perturbateurs...). Certains comme Simschool permettent de questionner les apprentissages, mais avec des modèles psychologiques et une organisation de classe spécifique aux États Unis. Nous avons donc été amenés à concevoir nos propres outils. D'abord SIC⁴ (Simulateur Informatique de Classe) (Emprin, 2011 ; Emprin et Sabra 2019) puis SAP⁵ (Simulateur d'Analyse de Pratique). Il s'agit dans le premier cas de simuler, Figure 1, la gestion des apprentissages d'une classe de cycle 3 (CM ou 6^{ème}) utilisant un logiciel de géométrie dynamique pour conjecturer puis démontrer une propriété.

⁴ <https://fabien-emprin.pagesperso-orange.fr/SIC/>

⁵ Disponible sous forme d'un parcours M@gistère (plateforme de formation de l'éducation nationale) <https://magistere.education.fr/dgesco/course/view.php?id=1412§ion=1>

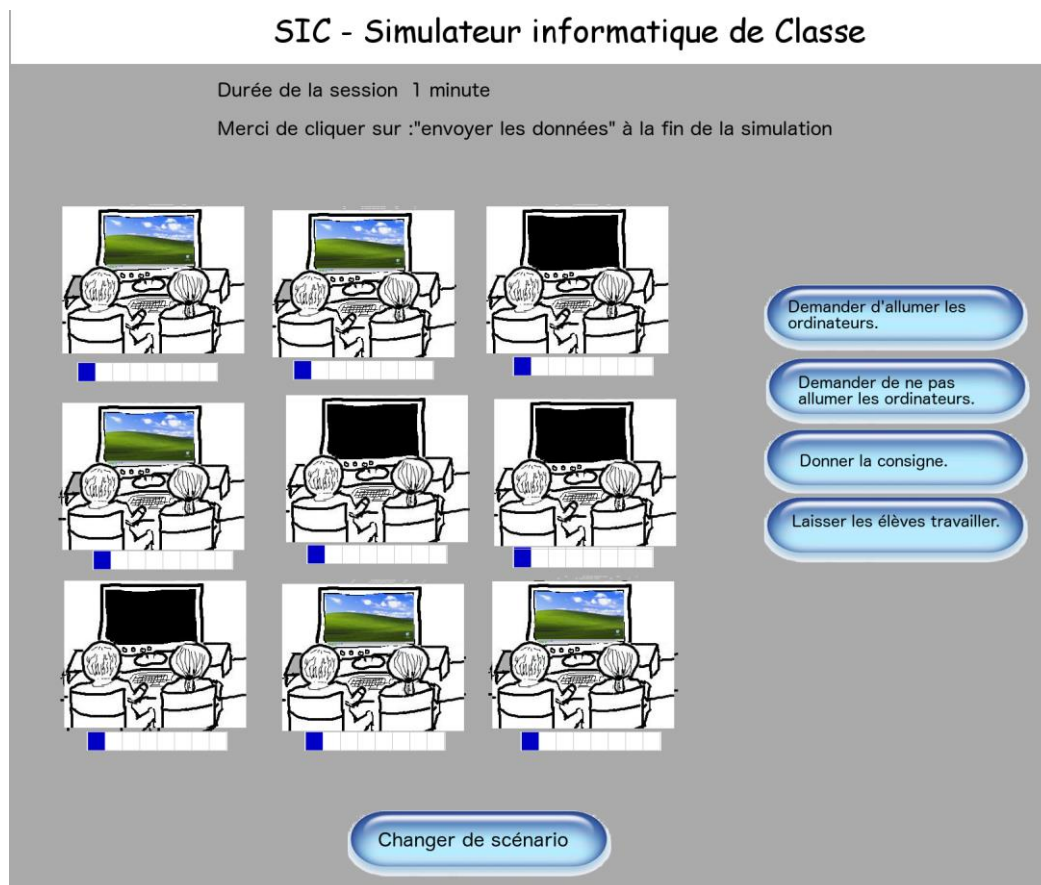


Figure 1 : interface du logiciel SIC

Le second (Figure 2) permet de mener un entretien avec une enseignante de collège autour d'une séance de géométrie en classe 4^{ème} qu'elle vient de mettre en place et dont l'utilisateur a quelques extraits significatifs. SAP n'est pas un simulateur de classe, mais il permet de questionner les pratiques de l'utilisateur en simulant une sorte de controverse professionnelle.

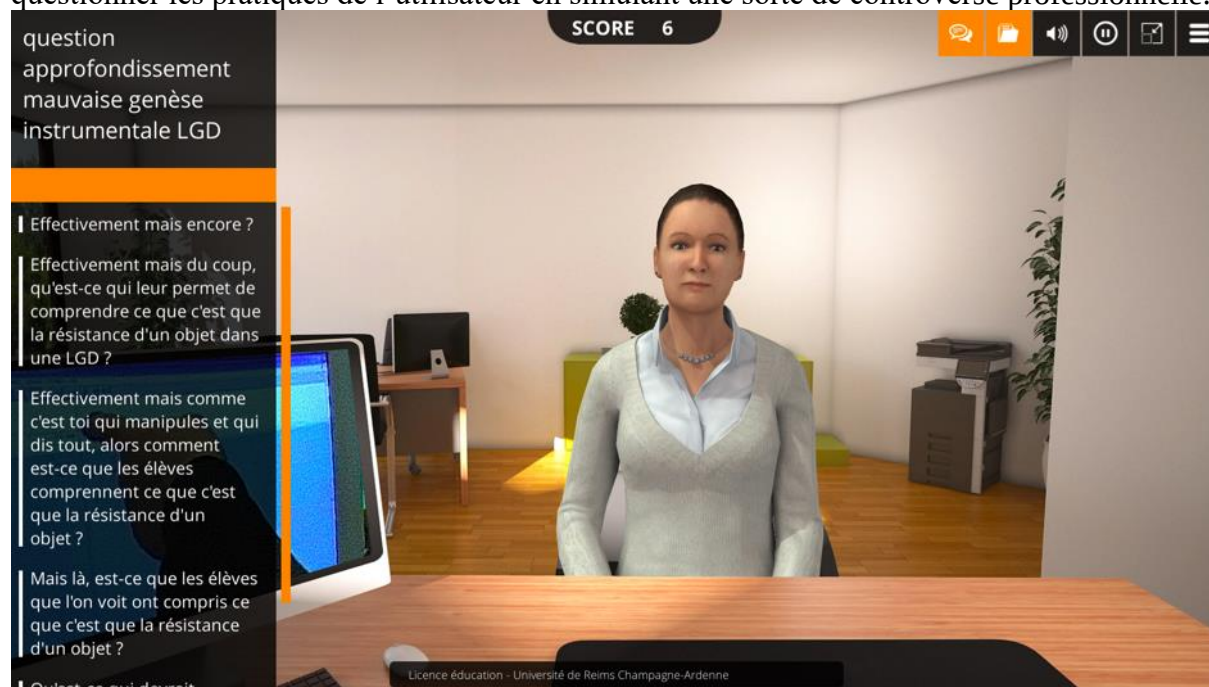


Figure 2 : capture d'écran de la simulation d'analyse de pratiques (SAP)

Ce travail sur les simulateurs nous a également amené à approfondir notre analyse des simulateurs existants et à proposer une grille d'analyse des simulateurs pour l'enseignement (Emprin et Sabra, 2019).

Mais pour concevoir ou analyser un simulateur, il est nécessaire de mettre en évidence de « lois » qui en régissent le fonctionnement. Ce sont ces lois qui sont l'objet de la formation basée sur le simulateur. Ces simulateurs, par leur programmation, rendent donc publics des savoirs et des connaissances (que nous définissons plus précisément dans la partie suivante).

5. La question des connaissances et des savoirs en formation

Cette question des connaissances et des savoirs était déjà sous-jacente au premier postulat de ce travail : si la situation de formation peut être analysée avec les mêmes outils que la situation d'enseignement, quels sont les savoirs en jeu ?

Dans notre travail, cette question se pose à plusieurs niveaux :

- quels savoirs et connaissances doivent avoir les formateurs pour former des enseignants ?
- Quels savoirs et connaissances doivent avoir les enseignants pour enseigner ?
- Quels savoirs et connaissances doivent être transmis par le formateur pour que les enseignants acquièrent les savoirs et connaissances attendus ?

Goodwin et al (2014) mettent en avant que : « Le raisonnement du bon sens veut que la qualité de la formation des enseignants repose sur la qualité des formateurs d'enseignants. Pourtant, on accorde peu d'attention à ce que les formateurs d'enseignants devraient savoir et être capables de faire. Incontestablement, les formateurs d'enseignants ne peuvent pas enseigner ce qu'ils ne savent pas ; mais que devraient-ils savoir, et devraient-ils être préparés ?

[...] Bien qu'il y ait un plus grand consensus sur ce que les enseignants doivent savoir pour bien enseigner aux élèves (cf. Darling-Hammond & Bransford, 2007 ; Interstate Teacher Assessment and Support Consortium, 2011 ; National Board for Professional Teaching Standards, 2013), on ne peut en dire autant d'une base de connaissances pour la formation des enseignants » (Goodwin et al, 2014, p. 284).

Il semble effectivement que la question de ce que les formateurs doivent savoir soit très peu identifiée, mais sait-on vraiment, contrairement à ce qui est énoncé par ces auteurs ce qu'un enseignant doit savoir ?

Dans les référentiels de compétences des enseignants, il est spécifié dans la partie commune à tous les professeurs : « Les professeurs, professionnels porteurs de savoirs et d'une culture commune : Maîtriser les savoirs disciplinaires et leur didactique ». (BO du 25 juillet 2013). Mais si des chercheurs comme Clivaz (2011 et 2014) ont analysé et caractérisé des connaissances mathématiques pour l'enseignant, que sont ces connaissances didactiques attendues ? Les programmes des concours de l'enseignement peuvent aussi laisser entrevoir ce que l'employeur attend de ses futurs agents.

Dans ce contexte, comment savoir ce qu'un formateur doit savoir ? Il existe des référentiels de compétences par exemple aux États-Unis par l'ATE (Association Teachers Educators), aux Pays-Bas (Koster et Dengerink, 2001) ou en Turquie (Celik, 2011).

En examinant le référentiel de l'ATE⁶ on voit, au travers des normes, que le formateur est « un modèle démontrant le contenu et les connaissances professionnelles, les compétences et les

⁶ Toutes les normes citées ont fait l'objet d'une traduction personnelle

dispositions reflétant la recherche, la maîtrise de la technologie et de l'évaluation, et les meilleures pratiques acceptées en matière de formation des enseignants. » (Norme 1) qu'il s'engage « dans la recherche et contribue à l'érudition qui élargit la base de connaissances liée à la formation des enseignants. » (norme 3), qu'il analyse « ses pratiques, a une attitude réflexive et s'améliore et démontre son engagement en faveur du développement professionnel continu. » (norme 4) et enfin qu'il assure « un leadership dans l'élaboration, la mise en œuvre et l'évaluation de programmes de formation d'enseignants rigoureux, pertinents et fondés sur la théorie, la recherche et les meilleures pratiques. »

Il s'appuie donc sur la recherche et doit être capable de montrer, d'illustrer les compétences attendues des enseignants. Pour autant, ces référentiels ne définissent pas des connaissances et savoirs précis attendus du formateur. Cela nous amène à questionner la nature, la constitution et la formulation des savoirs et connaissances dans le système de formation.

II. UNE MODELISATION DE LA SITUATION DE FORMATION ET UNE TYPOLOGIE D'ANALYSE DES SAVOIRS DE FORMATION

Dans un premier temps, nous avons cherché à définir connaissances et savoirs puis à modéliser le système de formation dans sa relation avec les savoirs et connaissances.

1. Les savoirs et les connaissances

Une première distinction entre connaissances et savoirs vient des travaux de Brousseau (1990, p 316) :

« à propos d'une même notion mathématique on peut donc envisager une famille de situations dans laquelle cette notion fonctionne comme une connaissance (situation d'action), une famille de situations où elle figure comme un savoir (par exemple situation de validation), une famille de situations où apparaît l'identification d'un besoin de connaissance et la possibilité de le satisfaire par la communication du savoir correspondant »

que Margolinas (2012, p. 8) spécifie :

« Ce que l'on peut retenir schématiquement de ces distinctions, c'est déjà que la connaissance vit dans une situation, alors que le savoir vit dans une institution. »

Ainsi, faisant suite à notre choix d'assimiler la situation de formation à une situation d'enseignement apprentissage, ces définitions élaborées dans le contexte des mathématiques nous amènent, concernant les savoirs et les connaissances de formation, à rechercher s'il peut être identifié des institutions dans lesquelles vivraient les savoirs de formation et des situations dans lesquelles vivraient les connaissances de formation.

Une seconde approche, proposée par Conne (1992, 2003) défend « l'idée que savoir et transposition vont de pair » ; il donne une définition liée au système d'interaction entre le sujet et la situation : « Lorsque le sujet reconnaît le rôle actif d'une connaissance sur la situation, pour lui, le lien inducteur de la situation sur cette connaissance devient inversible, il sait. Une connaissance ainsi identifiée est un savoir, cette connaissance utile et utilisable, dans ce sens qu'elle permet au sujet d'agir sur la représentation. » (Conne, 1992, p 235)

Cette dernière n'est pas incompatible avec la précédente. Le critère d'utilité du savoir amène également l'auteur à faire bouger les lignes entre savoir et connaissance en définissant, en plus des savoirs savants, des savoirs pragmatiques qui sont des savoirs en situation de deux types : le savoir-faire qui porte sur le résultat de l'action, la transformation de la situation et le savoir-réfléchi qui « réfléchit la manière dont le produit a été obtenu, ne s'arrête pas à produire quelque chose, mais essaye de connaître ce produit ou encore sa production » (Conne, 1992, p 254).

Cela nous amène à émettre comme hypothèse que la typologie suivante pourrait permettre de questionner les savoirs de formation :

- Les savoirs (S) sont institutionnalisés et reconnus dans une institution
- Les savoir-faire (SF) sont des savoirs pragmatiques qui portent sur le résultat de l'action
- Les savoirs réfléchis (SR) sont des savoirs pragmatiques qui portent sur la manière dont le résultat de l'action est produit
- Les connaissances (C) sont locales, attachées à une situation donnée et non identifiées par le sujet comme ayant une utilité plus générale

La question de l'analyse de la situation de formation nous amène donc à nous intéresser à la transposition didactique de ces savoirs.

2. Vers une modélisation de la situation de formation

Nous sommes partis du modèle de la transposition didactique (Chevallard 1982 et 1991) là encore construit dans le cadre des mathématiques pour essayer de voir s'il est possible d'y intégrer le système de formation Figure 3.

L'environnement d'enseignement en bas du schéma fait apparaître un système didactique constitué de triplets enseignant (EE Enseignant en situation d'Enseignement)/savoir/élèves, une noosphère et différents acteurs que sont les mathématiciens, les parents, le Ministère de l'Éducation Nationale... Au sein de cet environnement « La transposition didactique a lieu quand des éléments du savoir savant passent dans le savoir enseigné. » (Chevallard, 1982, p174). Cela pose la question de la définition d'un savoir savant dans le cadre des savoirs de formation.

Pour introduire le système de formation, nous nous appuyons sur le travail d'Houdement (2013, p 10) qui considère « le système de formation comme un système didactique, mais en distinguant deux niveaux », celui de la situation d'enseignement et celui de la situation de formation. C'est en regardant la situation de formation comme une situation d'enseignement particulière (ce qui s'est montré pertinent dans nos travaux antérieurs) dans laquelle les apprenants sont des enseignants (EA Enseignant en situation d'apprenant) que nous mettons en évidence des questions qui pourront éclairer différemment la question des savoirs de formation.

Pour travailler sur les savoirs dans l'environnement de formation, il est alors possible de prendre en compte d'autres systèmes et d'autres acteurs : les systèmes de formation constitués des triplets formateur FE (Formateur d'Enseignants) /savoir (de formation) /enseignant (EA), des nouvelles noosphères et de nouveaux acteurs comme les chercheurs en didactique.

Nous adoptons l'idée de Bloch et Gibel (2011) ou Goigoux (2007) selon laquelle un modèle d'analyse est considéré comme fonctionnel s'il est capable de mettre en évidence des relations et questions qui, une fois investiguées, amènent, pour le chercheur, une meilleure compréhension des phénomènes en jeu dans la situation de formation. Cette efficacité du modèle est vérifiée en le confrontant à l'analyse d'objets réels qu'il est censé modéliser.

Ce schéma complexe est à l'image de la situation à analyser, car de nombreux éléments y sont confondus. Un formateur d'enseignant a souvent été enseignant, il est parfois chercheur ; les

connaissances et les savoirs en jeu dans la situation peuvent donc provenir de l'expérience ou d'autres formations, comme de la recherche. Cela nous amène à formuler deux hypothèses :

- Hypothèse 1 (H1) : il existe des savoirs de formation au sein d'un système de formation qui seraient, au moins en partie, produits par une transposition de savoirs savants issus de la didactique vers des savoirs de formation. Eux-mêmes sont transposés dans la situation de formation vers des savoirs à enseigner aux EA puis vers des savoirs enseignés par les FE aux EA.
- Hypothèse 2 (H2) : une plus grande explicitation des savoirs de formation (H1) favoriserait, en lien avec l'explicitation des compétences professionnelles, la conception de dispositifs de formation et leur mise en œuvre.

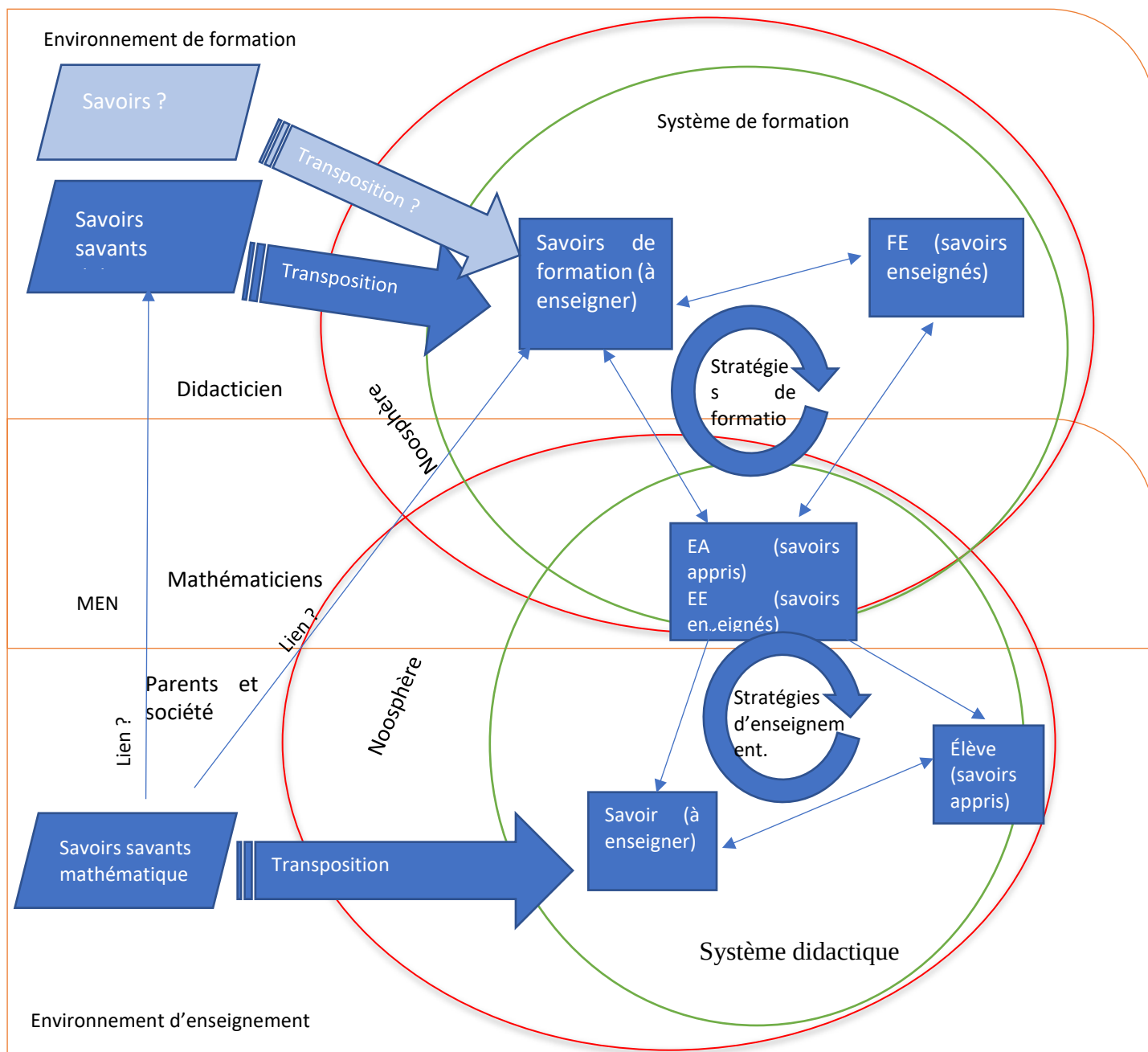


Figure 3 : modélisation de la situation de formation

3. Une typologie des savoirs de l'enseignant

Pour préciser la nature des savoirs de l'enseignant, Bécu-Robinault (2007) propose une typologie issue des travaux de Shulman (1986, 1987) en deux grands types de connaissances : le premier met en jeu les connaissances en lien avec les contenus à enseigner, le second rassemble les connaissances ne relevant pas spécifiquement des contenus disciplinaires. Clivaz (2011, 2014, 2015), Clivaz et al (2012) s'appuient sur une catégorisation dérivée de celle de Shulman (ibid) et de Ball et al. (2008) que Sayac (2012) propose de spécifier au contexte français (Figure 4).

SAVOIRS DE FORMATION		
Savoirs disciplinaires		Savoirs transversaux
D1 : relatifs aux connaissances mathématiques pures et aux savoirs épistémologiques	D3 : savoirs relatifs à la didactique des mathématiques	T1 : relatifs aux gestes professionnels du métier d'enseignant
		T2 : relatifs aux connaissances portant sur les élèves et sur les apprentissages
D2 : relatifs à la construction de programmations, de progressions par cycle...		T3 : relatifs aux programmes et aux instructions officielles

Figure 4 : spécification de la définition des savoirs de formation (Sayac, 2012, p 121)

L'ensemble de ces catégorisations permettent d'isoler les savoirs spécifiques aux contenus d'enseignement (D1 et D2) ou encore relatifs à la didactique des mathématiques (D3). Pour décrire de façon plus précise encore ces derniers, je propose de faire une nouvelle catégorisation. Il s'agit de mettre au jour des S, SF, SR, et C didactiques c'est-à-dire portant sur les mathématiques issues de la transposition ou sur la transposition elle-même, sur la relation de l'élève aux objets spécifiques d'enseignement des mathématiques, obstacles épistémologiques, didactiques... qui ne sont pas de l'ordre de la pédagogie⁷ ; sur les processus d'enseignement apprentissage. On retrouve ici les trois côtés du triangle didactique tout comme les préoccupations du système d'enseignement de Cohen, Raudenbush, & Ball (2003). Les flèches en gras dans la Figure 5 correspondent aux éléments que nous venons de décrire et que nous cherchons à analyser.

⁷ Le terme pédagogie est utilisé au sens où l'utilisent Clivaz (2011) ou Clivaz et al. (2012) et Ball et Al. (2008) c'est-à-dire pour désigner tout ce qui n'est pas spécifique à un contenu

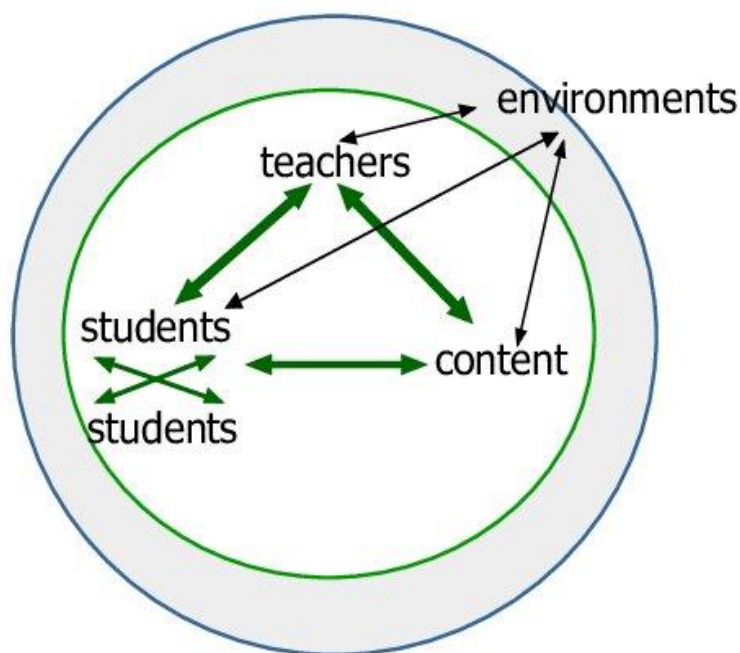


Figure 5 : The instructional triangle (Cohen, Raudenbush, & Ball, 2003)

En ajoutant la dimension technologie numérique, on obtient la catégorisation suivante des S, SF, SR et C :

- du thème de l'enseignement
 - mathématiques
 - technologiques : maîtrise des outils numériques, informatiques, algorithmiques et méthodes numériques.
- didactiques
 - mathématiques à enseigner (issus de la transposition didactique ou sur la transposition elle-même)
 - des élèves, des obstacles épistémologiques, didactiques spécifiques à l'apprentissage des élèves en mathématiques
 - sur les processus d'enseignement apprentissage (situations...)
 - des élèves et des obstacles à l'utilisation des technologies, connaissances sur les genèses instrumentales des élèves
 - sur les pratiques avec les technologies à et pour enseigner
 - des élèves et des processus généraux d'apprentissages (psychologie, sociologie...)
 - des élèves face aux technologies (aspects STIC – sciences et techniques de l'information et de la communication)

Un des enjeux des travaux à venir sera de vérifier la validité d'une telle typologie sur les savoirs pour enseigner les mathématiques. Le même travail peut être réalisé pour les savoirs des formateurs.

4. Vers une typologie des savoirs et connaissances pour former.

Si former c'est transmettre les savoirs et connaissances pour enseigner, les savoirs et connaissances pour former portent sur les 3 dimensions : mathématique, didactique et pédagogique. J'obtiens donc la typologie suivante, en incluant la dimension technologique des S, SF, SR et C :

- du thème de la formation
 - des mathématiques
 - didactiques des mathématiques
 - pédagogiques
 - technologiques des technologies
- de formation
 - des mathématiques que doit connaître un enseignant (Clivaz, 2011 et 2014) (issus de la transposition didactique ou sur la transposition elle-même). Ces derniers ne sont pas nécessairement ceux que doit connaître un élève.
 - de didactique des mathématiques que doit connaître un enseignant (issus de la transposition didactique ou sur la transposition elle-même).
 - pédagogiques que doit connaître un enseignant, issus de la transposition didactique ou sur la transposition elle-même.
 - des enseignants, des obstacles épistémologiques, didactiques spécifiques au choix des situations d'apprentissage des mathématiques. Il s'agit là de S, SF, SR et C sur la façon dont les enseignants peuvent apprendre les concepts nécessaires pour enseigner. Si on prend l'exemple de l'apprentissage de l'enseignement de la géométrie, on peut retrouver des travaux sur les difficultés en géométrie des enseignants-débutants : en Espagne « conception of school geometry is that it is a difficult subject. » (Barrantes et Blanco 2006, p 425), en Grande-Bretagne, « initial findings from one particular institution, gathered over four years, indicate that geometry is the area of mathematics in which trainees perform most poorly in initial baseline tests. » (Jones et al., 2002) ou en France (Houdement et Kuzniak, 1996). Ces travaux fournissent des éléments au formateur pour construire des dispositifs de formation s'appuyant sur les connaissances et les difficultés mathématiques des enseignants. Cela nécessite également d'identifier quelles mathématiques un enseignant doit connaître pour enseigner. Les travaux de Ma (1999) ou Clivaz (2011 et 2015) proposent des réponses sur des thèmes précis.
 - des enseignants et des obstacles à l'utilisation des technologies en classe, connaissances sur les genèses instrumentales des enseignants. Les travaux sur les difficultés d'appropriation des technologies numériques sont nombreux, par exemple (Lagrange et Grugeon, 2003).
 - des enseignants, des obstacles épistémologiques, didactiques spécifiques à la formation de la didactique. Il s'agit là de questionner les processus d'appropriation des S, SF, SR C didactiques par l'enseignant. Définir ce qu'il doit savoir sur la didactique pour enseigner et quels sont les obstacles à cet enseignement.
 - des enseignants, des obstacles épistémologiques, didactiques spécifiques à la formation de la pédagogie.
 - sur les processus de formation (situations...). C'est en particulier le travail que nous avons mené en analysant les stratégies de formation ou les travaux de Houdement et Kuzniak (1996 et 1998), Houdement (2013) ou Vergnes (2001). À ce niveau, les connaissances portent sur les organisations praxéologiques pour la formation, les tâches, types de tâche, techniques, technologies et théories. Ce niveau d'analyse relie donc plusieurs autres niveaux : S, SF, SR, C sur le thème de la formation, mais aussi sur la formation d'adultes.

- des enseignants et des obstacles à la formation des enseignants aux technologies. Ce point a été analysé par Abboud-Blanchard (1994), Emprin (2007), (Abboud-Blanchard et Emprin, 2010).
- sur la formation d'adultes.
- des élèves et des processus généraux de formation (psychologie, sociologie, didactique professionnelle, ergonomie, clinique de l'activité...).
- des enseignants face aux technologies (aspects STIC – sciences et techniques de l'information et de la communication).

La construction de cette typologie, à partir des travaux en didactique des mathématiques, fait apparaître un nouveau champ, celui de la formation d'adultes. L'adulte en formation, que ce soit l'étudiant à l'université, le fonctionnaire stagiaire, le professionnel en formation doivent être considérés avec leurs spécificités. La didactique professionnelle (Pastré, Mayen et Vergnaud, 2006) ou le travail sur les processus de professionnalisation⁸ montrent que des travaux existent pour appréhender ces différentes dimensions des S et C et ouvrent de nouvelles pistes de travail.

Une piste de travail est ouverte par ce travail théorique d'analyse : la vérification de la validité d'une telle typologie et l'analyse des savoirs et des connaissances pour former des enseignants.

Toutes ces définitions s'intéressent aux savoirs et connaissances pour enseigner et pour former. Le problème est que les savoirs de formation sont mal connus et mal définis. Il me semble nécessaire de regarder plus spécifiquement la nature de ces savoirs.

Cette modélisation et les typologies des savoirs nous permettent d'ouvrir de nouvelle perspective d'analyse ce qui nous offre la possibilité de vérifier son aspect fonctionnel conformément à ce que nous avons énoncé au paragraphe 2.

III. PERSPECTIVES, QUESTIONS ET POINTS DE VIGILANCE

Le travail sur les pratiques de formation des enseignants et en particulier les simulateurs de pratique nous a amené à questionner les savoirs de formation, à construire un modèle du système de formation et à construire une typologie des savoirs. Il s'agit maintenant de tester les hypothèses qui en découlent, c'est-à-dire l'existence de tels savoirs produits par un processus de transposition (H1) et l'impact de la mise au jour de ces savoirs sur la compréhension des pratiques de formation (H2).

1. Comment accéder à ces savoirs ?

Il est possible d'accéder à ces savoirs par l'intermédiaire des textes produits pendant, par et pour les dispositifs de formation.

Ce texte du savoir est potentiellement présent dans les programmes de formation, les syllabus des cours (quand ils existent). Il est aussi analysable dans l'analyse des formations par l'observation des traces orales ou écrites. Sayac (2012) a réalisé une étude auprès de six formateurs en IUFM (Instituts Universitaires de Formation des Maîtres) en 2008-2009. En s'appuyant sur la double approche pour analyser les pratiques de formation, elle analyse les

⁸ De nombreuses références permettent de définir ce terme. Il n'est pas question d'engager plus avant le travail sur cette question, nous ne citerons donc que Wittorski (2008) qui traite de la professionnalisation des formateurs

stratégies de formation avec la typologie d'Houdement et Kuzniak (1998) et utilise la double approche pour accéder aux pratiques. Mais ces savoirs sont aussi accessibles dans plusieurs revues professionnelles et actes de colloques de formateurs en mathématiques (Houdement, 2013). Des méthodes d'observation, d'entretien, d'analyse du travail, d'analyse de texte sont alors envisageables.

Un second axe de travail porte sur l'analyse de la production des savoirs qui font l'objet de la transposition dans le système de formation. Il existe plusieurs lieux potentiels de production : la communauté des chercheurs en didactique des mathématiques et la communauté de formateurs. Ces deux communautés sont distinctes, mais leur intersection est non vide : de mêmes individus appartiennent aux deux communautés, mais les lieux dans lesquels sont validés et rendus publics les savoirs (colloques, revues) sont différents.

Pour la communauté des chercheurs, les revues sont par exemple identifiées et classées (Toerner et Arzarello, 2012) et les communications dans les colloques internationaux dédiés à la recherche font l'objet de publication dans des actes ou des rapports comme les ICMI studies.

Pour la communauté des formateurs de mathématiques, des structures existent explicitement avec les IREM (Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) et les commissions inter-IREM comme la COPIRELEM pour le premier degré ou la CORFEM pour le second. Des colloques avec actes, mais également des revues spécifiques comme Grand N, Petit x (Irem de Grenoble) ou repère IREM permettent également d'accéder en partie aux savoirs produits au sein de ces communautés.

Pour mieux comprendre comment se constituent ces savoirs, nous nous posons la question de leur épistémologie. Nous adoptons comme définition de l'épistémologie celle de (Piaget, 1967) qui amène à poser trois questions : la question gnoséologique : qu'est-ce que la connaissance ? La question méthodologique : comment est-elle constituée ou engendrée ? Comment est appréciée la valeur ou la validité de cette connaissance ? Cela amène la caractérisation de l'enquête épistémologique par les questions suivantes : qu'est-ce qu'une connaissance ? Comment est-elle produite ? Comment est-elle validée ? Sur quoi se fonde-t-elle ? Comment les connaissances sont-elles organisées ? Comment progressent-elles ?

Concrètement, cela peut se faire par l'analyse des revues scientifiques et/ou de formation avec la typologie des savoirs que vous avons produite pour repérer l'émergence des savoirs, leur évolution, leur structuration (relations entre eux...). S'agissant de données textuelles massives, l'utilisation d'outils comme Iramuteq permettra de rendre ce corpus accessible à certaines analyses.

De même, l'analyse des programmes de formation permet de comprendre l'évolution des contenus de formation dans le temps et dans l'espace (entre les différents centres de formations, ou différents pays).

Enfin, l'analyse des composantes personnelle, sociale et institutionnelle des pratiques de formation peut donner accès aux processus de transposition, à la façon dont les savoirs sont produits et validés.

2. Quelles sont les difficultés ?

Puisque nous avons mis en évidence la forte personnalisation des contenus de formation quand il s'agit de technologie numérique, le risque est d'avoir des difficultés à dégager des invariants dans les processus de transposition entre savoir savant de formation, savoir de formation et savoir pour enseigner.

La seconde difficulté réside dans le processus de production des connaissances en sciences humaines. Comment ces connaissances sont-elles produites, validées ? Y a-t-il une dimension cumulative de la construction des connaissances ?

De plus, il y a une double complexité : les systèmes sont non seulement imbriqués : apprentissage des élèves/enseignement/formation, mais les acteurs ont des rôles variables dans les différents systèmes. Les statuts des formateurs sont multiples et évoluent au fil de leur carrière PRAG/PRCE (Professeur agrégé ou certifié de mathématiques enseignant dans l'enseignement supérieur), personnels concevant une part d'enseignement en établissement et une part de temps de formation ($\frac{1}{2}$ DR - délégation rectorale), PEMF (Professeurs des Écoles Maître formateur, enseignant spécialisé ayant une part de leur temps de travail dédié à la formation), Enseignants chercheurs en didactique des mathématiques ou en mathématiques... En fonction de leur statut, les formateurs jouent des rôles différents dans le système de formation.

3. Des savoirs vers les simulateurs

L'analyse des savoirs de formation se fait par et pour les dispositifs de formation notamment dans le cadre des ingénieries didactiques pour le développement et la formation (Perrin-Glorian, 2019). Cette analyse des savoirs peut donc permettre de concevoir de nouveaux outils de formation par simulation.

Cela pose alors la question de l'écart entre les pratiques ordinaires et pratiques souhaitées en lien avec la Zone Proximale de Développement Professionnel (ZPDP) (Abboud et Robert, 2015). Est-ce que les savoirs de formateur identifiés peuvent être transmis aux enseignants, à tous les enseignants ? Est-il souhaitable d'implémenter des simulations qui permettent de développer des pratiques identifiées par la recherche comme pertinentes et prometteuses ou de réfléchir sur les pratiques ordinaires existantes ?

Cela pose également la question de la formation du formateur. Que doit savoir le formateur ? Quel est le rôle des formateurs et des chercheurs dans le développement de nouveaux scénarios de formation ?

Notre hypothèse est qu'il faudrait concevoir des outils permettant aux formateurs de développer leurs propres simulations. Le modèle de LessonSketch (Herbst et al., 2019) nous paraît prometteur sur ce sujet, car il permet de partager des scénarios d'enseignement, des mutualiser le développement des différentes branches du scénario, d'annoter et de commenter les scénarios. En amenant les formateurs à concevoir et annoter des simulations, il est ainsi possible d'accéder aux savoirs de formation visés tout en produisant des outils de formation.

4. Points de vigilance et conclusion

Les savoirs didactiques n'ont pas le même statut et le même rôle pour l'enseignant, pour le formateur, pour le chercheur. Ces différentes postures sont à prendre en compte et nécessitent un travail spécifique pour donner une cohérence aux regards portés à tous les niveaux. Quand il se place en position de concepteur de simulation, le chercheur adopte une nouvelle posture qui là encore nécessite une vigilance importante par rapport aux pratiques simulées et à l'usage du simulateur. Les pratiques simulées sont nécessairement réductrices et les cadres théoriques que nous avons mobilisés découpent la pratique. Là encore, un travail de recomposition est nécessaire.

Le fait de travailler sur les technologies numériques dans les pratiques enseignantes peut provoquer un effet loupe, c'est-à-dire amplifier ou révéler certains aspects des pratiques. En

contraignant certaines médiations, élèves — savoir ou enseignant - élève l'artefact numérique peut permettre de mieux identifier des aspects des composantes médiative et cognitive. Par exemple le travail de démonstration basée sur la géométrie dynamique : conjecture sur le logiciel puis démonstration sur papier peut questionner le contrôle, la preuve et la démonstration (Balacheff, 2017). Il faut également vérifier que cette loupe ne soit pas déformante. En effet, l'artefact numérique peut également modifier les pratiques et les observations réalisées peuvent alors être spécifiques aux usages du numérique.

Le travail sur les savoirs de formation nous a amené à mobiliser de nombreux cadres théoriques. Cette pluralité des approches est apparue comme nécessaire, mais pose la question de la compatibilité épistémologique des cadres qui sont associés. Pour limiter ce risque, nous avons placé au cœur de notre travail, le cadre de la didactique des mathématiques et en particulier celui de la DADE. Les autres cadres sont utilisés pour nourrir les analyses des différentes composantes de la DADE. Les savoirs non disciplinaires que nous avons qualifiés provisoirement de pédagogiques sont eux aussi questionnés à l'aune de la didactique des mathématiques. De même, les autres contextes disciplinaires comme l'odontologie, l'automatique etc, nourrissent la question des pratiques et des savoirs et permettent de dégager des invariants et des variations.

Pour conclure, la question de la définition et de l'analyse des savoirs de formation peut amener à celle de l'identification de savoirs de référence. Cela peut évoquer la question des « bonnes pratiques » soulevée dans d'autres pays comme les États-Unis (voir le cadre de l'ATE décrit au § 5). L'exemple ci-dessous, d'un élève qui raconte un de ses souvenirs d'école peut être éclairant sur cette question :

« Je me rappelle encore la première “composition de maths”, où le prof m’a collé une mauvaise note, pour la démonstration d’un des “trois cas d’égalité des triangles”. Ma démonstration n’était pas celle du bouquin, qu’il suivait religieusement. Pourtant, je savais pertinemment que ma démonstration n’était ni plus ni moins convaincante que celle qui était dans le livre et dont je suivais l’esprit, à coups des sempiternels “on fait glisser telle figure de telle façon sur telle autre” traditionnels. Visiblement, cet homme qui m’enseignait ne se sentait pas capable de juger par ses propres lumières (ici, la validité d’un raisonnement). Il fallait qu’il se reporte à une autorité, celle d’un livre en l’occurrence. Ça devait m’avoir frappé, ces dispositions, pour que je me sois rappelé de ce petit incident »

Sans aller jusqu'à définir de bonnes pratiques il est clair que les pratiques évoquées ci-dessus prennent le risque de démobiliser l'élève. Il s'avère que pour cet élève en particulier cela ne l'a pas empêché de faire des mathématiques puisqu'il s'agit d'un extrait du livre « Récoltes et semailles » (Grothendieck, 1985). Pour autant refuser une démonstration correcte parce qu'elle n'est pas celle qu'avait envisager l'enseignant est contraire au fonctionnement des mathématiques et pourrait, sans doute, rebuter bien des élèves. Ainsi si le travail sur les savoirs de formation ne vise pas à identifier des « bonnes pratiques » enseignantes et des « bonnes pratiques » de formation, il doit permettre d'améliorer les pratiques des enseignants et in fine les apprentissages des élèves.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- ABBOUD-BLANCHARD, M. (1994). L'intégration de l'outil informatique à l'enseignement secondaire : symptômes d'un malaise, Thèse de doctorat, Université Paris VII.
- ABBOUD-BLANCHARD, M. & EMPRIN, F. (2010). Pour mieux comprendre les pratiques des formateurs et de formations TICE. *Recherche et formation*, 62, 125-140.

- ABBOUD-BLANCHARD, M. & LAGRANGE, J. B. (2007). Uses of ICT by Pre-service Mathematics Teachers: Towards a Professional Instrumentation ?. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, 13(4), 183-190.
- ABBOUD, M. & ROBERT, A. (2015). Former des formateurs d'enseignants de mathématiques du secondaire : un besoin, une expérience et une question d'actualité. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives, Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de Paris (IREM)*, 181-206.
- ARTIGUE, M. (2002A). Ingénierie didactique : quel rôle dans la recherche en didactique aujourd'hui, *Revue Internationale des Sciences de l'éducation*, 8, 59-72.
- ARTIGUE, M. (2002B). Quelques leçons des ingénieries didactiques, In D. Guin & L. Trouche (eds), *Calculatrices symboliques, faire d'un outil un instrument du travail mathématique : un problème didactique*, Grenoble : La Pensée Sauvage.
- ARTIGUE, M. (2002C). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International journal of computers for mathematical learning*, 7(3), 245.-274
- ARTIGUE, M. (2004). L'enseignement du calcul aujourd'hui : problèmes, défis et perspectives. *Repères IREM*, 54, TOPIQUES éditions, 23-39.
- BALACHEFF, N. (2017). Contrôle, preuve et démonstration. Trois régimes de la validation. In *Séminaire national de didactique des mathématiques*, IREM de Paris-Université Paris Diderot, 8, 423-456.
- BALL, D. L., THAMES, M. H. & PHELPS, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407. Consulté le 27/02/19, dans <http://jte.sagepub.com/cgi/content/abstract/59/5/389>
- BARRANTES, M. & BLANCO, L. J. (2006). A study of prospective primary teachers' conceptions of teaching and learning school geometry. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9(5), 411-436.
- BECU-ROBINAULT, K. (2007). Connaissances mobilisées pour préparer un cours de sciences physiques. Aster.
- BEGUIN, P. & RABARDEL, P. (2000). Concevoir pour les activités instrumentées. *Revue d'intelligence artificielle*, 14(1-2), 35-54.
- BENZECRI J.-P. & BENZECRI F. (1984). Pratique de l'analyse des données. Analyse des correspondances et classification. Exposé élémentaire. 2e éd. Dunod, Paris,
- BENZECRI, J.-P. (1973). *L'analyse des données (Vol. 2)*. Dunod Paris.
- BISILLIAT-DONNET, F. (2017). Quelles pratiques de formation sont en jeu dans les formations à distance ? Analyses dans le cadre de la formation continue des enseignants du premier degré. Mémoire de master — Université de Reims. (DUMAS-02188755)
- BLOCH, I. & GIBEL, P. (2011). Un modèle d'analyse des raisonnements dans les situations didactiques : étude des niveaux de preuves dans une situation d'enseignement de la notion de limite. *Recherches en didactique des mathématiques*, 31(2), 191-228.
- BROUSSEAU, G. (1990). Le contrat didactique : le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(9,3), 309-336.
- BRUNOT-GOHIN, C. & EMPRIN, F. (2012). Virtual course in dental prothesis: e-learning place in primary dental education, *Association for Dental Education in Europe 2012 (AMEE, Lyon, 24-29/08/2012)*
- CELIK, S. (2011). Characteristics and competencies for teacher educators: Addressing the need for improved professional standards in turkey. *Australian Journal of Teacher Education*, 36(4), 73-87.
- CHAPPET-PARIES, M. (2006). Une analyse des interactions élèves-professeurs en classe, dans des recherches sur les pratiques des enseignants. *Les méthodes de recherche en didactiques*, 159-171.
- CHEVALLARD, Y. (1982). Pourquoi la transposition didactique. Communication au Séminaire de didactique et de pédagogie des mathématiques de l'IMAG, Université scientifique et médicale de Grenoble. Paru dans les *Actes de l'année 1981-1982*, 167-194.
- CHEVALLARD, Y. (1991). *La transposition didactique*. Grenoble : La pensée sauvage.
- CLIVAZ, S. (2011). Des mathématiques pour enseigner, analyse de l'influence des connaissances mathématiques d'enseignants vaudois sur leur enseignement des mathématiques à l'école primaire. Thèse de doctorat. Université de Genève. Genève. Consulté le 26 décembre 2011, <http://archive-ouverte.unige.ch/unige:17047>.
- CLIVAZ, S. (2014). Des mathématiques pour enseigner ? Quelle influence les connaissances mathématiques des enseignants ont-elles sur leur enseignement à l'école primaire ?. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- CLIVAZ, S. (2015). Des mathématiques pour enseigner ? Quelques réflexions à partir d'un cas de combinaison de cadres théoriques. Dans L. Bacon, D. Benoit, C. Lajoie et I. Oliveira (Eds.), *Croisements variés de concepts, d'approches et de théories : les enjeux de la création en recherche en didactique des mathématiques*. Colloque du groupe de didactique des mathématiques du Québec 2014. 1-10. <http://hdl.handle.net/20.500.12162/468>
- CLIVAZ, S., PROULX, J., SANGARE, M. S. & KUZNIAK, A. (2012). Articulation des connaissances mathématiques et didactiques pour l'enseignement. Pratiques et formation. *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle-Actes du colloque EMF 2012*, Geneva, 155-172.

- CONNAN, P.-Y. & EMPRIN, F. (2011). Le portfolio numérique : quelles évolutions des usages et des représentations chez les formateurs d'enseignants ? *Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication pour l'Éducation et la Formation*, 18, 229-262 ; doi : <https://doi.org/10.3406/stice.2011.1025>
- COHEN, D. K., RAUDENBUSH, S. W. & BALL, D. L. (2003). Resources, instruction, and research. *Educational evaluation and policy analysis*, 25(2), 119-142.
- CONNE, F. (1992). Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 12(2,3), 221-270.
- CONNE, F. (2003). Interactions de connaissances et investissement de savoir dans l'enseignement des mathématiques en institutions et classes spécialisées. *Éducation et francophonie*, 31(2), 82-102.
- COUNCIL OF CHIEF STATE SCHOOL OFFICERS. (2011, APRIL). Interstate Teacher Assessment and Support Consortium (InTASC) Model Core Teaching Standards: A Resource for State Dialogue. Washington. Cité par (Goodwin et al., 2014).
- DARLING-HAMMOND, L. & BRANSFORD, J. (EDS.). (2007). *Preparing teachers for a changing world: What teachers should learn and be able to do*. John Wiley & Sons. Cité par (Goodwin et al., 2014).
- EMPRIN, F. (2007, DECEMBRE 14). Formation initiale et continue pour l'enseignement des mathématiques avec les TICE : cadre d'analyse des formations et ingénierie didactique. (Université Paris-Diderot - Paris VII). Consulté à l'adresse <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00199005>
- EMPRIN, F. (2011). Construction d'un Simulateur Informatique de Classe (SIC) pour la formation des enseignants. In M. Bétrancourt, C. Depover, V. Luengo, B. De Lièvre & G. Temperman (Eds.), *Conférence EIAH 2011 (Environnements Informatiques pour l'Apprentissage Humain)*. Mons, Belgique : Éditions de l'UMONS — ATIEF (Association des Technologies de l'information pour l'Éducation et la Formation), 409-422.
- EMPRIN, F. & BRUNO-GOHIN, C. (2019). Concevoir une e-formation en Odontologie : de la réflexion à la mise en œuvre, *Cahier de la prothèse*, Éditions EDP, 188, 312–321.
- EMPRIN, F. & RIERA, B. (2014). Process of creating educational uses by teachers from a 3D simulation of a house home automation to teach technology. In G. Futschek & C. Kynigos (Eds), *Proceedings of the 3rd international constructionism conference*, (August 19-23, 2014). Vienne, Autriche : Österreichische Computer Gesellschaft, 247-257.
- EMPRIN, F. & SABRA, H. (2019). Les simulateurs informatiques, ressources pour la formation des enseignants de mathématiques, *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 19(2), 204-216. DOI : 10.1007/s42330-019-00046-w
- GOIGOUX, R. (2007). Un modèle d'analyse de l'activité des enseignants. *Éducation et didactique*, 1(3), 47-69.
- GOODWIN, A. L., SMITH, L., SOUTO-MANNING, M., CHERUVU, R., TAN, M. Y., REED, R. & TAVERAS, L. (2014). What should teacher educators know and be able to do? Perspectives from practicing teacher educators. *Journal of Teacher Education*, 65(4), 284-302.
- GROTHENDIECK, A. (1985). Récoltes et semailles. Réflexions et témoignage sur un passé de mathématicien, Gallimard.
- GUIN, D. & TROUCHE, L. (2002). Mastering by the teacher of the instrumental genesis in CAS environments: necessity of instrumental orchestrations. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 34(5), 204-211.
- HERBST, P., CHAZAN, D., CHIEU, V. M., MILEWSKI, A., KOSKO, K. W. & AARON, W. R. (2016). Technology-Mediated Mathematics Teacher Development: Research on Digital Pedagogies of Practice. In M. Niess, S. Driskell, & K. Hollebrands (Ed.), *Handbook of Research on Transforming Mathematics Teacher Education in the Digital Age* (pp. 78-106). IGI Global. <http://doi:10.4018/978-1-5225-0120-6.ch004>
- HOUEMENT, C. (2013). *Au milieu du qué : entre formation des enseignants et recherche en didactique des mathématiques*. Note de synthèse pour l'habilitation à diriger des recherches, Université Paris-Diderot-Paris VII.
- HOUEMENT, C. & KUZNIAK, A. (1996). Autour des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, 16(3), 289-322.
- HOUEMENT, C. & KUZNIAK, A. (1998). Réflexions sur l'enseignement de la géométrie pour la formation des maîtres. *Grand N*, 64, 65-78.
- JONES, K., MOONEY, C. AND HARRIES, T. (2002), Trainee Primary Teachers' Knowledge of Geometry for Teaching, *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 22 (2), 95-100.
- KERMEN, I. & BARROSO, M. T. (2013). Activité ordinaire d'une enseignante de chimie en classe de terminale. RDST. *Recherches en didactique des sciences et des technologies*, 8, 91-114.
- KOSTER, B. & DINGERINK, J. (2001). Towards a professional standard for Dutch teacher educators. *European journal of teacher education*, 24(3), 343-354.
- LABBE, C. & LABBE, D. (2012). Analyser les questions ouvertes dans les sondages. In journée d'études : Comment convaincre ? *Analyse scientifique de la campagne électorale 2012*. Grenoble, France. Consulté à l'adresse <https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00709115>

- LAGRANGE, J. B. (1999). *Approches didactique et cognitive d'un instrument technologique dans l'enseignement. Le cas du calcul formel en lycée* (Doctoral dissertation - Document pour l'Habilitation à Diriger les Recherches, Université Denis Diderot Paris VII).
- LAGRANGE, J. B. (2000). L'intégration d'instruments informatiques dans l'enseignement : une approche par les techniques. *Educational studies in mathematics*, 43(1), 1-30.
- LAGRANGE, J. B. & GRUGEON, B. (2003). Vers une prise en compte de la complexité de l'usage des TIC dans l'enseignement : Une méta-analyse des publications d'innovation et de recherche en mathématiques. *Revue française de pédagogie*, 101-111.
- MA, L.P. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Routledge.
- MARGOLINAS, C. (2012). Connaissance et savoir. Des distinctions frontalières ? in *acte du colloque Sociologie et didactiques : vers une transgression des frontières*, Haute École pédagogique de Vaud. 17-44.
- NATIONAL BOARD FOR PROFESSIONAL TEACHING STANDARDS (2013). *National board standards*. Retrieved from <http://www.nbpts.org/national-board-standards>. Cité par (Goodwin et al., 2014).
- PASTRE, P., MAYEN, P. & VERGNAUD, G. (2006). La didactique professionnelle. *Revue française de pédagogie. Recherches en éducation*, 154, 145-198.
- PERRIN-GLORIAN, M.-J. (2019). A l'interface entre recherche et enseignement, les ingénieries didactiques. *Actes du congrès : La TACD en questions, questions à la didactique*. Rennes : CREAD. 155-127. Repéré à https://tacd-2019.sciencesconf.org/data/ACTES_Session4_Congres_TACD_Rennes_2019.pdf, 2019. hal — 02314052
- PHILIPPOT, A., RIERA, B., KOZA, M., PICHARD, R., SADDEM, R., GELLOT, F., ANNEBICQUE, D., EMPRIN, F. (2017). HOME I/O and FACTORY I/O: a house simulator and a plant simulator for automatic control education. in *The 27th EAAEIE (European Association for Education in Electrical and Information Engineering) Annual Conference*, June 7-9, 2017, Grenoble.
- PIAGET, J. (1967). Logique et connaissance scientifique. In *Encyclopédie de la Pléiade*. Gallimard, coll.
- RABARDEL, P. (1995). *Les hommes et les technologies ; approche cognitive des instruments contemporains* (p. 239). Armand Colin.
- RABARDEL, P. (1999). Éléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques. *Actes de l'école d'été de didactique des mathématiques*, 18(21), 203-213.
- RABARDEL, P. (2005a). Instrument subjectif et développement du pouvoir d'agir, In Rabardel, P. et Pastre, P. (dir). *Modèles du sujet pour la conception, dialectiques activités développement*, Octarès, 11-31.
- RABARDEL, P. (2005b). Qu'est-ce qu'un instrument ? In : *Outils pour le calcul et le traçage de courbes*, CNDDP-DIE – Mars 1995, 61-65.
- REINERT, M. (1993). Quelques problèmes méthodologiques posés par l'analyse de tableaux « Énonces x Vocabulaire ». *Actes des secondes journées internationales d'analyse statistique des données textuelles*. Montpellier, 21-22.
- RIERA, B., EMPRIN, F., ANNEBICQUE, D., COLAS, M., VIGARIO, B. (2016). HOME I/O: a virtual house for control and STEM education from middle schools to universities. *11th IFAC Symposium on Advances in Control Education ACE 201*, 1—3 June 2016, Bratislava, Slovakia, 168-173.
- ROBERT, A. (1999). Recherches didactiques sur la formation professionnelle des enseignants de mathématiques du second degré et leurs pratiques en classe, *DIDASKALIA*, 15, 123-157.
- ROBERT, A. (2003). Analyse de vidéo de séances de classe : des tâches prescrites aux activités des élèves, en passant par les pratiques des enseignants de mathématiques (second degré), *Document pour la formation des enseignants*, IREM de Paris 7.
- ROBERT, A. (2005). Sur la formation des pratiques des enseignants de mathématiques du second degré. *Recherche et formation*, 50(1), 75-89.
- ROBERT, A. & ROGALSKI, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Canadian Journal of Math, Science & Technology Education*, 2(4), 505-528.
- ROBERT, A. & ROGALSKI, J. (2005). A cross-analysis of the mathematics teacher's activity. An example in a French 10th-grade class. *Educational studies in mathematics*, 59(1-3), 269-298.
- ROGALSKI, J. (2006). Analyse de l'activité de l'enseignant à partir de ses communications avec la classe/les élèves. In M.-J. Perrin-Glorian et Y. Reuter (eds.), *Les méthodes de recherche en didactiques* (pp. 85-98). Villeneuve d'Ascq : Presses du Septentrion.
- ROGALSKI, J. & ROBERT, A. (2015). De l'analyse de l'activité de l'enseignant à la formation des formateurs Le cas de l'enseignement des mathématiques dans le secondaire. Dans : Valérie Lussi Borer éd., *Analyse du travail et formation dans les métiers de l'éducation* (pp. 93-113). Louvain-la-Neuve : De Boeck Supérieur. <https://doi.org/10.3917/dbu.lussi.2015.01.0093>
- SAYAC, N. (2012). Pratiques de formateurs en mathématiques dans le premier degré. Les savoirs de la formation. *Recherche et formation*, (71), 115-130.

- SCHÖN, D.-DA. (1994). *Le praticien réflexif : à la recherche du savoir caché dans l'agir professionnel*. Montréal : Éditions Logiques.
- SHULMAN, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational researcher*, 15(2), 4-14.
- SHULMAN, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard educational review*, 57(1), 1-23.
- TOERNER, G. ET ARZARELLO, F. (2012). Grading Mathematics Education Research Journals. *EMS Newsletter* December 2012, 52-54.
- TROUCHE, L. (2003). *Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques : nécessité des orchestrations*. Document pour l'Habilitation à Diriger des Recherches Université Paris VII.
- TROUCHE, L. (2004). Environnements Informatisés et Mathématiques : quels usages pour quels apprentissages ? *Educational Studies in Mathematics*, 55(1-3), 181-197.
- VERGNES, D. (2001). Effets d'un stage de formation en géométrie sur les pratiques d'enseignants de l'école primaire. *Recherches en didactique des mathématiques - La pensée Sauvage*, 21(1), 99-122.
- VRIET, S. (2018). *Les pratiques des formateurs dans l'usage de la simulation pour la construction des compétences prescrites par un référentiel de certification*. Mémoire de Master MEEF-PIF parcours CIREF, Université de Reims Champagne Ardenne. <dumas-02186278>
- WITTORSKI, R. (2008). Professionnaliser la formation : enjeux, modalités, difficultés. *Formation Emploi*, n° 101, 105-117.

NETWORKING DE THEORIES : ENJEUX, CONCEPTUALISATION ET PRATIQUES

Michèle ARTIGUE

LDAR, Université de Paris¹

michele.artigue@univ-paris-diderot.fr

Résumé

L'expression «networking de théories» a émergé dans la dernière décennie, dans le contexte européen, pour qualifier certaines pratiques de recherche. Mais de quoi s'agit-il exactement et qu'apporte ce «networking», par rapport aux combinaisons théoriques auxquelles se livrent la plupart des chercheurs pour répondre aux questions qu'ils se posent ? Dans ce texte associé au séminaire ARDM de janvier 2020, j'essaie de répondre à ces questions en m'appuyant sur mon expérience de chercheuse impliquée dans ce champ de recherche depuis son émergence, en 2005. J'explique d'abord l'origine de ces travaux et j'introduis deux des conceptualisations associées, l'échelle de networking et le concept de praxéologie de recherche qui se sont révélées pour moi particulièrement utiles. Je montre ensuite comment des praxéologies de recherche spécifiques ont été développées pour répondre aux besoins du networking et j'en illustre les résultats à travers deux exemples : la connexion entre les notions d'effet Topaze et de *funnel pattern* qui a émergé d'une praxéologie développée pour faire sens d'interprétations discordantes d'un même épisode de classe, la mise en évidence des effets sur le design d'artefacts numériques et la vision de leur potentiel sémiotique de l'intégration de la perspective instrumentale de Rabardel et Vérillon dans différentes théories qui a émergé des praxéologies développées dans le projet ReMath. Je termine par une réflexion plus globale sur l'ensemble de cette entreprise.

Mots clés

networking de théories, échelle de stratégies de networking, praxéologie de recherche, théorie anthropologique du didactique, effet Topaze, Funnel pattern, jeu sémiotique, projet ReMath, approche instrumentale

I. LE NETWORKING DE THEORIES : ORIGINES ET ENJEUX

A l'origine du « networking de théories² », il y a un constat qui s'est imposé au début de ce siècle à un certain nombre d'acteurs internationaux, notamment européens, du champ de recherche que constitue la didactique des mathématiques : celui d'une expansion théorique accélérée et, en un certain sens, disproportionnée par rapport à l'avancée du travail empirique et des résultats. On observait un accroissement incessant de constructions théoriques nouvelles et indépendantes, au détriment d'un travail approfondi sur le théorique déjà existant et d'une exploitation maximale de ses potentialités. Il en résultait une multiplication de termes et de

¹ Université de Paris, Université Paris-Est Créteil, CY Cergy Paris Université, Université de Lille, Université de Rouen, LDAR, F-75013 Paris, France

² L'expression « networking de théories » peut se traduire littéralement par « mise en réseau de théories ». Dans ce texte, j'utiliserai la dénomination en langue anglaise qui est celle utilisée au niveau international.

discours à première vue incommensurables rendant difficile la capitalisation des connaissances sur des questions d'intérêt commun, malgré la multiplication des échanges internationaux. J'en étais devenue particulièrement consciente, en tant que vice-présidente puis présidente du comité exécutif de l'ICMI (International commission on mathematical instruction). Ces responsabilités m'avaient, en effet, amenée régulièrement à répondre à des questions sur les connaissances consolidées et partagées par des acteurs directement concernés par les questions d'éducation mathématique mais non eux-mêmes chercheurs de ce domaine. Il y avait également le constat de la multiplicité des bricolages théoriques individuels ou locaux que ce foisonnement théorique favorisait, des combinaisons de constructions d'origine diverse, d'emprunts partiels, sans que soit nécessairement posée la question de savoir si ce qui était combiné pouvait vraiment l'être, si les emprunts, les assemblages réalisés préservaient le sens et l'épistémologie des objets qui les constituaient.

Face à ce constat, émergeait le besoin que ces questions soient prises en charge par la communauté, internationalement, et non laissées à la seule responsabilité de chercheurs individuels ou de groupes locaux partageant une même culture didactique. Il s'agissait de mieux cerner cette diversité théorique, sa nature exacte, ses raisons d'être, et de s'interroger sur la nécessité d'une aussi grande diversité. Il s'agissait aussi de limiter le risque de fragmentation du champ en étudiant plus systématiquement les possibilités de connexion entre des constructions ayant émergé dans des contextes divers mais peut-être pour répondre à des besoins proches, entre les résultats obtenus et les discours qui les exprimaient. Il s'agissait de permettre ainsi l'exploitation positive d'une diversité théorique qui paraissait inévitable, et pour cela de développer des outils, des techniques adaptés à ce travail spécifique.

Dans cette prise de conscience et dans l'action associée, la recherche européenne a joué un rôle majeur. Il faut mentionner les deux séances plénières consacrées aux théories de l'éducation lors du colloque CERME 4 en 2005 (Godino, Artigue, Ernest, Furinghetti 2006), ainsi que la création à ce même colloque d'un groupe de travail spécifique sur la diversité théorique en éducation mathématique (Artigue, Bartolini-Bussi, Dreyfus, Gray & Prediger 2006) qui, depuis quinze ans, a aidé à coordonner le travail sur ces questions au sein de la communauté ERME, comme bien montré dans la synthèse (Kidron, Bosch, Monaghan & Palmér 2018). Une conséquence de CERME 4 a été également la création du groupe dit de Brême rassemblant une dizaine de chercheurs allemands, anglais, français, israéliens et italiens, décidés à travailler conjointement sur la recherche de connexions entre théories. C'est au sein de ce groupe qu'a émergé l'expression de « networking de théories ». Le travail qu'il a mené sur ce thème à partir de 2005 a conduit à la publication de l'ouvrage (Bikner-Ahsbahr & Prediger 2014), et ses membres ont aussi joué un rôle clef dans le groupe de travail CERME jusqu'à aujourd'hui. Mais, avant même CERME 4, il y a eu l'équipe de recherche européenne TELMA (Technology Enhanced Learning in Mathematics) au sein du réseau d'excellence européen Kaleidoscope créé en 2003, justement avec l'ambition de capitaliser les connaissances acquises au niveau européen dans le domaine des environnements informatiques pour l'apprentissage humain, sans se limiter aux seules mathématiques. Et TELMA a conduit au projet européen ReMath qui a cherché à capitaliser plus précisément les connaissances acquises sur le potentiel sémiotique pour l'apprentissage des mathématiques des artefacts numériques dynamiques, à travers justement la formulation d'une vision théorique partagée et d'un discours associé. C'est notamment sur ces travaux menés au sein du contexte européen et auxquels j'ai étroitement participé que ma vision du networking de théories s'est élaborée, que j'ai vécu l'évolution de la conceptualisation et des pratiques, l'avancée progressive du travail et des résultats. C'est sur ces travaux et ce qu'ils m'ont appris que je m'appuie donc essentiellement dans la suite de ce texte. Comme annoncé dans le résumé, je commencerai dans la partie suivante par introduire

deux constructions conceptuelles qui me semblent particulièrement utiles pour travailler ces questions.

Avant cela, il me semble cependant important de rappeler, comme souligné dans l'ouvrage issu de l'après-midi thématique consacrée aux traditions européennes de didactique des mathématiques au congrès ICME-13, que “the word *theory* in the didactics of mathematics has a broad meaning, ranging from very local constructs to structured systems of concepts; some are ‘home-grown’ while others are ‘borrowed’ with some adaptation from other fields, and some have developed over decades while others have emerged only recently” (Blum et al. 2019, p. 3). La théorie des situations ou la théorie anthropologique du didactique, qui sont au cœur de la tradition didactique française, occupent, de fait, des positions relativement extrêmes sur les axes que l'on peut associer à chacune de ces trois dimensions. Les travaux relevant du *networking* de théories, quant à eux, engagent le plus souvent des théories aux caractéristiques bien différentes, et des théories qui n'ont pas émergé au sein d'une même culture, contrairement à ce qui est le cas pour la théorie des situations didactiques (TSD dans la suite) et la théorie anthropologique du didactique (TAD dans la suite) par exemple.

II. DES OUTILS CONCEPTUELS POUR SOUTENIR LE NETWORKING

L'expression « *networking* de théories », comme mentionné ci-dessus, a émergé au sein du groupe de Brême connu aussi comme le *Networking Theories Group*. C'est aussi au sein de ce groupe qu'a émergé le premier outil conceptuel que je présenterai dans ce paragraphe, l'échelle des stratégies de *networking* de théories (Prediger, Bikner-Ahsbahr & Arzarello 2008).

1. L'échelle de stratégies de *networking* de théories

Au sein du groupe de Brême, nous avons en effet, assez vite, essayé d'identifier différentes façons d'établir des connexions entre théories. C'est ce qui a mené à l'échelle suivante (Figure 1) :

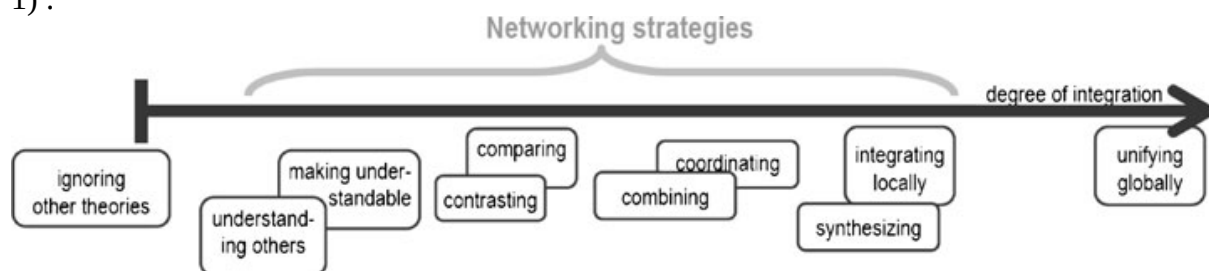


Figure 1 : Echelle de stratégies de *networking* (Prediger, Bikner-Ahsbahr & Arzarello 2008)

Les stratégies identifiées y sont placées le long d'un axe dont les deux positions extrêmes correspondent respectivement à l'attitude consistant à ignorer les autres théories et le désir d'unification globale des théories en une seule construction. Je préciserai tout de suite que pour moi comme pour les nombreux chercheurs avec lesquels j'ai collaboré dans l'entreprise de *networking*, la recherche d'une théorie unificatrice n'est pas du tout ce qui est visé. La diversité théorique du champ est vue comme une nécessité résultant de l'histoire particulière de ce champ de recherche, mais aussi de l'impossibilité de capturer via une seule théorie la complexité des processus d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques, et la diversité des

questionnements qu'ils suscitent. La diversité théorique n'est donc pas vue comme un signe en soi d'imaturité de ce champ de recherche mais comme une de ses caractéristiques qu'il faut accepter et prendre en charge. Ceci conduit à rejeter les deux pôles extrêmes.

Les stratégies sont organisées en paires comme comprendre d'autres théories ou les rendre compréhensibles, comparer ou contraster des théories, les combiner ou coordonner, intégrer localement et synthétiser, et le sens exact donné à chacune de ces stratégies est précisé. Par exemple, dans (Bikner-Ahsbahr & Prediger 2010, pp. 492-497), il est précisé que la différence entre comparer et contraster tient au fait que dans la stratégie contraster, on met l'accent sur les différences entre théories. Il est de même précisé que les deux stratégies combiner et coordonner sont généralement utilisées pour faire sens de données empiriques, que coordonner signifie que "a conceptual framework is built by well fitting elements from different theories", ce qui suppose la complémentarité des théories engagées, tandis que combiner signifie que "the theoretical approaches are only juxtaposed according to a specific aspect". Cette stratégie de combinaison peut donc engager des théories dont certains principes de base sont en conflit. S'agissant des stratégies d'intégration locale et de synthèse, il est précisé que ces deux stratégies sont centrées "on the development of theories by putting together a small number of theories or theoretical approaches into a new framework". Pour ces auteurs, synthétiser correspond au cas où "two (or more) equally stable theories are taken and connected in such a way that a new theory evolves" tandis qu'intégrer localement correspond au cas fréquent où "the theories' scope and degree of development is not symmetric, and there are only some concepts or aspects of one theory integrated into an already more elaborate dominant theory". Dans ce texte, je respecterai globalement ces distinctions, sauf pour ce qui est de la distinction faite entre synthèse et intégration locale. Il me semble en effet plus efficace, comme je l'ai expliqué dans (Artigue 2019) d'utiliser l'expression intégration locale chaque fois qu'il y a une dissymétrie dans la connexion effectuée, même dans le cas de théories ayant des niveaux comparables de développement. L'échelle propose un ordre total entre les stratégies mais, comme le précisent également les auteures (ibidem, p. 492),

it must be emphasized that it is not easy to specify globally their exact topology, since the degree of integration always depends on the concrete realizations and networking methodologies.

De plus, comme le montrent bien des travaux comme ceux du groupe de Brême, les chercheurs qui cherchent à bâtir des connexions entre théories ne se limitent pas généralement à une seule stratégie.

J'en viens maintenant au second outil conceptuel que je souhaite introduire, le concept de praxéologie de recherche.

2. Le concept de praxéologie de recherche

Nous avons pour la première fois introduit ce concept, Marianna Bosch, Josep Gascón et moi-même, au congrès CITAD3 en 2009 (Artigue, Bosch & Gascón 2011) mais il ne fait pas de doute que le travail mené au sein du groupe de Brême dont nous étions tous les trois membres a joué un rôle évident dans son émergence. J'ai ensuite exploité ce concept avec Marianna Bosch pour mener une réflexion rétrospective sur le travail réalisé au sein de ce groupe (Artigue & Bosch 2014) et, plus récemment, je l'ai retravaillé dans le cadre du projet AMOR de l'ICMI³ ainsi que de l'étude du développement de l'approche documentaire du didactique présentée au

³ Le projet AMOR (Awardees Multimedia Online Resources) de l'ICMI est un projet visant à produire et mettre en accès libre pour les chercheurs et les formateurs un ensemble de ressources en ligne associées aux travaux des chercheurs lauréats des médailles Felix Klein et Hans Freudenthal de l'ICMI (voir le site <https://icmiamor.org/> pour plus de détails)

colloque Re(s)ources 2018 (Artigue 2019). La présentation faite dans ce texte s'appuie sur ces dernières élaborations.

Le concept de praxéologie de recherche étend aux pratiques de recherche la notion de praxéologie, centrale dans la TAD dans la suite. Un principe basique dans la TAD étant que toute pratique humaine peut être modélisée en termes de praxéologie, cette extension n'a *a priori* rien de surprenant. Comme nous l'avons souligné avec Marianna Bosch, elle implique une approche pragmatique et dynamique des théories, cherchant à clarifier comment "they inform and shape the practical research work, and conversely how they progressively emerge from it and integrate its results." (Artigue & Bosch 2014, p. 251) Une telle vision pragmatique des théories, quels que soient les outils théoriques utilisés pour la soutenir, me semble de plus en plus nécessaire pour aborder de façon productive les relations et connexions entre théories. Les théories sont pour le chercheur avant tout des outils qui répondent à des besoins. Établir des connexions nécessite d'accéder à ces besoins qui en donnent les raisons d'être, de comprendre leurs fonctionnalités, et ceci est très difficile si elles sont considérées en elles-mêmes indépendamment des pratiques qu'elles nourrissent et qui les nourrissent en retour.

La conceptualisation proposée par la TAD n'est bien sûr pas la seule à pouvoir remplir ce rôle et, par exemple, dans le travail du groupe de Brême, nous nous sommes d'abord appuyés sur la conceptualisation proposée par Luis Radford (2008, p. 320) des théories comme des moyens de produire de la compréhension et des moyens d'action, basés sur :

- un système *P* de principes de base, partiellement implicites, qui délimitent l'univers du discours et la perspective de recherche,
- une méthodologie *M* qui inclut des techniques de recueil et d'interprétation des données,
- et un ensemble *Q* de questions de recherche paradigmatiques, qui génèrent à leur tour des questions spécifiques au fur et à mesure que de nouvelles interprétations émergent ou que les principes sont étendus ou modifiés.

C'est en référence à cette conceptualisation, complétée par l'ajout de concepts clefs, qu'ont été élaborées les présentations des cinq théories en jeu dans l'ouvrage sur le networking déjà cité.

Dans la TAD, une praxéologie est définie comme un quadruplet formé de deux blocs : un bloc praxique et un bloc théorique. Au niveau le plus simple, celui des praxéologies ponctuelles, le bloc praxique est formé d'un type de tâche et d'une technique pour la réaliser. Le bloc théorique est, quant à lui, un bloc discursif formé d'un discours décrivant, expliquant et justifiant la technique, appelé technologie, et d'un discours théorique de portée plus générale, plus ou moins élaboré, fondant et justifiant à son tour le discours technologique. *A priori*, le concept de praxéologie de recherche s'applique à tous les types de tâches que le chercheur doit réaliser. Dans la perspective de networking de théories qui est ici la mienne, je me centrerai sur une forme de praxéologie emblématique de la recherche, celle des praxéologies qui émergent de la recherche d'une réponse à une question concernant les processus d'enseignement et apprentissage, ou plus globalement le fonctionnement de systèmes didactiques. Ces praxéologies de recherche émergent via leur bloc praxique, mais il est indéniable que l'intérêt pour tels ou tels types de question et la façon dont elles vont être formulées pour être soumises au travail de recherche sont influencés par le théorique déjà là dans l'environnement du chercheur. Dès le début donc, les blocs praxiques et théoriques sont en interaction, et ceci est fondamental pour comprendre ces praxéologies, leurs dynamiques et le rôle que jouent les théories dans ces dynamiques.

Dans (Artigue à paraître-a), j'illustre ceci en prenant l'exemple de la thèse de Brigitte Grugeon (1995), une recherche pionnière puisque c'est la première thèse à avoir utilisé la TAD pour approcher les questions de transition institutionnelle. Dans cette thèse, la question initiale est

celle de comprendre pourquoi les élèves issus du lycée professionnel qui sont, au vu de leurs excellents résultats, envoyés à l'époque après le BEP dans un cours d'adaptation d'un an visant l'intégration dans le lycée technologique, se retrouvent dans leur grande majorité quelques mois plus tard en échec en mathématiques et particulièrement en algèbre. Mais sa reformulation comme un problème de transition institutionnelle, en termes de recherche de discontinuités éventuelles plus ou moins visibles et mal prises en compte entre les rapports institutionnels à l'algèbre dans les deux types de lycée, qui va permettre de dépasser les interprétations cognitives trop faciles et orienter l'ensemble du travail de thèse, est la conséquence directe de l'inscription de la question initiale dans la TAD.

Si l'on se réfère au modèle praxéologique, dans leur forme la plus simple, celle de praxéologie ponctuelle, ces praxéologies sont *a priori* constituées d'une question de recherche, d'une technique utilisée pour y répondre, d'un discours expliquant et justifiant la technique, et d'une théorie fondant ce discours. La méthodologie qui est, de par son étymologie, à la fois méthode et discours sur la méthode, se trouve donc à l'interface des blocs praxique et théorique de ces praxéologies ponctuelles. De fait, même dans le cas d'une praxéologie de recherche ponctuelle, autour d'une question d'un certain type, très souvent il n'existe pas de technique institutionnelle spécifique. Plusieurs techniques vont souvent être associées pour répondre à la question à l'étude et, par ailleurs, le discours théorique ne se réduit généralement pas à une théorie. Il est constitué d'un assemblage théorique, ce que l'on dénomme généralement le cadre théorique de la recherche.

La nécessité de construire de tels assemblages se conçoit bien si l'on considère que chaque nouvelle recherche s'inscrit dans un édifice existant et ne saurait s'affranchir des acquis principaux des recherches antérieures, des acquis qui n'ont pas de raison d'avoir été tous produits au sein d'une seule théorie. Cela a été bien sûr le cas pour Brigitte Grugeon, les questions de didactique de l'algèbre ayant été extensivement étudiées depuis longtemps lorsqu'elle a débuté sa thèse. Comme le montrent bien les synthèses très souvent citées à l'époque comme (Bednarz, Kieran & Lee 1996), les connaissances internationalement partagées concernant la discontinuité arithmétique/algèbre, l'importance de la distinction entre le sens et la dénotation des expressions algébriques, entre leur appréhension procédurale et structurale, pour ne citer que quelques exemples, avaient été élaborées en dehors de la TAD et exprimées dans d'autres formes de discours. Le cadre théorique de cette recherche amalgame ainsi une pluralité d'objets qui vont avoir des fonctionnalités diverses au sein des praxéologies de recherche que la thèse va conduire à élaborer, et qui vont participer au bloc théorique de ces praxéologies.

Bien sûr, on peut *a priori*, si l'on souhaite limiter l'arsenal théorique à une seule théorie, envisager l'intégration locale de certains de ces acquis au moins au sein du discours propre à cette théorie, mais une intégration qui ne soit pas drastiquement réductrice, voire dénaturante, ne va en rien de soi quand bien même elle serait possible. Elle requiert un travail coûteux même pour un chercheur expérimenté, et son intérêt immédiat n'est pas forcément perçu. L'économie du travail de recherche impose un certain pragmatisme, et le chercheur, très souvent, va privilégier les techniques, les outils qui lui sont familiers et dont il a éprouvé l'efficacité, quitte à les adapter si besoin. Ceci contribue, à mes yeux, à expliquer pourquoi, par exemple, alors même que la TAD dispose aujourd'hui d'outils semble-t-il efficaces pour approcher les questions sémiotiques, beaucoup de didacticiens, même lorsque la TAD est l'élément principal de leur cadre théorique, exploitent peu ces outils, préférant mobiliser par exemple l'approche sémiotique de Raymond Duval en termes de registres de représentation qui leur est depuis longtemps familière.

L'étude d'une question génère en général tout un ensemble praxéologies de recherche partageant largement le même discours théorique. Cet ensemble va s'organiser pour former des

praxéologies locales. Les mêmes types de question, repris par différents chercheurs, conduiront ensuite à des praxéologies de recherche régionales. C'est je pense le cas par exemple pour les praxéologies de recherche sur les questions de transitions institutionnelles qui se sont développées dans le cadre de la TAD depuis la thèse de Brigitte Grugeon (voir (Artigue, à paraître-b pour une analyse dans cette perspective des travaux sur la transition secondaire-supérieur). Ce développement et cette structuration des praxéologies, au fil d'une ou plusieurs recherches, ne peut être vraiment anticipé. De nouvelles questions émergent des résultats obtenus ; de nouveaux éléments intègrent le discours technologique : distinctions, catégorisations, phénomènes didactiques. S'ils deviennent raisonnablement partagés, ils enrichiront les théories elles-mêmes. Dans le module 8 consacré à l'approche instrumentale du projet AMOR mentionné plus haut, j'ai utilisé l'exemple de la thèse de Mariam Haspekian (2005) étudiant l'utilisation du tableur dans l'enseignement des mathématiques pour faciliter la transition entre arithmétique et algèbre, pour illustrer ces processus dynamiques. Dans ce cas précis, ils ont conduit à l'émergence d'un nouveau concept, celui de distance instrumentale, ainsi qu'à la mise en évidence du phénomène de dédoublement des genèses instrumentales dans le cas des enseignants. J'y renvoie le lecteur.

III. LE NETWORKING EN ŒUVRE : DEUX EXEMPLES

Comme je l'ai fait lors du séminaire, j'aborderai dans cette section les activités de networking et leurs apports par deux exemples. Il s'agit dans les deux cas d'activités collectives de networking impliquant des chercheurs de différentes cultures, mais ils ont une ampleur très différente. Dans les deux cas aussi, le networking passe par le développement de praxéologies spécifiques, permettant un travail conjoint sur des objets communs, une condition qui s'est rapidement révélée essentielle. Dans les deux cas aussi, et c'est tout aussi important, le networking n'est pas une fin en soi, il se développe pour répondre à un besoin didactique précis, et il combine plusieurs stratégies.

1. Faire sens d'interprétations discordantes d'un même épisode de classe

Ce premier exemple est celui d'une des études de cas réalisées au sein du groupe de Brême (Bikner-Ahsbahr, Artigue & Haspekian 2014)). Le point de départ du travail de ce groupe était une vidéo proposée par Ferdinando Arzarello filmée dans une classe de grade 10 (niveau seconde) lors d'une séance visant à introduire les fonctions exponentielles en s'appuyant sur trois fichiers Cabri-géomètre proposés successivement aux élèves. La vidéo montrait le travail de recherche autonome de deux élèves, en particulier leurs discours et leurs gestes, face à l'écran de l'ordinateur. Le travail collectif a mobilisé cinq théories, chaque binôme de chercheurs d'un même pays représentant une théorie : IDS (Interest-Dense Situations) pour les chercheurs allemands, TAD pour les espagnols, TSD pour les français, AiC (Abstraction in Context) pour les israéliens et APC (Action, Production, Communication) pour les italiens. Comme le montre l'ouvrage résultant, au fil des années, beaucoup des stratégies de l'échelle de networking ont été mobilisées. Le cas que je présente ici a émergé du visionnage collectif d'une courte vidéo complétant celle initialement étudiée. On y voit l'enseignant interagir avec les deux élèves, à propos du troisième fichier Cabri qui montre une fonction exponentielle et la droite joignant les points de la courbe d'abscisses x et $x+\Delta x$, le pas Δx étant modifiable par un curseur et le point P d'abscisse x déplaçable le long de la courbe (voir Figure 2). Il leur demande ce qui se passe lorsque x est très grand.

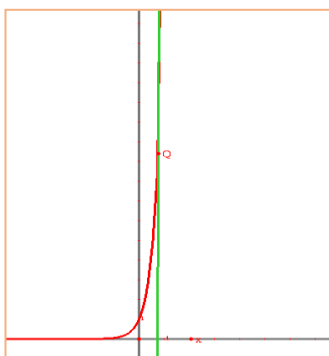


Figure 2 : Fonction exponentielle et sécante

Perceptivement, la fonction tendant vers l'infini et le graphe présentant une direction asymptotique verticale, on observe une courbe de plus en plus verticale et qui tend à se confondre avec la sécante tracée. C'est ce que verbalise un des deux élèves, mais ne correspond pas à ce qu'attend l'enseignant. S'ensuit un échange de quelques minutes qui va donner lieu à des interprétations discordantes. Les chercheuses françaises identifient un effet Topaze, la chercheuse allemande un *funnel pattern*, alors que les chercheurs italiens présentent cet épisode comme un exemple de jeu sémiotique. Les deux premières interprétations, même si elles renvoient à des concepts différents, connotent négativement cet épisode. Dans les deux cas, même si à la fin de l'épisode, l'enseignant obtient une réponse acceptable, c'est en forçant les échanges à tel point que l'accord obtenu à la fin ne peut plus être interprété comme signe de compréhension de la part des élèves. Dans le troisième cas, au contraire, l'épisode est connoté positivement comme exemplification d'une technique didactique où l'enseignant, s'appuyant sur les gestes et verbalisations des élèves et reconnaissant leur potentialité, guide leur évolution vers les formes d'expression culturellement partagées, comme l'exprime la définition donnée dans (Arzarello & al., 2009) :

A semiotic game happens in the teacher-students interaction when the teacher tunes with the students' semiotic resources and uses them to guide the evolution of mathematical meanings."

For instance, "the teacher repeats a student's gesture, and correlates it with a new term or with the correct explication given, using natural language and mathematical symbolism. Semiotic games constitute therefore an important strategy in the process of appropriation of the culturally shared meaning of signs.

Une telle discordance, amenant à interpréter tantôt positivement, tantôt négativement, l'action de l'enseignant, n'était clairement pas acceptable. Pour avancer, nous avons décidé de revenir au sens profond des trois concepts d'effet Topaze, de *funnel pattern* et de jeu sémiotique, à leur raison d'être, leur histoire, leur inscription théorique, leur usage. Ceci a généré une succession d'enquêtes dont nous avons ensuite partagé, comparé et essayé de coordonner et d'intégrer les résultats. S'agissant de l'effet Topaze par exemple, il a émergé au sein de la théorie des situations didactiques comme l'un des effets liés aux paradoxes du contrat didactique. Sa raison d'être est donc claire. Guy Brousseau en donne une description dans son cours à l'École d'été de 1984 sur le contrat didactique, reprise ensuite dans sa thèse et dans l'article de RDM (Brousseau, 1986) qui devient vite une référence. On y lit, sous le titre, « L'effet Topaze et le contrôle de l'incertitude », une longue description commentée de la situation du célèbre texte de Marcel Pagnol qui donne son nom au phénomène, suivie de cinq lignes décontextualisant le phénomène et qui en résumant les caractéristiques principales :

La première scène du célèbre « Topaze » de Marcel Pagnol illustre un des processus fondamentaux : Topaze fait une dictée à un mauvais élève. Ne pouvant accepter trop d'erreurs trop grossières et ne pouvant pas non plus donner directement l'orthographe

demandée il « suggère » la réponse en la dissimulant sous des codages didactiques de plus en plus transparents : « ... des moutons étaient réunis dans un parc... » il s'agit d'abord pour l'élève d'un problème d'orthographe et de grammaire... « des moutons étaient réunis... » le problème est complètement changé ! Devant les échecs répétés, Topaze mendie une marque d'adhésion et négocie à la baisse les conditions dans lesquelles l'élève finira par mettre de « s ». On devine qu'il pourrait continuer en exigeant la récitation de la règle, puis en la faisant copier un certain nombre de fois. L'effondrement complet de l'acte d'enseignement est représenté par un simple ordre : mettez un « s » à « moutons » : le professeur a fini par prendre à sa charge l'essentiel du travail.

La réponse que doit donner l'élève est déterminée à l'avance, le maître choisit les questions auxquelles cette réponse peut être donnée. Évidemment les connaissances nécessaires pour produire ces réponses changent leur signification aussi. En prenant des questions de plus en plus faciles, il essaie d'obtenir la signification maximum pour le maximum d'élèves. Si les connaissances visées disparaissent complètement : c'est l'effet Topaze" (Brousseau 1986 pp. 41-42).

Comme on le voit, ce n'est pas une définition très précise et, dans le même temps, elle semble imposer une condition très forte à l'identification d'un tel effet, le fait que les connaissances visées disparaissent complètement. De fait, l'enquête que nous avons menée, recherchant références et exemples dans la littérature tend à montrer que la notion d'effet Topaze s'est très rapidement naturalisée dans la communauté didactique se référant à la TSD, la référence à la dictée de Marcel Pagnol fonctionnant comme signe de reconnaissance analogique, sans travail approfondi sur ses critères définitoires, ni discussion de cas précis, comme si elle allait de soi. Dans les textes, quand des effets Topaze sont mentionnés, c'est le plus souvent sans rentrer dans une analyse détaillée des données correspondantes, comme si cette attribution ne nécessitait pas de justification particulière. (Novotná & Hospesová 2007) constitue une exception, mais les conditions qui y sont données et les exemples qui servent à les illustrer peuvent laisser penser que quasiment toute forme de relâchement de la réticence didactique peut être labélisée d'effet Topaze, ce qui nous semble abusif. Ceci nous a conduites à proposer les critères suivants pour pouvoir attribuer le qualificatif d'effet Topaze à un épisode :

- des attentes précises de l'enseignant en ce qui concerne les réponses et productions des élèves ;
- une distance entre les productions et les propos initiaux des élèves et ces attentes ;
- une succession de questions ou de dialogues pilotés par l'enseignant atteignant la réponse attendue, mais en réduisant drastiquement le sens mathématique de celle-ci ;
- une fin de l'épisode comme si la réponse produite était réellement significative et le contrat didactique non rompu.

Il est intéressant de les comparer aux critères auxquels ont abouti les collègues allemands pour le *funnel pattern* qui sont les suivants :

Un épisode commençant par une question ou tâche ouverte et constitué de cinq étapes :

- L'élève ne répond pas comme attendu.
- L'enseignant pose une question additionnelle, mais toujours sans succès ;
- L'enseignant continue ses efforts pour obtenir au moins partiellement la réponse attendue. La compréhension est de moins en moins en jeu.
- N'obtenant toujours pas la réponse attendue, l'enseignant réduit ses attentes à un mot, une phrase; le comportement autodéterminé de l'élève diminue, la situation se charge de plus en plus émotionnellement.
- Le processus s'achève lorsque la réponse est produite, que ce soit par l'enseignant ou par l'élève.

Les similarités sont flagrantes, montrant que ces deux constructions répondent à un même besoin, exprimer en termes de phénomène didactique un fait didactique observé régulièrement dans les classes et correspondant à des épisodes où l'enseignant essaie de maintenir la relation didactique et la fiction qu'il y a eu apprentissage alors que les conditions pour que cet apprentissage ait lieu ne sont plus satisfaites. Mais elles répondent à ce besoin en étant façonnées par les théories au sein desquelles elles ont respectivement émergé : la TDS et l'Interactionnisme de Bauersfeld (1978). Ceci conduit à mettre l'accent sur des caractéristiques différentes de tels épisodes : la disparition progressive de la valeur épistémique des échanges pour l'effet Topaze, la réduction progressive de la durée et du contenu des interactions et la montée de la charge émotionnelle pour le *funnel pattern*, des caractéristiques en fait co-présentes et complémentaires, qui enrichissent la perspective offerte par chacune des théories. L'enquête menée nous conduira également à proposer de concevoir les deux phénomènes tels que définis théoriquement comme des idéal-types au sens de Weber⁴ (1965), dont les épisodes de classe réels se rapprochent plus ou moins, ce qui nous semble-t-il devrait en permettre un usage plus satisfaisant. Le travail mené sur cet épisode amènera finalement à la conclusion qu'en dépit des apparences, il ne peut être interprété ni comme effet Topaze, ni comme *funnel pattern*, ni comme jeu sémiotique. Ce n'est pas un effet Topaze parce que les attentes de l'enseignant sont trop visibles et que, même si l'élève finit par fournir la réponse attendue, on peut penser que ce n'est qu'une adhésion de surface aux attentes de l'enseignant. Pour cette même raison, ce n'est pas non plus un *funnel pattern*. Et ce n'est pas non plus un jeu sémiotique car l'enseignant ne fait pas écho au geste de l'élève pour le guider vers une formulation plus mathématique. Il transforme le geste en y voyant le signe d'une erreur et y superpose son propre discours. Cette étude conduira d'ailleurs à retravailler la définition de jeu sémiotique pour écarter de telles interactions.

2. Le projet Remath et la diversité des perspectives instrumentales

Le projet européen ReMath s'est développé dans la continuité du travail effectué au sein de l'équipe TELMA du réseau européen d'excellence Kaleidoscope, visant à capitaliser les connaissances acquises au niveau européen en matière de *Technology Enhanced Learning* (Artigue, 2009). Dans le cas de ReMath, plus précisément, il s'agissait de capitaliser les connaissances acquises concernant le potentiel sémiotique offert par des artefacts digitaux dynamiques (DDA dans la suite) pour l'apprentissage des mathématiques, d'en offrir une vision cohérente, synthétique et largement accessible. Pour permettre cette capitalisation, le projet prévoyait l'élaboration d'un cadre théorique intégré à partir d'une part, du travail déjà initié dans TELMA par les six équipes impliquées en France, Grèce, Italie et au Royaume Uni, et d'autre part du développement et de l'expérimentation de six DDA particulièrement innovants sur le plan des potentialités sémiotiques : *Alnuset*, *Aplusix*, *Casyopée*, *Cruislet*, *MaLT* et *Mopix*. Les six équipes impliquées présentaient une grande diversité théorique, tant au niveau des théories « globales » (constructionnisme, théorie de l'activité, TSD, TAD...) que des théories sémiotiques auxquelles elles se référaient (théorie de médiation sémiotique, sémiotique sociale de Halliday, théorie des représentations sémiotiques de Duval, sémiotique de Pierce...), reflétant en cela la diversité existante dans ce champ de recherche. L'élaboration d'une vision partagée, nous en avons acquis la conviction dans TELMA, nécessitait d'organiser cette diversité théorique, de comprendre comment ces inscriptions théoriques diverses influençaient, métaphoriquement ou opérationnellement, la conception et le développement des DDAs, comment aussi elles conditionnaient la vision de leurs potentialités sémiotiques et de leurs

⁴ Un idéal-type est une abstraction qui est associée à un ensemble de phénomènes isolés, les simplifie et en accentue certains traits. Il fonctionne comme modèle pour le sociologue pour comprendre la réalité. Il ne représente en rien un idéal.

usages, les scénarios d'usage élaborés et leur implémentation, d'où ce projet d'élaborer un cadre théorique intégré même si, au départ, nous ne savions pas vraiment à quel type de construction notre recherche nous mènerait.

Avec le regard que permet aujourd'hui l'avancée des travaux de networking, il semble clair que nous ressentions le besoin d'engager un travail de networking théorique, même si la terminologie n'existait pas lorsque nous nous sommes engagés dans ce projet, et également qu'il nous semblait important d'engager une dimension empirique de design dans la recherche. Cette dimension de design, qui n'a pas été présente dans le travail du groupe de Brême, s'est effectivement révélée très importante pour penser la capitalisation des connaissances visée. Quand on examine a posteriori le travail réalisé sur les quatre années du projet (voir par exemple le numéro spécial de *Educational Studies in Mathematics* (Kynigos & Lagrange 2014) et les principaux livrables accessibles sur le site <https://remath.cti.gr/en/documents/main-deliverables.html>), on ne peut manquer d'être frappé par la créativité praxéologique qui y a été à l'œuvre, le nombre de tâches qui ont été collectivement imaginées, de techniques d'étude qui ont été élaborées, d'éléments de discours technologique au sens de la TAD qui ont été construits pour guider le travail méthodologique, le traitement et l'interprétation des données recueillies. La vision consensuelle, synthétique et a priori largement accessible des potentialités sémiotiques des DDAs pour l'apprentissage mathématique finalement élaborée, prenant la forme de neuf énoncés complétés par des exemples issus des études de cas, peut paraître un maigre résultat par rapport à un tel investissement, par rapport aux milliers de pages des 21 livrables produits au cours du projet. Et il est vrai qu'elle ne rend compte que très partiellement de tout ce que ce projet a permis de construire comme connaissance.

Me situant dans une perspective de networking, je vais illustrer certains de ces acquis en considérant une dimension précise : celle des questions instrumentales. En fait, le travail dans ReMath a montré assez vite que, malgré la diversité des approches théoriques des différentes équipes, elles étaient toutes sensibles aux questions instrumentales et notamment partageaient une référence commune : la perspective instrumentale développée en ergonomie cognitive (Rabardel 1995 ; Vérillon et Rabardel, 1995). Il y avait donc consensus sur la nécessité de distinguer entre un artefact, ici l'un des DDAs en cours de développement ou une partie de ce DDA et l'instrument qu'il pouvait devenir pour un élève ou un collectif donné, via un processus de genèse instrumentale dont on pouvait supposer qu'il ne serait pas immédiat, au vu d'autant plus de la richesse des potentialités sémiotiques offertes a priori par ces DDAs. Il y avait aussi consensus sur le fait que ce processus de genèse instrumentale combinait, nécessairement et de façon dialectique, un processus d'instrumentalisation dirigé vers l'artefact et un processus d'instrumentation qui affectait l'élève et ses processus cognitifs. Mais cette référence commune s'inscrivait dans des perspectives théoriques différentes suivant les équipes et le travail mené a montré à quel point ceci affectait la conception des DDAs comme celle de leurs usages.

Dans les limites de ce texte, je l'illustrerai brièvement par deux exemples, renvoyant le lecteur à un précédent exposé au séminaire national concernant ce projet pour une présentation plus détaillée (Lagrange, Artigue, Cazes, Gelis & Vandebrouck 2010). Notre équipe s'appuyait sur une approche instrumentale intégrant la perspective ergonomique dans l'approche institutionnelle de la TAD (Lagrange 2000 ; Artigue 2002) et s'appuyait par ailleurs sur la TSD pour la conception de scénarios d'enseignement et la sémiotique de Duval pour penser les articulations entre registres de représentation sémiotique. Ceci s'est reflété dans le développement du DDA *Casyopée* par Jean-Baptiste Lagrange mais aussi dans les deux expérimentations croisées auxquelles nous avons participé, d'une part celle de *Casyopée* avec l'équipe italienne UNISI s'appuyant principalement sur la théorie de médiation sémiotique (Bartolini-Bussi & Mariotti 2008), d'autre part celle du logiciel *Cruislet* produit par les collègues grecs, dans une perspective constructionniste (Papert 1980 ; Harel & Papert 1991).

La recherche a montré notamment qu'en terme de conception d'artefacts, la vision constructionniste de l'apprentissage conduit à accorder une importance toute particulière à la possibilité offerte à l'utilisateur de faire évoluer l'artefact et ses capacités sémiotiques, c'est à dire en termes de genèse instrumentale à donner une importance particulière au processus d'instrumentalisation. Ceci se traduit par l'existence d'une notion spécifique : la notion de *half-baked microworld*, littéralement micromonde mi-cuit. En fait, le DDA *Cruislet* qui offre la possibilité de piloter plusieurs avions simultanément au-dessus d'une carte de la Grèce, via différents outils et la programmation de vols en langage logo, reflète bien ces caractéristiques.

Ceci contraste avec la conception de *Casyopée* où les représentations proposées par le logiciel sont les représentations institutionnelles visées. L'accent n'est pas mis sur une évolution possible de ces représentations pilotée par l'élève et la façon dont cette évolution peut être porteuse d'apprentissage mais sur celle du rapport de l'élève avec ces représentations, dans les processus d'instrumentation associés et les apprentissages qu'ils soutiennent.

S'agissant des scénarios d'usage, la recherche a également mis en lumière les différences profondes existant entre des scénarios s'appuyant sur la TSD et sur le constructionnisme, bien que ces deux théories partagent des principes socio-constructivistes. Il est clair que l'idée de situation fondamentale, le souci d'optimisation du potentiel adidactique des situations élaborées à travers le choix des variables didactiques, l'attention portée à l'organisation des processus duaux de dévolution et d'institutionnalisation, qui sont au cœur de la TSD et des ingénieries didactiques s'appuyant sur cette théorie ne se retrouvent pas dans les scénarios constructionnistes où l'on cherche plus à s'assurer du potentiel qu'offrent les tâches et environnements proposés à l'expressivité des élèves sans chercher à viser des apprentissages précis, ni contrôler les trajectoires possibles. Le logiciel *Cruislet* s'inscrivait facilement dans cette perspective alors que, pour les collègues chercheurs et enseignants français impliqués, organiser son expérimentation a été un véritable défi. Ceci n'a été finalement possible que dans le cadre d'un dispositif spécifique de projet, moins contraint curriculairement, mais a été aussi une source de questionnement et d'enrichissement certaine (voir par exemple (Le Feuvre, Meyrier & Lagrange 2010)).

L'expérimentation croisée de *Casyopée* avec les collègues italiens, alors même que certaines tâches étaient communes, ce qui n'était pas le cas avec *Cruislet*, a aussi mis en lumière des effets intéressants de l'inscription des questions instrumentales dans des perspectives théoriques différentes. Concevant *Casyopée* comme un outil de médiation sémiotique, en accord avec la perspective Vygotskienne à la base de la théorie de médiation sémiotique, les collègues italiens ont construit des scénarios qui accordent une importance particulière à la nécessité de détacher les signes produits de leur liaisons artefactuelles. Pour cela, par exemple, les séances de travail collectif et de synthèse se faisaient hors environnement logiciel. Ceci contraste avec la vision praxéologique sous-jacente aux scénarios élaborés par notre équipe selon laquelle ce qui se développe à travers ces scénarios, ce sont des praxéologies instrumentées où connaissances mathématiques et instrumentales sont étroitement imbriquées, où les artefacts ne sont pas uniquement perçus comme des médiateurs sémiotiques (voir par exemple (Maracci, Cazes, Vandebrouck & Mariotti 2013) pour une analyse détaillée).

Ces deux exemples et plus globalement le travail mené dans ReMath, ont donc mis en évidence la diversité des inscriptions existantes des perspectives instrumentales de Rabardel et Vérillon dans la communauté internationale des chercheurs intéressés par les questions technologiques, et leurs effets tant sur le design d'artefacts numériques que la vision de leurs potentialités et usages. Ils ont aussi montré que le networking productif de plusieurs théories, quelles que soient les stratégies utilisées, n'obéit pas aux mêmes contraintes quand il s'agit de les mettre à contribution, a posteriori, pour analyser et interpréter des données recueillies et quand elles sont utilisées pour le design didactique, qu'il s'agisse du design d'artefacts ou du design de tâches

et de situations d'apprentissage. Personnellement, ils m'ont permis de développer une vision enrichie de l'instrumentalisation et des jeux dialectiques entre instrumentalisation et instrumentation.

IV. REFLEXIONS

Dans cette section finale, je vais tout d'abord tirer quelques leçons des travaux mentionnés jusqu'ici, avant de donner quelques indications sur les évolutions récentes observées dans ce champ de travaux, notamment à partir des actes des colloques CERME. J'en viendrai ensuite à une réflexion plus globale sur les potentialités du networking en me référant à la façon dont j'en ai réinvesti les acquis praxéologiques.

1. Quelques leçons de ces travaux

Les deux exemples qui précèdent décrivent très brièvement quelques pratiques de networking en jeu dans les travaux du groupe de Brême et des équipes du projet européen ReMath, et ce qu'elles ont pu apporter. Elles ne donnent cependant qu'une idée très partielle des stratégies de networking utilisées dans les deux projets, des praxéologies qui ont été associées et des connaissances qu'elles ont produites. Dans les deux groupes de travaux, on note l'investissement d'une diversité de stratégies qui vont parfois jusqu'à l'intégration locale mais pas véritablement de synthèse théorique. Les conditions du travail mené, le nombre important de théories engagées, de plus à travers des chercheurs en ayant une connaissance approfondie rendant impossibles des synthèses hasardeuses, la nature des projets eux-mêmes, y ont sans doute contribué. Ce que montrent également bien ces travaux c'est que, même si dans l'échelle des stratégies de networking, les stratégies sont positionnées le long d'un axe, une vision hiérarchique n'est pas nécessairement pertinente. Ce ne sont pas nécessairement les efforts d'intégration locale qui ont produit les connexions les plus enrichissantes. Le besoin de comprendre et de faire comprendre, comme le montre l'exemple cité du travail du groupe de Brême, pourtant à gauche de l'échelle, peut-être source de connexions profondes.

Dans les deux cas, on note aussi une évidente créativité praxéologique qui se développe au fur et à mesure de l'avancée des projets. On perçoit bien que l'on se situe dans une phase exploratoire, que l'on invente, essaie, rejette, adapte, que l'on ne peut s'appuyer sur des praxéologies de recherche éprouvées. Le networking de théories reste donc, par-delà sa visée d'établir des connexions entre théories et constructions théoriques, une pratique aux contours flous qu'il est sans doute prématuré de chercher à circonscrire précisément.

Que résulte-t-il de ces travaux ? Certainement pas une réduction théorique mais sans aucun doute, au moins pour les acteurs de ces projets, un paysage théorique mieux structuré, des liens et des compréhensions nouvelles, y compris des théories qui leur étaient *a priori* familières, parce qu'elles ont été questionnées par des regards empathiques mais extérieurs, parce qu'il a fallu expliciter le non-dit, dénaturaliser le naturalisé pour les faire comprendre, et parce que l'on a essayé de partager comme l'exprime bien Arthur Bakker (2016) la cuisine de la recherche qu'elles portaient.

En participant à ces travaux, j'ai pu mesurer la difficulté que nous avons, les uns et les autres, à opérer les décentrations nécessaires à ce networking, avec quelle facilité nous réduisons, dénaturons les constructions théoriques qui nous sont étrangères, en essayant d'en faire sens à travers nos propres filtres. D'où l'importance de constituer des milieux antagonistes, au sens de

la théorie des situations didactiques, pour ce type de recherche. Dans les deux projets évoqués, la diversité des acteurs et de leurs cultures théoriques, la légitimité qui leur était reconnue, a permis, à l'évidence, de constituer de tels milieux.

Personnellement, cela a renforcé ma conviction que, sans rentrer dans cette cuisine de la recherche évoquée par Bakker et que les publications ne donnent pas à voir, avec ceux qui la font, et sans développer des praxéologies de recherche qui permettent de travailler de façon réflexive sur cette cuisine, le travail et les avancées qu'il produit risquent de rester très limités. Le networking de théories passe de fait par le networking de pratiques. Il n'est donc pas en un sens étonnant que, dans le texte déjà cité, Bakker note une similarité étonnante entre les stratégies de networking identifiées et les mécanismes d'apprentissage qu'il a répertoriés dans une méta-étude (Akkerman & Bakker 2011) sur un thème très différent, celui du « boundary crossing within and between work, school and home contexts », qui vise à établir un dialogue, cette fois entre des pratiques. En référence à ce travail, il définit les frontières (boundaries) comme des différences socio-culturelles conduisant à des discontinuités dans l'action et l'interaction, et la traversée de frontières (boundary-crossing) comme « the efforts by individuals or groups at boundaries to establish or restore continuity in action or interaction across practices » (Bakker 2016, p. 269). La similarité repérée l'amène à questionner la linéarité de l'échelle de stratégies de networking. Les mécanismes de croisement de frontières identifiés (identification, connexion, réflexion et transformation) ont, en effet, eux aussi été souvent interprétés, à tort selon lui, comme ordonnés hiérarchiquement, la transformation qui correspond à la collaboration et au développement conjoint de (nouvelles) pratiques qu'il met en rapport avec les stratégies d'intégration locale et synthèse, étant notamment considérée comme la forme supérieure de croisement de frontières. La vision du networking comme une forme de croisement de frontières l'amène aussi à mettre l'accent sur le rôle essentiel joué dans ce croisement par les « brokers », ces agents qui traversent les frontières et, ce faisant, amènent des éléments d'une pratique dans une autre, et les objets frontières (boundary objects), artefacts qui vivent dans différentes pratiques mais y sont souvent utilisés de différentes façons, non nécessairement consensuelles. A ma connaissance, cette analogie a priori prometteuse avec les travaux sur le boundary crossing n'a pas été travaillée de façon systématique, même si on trouve la notion de boundary object utilisée dans certaines publications relevant du networking. Par exemple, dans l'introduction du numéro spécial de *Educational Studies in Mathematics* dédié au projet *ReMath* (Kynigos & Lagrange 2014b), il est mentionné (p. 326) que certaines constructions ont joué le rôle d'objets frontières comme les notions de sensibilité clef sur laquelle je reviendrai dans la suite, de fonctionnalité didactique et de profil épistémologique d'un DDA, mais aussi les diverses grilles élaborées pour soutenir le travail collectif. Au sein du groupe de Brême, la notion d'analyse *a priori* est apparue comme un objet frontière possible après que les collègues israéliens, à la lecture de l'analyse de la vidéo proposée dans le cadre de la TSD, aient perçu des similarités et complémentarités intéressantes avec leur propre analyse basée sur AiC et décidé de l'incorporer à leurs pratiques. Mais nous avons bien perçu également que cet objet constituerait plus difficilement un objet frontière avec une théorie comme AiC adoptant une perspective sémiotique multimodale, du fait de l'importance qui était accordée aux gestes dans cette perspective et à l'activité sémiotique les incorporant, une dimension de l'activité sémiotique qui semblait difficile à prendre en compte dans une analyse *a priori*. La question des *brokers*, elle, a été encore moins considérée et pourtant, à la réflexion, certains d'entre nous ont joué ce rôle dans les deux projets, et cela a sans aucun doute favorisé la progression du travail.

2. L'évolution des travaux de networking

Jusqu'ici, j'ai essentiellement considéré dans cette réflexion plus globale les deux projets qui m'ont servi d'exemples. Mais ils ne représentent que très partiellement les travaux de recherche qui relèvent de cette entreprise. Il suffit pour s'en apercevoir de considérer les actes des colloques CERME ou la place centrale accordée au networking de théories dans le chapitre de synthèse qui retrace l'histoire du groupe de travail sur les théories depuis sa création à CERME 4 (Kidron, Bosch, Monaghan & Palmér 2018). Comme souligné dans cette synthèse, les travaux de networking ont plutôt relevé des stratégies *Comprendre* et *Rendre compréhensible*, *Comparer* et *Contraster*. Ils ont pris souvent la forme de dialogues entre théories, mettant en évidence les potentialités offertes par ces dialogues mais aussi les difficultés notamment linguistiques qu'ils posent, en particulier parce que les mêmes termes sont souvent utilisés avec des sens très différents. Ils ont montré qu'un dialogue productif pouvait s'établir entre des théories aux principes très éloignés, je pense notamment au dialogue établi entre la théorie APOS directement inspirée de l'épistémologie piagétienne et la TAD (voir par exemple (Bosch, Gascón & Trigueros 2017)). Il devrait aider à la capitalisation des connaissances didactiques concernant l'enseignement et l'apprentissage au niveau universitaire, un champ de recherche dans lequel les travaux se référant à la théorie APOS sont particulièrement nombreux et ceux se référant à la TAD en nombre croissant (Winslow & Rasmussen 2020).

A partir de CERME 10, on note l'émergence d'une attention particulière aux questions de design, qui semble résonner avec certaines des conclusions du projet ReMath, par la reconnaissance que le networking pose dans ce cas des questions plus complexes. Cependant, l'accent est mis sur une dimension totalement absente du projet ReMath, celle des relations entre *design research* et normativité : « What is special about design research is that the justification of an educational goal requires normative theories, and the ways in which means are implemented to reach the goal – for example in design principles - requires prescriptive theories » (Bikner-Ahsbahr, Baller, Haspekian & Maracci 2017, p. 2686). La question du caractère prescriptif ou normatif possible des théories didactiques, en relation avec la question plus globale des relations entre recherche fondamentale et action en didactique des mathématiques, a donné lieu à une série d'articles dans la revue *For the Learning*, suite à l'enquête réalisée par Gascón et Nicolás (2016). On y observe des positions contrastées qui ne peuvent être sans conséquences sur les formes que peut prendre un dialogue productif entre théories. C'est une question qui a été travaillée lors de la série de cours avancés proposés au CRM de l'Universitat Autònoma de Barcelona en 2019 (Barquero, Bosch, Chevallard, Florensa, Gascón, Nicolás & Ruiz, à paraître) mais sur laquelle la recherche est encore émergente.

3. Au-delà du seul networking de théories

Si je m'en réfère à mon expérience, il ne fait aucun doute que mon engagement dans ce champ de recherche a eu des conséquences sur ma vision du didactique et mes pratiques bien au-delà du seul networking de théories. C'est sur ce point que je vais faire porter la réflexion dans la dernière partie de cette section.

Comme je l'ai souligné, le développement de praxéologies de networking a suscité une intense créativité, en termes de tâches, de techniques, d'outils méthodologiques. Mes pratiques de recherche, depuis, se nourrissent de certaines de ces constructions. Je me limiterai ici à l'une d'elles, celle des sensibilités clefs (*key concerns*) mentionnée plus haut. Elle a émergé dans le projet TELMA et a été raffinée ensuite dans le projet ReMath. Partant de l'hypothèse que les théories sont avant tout des outils, que les constructions théoriques répondent donc à des besoins, il nous est apparu que c'est en essayant de remonter à ces besoins, que l'on pouvait

établir des connexions productives. S’agissant de la question des potentialités des artefacts numériques, il nous est rapidement apparu que ces besoins relevaient de plusieurs dimensions auxquelles nous étions les uns et les autres sensibles mais avec des intensités différentes suivant nos approches théoriques perspectives. Ceci a conduit à l’outil des sensibilités clefs où chaque équipe devait indiquer ses pondérations respectives, en respectant un certain nombre de contraintes pour rendre l’outil efficace. Plusieurs variantes ont été créées suivant qu’il s’agissait du développement d’artefacts ou de scénarios d’usage. La figure 3 ci-dessous montre par exemple les schémas respectivement élaborés par l’équipe grecque ETL et l’équipe française DIDIREM, s’agissant des sensibilités clefs prises en compte au niveau des représentations dans la conception et le développement des DDAs dont elles avaient la charge, *Casyopée* et *Cruislet*. Les six sensibilités clefs considérées sont les suivantes : la représentation des objets mathématiques, la représentation de l’interaction didactique, les actions possibles sur les représentations, les connexions entre représentations, l’évolution possible des représentations, et les relations avec les représentations culturelles et institutionnelles (axe « Cultural » sur la figure 3). Au-delà de la gradation de 0 à 5 de ces sensibilités visible sur les schémas, il est demandé de préciser, pour chacune d’elles, les principales références théoriques associées et si l’usage qui en est fait se situe au niveau des principes ou passe par des outils opérationnels, et si oui lesquels.

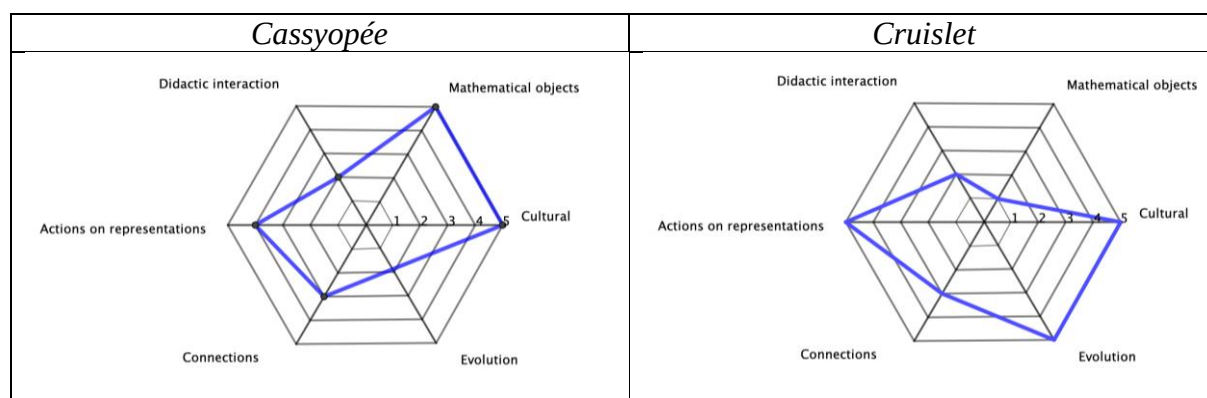


Figure 3 : Pondération des sensibilités clefs dans le cas de *Casyopée* et *Cruislet*

Avec Morten Blomøj, nous avons réinvesti cet outil lorsque nous avons étudié comment un certain nombre de théories didactiques existantes pouvaient contribuer à la conceptualisation de l’IBE (Inquiry based education) (Artigue & Blomøj 2013). Une analyse a priori nous a conduits à identifier dix dimensions⁵, et à questionner comment les différentes théories envisagées se situaient par rapport à ces dix dimensions, comment elles les hiérarchisaient, et cette technique s’est révélée très efficace pour structurer un paysage au départ faiblement connecté, mettre en évidence les potentialités de chaque approche et identifier des complémentarités possibles.

Même si je ne réinvestis pas ces outils aussi directement, cette expérience de networking nourrit aussi depuis quelques années le travail que je mène dans le cadre du projet international Lexicon (Clarke, Mesiti, Cao & Novotná 2017). Il s’agit, dans ce cas, d’identifier la terminologie

⁵ Ces dimensions sont les suivantes : the ‘authenticity’ of questions and students’ activity in terms of connection with students’ real life and link with out-of-school questions and activities ; the epistemological relevance of the questions from a mathematical perspective, and the cumulative dimension of mathematics ; the progression of knowledge as expressed in the curriculum ; extra-mathematical questions and the modelling dimension of the inquiry process ; the experimental dimension of mathematics ; the development of problem-solving abilities and inquiry habits of mind ; the autonomy and responsibility given to students, from the formulation of questions to the production and validation of answers ; the guiding role of the teacher and teacher–student(s) dialogic interactions ; the collaborative dimension of the inquiry process ; the critical and democratic dimensions of IBME.

didactico-pédagogique raisonnablement partagée par des enseignants de mathématiques expérimentés de niveau collège dans un pays donné, puis de comparer ces différents lexiques. Dix pays participent à ce projet qui a l'ambition de permettre de dépasser les effets réducteurs de l'usage de l'anglais comme langue de communication internationale, et aussi de contribuer au développement d'un discours professionnel partagé dans les nombreux pays où un tel discours n'existe pas vraiment. Comparer les lexiques de différents pays, leur structure, les formes que prennent les définitions, les exemples et non-exemples choisis, comprendre comment ils influencent la façon dont on lit une séance de classe et la partage avec d'autres, c'est répondre à des questions qui ne sont pas si éloignées de celles auxquelles j'ai essayé de répondre pendant une dizaine d'années et j'ai l'impression que l'outillage praxéologique dont je dispose, même s'il faut l'adapter, m'aide énormément. Cette recherche met aussi en évidence de nouveaux besoins de networking par exemple avec les praxéologies des chercheurs en narratologie pour exploiter les narrations des mêmes vidéos de classe produites par les différentes équipes (Artigue et al. 2017).

Cette expérience m'est aussi très utile quand je veux approcher une nouvelle théorie, ou faire sens d'évolutions théoriques, comme je l'ai fait récemment pour l'approche documentaire du didactique (Artigue 2019). Cette approche est récente puisque son émergence remonte à peine à une dizaine d'années, mais en l'espace d'une décennie elle a donné lieu à une multiplicité de travaux, de publications, de thèses (voir (Trouche, Gueudet & Pepin 2019) pour une vision actuelle). La diversité des expériences et références théoriques de celles et ceux qui ont contribué à son développement fait que cette approche unifie aujourd'hui, autour de la problématique globale du travail documentaire des enseignants, une variété de praxéologies de recherche dont les blocs théoriques combinent une multiplicité de discours. Dans le même temps, c'est une approche dont le noyau dur s'est stabilisé rapidement, comme je le constate, autour d'objets qui en sont devenus emblématiques et ont contribué à forger une identité qui transcende cette diversité, notamment la distinction conceptuelle entre ressource et document⁶ étendant à ce nouveau domaine la distinction entre artefact et instrument de l'approche instrumentale, mais aussi la méthodologie d'investigation réflexive avec l'outil technique associé que constitue la RSSR (représentation schématique du système de ressources). Ces caractéristiques font de l'approche documentaire du didactique un objet particulièrement bien adapté *a priori* à une étude nourrie par les pratiques de networking. Personnellement, en tout cas, cette étude m'a donné l'impression de progresser substantiellement dans la compréhension de cette approche. Et elle a renforcé ma conviction de la nécessité pour comprendre les théories d'interroger les pratiques qu'elles nourrissent et qui les nourrissent en retour, mais aussi de s'interroger sur les emprunts, conversions, connexions qui ont jalonné et conditionné leur développement.

Pour terminer ce texte, je voudrais revenir à la question initiale, celle de la diversité théorique croissante dans notre champ de recherche et de ses raisons d'être. Les débats à propos de cette diversité mobilisent en général prioritairement des arguments scientifiques concernant les spécificités de ce champ de recherche. Il me semble personnellement que ces spécificités ne suffisent pas à expliquer le foisonnement théorique observé, qu'il y a à interroger plus sérieusement la survalorisation du théorique que l'on y observe qui contribue à faire que produire du théorique devient ou est perçu comme un moyen d'obtenir, d'assurer une identité didactique, d'exister. Ceci nous oblige alors à sortir du seul champ didactique, et d'envisager d'autres connexions, d'autres appuis, comme le fait par exemple Corine Castela en se référant aux travaux de Bourdieu sur la sociologie de la recherche (Castela 2015). J'y renvoie le lecteur.

⁶ Un document est constitué d'une ressource ou d'un ensemble de ressources combinées et d'un schème d'usage de cette ou ces ressources.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- AKKERMAN, S. F. & BAKKER, A. (2011). Boundary crossing and boundary objects. *Review of Educational Research*, 81, 132-169.
- ARTIGUE, M. (2001). Learning mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematics Learning*, 7(3), 245-274.
- ARTIGUE, M. (Ed.) (2009). Connecting Approaches to Technology Enhanced Learning in Mathematics: The TELMA Experience. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 14(3).
- ARTIGUE, M. (2019). Reflecting on a Theoretical Approach from a Networking Perspective: The Case of the Documentational Approach to Didactics. In L. Trouche, G. Gueudet, & B. Pepin (2019). *The 'Resource' Approach to Mathematics Education* (pp. 89-120). New-York : Springer.
- ARTIGUE, M. (à paraître -a). El 'networking' de teorías en educación matemática: ¿Qué significa y qué produce? *Actas del X Congreso Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas*, PUCP, Lima, 20-22 février 2020.
- ARTIGUE, M. (à paraître -b). Institutional transitions in university mathematics education. In B. Barquero B., M. Bosch, Y. Chevallard, I. Florensa, J. Gascón, P. Nicolás & N. Ruiz (Eds.) *Advances in the Anthropological Theory of the Didactic and their Consequences in Curricula and in Teacher Education*. Barcelona: Birkhäuser Basel.
- ARTIGUE, M., BARTOLINI-BUSSI, M., DREYFUS, T., GRAY E., & PREDIGER, S. (2006). Different theoretical perspectives and approaches in research in mathematics education. In M. Bosch (Ed.), *Proceedings of CERME4* (pp. 1239-1244). Barcelona : FUNDEMI IQS - Universitat Ramon Llull & ERME.
- ARTIGUE, M. & BLOMØJ, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 45(6), 797- 810.
- ARTIGUE, M., BOSCH, M. & GASCÓN, J. (2011). La TAD face au problème de l'interaction entre cadres théoriques en didactique des mathématiques. In M. Bosch et al. (Eds.), *Un panorama de la TAD. Actes du troisième congrès de la TAD* (pp. 33-56). Barcelona: Centre de Recerca Matemàtica.
- ARTIGUE, M. & BOSCH, M. (2014). Reflection on Networking through the praxeological lens. In A. Bikner-Ahsbahr & S. Prediger (Eds.), *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education* (pp. 249-266). New York : Springer.
- ARTIGUE, M., & MARIOTTI, M. A. (2014). Networking theoretical frames: the ReMath enterprise. *Educational Studies in Mathematics*, 85(3), 329-356.
- ARTIGUE, M., NOVOTNÁ, J., GRUGEON-ALLYS, B., HOROKS, J., HOSPESOVÁ, A., MORAOVÁ, H., PILET, J. & ŽLÁBKOVÁ, I. (2017). Comparing the professional lexicons of Czech and French mathematics teachers. In B. Kaur, W.K. Ho, T.L. Toh & B.H. Choy (Eds.), *Proceedings of PME 41* (Vol. 2, pp. 113-120). Singapore: PME.
- ARZARELLO, F., PAOLA, D., ROBUTTI, O., & SABENA, C. (2009). Gestures as semiotic resources in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 70(2), 97-109.
- BAKKER, A. (2016). Networking theories as an example of boundary crossing. *Educational Studies in Mathematics*, 93(2), 265-273.
- BARQUERO B., BOSCH M., CHEVALLARD Y., FLORENSA I., GASCÓN J., NICOLÁS P. & RUIZ N. (Eds.) (à paraître). *Advances in the Anthropological Theory of the Didactic and their Consequences in Curricula and in Teacher Education*. Barcelona: Birkhäuser Basel.
- BARTOLINI-BUSSI, M. & MARIOTTI, M. A. (2008). : Artifacts and signs after a Vygostkian perspective. In L. English, M. Bartolini-Bussi, G. Jones, R. Lesh and D. Tirosh (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education, second revised edition* (pp. 746-805). Mahwah : Lawrence Erlbaum.
- BAUERSFELD, H. (1978). Kommunikationmuster in Mathematikunterricht. Eine Analyse am Beispiel der Handlungsverengung durch Antworterwartung. In H. Bauersfeld (Ed.), *Fallstudien und Analysen zum Mathematikunterricht* (pp. 158-170). Hannover : Schroedel.
- BEDNARZ, N., KIERAN, C., & LEE, L. (Eds.) (1996). *Approaches to Algebra: Perspectives for research and teaching*. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.
- BIKNER-AHSBAHS, A., & PREDIGER, S. (2008). Networking of Theories – An Approach for Exploiting the Diversity of Theoretical Approaches. In B. Sriraman & L. English (Eds.), *Theories in Mathematics Education* (pp. 483-506). NewYork: Springer.
- BIKNER-AHSBAHS, A., & PREDIGER, S. (Eds.) (2014). *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education*. New York : Springer.
- BIKNER-AHSBAHS, A., ARTIGUE, M., & HASPEKIAN, M. (2014). Topaze effect: A case study in Networking of IDS and TDS. In A. Bikner-Ahsbahr & S. Prediger (Eds.), *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education* (pp. 201-221). New York : Springer.
- BIKNER-AHSBAHS, A., BALLER, A., HASPEKIAN, M., & MARACCI, M. (2017). Theoretical perspectives and approaches in mathematics education research. In T. Dooley & G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of CERME10* (pp. 2683-2690). Dublin : DCU Institute of Education and ERME.

- BLUM W., ARTIGUE, M., MARIOTTI, M. A., STRÄßER, R., & VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. (Eds.) (2019). *European Traditions in Didactics of Mathematics*. New-York : Springer Open.
- BOSCH, M., GASCÓN, J. & TRIGUEROS, M. (2017). Dialogue between theories interpreted as research praxeologies: the cases of APOS and the ATD. *Educational Studies in Mathematics*, 95(1), 39-52.
- BROUSSEAU, G. (1986). Fondements de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, 7(2), 33-115.
- CASTELA, C. (2015). Considering theoretical diversity and networking activities in mathematics education from a sociological point of view. In K. Krainer, & N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of CERME9* (pp.2562-2568) <https://hal.archives-ouvertes.fr/CERME9-TWG17/hal-01289422v1>
- CLARKE, D., MESITI, C., CAO, Y. & NOVOTNÁ, J. (2017). The lexicon project: Examining the consequences for international comparative research of pedagogical naming systems from different cultures. In T. Dooley & G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of CERME10* (pp. 1610-1617). Dublin : DCU Institute of Education and ERME.
- GASCÓN, J. & NICOLÁS, P. (2017). Can didactic say how to teach? The beginning of a dialogue between the anthropological theory of the didactic and other approaches, *For the Learning of Mathematics*, 37(3), 26-30.
- GASCON, J. & NICOLAS, P. (à paraître).
- GODINO, J., ARTIGUE, M., ERNEST, P. & FURINGHETTI, F. (2006). Panel: History and theory of mathematics education. In M. Bosch (Ed.), *Proceedings of CERME 4* (pp. 45-64). FUNDEMI IQS - Universitat Ramon Llull & ERME.
- GRUGEON, B. (1995). *Etude des rapports institutionnels et des rapports personnels des élèves à l'algèbre élémentaire dans la transition entre deux cycles d'enseignement : BEP et Première G*. Thèse de Doctorat. Université Paris Diderot – Paris 7. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01252058/document>
- HAREL, G. & PAPERT, S. (Eds.) (1991). *Constructionism*. Norwood, N.J. : Ablex.
- HASPEKIAN, M. (2005). *Intégration d'outils informatiques dans l'enseignement des mathématiques, étude du cas des tableurs*. Thèse de Doctorat. Université Paris Diderot – Paris7. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00011388/document>
- KIDRON, I., BOSCH, M., MONAGHAN, J. & PALMÉR, H. (2018). Theoretical perspectives and approaches in mathematics education research. In T. Dreyfus et al. (Eds.), *Developing Research in Mathematics Education. Twenty Years of Communication, Cooperation and Collaboration in Europe* (pp. 254-268). London: Routledge.
- KYNIGOS, C. & LAGRANGE, J.-B. (Eds.) (2014a). Special Issue: Representing mathematics with digital media: Working across theoretical and contextual boundaries. *Educational Studies in Mathematics*, 85(3).
- KYNIGOS, C. & LAGRANGE, J.-B. (2014b). Cross-analysis as a tool to forge connections amongst theoretical frames in using digital technologies in mathematical learning. *Educational Studies in Mathematics*, 85(3), 321-328.
- LAGRANGE, J.-B. (2000). L'intégration d'instruments informatiques dans l'enseignement : une approche par les techniques. *Educational Studies in Mathematics*, 43(1), 1-30.
- LAGRANGE, J.-B., ARTIGUE, M., CAZES, C., GELIS, J.-M. & VANDEBROUCK, F. (2010). Représenter des mathématiques avec l'ordinateur. In M. Abboud-Blanchard & A. Flückiger (Eds.), *Actes du Séminaire National de Didactique des Mathématiques. Année 2010* (pp. 67-100). Paris : IREM de Paris. <http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/publications/AAR11001.pdf>
- LE FEUVRE, B., MEYRIER, X. & LAGRANGE, J.-B. (2010). Apprendre des notions mathématiques, géographiques et algorithmiques à l'aide d'un environnement de navigation 3D au-dessus de la Grèce. *Repères IREM* 81, 29-48.
- NOVOTNÁ, J. & HOSPEŠOVÁ, A. (2007). What is the price of Topaze? In J.-H. Woo, H.-C. Lew, K.-S. Park & D.-Y. Seo (Eds.), *Proceedings of PME31* (Vol. 4, pp. 25-32). Seoul : PME.
- PAPERT, S. (1980). *Mindstorms: Children, computers and powerful ideas*. Brighton : Harvester Press.
- TROUCHE, L., GUEUDET, G. & PEPIN, B. (Eds.) (2019). *The 'Resource' Approach to Mathematics Education*. New-York : Springer.
- RABARDEL, P. (1995). *Les hommes et les technologies*. Paris : Armand Colin.
- VÉRILLON P. & RABARDEL P. (1995). Cognition and artifacts : a contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology of Education*, 10(1), 77-101.
- WEBER, M. (1965). *Essais sur la théorie de la science (1904-1917)*. Paris : Librairie Plon.
- WINSLOW, C. & RASMUSSEN, C. (2020). University Mathematics Education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education (2nd Edition)* (pp. 881-890). New York : Springer.

LES ESPACES DE TRAVAIL MATHÉMATIQUE ET ALGORITHMIQUE CONNECTÉS. ÉTUDE D'UNE ACTIVITÉ ALGORITHMIQUE COMME OBJET D'APPRENTISSAGE DE SAVOIRS SPÉCIFIQUES ET D'USAGE : CAS D'UNE INGÉNIERIE « DICHOTOMIE CONTINUE »

Dominique LAVAL

CY Cergy Paris Université – INSPE académie de Versailles

dominique.laval@cyu.fr

Résumé

Selon les programmes mathématiques des lycées français, l'enseignement de l'algorithmique apparaît comme *outil* pour donner sens à un certain nombre de notions mathématiques étudiées. Comment dépasser ce stade pour que l'algorithmique devienne *objet* d'apprentissage ?

Cet article concerne l'étude et la construction d'algorithmes par des élèves de classes de Seconde (Grade 10) et du cycle terminal scientifique (Grades 11 et 12) du lycée, en lien avec le raisonnement et la preuve dans le domaine de l'analyse.

Le cadre théorique se situe sur les connexions entre le modèle d'*Espaces de Travail Mathématique spécifique* et la spécification d'un modèle d'*Espaces de Travail Algorithmique*. Avec des paradigmes guidant et orientant le travail des élèves, ces connexions permettent d'étudier quels espaces personnels les élèves se construisent selon leur niveau scolaire et comment ils articulent des connaissances sur les algorithmes et le domaine de l'analyse. Ce cadre théorique permet de donner du sens au travail des élèves dans des activités impliquant différents domaines, en tenant compte de la dimension sémiotique et de l'utilisation d'instruments, ainsi que du contenu et du raisonnement propre au domaine de l'analyse. Une ingénierie didactique est construite, puis expérimentée par les élèves sur l'*algorithme de dichotomie continue*, où ils produisent une preuve du *théorème des valeurs intermédiaires*.

Mots clés

Mathématiques ; algorithme ; algorithmique ; ingénierie didactique ; Espaces de travail Mathématique Spécifique ; Espaces de travail Algorithmique ; Paradigmes Algorithmiques ; analyse ; preuves ; algorithme de *dichotomie discrète* ; algorithme de *dichotomie continue*.

I. INTRODUCTION

1. Les origines d'un enseignement de l'algorithmique dans les lycées français

L'enseignement de l'algorithmique dans les programmes de mathématiques est mis en place de 2010 à 2012, dans les trois années de lycée. Il s'est élargi à partir de 2015 à l'école maternelle française, et à partir de 2016 à l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire et au collège.

Cette introduction de l'algorithmique dans le système scolaire trouve en partie sa source dans les travaux de la commission Kahane (2002). En effet, à la suite de ces travaux, une (ré)introduction d'éléments en lien avec le domaine de l'informatique dans les programmes scolaires est mise en place. Elle se situe dans la continuité d'une évolution perceptible mise en place petit à petit depuis la deuxième moitié des années 90, après une brève existence à travers un enseignement optionnel au cours de la décennie des années 80 (Lagrange, 1990).

En parallèle, des domaines mathématiques comme l'analyse, les statistiques et les probabilités font l'objet d'une introduction d'éléments en lien avec l'informatique. Le développement de calculatrices à calcul formel et graphique, puis de logiciels de géométrie dynamique, ainsi que des tableurs accélèrent cette introduction à travers les TICE¹. Ainsi, l'institution, à travers divers documents d'accompagnement et de manuels scolaires, propose de nombreuses activités sollicitant l'utilisation de tels instruments.

Plus spécifiquement, à partir de 2000, l'arithmétique, introduite dans cadre des programmes de l'enseignement de spécialité des mathématiques de la Terminale Scientifique, favorise l'introduction de tâches en lien avec l'utilisation d'éléments informatiques (Laval, 2018). Cependant, le constat est le fait que « l'enseignement veut attacher des notions de base de l'informatique (comme boucle, test, structure de données) à des domaines des mathématiques, comme l'analyse, la statistique et récemment l'arithmétique, sans que la notion d'algorithme soit objet d'enseignement » (Bessot et al., 2006). Par ailleurs, au cours de la première décennie des années 2000, les élèves utilisent « des algorithmes sans que pour autant un enseignement explicite et institutionnalisé de l'algorithmique trouve sa place dans le système éducatif tout au long de cette décennie » (Laval, 2018). Les programmes scolaires de cette époque ne proposent aucune spécificité de l'algorithmique et de la programmation dans l'enseignement des mathématiques. L'institution ne retient pas de langages particuliers de programmation (Birebent & Nguyen, 2005). La difficulté de faire vivre des apprentissages autour des notions de base en informatique se traduit « dans les manuels par le refus de construire des types de tâches relatives à la programmation des algorithmes et par le recours à des logiciels de calcul pour instrumenter les techniques associées à ces tâches » (Nguyen, 2005, p. 40).

2. Une introduction progressive de l'algorithmique dans l'enseignement du secondaire

A partir de 2009, l'idée d'une introduction officielle d'un enseignement de l'algorithmique dans le secondaire se met en place. Cette introduction se fait de façon progressive, sur six ans. De 2010 à 2012, elle apparaît progressivement dans les différents niveaux des lycées généraux et technologiques, puis de 2015 à 2016, une approche de l'algorithmique associée à l'enseignement des mathématiques est aussi introduite dans l'ensemble des cycles du primaire et des collèges. L'institution insiste ainsi sur la nécessité d'amener les élèves à s'initier à l'algorithmique (Laval, 2018, p. 23). Selon les directives institutionnelles, cette introduction de l'algorithmique doit être transversale, quel que soit le niveau d'enseignement scolaire.

3. Les motivations de notre recherche

Dans cet article, nous nous interrogeons sur les apports d'une introduction de l'algorithmique auprès des élèves, dans un domaine mathématique spécifique enseigné au lycée. Pour cela, nous mettons en place une *ingénierie didactique* (au sens d'Artigue, 1992), autour de tâches expérimentées dans des classes de Seconde et du cycle terminal scientifique, afin d'observer

¹ Technologies de l'information et de la communication pour l'enseignement

chez des élèves de lycée comment l'algorithmique peut donner du sens à l'introduction de certains concepts mathématiques enseignés dans le domaine de l'analyse.

Cependant, associer l'algorithmique à cette introduction de concepts mathématiques ne va pas nécessairement de soi. En effet, selon le rapport Villani-Torossian² (2018), une des difficultés consiste à faire vivre des situations en lien avec le réel, à faire vivre aussi des activités de modélisation qui aient du sens. Nous pouvons mettre aussi ces difficultés en relation avec un recul de la preuve. Il est possible que les situations évoquées dans la plupart des manuels scolaires soient traitées sur le mode de l'application de résultats mathématiques qu'il ne serait pas nécessaire de prouver. Ainsi, de nombreux élèves arrivant à l'université éprouvent des difficultés à comprendre ce qu'est une preuve.

De plus, l'institution part du constat que l'élève sait que des langages informatiques sont régulièrement utilisés afin de programmer des outils numériques et de réaliser des traitements automatiques de données. En revanche, l'élève ne connaît pas nécessairement les principes de base de l'algorithmique et de la conception des programmes informatiques.

Pour cette étude qui porte sur les mathématiques au lycée, nous partons de l'hypothèse (Laval, 2018) que la mise en œuvre d'algorithmes dans des domaines spécifiques et leur implémentation dans des environnements numériques afin de les tester, vont permettre à l'élève d'acquérir une *pensée algorithmique* (Knuth, 1968, 2011), celle de l'informatique, en complément à une *pensée mathématique*.

4. Contexte de notre recherche et questions générales moteurs de celle-ci

4.1 Contexte de notre recherche

Nous nous positionnons sur une approche de tâches qui peuvent conduire l'enseignant à donner du sens, auprès des élèves, à un enseignement de l'algorithmique ne relevant pas nécessairement d'un enseignement universitaire du type *Analyse numérique*. Dans le cas d'un tel enseignement, les objectifs sont de développer chez l'étudiant des compétences sur la résolution analytique ou numérique de systèmes d'équations différentielles, aux dérivées partielles ou intégrales, ainsi que des problèmes d'existence et d'unicité de solution. En revanche, dans notre approche, les tâches que nous proposons doivent permettre « à l'élève d'étudier l'algorithmique comme objet d'apprentissage en classe de mathématique » (Laval, 2018). Ainsi, en accord avec Chevallard (1986), il s'agit de *transformer un savoir savant en un savoir à enseigner*.

A travers la lecture des programmes des trois années du lycée³, nous observons que l'enseignement de l'algorithmique apparaît comme un *outil* permettant de donner du sens à un certain nombre de notions étudiées. En nous situant alors dans la continuité des travaux de Modeste (2012) et de Briant (2013), nous nous demandons comment dépasser ce stade d'*outil* pour que l'algorithmique, dans le cadre d'une dialectique *outil-objet* au sens de Douady (1986), devienne un *objet* d'apprentissage dans le domaine de l'analyse. Pour cela, nous faisons le choix d'étudier une preuve basée sur l'*algorithme de dichotomie*, du *Théorème des valeurs intermédiaires*.

² <https://disciplines.ac-montpellier.fr/mathematiques/rapport-villani-torossian> (Consulté le 12 juin 2020)

³ B.O. numéro 30, du 23 juillet 2009, en classe de seconde générale et technologique, B.O. spécial n° 9, du 30 septembre 2010, en classe de première scientifique et B.O. spécial n° 8, du 30 septembre 2011, en classe de terminale scientifique

4.2 Questions générales

Dans le cadre de notre problématique et de notre méthodologie, nous construisons un cadre théorique se situant dans la continuité des travaux de Houdement, Kuzniak et Richard (2006, 2011 et 2014) sur les *Espaces de Travail*. En effet, nous partons de l'hypothèse que les activités mathématiques proposées aux élèves des lycées français articulent plusieurs champs, certains proprement mathématiques et d'autres relevant d'un autre domaine scientifique, ici l'algorithmique. L'hypothèse serait alors que les interactions faites par les élèves entre ces différents champs pourraient « être porteuses de significations et par conséquent contribuer aux apprentissages de nouveaux concepts mathématiques et informatiques » (Laval, 2018).

La rencontre avec les *Espaces de Travail Mathématique spécifique* (ETM_s) nous a conduit à élaborer un cadre théorique basé sur les connexions entre ETM_s et *Espaces de Travail Algorithmique* (ETA) et l'étude des différents niveaux de paradigmes mathématiques, mais aussi algorithmiques. En effet, bien que cette étude à travers les paradigmes ne soit pas décrite dans cet article, il est à noter qu'elle permet de compléter des analyses fines du travail des élèves suivant leurs niveaux scolaires, tant dans le domaine mathématique spécifique que dans celui de l'algorithmique⁴.

Ainsi, cet article est motivé par la nécessité de construire un cadre théorique approprié pour donner du sens au travail des élèves lors d'une tâche impliquant différents domaines. Nous avons ainsi le domaine de l'analyse avec l'élaboration d'une preuve du *Théorème des valeurs intermédiaires* (TVI) qui s'appuie sur la *méthode de dichotomie*. Elle – la méthode de dichotomie – est associée au domaine de l'algorithmique, le tout tenant compte des dimensions sémiotiques ainsi que de l'utilisation d'instruments, et du contenu et du raisonnement propres à chacun de ces domaines.

II. LES PRINCIPAUX AXES DE NOTRE RECHERCHE

1. Construction d'un cadre théorique

1.1 Un nouveau cadre théorique, pourquoi ?

Classiquement, les activités qui impliquent une tâche mathématique dans plusieurs domaines sont analysées en considérant que les entités impliquées dans la tâche apparaissent sous différentes représentations sémiotiques, chacune appartenant à un champ. C'est le principe dit « multi-représentation ». Parmi les nombreuses approches théoriques des « multi-représentations », nous partons de la prise en compte par Duval (2006) de la pluralité des représentations pour un objet donné. Selon Duval, il n'y a pas d'autre moyen d'accéder aux objets mathématiques que de produire des représentations sémiotiques. Il souligne que les représentations sont organisées dans des systèmes sémiotiques. En effet, dans un système sémiotique, certaines représentations sont appelées *registres* et il est nécessaire de se concentrer spécifiquement sur les processus de travail à l'intérieur et entre les registres. Dans cette approche *multi-représentationnelle*, les activités destinées aux élèves dans différents domaines sont jugées utiles en raison des possibilités qu'elles offrent de travailler sur différentes

⁴ (N.D.L.R.) Pour plus d'informations sur l'étude des paradigmes nous renvoyons le lecteur à la thèse de Laval (2018)

représentations sémiotiques et de les coordonner. Cependant, cette vision *multi-représentation* nous semble ne pas permettre à elle seule de vraiment comprendre les activités impliquant plusieurs domaines en interaction et leurs potentialités. Certains programmes scolaires accordent beaucoup d'importance aux travaux sur les représentations et les élèves maîtrisent parfaitement les processus de conversion et de traitement, mais cela n'implique pas nécessairement une compréhension approfondie des notions en jeu. Par exemple, même lorsque les élèves maîtrisent les quatre représentations classiques des fonctions (verbale, symbolique, graphique et tabulaire), les aspects fondamentaux des fonctions (correspondance, variation, graphique, etc.) et leur coordination restent problématiques (Ayalon, Watson & Lerman, 2016).

Un autre cadre théorique qui permet de donner du sens aux activités de coordination de différents domaines (en particulier des domaines mathématiques) est celui de Douady (1986). En effet, pour Douady, un cadre est constitué d'objets issus d'une branche des mathématiques, de la relation entre ces objets, de leurs diverses expressions et des images mentales associées à ces objets. Lorsque les élèves résolvent un problème, ils peuvent l'examiner dans différents contextes. Passer d'un cadre à un autre est important pour que les élèves progressent et que leurs conceptions évoluent. Selon des chercheurs comme Perrin-Glorian (2004), il est parfois difficile de distinguer les approches représentationnelles des cadres, en particulier lorsqu'une phase de travail peut être considérée à la fois comme un basculement entre les cadres et une conversion des représentations. En réalité, au lieu de se contredire, les deux approches se complètent. Au-delà de son contenu mathématique, chaque cadre offre des systèmes sémiotiques spécifiques, et la coordination des cadres implique également la coordination des systèmes sémiotiques. Selon Lagrange et Laval (2019), ce cadre est potentiellement productif dans le sens qu'au-delà des représentations, il met l'accent sur les contenus et le raisonnement mathématiques, ainsi que sur la coordination de ceux-ci dans différentes branches des mathématiques.

Cependant, de nombreux domaines impliqués dans les activités des élèves ne sont pas des domaines mathématiques. Reprenons l'exemple des fonctions. Cette notion est présente dans plusieurs branches des mathématiques avec des définitions et des propriétés différentes, mais ces définitions et propriétés n'ont de sens que lorsqu'elles sont liées à des pratiques dans des domaines non mathématiques, comme l'économie, la biologie, la physique, la mécanique, etc. Par ailleurs, les instruments du numérique disponibles pour les élèves, devenant de plus en plus sophistiqués ont permis de faire évoluer l'enseignement des mathématiques au lycée, depuis une quarantaine d'années. Cela débuta avec l'apparition de calculatrices programmables au cours des années 1980, puis avec le développement au cours des années 1990 de calculatrices à calcul formel, suivi depuis la fin des années 2000, de la généralisation de logiciels de programmation utilisables sur ordinateur permettant d'implémenter des algorithmes écrits au *papier-crayon* afin de tester leur validité et leur robustesse. Dans cette perspective d'évolution de l'enseignement des mathématiques articulé à un enseignement algorithmique, des chercheurs, comme Lagrange (1999), ont insisté sur le développement indissociable des connaissances spécifiques liées à l'utilisation des technologies numériques et de connaissances relatives aux mathématiques dans une genèse instrumentale (Lagrange & Laval, 2019). Cette utilisation des technologies numériques nous renvoie à l'approche instrumentale de Rabardel (1995) « qui repose sur trois concepts fondamentaux : la distinction artefact/instrument, la genèse instrumentale et le champ instrumental d'un artefact » (Claver, 2013). Ceci est important car sinon, une approche instrumentale ne serait qu'un cadre psychologique offrant peu d'informations pour l'enseignement des mathématiques, selon Lagrange et Laval (2019).

De même, Bartolini Bussi et Mariotti (2008) ont noté que l'utilisation d'instruments et la réflexion qui y est associée impliquaient de nombreux signes qui, pour un élève, n'avaient peut-être pas un sens mathématique dans l'immédiat. Ainsi, ils ont proposé l'idée de « médiation

sémiotique » pour se référer à l'activité de la classe nécessaire pour assurer la productivité du travail avec des instruments à un niveau sémiotique.

Chaque cadre théorique, « multi-représentation », coordination des cadres mathématiques et approche instrumentale, met l'accent sur une dimension spécifique : les processus sémiotiques ou sur le contenu et le raisonnement, ou sur l'utilisation d'instruments.

À la suite de ces observations, se pose alors la question du choix d'un cadre théorique qui pourrait aider à donner du sens au travail de l'élève dans une activité impliquant plusieurs domaines et leurs coordinations, en tenant compte de la dimension sémiotique ainsi que de l'utilisation des instruments, des contenus et des raisonnements propres à chaque domaine. Pour cela, nous présentons le cadre des *Espaces de Travail Algorithmique* (ETA) (Laval, 2018). De plus, afin d'étudier plus finement le travail de l'élève dans des domaines mathématiques et dans des domaines non mathématiques où les notions mathématiques peuvent avoir du sens, nous nous référons aussi aux *Espaces de Travail Connectés* (ETC) (Minh et Lagrange (2016) et Lagrange (2018)), en tenant compte de manière exhaustive des dimensions sémiotique, discursive et instrumentale. Nous nous interrogeons ensuite sur l'utilité des ETC en lien avec des *Espaces de Travail Mathématique spécifique*, ici l'analyse ($ETM_{analyse}$) et des ETA pour relever le nouveau défi posé par des activités algorithmiques et de programmation informatique dans l'enseignement des mathématiques au lycée.

1.2 Le cadre théorique principal : les *Espaces de Travail*

Tenant compte des observations rapportées dans la section précédente, nous proposons que le cadre théorique des *Espaces de Travail Algorithmique* (ETA) soit basé pour l'essentiel sur les recherches en didactique des mathématiques, entreprises depuis plus de quinze ans, autour des *Espaces de Travail Mathématique* (ETM).

Dans un premier temps, les *Espaces de Travail* étaient liés au domaine de la géométrie. En 2006, Houdement et Kuzniak présentèrent la construction d'un modèle d'*Espaces de Travail Géométrique* (ETG) et de leurs paradigmes. Puis, l'évolution de la recherche en didactique des mathématiques en lien avec les *Espaces de Travail* a fait sentir la nécessité de développer ce cadre théorique initial à d'autres domaines des mathématiques et a ainsi conduit à l'élaboration d'*Espaces de Travail Mathématique spécifiques* (ETM_s) (Kuzniak & Richard, 2014) associés à l'algèbre, l'arithmétique, l'analyse, les probabilités, etc.

Tenant compte de cette évolution sur les ETM_s , nous sommes alors partis de l'hypothèse qu'une série de tâches dans le domaine de l'algorithmique pouvait être aussi analysée dans le cadre d'un *Espace de Travail* du type ETG. Cette hypothèse vient du fait que la réalisation d'un algorithme comme représentation d'une suite finie d'opérations élémentaires, à appliquer dans un ordre déterminé à des données, peut être comparée aux différentes étapes à mettre en place lors de la construction d'une figure géométrique donnée. Par exemple, au niveau du primaire, on parle de programme de construction d'une figure géométrique, qu'elle soit simple ou complexe. Ainsi, « tant pour la réalisation d'un algorithme que pour la construction d'une figure géométrique, le processus associé permet de résoudre un même type de problème » (Laval, 2018).

Par conséquent, nous faisons l'hypothèse de ne pas réduire l'algorithmique à un simple sous-domaine des mathématiques. Ainsi, nous ne devons pas nous contenter d'étendre les ETM_s à un ETM_{algo} . Nous cherchons alors à définir un nouvel *Espace de Travail* propre à l'algorithmique. Nous voyons donc l'algorithmique comme une discipline à part entière qui peut être en interaction, entre autres, avec des ETM_s . Ainsi, il s'avère la nécessité de construire et de justifier l'existence d'un *Espace de Travail Algorithmique* comme *Espace de Travail* à

part entière. En effet, nous partons du fait qu'une recherche autour d'un enseignement de l'algorithmique au lycée, et plus récemment au collège et au primaire, peut se voir tant d'un point de vue didactique de l'informatique comme l'ont évoqué des chercheurs comme Lagrange et Rogalski (2017), ainsi que Samurçay (1989), mais aussi d'un point de vue didactique des mathématiques comme le présente Ouvrier-Buffet, Modeste et Gravier (2010) en signalant que « l'algorithmique est [...] objet mathématique ». Tenant compte de ces deux types de point de vue, nous faisons alors le choix de créer un nouvel *Espace de Travail* que nous nommons *Espace de Travail Algorithmique* (ETA).

Les Espaces de Travail Algorithmique

Comme pour les *Espaces de Travail Mathématique*, nous avons deux organisations des ETA. Une première qui est constituée d'un plan épistémologique que nous représentons dans la figure 2 et une seconde qui est due au fait que l'ouverture sur le plan cognitif des ETA (voir figure 3) se fait en interaction avec le niveau épistémologique et les composantes que nous allons présenter.



Figure 2 : Plan épistémologique des ETA

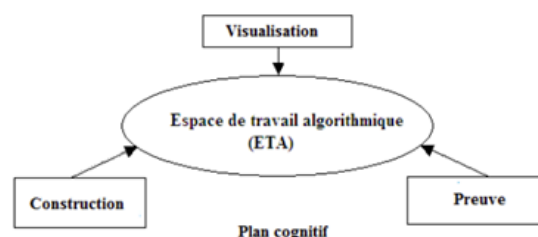


Figure 3 : Plan cognitif des ETA

Dans le plan épistémologique (figure 2) des ETA, les éléments des ensembles des « artefacts programmables » et des idées théoriques sont deux composantes de base pour tout plan épistémologique associé à un domaine algorithmique particulier. L'ensemble des « artefacts programmables » est constitué de la calculatrice, d'objets programmables, d'un langage naturel, d'un langage pseudo-code, de langages algorithmiques, d'organigrammes et d'environnements numériques permettant de programmer et de tester des algorithmes.

La construction d'algorithmes passant par un langage, plusieurs types de langages peuvent être employés pour exprimer des algorithmes. Cependant, il ne faut pas prendre le mot *langage* au sens technique de programmation. En effet, l'objet de l'algorithmique est de comprendre si l'on peut résoudre tel ou tel problème par le calcul, et si oui, de quelle manière, et à quel coût en termes de temps et de mémoire. (Laval, 2017, p. 270).

L'« ensemble d'idées théoriques » est constitué de concepts de modélisation mathématique et d'algorithmes, mais aussi de l'étude de la structure de l'algorithme et du choix des variables itératives qui sont utilisées lors de construction de l'algorithme, ainsi que de son *effectivité* et de son *coût*. Une première vérification consiste souvent à pratiquer *manuellement* quelques essais. « Le concepteur et l'utilisateur peuvent exécuter l'algorithme *à la main* ou après l'avoir programmé sur l'ordinateur avec quelques données dont ils peuvent connaître le résultat. Si le résultat n'est pas conforme à l'attente, ils prouvent ainsi que l'algorithme est incorrect » (Laval, 2017). Par ailleurs, « de nombreux outils formels ou théoriques sont développés afin de décrire les algorithmes, de les étudier et d'exprimer leurs *qualités*, et de permettre de les comparer » (Ibid.). En effet, afin de décrire des algorithmes, nous avons des structures algorithmiques qui sont mises en évidence, les *structures de contrôle* (séquences, conditionnelles, boucles) et les *structures de données* (constantes, variables, tableaux, structures récursives de type listes, arbres, graphes). Par ailleurs, afin de « justifier de leur qualité, des notions de correction, de complétude et de terminaison sont mises en place. Pour comparer des algorithmes, une théorie de la complexité des algorithmes est définie » (Ibid.). Quant à l'« ensemble d'objets », il est le

lieu « où un algorithme est un traitement sur des objets qui peuvent être des objets mathématiques ou des objets du monde, notamment lorsqu'il s'agit de résoudre un problème » (Ibid.). Par exemple, l'*algorithme glouton* (*Greedy algorithm*) vise à optimiser le *rendu des monnaies*. « Les objets sont ceux sur lesquels va porter le problème. Ils aident ainsi à distinguer des artefacts qui servent à les manipuler » (Laval, 2018).

Le deuxième niveau des ETA, le plan cognitif (figure 3), est centré sur le sujet vu comme un sujet cognitif. Cette ouverture sur le champ cognitif se fait en étroite relation avec les composantes du niveau épistémologique et, pour rester dans un cadre didactique, il est possible d'adapter l'approche sémiotique de Duval (2006). Ainsi, de Duval, nous adoptons pour l'activité algorithmique l'idée de trois processus cognitifs :

- « Un processus de visualisation » (Kuzniak & Richard, 2014) qui est « en relation avec la représentation de l'algorithme et le support matériel » (Laval, 2018) utilisé pour le programmer.
- « Un processus de construction » (Kuzniak & Richard, 2014) « déterminé par les langages et les instruments utilisés comme les organigrammes, le langage naturel, un langage pseudo-code, un langage de programmation, les ordinateurs, des environnements numériques de type algorithmique, des calculatrices » (Laval, 2018).
- « Un processus discursif » (Kuzniak & Richard, 2014) permettant « d'étudier la terminaison, la correction, l'efficacité et la complexité de l'algorithme, mais aussi produit des argumentations ainsi que des preuves » (Laval, 2018).

Lors de l'exécution d'un algorithme, trois questions clés se posent, quelles que soient les données :

(1) L'algorithme se termine-t-il ? ; (2) L'algorithme résout-il correctement le problème posé ? ; (3) Suivant la *taille* des données, en combien de temps se termine l'algorithme ? Ainsi, la première question pose le problème de terminaison de l'algorithme, la seconde celle du problème de la correction (soit la démonstration) de l'algorithme et le troisième pose le problème de la complexité de l'algorithme. L'objectif est de prouver que l'algorithme résout le problème posé en un nombre fini d'étapes. (Laval, 2018, p. 91.)

2. Différents types d'ETM/ETA pour un modèle d'ingénierie didactique

2.1 Trois types d'ETM/ETA

Afin de favoriser la compréhension de nos propos et conformément aux travaux de Kuzniak (2011), nous distinguons trois types d'ETM/ETA. En effet, nous avons les *ETM/ETA de référence* définis selon des relations à des savoirs spécifiques en se basant sur des critères relatifs à l'algorithmique et aux mathématiques, les *ETA/ETM idoines* dépendant d'institutions et définis selon les manières dont les savoirs spécifiques en algorithmique et en mathématiques sont enseignés dans le cadre de ces institutions avec des fonctions propres, et les *ETA/ETM personnels* qui dépendent de l'élève et sont définis par les manières dont l'élève se confronte à un problème mathématique qui le conduirait à utiliser l'algorithmique, en se basant sur ses propres connaissances et capacités cognitives.

2.2 Observation des dynamiques pouvant exister dans et entre les ETM/ETA

Pour observer de telles dynamiques en fonction du domaine mathématique spécifique, des niveaux scolaires et des environnements numériques, il est nécessaire d'étudier ce qui se passe dans les *ETM/ETA idoines* et d'accéder au travail personnel des élèves.

Pour cela, nous faisons le choix de mettre en œuvre une ingénierie dans le domaine de l'analyse autour de l'*algorithme de dichotomie*. En effet, cet algorithme a l'avantage d'être pratiqué sur

les trois années du lycée : Seconde et classes du cycle terminal scientifique. Cela implique que nous observions ce qui se passe dans les *ETM/ETA idoines* et aussi que nous accédions au travail personnel des élèves. Ainsi, le cadre des *ETM/ETA* va nous servir de guide d'observation méthodologique et nous permettre de définir les objets, les relations entre les *Espaces de travail*.

L'objectif de l'ingénierie didactique (au sens d'Artigue (1992)) que nous allons présenter dans la partie III, sera de tester l'hypothèse que mener un travail approfondi sur des algorithmes par des élèves de Seconde et des classes du cycle terminal scientifique, leur permet : (1) de faciliter l'apprentissage d'une nouvelle notion mathématique ; (2) de développer une démarche scientifique dans le domaine de l'analyse ; (3) d'obtenir des compétences sur des langages de programmation. Cependant, ce semblant de « réduction » sur l'apport de l'algorithmique ne doit pas sembler mettre en second plan l'apport au niveau de l'algorithmique comme champ disciplinaire à part entière. En effet, nous proposons un développement important sur les articulations et les connexions entre ETA et $ETM_{analyse}$ pour cette ingénierie. Ainsi, dans le domaine de l'algorithmique, nous faisons le choix d'observer et d'étudier les compétences que doit acquérir l'élève pour bâtir des algorithmes qui nécessitent des connaissances sur les structures de boucles, les variables itératives, les tests d'arrêt et de sortie de boucles et une utilisation adéquate d'environnements numériques sur la programmation.

De ce fait, l'ingénierie sera à la fois un *produit*, résultat d'une analyse a priori, et un *processus* au cours duquel l'enseignant met en œuvre le produit en l'adaptant, le cas échéant, selon la dynamique de la classe. Par conséquent, nous nous intéressons aussi aux différents facteurs qui vont présider à l'élaboration de l'ingénierie didactique, et à leur interdépendance. Chacun de ces facteurs peut être soumis à des contraintes souvent contradictoires.

3. Problématique – Objectifs – Méthodologie

Notre travail implique de considérer les trois types d'ETM/ETA vus à la section précédente, tout en centrant notre questionnement sur les *Espaces de Travail idoines*. Le choix du domaine de l'analyse est particulièrement propice à l'étude des interactions et des connexions des ETM/ETA. En effet, dans ce domaine, les élèves sont amenés à utiliser de façon intuitive ou formelle, suivant le niveau scolaire où ils se trouvent, des concepts mathématiques comme la *continuité* et la *monotonie* d'une fonction sur un intervalle pour la détermination de conditions d'existence et d'unicité d'une solution d'une équation, mais aussi la connaissance de la notion de fonction partie entière afin de déterminer une valeur entière d'une moyenne de deux nombres entiers (cf. III – 1. & 2.).

3.1 Hypothèses de travail sur les ETM/ETA idoines

Pour les *ETM/ETA idoines*, nous nous référons aux programmes en fonction des domaines mathématique et algorithmique nécessaires à la bonne conduite par les élèves des tâches demandées. Ainsi, dans le cadre du programme de l'analyse, l'algorithmique peut par exemple contribuer aux apprentissages sur la détermination d'un zéro ou la recherche d'un antécédent d'une fonction sur un intervalle donné. En effet, après avoir justifié l'existence d'un unique zéro sur un intervalle pour une fonction donnée, soit par des considérations graphiques au niveau Seconde ou une utilisation du calcul différentiel complétée d'une observation graphique au niveau Première Scientifique ou encore une validation des conditions du *Théorème des valeurs intermédiaires* et de son corollaire (*Théorème de la bijection*) au niveau Terminale Scientifique, l'élève peut ensuite à l'aide d'un algorithme d'approximation déterminer une valeur approchée ou un encadrement de ce zéro. L'*ETM/ETA idoine* dépend alors des programmes et, par conséquent, des savoirs spécifiques enseignés dans le cadre institutionnel. Les interactions et connexions entre le domaine de l'analyse et un domaine algorithmique

dépendent aussi du choix des environnements algorithmiques qui peuvent être multiples, tant sur le plan des langages utilisés (naturel, pseudo-code, etc.) que sur les choix de représentations des algorithmes (organigramme, textuel, etc.) ainsi que dans le choix des environnements numériques (algorithmique, tableur, calculatrice, etc.). Les apprentissages en algorithmique et en programmation nécessitent des savoirs sous-jacents. Par exemple, dans le cas d'algorithmes complexes, ils peuvent nécessiter la mise en œuvre de plusieurs procédures que certains environnements algorithmiques utilisés au lycée, ne permettent pas nécessairement. Dans ce cas, l'élève est obligé de procéder à une progressivité dans la compréhension des différentes étapes des algorithmes utilisés afin de pallier l'impossibilité d'utiliser des sous-algorithmes. Nous entendons par sous-algorithmes, des blocs faisant parties de l'algorithme. Ils sont déclarés dans la partie entête, c'est-à-dire avant le début de l'algorithme, puis appelés dans le corps de l'algorithme.

3.2 *Méthodologie pour la conception et la mise en œuvre de l'ingénierie didactique*

Dans cet article, nous étudions la possibilité d'améliorer et de développer des compétences mathématiques et algorithmiques chez l'élève dans le domaine de l'analyse. Pour cela, nous nous référons au cadre théorique sur les ETM/ETA, afin de déterminer les interactions et les connexions possibles entre ETM_{analyse} et ETA. Pour mettre en évidence les différentes relations qui peuvent exister entre ces ETM et ETA, nous analysons les points forts dans les *Espaces de Travail de référence* et, dans les *Espaces de Travail idoine* en fonction des problèmes rencontrés par l'élève. Notre objectif est d'étudier les différentes dimensions des genèses, des interactions et leurs effets au niveau des élèves. Ainsi, nous observons les dynamiques qui existent dans les ETM/ETA sur les différents points étudiés. Pour cela, il est nécessaire que nous allions voir ce qui se passe dans les *ETM/ETA idoines* et aussi d'accéder au travail personnel des élèves, d'où la nécessité de développer une ingénierie didactique dans un domaine spécifique des mathématiques, ici l'analyse. Les ETM et les ETA vont nous servir de guide d'observation méthodologique pour définir les objets ainsi que les relations entre ETM et ETA grâce à l'ingénierie observée.

4. Questions de recherche

Cet article s'appuyant sur une étude de doctorat réalisée par Laval (2018), nous cherchons des réponses aux questions clés suivantes :

Q1 : Comment un cadre théorique basé sur le modèle des ETM_s/ETA aide à interpréter les connexions entre mathématique et informatique dans l'élaboration d'une ingénierie didactique sur la dichotomie ?

Q2 : Comment ce cadre théorique va permettre, dans une situation de type algorithmique, et à partir d'un présupposé épistémologique d'interactions fortes entre les mathématiques et l'informatique, de construire et expérimenter une ingénierie articulant les domaines de l'analyse et de l'algorithmique ?

Pour cela, nous présentons ici un scénario où nous décrivons une étude fine en termes de connexions entre ETM_{analyse} et ETA autour de la contribution d'une approche algorithmique de la *preuve du Théorème des Valeurs Intermédiaires* (TVI).

III. PRESENTATION DE L'INGENIERIE *DICHOTOMIE*

En nous référant aux travaux sur les *Espaces de Travail Connectés* de Minh et Lagrange (2016), nous menons une étude dans le cadre d'une ingénierie didactique sur les connexions entre un domaine spécifique des mathématiques : l'analyse et le domaine de l'algorithmique (§ II.1.). Ainsi, nous étudions ce que peut être l'apport de l'algorithmique pour donner du sens sur la validité des conditions nécessaires pour mettre en œuvre le TVI lors de la recherche de l'existence de solutions d'équations, qui a une relation particulière avec la *méthode de dichotomie*. Par cela, nous souhaitons amener les élèves à construire une preuve de ce théorème dans le domaine de l'algorithmique (§ II.3.).

Nous nous interrogeons aussi sur le travail que doit mettre en place un élève débutant en informatique pour organiser un test de sortie de boucle quand celui-ci n'est pas défini par une égalité à un nombre donné. Pour cela, nous débutons par un travail autour de la création d'un test d'arrêt associé à une problématique de jeu afin de générer un algorithme implémentable dans un environnement numérique où le test de sortie de boucle peut sembler assez *naturel* pour un élève débutant (§ II.2.). En effet, nous faisons l'hypothèse que l'étape d'un test d'arrêt non défini par une égalité à un nombre donné peut-être une source de difficulté informatique chez l'élève débutant cela ne s'observe pas nécessairement lorsque le travail se limite au *papier-crayon*.

Nous devons alors distinguer deux domaines de l'analyse : celui que nous appelons « discret » où l'élève travaille sur des suites de nombres dans $\mathbf{N}$ (§ II.2.), et celui que nous nommons « continu » où l'élève travaille sur des fonctions numériques définies sur des intervalles de $\mathbf{R}$ (§ II.3.).

Dans le cas *discret*, nous nous intéressons à des concepts mathématiques issus du domaine de l'analyse mais aussi du domaine des probabilités pour les ETM de référence et d'une structure itérative pour l'ETA.

Dans le cas *continu*, nous faisons le choix que les élèves acquièrent des connaissances non institutionnalisées sur les suites adjacentes afin de procéder à une preuve algorithmique du TVI. En effet, au regard de l'institution, ce théorème est admis au niveau du lycée.

1. L'ingénierie *dichotomie*

Notre proposons une ingénierie en lien avec le concept de dichotomie. Cette ingénierie est mise en place dans une classe de Seconde et deux classes du cycle Terminal Scientifique : une Première et une Terminale. Afin de faciliter le travail de l'élève et tenant compte des compétences acquises de la part de l'élève suivant son niveau scolaire, nous souhaitons construire et expérimenter une « ingénierie globale » (Laval, 2018) que nous découpons en deux sous-ingénieries.

La première est centrée sur une approche autour d'un jeu de la méthode de dichotomie. Ce jeu consiste à mettre les élèves en binôme afin qu'ils puissent déterminer une stratégie *rapide* et *gagnante* dans le cadre de la recherche d'un nombre entier *secret* compris entre deux nombres entiers donnés. Cette stratégie doit être interprétée par les élèves comme une mise en action de la *méthode de dichotomie* dans un cas *discret*. C'est pour cela, que nous nommons cette sous-ingénierie : *dichotomie discrète*.

Dans la deuxième sous-ingénierie, les élèves exploitent le travail algorithmique fait lors de la sous-ingénierie précédente. En effet, nous attendons que les élèves interprètent dans un premier temps les résultats possibles donnés par l'utilisation de l'*algorithme de dichotomie* appliquée à des fonctions, entre autres dans le cadre de la recherche d'une valeur approchée d'une solution d'une équation algébrique. Puis dans un second temps, plus spécialement pour les élèves de Terminale, nous attendons qu'ils proposent une *preuve algorithmique* du TVI à l'aide de la dichotomie. Sachant que cette deuxième sous-ingénierie s'inscrit sur un travail autour de fonctions définies sur $\mathbf{R}$ ou un intervalle de $\mathbf{R}$, nous la nommons : *dichotomie continue*.

2. La sous-ingénierie *dichotomie discrète*

Lors de cette sous-ingénierie, nous nous questionnons, dans le cadre d'une genèse, sur ce qu'est la prise de conscience de la part de l'élève de la nécessité d'une stratégie *gagnante et rapide* répondant à une problématique de recherche d'un nombre entier *secret* compris entre deux nombres entiers donnés et de la programmer dans un environnement informatique afin d'en vérifier sa validité (Laval, 2017, 2018). De plus, nous nous intéressons à la contribution d'un travail de construction d'algorithmes par des élèves débutants en informatique sur une suite de nombres dans $\mathbf{N}$ pour la compréhension du concept d'un test de sortie de boucle en informatique.

Les élèves n'ont pas nécessairement l'intuition d'une stratégie particulière pouvant répondre à cette problématique.

Ils ne distinguent pas forcément l'opérateur humain de la machine où serait implémenté l'algorithme associée à la stratégie afin d'en contrôler sa pertinence et sa validité. [...] Ils n'ont pas nécessairement conscience du type de traitement que cette implémentation peut solliciter. La prise de conscience souhaitée renvoie à des questions liées à la représentation du traitement dans un environnement informatique avec la mise en place d'ETA qui doit, dans le cadre d'un travail sur des fonctions numériques, interagir avec des ETM spécifiques [...] en lien avec des notions mathématiques issus du domaine de l'analyse : continuité, monotonie, etc. (Laval, 2018, p. 106)

Nous observons chez les élèves une première série de connexions entre les genèses discursives mises en place dans un ETA sur les représentations des traitements des données, des structures informatiques, des variables, ainsi que sur les observables (production et interprétation) lors de l'exécution de l'algorithme dans un environnement informatique et des ETM spécifiques mettant en lumière une réflexion de la part de l'élève sur des concepts mathématiques comme celui de *nombre entier aléatoire*, d'*intervalle*, de *moyenne* et de *fonction partie entière*. Dans le cadre de l'ETA, nous nous intéressons plus particulièrement au choix des *variables itératives* fait par les élèves et les concepts mathématiques qui sont alors sollicités. De même, nous observons les interactions qui peuvent avoir lieu entre ces concepts mathématiques sollicités et leurs utilisations dans des structures de boucles. « En effet, une utilisation de variables dans une structure de boucle, plutôt que lors de simple déclaration ou d'alternative, peut être favorisée par le fait que, dans la boucle, le concept de variable informatique peut apparaître différent de celui de variable mathématique » (Laval, 2018, p. 107)

Nous identifions trois opérations sur les variables dans une boucle, renvoyant à trois aspects cognitifs : la *mise à jour*, le *test d'arrêt* et l'*initialisation*. De plus, comme le souligne Samurçay (1985), nous avons également deux types de variables intervenant dans des problèmes de programmation : celles qui sont des données explicites du problème et celles qui sont rendues nécessaire par la solution informatique.

Nous faisons ainsi l'hypothèse que plus le traitement informatique des variables s'éloigne de l'exécution au *papier-crayon* de l'algorithme, plus les élèves sont susceptibles de rencontrer des difficultés, comme lors de la gestion d'un invariant de boucle par exemple.

Plusieurs observations sont faites concernant le perçu des élèves sur l'initialisation des variables, sur les variables d'accumulation ou sur les compteurs. Les variables d'accumulation sont moins bien traitées par des élèves débutants que les autres. En effet, les variables avec lesquelles les élèves éprouvent le moins de difficultés sont en général les compteurs. Ceci est peut-être dû au fait que ce type de variables est relativement institutionnalisé. Une question se pose alors : *en est-il de même avec la structure de boucle « Répéter... Jusqu'à ... » ?* En effet, dans le cas d'une boucle *Répéter...Jusqu'à*, on répète un traitement jusqu'à ce qu'une condition (expression booléenne) soit vraie. Son formalisme est représenté par le principe suivant : *Répéter une instruction simple ou un bloc d'instructions Jusqu'à une condition d'arrêt*. Nous pouvons ainsi voir que le traitement est d'abord exécuté puis la condition est vérifiée. Si elle n'est pas vraie, nous retournons au début de la boucle et le traitement est répété. Si la condition est vraie, nous sortons de la boucle et le programme continue séquentiellement. Chaque fois que le traitement est exécuté, la condition d'arrêt est de nouveau vérifiée à la fin. Par ailleurs, ce traitement est exécuté au moins une fois⁵.

3. La sous-ingénierie *dichotomie continue*

Après avoir conduit les élèves de Seconde et du cycle terminal scientifique à travailler la compréhension et la maîtrise des structures de boucles et des variables informatiques dans le cadre de la sous-ingénierie *dichotomie discrète*, nous proposons à ces mêmes élèves une sous-ingénierie dite *dichotomie continue*. En effet, nous partons du fait qu'un *algorithme d'approximation d'un zéro d'une fonction* pouvant rendre deux valeurs aussi proches que l'on veut, encadrant un réel annulant la fonction (effectivité), et éventuellement qu'il soit garanti qu'il n'existe pas de zéros en dehors de cet encadrement (unicité), peut faire l'objet d'un travail de recherche sur les connexions possibles entre ETM_{analyse} et ETA. Pour cela, nous nous intéressons plus particulièrement à la *dichotomie* qui, dans ce contexte, peut être mise en place sur les trois niveaux scolaires du lycée (Seconde et classes du cycle terminal scientifique).

Nous rappelons que si nous avons deux nombres réels a et b et une fonction f sur un intervalle $[a ; b]$ telle que $f(a)$ et $f(b)$ ne sont pas de même signe (figure 4), alors le *processus de dichotomie* consiste à découper l'intervalle $[a ; b]$ en deux intervalles de même amplitude. Si la valeur médiane annule la fonction, l'algorithme termine, sinon on conserve l'intervalle où f n'a pas le même signe aux deux bornes. On recommence ensuite ce processus en découpant de nouveau l'intervalle conservé, et ainsi de suite. On obtient alors soit un zéro, soit des intervalles emboîtés tels que f n'a pas le même signe aux deux bornes et dont les amplitudes forment une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$. On considère que l'algorithme est effectif si les intervalles encadrent un zéro. De plus, pour atteindre une précision ε , arbitrairement petite, il suffit d'itérer ce processus n fois, où n est le plus petit entier tel que $\frac{|a-b|}{2^n} \leq \varepsilon$. Nous pouvons alors démontrer que n est le plus petit entier naturel supérieur ou égal à $\log_2 \left(\frac{|a-b|}{\varepsilon} \right)$. Dans cette sous-ingénierie, ce résultat ne sera pas exploité par les élèves, mais il permet de prévoir qu'avec des données couramment utilisées comme une différence $a - b$ égale à 1 ou 2 et ε choisi jusqu'à 10^{-10} , le nombre d'itération est au maximum de 34.

⁵ (N.D.L.R) Nous renvoyons le lecteur au chapitre 4 (pp. 278 – 356) de la partie II de la Thèse de Laval (2018) pour plus de détails sur ce point.

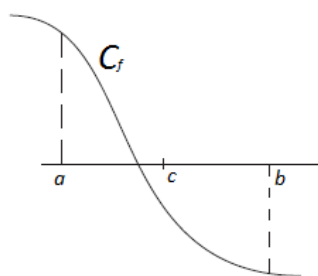


Figure 4 : Cas d'une fonction f continue sur $[a ; b]$ avec $f(a) \times f(b) < 0$

L'environnement informatique en question utilise un langage textuel interprété que l'utilisateur tape directement sous forme de lignes de code avec la possibilité de définir et d'utiliser des fonctions numériques. Dans ce contexte nous attendons que l'élève implémente l'algorithme répondant à la consigne et qu'il le teste. Puis, nous prévoyons qu'il se questionne sur la validité ou non des résultats obtenus par rapport à l'objectif fixé par la consigne. En effet, nous pensons que ce travail peut aider l'élève à comprendre la nécessité de travailler sur des connexions entre $ETM_{analyse}$ et ETA.

Par exemple, un travail algorithmique sur la résolution d'équations à partir de certaines propriétés connues sur une fonction f ne peut être qu'utile que si on a la connaissance de certaines conditions vérifiées par la fonction f sur l'intervalle d'étude avant d'émettre une conclusion sur le résultat trouvé. Ainsi, les élèves peuvent prendre conscience des conditions nécessaires du TVI ou du *Théorème de la bijection* (TDB). Nous visons aussi à mettre en évidence la *monotonie* sur l'intervalle initial comme une condition suffisante d'unicité d'un zéro cherché.

A travers ces différentes étapes, nous nous attendons à ce que l'élève de Terminale scientifique prenne conscience de la possibilité de construire une preuve de type algorithmique de la version restreinte⁶ du TVI au cas où $f(x) = 0$. Nous nous posons ainsi la question de la reconnaissance par l'élève de Terminale scientifique de propriétés sur les suites des bornes d'intervalles emboîtés et comment il peut utiliser ces propriétés afin de proposer une preuve de type algorithmique du TVI restreint au cas $f(x) = 0$. Ces questions de recherche sont analysées autour des connexions possibles entre $ETM_{analyse}$ et ETA.

Cependant, il n'est pas évident que les élèves puissent produire effectivement une preuve de type algorithmique du TVI. En effet, les travaux des élèves recueillis peuvent ne pas permettre de savoir si les *stratégies* pensées sur des fonctions particulières sont généralisables. Selon Lagrange et Rogalski (2017), nous avons aussi la question implicite : *Pourquoi ne pas parler de programme d'action plutôt que d'algorithme ?* Finalement, nous devrions observer une difficulté chez l'élève débutant en informatique à enclencher une démarche de preuve, et par conséquent à réellement basculer du côté de l'algorithmique (cf. Lagrange & Rogalski, 2017).

⁶ La généralisation à k quelconque est un travail algébrique sans rapport avec notre problématique.

IV. UNE SOUS-INGENIERIE ARTICULANT ETA ET ETM_{ANALYSE} : ALGORITHME DE *DICHOTOMIE CONTINUE* – VERS UNE PREUVE DU THEOREME DES VALEURS INTERMEDIAIRES

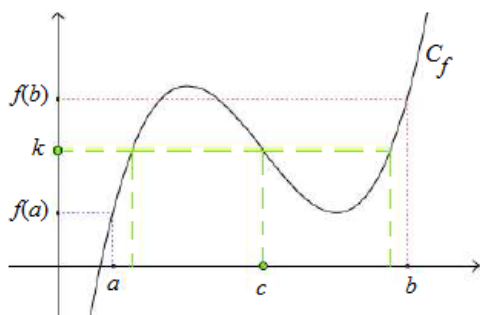
Comme nous l'avons indiqué précédemment, la sous-ingénierie *dichotomie continue* vise à ce que les élèves prennent connaissance de l'algorithme, mettent en évidence la définition sur un intervalle et la continuité sur cet intervalle ainsi que la monotonie comme des conditions suffisantes d'effectivité de l'*algorithme de dichotomie*.

1. L'arrière-plan mathématique

Afin d'aider à la compréhension de l'arrière-plan mathématique de cette sous-ingénierie, nous rappelons les contenus du TVI et de son corolaire, le TDB. Dans cette sous-ingénierie, nous nous restreignons au cas $k = 0$ où le TVI est obtenu directement avec l'algorithme. La généralisation à k quelconque est un travail algébrique sans rapport avec notre problématique.

Théorème des Valeurs Intermédiaires (TVI)⁷

On considère une fonction f définie et continue sur un intervalle $[a ; b]$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.



Théorème de la Bijection (TDB)

On considère une fonction f définie, continue et strictement monotone sur un intervalle $[a ; b]$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un unique réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

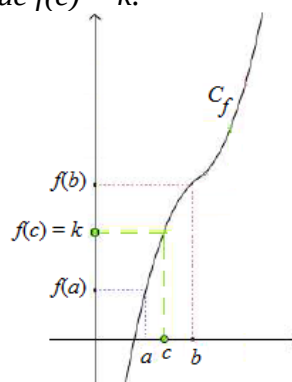


Figure 5 : Illustrations du TVI et du TDB

2. Le milieu et le découpage de la sous-ingénierie *dichotomie continue*

L'expérimentation s'adresse au trois niveaux scolaires : Seconde générale, Première et Terminale scientifiques. Elle est découpée en deux parties.

L'objectif de la première partie est de mettre en jeu la compréhension de la *méthode de dichotomie continue* comme moyen d'obtenir une approximation d'un antécédent par une fonction donnée et de prendre conscience du TVI et des conditions nécessaires dans ce théorème, dès les niveaux des classes de Seconde et de Première Scientifique, bien que la connaissance de ce théorème ne fasse pas partie des attentes institutionnelles.

Afin d'aider les élèves de Terminale Scientifique à la maîtrise et à l'utilisation du TVI, qui est institutionnalisé à ce niveau scolaire, cette première partie est aussi mise en place à ce niveau.

⁷ Dans le cadre de cet article, nous centrons notre présentation sur le TVI.

Cependant, ici, l'objectif consiste plutôt à préparer les élèves à construire une preuve algorithmique du TVI. Cette preuve fait l'objet de la seconde partie de la sous-ingénierie et ne concerne donc que les élèves de Terminale Scientifique.

Ainsi, le fait que l'*algorithme de dichotomie* interagisse fortement dans la sous-ingénierie avec des contenus mathématiques, quel que soit le niveau scolaire des élèves, nous faisons l'hypothèse qu'un travail sur la *dichotomie continue* nous permet d'étudier les connexions entre différents ETA et $ETM_{analyse}$.

3. Présentation de la première partie de la sous-ingénierie

3.1 Les attentes

Un travail sur l'*algorithme de dichotomie* doit permettre aux élèves d'obtenir une suite d'intervalles emboîtés et à bornes rationnelles, avec des conditions de signe aux bornes des intervalles, jusqu'à une amplitude arbitrairement petite. L'étude du corps de boucle doit ainsi permettre aux élèves de construire la suite des bornes et une condition d'arrêt faisant intervenir l'amplitude du dernier intervalle. En effet, afin de faire le lien avec la sous-ingénierie *dichotomie discrète*, les élèves étudient les différences sur les conditions d'arrêt dans une structure de boucle. Nous attendons que les élèves prennent conscience que suivant que la situation soit *discrète* ou *continue*, la condition d'arrêt est ramenée à une égalité à un nombre donné ou à une comparaison à un nombre arbitraire. Nous attendons aussi des élèves qu'ils puissent observer des cas où, bien que l'algorithme termine, il n'encadre pas un zéro, ou qu'il n'en encadre qu'un seul alors qu'il en existe plusieurs. Au cours de la première phase de la *dichotomie continue*, les élèves sont confrontés à des éléments de nature informatique comme la conception d'une structure pour l'algorithme et la mise en place de variables. Cela doit les renvoyer au travail qu'ils ont mené lors de la sous-ingénierie *dichotomie discrète*. Du fait que l'algorithme opère sur une fonction mathématique, il est aussi intéressant que les élèves utilisent une fonctionnalité de l'environnement de programmation permettant le calcul de valeurs avec le formalisme fonctionnel ($f(\dots)$), faisant ainsi un lien entre fonctions mathématiques et fonctions informatiques.

3.2 Une dialectique Application numérique – Analyse numérique

Lors de la première sous-ingénierie sur la *dichotomie discrète* suivie par les élèves et leurs enseignants qui participent aussi à la sous-ingénierie *dichotomie continue*, l'organisation du travail demandé a permis de favoriser la dévolution laissée aux élèves pour la conception d'algorithmes *papiers-crayons*. Nous choisissons de continuer cet aspect de dévolution chez les élèves tout au long de la première partie de la sous-ingénierie *dichotomie continue*.

Nous décidons de ne pas aborder la comparaison de différentes méthodes de recherche d'une approximation d'un zéro d'une fonction du point de vue de l'efficacité. En effet, cette question ne peut pas être vraiment étudiée au niveau des classes des lycées français.

Dans cette première partie, nous attendons que les élèves progressent dans la compréhension de la construction d'un *algorithme de dichotomie*, mais aussi dans la pertinence de son utilisation pour aller vers une preuve de la dichotomie. Pour cela, nous partons du constat qu'une majorité des manuels scolaires, de la Seconde et des classes terminales scientifiques abordent principalement la dichotomie comme une méthode d'approximation à travers de nombreux exercices, où les élèves justifient l'existence et l'unicité d'une solution d'une équation de la forme $f(x) = k$, avec f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle donné. Ainsi, ils travaillent la validation des conditions du TVI et de son corollaire le TDB pour la fonction étudiée, puis écrivent un algorithme de dichotomie permettant de

déterminer une valeur approchée ou un encadrement de la solution. Cette approche de l'algorithmique semble se réduire à une simple mise en œuvre de méthodes d'approximation à des résultats montrés au préalable de façon théorique. Nous désignons ce type de tâches par « application numérique » (Laval, 2018). Nous opposons cette approche à celle où l'élève serait amené à s'intéresser à des méthodes d'approximation d'un point de vue aussi bien pratique que théorique par le fait d'obtenir des valeurs approchées, mais aussi discussion sur le domaine d'application, comparaison de méthodes, etc. Cette seconde approche s'apparente alors à l'« analyse numérique » (Ibid.) telle qu'elle est pratiquée dans la recherche et enseignée à l'université et met en jeu des connaissances en analyse (propriétés des fonctions, suites numériques, etc.) aussi bien qu'algorithmiques (itération, variables itératives, effectivité, efficacité, etc.).

De façon générale, les algorithmes considérés en analyse concernent des méthodes d'approximation issues du domaine de l'*analyse numérique* comme la résolution d'équations, la détermination d'un maximum local d'une fonction, l'intégration numérique, les équations différentielles, etc. En effet, l'*analyse numérique* s'intéresse à ces méthodes, de façon à en caractériser l'efficacité, la complexité (ou coût) et leurs champs d'application.

Au regard des programmes et des manuels, « le concept d'algorithme est institutionnellement présent dans le savoir à enseigner, mais son rôle est restreint. En particulier, son lien avec la preuve n'est quasiment pas exploité. Sa place se situe pour l'essentiel dans une approche de type *application numérique*, en particulier, dans les domaines d'analyse » (Ibid.). Comme le soulignent Ouvrier-Buffet, Modeste et Gravier (2010), pour une majorité des tâches algorithmiques proposées par les manuels, l'algorithme « ne vit que dans la niche technique de résolution », bien que dans le savoir mathématique savant : la *niche preuve* peut être un lieu « écologique » justifiant l'utilisation de l'algorithmique (Laval, 2018).

3.3 Le choix des phases et des tâches associées

Le fait de découper cette première partie de la sous-ingénierie *dichotomie continue* en plusieurs phases permet d'aller d'une « pratique habituelle où l'algorithme est vu comme un *outil* dans une perspective d'*application numérique* vers un questionnement sur l'algorithme comme *objet* dans une perspective d'*analyse numérique* » (Laval, 2018). Nous avons ainsi quatre phases.

Lors de la première phase, l'algorithme est vu comme une « application numérique ». Les élèves justifient l'existence et l'unicité d'une solution d'une équation de la forme $f(x) = 0$, où f est une fonction dont l'expression $f(x) = x^3 + x - 1$ est connue des élèves. Pour cela, une procédure de justification leur est demandée, qui tient compte de leurs connaissances dans le domaine de l'analyse. Puis, l'enseignant leur propose un algorithme, écrit sous forme d'un organigramme (fig. 6) pour une fonction f générique, qu'ils doivent transposer en un langage pseudo-code, afin de pouvoir l'implémenter dans l'environnement numérique *AlgoBox*⁸, puis le tester avec la fonction f étudiée pour obtenir un encadrement de la solution avec une amplitude donnée.

⁸ *AlgoBox* est un environnement algorithmique libre, multi-plateforme et gratuit d'aide à l'élaboration et à l'exécution d'algorithmes, qui permet un apprentissage de l'algorithmique par structures logiques à travers un langage textuel proche du langage naturel de l'algorithmique. Depuis un peu plus de trois ans, cet environnement algorithmique a été progressivement remplacé par l'environnement *Python* dans l'enseignement des mathématiques des trois années de lycée. *Python* permet aussi une initiation aisée aux concepts de base de l'algorithmique et de la programmation.

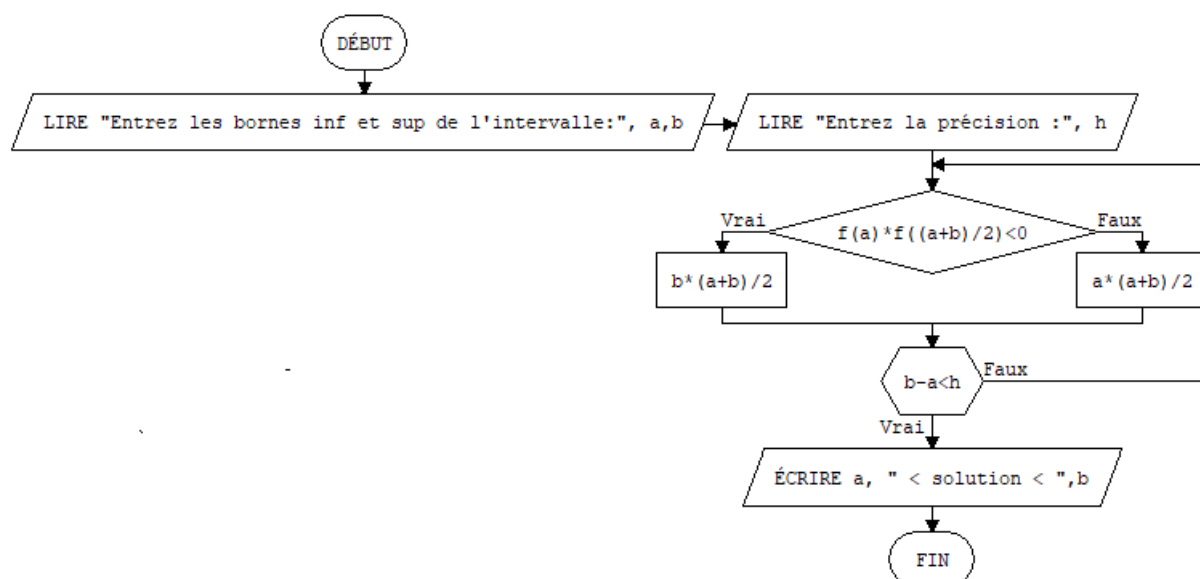


Figure 6 : Organigramme pour une fonction f générique (Laval, 2018)

Dans la deuxième phase, les élèves mènent un travail en algorithmique questionnant le choix d'une condition de sortie. Ici, nous souhaitons questionner les élèves sur ce qui permet, dans un algorithme, d'obtenir un encadrement de plus en plus fin d'un zéro d'une fonction sur un intervalle donné. Il s'agit pour eux d'identifier précisément les éléments de l'itération : condition d'arrêt (ou de continuation), ainsi que les variables itératives, leur initialisation et la mise à jour dans la boucle. Pour cela, les élèves étudient, quel que soit le niveau scolaire, un algorithme à *trou* (cf. ci-dessous, dans le cas d'une fonction polynomiale de degré 3 (Laval, 2018)) concernant une méthode de détermination d'un encadrement d'amplitude 10^{-p} d'une solution d'une équation de la forme $f(x) = 0$, où f est la fonction utilisée lors de la phase précédente, en leur demandant de rédiger une condition d'arrêt adéquate.

Soit la fonction f définie sur $\mathbf{R}$, telle que pour tout réel x , $f(x) = x^3 + x - 1$.
Soit l'algorithme :

Initialisation :	x prend la valeur 0
Traitement :	Répéter
	x prend la valeur $x + 10^{-2}$
	Jusqu'à $f(\dots)$
Sortie :	Afficher $x - 10^{-2} < x_0 \leq x$

- 1) Compléter cet algorithme (*Méthode de Balayage*).
- 2) Programmer cet algorithme dans un environnement numérique, soit sous une forme *pseudo-code*, soit sous la forme d'un organigramme.
- 3) A l'aide l'algorithme, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de l'unique solution x_0 de l'équation $f(x) = 0$.

Lors de cette phase, nous faisons le choix de ne pas faire travailler les élèves sur l'*algorithme de dichotomie* et ceci pour deux raisons. En effet, tout d'abord, comme cet algorithme a déjà été utilisé précédemment, les élèves pourraient recopier la condition sans nécessairement l'analyser. De plus, cette analyse serait difficile à conduire du fait de la complexité du corps de boucle (deux alternatives), en particulier chez des élèves de Seconde qui sont encore des débutants en informatique. Pour ces deux raisons, nous choisissons un algorithme faisant appel à une boucle dont le corps ne comporte pas d'alternative. Pour cela, nous retenons la *méthode de balayage* avec une structure de type *Répéter...Jusqu'à*, mettant l'accent sur une condition d'arrêt, plutôt que de continuation. L'élément manquant dans l'algorithme proposé (cf. l'encadré précédent) étant la condition de sortie dans la boucle, les élèves vont devoir la concevoir. Ainsi, la tâche va mettre en jeu la notion d'amplitude d'un intervalle et permettre

aux élèves d'aborder la recherche des bornes d'un intervalle encadrant une solution de l'équation $f(x) = 0$, pour une amplitude prédéfinie.

Dans les phases suivantes (3^{ème} et 4^{ème}), les élèves travaillent sur deux algorithmes de *dichotomie continue* écrits dans l'environnement numérique *AlgoBox* (fig. 7 et 8), de telle manière que l'algorithme soit exécutable avec une fonction appelée par un identificateur F1, sans que son expression soit visible aux élèves (principe d'une fonction cachée). En revanche, le choix de faire travailler les élèves sur *AlgoBox* nous conduit à leur donner des algorithmes bâtis avec une structure de type *Tant que...Faire*. Dans ces deux phases, les élèves vont *sortir* du cadre institutionnel où, la plupart des exercices proposés sont de type *application numérique*, entrant dans le cas *idéal* où deux conditions – la fonction utilisée dans l'algorithme est bien définie sur l'intervalle choisi et elle n'admet qu'un seul zéro sur cet intervalle – seraient remplies (cf. section 3.2). Le choix fait ici résulte du fait que nous souhaitons que les élèves prennent conscience de ces deux conditions et que, par conséquent, au moins une des deux ne soit pas vérifiée, l'élève ne le sachant pas au début de l'activité. Cela permet de renvoyer la tâche à une situation de type *analyse numérique*. Dans la phase 3, concernant une condition suffisante (mais pas nécessaire) pour l'unicité, les élèves travaillent sur une *fonction cachée* dont ils ignorent l'expression ($x \mapsto x^3 - 3x^2 + 2$, $x \in [0 ; 10]$) et sa représentation graphique. Ainsi, au départ de l'activité, les élèves ignorent que la *fonction cachée* admet plusieurs zéros sur l'intervalle étudié. Dans la phase 4, concernant une condition suffisante (mais pas nécessaire) pour l'effectivité, les élèves travaillent toujours sur une *fonction cachée* dont ils ignorent l'expression ($x \mapsto \frac{1}{x^2-2}$, avec $x \in [1 ; 2]$) et sa représentation graphique. Les propriétés de la fonction leur étant inconnue, les élèves ne peuvent savoir au début de l'activité que cette fonction n'est pas définie en $\sqrt{2}$, et qu'elle ne garde pas le même signe à droite et à gauche de $\sqrt{2}$.

```

1 VARIABLES
2 a EST_DU_TYPE NOMBRE
3 b EST_DU_TYPE NOMBRE
4 e EST_DU_TYPE NOMBRE
5 DEBUT_ALGORITHME
6 a PREND_LA_VALEUR 0
7 b PREND_LA_VALEUR 10
8 e PREND_LA_VALEUR 0.0001
9 TANT_QUE (b-a>e) FAIRE
10   DEBUT_TANT_QUE
11     SI (F1(b)*F1((a+b)/2)>0) ALORS
12       DEBUT_SI
13         b PREND_LA_VALEUR (a+b)/2
14       FIN_SI
15     SINON
16       DEBUT_SINON
17         a PREND_LA_VALEUR (a+b)/2
18       FIN_SINON
19   FIN_TANT_QUE
20 AFFICHER a
21 AFFICHER b
22 FIN_ALGORITHME

```

Figure 7 : algorithme de la phase 3
(Laval, 2018)

```

1 VARIABLES
2 a EST_DU_TYPE NOMBRE
3 b EST_DU_TYPE NOMBRE
4 e EST_DU_TYPE NOMBRE
5 DEBUT_ALGORITHME
6 a PREND_LA_VALEUR 1
7 b PREND_LA_VALEUR 2
8 e PREND_LA_VALEUR 0.000000001
9 TANT_QUE (b-a>e) FAIRE
10   DEBUT_TANT_QUE
11     AFFICHERCALCUL F1(a)
12     AFFICHER " "
13     AFFICHERCALCUL F1(b)
14     SI (F1((a+b)/2)>0) ALORS
15       DEBUT_SI
16         b PREND_LA_VALEUR (a+b)/2
17       FIN_SI
18     SINON
19       DEBUT_SINON
20         a PREND_LA_VALEUR (a+b)/2
21       FIN_SINON
22   FIN_TANT_QUE
23 AFFICHER a
24 AFFICHER b
25 FIN_ALGORITHME

```

Figure 8 : algorithme de la phase 4
(Laval, 2018)

Pour ces deux phases, la question posée aux élèves est : Est-ce que Binf (c.-à-d. : la variable a dans les deux algorithmes) et Bsup (c.-à-d. : le variable b dans les deux algorithmes) encadrent un zéro unique de la fonction, quelle que soit la précision choisie ? Nous leur signalons que pour chacune des deux phases, ils ne doivent pas chercher à connaître l'expression de la fonction. En revanche, les élèves peuvent accéder à une représentation graphique de la fonction que permet de faire *AlgoBox*, mais cela ne leur est pas précisé. En effet, nous attendons qu'ils prennent l'initiative de chercher dans l'environnement *AlgoBox* la fonctionnalité adéquate qui leur permettrait de répondre à la question.

4. Les connexions entre ETM_{analyse} et ETA

Pour cet article, dans le cadre des Espaces de Travaux (cf. I.1), nous présentons les analyses *a priori*, puis *a posteriori* des phases 3 et 4. Pour le lecteur qui souhaiterait avoir une vision complète des travaux de recherche mis en place dans cette première partie de la sous-ingénierie *dichotomie continue*, nous le renvoyons au chapitre 5 partie II de la thèse de Laval (2018).

Nous rappelons au lecteur que nous avons vu que l'introduction de l'algorithmique est institutionnalisée et en particulier son exploitation à la recherche d'encadrement d'une solution d'une équation $f(x)=0$, où f est une fonction donnée et définie sur un intervalle fermé $[a ; b]$. Ce sujet particulier peut être considéré à la fois d'un point de vue informatique et d'un point de vue mathématique.

4.1 Brève présentation de l'étude *a priori* dans les Espaces de Travail

Pour les phases 3 et 4, nous avons des tâches qui se situent à la jonction des ETA et ETM_{analyse}. En effet, dans l'ETA, d'un point de vue informatique, les élèves génèrent des algorithmes répondant au problème suivant : pour un « réel » e , déterminer un intervalle $[u ; v]$, telle que la propriété $P(e) : |u - v| < e$ et $f(u) \times f(v) \leq 0$ soit vérifiée. Dans l'ETM_{analyse}, les élèves sont confrontés, d'un point de vue mathématique, de façon consciente ou inconsciente suivant le niveau scolaire, au TVI qui garantit l'existence d'une solution de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[a ; b]$, si les conditions suffisantes : f est continue et change de signe, sont vérifiées. De même, ils sont amenés à prendre en compte, toujours de façon consciente ou inconsciente suivant le niveau scolaire, du TDB, corollaire du TVI, qui garantit que, sous la condition suffisante que f soit monotone, la solution est unique. Pour cela, les algorithmes permettant d'approcher au plus près les solutions de l'équation $f(x) = 0$ et le TVI ont des cibles différentes. En effet, le TVI va concerner les solutions, tandis que les algorithmes utilisés pour répondre au problème vont viser à obtenir un intervalle vérifiant la propriété $P(e)$. Ces algorithmes vont permettre à l'élève de fournir un mode de génération de suites qui jouera un rôle crucial dans la preuve algorithmique du TVI.

4.2 Analyses *a posteriori* des phases 3 et 4 à l'aide du modèle ETA/ ETM_{analyse}

Nous proposons d'affiner les analyses *a posteriori* des phases 3 et 4 en nous référant aux ETA et aux ETM. En effet, lors de ces deux phases, les élèves, quel que soit le niveau scolaire, ont de fait, coordonné deux genèses discursives dans les deux *Espaces de Travail* parallèles que sont un ETA_{AlgoBox} et un ETM_{analyse}, ainsi que deux dimensions, l'une instrumentale et l'autre sémiotique dans ces mêmes *Espaces de Travail* parallèles. Ils sont ainsi amenés à réfléchir, à travers l'investigation de la résolution des tâches, sur la signification des résultats affichés par l'environnement *AlgoBox* lors de l'exécution de l'algorithme proposé dans un premier temps, puis revenir sur la validité ou non de leurs premières conjectures.

Au cours de la phase 3, les élèves, quel que soit leur niveau scolaire, à la suite du travail fait lors des phases 1 et 2, nous observons qu'ils ont acquis une plus grande aisance dans la reconnaissance de l'algorithme proposé. Par ailleurs, lorsqu'ils proposent une justification de la reconnaissance de l'algorithme, ils se réfèrent en général à l'*application numérique* faite à la phase 1. De même, les fonctionnalités et la syntaxe de l'environnement *AlgoBox* étant maîtrisées par l'ensemble des élèves, cela permet à certains de prendre des initiatives sur les possibilités qu'offrent l'environnement numérique, en particulier lors des observations et des critiques des résultats que renvoie la machine. Les consignes et les tâches demandées sont comprises par les élèves même si certains commettent des erreurs sur la compréhension des résultats affichés par l'algorithme initial. En effet, les premières erreurs venant de certains

élèves ont lieu après l'exécution de l'algorithme initial et non sur le rôle que peut jouer celui-ci, même si après son exécution ils supposent que l'algorithme pourrait être faux. Ainsi, ici, les élèves coordonnent de fait deux genèses discursives dans deux espaces de travail parallèles un $ETA_{AlgoBox}$ et un $ETM_{analyse}$, ainsi que deux genèses, l'une instrumentale et l'autre sémiotique, dans ces mêmes espaces de travail parallèles. Ils réfléchissent, à travers l'investigation de la recherche de l'existence d'une (ou des) solution(s) d'une équation de la forme $f(x) = 0$, à la détermination d'un encadrement d'une de ces solutions, et à faire le lien avec l'idéalité de l'application de l'algorithme de *dichotomie continue* pour déterminer *exactement* ces encadrements.

Lors de la phase 4, quasiment tous les élèves (près de 90% en Seconde et 100% pour ceux du cycle terminal scientifique) ont conscience que l'algorithme peut ne pas afficher un résultat qui correspondrait nécessairement à une solution d'une équation mais bien à une valeur interdite pour la *fonction cachée*. Cependant, une très grande variété d'explications, concernant le fait que le résultat pourrait être une valeur interdite, est proposée par les élèves suivant leurs compétences acquises dans le domaine de l'analyse et non en algorithmique. Nous observons au cours de cette phase, qu'une majorité d'élèves est sortie de l'aspect purement *application numérique* de l'*algorithme de dichotomie*. En effet, nombreux sont ceux qui indiquent que l'utilisation de cet algorithme doit nécessiter un travail en amont sur l'étude de certaines propriétés de la fonction, en particulier le fait de vérifier si la fonction est bien définie sur l'intervalle du départ pour l'utilisation de l'algorithme. Cependant, nous observons que des élèves de Seconde restent essentiellement dans l' $ETA_{AlgoBox}$ pour expliquer leurs raisonnements. En effet, comme pour la phase précédente, les élèves doivent de fait coordonner deux genèses discursives dans les deux *Espaces de Travail* parallèles que sont l' $ETA_{AlgoBox}$ et l' $ETM_{analyse}$, ainsi que deux genèses, l'une instrumentale et l'autre sémiotique, dans ces mêmes espaces de travail parallèles. Ils sont amenés à réfléchir, à travers l'investigation de leur recherche, sur la signification des résultats affichés par l'environnement *AlgoBox* lors de l'exécution de l'algorithme proposé dans un premier temps, puis une fois l'algorithme complété, sur la pertinence de leurs premières explications.

Une présentation sous forme de tableaux permet de présenter, de façon plus synthétique, le travail effectué par les élèves sur les algorithmes (tableau 1) et les analyses (tableau 2) du travail observé chez les élèves, relatives aux connexions entre ETA et ETM, ainsi que les genèses de convergences entre les deux espaces de travail parallèles mis en jeu.

$ETA_{AlgoBox}$	$ETM_{analyse}$
- Analyser le texte de l'algorithme. - Observer le fait que la condition dans l'alternative est différente et expliquer pourquoi cette condition ne modifie pas les branches « SI et SINON ». - Interpréter la condition d'alternative en termes de monotonie pour la fonction F1. (Genèse discursive) - Observer et expliquer le fait que l'inégalité sur la condition dans l'alternative est stricte. (Genèse sémiotique : entre les deux plans épistémologique (representamen) et cognitif (visualisation))	Analyser le texte en rapport avec la méthode de dichotomie : - La fonction F1 est monotone. - Changement de signe dans l'intervalle. - Evolution des valeurs des bornes. (Genèse discursive) - Constater que les valeurs des bornes tendent vers l'infini (phase 4) (Genèse sémiotique : visualisation)

Tableau 1 : Présentation de l'analyse de l'algorithme dichotomique et des genèses correspondantes

Les élèves de Seconde et de Première repèrent que la condition dans le « SI » est différente mais ne font pas de remarque sur le fait qu'il n'y ait pas d'interversion dans les branches d'affectation de a et de b. ⇒ Cela peut être interprété comme une réduction à l'ETA (pas de travail particulier en analyse).	Les élèves de Terminale proposent des explications en lien avec le sens de variation de la fonction $F1$ sur l'intervalle de départ. Ils associent cette condition « allégée » au fait que la fonction serait croissante sur l'intervalle du départ. ⇒ Cela peut être interprété comme un travail en analyse. A ce niveau scolaire, les élèves articulent ETA et $ETM_{analyse}$.
---	---

Tableau 2 : Extrait des interprétations de l'espace de travail de l'élève suivant son niveau scolaire et les articulations entre ETA et ETM

Les observations faites sur lors de cette phase de l'ingénierie sur la dichotomie, nous montre qu'une majorité d'élèves de Terminale scientifique prend conscience de la nécessité d'articuler en parallèle différents Espaces de Travail $ETA_{AlgoBox}$ et $ETM_{analyse}$ afin de répondre à un problème donné lors d'une situation de type *analyse numérique* autour de l'*algorithme de dichotomie*. En effet, nous observons que le travail suivi par les élèves semble être vecteur d'une meilleure compréhension de la mise en place d'un algorithme d'approximation comme outil d'une *application numérique* mais aussi comme objet d'*analyse numérique*. En revanche, ceci est moins significatif chez les élèves de Seconde et de Première scientifique qui ne semblent pas mener un travail spécifique en analyse et restent dans une approche se situant dans un ETA.

Afin de donner du sens à l'approche *analyse numérique* de la *dichotomie continue*, les élèves de Terminale scientifique ont pour consigne d'aller vers une preuve du TVI qui serait bâtie sur le principe de la dichotomie et l'utilisation de deux suites adjacentes.

5. Vers une preuve du TVI (2^{ème} partie de la sous-ingénierie)

5.1 Présentation

L'aspect informatique d'une utilisation de l'*algorithme de dichotomie* comme objet d'*analyse numérique* ayant été compris et analysé par les élèves aux cours des phases 3 et 4 de la première partie de la sous-ingénierie *dichotomie continue*, nous pensons que les élèves de Terminale Scientifique vont vouloir aller plus loin dans le raisonnement mathématique et ainsi proposer une construction d'une preuve du TVI.

Cette preuve les amène à étudier des questions de convergence de deux suites dont les termes sont respectivement les bornes des intervalles emboîtés obtenus lors du déroulement de l'*algorithme de dichotomie*.

Deux phases sont mises en place pour cette deuxième partie qui ne concerne que les élèves de Terminale Scientifique. Une 1^{ère} phase (dite « phase 5 ») où les élèves travaillent sur la notion de suites adjacentes⁹ à travers un exercice type R.O.C.¹⁰, puis un exercice d'application sur ce thème, avec deux suites dont les expressions sont données. Ainsi, les élèves peuvent se questionner sur l'interprétation des termes des bornes respectives des intervalles emboîtés obtenus dans le cadre de l'*algorithme de dichotomie*. Ce travail s'inscrit dans une perspective de la 2^{ème} phase (dite « phase 6 »), où les élèves construisent une *preuve dichotomique* du TVI.

⁹ Nous rappelons au lecteur que cette notion n'est plus au programme de la Terminale Scientifique

¹⁰ Restitution et Organisation des connaissances

En effet, les élèves doivent répondre à un problème relativement « ouvert » qui se limite à une unique question : *Construire une preuve du TVI à l'aide de la méthode de dichotomie.*

5.2 Le constat des observations

Nous observons qu'au début de la phase 6, les élèves restent perplexes. En effet, ils ne font pas le lien entre le TVI et les suites. Pour eux, le TVI est lié aux fonctions. Cependant, certains d'entre eux proposent d'examiner les valeurs des limites des intervalles lors de l'exécution de l'*algorithme de dichotomie* pour une fonction particulière. Nous constatons qu'après le travail mis en place avec l'*algorithme de dichotomie* implémenté dans *AlgoBox* avec une fonction particulière, une majorité d'élèves considère que le TVI est *prouvé* par les résultats renvoyés par l'ordinateur. Ils concluent ainsi que « les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes car (u_n) augmente, (v_n) diminue et $(v_n - u_n)$ devient plus proche de zéro lorsque n devient de plus en plus grand. Alors, ces deux suites convergent vers une limite commune c . Comme la fonction f choisie est continue, $f(u_n)$ et $f(v_n)$ convergent vers $f(c)$ qui est zéro. » (Laval, 2018)

5.3 Que pouvons-nous retenir des observations faites lors de la dernière phase sur une preuve dichotomique du TVI ?

Nous pensons que les élèves tirent bien parti du travail effectué dans l'ETA, mais restent à mi-chemin entre l'ETA qui fournit des preuves sur un exemple et l'ETM dans lequel une preuve formelle pour une fonction générique est attendue. Les élèves n'ont eu aucune difficulté à opérer la conversion sémiotique de variables informatiques en suites numériques. En revanche, leur réponse témoigne d'une notion de preuve qui confond toujours les preuves instrumentales et le raisonnement mathématique. Cette *preuve* est un mélange d'observation (comportement des suites, valeur de $f(c)$) et de déduction (convergence des suites) et, pour les élèves, cela est valable uniquement pour une fonction.

6. Quels enseignements pouvons-nous tirer de ce travail de recherche en lien avec l'algorithme de dichotomie ?

6.1 A propos de la sous-ingénierie dichotomie continue

Tout au long de l'ingénierie sur la dichotomie, nous avons observé que le travail conduit par les élèves a été porteur d'une prise de conscience chez la majorité d'entre eux quant à la nécessité d'articuler différents *Espaces de Travail* : $ETA_{AlgoBox}$ et $ETM_{analyse}$, en parallèle afin de répondre à un problème donné lors d'une situation de type *analyse numérique* autour d'un algorithme comme l'*algorithme de dichotomie*. En effet, à la fin de la première partie de la sous-ingénierie *dichotomie continue*, nous avons remarqué que le travail fourni par les élèves a été un vecteur d'une meilleure prise de conscience de la mise en place d'un algorithme d'approximation comme *outil* d'une *application numérique* mais aussi comme *objet* d'*analyse numérique*. De plus, le travail effectué lors de la sous-ingénierie *dichotomie discrète* a aussi permis de favoriser la dévolution laissée aux élèves pour la conception d'algorithmes au *papier-crayon*. De même, cette dévolution laissée a pu se poursuivre tout au long de la seconde partie de la sous-ingénierie. Ainsi, le travail fait au cours des quatre phases de la première partie de la sous-ingénierie *dichotomie continue*, montre une évolution dans l'installation d'un ETA qui complète bien le premier bilan observé lors de la sous-ingénierie *dichotomie discrète* sur une première mise en place de cet ETA. Bien que cela n'ait pas été présenté dans cet article, nous tenons à souligner que, lors de la sous-ingénierie *dichotomie discrète*, nous avons déjà pu observer que l'*algorithme de dichotomie* pouvait être un objet algorithmique mais pas un objet d'un ETM spécifique. En revanche, au cours de la deuxième partie de la sous-ingénierie

dichotomie continue, nous avons bien observé des connexions possibles entre ETA et ETM, en particulier au niveau des classes de Première et de Terminale Scientifique.

6.2 Du point de vue du modèle ETA/ETM

Pour les *Espaces de Travail Algorithmique*, la dimension sémiotique est associée des marqueurs spécifiques des traitements itératif (TantQue ...) et alternatif (Si ...), ainsi qu'à des variables informatiques, dont la valeur, à la différence avec les variables mathématiques, varie pendant le traitement, et des expressions mathématiques. Le système sémiotique associé peut être aussi un obstacle pour des élèves qui ne maîtriseraient pas les écritures fonctionnelles, en particulier la notation de type $f(\dots)$. Pour la dimension instrumentale, les algorithmes sont destinés à être exécutés par un dispositif automatique et peuvent aider à comprendre le formalisme. De même, en ce qui concerne la dimension discursive, le travail se situe sur la mise en place de raisonnements pour prouver : - la terminaison de l'algorithme : se termine-t-il en un nombre fini d'étapes ? - son effectivité : renvoie-t-il une solution appropriée ? – et son efficacité : combien d'étapes sont nécessaires pour un ensemble donné ?

Pour les *Espaces de Travail Mathématique*, la dimension discursive est associée aux propriétés sur les fonctions, comme la continuité et la monotonie. Elle est aussi axée sur une solution mathématique, plutôt que sur un processus d'approximation. Dans cette dimension, les élèves construisent une preuve classique, basée sur deux suites adjacentes. Pour la dimension sémiotique, outre le formalisme mathématique habituel, cette dimension est caractérisée par le formalisme de suites infinies, différentes des variables itératives des algorithmes, bien que les suites utilisées soient définies par la *méthode de dichotomie*. Ainsi, les élèves sont progressivement initiés à ces notions et au formalisme de la Seconde à la Terminale. Dans le cas de la dimension instrumentale, les élèves ont dû procéder à des calculs au *papier-crayon* et afficher les graphiques des fonctions.

CONCLUSION

Dans le cas de la *dichotomie discrète*, les élèves s'approprient le problème d'identification d'un nombre *entier secret* dans un intervalle donné, par des essais successifs donnant lieu à un diagnostic de comparaison de l'essai et du nombre *entier secret*. Ainsi, ils prennent conscience que la *méthode de dichotomie* peut être une stratégie *gagnante* et *rapide* répondant au problème, sans que cela soit exprimé en termes d'optimalité par les élèves. En effet, les élèves de lycée sont encore relativement débutants tant sur le plan formalisation mathématique que sur l'utilisation d'outils de programmation. Cependant, les élèves conçoivent rapidement la pertinence d'une utilisation d'un environnement numérique permettant d'implémenter des algorithmes pour aborder intuitivement le problème d'optimalité de la stratégie *rapide*. Par ailleurs, cette programmation d'un algorithme lors de la sous-ingénierie *dichotomie discrète* va les aider à améliorer leurs capacités de mener des raisonnements abstraits dans le domaine des mathématiques mais aussi de changer leur conception des variables informatiques.

Lors des analyses *a posteriori* des deux sous-ingénieries (*dichotomie discrète* et *dichotomie continue*), nous avons observé que pour l'élève, mener un travail sur la notion de variable comme objet d'étude, est pertinent par son caractère central en programmation, en particulier, pour l'étude des variables dans une structure de boucle plutôt que lors de simple déclaration ou

d'alternative. Cela vient du fait que dans une boucle, le concept de variable informatique apparaît différent de celui de variable mathématique.

Nous pouvons aussi confirmer l'hypothèse que plus le traitement informatique des variables s'éloigne d'une exécution à la main de l'algorithme *dichotomie discrète* ou *dichotomie continue*, plus les élèves sont susceptibles de rencontrer des difficultés d'apprentissage et de compréhension, comme lors de la gestion d'un invariant de boucle par exemple.

Concernant la construction d'un test d'arrêt, nous avons observé que la variable intervenant dans l'élaboration du test est un objet de difficultés chez certains élèves. En effet, dans le cas de la *dichotomie discrète*, bien qu'il y ait la nécessité de procéder à une égalité à un nombre fixé, les élèves mettent en place une technique de calcul afin d'obtenir des nombres entiers lors de calculs de moyennes pour les différents intervalles emboîtés obtenus. Ceci fait l'objet d'une première difficulté mais pas directement en lien avec le test. Dans le cas de la *dichotomie continue*, nous observons que le fait de procéder à une inégalité à un nombre arbitraire est générateur de certaines difficultés chez certains élèves. Suivant la sous-ingénierie, « nous observons que lors de la construction d'un test d'arrêt, la variable intervenant dans son élaboration peut être à la fois une donnée explicite et un compteur dégressif, ou plus simplement un compteur explicite » (Laval, 2018). Nous nous interrogeons alors sur le perçu des élèves autour de l'initialisation des variables, des variables d'accumulation et des compteurs. En effet, nous observons que les variables d'accumulation sont moins bien traitées par des élèves débutants en informatique que les autres. Au regard de nos observations, il semble que les variables les mieux maîtrisées par les élèves soient celles des compteurs et, en moindre mesure, l'initialisation des variables, en particulier chez les élèves de Terminale Scientifique connaissant aussi le raisonnement par récurrence. Nous supposons que cela soit dû aussi au fait que ce type de variable est davantage institutionnalisé, comme l'indique Samurçay (1985). Il en est de même pour la structure de boucle *Répéter...Jusqu'à*, comme nous avons pu l'observer¹¹. D'autre part, l'hypothèse que les élèves de Seconde et de Première Scientifique aillent privilégier la lecture à l'affectation pour l'initialisation, est vérifiée et validée. En accord avec Samurçay (1985), nous supposons que ce constat « est probablement dû à une meilleure compréhension de l'instruction de lecture de la part des élèves débutants ainsi que par un besoin d'instruction de communication » (Laval, 2018).

Pour conclure, nous avons donc observé que de nombreuses connexions entre ETM et ETA sont mises en place chez les élèves, en particulier quand les compétences maîtrisées par ces derniers dans le domaine de l'analyse sont importantes. Le fait aussi d'avoir procédé à une ingénierie sur les trois années de lycée (Seconde, Première et Terminale scientifiques), permet de mieux apprécier ces connexions entre ETM et ETA. En effet, l'apprentissage de concepts mathématiques dans un domaine spécifique, en articulation de plus en plus fine avec un travail de type algorithmique, permet de donner du sens à de nouvelles compétences, dans le domaine mathématique autour de la preuve et dans le domaine de l'algorithmique, avec la compréhension et la gestion des variables informatiques, des structures.

Cependant, l'analyse des deux dernières phases de l'ingénierie portant sur l'introduction d'un nouveau savoir que sont les suites adjacentes, mais aussi la construction d'une preuve du *Théorème des valeurs intermédiaires* basée sur la dichotomie et les suites adjacentes, a montré que les élèves sont encore dans une approche incomplète sur les liens qui pourraient y avoir entre raisonnements de nature algorithmique et raisonnements de nature mathématique en particulier quand ils se trouvent libre dans leur choix du raisonnement. (Laval, 2018, p. 467)

¹¹ (N.D.L.R.) Pour plus d'information sur ce constat, nous renvoyons le lecteur à la thèse de Laval (2018).

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Artigue, M. (1992). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(3), 281-308.
- Ayalon, M., Watson, A., & Lerman, S. (2015). Progression Towards Functions: Students' Performance on Three Tasks About Variables from Grades 7 to 12. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 14(6), 1153-1173. <https://doi.org/10.1007/s10763-014-9611-4>
- Bartolini Bussi, M.-G., & Mariotti, M.-A. (2008). Semiotic Mediation in the Mathematics Classroom: Artefacts and Signs after a Vygotskian Perspective. *Handbook of International research in Mathematics education*, 746-783. http://www.cfem.asso.fr/actualites/archives/bartolini-mariotti_handbook
- Bessot, A., Birebent, A., & Nguyen, C.-T. (2006). Algorithmique et programmation dans l'enseignement des mathématiques à l'aide de la calculatrice : étude didactique pour la création d'un site Internet de formation des enseignants. *Cahier de Leibniz*, 155. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01528254/document>
- Birebent, A., & Nguyen, C.-T. (2005). Conception d'une ingénierie didactique pour l'introduction d'éléments d'algorithmique et de programmation dans l'enseignement secondaire des mathématiques. *Les cahiers Leibniz*, 125. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00078787>
- Briant, N. (2013). *Étude didactique de la reprise de l'algèbre par l'introduction de l'algorithmique au niveau de la classe de seconde du lycée français* (Thèse). Université Montpellier II - Sciences et Techniques du Languedoc. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00920506>
- Chevallard, Y. (1986). La Transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné. *Revue française de pédagogie*, 76, 86-91.
- Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des Mathématiques*, 7(2), 5-31.
- Duval, R. (2006). Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques ? *Relime, Numero Especial*, 9(4), 45-81.
- Houdement, C., & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 11, 175-195. <https://hal.archives-ouvertes.fr/halshs-00858709>
- Kahane, J.-P. (2002). *Enseignement des sciences mathématiques : Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques : Rapport au ministre de l'Éducation Nationale*. Odile Jacob. https://www.pedagogie.ac-aix-marseille.fr/jcms/c_75043/fr/commission-kahane
- Knuth, D. (1968). *The Art of Computer Programming*. Addison-Wesley.
- Knuth, D. (2011). *Éléments pour une histoire de l'informatique*. (Articles choisis, traduction de P. Cégielski). Stanford CSLI Publications & SMF.
- Kuzniak, A. (2011). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, 16, 9-24. <https://hal.archives-ouvertes.fr/halshs-01060043>
- Kuzniak, A., & Richard, R. P. (2014). Spaces for mathematical work: Viewpoints and perspectives. *Relime*, 17(4.1), 17-26.
- Lagrange, J.-B. (1990). *Des situations connues aux traitements sur des données codifiées. Actes du Second Colloque Francophone de Didactique de l'Informatique*. Presses Universitaire de Namur
- Lagrange, J.-B. (1999). Complex calculators in the classroom: Theoretical and practical reflections on teaching pre-calculus. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 4(1), 51-81.
- Lagrange, J. B. (2018). *Connected Working Spaces: Designing and evaluating modelling based teaching situations*. Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Umeå, Sweden.
- Lagrange, J.-B., & Laval, D. (2019). *Connected Working Spaces: The case of computer programming in Mathematics Education*. Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Utrecht, Netherlands.
- Lagrange, J.-B., & Rogalski, J. (2017). Savoirs, concepts et situations dans les premiers apprentissages en programmation et en algorithmique. *Annales de didactique et de Sciences cognitives*, 22, 119-158. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01740442>
- Laval, D. (2017). L'algorithme de dichotomie « discret » : une stratégie « rapide » et « gagnante ». Dans I. M^a Gómez-Chacón, A. Kuzniak, K. Nikolantonakis, R.-P. Richard, & L. Vivier (Éds.), *Actes Cinquième Symposium ETM* (p. 267-279). <http://etm5.web.uowm.gr/actes/index.html>
- Laval, D. (2018). *L'algorithmique au lycée entre développement de savoirs spécifiques et usage dans différents domaines mathématiques* (Thèse). Université Sorbonne Paris Cité. <https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01943971>
- Minh, T. K., & Lagrange, J. B. (2016). Connected functional working spaces: a framework for the teaching and learning of functions at upper secondary level. *ZDM*, 48(6), 793-807. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0774-z>
- Modeste, S. (2012). *Enseigner l'algorithme pour quoi ? Quelles nouvelles questions pour les mathématiques ? Quels apports pour l'apprentissage de la preuve ?* (Thèse). Université de Grenoble. <https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-00783294>
- Modeste, S., Ouvrier-Buffet, C., & Gravier, S. (2010). Algorithmique et apprentissage de la preuve. *Repères IREM*, 70, 51-72. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01416152>
- Nguyen, C.-T. (2005). *Étude didactique de l'introduction d'éléments d'algorithmique et de programmation dans l'enseignement mathématique secondaire à l'aide de la calculatrice* (Thèse). Université Joseph-Fourier - Grenoble I. <https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-00011500>
- Perrin-Glorian, M.-J. (2004). Éclairages et questions pour la didactique des mathématiques : Cadres et registres en jeu dans la résolution de problèmes en lien avec les connaissances des élèves et recherches sur l'action des enseignants en classe. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 9, 67-84.

- Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies, une approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin, Paris.
- Samurçay, R. (1985). Signification et fonctionnement du concept de variable informatique chez des élèves débutants. *Educational Studies in Mathematic*, 16(2), 143-161.
- Samurçay, R. (1989). The concept of variable in programming: its meaning and use in problem-solving by novice programmers. *Studying the Novice Programmer*. Published.

DISCRET ET CONTINU AU LYCEE ENJEUX DE CES NOTIONS A TRAVERS L'ETUDE DE L'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE ET DES PROBABILITES

Sophie ROUSSE

LDAR, Université de Paris

rousse.sophie@orange.fr

Résumé

Le discret et le continu sont explicitement présents dans les programmes scolaires officiels du secondaire français, depuis 2001, sans qu'ils ne fassent l'objet de définitions ni de théorèmes. Où se logent-ils ? Sont-ils source de difficultés pour les élèves ? Comment décrire, d'un point de vue didactique, ce type de notion ?

Nos analyses s'inscrivent dans le cadrage de la théorie de l'activité adaptée à la didactique des mathématiques ; pour apprécier la réalité de l'enseignement et compte tenu du côté diffus du discret et du continu dans les mathématiques à enseigner, nous avons été amenée à analyser un spectre large de données, à l'aide d'outils provenant principalement de ce cadre théorique, et d'une méthodologie guidée par la multiplicité des aspects du discret et du continu mis en lumière par une analyse épistémo-mathématique préliminaire. Nous prenons pour support de cette étude l'enseignement de l'analyse et des probabilités au lycée général. Nos analyses permettent de révéler que les activités possibles des élèves peuvent se situer dans deux « mondes » qui se côtoient, voire s'interpénètrent par l'intermédiaire de notions, du vocabulaire, de techniques plus ou moins analogues, qui présentent aussi des ruptures importantes, sources de difficultés pour les élèves, qui mériteraient davantage d'explicitations qui éclairent mathématiquement les mathématiques enseignées. Elles soulignent aussi un changement de paradigme en cours dans l'enseignement des mathématiques, qui fait aujourd'hui une plus grande place à la modélisation et par conséquent aux jeux entre discret et continu.

Mots clés

Discret, continu, suite, fonction, représentation graphique.

I. INTRODUCTION

Le questionnement à l'origine de ma thèse (Rousse, 2018) s'est construit alors que j'étais enseignante de mathématiques en Première S¹. Dans ce lycée dont les élèves sont sélectionnés, non pas sur leurs compétences en mathématiques, mais sur celles en langues, ainsi que sur leur capacité à suivre une scolarité plus dense et exigeante du point de vue de la quantité de travail qu'en lycée traditionnel, les résultats de certains élèves performants s'effondrent au moment où les suites sont abordées. Est-ce dû à l'arrivée des suites dans un thème, l'analyse, jusque-là

¹ La série S a été la série scientifique pour les classes de Première et de Terminale du lycée général de 1995 à 2019.

« peuplé » de continu ? Par exemple, à un premier contrôle sur les suites, un élève répond à la question : « dans chaque cas, dire s'il s'agit d'une suite géométrique, d'une suite arithmétique, ni l'un ni l'autre ». Lorsque la suite est définie par une expression algébrique en fonction de la variable n , par exemple $u_n = n^2$, l'élève estime qu'il s'agit d'une fonction, pas d'une suite et de ce fait ne répond pas à la question. D'autres difficultés apparaissent ensuite au cours de l'apprentissage des suites et des fonctions au lycée, nous verrons que certaines perdurent chez des étudiants futurs enseignants de mathématiques, dans le supérieur.

Par ailleurs, le sujet du discret, du continu et de leurs interactions prend de l'importance du point de vue des programmes officiels depuis celui de la Terminale S de 2001 (Ministère de l'Éducation Nationale, 2001) : on y trouve les premières occurrences des mots « discret » et « continu » (en dehors des fonctions continues). Il y est question de temps discret et de temps continu dans l'étude de phénomènes à l'aide d'une suite, d'une fonction. Il y est demandé de donner des exemples de lois de probabilités discrètes et continues. Toutefois, le processus de modélisation n'y figure pas. L'abord des mathématiques en tant qu'outil d'étude de phénomènes discrets et continus a ensuite pris de l'ampleur en gagnant les autres classes de lycée ainsi que la fin du collège. Le langage de la modélisation est aujourd'hui largement intégré aux programmes. Par exemple dans le programme du cycle 4 de 2015, dans la rubrique « connaissances et compétences » associée à « comprendre et utiliser la notion de fonction », la notion de fonction ne fait pas l'objet d'une définition ; les fonctions y sont introduites en tant qu'outil de modélisation de phénomènes continus et de résolution de problèmes qu'elles modélisent.

Dans le cadre de ma thèse, je me suis focalisée sur les programmes en vigueur de 1999 à 2015. Cependant, les nouveaux programmes officiels de Spécialité mathématiques de 2019 en Première et en Terminale multiplient les références au discret et au continu. En Première, les suites y apparaissent comme modélisation de phénomènes discrets et dans le paragraphe sur la fonction exponentielle, le parallèle entre évolution géométrique à temps discret et évolution exponentielle à temps continu est souligné. En Terminale, il est noté que « *suites et fonctions sont intimement liées et le dialogue discret/continu mérite d'être évoqué régulièrement*² ».

Le sujet étant vaste, j'ai dû délimiter les thèmes à étudier, parmi ceux des programmes officiels. Discret et continu jouent un rôle central et interagissent dans les thèmes des suites et des fonctions d'une part, et probabilités discrètes et continues d'autre part, tout en jouant ce rôle de façon différente, ne serait-ce que par l'affichage et par l'ordre d'apparition du discret et du continu. En algorithmique et dans les mathématiques discrètes du lycée par exemple, la dualité entre discret et continu apparaît moins clairement. C'est pourquoi j'ai focalisé mes questions de recherche, dans le cadre de ma thèse, sur les thèmes de l'analyse et des probabilités, au niveau du lycée. Le but de cette présentation n'est pas d'exposer l'ensemble de ma thèse ; je me concentre ici sur certaines interactions entre le discret et le continu dans le domaine de l'analyse, où les suites et les fonctions sont abordées, dans le but de déceler des causes aux difficultés constatées des élèves et d'envisager des pistes pour favoriser leurs apprentissages.

Ceci m'amène dans un premier temps à balayer les différents aspects du discret et du continu. Puis à exposer le cadrage, la problématique et la méthodologie de la thèse, en centrant mon propos sur le thème des fonctions et des suites. Enfin, j'envisage quelques pistes et perspectives.

² Bulletin Officiel spécial n°1 du 22 janvier 2019 pour la classe de Première, au Bulletin Officiel spécial n°8 du 25 juillet 2019 pour la classe de Terminale.

II. LES ASPECTS DU DISCRET ET DU CONTINU

Que sont le discret et le continu épistémologiquement et historiquement ? Pour répondre à cette question, j'ai consulté les ouvrages d'historiens et épistémologues des mathématiques.

Il apparaît que discret et continu sont véhiculés par différentes expériences qui en donnent une intuition. D'après le mathématicien et épistémologue Longo (1999), l'individu fait essentiellement l'expérience du discret par celle du comptage ; les expériences du continu sont multiples : le temps, le mouvement (sans sauts), la ligne et l'espace. Par ailleurs, une même grandeur peut avoir un caractère discret et un caractère continu. En témoignent les dénominations de « temps discret » et de « temps continu » dans les programmes de Terminale de 2001 et 2019.

Dès l'antiquité, deux conceptions s'opposaient sur la nature des grandeurs (le temps et l'espace) dans les paradoxes de Zénon. Selon les auteurs consultés, les conceptions discrète et continue des grandeurs s'opposaient de deux façons possibles :

- La conception atomiste, selon laquelle le temps, l'espace sont constitués d'éléments insécables s'oppose à la conception continuiste selon laquelle ils sont divisibles à l'infini ;
- La conception selon laquelle les grandeurs sont constituées d'un nombre fini d'éléments insécables s'oppose à celle selon laquelle elles sont constituées d'un nombre infini de ces éléments.

Il ressort de l'analyse historique et épistémologique que discret et continu présentent essentiellement trois aspects formalisés d'un point de vue mathématique :

- L'aspect « avec ou sans saut », formalisé dans les ensembles ordonnés par la notion d'ensemble dense en lui-même, qui correspond à la conception continuiste des grandeurs divisibles à l'infini présente dès l'antiquité. Dans les espaces topologiques, l'aspect « avec ou sans saut » est formalisé par les notions de point isolé et de point limite ;
- L'aspect « avec ou sans trou », formalisé dans les espaces métriques par la notion d'ensemble complet ;
- L'aspect quantitatif qui peut tenir à l'opposition fini/infini ou celle de dénombrable/indénombrable.

A ces trois aspects, il faut ajouter l'aspect « objet d'un seul tenant », formalisé dans les espaces topologiques par la notion de connexité. (Figure 1).

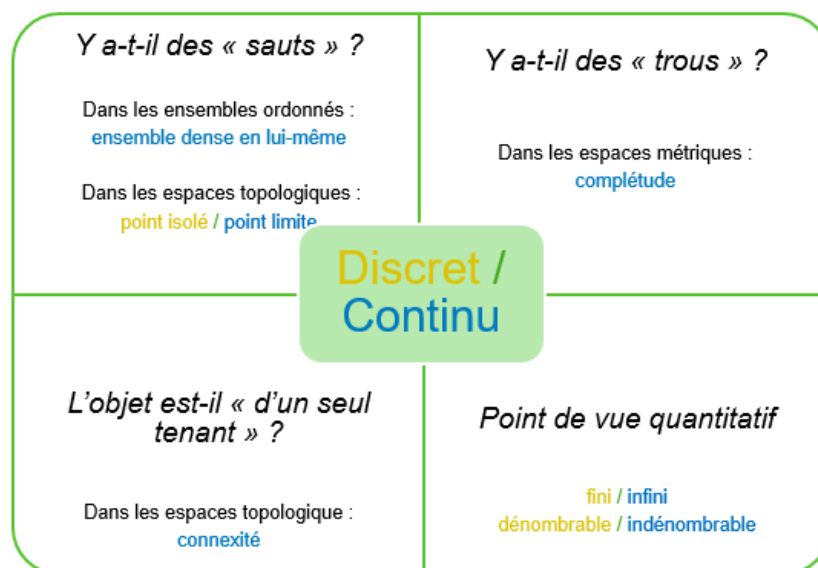


Figure 1 : Les quatre aspects du discret et du continu.

Il apparaît que la notion de discret est clairement définie mathématiquement : un espace topologique est discret lorsque ses points sont isolés. Ceci dépend donc de la topologie choisie.

Des prototypes du discret sont les ensembles finis, l'ensemble des entiers naturels et relatifs.

Il apparaît aussi que le continu est formalisé pour les corps totalement ordonnés, dans ce cas les ensembles continus sont isomorphes à $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathbb{R}$ présente les quatre aspects du continu, c'est le cas aussi des intervalles fermés de $\mathbb{R}$ (il manque la complétude dans le cas d'intervalles ouverts distincts de $\mathbb{R}$).

Ainsi, certains ensembles de nombres sont prototypiques du discret ou du continu. Examinons ceux qui sont présents dans l'enseignement au lycée et les aspects du discret et du continu qu'ils véhiculent. Il s'agit essentiellement des ensembles des entiers, des décimaux, des rationnels et des réels. Mais la frontière entre les décimaux et le continu de $\mathbb{R}$, de même qu'entre les rationnels et les réels n'est pas franche, car les décimaux et les rationnels présentent des aspects du continu tout en ne pouvant pas être totalement rangés dans le discret. Par exemple $\mathbb{Q}$ ne présente pas de saut (il est dense en lui-même et n'a pas de point isolé pour la topologie naturelle), ce qui lui donne un des aspects du continu. Cependant il n'est pas complet (il a des trous), il n'est pas connexe, il est dénombrable quoiqu'infini.

Prenons maintenant l'exemple de la droite graduée afin d'examiner la façon dont l'enseignement s'en est emparé. Dans le cadre géométrique, la droite graduée peut être considérée comme un ensemble de points alignés. Je fais l'hypothèse que ce point de vue, qui se rapproche de la conception atomiste des grandeurs, véhicule un caractère discret. Mais la droite peut aussi être vue globalement, comme une ligne droite qu'on peut représenter par un tracé à la main « sans lever le crayon », ce qui véhicule un caractère continu. Dans le cadre numérique, la droite munie d'un repère, communément nommée « droite numérique », joue dans un premier temps le rôle de « frise » des nombres entiers positifs dans l'enseignement primaire. Progressivement cette droite en vient à jouer le rôle de support intuitif du continu des nombres réels au lycée, tout en étant essentiellement mobilisée pour représenter des entiers, quelques décimaux et rationnels, de rares irrationnels. On peut donc se demander si pour un élève du lycée qui travaille avec la droite des réels, ses activités mathématiques se situent dans le discret, ou dans le continu.

Pour résumer, discret et continu sont des notions mathématiques, mais la notion de continu n'est définissable que dans le cas des corps totalement ordonnés. Ce qui précède montre qu'une

même grandeur peut avoir à la fois un caractère discret et un caractère continu. Par ailleurs, nous pouvons en déduire que les activités mathématiques possibles des élèves peuvent, selon les aspects mathématiques qu'elles mobilisent, les points de vue adoptés, les expériences qu'elles véhiculent, s'inscrire dans le discret ou dans le continu.

Cependant dans le secondaire, en mathématiques, le discret et le continu ne se constituent pas en tant que cadres au sens de Douady (1986) : à ce niveau d'enseignement il n'y a pas de définition possible, peu de propriétés sont explicitables, discret et continu ne font l'objet d'aucune tâche spécifique. Les activités ne se font pas *sur* le discret ou *sur* le continu, mais *dans* le discret ou *dans* le continu. J'ai choisi d'utiliser le mot « monde » pour situer les activités des élèves relativement au discret et au continu.

Discret et continu ne sont pas enseignés « comme tels » mais toujours imbriqués avec d'autres notions. Par conséquent, on pourrait choisir de faire l'impasse sur leur étude didactique ou bien de faire l'hypothèse qu'elles impactent l'enseignement au lycée. J'ai opté pour la deuxième voie.

III. CADRAGE, PROBLEMATIQUE, METHODOLOGIE

1. Cadre théorique

Pour effectuer ce travail de thèse, je me suis placée dans le cadre de la théorie de l'activité (Robert et al., 2012 ; Vandebrouck et al., 2008) considérant ainsi que ce sont les activités des élèves au sens large, y compris l'écoute, qui déterminent en grande partie leurs apprentissages. L'activité est à prendre en relation avec les tâches proposées aux élèves (incluant les expositions de connaissances et les évaluations) et les déroulements, organisés dans un contexte institutionnel précis. Il est donc nécessaire de remonter à tout ce qui permet de comprendre les enjeux de ces tâches et d'apprécier leurs déroulements. Or discret et continu ne peuvent pas être étudiés comme des savoirs traditionnels. C'est donc à travers l'analyse des activités possibles des enseignants et des élèves, lors de la réalisation de tâches qui embarquent du discret et du continu, qu'on peut aller au cœur des interactions entre ces deux mondes.

J'adopte aussi l'hypothèse que les élèves ont besoin d'un certain degré de cohérence, comme les enseignants qui, au-delà des contraintes, investissent les marges de manœuvre dont ils disposent autour d'une logique qui leur est personnelle (Vandebrouck et al., 2008)³.

2. Problématique

Le but de ma thèse a été de dresser un état des lieux, un paysage partiel mais signifiant, sur discret et continu, qui permette d'aboutir à des propositions concernant les variables sur lesquelles il est possible de jouer – au niveau du savoir enseigné - dans le but d'impacter positivement les apprentissages des élèves compte tenu de leurs conceptions spontanées, leurs connaissances anciennes et de leurs difficultés. Mais comme discret et continu ne font pas l'objet de définitions ni de théorèmes, mes études portent sur des notions du thème de l'analyse ou de celui des probabilités qui, elles, font l'objet de définitions et de théorèmes, et qui embarquent du discret et du continu (fonctions, suites, valeur moyenne, variables aléatoires discrètes et continues).

³ Bien que les enseignants puissent avoir différentes conceptions de la classe de mathématiques, leurs pratiques sont cohérentes avec leurs conceptions.

Pour chacune de ces notions, je me pose les questions suivantes :

- Concernant le savoir mathématique, où discret et continu se logent-ils, où et comment discret et continu interagissent-ils ? Quels prolongements sont possibles de l'un à l'autre, quelles ruptures ?
- Concernant le savoir à enseigner et ce qui est enseigné, à travers quoi discret et continu sont-ils mobilisés ? Cela peut être à travers des notions, notations, tâches, techniques, outils numériques, expériences et conceptions identifiées dans mon analyse épistémo-mathématique. Comment discret et continu se traduisent-ils en termes d'activités possibles des élèves ? Quel discours est tenu sur le discret et le continu ? Qu'est-ce qui permet de construire le discret, le continu ?
- Concernant les activités observées des élèves : quelles difficultés ont-ils concernant le discret et le continu, quelles sont celles qui sont liées aux interactions entre discret et continu, sur quels appuis peut-on construire des apprentissages concernant le discret et le continu ?

3. Méthodologie

Du point de vue méthodologique, en croisant les réponses obtenues aux questions précédentes sur les notions présentes dans les thèmes de l'analyse et des probabilités, je peux dresser un état des lieux, et faire quelques propositions.

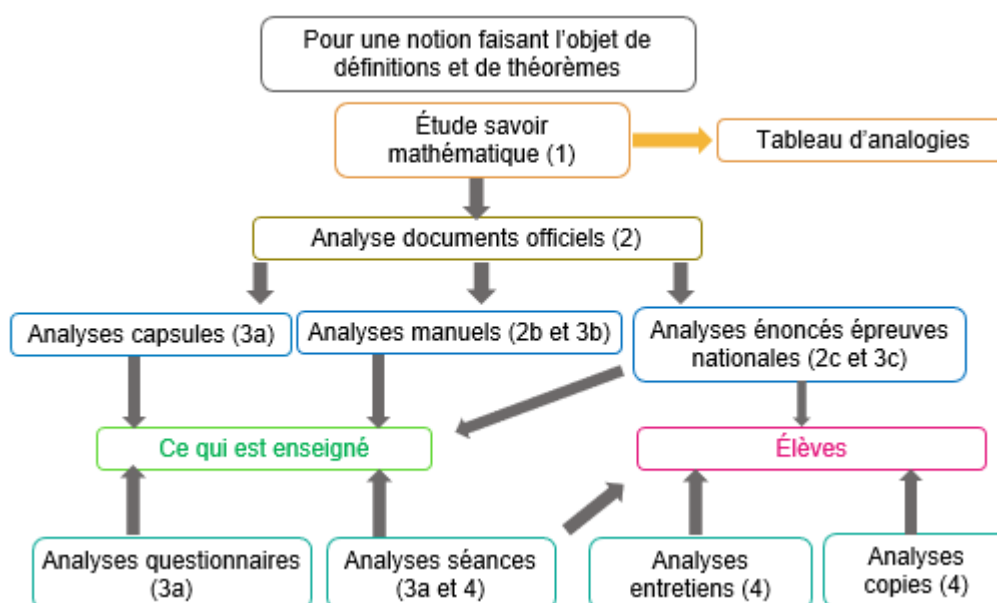


Figure 2 : Méthodologie de la thèse

Pour une notion faisant l'objet de définitions et de théorèmes, l'étude du savoir mathématique (1)⁴ permet d'établir les analogies entre des notions, des techniques (par exemple sur les fonctions au sens large, incluant les suites, la notion de sens de variation est identique pour les suites et les fonctions définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$, quoiqu'elle soit énoncée différemment dans l'un et l'autre cas, j'y reviendrai).

Ainsi, l'étude du savoir mathématique sur une notion permet l'analyse des documents officiels concernant cette notion. Ces analyses permettent à leur tour celles de manuels et d'énoncés d'épreuves nationales qui complètent l'analyse du savoir à enseigner (2) sur cette notion particulière.

⁴ Dans cette partie, les nombres entre parenthèses font référence à ceux de la figure 2.

Afin d'obtenir une vision la plus globale possible de ce qui est enseigné (3) dans le cadre de ce travail, j'ai eu besoin d'analyser des supports très divers : capsules vidéo, séances, questionnaires à des enseignants. Notons que les manuels et les épreuves nationales renseignent non seulement sur les mathématiques à enseigner mais aussi sur les pratiques des enseignants qui en sont les concepteurs et par conséquent sur ce qui est enseigné. Les analyses de ce qui est enseigné sont menées en termes d'analyse de tâches (au sens large, incluant les expositions de connaissances), particulièrement de mise en fonctionnement des connaissances des élèves, avec une attention particulière aux changements de cadre, de registre au sens de Duval (1993), de point de vue, sur le discours concernant de près ou de loin le discret et le continu. S'il y a lieu, les analyses le sont en termes de déroulement (c'est le cas de séances d'enseignement).

Enfin, j'accède aux difficultés des élèves et aux points sur lesquels on peut s'appuyer en termes de connaissances anciennes, de conceptions spontanées (4), par le biais d'analyses de séances, d'entretiens et de copies.

Dans la suite, je présente quelques résultats concernant l'introduction des suites en classe de Première. Pour mieux comprendre ce qui est enseigné et les difficultés des élèves, je suis amenée à revenir sur ce qui précède dans le thème de l'analyse : l'introduction des fonctions dès la classe de Troisième.

IV. LES REPRESENTATIONS GRAPHIQUES DE FONCTIONS

1. Programmes officiels

Au cours des deux premières années pendant lesquelles elles sont étudiées (en Troisième et en Seconde), les fonctions présentent des aspects continus : elles sont définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$; elles sont à valeurs dans $\mathbb{R}$; elles sont (la plupart du temps) continues ; elles sont outil de modélisation de phénomènes continus en Troisième. Cependant, en classe de Seconde, le tableau de valeurs fait partie des « *différents cadres de définition d'une fonction* » (Ministère de l'Éducation Nationale, 2009) (tel était aussi le cas en Troisième de 2008 à 2015). L'ensemble $\mathbb{R}$ et ses intervalles n'apparaissent plus qu'en tant qu'outils – des « *notations* » ; la notion d'ensemble de définition d'une fonction disparaît en 2017 entraînant la disparition des exemples de fonctions définies sur un ensemble fini ou sur $\mathbb{N}$. Un « tout continu » en Troisième et en Seconde, qui manque de cohérence puisqu'un tableau de valeurs est par essence fini donc discret. Ce « tout continu » laisse peu de moyens de faire entrer les jeux entre discret et continu ; dans ces conditions, comment définir une suite en Première, alors qu'une suite est une fonction particulière ? Et si les fonctions sont *de facto* continues, quel intérêt donner à la notion de continuité en Terminale ?

Dans le cadre graphique, le raccourci de la définition d'une fonction (implicitement continue) par un tableau de valeurs revient à prolonger un nombre fini de points au tracé de la représentation graphique d'une fonction continue. D'où la question : comment les manuels et les enseignants procèdent-ils ?

2. Manuels et enseignants de Troisième

Les manuels de Troisième analysés (collection Transmath de 2003, de 2008 et de 2016 ; collection Phare de 2008 ; collection Dimension de 2016) montrent des tendances liées en partie à l'évolution des programmes (voir annexe 1).

En 2008, une fonction peut être « *déterminée par une courbe, un tableau de données ou une formule* » (Ministère de l'Éducation Nationale, 2008). Les manuels abordent explicitement la question « un nombre fini de points d'une représentation graphique étant connus, relie-t-on les points, si oui, comment ? ». Cependant, d'un manuel à l'autre, les choix diffèrent : tracé d'une courbe lisse pour les uns, représentation de points isolés pour les autres. Mais chaque manuel garde une cohérence interne. En 2015, nous avons vu que le programme demande que les fonctions apparaissent comme des modèles de phénomènes continus ; la question « relie-t-on les points ? » n'est plus abordée explicitement par les manuels.

Pour leur part, les enseignants interrogés via un questionnaire (Rousse, 2018) font des choix plus homogènes que les manuels et énoncent une règle claire : s'il y a proportionnalité, s'il s'agit d'une fonction affine, alors on relie les points à la règle ; sinon on les relie « *à main levée* ». Pour montrer le besoin de relier sans la règle dans le cas non affine, ils font calculer une ou deux images de nombres entre deux déjà calculées.

Que la fonction modélise un phénomène discret ou continu, les points sont reliés sans en questionner la pertinence, dans les manuels comme chez les enseignants. Par ailleurs, les questions d'adéquation du modèle sont éludées : dans l'ensemble, les élèves travaillent sur un modèle qui leur est donné et les tâches qui leurs sont proposées ne donnent en 2015 plus lieu à un questionnement de ce modèle. On peut constater la force des règles vis-à-vis des élèves, implicites dans les manuels, explicites chez les enseignants. Notons que l'utilisation du mot « courbe » par les programmes induit plutôt un objet continu et « lisse » et est peu propice à un questionnement à ce sujet.

3. Un exemple d'incidence sur la résolution d'un exercice de Brevet des Collèges

Le questionnement sur la façon dont les points peuvent être reliés est pourtant difficile à contourner dans la résolution de la deuxième question de l'exercice suivant (figure 3), extrait du sujet zéro du DNB de 2016, disponible sur le site éducol.

Exercice 2

Le *marnage* désigne la différence de hauteur entre la basse mer et la pleine mer qui suit.

On considère qu'à partir du moment où la mer est basse, celle-ci monte de $\frac{1}{12}$ du marnage pendant la première heure, de $\frac{2}{12}$ pendant la deuxième heure, de $\frac{3}{12}$ pendant la troisième heure, de $\frac{3}{12}$ pendant la quatrième heure, de $\frac{2}{12}$ pendant la cinquième heure et de $\frac{1}{12}$ pendant la sixième heure. Au cours de chacune de ces heures, la montée de la mer est supposée régulière.

- 1) À quel moment la montée de la mer atteint-elle le quart du marnage ?
- 2) À quel moment la montée de la mer atteint-elle le tiers du marnage ?

Figure 3 : Extrait du sujet zéro du DNB de 2016

Pour répondre à la première question de cet exercice, il suffit de constater qu'un quart est égal à $\frac{1}{12} + \frac{2}{12}$, la réponse est deux heures. Ceci peut aussi se constater sur une représentation graphique de sept points à coordonnées entières que l'élève peut construire à partir de l'énoncé, que l'élève relie les points ou non. Sur la figure 4, qui n'est pas donnée dans l'énoncé de l'examen mais que j'ai effectuée afin d'exposer mon propos, les points sont reliés par des segments.

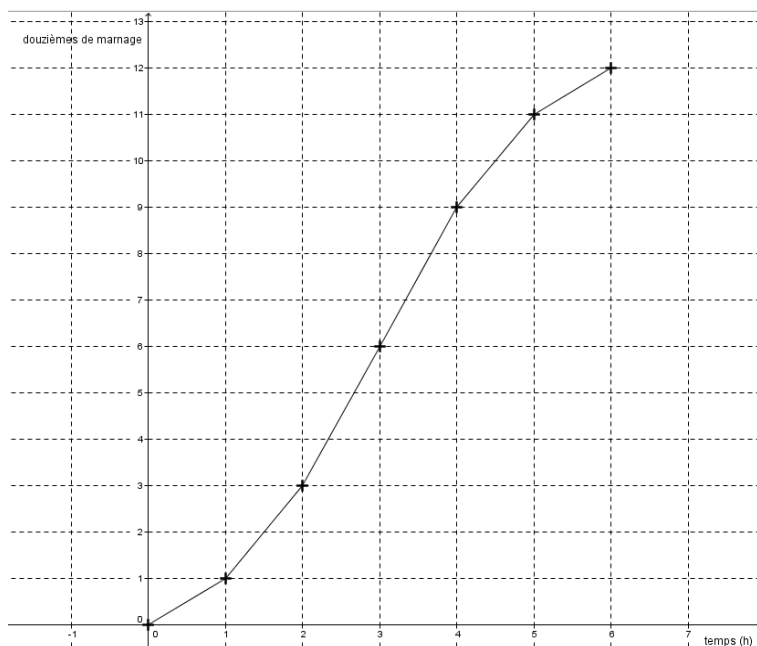


Figure 4 : Représentation graphique de la situation par interpolation linéaire

La deuxième question nécessite une interpolation à la charge de l'élève : le tiers du marnage est atteint pour une durée située entre 3h et 4h. Il est dit que la montée est « *régulière au cours de chacune de ces heures* », ce qui doit être interprété puis modélisé par l'élève. Dans les épreuves de DNB données en 2017 et 2018, un seul exercice comporte une tâche semblable ; l'énoncé y demande explicitement aux élèves de résoudre la tâche dans le cadre graphique et de relier des points à la règle. La montée de la mer dite « *régulière* » pourrait donc bien être, pour l'auteur de ce sujet zéro, synonyme de vitesse constante par morceaux.

Quoiqu'il en soit, dans la réalité, la variation de la hauteur de la mer en fonction du temps est un phénomène continu, sa vitesse l'est aussi. Un modèle de classe C^1 est donc plus proche de la réalité qu'un modèle affine par morceaux ; il est aussi plus proche des « *règles* » énoncées par les enseignants de Troisième. L'énoncé de la question n'invite cependant pas à la multiplicité des réponses possibles : il pourrait être « donner une estimation de l'heure à laquelle la mer a atteint le tiers du marnage ».

Dans cet exercice, un phénomène continu qu'on pourrait qualifier de « simple » est modélisé et la question du choix du modèle se pose. Ce choix se traduit dans le cadre graphique par celui de « relier ou non les points et si oui comment ». Il montre que ce qui transparaît de l'institution n'est pas clair, ni cohérent, et laisse place à une certaine ambiguïté. Ceci dit, cet exercice s'il est exploité en classe, permet d'aborder avec les élèves la question de la multiplicité des modèles pour un même phénomène en lien avec la multiplicité des façons de relier des points, et donc la multiplicité des réponses possibles.

4. Manuels et enseignants de Seconde

Concernant la question « relier ou non les points, si oui comment », les manuels de Seconde analysés (collection Math'x de 2005 et 2010 ; collection Déclic de 2000 ; collection Antibes de 2010) font des choix liés à la collection, cohérents à l'intérieur de chacune et indépendants du changement de programme de 2009 (voir dans le tableau de l'annexe 2 la ligne « représentation graphique d'un tableau de valeurs »).

La nature du phénomène étudié impacte le choix du type de tracé de la représentation graphique : Dans le cas d'un phénomène discret, deux manuels relient les points par des segments, de façon implicite. Deux autres manuels, de la même collection, font le choix

explicite et problématisé de garder les points isolés. On constate donc une cohérence au sein d'un même manuel ou d'une même collection. Lorsque la variable est continue, le mot « courbe » induit une représentation graphique de fonction de classe C^1 . Ceci dit, selon le manuel, elle est qualifiée de courbe « lissée », de « courbe continue et régulière », de courbe « harmonieuse ».

Les choix des manuels diffèrent largement de l'un à l'autre : dans la nature de la représentation graphique dans le cas où le phénomène est discret, dans le choix du vocabulaire dans le cas où le phénomène est continu. Ces choix sont peu explicités, rarement argumentés. Cependant, chaque collection a une cohérence interne.

Les enseignants de Seconde ont une position tout à fait différente de ceux de Troisième. Ils expriment qu'il est important de poser avec les élèves la question de la pertinence de « relier on non les points » puisqu'elle impacte l'apprentissage de la notion de suite en Première. Ils estiment par ailleurs que la question « comment relier les points » impacte les apprentissages de la notion de sens de variation en Seconde. Reste à savoir comment ce souci impacte leurs pratiques, comment ils gèrent les choix faits par le manuel de leurs élèves en la matière, surtout si ce choix ne correspond pas à leur choix propre.

5. Bilan concernant le savoir à enseigner concernant les fonctions

Faisons un bilan sur le savoir à enseigner concernant les fonctions en Troisième et en Seconde, avec une attention particulière sur les questions des représentations graphiques.

Discret et continu génèrent des questions délicates qui méritent un travail conséquent, particulièrement sur les jeux entre les deux, surtout si l'on veut motiver les choix qui sont faits et si l'on veut que les élèves adhèrent à ces choix. Or, dans le savoir enseigné, les jeux entre discret et continu sont largement occultés ; le discret peut être passé sous silence dès lors qu'il est traité par des techniques du continu. Ceci renforce les attentes implicites et explicites et donne lieu à des choix des concepteurs de manuels et des enseignants en général. Non argumentés, ces choix semblent arbitraires. En conséquence, les élèves doivent s'adapter aux choix différents d'un manuel à l'autre, d'un enseignant à l'autre. Ils doivent répondre aux attentes, explicites et implicites : si les points sont alignés, on trace une droite ; s'il s'agit d'une courbe, on relie de façon lisse et les extrema sont déjà présents. Finalement d'après les analyses effectuées dans ma thèse, les élèves réciteront à leur professeur en classe de Première, par cœur, que la représentation graphique d'une suite est faite de points isolés. Dans ces conditions, quelle cohérence peuvent-ils trouver dans ce qui leur est proposé ?

V. DES REPRESENTATIONS GRAPHIQUES DE FONCTIONS AU SENS DE VARIATION

1. Un premier exemple, en classe de Première

Voici un exemple de conséquence de ces effets de contrat et ambiguïtés, du côté des élèves. Lors d'un devoir surveillé en Première S, la question est de chercher le sens de variation d'une suite (h_n) . L'élève introduit une fonction f dont il veut chercher le sens de variation par un calcul de dérivée afin de déterminer le sens de variation de la suite. Un entretien avec l'élève, dont un extrait fait l'objet de la figure 5, permet de lui faire expliciter son point de vue.

L'élève s'étonne de ce que l'écriture $h(n) = f(x)$ ne soit pas correcte. Il ne voit pas le problème « puisque le but est d'utiliser la dérivée ». Nous lui faisons remarquer que la suite est définie sur $\mathbb{N}$ et lui posons la question de l'existence d'une dérivée pour une fonction définie sur $\mathbb{N}$. L'élève ne voit toujours pas de problème puisque « on imagine la courbe lorsqu'on place les points à coordonnées entières, la courbe a des tangentes donc il y a une dérivée ».

Une expérience de pensée dans le cadre graphique permet à cet élève de considérer que les points représentant la suite sont reliés par une « courbe lisse » qui serait définie par ces points et d'effectuer ainsi un prolongement du discret au continu (dérivable). Ce prolongement, du type de ceux que nous avons constatés dans les manuels (cf. supra) et dont l'élève ne questionne pas l'unicité, semble aller de soi pour lui. Pour cet élève, une suite est une fonction continue et dérivable et rien ne semble différencier la recherche du sens de variation de l'une ou de l'autre.

2. Le savoir mathématique sur le sens de variation des suites et des fonctions au niveau de la Première et de la Terminale

Élargissons notre questionnement : y aurait-il au sein du savoir mathématique au lycée des éléments qui pourraient contribuer à la confusion des élèves quant au sens de variation des suites vs celui des fonctions ? Dans ce paragraphe, pour plus de simplicité, le mot « fonction » fait référence à une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$. Je désigne par « notions analogues » des notions qui présentent des similarités, que ce soit dans le vocabulaire ou les notations, la forme algébrique, ou le procédé sous-jacent. Les définitions, théorèmes et propriétés peuvent être identiques aux notations près. Afin d'éclairer mon propos, j'ai établi dans ma thèse un tableau d'analogies. La partie de ce tableau qui concerne le sens de variation est présentée en figure 5. « Est analogue à » y est abrégé par « an. », « est identique à » par « id. » et « implique » par « impl. ». Par la suite, je commente ce tableau ligne par ligne.

Suites		Fonctions définies sur un intervalle
Notion de suite des accroissements ($u_{n+1} - u_n$)	an.	Notion de fonction dérivée
Monotonie (définition – cas stricte croissance) : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > u_n$		Définition analogue fausse
Monotonie (définition équivalente – cas stricte croissance) : $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, n > p \Rightarrow u_n > u_p$	id.	Monotonie (définition – cas stricte croissance) : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$
Monotonie (technique) : recherche du signe des accroissements ($u_{n+1} - u_n$)	an.	Monotonie (technique) : recherche du signe de la dérivée
La suite de terme général $f(n)$ est croissante	impl.	La fonction f est croissante (implique...)
Propriété : monotonie de $\lambda u, u + k, \sqrt[n]{u}, 1/u$ connaissant la monotonie de u	id.	Propriété : monotonie de $\lambda f, f + k, \sqrt[n]{f}, 1/f$ connaissant celle de f

Figure 5 : Extrait du tableau d'analogies

Commentaire de la ligne 1 : $u_{n+1} - u_n = \frac{u_{n+1} - u_n}{1}$. Par conséquent, $u_{n+1} - u_n$ est un taux d'accroissement entre deux valeurs consécutives d'une suite. De façon imagée, les termes de la suite des accroissements et les nombres dérivés sont, compte tenu de la nature de la variable qui appartient à l'ensemble discret $\mathbb{N}$ dans un cas et un ensemble continu dans l'autre, « des taux d'accroissement on ne peut plus proches ». Cette analogie souligne que dans le cas des suites, le travail se fait dans le monde du discret, dans lequel tout nombre possède un successeur ; dans le cas des fonctions, le travail se fait dans le monde du continu, dans lequel

tout nombre peut être approché par d'autres nombres qui lui sont, de façon imagée, « aussi proches que l'on veut ».

Commentaire des lignes 2 et 3 : la monotonie d'une suite peut être définie de deux façons. Celle qui est communément utilisée est simplement quantifiée, elle repose sur l'existence pour tout entier naturel d'un unique successeur et n'a pas d'équivalent dans le thème des fonctions définies sur un intervalle ; l'autre, doublement quantifiée, est identique pour les suites et les fonctions définies sur un intervalle.

Commentaire de la ligne 4 : les deux notions analogues de « suite des accroissements » et de « fonction dérivée en un point » permettent, par une recherche de signe, de déterminer un sens de variation. D'après mes analyses, les analogies entre la notion de suite des accroissements et celle de dérivée, ainsi qu'entre les techniques de recherche de monotonie associées ne sont pas soulignées par les manuels. La définition doublement quantifiée n'est pas abordée dans le thème des suites, le fait que la définition simplement quantifiée soit fausse dans le cas de fonctions définies sur un intervalle non plus.

Commentaire de la ligne 5 : la recherche du sens de variation d'une suite par celui d'une fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ qui lui est associée est une incursion du monde du continu dans celui du discret qui, nous l'avons vu, peut prêter à confusion.

Enfin, et c'est l'objet de la dernière ligne de la figure 6, les propriétés de recherche de sens de variation d'une suite ou d'une fonction multipliée par une constante, à laquelle on additionne une constante, dont on prend la racine carrée ou l'inverse sont équivalentes. *A priori*, cette équivalence ne prête pas à confusion. Cependant, il se trouve que dans l'énoncé de cette propriété sur les fonctions, c'est la lettre u et non la lettre f qui est choisie dans les programmes et les manuels. Une habitude, certainement, qui ne peut qu'ajouter un peu plus de confusion entre les mondes du discret et du continu, déjà peu différenciés.

3. Effets observés lors de la résolution d'une tâche par des étudiants de Master MEEF parcours mathématiques⁵

Nous constatons, sur l'étude de la notion de sens de variation, que les sources de confusions possibles entre les suites et les fonctions sont multiples pour les élèves : dans le cadre graphique par un prolongement du discret au continu qui peut sembler sans équivoque, au sein du savoir mathématique dans lequel les analogies entre suites et fonctions sont présentes. Je suis allée voir s'il restait des traces de ces confusions, toujours dans le thème des suites et des fonctions, auprès de deux promotions d'étudiants en première année de master MEEF. Pour cela, je leur ai soumis un questionnaire dont une question était : Que peut-on dire d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui vérifie « pour tout x réel $f(x + 1) = f(x)$ » ? Même question avec l'énoncé « pour tout x réel $f(x + 1) > f(x)$ ».

Brève analyse a priori

Les formes algébriques des deux sous questions sont proches des formes $u_{n+1} = u_n$ et $u_{n+1} > u_n$. Ceci peut résulter en ce que certains étudiants répondent de façon erronée que la fonction est constante à la première sous-question et qu'elle est strictement croissante à la deuxième sous-question. Par ailleurs, les étudiants peuvent être poussés à répondre de la sorte par effet de contrat, une réponse du type « on ne peut rien dire » pouvant ne pas leur paraître acceptable. Ceci dit, les notations f et x sont celles des habitudes de travail sur les fonctions définies sur un

⁵ MEEF est l'acronyme de « Métiers de l'enseignement, de l'Éducation et de la Formation ». En France, le Master MEEF parcours mathématiques prépare au métier d'enseignant de mathématiques du second degré.

intervalle de $\mathbb{R}$ et j'ai montré dans ma thèse que le choix des notations est un des facteurs qui peuvent induire que le travail s'effectue dans le monde du discret ou bien celui du continu. Par ailleurs, la forme algébrique $f(x+1) = f(x)$ est proche de celle de l'énoncé de la périodicité d'une fonction.

Résultats

Au total, sur les deux promotions, le taux d'étudiants qui ne répondent pas à ces deux sous questions est de 10%. Ce sont presque exclusivement les mêmes étudiants pour les deux.

10 % des étudiants donnent une réponse correcte à la seconde sous-question. Ces étudiants ont tous répondu correctement aussi à la première sous-question. Les arguments qu'ils avancent peuvent faire appel à diverses définitions, comme dans l'exemple 1 ci-dessous (figure 6) ; ils peuvent être aussi des contre-exemples dans le registre graphique comme dans l'exemple 2 (figure 7).

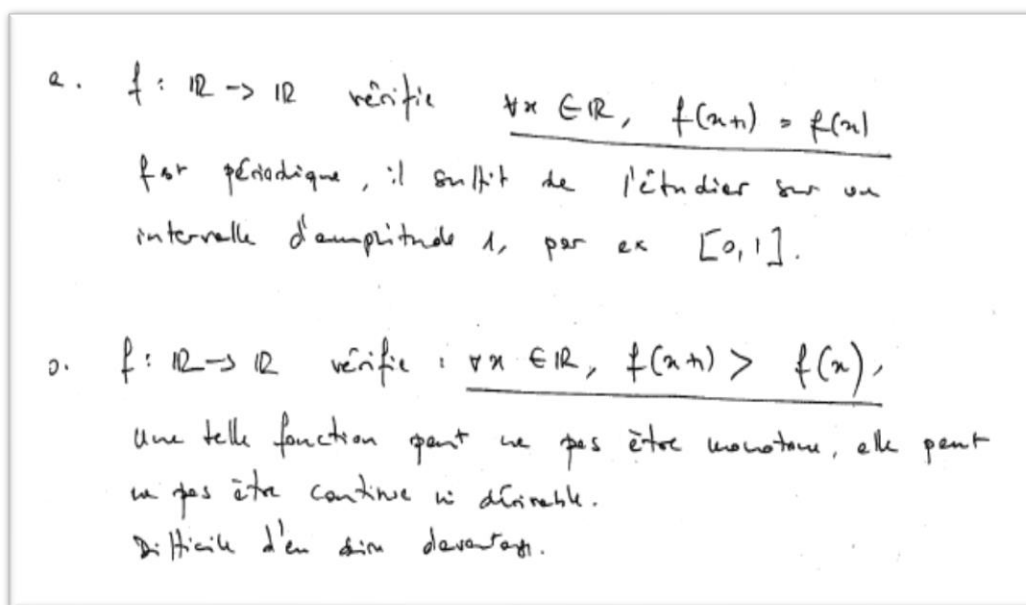


Figure 6 : Réponse d'étudiant n°1

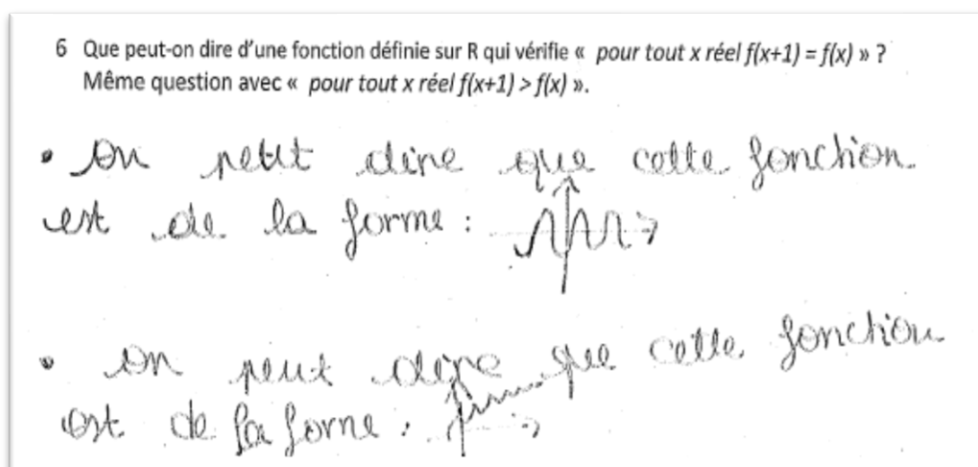


Figure 7 : Réponse d'étudiant n°2

Près de la moitié des étudiants répondent à la première sous question que la fonction est périodique. Et environ 30% des étudiants répondent que la fonction est constante, voire pour certains qu'elle est stationnaire, vocabulaire propre à la monotonie des suites.

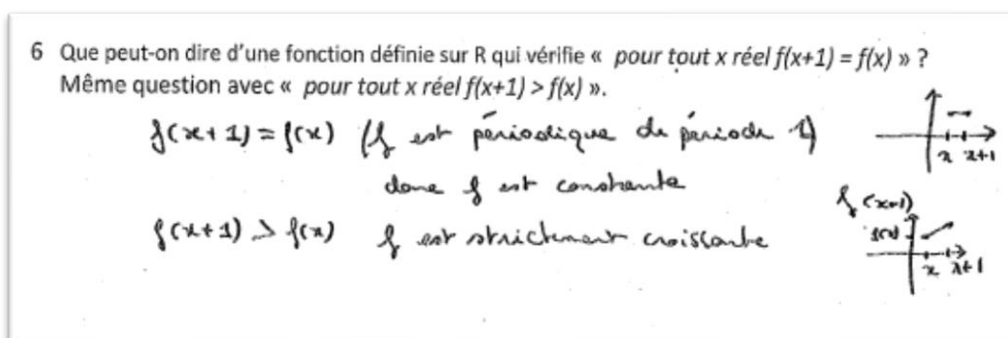


Figure 8 : Réponse d'étudiant n°3

Dans l'extrait n°3 (figure 8), l'étudiant écrit que la fonction est périodique de période 1, elle serait « donc » constante.

Concernant la deuxième sous question, le taux le plus important est de loin celui des étudiants qui répondent que la fonction est strictement croissante : 36 %.

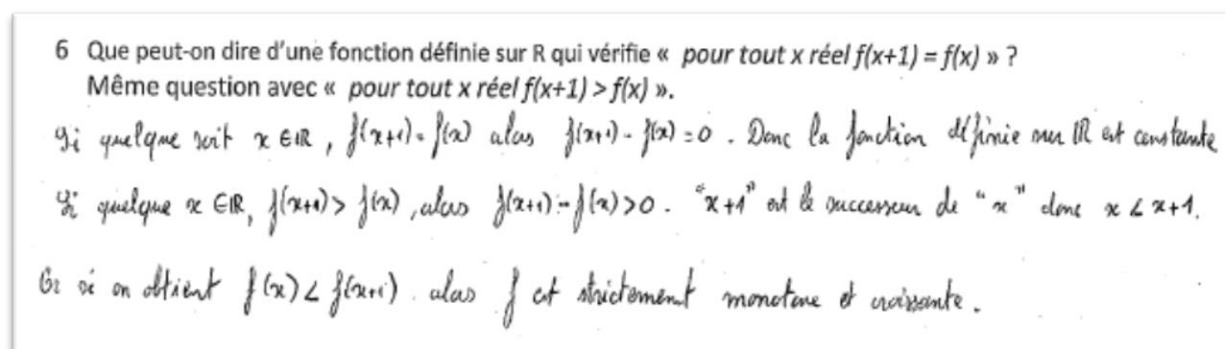


Figure 9 : Réponse d'étudiant n°4

Chez certains, les références au discret sont explicites. Dans l'extrait n°4 (figure 9), un étudiant écrit que « "x + 1" est le successeur de "x" » pour tenter de justifier la croissance de f .

L'argument peut aussi être graphique, comme dans la réponse n°3. Deux points d'abscisses x et $x + 1$ sont reliés par un segment. L'étudiant ne semble pas considérer que f est une suite ; ceci dit, il n'imagine pas l'infinité des valeurs que peut prendre x ni d'autre façon de relier les points que par des segments.

Les confusions semblent bien installées pour une partie importante des étudiants.

VI. CONCLUSION

J'espère avoir montré que les difficultés rencontrées par les élèves au moment de l'introduction des suites en classe de Première ont tout lieu d'être et qu'elles sont en partie liées à des mondes du discret et du continu dans lesquels les élèves travaillent, mais qui sont à la fois peu différenciés et peu construits.

Le savoir mathématique associé au discret et au continu est difficile. Si je reprends la terminologie de Pouyanne (2007) : au lycée, les notions de discret et de continu sont Non Encore Formalisées (NEF). La notion de discret et celle de continu dans le cas des corps totalement ordonnés sont formalisées dans le supérieur. Cependant, la notion de continu dans

sa généralité est non encore formalisable (NEF 2), peut-être jamais formalisable (NEF 3). Au lycée, les mots discret et continu sont de plus en plus présents en tant qu'adjectifs associés aux substantifs « phénomène », « modélisation », « variable », « variable aléatoire » ; discret et continu ne font pas l'objet de définitions ni de tâches directement, ni d'activité explicite des élèves, ce qui rend difficile la construction des deux mondes. Par contre, des notions mathématiques Non Encore Formalisées relevant du continu font l'objet de définitions (plus ou moins satisfaisantes) et de tâches. Citons par exemple les notions de nombre réel, limite, dérivée, continuité, intégrale. On a donc des notions NEF à l'intérieur de notions NEF voire NEF 2 ou NEF 3. Ce n'est pas simple, les manuels et les pratiques des enseignants en témoignent ainsi que les difficultés des élèves. Les manuels et les enseignants recourent alors à des attendus et des règles, implicites et parfois explicites, parfois même à une idée de « magie » des mathématiques.

Dans ces conditions, comment construire des mondes du discret et du continu cohérents avec les élèves ? On peut penser qu'une partie de la réponse réside dans la modélisation. Les programmes officiels lui donnent une place de plus en plus importante. Cependant, cette place est peu investie par les manuels. Les épreuves de brevet et de Baccalauréat, qui pilotent en partie les savoirs enseignés, offrent quelques exemples de travail au sein d'un modèle déjà donné par l'énoncé. J'ai pu constater au fil de mes analyses de manuels et d'épreuves nationales que le processus de modélisation est non seulement peu abordé mais qu'il est parfois sollicité de façon erronée. Pourtant, envisager avec les élèves le choix entre un modèle discret et un modèle continu leur permet d'associer un monde au travail effectué, au-delà d'effets de contrats, et de formuler des différences entre les deux mondes. En particulier, ce faisant, ils peuvent alors percevoir plus clairement l'absence du « local » dans le monde du discret.

Donner toute sa place à la modélisation permet aussi d'envisager plusieurs modèles continus pour des données discrètes identiques, comme dans l'exercice du sujet zéro du Brevet (figure 3). Ceci permet d'enrichir considérablement le monde du continu tout en le distinguant encore plus clairement de celui du discret.

Pour finir, voici quelques-unes des questions qui pourraient prolonger ce travail.

- Quel discours, voire quelles tâches sur le discret et le continu aux cycles 3 et 4, préparent une construction (cohérente) ultérieure ?
- Quelles définitions, quel discours, voire quelles tâches peut-on concevoir sur le discret et le continu au lycée, pour qu'ils satisfassent un besoin de cohérence pour les élèves ?
- Dans quelle mesure et comment le travail de modélisation permet-il de travailler discret et continu ? Cette problématique peut conduire à des constructions d'ingénieries.
- Les premiers apprentissages de la numération et des probabilités se placent « naturellement » dans le monde du discret. Le « tout continu » constaté dans les premiers apprentissages de l'analyse est-il un si bon choix ? Étudier les suites avant les fonctions : quelles conséquences cela aurait-il ?
- Avec l'usage de l'informatique et des calculatrices, les décimaux à une dizaine de décimales (qui forment un ensemble discret) sont surreprésentés dans le cursus scolaire. Par ailleurs, les écrans sont faits de pixels mais donnent tout de même l'illusion optique du continu par des points suffisamment rapprochés. L'introduction de ces usages modifie-t-il l'expérience qu'ont les élèves du continu ?

Démystifier l'ordinateur et la calculatrice et les remettre à leur place d'outil ancré dans le discret ; expliciter ce qui différencie et ce qui unifie le discret et le continu dans la pratique des mathématiques, les habitudes, les conventions, les propriétés, les procédures de résolution de problèmes, le processus de modélisation : ce sont des exemples de façons de lutter contre le désamour d'une part non négligeable d'élèves pour les mathématiques et plus largement contre

une pensée formatée du citoyen, d'ouvrir ainsi la conscience des jeunes à la complexité du monde.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- DOUADY, R. (1986). Jeux de cadre et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des Mathématiques*, 7(2), 5-31.
- DUVAL R. (1993). Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. ULP, IREM Strasbourg 5, 37-65.
- LONGO, G. (1999). The math continuum: from intuition to logic, In Jean Petitot, Francisco J. Varela, Barnard Pacoud & Jean-Michel Roy (eds.), *Naturalizing Phenomenology*. Stanford University Press.
- MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE (2001). *Bulletin Officiel*, 4 août 2001.
- MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE (2008). *Bulletin Officiel*, 28 août 2008,
- MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE (2009). *Bulletin Officiel*, 23 juillet 2009,
- POUYANNE, N. (2007). Mettre du relief sur les mathématiques à enseigner au collège et au lycée. In Pariès et al. *Document pour les enseignants n°9*, IREM Paris 7, 9-11.
- ROBERT, A., PENNINGCKX, J. & LATTUATI, M. (2012). *Une caméra au fond de la classe, (se) former au métier d'enseignant de mathématiques du second degré à partir d'analyses de vidéos de séances de classe*. Besançon : Presses Universitaires de Franche-Comté.
- ROUSSE, S. (2018), *Discret et continu au lycée. Enjeux de ces notions à travers l'étude de l'enseignement de l'analyse et des probabilités* (Thèse de doctorat). Université Paris Diderot.
- VANDEBROUCK, F. (Ed.) (2008). *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*. Toulouse, Octarès.

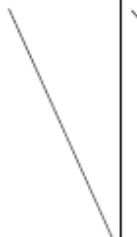
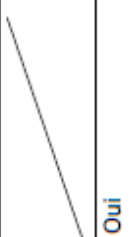
MANUELS SCOLAIRES

- ALVEZ, Y. & AL. (2005). Manuel Math'x.. Classe de Seconde. Didier.
- ANTIBI, A. & AL. (2010). Manuel Antibi. Classe de Seconde. Nathan.
- CARLOD, V. & AL. (2008). Manuel Transmath. Classe de Troisième. Nathan.
- CARLOD, V. & AL. (2016). Manuel Transmath. Classe de Troisième. Nathan.
- CHESNÉ, J.F. & AL. (2010). Manuel Math'x. Classe de Seconde. Didier.
- COSTE, R. & AL. (2000). Manuel Déclic. Classe de Seconde. Hachette.
- COURBON, D. & AL. (2003). Manuel Transmath. Classe de Troisième. Nathan.
- DARO, I. & AL. (2008). Manuel Phare. Classe de Troisième. Hachette.
- FAVERO, S. & AL. (2016). Manuel Dimensions. Classe de Troisième. Hatier.

ANNEXE 1

Tableau récapitulatif de l'analyse de manuels de Troisième

Légende : déf : définition ft : fonction lin : linéaire chap : chapitre

Manuel	Transmath 2003	Phare 2008	Transmath 2008	Transmath 2016	Dimensions 2016
Déf fonction		Processus de correspondance	Processus de correspondance + déf par graphique + déf par tableau + déf par formule	Processus de correspondance + déf par graphique + déf par tableau + déf par formule	Dépendance de grandeurs
Déf représentations graphique (cas général)		Oui	Non mais représentation graphique qui définit fonction	Non mais représentation graphique qui définit fonction	Oui
Représentation graphique d'un tableau de valeurs		Oui : courbe « lisse » ; Problématisé par une activité sur papier mobilisant divisibilité à l'infini ; 5 ex de représentations graphiques dites « à main levée »	Oui : points isolés + ex tarifs postaux : fonction en escalier + ex sur tableau, courbe « lisse »	Oui : un ex sur papier (situation de balistique, non guidé) + un ex sur tableau (situation alcoolémie, points reliés par segments)	Oui : un ex sur tableau (situation âge d'un chien, non guidé)
Détermination extremum		Non, dans le tableau de valeurs	Oui, encadrement via tableau + cadre graphique	Non	Non
Démonstration nature rep graph fonction lin et affine	Oui	Oui	Oui	Ft lin : non Ft affine : oui	Non
Modélisation	Dans chap ft lin Adéquation sur valeurs négatives	Dans chap généralités + chap ft lin Adéquation sur valeurs décimales et négatives	Dans chap ft lin Adéquation sur valeurs négatives	Dans chap ft lin Adéquation sur valeurs négatives	Dans exposition de connaissances ft lin. Pas d'adéquation
Type de phénomènes	Surtout discrets ; Continus en approfondissement	Continus : chap généralités + ex ft lin Discrets : intro ft lin + tout le chap ft affines	Surtout continus Discrets : intro ft lin + tout le chap ft affines	Surtout continus Discrets : intro ft lin + tout le chap ft affines	Surtout continus Discrets : exposition de connaissances + ex corrigés + ft affines

ANNEXE 2

Tableau récapitulatif de l'analyse de manuels de Seconde

Légende : ens : ensemble déf : définition ft : fonction act : activité exp : exposition SES : Sciences économiques et sociales

Manuel	Déclic 2000	Math'x 2005	Math'x 2010	Antibi 2010
Déf fonction	Processus de correspondance ; x « <u>décrit</u> » l'ensemble de déf	Processus de correspondance ; x « <u>décrit</u> » l'ensemble de déf	Déf : processus de correspondance pour « <u>chaque</u> » nombre x + déf par courbe / tableau / formule + aspect covariation de deux grandeurs	Processus de correspondance pour « <u>chaque</u> » nombre x
Déf représentations graphique (cas général)	Nommée « courbe représentative » « l'abscisse x <u>décrit</u> l'ensemble de définition »	Nommée « courbe représentative » « l'abscisse x <u>décrit</u> l'ensemble de définition »	Nommée « courbe représentative » « x prend toutes les valeurs de D » (D est l'ensemble de déf)	Nommée « représentation graphique » « x prend toutes les valeurs de D » (D est l'ensemble de déf)
Ens de déf	Pas d'ensemble de déf fini ; Pas de tâche	Pas de tâche	Pas de tâche	Fait l'objet de tâches ; Réunion finie d'intervalles + 1 discret fini + 2 discret infini
« Relier ou non les points » ?	Points toujours reliés : pas de question	Question posée une fois sur un ens de déf fini	Question posée dans act d'introduction + dans l'exp de connaissances + TP	Points toujours reliés : pas de question
Représentation graphique d'un tableau de valeurs (en particulier tableau de variations) ;	Tâche nommée « <u>courbe point par point</u> » - procédure : « on joint les points par une courbe lissée » soit tableau de variation donné ; soit variations lues sur calculatrice ; soit indication changement de variation en des valeurs entières	6 ex en tout 1 ens de déf fini : « <u>graphique</u> ». En ex sans situation ni expression algébrique « <u>tracer une courbe pouvant représenter f</u> ». En ex en situation, f est unique, tâche nommée « <u>tracer la courbe</u> » - procédure : « <u>joindre harmonieusement</u> »	1 act + TP + 4 ex dont 3 ex en situation continue : « <u>tracer une belle courbe/ une courbe harmonieuse</u> » TP « <u>courbe lissée</u> » sur tableau	A partir d'un tableau de variations : ex corrigé + « à retenir » + 6 ex : « <u>A un tableau de variation peuvent être associées de nombreuses fonctions/courbes</u> » A partir tableau de valeurs : 2 ex contexte continu, « <u>courbe continue et régulière</u> »
Modélisation	Vocabulaire absent Situations : 9 géométriques + 5 physique + 2 biologie + 4 SES (1 éco + 3 pb évolution : variable discrète)	Vocabulaire absent Situations : 12 géométriques + 6 physique + 5 biologie + 2 SES dont 1 discret	Titre du chapitre Pas présent dans les exercices. Situations : 17 géométrie + 6 physique + 7 biologie + 5 SES dont deux discrets finis + 3 arithmétique	Vocabulaire absent Situations : 5 géométriques + 7 physique + 5 biologie (3 discrets 2 continus) + 4 SES (3 discret 1 continu) + 2 arithmétique
Type de phénomènes	3 discrets avec mot « fonction » et courbes points reliés par segments 17 autres continus avec courbes « lisses »	1 discret fini (n°61) avec points isolés et variable n et pas mot « fonction » 24 autres continu (variables : longueur, temps)	5 discrets dont deux finis et [deux infinis en arithmétique avec mot « fonction »] 33 autres continus (variables : longueur, surface, volume, temps)	8 discrets [dont 6 finis et 2 infinis en arithmétique] avec mot « fonction » 15 autres continus (variables : longueurs, temps)
Type de graphique	Courbes de fonctions continues « lisses » + 3 courbes points reliés par segments (pb discret évolution) + une courbe en escalier	Courbes de fonctions continues « harmonieuses » + 1 graphique points isolés	Courbes de fonctions continues « harmonieuses » + 4 graphiques points isolés (3 donnés + 1 à faire)	Courbes fonctions continues « <u>courbe continue et régulière</u> » 4 courbes points reliés par segment (dont 3 pb discret évolution) Autres situations discrètes : pas de graphique.
Courbe avec indices	Oui : tableau de variation ; quelques valeurs	Oui : tableau de variation ; quelques valeurs	Non – non unicité pas abordée	Oui : tableau de variation
Variable discrète	x	n	Pas de nom	n
Variable continue	x	x, a, b, t, q	x, t	x, t, a

WORKING WITH MATHEMATICS TEACHERS ON THE UNDERSTANDING AND PROMOTION OF CONTENT-SPECIFIC CLASSROOM TALK

Núria PLANAS

Universitat Autònoma de Barcelona

Nuria.Planas@uab.cat

Abstract

In classroom research on mathematics and language, analyses of teacher talk typically address features in this talk that make or do not make it productive with respect to the interactive communication of mathematical contents. These features are, nonetheless, much less often studied from the perspective of the explicit content communication of specialized mathematical meanings, and instead rather oriented to more general and equally important considerations regarding, for example, the kind of questions teachers ask their learners, or the kind of answers they provide to follow up learner contributions. More studies on classroom mathematics teaching that promotes content-specific mathematical discourse practices are necessary, alongside studies which examine the linguistic scaffolding of these practices. In this conference paper, I continue the mathematical-linguistic approach to the classroom talk of the mathematics teacher from Planas (2018, 2019, 2021). I present two intersecting verbal tools in language — naming and lexicalization— aimed together at supporting content teaching of mathematics in school classrooms for the communication of specialized meanings. These verbal tools have been used to study content mathematics teaching, and particularly to conduct research-informed developmental work on this teaching with secondary school mathematics teachers.

Keywords

Mathematics teaching; classroom teacher talk; naming and lexicalization; developmental work.

I. INTRODUCTION

We can easily agree on the relationship between ‘good’ mathematics teacher talk and ‘good’ mathematics teaching in the school classroom, even regardless of the meanings considered for the quality of ‘good’. In mathematics education research, however, interest in the study of mathematics teacher talk is still in the beginnings of investigating the production of classroom talk oriented to communicate mathematical meanings for selected contents. While language-based studies of the kind of questions teachers ask their learners, for example, or the kind of answers they provide to follow up learner contributions are relevant for the case of mathematics teachers and learners, the study of the explicit communication of mathematical content in mathematics teacher talk is relevant too. Firstly, the teacher talk in the classroom is a potential source of mathematical meanings, and hence it becomes also a potential resource for the generation of opportunities of accessing to, negotiating and learning these meanings. Secondly, since access to specialized mathematical meanings in classroom interaction is essential for

school mathematics learning, their communication needs to be offered in explicit and focused verbal ways—or non-verbal but still focused in classrooms with deaf learners and teachers—, together with other modes in language and over the course of participation in mathematical discourse practices. Thirdly, developmental work with mathematics teachers could benefit from research-informed tasks on mathematics content teaching and language use.

In what comes, I take a mathematical-linguistic focus in order to present two verbal tools or resources available in language—which I call *naming* and *lexicalization*— aimed at supporting mathematical content teaching in school classrooms. I argue that, although the talk of the mathematics teacher in a classroom lesson continuously develops, it can be distinguishable or examined at discrete times of the lesson in which concrete word names and content-focused sentences are introduced. In this respect, the verbal tools of naming and lexicalization can be used to study content mathematics teaching, and to conduct research-informed work on this teaching with groups of mathematics teachers in developmental settings. The equation and the quadratic equation concepts serve to illustrate my arguments in the secondary school level and in professional developmental initiatives in Catalonia-Spain. Many of the reflections here can be found in three complementary texts (Planas, 2018, 2019, 2021), where details of analytical methods and progressive theoretical framework building are provided.

II. A MATHEMATICAL-LINGUISTIC FOCUS IN THE STUDY OF MATHEMATICS TEACHER TALK

There is a range of theoretical-analytical frames for the study of language, mathematical meaning making and communication in mathematics classrooms (Planas & Schütte, 2018), but not all of them offer tools easily applicable to the analysis of concrete mathematical meanings communicated through the resources of lexicon and grammar in the language system. The theory of Systemic Functional Grammar (SFG; Halliday, 1978, 1985) takes the realization of linguistic forms into meaning as mediated in practice, and fits in well with sociocultural views of teaching and of teacher talk that address the rules of both the language system and the relevant social context as mediators. Additionally, the adoption of SFG tools and reflections enables the integration of tools and reflections from other field-based sociocultural frames to account for the production of mathematics teacher talk in content teaching, such as the Mathematics Discourse in Instruction frame (MDI; Adler, 2017, 2021). I adopt a mathematical-linguistic focus in connection to some of the MDI tools and reflections, and hence close to sociolinguistic stances for which discourse practices are key. I specifically explore verbal tools of importance in mathematics teaching talk and in the SFG and MDI frames.

Halliday (1978, 1985) established that written and spoken languages follow rules of organization which can be distinguished in the lexicogrammar, and which have an effect on meaning generation. The forms and functions of lexicon and grammar are related in ways that provide the meaning potential in language as well as the possibilities of its realization for concrete meaning making. In the case of the teacher talk in the mathematics classroom, part of the meaning potential is expected to be realized to communicate certain mathematical meanings planned to be taught and learned. Whereas mathematics teaching is a broad practice within which a diversity of social, cultural, political and linguistic events take place and are enhanced, this teaching can be thought as mediated by the use of tools in language and the lexicogrammar peculiarities in them, particularly comprising functions situated into linguistic forms. The study of mathematics teaching can thus be approached through the study of some of these tools and their relative peculiarities in classroom contexts of school mathematics. I provide ideas for a mathematical-linguistic approach to mathematics teacher talk in teaching through the

intersecting verbal tools of naming (an overlapping tool in the SFG and the MDI frames) and lexicalization (initially mentioned in Planas, 2019), and applying them in the thinking, preparation and implementation of content teaching. I am not at the point of presenting a finished theorization for these tools and offering definite answers about the productive use of words and sentences in content mathematics teaching. I define naming and lexicalization broadly in order to explore their possibilities of realization, and with the clarity that any route to more advanced understandings will require exploring these possibilities further.

What I name as naming is discussed in the first subsection below. Given the possible evocation of the French word name *nominalisation* in the theory of Vergnaud (2009), in the sense of forming a name or noun from another word class or group of words and making it an object of thought, it may be necessary some preparatory discussion. In both the SFG and MDI frames and in my interpretation of the tool, naming covers a number of linguistic functions one of which is the choice and use of names (or nouns) to represent an entity such as a mathematical concept and imply meanings for it. This choice and use of names in mathematics teaching can be understood as part of the process of Vergnaud's *nominalisation*. If a teacher says, 'two algebraic expressions separated by an equal sign is an equation', she names a concept — equation — and encodes meanings through the resource of a predicate or group of words — two algebraic expressions separated by an equal sign —. By means of an auxiliary 'is', this definition tells the learners in the classroom how the name and the group of words relate to each other. The choice and use of the name equation in other moments of the classroom talk will imply meanings communicated in the nominalization (my English translation) produced in the form of a definition. Naming something an equation will in this way encode or endow meanings in a certain restrictive way. The tool of naming therefore implies the choice and use of names for which some meanings are given across a variety of processes of nominalization. What I name as lexicalization, which is explained in the second subsection below, is also close to some of the types of Vergnaud's *nominalisation*. Lexicalization does not refer to the nominalization of, for example, the verb word 'equate' into the name 'equation', but more particularly to the choice and use of groups of words or sentences for the communication of precise mathematical meanings within a particular language of mathematics in the Hallidayan sense of register.

1. THE POWER OF NAMING OR WHAT IS IN A WORD NAME?

In the teaching of equations and quadratic equations: Which are the word names involved? What are the implications of the choice and use of some word names over others? These basic questions guide the exploration of the verbal tool in language called naming. Word names or the product of naming are linguistic units with the potential of encoding meanings for what is named. The process of naming is itself complex in how meanings are encoded to the names and the objects named; it is, for example, common to rely on first several letters to infer similarities amongst meanings for names such as equation, equality and equivalence, even though there may be no clarity on the precise mathematical meanings for each. The introduction of the equation concept in teaching goes with the presentation of a family of word names in the language of instruction — sometimes referred to as the vocabulary for that concept —, which in turn differs across contexts. Thus, teaching the equation concept and its particularizations — linear equation, quadratic equation, system of linear equations, etc. — implies teaching a family of word names and their specialized mathematical meanings by means of verbal tools, in interaction with non-verbal and paralinguistic tools across mathematical discourse practices.

For Halliday (1978), naming is a fundamental process in the system of language which can involve the (re)construction of newer or already known words in relation to newer meanings. Naming, in the case of the mathematics teacher talk during classroom content teaching, can be

understood in terms of the choice and use of word names in a language system with the potential of encoding specialized mathematical meanings for the content in focus. It is thus a mathematical-linguistic tool available in language for the introduction of word names existing in specific varieties of mathematical languages (or registers in Halliday, 1985), but also for the introduction of newer meanings for already known word names existing in the everyday varieties of the languages in the communication. Some of the problems with naming are that a name chosen in one language and context may already be a word with precise meanings in another language and context. In a lesson of introduction to basic elements of Euclidean plane geometry, for example, the name ‘angle’ brings meanings suggested by the context in which it is introduced, possibly including diagrams on the whiteboard, on the printed textbooks or digital materials, as well as by the sentences that can go with all them —e.g. ‘the two lines of the angle touching at one point are not bent in any way’—. Other meanings from the everyday languages can still be encoded in ways that move us into spatial geometry. The Catalan word name for angle appears when talking of the region that is not recorded or viewed due to a camera or a car blind spot —*l’angle mort de la càmera o del cotxe*—, as it happens in the language system of French. If we take the Catalan word name for equation, the situation is different. *Equació* is not a common word in the everyday and learners may hear it for the first time in the school classroom. Each naming points to a set of meanings depending on the contexts and languages in which the name may be placed, and hence some direct teaching is necessary to communicate or reconduct meanings for *angle* or *equació* within the registers of school geometry or algebra.

In line with these reflections, the choice and use of word names is a central feature of the teacher talk with implications in content teaching. Putting the names equation and equivalence together and repeatedly, or the names equation and solution together and repeatedly communicates different relational meanings for the equation concept and provides access to different more or less routine approaches to secondary school algebra. The significance of the power of naming for producing meaning in mathematics teaching is outlined in the MDI frame (Adler, 2007, 2021), where the mathematics teacher holds the authority of naming what an equation is, for example, and of deciding the family of word names planned to be taught and assessed in the language of instruction. There is power in both the choice and use of certain word names over others, and in the consequences that flow from these choices and uses. Naming involves all classroom participants but it is the teacher who owns the authority to establish the relevant names in school mathematics —see the tool of legitimating in relation to naming, and the case made on the authority embedded into the language of the teacher in Adler (2017, 2021)—.

In the next subsection, I address the tool of lexicalization and relate it to naming. Like it happens with the Catalan word name *angle* and its diverse meanings into the everyday languages and school mathematics, or with the English word name *naming* and its diverse meanings evoked by the knowledge of classical theories in the field, *lexicalization* is an English word name which encodes different meanings into different registers. In the mathematical-linguistic approach to mathematics teacher talk in construction, lexicalization refers to the choice and use of sentences in classroom teacher talk with the potential to communicate precise mathematical meanings, which can ultimately function to overcome the experience of learning difficulties —see Chesnais, 2021, for an example of how literature knowledge of learners’ difficulties in the school learning of measure is taken to inform work on teacher talk in teaching—. In English dictionaries, *lexicalization* is differently defined as the integration of new words in a language.

2. THE POWER OF LEXICALIZATION OR WHAT IS IN A SENTENCE?

In the teaching of equations and quadratic equations in classroom teacher talk: Which are the sentences involved? What are the implications of the choice and use of some sentences —

possibly made up through the choice and use of some word names— over others? These basic questions guide the exploration of the verbal tool in language called lexicalization —or lexicalizing if we wish to emphasize the process—. Sentences or the product of lexicalization are compound linguistic units or forms of grammar made of words and eventually word names, with the potential of encoding meanings for objects and phenomena. In particular, there are sentences with the potential to communicate mathematical meanings specialized in the contexts of a school content and culture and, thus, encoded in the form of grammars to be taught, learned, and assessed. The teaching of equations and quadratic equations is then not only linked to the introduction of a family of word names in the language of instruction and their mathematical meanings, but also to the presentation of forms of grammar or sentences aimed at supporting these meanings through mathematical discourse practices, and other tools available in language.

Lexicalization, in the case of the mathematics teacher talk during classroom content teaching, can be understood in terms of the choice and use of sentences in a language system with the potential of encoding specialized mathematical meanings of the content in focus. Importantly, these sentences are expected to communicate meanings that can contribute to the reduction or overcoming of common learning challenges on the side of the school learners. Like naming, it is thus a mathematical-linguistic tool for communicating meanings within mathematical registers, now through forms of grammar available in a particular language system. I use forms of grammar in a wide sense to imply a variability of grammars including, for example, combinations of verbal languages and mathematical symbols, Hallidayan grammatical-semantic processes —i.e. material, relational, mental, verbal, behavioural, and existential—, or switches between two or more languages within the same sentence. Any of these forms of grammar are taken here as to the ways in which they are relevant to the production of specialized mathematical meanings in certain cultures like secondary school mathematics, and to the overcoming of common learning challenges documented in the literature.

For Halliday (1978), lexicalization is a complex process in the system of language which involves the production of newer forms of grammar like those made up of letters and mathematical symbols, newer meanings beyond those encoded in the individual words conforming a given form of grammar, and even the encoding of newer meanings for already known forms of grammar existing in the everyday such as ‘being equal to.’ Like it occurs with naming and word names, lexicalization can be conceived from the simultaneous perspective of both providing sentences and encoding specialized meanings. The English sentence ‘add or subtract both sides of the equation by the same number’, for example, does not provide specialized mathematical meanings for the equation concept because it is a form of grammar with material verbs primarily used to encode routines. Conversely, ‘ $x+5 = 3x^2-2$ is a quadratic equation’, or even the problematic inverse version, ‘a quadratic equation is $x+5 = 3x^2-2$ ’ —or still ‘a quadratic equation is x plus five equals three x square minus two’— with forms of grammar including relational verbs and compound word names like x *square*, can function to encode specialized meanings for the quadratic equation concept into school algebra, and to more generally represent equations as more than symbolic statements that need to be solved. In the next section, I address the criticality of renaming quadratic equations or linear equations simply as equations, which is a common practice in school lessons (Planas, 2021). I also address the learning challenge of connecting representatives of the same equation by thinking of sentences for the teaching of equations as classes of equivalence. These sentences are resources in language with the potential of scaffolding the processes that learners need to develop in order to work out the mathematical meanings in the teaching. While some of these sentences may not be ‘wrong’ in itself, neither grammatically nor mathematically, the meanings encoded may not be those intended by the teacher, or it may become a challenge to interpret them.

Alongside the specificity of the mathematical content in question and of the learning challenges involved, all these choices and uses of word names and sentences are shaped by various contexts of culture. The secondary school mathematics curriculum in Catalonia states the teaching of the equation and the linear and quadratic equation concepts and of the resolution procedures for linear and quadratic equations, defined as those involving a constant and first-/second-order linear terms. In this context, it can happen that the general name of equation is used for both linear and quadratic equations and the sentences for explaining what an algebraic equation is are not general enough to include those types with more than one variable. Meanings for the equation concept can thus be lexicalized through sentences restricted to the cases of linear or quadratic equations, and even accompanied by graphical representations of slopes or parabolas and tasks for discussion of x- and y-intercepts in coordinate axes. For example, ' $x+5=3x-2$ is an equation' or 'an equation is $x+5=3x-2$ ', in written English and symbolic mathematics are grammatically and mathematically correct, but restrictive meanings for the equation concept are encoded in the second sentence. While these descriptive forms are 'good' and do not state for generality, teaching what an equation is requires the choice and use of sentences with explanatory forms (Planas, 2021) so that linear equations do not cover all meanings.

III. ADAPTATION OF THE MATHEMATICAL-LINGUISTIC TOOLS FOR DEVELOPMENTAL WORK WITH MATHEMATICS TEACHERS ON CONTENT TEACHING TALK

The aim of this part of the conference paper is to show how the research tools of naming and lexicalization were turned into practical resources in developmental work with a group of mathematics teachers. Starting from teaching challenges stated by the teachers, work on tasks focused on naming mathematical concepts and lexicalizing some of their qualities served to think teacher talk as a resource to meet those challenges. Over the last decade, in order to improve the impact of mathematics professional development on classroom teaching and practice, more attention has been given to work with teachers guided by their teaching needs (e.g. Kazima, Jakobsen & Kasoka, 2016), which may vary across contexts of culture and groups of teachers (Civil & Planas, 2004; Essien, Chitera & Planas, 2016; Setati & Planas, 2012).

The two teachers, Jana and Maia, in the first round of the research and developmental project partially reported in Planas (2019, 2021) expressed various concerns with the teaching of equations and with the learning challenges of their school learners. Besides, Jana and Maia mentioned the role that equations played as an icon of mathematical knowledge in their secondary schools with some of the families interested in test results on this content. They had several years of mathematics teaching experience, and worked in secondary schools in the area of Barcelona at the time of the collaboration. Their professional knowledge, my mathematical-linguistic view of the MDI and SFG frames, and selected literature on school learning of equations (e.g. Herscovics & Kieran, 1980; Pournara, Sanders, Adler & Hodgen, 2016) were the points from which we explored content teaching. The results of learners of Jana and Maia in the annual tests for the past years had shown poor conceptual understanding of equations, on the one hand, and good performance in the resolution of linear and quadratic equations and in the translation of verbal texts into algebraic expressions, on the other hand. Poor conceptual understanding was revealed, for example and as explained by the two teachers, in the beliefs that: 1) two different linear/quadratic equations can have the same numerical solution(s); and 2) a linear/quadratic equation can be simplified into numerical solution(s) without an operation sign. One of Maia's learners had written in a recent test, "... and so the equation is +2 and -2."

My response to the demand of the teachers was to interrogate their talk when teaching equations in the school lessons. In most of my collaborative experiences of work with teachers, they did not normally feel that the mathematical richness of the classroom practices can be hampered by under specificity in talk, nor do they tended to feel that language was a content in mathematics teaching (Planas & Civil, 2014; Planas & Setati, 2009). Hence, my response was in a sense a surprise for Jana and Maia who were, as said by them, expecting to engage in developmental work oriented to learn and practice mathematically demanding tasks of explanation and modelling around the qualities and types of equations considered in the local curriculum. We finally agreed on exploring possibilities of improving content teaching of equations through improving teacher talk and, from there on, situating this talk in relation to mathematical discourse practices that went beyond the training of operational procedures and routines. For this, five 90-minute sessions were carried out. Even though the two teachers graduated in mathematics, there was initial time for revising mathematical knowledge on the equation concept and preceding the work driven by language-based tasks. In what comes, I present and reflect on the task about the elaboration of sentences with equation-related word names.

1. DEVELOPMENTAL WORKSHOP ON MATHEMATICS CONTENT TEACHING AND TEACHER TALK

In the developmental experience with Maia and Jana, there was a session organized to include the presentation of the task in Table 1, followed by the discussion of the teachers, and the final reflection with me. The English version of the task offered here, with only some of the underlined examples of lexical elaborations or lexicalizations produced during the session, does not pretend to reproduce these sentences as if they were exactly equal in meaning to those originated and discussed in Catalan. I avoid those whose problematic translation makes the communication of mathematical-linguistic arguments more difficult in that finer details of the source and target language systems seem to be of necessary knowledge. Overall, the sentences selected in Catalan for its representation in English in Planas (2021) and here, show choices in language that can inform mathematics teachers in the use of meaning-focused sentences for teaching equations in the secondary school. Despite the original sentences from the lessons of Maia or Jana made good sense and could be said to work in the talk of the respective teacher (T), they were not followed or preceded by complementary sentences adding or particularizing meanings for equation and quadratic equation, and were not placed into pedagogic general talk or application of routines either. Even so, by presenting the sentences separated from the lesson context in which they were said, and whereas this was done intentionally in the design of the developmental task, the meaning potential regarding (newer) meanings became bigger.

For each given sentence —left column, Table 1—, the practice was organized into individual writing, group discussion of the individual proposals, and final shared writing on the worksheet. In this process, Jana and Maia decided which were the mathematical meanings for equation and quadratic equation whose communication they wanted to prioritize in their creative re-elaboration of the original sentences —right column, Table 1—. I participated by pushing them to think the individual writing as an opportunity for referring to the meanings that they missed most in common conversations with school learners and test results from them, and that could seemingly remain implicit or unfocused in the original sentences though the meaning potential was suggested. These same examples of shared writing for equation-related sentences below were published in Planas (2021, pp. 282-3); I have added one more unpublished example in the last line of Table 1. The alternative sentences rewritten by the teachers are not solutions in the sense of totally adequate. They are just more ideal in the sense of being closer to the idea of

communicating mathematical meanings within languages of equations and quadratic equations beyond the representation of operational routines, and in support to common challenges of conceptual understanding as experienced by secondary school learners. They are also more ideal in the sense of taking the opportunity of naming relevant equation-related terms such as the word names for the variable and the known and the unknown coefficient concepts.

Task. Sentence use into equation-focused talk Which are the meanings for equation behind these sentences?	
<i>What does T say?</i>	<i>What could T say?</i>
We can solve a quadratic equation with formula.	We can solve a quadratic equation with formula. <u>That is, we can obtain the numerical values for x that solve the equation.</u>
We will modify the written initial equation.	We will modify the written initial equation. <u>In other words, we will look for ways of writing the same equation for the final application of the formula.</u>
Get a sequence.	Get a sequence, <u>which is to say, get a sequence of equivalent equations, or equations with the same solutions.</u>
Every equation, you change it a bit.	Every equation, you change it a bit. <u>By changing it a bit, I mean adding, subtracting, multiplying or dividing both sides with the same numbers so that the solutions do not change.</u>
You have to use the transposition rules.	You have to use the transposition rules. <u>That is, the rules for the generation of equivalent equations.</u>
You go mapping one written form to another up to the general formula on the board.	You go mapping one written form to another up to the general formula on the board. <u>All the equations will be the same because the same numerical values solve all them.</u>
All this around the equal sign makes the equation.	All this around the equal sign makes the equation. <u>I mean these two expressions with numbers, coefficients and one variable, one on each side of the equal sign.</u>

Table 1. English version of the task with some elaborations in the right column

In the final discussion of the session, the three of us talked about what we could possibly learn from the further elaborations of the original sentences told in the lessons. Jana said that even in the school lessons that are planned to practice the manipulation and resolution of equations, teacher talk can and must provide opportunities for learners to step back, and think and reflect upon what they are doing and why. This teacher gave special value to the choice of sentences with the word names for equation and solution through grammars of explanation such as “this is a solution of this equation because...” The question of what is meant by a solution of an equation is an important one, and Jana and Maia agreed that answers should be addressed explicitly throughout different lessons and teaching moments. Maia gave special value to the

choice of sentences with the word names for quadratic equation, resolution and formula alongside grammars of description, such as “the formula for the resolution of a quadratic equation can be expressed in different ways using different letters for the variables.” From there on, the questions emerged of what is meant by the coefficients usually expressed with the letters a , b and c , and how this is told to learners while teaching and in relation to the difficult concept of variable, again expressed with letters such as x , y and z . Regarding the formula for the resolution of quadratic equations expressed in the form $ax^2+bx+c=0$, both teachers explained cases of learners for whom a , b , c and x mathematically represented the same: letters from which to generate numerical values. It became clear that the (ab)use of the name ‘letter’ instead of the specialized word names, ‘coefficient’ and ‘variable’, could be hindering access to the concepts, as well as deliberate classroom talk on conceptual distinctions and similarities.

These are only some examples of the engagement and reflections of the two teachers emerging from one of the tasks in the workshop about teacher talk for content teaching. Throughout all the sessions, two levels of talk were demarcated. There was representation of talk to/with learners in lessons of Jana and Maia —where school teaching occurs—, and discussion of talk amongst teachers and teacher educators about lesson talk —where professional learning occurs—. The pieces of data in this paper seek to show the extent to which the meta-level of talk about talk can be organized to support the level of teacher talk as it occurs in the school classroom. In my institutional context, this is a challenging approach to mathematics teaching and mathematics teacher education because pedagogic discourses on the reduction of teacher talk in the classroom, so as to provide more opportunities for learners to talk, are typical and interpreted in rather extreme ways in developmental programs and policies. Hence, it is key to clarify that the relevance given to teacher talk is not at the expense of learner-centred pedagogies of mathematics teaching and learning. In these pedagogies, the talk of the teacher in the classroom continues to be a crucial resource to convey mathematical meanings, to model mathematical languages and to guide mathematical discourse practices in the communication with learners. Regardless of the quantity of teacher talk and the balance of teacher talking time and student talking time inside classrooms, the focus remains on the quality of this talk.

2. WHAT IS IN WORD NAMES AND SENTENCES THAT MATTERS IN MATHEMATICS TEACHING?

This conference paper has considered the study of and the work on mathematics teacher talk with special attention paid to two intersecting verbal tools available in the system of language. The path implied from research tools, findings and theories about mathematics teaching and language to practical proposals of work with mathematics teachers on content language is not straightforward and some of the decisions provisionally undertaken have been presented. More generally, the formulation of how to traverse the path from research to practice, and vice versa, is problematical because tools functioning in the research may not be directly applicable and/or easily understandable in the developmental site, and vice versa. At present, I keep struggling with the aspiration of contributing to field research on language that can have some impact on the learning and knowledge of the teachers and on their school teaching. Whilst it is relatively uncomplicated to identify the potential of naming and lexicalization for practice, it is not so clear-cut the attempt to specify how to introduce these research tools to teachers. The selective choice and use of word names and sentences require complex processes of encoding mathematical content meaning. As a starting point, preliminary works can ensure that the path towards developmental practice takes the teachers’ understandings and needs into account.

The experience of developmental work with two secondary school mathematics teachers has allowed me to rethink the original research tools of naming and lexicalization, as well as the

strategy itself of discussing words and sentences. Work on naming and lexicalizing processes in mathematics teacher talk represents work on how talk develops to support the communication of certain meanings for the teaching and learning of certain contents, in interaction with other tools in language, semiotic modes and mathematical discourse practices. While mathematics teacher talk tends to presuppose the successful communication of mathematics meanings in teaching, the choice and use of word names and sentences are not processes always functioning to communicate the mathematical meanings intended, or even functioning to communicate them in sufficiently precise or explicit ways so as to reduce or not to amplify learners' difficulties. Some work on naming and lexicalization may thus be necessary in preservice and developmental education of mathematics teachers aimed at supporting content teaching, but articulated with work on situating word names and sentences into mathematical discourse practices, and in relation to other tools in language like visual representations of equations interpreted as graphs or numerical representations of sets of ordered values. Naming and lexicalization cannot be reduced to the teaching of word names and forms of grammar for school mathematics contents. This is especially visible in the teaching of mathematics in multilingual classrooms where some of the learners if not all are beginning learners of the language of instruction. Although the learning of word names and forms of grammar in the relevant languages is crucial, it does not cover the learning of mathematical meanings encoded in the culture and in the interaction. A learner can know the word 'equation', some forms of grammar in the language of algebra including the combination of English words and symbols—as well as the word name and some related grammars in the home language—the procedures for solving linear and quadratic equations, and still not know what an equation is.

All this said and despite the truism of talk not being the only resource in teaching, unfocused teacher talk accompanying other ways and forms of communication, and interacting with other resources in teaching (see Trouche, Gueudet & Pepin, 2019), remains an obstacle at various levels: to content teaching, to the realization of those other resources and, ultimately, to content learning. Before the participation in the developmental sessions, Jana and Maia identified the instructional materials—textbook and lesson plans—as their major resources in teaching equations, and they were not particularly attentive to the mediating role of their talk in the presentation and implementation of tasks and recommendations from these materials. Nonetheless, they both renamed *equació quadràtica* as *equació* in their classroom talk and did not tell issues outlined in their respective lesson plans such as the variability of types of equations, and what all types had in common. In conversations with Jana and Maia during and after the workshops, they started to express some awareness of the teaching talk operating as a meta-resource that enhances, diminishes or hinders the successful realization of other resources. Within this meta-resource framing, the material resources of the tasks and recommendations in their textbooks and lesson plans could be discussed in relation to talk about equations instead of linear/quadratic equations and forms of grammar to communicate routines in the description of the graph of a line/parabola. This notion of teacher talk as a meta-resource in sometimes conflictive interaction with other resources in mathematics teaching opens up a future direction to follow in the research initiated, but also an argument to be used in developmental work with teachers to further convince them of the decisive and critical role of their talk in teaching.

Overall, the mathematical meanings for concepts like equation, linear equation and quadratic equation are to be taught and learned in secondary school mathematics, and hence a diversity of resources and practices should be put to work for this purpose. Alongside material resources and discourse practices, careful attention to processes of naming and lexicalization in the preparation and development of content teaching can support teacher talk that functions to communicate the meanings to be learned in more explicit forms. In future research that may

employ the meta-resource framing, still one question to retain is: What is in the word names and in the sentences of the teacher talk that is left to the learners and their languages?

ACKNOWLEDGEMENTS

Grants PID2019-104964GB-I00 and EIN2019-103213, Spanish Ministry of Research – MICINN and Grant SGR2017-101, Catalan Research Agency –AGAUR. I highly value the thoughtful comments of Aurélie Chesnais to earlier versions of this conference paper.

REFERENCES

- ADLER, J. (2021). Content and context specificity matter in the ‘how’ of language-responsive mathematics teacher professional development. In N. Planas, C. Morgan & M. Schütte (Eds.), *Classroom research on mathematics and language: seeing learners and teachers differently* (pp. 77–100). London: Routledge.
- ADLER, J. (2017). Mathematics Discourse in Instruction (MDI): a discursive resource as boundary object across practices. In G. Kaiser (Ed.), *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education* (pp. 125–143). Cham, Switzerland: Springer.
- CIVIL, M. & PLANAS, N. (2004). Participation in the mathematics classroom: does every student have a voice? *For the Learning of Mathematics*, 24(1), 7–12.
- CHESNAIS, A. (2021). Enhancing classroom discourse about measure to foster a conceptual understanding of geometrical practices. *ZDM–Mathematics Education*, 53(2), 337–357. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01255-0>
- ESSIEN, A. A., CHITERA, N. & PLANAS, N. (2016). Language diversity in mathematics teacher education: challenges across three countries. In R. Barwell et al. (Eds.), *Mathematics education and language diversity: The 21st ICMI Study* (pp. 103–119). Cham, Switzerland: Springer.
- HALLIDAY, M. A. K. (1978). *Language as social semiotic: the social interpretation of language and meaning*. London: Edward Arnold.
- HALLIDAY, M. A. K. (1985). *An introduction to functional grammar*. London: Edward Arnold.
- HERSCOVICS, N., & KIERAN, C. (1980). Constructing meaning for the concept of equation. *The Mathematics Teacher*, 73(8), 572–580.
- KAZIMA, M., JAKOBSEN, A. & KASOKA, D. N. (2016). Use of mathematical tasks of teaching and the corresponding LMT measures in the Malawi context. *The Mathematics Enthusiast*, 13(1–2), 171–186.
- PLANAS, N. (2018). Language as resource: a key notion for understanding the complexity of mathematics learning. *Educational Studies in Mathematics*, 98(3), 215–229. <https://doi.org/10.1007/s10649-018-9810-y>
- PLANAS, N. (2019). Transition zones in mathematics education research for the development of language as resource. In M. Graven, H. Venkat, A. Essien & P. Vale (Eds.), *Proceedings of the 43rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 1–31). Pretoria, South Africa: PME.
- PLANAS, N. (2021). How specific can language as resource become for the teaching of algebraic concepts? *ZDM–Mathematics Education*, 53(2), 277–288. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01190-6>
- PLANAS, N. & CIVIL, M. (2009). Working with mathematics teachers and immigrant students: an empowerment perspective. *Journal of Mathematics Teacher Education* 12(6), 391–409. <https://doi.org/10.1007/s10857-009-9116-1>
- PLANAS, N. & SCHÜTTE, M. (2018). Research frameworks for the study of language in mathematics education. *ZDM–Mathematics Education*, 50(6), 965–974. <https://doi.org/10.1007/s11858-018-0997-2>
- PLANAS, N. & SETATI, M. (2009). Bilingual students using their languages in the learning of mathematics. *Mathematics Education Research Journal* 21(3), 36–59. <https://doi.org/10.1007/BF03217552>
- POURNARA, C., SANDERS, Y., ADLER, J. & HODGEN, J. (2016). Learners’ errors in secondary algebra: Insights from tracking a cohort from Grade 9 to Grade 11 on a diagnostic algebra test. *Pythagoras*, 37(1), 1–10. <https://doi.org/10.4102/pythagoras.v37i1.334>
- SETATI, N. & PLANAS, N. (2012). Mathematics education across two language contexts: a political perspective. In O. Skovsmose & B. Greer (Eds.), *Opening the cage: critique and politics of mathematics education* (pp. 167–186). Rotterdam, Netherlands: Sense Publishers.

- TROUCHE, L., GUEUDET, G. & PEPIN, B. (Eds.) (2019). *The 'resource' approach to mathematics education*. Cham, Switzerland: Springer.
- VERGNAUD, G. (2009). The theory of conceptual fields. *Human Development*, 52, 83–94.

RESOLUTION DE PROBLEMES EN MATHEMATIQUES AU SECONDAIRE I EN SUISSE ROMANDE : QUELLES PRATIQUES EVALUATIVES ?

Maud CHANUDET

Equipe DiMaGe

Maud.Chanudet@unige.ch

Résumé

Nous présentons une partie de notre recherche doctorale portant sur l'étude des pratiques évaluatives des enseignants dans le contexte d'un enseignement centré sur la résolution de problèmes en mathématiques au secondaire I en Suisse romande. Nous cherchons à identifier les logiques d'actions évaluatives des enseignants en tenant compte à la fois des fonctions certificative et formative de l'évaluation et nous nous appuyons sur le cadre de la double approche didactique et ergonomique (Robert & Rogalski, 2002) et sur le concept de régulation (Allal, 2007) pour organiser notre étude. Nous nous centrons sur l'analyse des pratiques d'une enseignante pour illustrer notre méthodologie et dégager des premiers résultats. Nous montrons ainsi comment elle investit la marge de manœuvre qui lui est laissée quant à l'organisation et la gestion des séances et en quoi ses pratiques d'évaluation à visée certificative et celles à visée formative sont cohérentes.

Mots clés

Pratiques enseignantes, résolution de problèmes, évaluation, double approche didactique et ergonomique

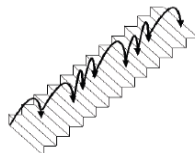
I. INTRODUCTION ET PREMIERES QUESTIONS

Ce texte vise à présenter notre recherche doctorale portant sur l'étude des pratiques évaluatives des enseignants dans le cadre d'un enseignement centré sur la résolution de problèmes en mathématiques (Chanudet, 2019a). Nous nous intéressons aux pratiques ordinaires des enseignants de mathématiques lorsqu'ils sont amenés à enseigner, pour elle-même, la résolution de problèmes. Nous choisissons d'étudier en particulier leurs pratiques évaluatives en considérant à la fois les dimensions formative et certificative de l'évaluation. Notre question de recherche porte ainsi sur les logiques d'action, en particulier évaluatives, qui se dégagent de leurs pratiques. Nous nous plaçons dans le contexte d'un cours dispensé au secondaire I en Suisse romande et centré sur la résolution de problèmes pour mener notre étude.

1. La résolution de problèmes comme objet d'enseignement et d'apprentissage

Pour situer notre propos, nous commençons par présenter un problème, intitulé « L'escalier »¹, qui nous servira de fil rouge tout au long de notre texte et dont l'énoncé est le suivant :

On peut monter un escalier une ou deux marches à la fois. La figure ci-dessous montre un exemple.



- De combien de façons différentes peut-on monter un escalier de une marche ? de deux marches ? de trois marches ? de quatre marches ? de cinq marches ?
- De combien de façons différentes peut-on monter un escalier de 20 marches ?

Figure 6. Énoncé du problème « L'escalier »

Ce problème illustre tout d'abord le type de problèmes auquel nous nous intéressons dans notre recherche, c'est-à-dire ceux qui sont proposés aux élèves, non pas pour développer ou évaluer l'apprentissage de notions mathématiques spécifiques, mais pour les faire chercher et les amener à développer des apprentissages centrés sur la résolution de problèmes. La résolution de problèmes est donc ici envisagée comme un objet d'enseignement et d'apprentissage pour elle-même.

En effet, face à ce problème, les élèves ne disposent pas de méthode de résolution connue. Ils vont devoir (se) représenter la situation, faire des essais, chercher à repérer des régularités et généraliser. Plus précisément, les élèves peuvent recourir à différentes stratégies pour le résoudre :

- Représenter graphiquement les escaliers et les différentes façons de le monter, comme sur le schéma accompagnant l'énoncé, et les dénombrer (possible que pour un faible nombre de marches).
- Lister exhaustivement l'ensemble des manières de monter l'escalier pour un nombre de marches données, par exemple 1-1-2 / 2-1-1 / 1-2-1 / 2-2- / 1-1-1-1-1 pour 4 marches (là encore, envisageable que pour un faible nombre de marches).
- Raisonner sur des valeurs plus petites, observer une récurrence sur la suite des valeurs numériques obtenues, généraliser et calculer de proche en proche jusqu'à $n = 20$.
- Raisonner directement sur la manière d'arriver à une n^{e} marche et en déduire qu'il faut ajouter le nombre de manières d'arriver à la $n - 1^{\text{e}}$ et la $n - 2^{\text{e}}$ marche. Puis calculer de proche en proche jusqu'à $n = 20$.

Ce problème nous permet aussi de situer le niveau scolaire auquel nous avons mené notre recherche. Il s'agit du secondaire I à Genève et plus précisément, à la classe de 10^e (élèves de 13-14 ans, équivalent à la classe de 4^e en France).

2. Premières questions

La place importante qu'occupe la résolution de problèmes en tant qu'objet d'enseignement et d'apprentissage dans les programmes scolaires, et notamment dans le plan d'études romand en place à Genève, nous a amené à poser différentes questions qui ont constituées le point d'entrée de notre recherche, à savoir : comment les enseignants enseignent-ils la résolution de problèmes

¹ Ce problème est proposé, via les ressources institutionnelles, aux enseignants du cours de « **Mathématiques : développements** » sur lequel nous revenons dans la suite.

lorsqu'elle est objet d'enseignement et d'apprentissage ? Quels problèmes proposent-ils aux élèves ? Comment évaluent-ils leurs apprentissages ? Comment les aident-ils à progresser ?

Cela nous a conduit à nous intéresser dans cette recherche aux pratiques des enseignants, à ce qu'ils font en classe, avec leurs élèves autour de la résolution de problèmes avec une focale sur leurs pratiques évaluatives. Ces premières questions nous ont amené à interroger deux champs de recherche : l'activité de résolution de problèmes du point de la didactique des mathématiques ; et l'évaluation des apprentissages. Nous revenons ci-dessous sur les éléments que nous retenons de notre revue de littérature et qui alimentent et structurent notre recherche.

II. LA RESOLUTION DE PROBLEMES ET L'EVALUATION DES APPRENTISSAGES : QUELQUES REPERES THEORIQUES

1. La résolution de problèmes en mathématiques

L'activité de résolution de problèmes

Dès lors que l'on s'intéresse à la manière de définir un problème dans le contexte scolaire, on est confronté à différentes définitions (Newell & Simon, 1972; Schoenfeld, 1985). Il ressort cependant qu'un problème doit, pour sa résolution, nécessiter la mise en œuvre d'une procédure, d'un raisonnement, qui n'est pas immédiatement accessible à la personne qui s'y confronte. Un problème ne l'est donc pas intrinsèquement mais bien, considéré dans un rapport sujet/situation. Il semble aussi important de souligner qu'il n'existe pas de méthodologie générale de résolution de problèmes, qui permettrait de résoudre tout type de problèmes, comme le rappelle notamment Julot (1995).

Les activités de recherche et de preuve entre pairs et leurs potentiels

Du point de vue des dispositifs didactiques, il existe différentes typologies de problèmes et différents dispositifs qui visent à initier les élèves à la démarche scientifique et à transposer à la classe les pratiques de recherche des mathématiciens. On trouve ainsi les problèmes ouverts (Arsac et al., 1991), situation de recherche pour la classe (Giroud, 2014; Grenier, 2012; Grenier & Payan, 2002), les narrations de recherche (Bonafé et al., 2002; Chevallier, 1992; Sauter, 1998), les problèmes pour chercher ou encore les enseignements scientifiques fondés sur les démarches d'investigation (Grangeat, 2013). Plutôt que de se référer à l'une ou l'autre de ces catégories, et de raisonner de manière dichotomique en terme d'appartenance/non appartenance, Georget (2009) propose un point de vue fédérateur qui réunit ces différents types de problèmes qui visent tous à faire chercher les élèves, sous la dénomination d'activités de Recherche et de Preuves entre Pairs (activités RPP) et qu'il décrit à travers leurs potentiels.

Le *potentiel de recherche* rassemble les éléments qui assurent que les élèves cherchent un problème nouveau. Le *potentiel de résistance* et le *potentiel de résistance dynamique* regroupent les éléments qui assurent que le problème résiste aux tentatives des élèves pour le résoudre et que cette résistance évolue de sorte à ce que les élèves puissent avancer dans leur recherche. Le *potentiel de débat* rassemble les éléments favorisant un débat de nature mathématique entre élèves. Et le *potentiel didactique* délimite les savoirs qui peuvent émerger de la recherche du problème. Nous nous sommes en particulier intéressée à cet aspect, c'est-à-dire aux apprentissages possibles associés à la résolution de problèmes.

Le potentiel didactique des activités RPP

La lecture des documents accompagnant les dispositifs susmentionnés montre que les apprentissages qui y sont associés relèvent de la dimension expérimentale des mathématiques, le plus souvent sans référence à des savoirs mathématiques précis. Hersant (2010), qui a mené une réflexion sur la transposition didactique de la recherche / résolution de problèmes en mathématiques et sur les savoirs mathématiques en jeu dans les situations associées aux problèmes ouverts au cycle 3 en France souligne le flou qui accompagne les objectifs d'apprentissage visés par ces dispositifs. De même, Houdement (2009) prend l'exemple des « problèmes pour chercher » mis en avant dans les programmes scolaires français et souligne que : « les 'problèmes pour chercher' des programmes ne visent pas de contenu mathématique, mais une certaine transversalité ; tels que décrits dans les Documents d'Accompagnement 2005, ils restent un 'objet d'enseignement' aux contours flous » (2009, p. 36).

Passé ce constat, celle-ci met en avant le fait que les problèmes de type « problèmes pour chercher » à l'école primaire peuvent amener les élèves à développer, notamment, des apprentissages liés à des manières de raisonner et de valider en mathématiques (Houdement, 2009). Nous nous plaçons dans cette perspective, en l'élargissant aux activités RPP et au niveau du secondaire, ce qui nous amène à considérer plus largement l'apprentissage de la preuve.

Pour caractériser le raisonnement mathématique, Jeannotte (2015) s'appuie sur deux aspects complémentaires :

- Son aspect structurel, c'est-à-dire du point de vue de sa structure logique. On regarde comment s'organisent et s'enchaînent les pas de raisonnement.
- Son aspect processuel, c'est-à-dire du point de vue des processus mobilisés, ce qui met alors l'accent sur le fait que quand quelqu'un mène un raisonnement, il fait un certain nombre d'actions qui sont orientées, dirigées vers un but.

Du point de vue structurel, deux types de raisonnements sont principalement travaillés au secondaire I, les raisonnements déductifs et inductifs.

Un pas de raisonnement déductif permet d'inférer une affirmation à partir de données et d'une règle, c'est-à-dire qu'à partir d'un certain nombre de données, on applique une règle dont la prémisse correspond aux données et qui implique nécessairement la conclusion. Plusieurs raisonnements déductifs peuvent être spécifiquement travaillés avec les élèves au secondaire I. C'est le cas du raisonnement hypothético-déductif et de ce que nous avons choisi d'appeler le raisonnement par implication logique. Nous distinguons les deux en fonction de la nature de la règle utilisée. Nous parlons de raisonnement hypothético-déductif lorsque cette règle est associée à des savoirs mathématiques au sens de savoirs savants dans la transposition didactique (Chevallard, 1985), et d'implication logique lorsque la règle se réfère à des éléments associés à la logique (la règle du tiers-exclu par exemple). On trouve aussi le raisonnement par disjonction des cas et le raisonnement par exhaustivité des cas. Par exemple, sur le problème « L'escalier » présenté au début de cet article, lorsque l'on cherche le nombre de façons de monter un escalier de 4 marches, il faut s'organiser dans sa recherche pour s'assurer d'avoir passé tous les cas possibles en revue. Ce raisonnement est ainsi fortement articulé à l'énumération. On peut ainsi voir qu'il est possible de monter de 5 manières différentes un escalier de 4 marches.

Un pas de raisonnement inductif peut se caractériser quant à lui de la manière suivante : on observe des données particulières, des régularités sont dégagées (ici appelées affirmation), on infère alors une règle qui permet le passage des données à l'affirmation. Ce type de raisonnement est notamment en jeu dans des problèmes amenant à la mise en œuvre d'une démarche de type expérimental, bien que la structure du raisonnement ne permette pas de

caractériser une telle démarche. Il est pour cela nécessaire de prendre en compte l'aspect processuel du raisonnement, c'est-à-dire les processus en jeu : l'*exemplification*, l'*identification d'une régularité*, la formulation d'une *conjecture*, la *généralisation* et la *tentative de preuve*. Dans le problème « L'escalier », cette démarche est mobilisée puisque les élèves observent les résultats obtenus sur les premiers cas à partir d'un schéma par exemple. Ils peuvent alors voir apparaître une régularité qui est que pour obtenir le nombre de manières de monter un escalier de n marches il faut ajouter les deux résultats précédents. Une autre démarche, que l'on peut caractériser par les processus en jeu et non pas par sa structure, et qui peut faire l'objet d'un apprentissage, est la démarche par essais ajustements. La preuve repose alors sur l'ostension, c'est-à-dire sur le fait de montrer que la solution satisfait effectivement les conditions de l'énoncé. Certains problèmes peuvent aussi amener à prouver par contre-exemple. Enfin, pour les raisonnements déductifs, la preuve repose sur la bonne mise en œuvre du raisonnement mobilisé. Par exemple, pour « L'escalier », il faut mobiliser un raisonnement par disjonction de cas. En effet pour arriver sur la n^{e} marche, il est possible soit d'arriver sur la $n - 2^{\text{e}}$ puis de sauter une marche, soit d'arriver sur la $n - 1^{\text{e}}$ puis de faire un pas, d'où la nécessité d'ajouter le nombre de manières d'arriver à la $n - 1^{\text{e}}$ et la $n - 2^{\text{e}}$ marche pour obtenir le nombre de façons de monter jusqu'à la n^{e} marche.

Il ressort donc que différents types de raisonnements (caractérisés par l'aspect structurel du raisonnement), de démarches (caractérisées par les processus en jeu) et de preuves sont donc impliqués lors de la résolution de problèmes mathématiques. En se plaçant dans une perspective d'enseignement, la diversité de ces manières de raisonner et de prouver conduit à questionner la manière dont les enseignants s'y prennent pour organiser et mettre en œuvre un enseignement associé.

Certain.e.s didacticien.ne.s se sont déjà intéressé.e.s à ces questions. Choquet Pineau (2014) a par exemple étudié, d'un point de vue global, les pratiques de professeurs des écoles lors de séances dédiées aux problèmes ouverts. Nous avons choisi pour notre part d'étudier les pratiques enseignantes, entendues comme regroupant « [...] l'ensemble des activités de l'enseignant qui aboutissent à ce qu'il met en œuvre en classe » (Robert, 2001, p. 66) en résolution de problèmes, en prenant comme focale leurs pratiques évaluatives. La prise en compte de l'évaluation comme dimension importante du travail de l'enseignant nous semble permettre de (ré)interroger les pratiques associées à un objet de savoir complexe.

Le champ de l'évaluation des apprentissages nous a donc amené à compléter cette revue de littérature.

2. L'évaluation des apprentissages des élèves

L'activité évaluative et ses invariants

Un des éléments qui nous a permis de cadrer notre recherche repose sur la caractérisation de l'activité évaluative de l'enseignant (Allal, 2008). Quelle que soit la forme qu'elle prend, cette activité peut se caractériser à partir de quatre invariants :

- Définir l'objet de l'évaluation tout d'abord. L'enseignant doit déterminer à l'avance ce qu'il souhaite évaluer, à l'appui notamment des programmes.
- Il doit ensuite recueillir des informations en lien avec ce qu'il souhaite évaluer, à travers des tests et des travaux écrits, ou bien de manière informelle à partir de discussions entre ou avec les élèves.
- L'enseignant est alors amené à interpréter ces informations, à l'aide de critères explicites mais aussi implicites.

- Enfin la prise de décision et la communication qui s'ensuivent sont relatives à la fonction que l'on assigne à l'évaluation.

Nous nous intéressons plus particulièrement à deux fonctions classiques de l'évaluation :

- Sa fonction certificative, qui tend à certifier qu'à la fin de l'enseignement associé, l'élève a acquis ou non les apprentissages visés.
- Sa fonction formative, c'est-à-dire une évaluation qui est au service des apprentissages des élèves et qui vise à faire progresser les apprentissages en cours.

Pour marquer la non radicalité de la distinction entre ces deux fonctions, soulignée par plusieurs auteurs (Allal, 2011; Black, 2013; Hadji, 1989; Harlen, 2012; Mottier Lopez, 2015; Shavelson et al., 2008), nous choisissons de parler d'évaluation à visée certificative ou formative. Nous intéressons aux pratiques enseignantes liées à la fonction certificative de l'évaluation, ce qui a donné lieu à une étude spécifique (Chanudet, 2019a, 2019b), mais aussi à ce qui relève de sa fonction formative (Chanudet, 2019c, 2017, 2019d).

Nous nous plaçons de plus dans une approche située de l'évaluation, qui considère l'évaluation comme une pratique sociale et culturelle, située dans un contexte donné (Mottier Lopez, 2009, p. 9).

L'évaluation à visée formative : un enjeu de régulation des apprentissages

Depuis les travaux initiaux de Scriven (1967) qui ont permis de faire émerger le concept d'évaluation formative dans le cadre de l'évaluation des programmes de formation, puis de Bloom et de ses collègues (B. S. Bloom et al., 1971; B.-S. Bloom, 1968) qui l'ont élargi au contexte des apprentissages des élèves, les travaux francophones sur l'évaluation ont permis d'en développer une conception élargie comme le soulignent Allal et Mottier Lopez (2005). Initialement, dans le cadre du développement de la théorie de la pédagogie de la maîtrise, Bloom envisage l'évaluation formative sous la forme de tests diagnostiques en cours d'apprentissage dans le but de s'assurer que les élèves maîtrisent l'objectif visé avant de passer au suivant. Il précise que ces tests peuvent fournir à l'enseignant un feedback qu'il pourra ensuite utiliser pour modifier en conséquence son enseignement. L'élève aussi doit pouvoir tirer des informations de ces tests. Pour ceux qui réussissent, ils seront ainsi assurés de leur maîtrise correcte du savoir et de la pertinence des stratégies d'apprentissage qu'ils mettent en œuvre. Pour ceux ayant échoués, ils pourront identifier les concepts, les idées à retravailler.

La conception élargie mise en avant par Allal et Mottier Lopez (2005) met notamment en avant la possibilité pour l'enseignant de recueillir de manière informelle des informations quant à l'activité des élèves, par exemple lors de discussions avec eux. Nous appelons épisodes interactifs, comme le propose Kiwan Zacka (2018), ces moments d'interactions verbales entre élèves et enseignant, générées au cours des activités quotidiennes en classe, au cours desquels l'enseignant saisit des informations sur les conceptions, l'activité ou encore les difficultés des élèves (Ruiz-Primo & Furtak, 2004, 2007). Allal et Mottier Lopez soulignent de plus que plutôt que de se centrer sur les feedback renvoyés à l'élève, l'évaluation formative vise la régulation et l'autorégulation des apprentissages. La régulation est donc un concept clé de l'évaluation formative. Il ne faut cependant pas croire que l'enseignant peut directement agir sur l'autorégulation des élèves. Les situations proposées ou ses interventions ne sont que des sources de régulations *potentielles* comme le met en avant Allal (2007). De plus, même si l'on parle de régulation des apprentissages, l'enseignant cherche, et peut, davantage favoriser des régulations de l'activité des élèves, avec l'espoir, que *in fine*, il y ait régulation des apprentissages. Nous parlons ainsi de pratiques d'évaluation à visée formative pour désigner l'ensemble des pratiques enseignantes visant à soutenir et favoriser la régulation des apprentissages chez les élèves.

Allal précise que ces régulations peuvent être associées à différents éléments contextuels (2007) :

- Les régulations liées à la structure de la situation d'apprentissage, donc liées aux tâches proposées, au choix des variables didactiques, à l'articulation des tâches ou encore aux modalités de travail.
- Les régulations liées aux interventions de l'enseignant et à ses interactions avec les élèves.
- Les régulations liées aux interactions entre élèves.

Notre intérêt pour les pratiques enseignantes nous invite à nous centrer sur les deux premiers types de régulations, au sein desquels celui-ci joue un rôle central.

A partir de ces différents éléments conceptuels, il nous a fallu déterminer un cadre pour analyser les pratiques des enseignants.

III. LE CADRE D'ANALYSE DE LA DOUBLE APPROCHE DIDACTIQUE ET ERGONOMIQUE

En cohérence avec les références retenues et notamment avec une approche située de l'évaluation, nous avons choisi de recourir au cadre de la double approche didactique et ergonomique développé par Robert et Rogalski (Robert, 2006, 2008a, 2008b; Robert & Rogalski, 2002) pour étudier et caractériser les pratiques enseignantes.

1. La prise en compte de cinq composantes pour étudier les pratiques enseignantes

La double approche invite à prendre en compte aussi bien le générique, en regardant les contraintes qui pèsent sur l'enseignant exerçant son métier, que l'individuel, en considérant les marges de manœuvre qui lui restent et la façon dont il les investit. On mobilise ainsi deux points de vue ; celui des apprentissages des élèves (approche didactique) et celui du travail réel de l'enseignant (approche ergonomique).

Les auteurs proposent d'utiliser cinq composantes pour étudier les pratiques des enseignants, en tenant compte de ce double point de vue. Les deux premières composantes, cognitive et médiative, sont liées aux observations de séances de classe, aux activités possibles des élèves. La composante cognitive concerne les choix de l'enseignant en matière de contenus proposés aux élèves ; l'organisation des tâches, leur articulation, leur insertion au sein d'une progression. Cette composante permet de renseigner l'itinéraire cognitif proposé par l'enseignant à ses élèves. La composante médiative porte sur les choix effectués par l'enseignant concernant le déroulement en classe et les médiations qu'il organise ; les formes de travail, les aides, les échanges et interactions avec les élèves. La combinaison de ces deux composantes permet de décrire les mathématiques que l'enseignant fait fréquenter à ses élèves et permet de dégager plus globalement des logiques d'action de l'enseignant. Nous cherchons plus particulièrement à caractériser les logiques d'action des enseignants relatives à l'évaluation, que nous appelons dans la suite, *logiques d'action évaluatives*.

Pour intégrer le fait que les pratiques des enseignants sont l'expression d'un travail, trois autres composantes sont à prendre en compte. Si les composantes institutionnelles et sociales permettent de prendre en compte les contraintes qui pèsent sur l'enseignant exerçant son métier,

la composante personnelle permet de saisir la manière dont il investit les marges de manœuvre dont il dispose (Robert & Rogalski, 2002, p. 515). La composante sociale permet de prendre en compte la dimension sociale du métier d'enseignant : le fait qu'il travaille avec des élèves, au sein d'un établissement où il peut être amené à collaborer avec des collègues. La composante institutionnelle concerne les directives communes aux enseignants : les programmes, les horaires, les manuels, etc. La composante personnelle représente tout ce qui est propre à l'enseignant, en tant qu'individu particulier ; ses représentations sur le métier, sur les mathématiques, ses connaissances.

Nous nous appuyons de plus sur une hypothèse centrale dans ce cadre théorique à savoir que les pratiques forment un système complexe, cohérent et stable.

2. Des recherches en didactique des mathématiques centrées sur l'évaluation à visée formative

Nous nous sommes par ailleurs appuyée sur deux recherches, qui s'inscrivent dans la perspective de la double approche et qui, comme d'autres ces dernières années (Coppé, 2018; Coppé & Moulin, 2017; Gandit, 2015, 2017; Gandit & Lepareur, 2016; Goasdoué & Vantourout, 2014; Grapin, 2015; Grapin & Mounier, 2018; Grugeon-Allys, 2016; Grugeon-Allys et al., 2018; Lepareur, 2016; Sayac, 2017, 2019), ont adopté une approche didactique de l'évaluation, c'est-à-dire qu'elles prennent en compte les contenus d'enseignement pour penser les questions d'évaluation.

Sur les pratiques d'évaluation des apprentissages des collégiens en algèbre

Dans le cadre du projet de recherche ANR Neopraéval², Horoks et Pilet (2016, 2015) considèrent que l'étude des pratiques évaluatives des enseignants permet de donner accès à leurs logiques d'action. Elles cherchent ainsi à caractériser les pratiques enseignantes d'évaluation des apprentissages des collégiens en algèbre.

Pour cela elles proposent notamment d'analyser les différentes tâches proposées aux élèves en regardant la distance entre les tâches travaillées en séances ordinaires et celles proposées dans le cadre d'une évaluation à visée certificative, mais aussi l'absence et la présence de certains types de tâches. Il nous semble ainsi intéressant pour notre propre recherche de questionner l'articulation entre les problèmes proposés hors contexte d'évaluation et ceux proposés dans ce contexte avant de voir comment l'enseignant intègre la dimension évaluation au sein de son enseignement.

Leur analyse est complétée par celle de la gestion de la résolution de ces problèmes en classe (notamment comment l'enseignant prend des informations sur l'activité, les difficultés des élèves, et les utilise). Nous retenons ici l'intérêt de regarder comment les interactions entre élèves et enseignants s'opèrent.

Sur les interactions verbales en classe de mathématiques

Dans le cadre du même projet de recherche, Haspekian, Kiwan et Roditi (2016) ont mené une recherche sur les interactions verbales en classe de mathématiques. Ils s'intéressent aux interventions des enseignants et cherchent à distinguer celles qui participent d'une "évaluation formative" et à en apprécier le potentiel formatif.

² Nouveaux Outils pour de nouvelles PRAtiques d'EVALuation et d'enseignement des mathématiques

Ils ont pour cela développé un outil d'analyse des interactions verbales. Ils cherchent à repérer ce sur quoi porte la prise d'information et ce qui est directement visé par l'intervention. Pour chaque interaction élève-enseignant, ils analysent le couple *information recueillie - action/feedback de l'enseignant* à partir de trois catégories (le produit, la procédure ou les connaissances des élèves).

Nous considérons aussi que la nature des informations en jeu dans les interactions élèves-enseignant permet de caractériser, en partie au moins, les épisodes interactifs.

3. Cohérence et articulation d'un double point de vue sur les pratiques

Nous articulons les deux points de vue mobilisés dans cette recherche ; celui de la double approche didactique et ergonomique et celui de la régulation des apprentissages, pour permettre l'étude des pratiques des enseignants et notamment de leurs pratiques évaluatives.

En effet, l'analyse des contenus (que nous associons à la composante cognitive) et l'analyse des modalités de travail (de l'ordre de la composante médiative) permettent toutes deux de repérer des sources de régulations potentielles liées à la structure de la situation d'apprentissage et aux interventions de l'enseignant. En complément, l'analyse des échanges entre élèves et enseignant (que nous associons là aussi à la composante médiative) permet de repérer des sources de régulations liées aux interactions entre ces acteurs.

Les références théoriques présentées précédemment viennent compléter ce double point de vue pour nous permettre de formuler nos questions de recherche et d'élaborer la méthodologie.

IV. METHODOLOGIE GENERALE ET CONTEXTE DE LA RECHERCHE

Nous avons en fait mené deux études complémentaires, l'une centrée sur les compétences des élèves en résolution de problèmes, avec une étude à large échelle, construite autour d'un dispositif spécifique et ciblant l'évaluation certificative (Chanudet, 2019b).

Nous ne présentons ici que la deuxième étude, centrée sur les pratiques évaluatives des enseignants. C'est une étude de cas des pratiques ordinaires, en contexte réel de classe, qui cible les deux fonctions de l'évaluation.

1. Questions de recherche

La macro-question qui guide cette partie de notre recherche est la suivante : Quelles logiques d'action, en particulier évaluatives, se dégagent des pratiques des enseignants dans le cadre d'un enseignement de la résolution de problèmes en mathématiques ?

L'objectif est donc de déterminer en quoi les pratiques d'évaluation sont cohérentes et permettent de saisir les logiques d'action des enseignants. Des questions plus précises se formulent à trois niveaux, associés à différentes échelles de temps (Tiberghien et al., 2007).

Un niveau global tout d'abord, ciblant les projets d'enseignement avec une première question concernant les contenus proposés et visant à renseigner la composante cognitive : Quels itinéraire(s) cognitif(s) les enseignants proposent-ils à leurs élèves dans le cadre d'un enseignement de la résolution de problèmes en mathématiques ?

La deuxième question s'intéresse toujours au projet des enseignants mais cible ce qui relève de leurs pratiques d'évaluation à visée certificative : Comment se caractérisent les pratiques d'évaluation à visée certificative des enseignants dans le cadre d'un enseignement de la résolution de problèmes en mathématiques ?

Nous ciblons enfin la mise en œuvre effective des problèmes dans la classe, le déroulement des séances et les interactions élèves-enseignant dans le but de renseigner la composante médiative des pratiques, avec un intérêt particulier pour ce qui relève de la dimension formative de l'évaluation, d'où la troisième question de recherche : Quelles pratiques d'évaluation formative peut-on identifier chez les enseignants amenés à enseigner la résolution de problèmes en mathématiques ?

2. Présentation du contexte d'expérimentation

Nous avons choisi de nous intéresser à un cours spécifiquement centré sur la résolution de problèmes, appelé « **Mathématiques : développements** ». Il est dispensé dans le canton de Genève à raison d'une période de 45 minutes par semaine, à des élèves de 10^e (13-14 ans), par le même enseignant ou non que le cours ordinaire de mathématiques.

L'objectif de ce cours est de développer les compétences des élèves en résolution de problèmes, avec une centration sur la démarche scientifique entendue comme le quadruplet « essais-conjecture-test-preuve », et sur ce qui est qualifié de stratégies de résolution, à savoir : l'analogie ; le tâtonnement - essais, exemples, contre-exemples ; le chaînage avant/arrière ; l'étude systématique de cas et l'exhaustivité des solutions ; et l'initiation à la démonstration. Ces stratégies rejoignent en partie les démarches et raisonnements que nous avons mis en lumière précédemment. Nous associons en effet la stratégie « tâtonnement – essais, exemples, contre-exemples » à la fois à la démarche d'ajustements d'essais successifs (pour le tâtonnement – essais), à la partie essais de la démarche de type expérimental (pour la partie exemples) et à un mode de preuve (pour le contre-exemple). La stratégie « chaînage avant » se rapproche du raisonnement déductif direct, « l'étude systématique de cas et l'exhaustivité des solutions » à ce que nous appelons raisonnement par exhaustivité des cas. L'analogie nous semble plus relever d'une heuristique au sens de Schoenfeld (1985).

De plus les enseignants ont à leur disposition un document de liaison faisant office de programme et peuvent, pour sélectionner des problèmes, se référer à un chapitre intitulé « Recherche & Stratégies » des moyens d'enseignement officiels et à une réserve d'activités spécifiques à ce cours au sein de laquelle des problèmes sont proposés et classés à la fois par stratégies de résolution et par domaines mathématiques concernés.

Précisons enfin que ce cours fait l'objet d'une évaluation certificative indépendante du cours ordinaire. Pour que cette évaluation cible les démarches de recherche des élèves, le dispositif de la narration de recherche (Bonafé et al., 2002; Chevallier, 1992; Sauter, 1998) a été choisi par l'institution comme support de l'évaluation certificative et fil conducteur de ce cours. De grandes lignes sont données aux enseignants pour l'évaluation de ces narrations de recherche (évaluer la recherche de la solution et la narration), sans pour autant que des critères d'évaluation explicites et formels ne leur soient proposés.

Un des éléments importants à souligner et qui ressort de l'analyse des prescriptions institutionnelles, est que les objectifs visés dans ce cours sont assez imprécis, et que les enseignants sont laissés très libres dans l'organisation de leur enseignement, mais aussi quant au choix de leur référentiel d'évaluation. Nous précisons ci-dessous les données que nous avons recueillies pour mener notre étude avant de présenter nos analyses et nos résultats.

3. Recueil de données

Nous avons suivi trois enseignants, que nous avons appelé Salomé, Rémi et Paul, pendant l'année scolaire 2016-2017.

Afin d'analyser les contenus mathématiques proposés aux élèves, nous leur avons demandé de nous transmettre l'ensemble des énoncés de problèmes travaillés pendant l'année. En vue d'analyser plus spécifiquement la dimension certificative de l'évaluation, nous avons aussi recueilli les problèmes donnés dans le cadre des évaluations à visée certificative. Enfin, pour étudier plus localement le déroulement de séances de classe, nous avons suivi chaque enseignant pendant plusieurs séances consécutives en fin d'année scolaire, formant, selon leurs propres critères, une séquence d'enseignement et se concluant par une évaluation à visée certificative (5 séances chez Salomé et Paul et 3 séances dans la classe de Rémi). Nous avons enregistré audio visuellement ces séquences. Précisons que nous ne sommes pas intervenue dans le choix du contenu et du déroulement de la séquence.

C'est l'hypothèse, dans la théorie de la double approche (cf. III), de stabilité des pratiques qui nous permet de penser que ce qu'on va observer sera significatif et permettra de rendre compte de certains aspects des logiques d'action évaluatives des enseignants.

Nous avons aussi mené des entretiens semi-directifs (*ante* et *post* observation) dans le but de renseigner les composantes sociale et personnelle des pratiques, et de recueillir des éléments concernant le choix de la séquence et son déroulement effectif.

Nous présentons ci-dessous les analyses menées et les résultats associés.

V. ANALYSE ET RÉSULTATS CONCERNANT LES PRATIQUES D'UNE ENSEIGNANTE

Notre recherche a constitué en une étude de cas, visant ainsi, non pas l'exhaustivité des types de pratiques des enseignants, mais bien une analyse fine et compréhensive des pratiques de quelques enseignants dispensant le cours de « **Mathématiques : développements** » en vue de dégager leurs logiques d'action évaluatives. Pour l'illustrer, nous nous centrons ici sur les pratiques d'une des enseignants, Salomé, et commençons, pour chaque partie, par caractériser la méthodologie spécifique associée.

4. Étude de l'itinéraire cognitif proposé aux élèves

Méthodologie locale

Notre première question de recherche porte sur les itinéraires cognitifs proposés par les enseignants à leurs élèves. On se situe donc au niveau macroscopique, à l'échelle d'une année scolaire.

Nous avons pour cela analysé *a priori* le potentiel didactique des problèmes proposés par chaque enseignant en caractérisant les démarches, raisonnements et preuves en jeu. Nous avons alors analysé comment les problèmes étaient choisis, organisés et articulés entre eux. Nous avons enfin cherché à identifier les compétences, savoirs, savoir-faire que les enseignants voulaient développer chez leurs élèves.

Mise en œuvre et résultats

Pour illustrer la manière dont nous avons analysé les problèmes proposés par Salomé, prenons l'exemple de « L'escalier ». Comme pour chaque problème, nous avons déterminé s'il relevait ou non d'une activité RPP (Georget, 2009), ce qui est le cas ici, en questionnant notamment son potentiel de recherche. Nous avons ensuite identifié les démarches, raisonnements et preuves a priori mobilisés lors de sa résolution. Nous nous sommes pour cela placée du point de vue de l'élève, en tenant compte de ses connaissances supposées, au niveau scolaire considéré. Comme nous l'avons vu précédemment, ce problème met en jeu un raisonnement par exhaustivité des cas au sein d'une démarche de type expérimentale et un raisonnement par disjonction de cas pour prouver la conjecture établie.

Nous avons ensuite considéré une perspective plus large, intégrant l'ensemble des problèmes étudiés ainsi que leur agencement (Tableau 1).

N°	Nom	Potentiel didactique		
		Raisonnement, démarche	Preuve	Notions mathématiques
14	Petits et gros cubes	Essais-ajustements <i>ou</i> Exhaustivité des cas	Ostension	Volume cube Cube
15	Spirales de triangles rectangles	Démarche de type expérimental		Théorème de Pythagore
16	Des 0 et des 1	Disjonction de cas Exhaustivité des cas	Exhaustivité des cas	Critères de divisibilité
17	L'escalier	Démarche de type expérimental Exhaustivité des cas	Disjonction de cas	
18	Quel gros sac	Essais-ajustements	Ostension	

Tableau 1. Analyse de cinq des problèmes proposés consécutivement par Salomé

En nous focalisant sur les démarches et raisonnements en jeu, on voit ici que les problèmes présentés mettent souvent en jeu un raisonnement par exhaustivité des cas, une démarche de type expérimental, et une démarche d'ajustements d'essais successifs.

En regardant comment ces éléments se font suite sur l'année, comment ils s'articulent les uns aux autres, il ressort globalement que Salomé propose successivement plusieurs problèmes mobilisant les mêmes modes de raisonnement avant de passer à un autre type de problèmes.

Nous avons enfin regardé dans quelle mesure ces éléments étaient représentés, et notamment au vu de ce qui est proposé dans les ressources officielles. Voici une synthèse des démarches et raisonnements impliqués dans les problèmes proposés, à gauche par Salomé et à droite dans les problèmes des ressources officielles (Figure 7).

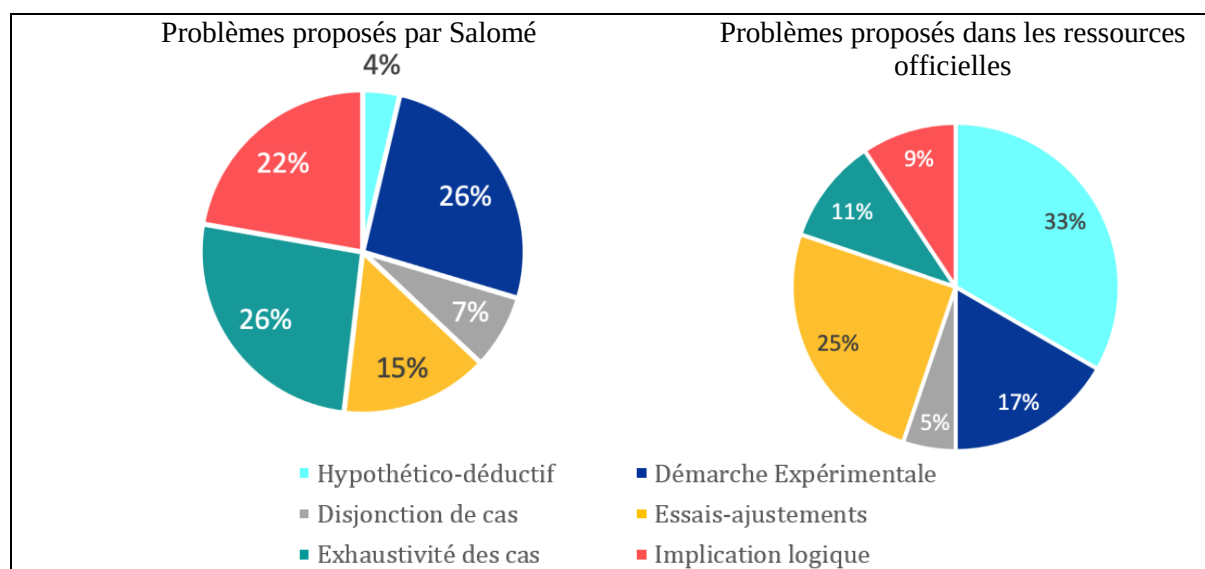


Figure 7. Synthèse des raisonnements et démarches en jeu dans les problèmes proposés par Salomé (gauche) et dans les ressources officielles (droite)

On voit que Salomé choisit davantage de problèmes qui mobilisent un raisonnement par implication logique, par exhaustivité des cas ou une démarche de type expérimental que ce qui est proposé dans les ressources, mais nettement moins de problèmes conduisant à la mise en œuvre d'un raisonnement hypothético-déductif.

En synthèse, pour caractériser l'itinéraire cognitif proposé par Salomé à ses élèves, il ressort qu'elle s'appuie sur les stratégies de résolution mobilisées dans les problèmes pour sélectionner ceux qu'elle propose et organiser leur progression sur l'année. Elle nous dit en entretien : « *J'ai fait un peu de logique, enfin je suis passée par deux ou trois choses et puis là je reviens, je refais [...] Enfin qu'ils voient un peu tout et que ça revienne.* ». Elle cherche à varier les types de stratégies travaillées, tout en s'assurant de les avoir tous passés en revue. Elle attend des élèves qu'ils soient capables de transférer à de nouveaux problèmes les stratégies déjà rencontrées. « *Après il y a les différents types de problèmes. J'aimerais qu'ils aient vu un peu chaque type. Il y a exhaustivité, exemple, contre-exemple, donc ça je crois, j'espère, que j'ai tout vu. Et qu'ils aient un exemple de chaque type qu'ils puissent reproduire.* ». Pour autant, lors de nos entretiens, elle met seulement en avant trois types de stratégies : exemple/contre-exemple, l'exhaustivité et la logique.

5. Étude des pratiques d'évaluation à visée certificative

Méthodologie locale

Notre deuxième question de recherche porte sur les pratiques d'évaluation à visée certificative des enseignants et se scinde en différentes sous-questions qui nous ont amené à analyser le potentiel didactique des problèmes proposés en évaluation, à étudier l'articulation de ces problèmes avec ceux proposés en séances ordinaires, à étudier les référentiels (les grilles de critères d'évaluation) utilisés par les enseignants et à tenter d'identifier les compétences, savoirs, savoir-faire que les enseignants cherchent à évaluer chez leurs élèves.

Mise en œuvre et résultats

Par exemple, on peut voir que le problème « L'escalier », qui a donné lieu à une évaluation certificative, implique des démarches et raisonnements déjà mobilisés dans les problèmes précédents (Tableau 1). L'exhaustivité des cas a même été au cœur du problème travaillé juste

avant. Salomé souhaitait en effet que les élèves puissent s'y référer pour leur nouvelle recherche.

L'analyse de la grille d'évaluation utilisée par Salomé pour évaluer les narrations de ses élèves met en avant des éléments intéressants. Nous donnons en annexe (Annexe 1) celle qu'elle propose aux élèves sur le problème « L'escalier ». Les différentes rubriques (notamment énoncé, communication, stratégie, technique) témoignent de sa volonté de prendre en compte divers aspects liés à la narration et à la recherche. La rubrique relative à la recherche (« Stratégie ») fait apparaître des critères relatifs aux essais, à la formulation d'hypothèses, à la production d'une formule, au test et à la validation/preuve de la formule trouvée, donc principalement des critères applicables dans des problèmes impliquant une démarche de type expérimental.

Salomé modifie légèrement sa grille initiale au fil des problèmes : un grand nombre de critères restent fixes tandis que d'autres sont spécifiés en fonction du problème étudié. Sur le problème « L'escalier », elle ajoute un critère qui est « Trouve une formule algébrique qui décrit la logique du problème ». Même s'il s'avère qu'il n'est pas possible pour les élèves de trouver une formule algébrique, Salomé cherche ainsi à les aiguiller dès le début de leur recherche vers la stratégie qu'elle estime être correcte pour résoudre le problème.

Si l'on regarde enfin les critères qui sont mis en gras et soulignés dans sa grille, et qui semblent donc importants pour Salomé, on trouve : « listes exhaustives », « expliquer toutes les parties des calculs » et « tout doit figurer par écrit ». Cela traduit selon nous l'importance que l'enseignante accorde à l'exhaustivité de la narration, avec des critères qui peuvent sembler redondants.

En synthèse, concernant les pratiques d'évaluation à visée certificative de Salomé, on peut voir que les problèmes qu'elle propose en évaluation sont fortement articulés avec ceux travaillés durant les séances ordinaires, et très souvent avec celui étudié juste avant. Nos entretiens confirment qu'elle attend des élèves qu'ils soient capables de transférer les stratégies d'un problème à l'autre et c'est ce qu'elle cherche à évaluer. Salomé utilise une grille de critères pour évaluer les narrations de recherche, qu'elle fait légèrement évoluer avec le temps et qu'elle spécifie pour certains problèmes. C'est pour elle un moyen d'aiguiller les élèves dès le début de leur recherche. Ainsi, sur un autre problème, elle complète le critère « Les outils et concepts mathématiques sont utilisés correctement » avec « application du théorème de Pythagore » qui donne donc une indication importante aux élèves quant à l'outil mathématiques à utiliser pour résoudre le problème. Elle accorde enfin beaucoup d'importance à ce que les élèves soient exhaustifs dans leur narration, qu'elle associe aussi à la persévérance dans la recherche, comme on le voit dans cet extrait d'entretien. Son objectif est « *que [les élèves] persévèrent, qu'ils aillent au bout de la démarche, qu'ils arrivent à rédiger en entier la démarche.* »

6. Étude des pratiques d'évaluation à visée formative

Méthodologie locale

Afin de répondre à notre dernière question portant sur les pratiques d'évaluation formative des enseignants, nous avons étudié plus particulièrement une séquence d'enseignement. A l'échelle mésoscopique, nous avons mené une analyse a priori et une analyse des potentiels des problèmes proposés pendant cette séquence. L'analyse de l'organisation des séances et de la gestion par l'enseignant visait à repérer les potentielles régulations liées aux interventions de l'enseignant et à la structure des situations d'apprentissage. Au niveau microscopique, l'analyse de l'ensemble des interactions élèves-enseignant (épisodes interactifs), tour de parole par tour de parole, visait à repérer celles de l'ordre des régulations interactives informelles.

Mise en œuvre et résultats concernant les régulations liées à la structure des situations d'apprentissage et aux interventions de l'enseignant

Pour illustrer comment nous avons analysé les problèmes sur lesquels ont travaillé les élèves, centrons-nous sur « L'escalier » qui a donné lieu à une évaluation à visée certificative.

Après une analyse a priori des différentes stratégies possibles pour résoudre ce problème, présentée brièvement au début de ce texte, nous avons caractérisé les potentiels a priori de ce problème. Comme on l'a vu, il met en jeu une démarche de type expérimental et un raisonnement par exhaustivité des cas. De plus, le potentiel de recherche de ce problème est bon puisque les élèves ne connaissent pas *a priori* de méthode pour le résoudre, mais qu'ils peuvent représenter, schématiser les marches d'escalier et les manières de les monter, en tout cas pour un faible nombre de marches. Le potentiel de résistance est très bon puisque la solution pour 20 marches ne peut pas être obtenue rapidement par dénombrement (puisque'il y a plus de 11000 configurations possibles). Pour le potentiel de résistance dynamique, il nous a semblé intéressant de distinguer ce qui touche à la recherche et ce qui touche à la solution. En effet, le fait de voir apparaître une régularité pour des escaliers avec un plus petit nombre de marches, contribue au bon potentiel de résistance dynamique du point de vue de la recherche. Concernant la solution, ce potentiel est cependant faible car le milieu ne permet pas de valider la solution obtenue. L'élève ne peut que vérifier la non-contradiction entre les valeurs numériques connues et celles obtenues théoriquement. Le potentiel de débat est lui aussi faible notamment parce qu'il n'y a qu'une seule solution.

Ces différents éléments nous donnent des indications sur les potentielles difficultés des élèves (notamment sur la validité de leur solution) et nous invitent à y être attentifs lors de l'analyse du déroulement effectif des séances associées et de leur gestion par l'enseignant.

Une fois les problèmes analysés, nous avons étudié la manière dont se sont déroulées les séances en classe. La Figure 8 donne une vue d'ensemble des cinq séances constituant la séquence que nous avons analysée dans la classe de Salomé, le problème « L'escalier » ayant été étudié dans les séances 2 et 3.

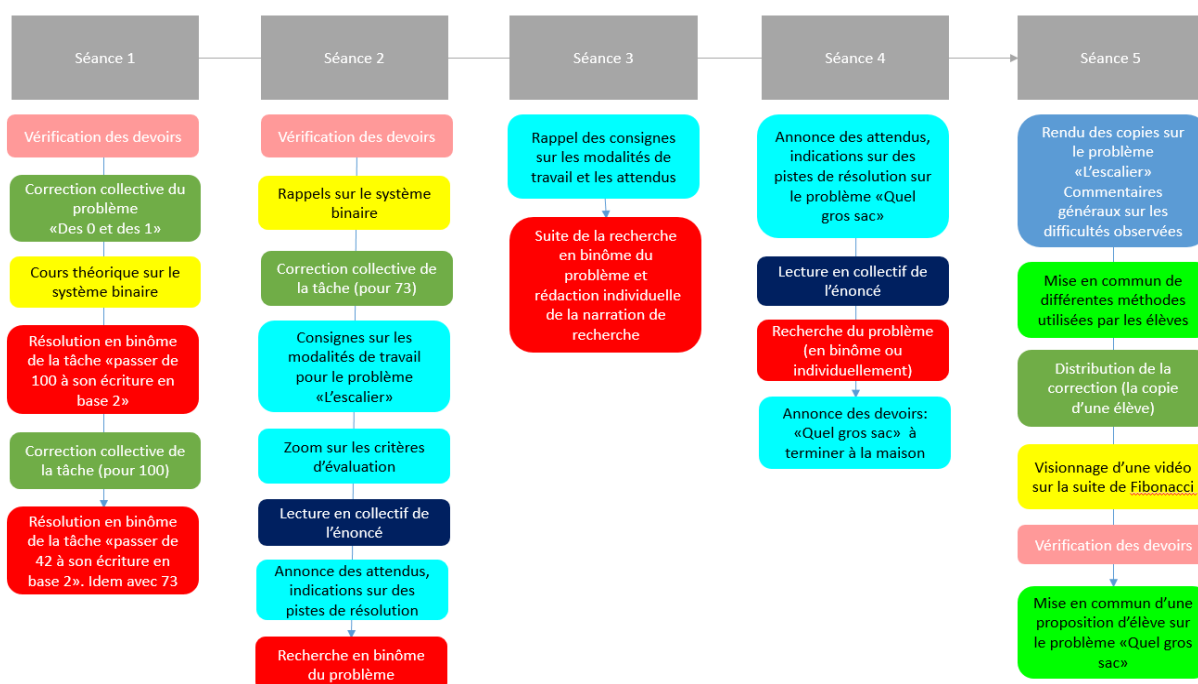


Figure 8. Synthèse du déroulement des cinq séances constituant la séquence d'enseignement étudiée dans la classe de Salomé

On peut voir qu'après un temps de consignes concernant l'organisation du travail de groupe, Salomé est revenue sur les critères d'évaluation qu'elle allait utiliser pour évaluer les narrations des élèves. Puis l'énoncé a été lu en collectif, avant que Salomé donne des précisions sur ses attendus et induise déjà des pistes de résolution. Les élèves ont alors cherché en binôme. La séance suivante, ils ont poursuivi leur recherche en groupe et ont rédigé individuellement leur narration.

Ces différents éléments nous permettent de caractériser les régulations potentielles liées à la structure de la situation d'apprentissage et aux interventions de Salomé. On peut ainsi souligner que Salomé choisit de proposer consécutivement des problèmes mettant en jeu les mêmes stratégies dans le but que les élèves transfèrent la stratégie étudiée précédemment au nouveau problème. Elle vise donc, par cette organisation des problèmes, une régulation des apprentissages des élèves associés à la résolution de problèmes. Cela sous-entend cependant que les élèves sont capables d'identifier, au moins *a posteriori*, les stratégies mobilisées lors de la résolution des problèmes. Or, elle n'organise pas de phase de synthèse et laisse cette identification à la charge de l'élève, alors même qu'elle nous dit en entretien que selon elle, seuls les bons élèves sont capables de repérer et de s'appuyer sur des similitudes pertinentes entre problèmes.

Au début de la recherche, Salomé souligne les éléments qu'elle souhaite voir apparaître dans les recherches des élèves : « [...] *Je veux toutes les possibilités. N'oubliez pas, je veux des listes. D'une manière ou d'une autre vous faites tous les essais possibles. Après une fois que vous avez tous vos essais pour une, deux marches, etc., essayez de trouver une logique dans vos résultats et puis après vous trouvez vous essayez de me mettre ça sous forme algébrique* ».

Cela peut certes permettre, pour les élèves en difficulté, de se lancer sur des pistes de résolution et, en ce sens, constituer des sources de régulations potentielles. Mais de telles interventions peuvent réduire le potentiel de recherche et de résistance du problème, et donc restreindre l'activité mathématique des élèves et donc, potentiellement, leurs apprentissages.

Salomé organise la correction des problèmes, en impliquant les élèves par un jeu de questions-réponses ou en demandant aux élèves de présenter oralement au reste de la classe leur travail. Elle cherche ainsi à leur montrer différentes manières d'appréhender ce problème. Elle choisit même de distribuer une production d'élève comme correction. Les élèves sont aussi invités à travailler en binômes et sont donc impliqués, de diverses manières, comme des ressources pour eux-mêmes et pour leurs pairs. Les élèves sont aussi autorisés à utiliser tout le matériel à leur disposition, ce qui contribue à de possibles régulations liées aux interactions des élèves avec des éléments matériels de la situation.

Mise en œuvre et résultats concernant l'analyse des interactions élèves-enseignants et les régulations interactives informelles

Pour analyser les interactions élèves-enseignant, nous nous sommes centrée sur deux des invariants de l'activité évaluative auxquels nous pouvions accéder : le recueil des informations lors des discussions entre élèves et enseignants et leur utilisation effective et immédiate au cours de la séance (cf. invariants de l'activité évaluative, partie II. 2). Nous avons ainsi découpé chaque séance en un certain nombre d'épisodes interactifs (EI) et avons caractérisé³, pour chacun :

- L'objet des discussions, c'est-à-dire ce sur quoi porte l'information recueillie et le retour fait par l'enseignant (la compréhension de la tâche ; les attendus ou les critères

³ L'ensemble des catégories est donné en annexe 2.

d'évaluation ; les procédures des élèves ; les stratégies à mobiliser ; les résultats obtenus ; etc.). Cela rejoint la recherche de Kiwan, Haspekian et Roditi (2016) présentée précédemment, bien que nos catégories soient plus larges.

- La manière dont se déroulent ces discussions, c'est-à-dire la manière dont l'enseignant recueille des informations (est-ce que l'enseignant pose une question à l'élève ; est-ce que l'élève pose une question à l'enseignant par exemple) et la manière dont il les utilise (par exemple est-ce que l'enseignant répond à la question ; est-ce qu'il valide ou invalide ; est-ce qu'il donne des pistes ou renvoie à l'élève ou à un autre élève ; etc.).

Nous avons ainsi relevé 16 EI lors de la première séance sur le problème « L'escalier », 23 pour la deuxième séance, d'une durée moyenne de 40 secondes par épisode. Notons de plus que, de manière générale (sur l'ensemble des cinq séances observées) le fait que les élèves soient ou non évalués de manière certificative n'influence pas le nombre de leurs échanges avec Salomé.

Nous donnons ci-dessous deux exemples d'extraits d'interactions, sur lesquels nous nous appuyons pour illustrer la manière dont nous avons mis en œuvre nos outils d'analyse. Ces deux extraits vont par ailleurs nous permettre de voir certains éléments saillants des interactions entre Salomé et ses élèves.

Le premier extrait (extrait 1) a lieu en début de première séance et implique une élève, Héloïse :

Héloïse : En fait ça change quelque chose qu'on fasse, qu'on monte de deux et un, ou de un et deux. Ça change ?
Salomé : Oui c'est deux manières différentes. Oui c'est ça.

Le deuxième extrait (extrait 2) se déroule à la fin de la première séance et concerne le groupe constitué par Damien et Naël :

Damien : Vous n'avez pas un indice madame ?
Naël : Pour trouver.
Salomé : Observer le nombre de façons que vous obtenez pour une marche, deux marches, trois marches. Observer le résultat, combien il y a à chaque fois de façons.

On remarque que Salomé recueille principalement des informations à la suite de questions posées par les élèves (64% des EI, sur l'ensemble des cinq séances observées), comme on peut le voir dans les deux extraits. Elle n'est donc pas très proactive dans la prise d'informations. Les questions des élèves portent principalement sur la compréhension du problème comme dans l'extrait 1, et sur les stratégies à mettre en œuvre (extrait 2). Ce deuxième point est assez spécifique de cette classe (en comparaison de ce qui se passe dans les autres classes que nous avons suivies). Les élèves cherchent ainsi fréquemment, à travers les questions qu'ils posent, à obtenir des informations sur ce que Salomé considère comme central dans ce cours, à savoir la mobilisation de stratégies adéquates face aux problèmes étudiés. Cela semble montrer que les élèves ont identifié qu'il s'agissait d'une compétence importante dans ce cours, dans leur classe, et que les fréquents retours de Salomé sur les stratégies à mobiliser incitent les élèves à poser de telles questions puisqu'ils obtiennent effectivement des indications à ce propos.

En effet, Salomé réagit principalement en validant ou invalidant les propositions des élèves (extrait 1), ou en leur donnant des pistes ou des informations complémentaires pour les aider à progresser (extrait 2), le plus souvent sur les stratégies à mettre en œuvre (extrait 2) et sur la compréhension du problème (extrait 1) au début de la recherche.

Une fois les élèves lancés dans la recherche, Salomé continue donc de les guider, en les invitant à continuer s'ils sont bien partis ou en les guidant vers les stratégies qu'elle souhaite les voir mettre en œuvre. Cette tendance à guider les élèves vers les stratégies à mobiliser est là encore plus fréquente que dans les autres classes observées.

On peut dire que l'enjeu n'est pas tant pour Salomé que les élèves comprennent seuls le problème et le but à atteindre, qu'ils aillent au bout de leur recherche si celle-ci n'est pas celle attendue, ou qu'ils repèrent la bonne stratégie, mais bien qu'ils arrivent à mettre en œuvre la stratégie qu'elle a identifiée comme pertinente. Ses retours, ses interventions, interviennent souvent en amont des erreurs et des difficultés que les élèves pourraient rencontrer.

A partir de ces différents éléments, si l'on cherche à caractériser les pratiques de Salomé on peut dire qu'elle se centre sur les stratégies en jeu dans les problèmes pour les choisir et les articuler au long de l'année. Cela constitue un objectif d'apprentissage, ciblant l'activité de résolution de problèmes, qui cohabite et entre parfois en tension avec un objectif plus large associé à la persévérance dans la recherche. Un élément relevant de sa composante personnelle permet de mieux comprendre certains de ces choix. Elle donne pour la première fois ce cours et n'a pas suivi d'études universitaires de mathématiques. Elle nous dit en entretien qu'elle ne se sent pas toujours à l'aise lors des explications qu'elle donne aux élèves. Cela nous conduit à l'hypothèse que le fait de guider les élèves dès le début de leur recherche, de peu chercher à initier des échanges avec eux, et de garder la main dans ses retours lui permet de réduire l'incertitude qui accompagne les procédures que les élèves peuvent mettre en œuvre, et de se rassurer.

Chez cette enseignante, l'organisation, la gestion des séances, ses interventions et ses interactions avec les élèves sont guidées par la volonté de développer chez les élèves des apprentissages associés à la mise en œuvre de stratégies de résolution ce qui permet de saisir une cohérence entre ses pratiques d'évaluation à visée certificative et celles à visée formative.

Cela nous conduit à formuler des hypothèses sur certaines de ses conceptions influençant ses pratiques :

- Une conception de l'apprentissage en résolution de problèmes en mathématiques comme une capacité à transférer les stratégies déjà rencontrées à de nouveaux problèmes.
- Une conception de l'enseignement où l'enseignant intervient comme un soutien à l'apprentissage. Il est une ressource centrale pour permettre aux élèves d'avancer dans leur recherche.
- Une conception de l'évaluation qui permet une cohabitation et une articulation des visées formative et certificative. Celle à visée certificative doit permettre de savoir si les élèves sont capables de mettre en œuvre la stratégie attendue. Ce sont les interactions directes et informelles avec les élèves qui permettent de réguler, de s'assurer que les élèves ne fassent d'erreurs qui sont pour elle non significatives.

VI. CONCLUSIONS DE L'ÉTUDE À PARTIR DE L'ANALYSE DES PRATIQUES DE TROIS ENSEIGNANTS

En tenant compte cette fois de l'analyse des pratiques des trois enseignants de notre étude, il apparaît que la large marge de manœuvre laissée aux enseignants quant au développement des compétences des élèves en résolution de problèmes est investie très différemment, en ce qui concerne l'enseignement et l'évaluation, notamment du point de vue des objectifs visés, ce que nous attribuons notamment aux flous qui entourent les prescriptions encadrant le cours.

Concernant les itinéraires cognitifs proposés aux élèves et les pratiques d'évaluation à visée certificative, comme nous l'avons vu, Salomé vise l'apprentissage de stratégies de résolution et à développer la persévérance de ses élèves. Rémi cherche, lui aussi, à développer la persévérance mais aussi la collaboration entre élèves. Quant au dernier enseignant, Paul, il vise surtout le développement de compétences narratives liées au dispositif largement mis en avant dans ce cours, la narration de recherche. D'un moyen d'accès aux démarches des élèves, la narration de recherche devient pour lui l'objectif d'apprentissage visé et un objet d'évaluation en soi, presque indépendant des mathématiques qu'elle doit *a priori* donner à voir. Pour Rémi et Paul, les objectifs visés divergent des directives institutionnelles qui ciblent les stratégies de résolution et la démarche de type expérimental. Pour Salomé, même si elle cible dans ces choix de problèmes et son organisation ce qui est promu par l'institution, ses interventions et ses échanges avec les élèves viennent réduire le potentiel de recherche des problèmes qu'elle propose et ne laissent que peu de place au choix, par les élèves, de la stratégie à mobiliser.

Le fait d'avoir des objectifs, qu'ils soient centrés sur la recherche ou plus transversaux oriente les enseignants dans leur manière de gérer les séances et les discussions informelles avec les élèves. Des objectifs qui sont de plus centrés sur la résolution de problèmes semblent être une aide pour sélectionner et organiser les problèmes, et pour articuler ceux travaillés en classe et ceux proposés en évaluation. Les objectifs plus transversaux semblent rendre plus difficiles le choix et l'organisation des problèmes proposés aux élèves. Pour Paul par exemple, la difficulté d'identification des objectifs mathématiques visés dans ce cours conduit à des difficultés pour évaluer, et à adopter des pratiques très subjectives, puisqu'il ne s'est, pendant des années, référé à aucun critère pour évaluer les productions de ses élèves.

L'étude des pratiques d'évaluation formative de ces enseignants, et notamment les interactions entre élèves et enseignant, révèle que, si tous les enseignants saisissent des opportunités pour recueillir des informations sur l'activité des élèves, ce n'est pas dans les mêmes proportions. Paul est par exemple beaucoup plus proactif dans la prise d'informations que les deux autres enseignants (72% EI sont à son initiative, contre 39% pour Rémi et 36% pour Salomé). Il y consacre aussi plus de temps, via un plus grand nombre d'interactions.

De plus, l'implication des élèves et le caractère potentiellement formatif des échanges informels entre élèves et enseignant dépendent à la fois de ce sur quoi porte ce retour et de la manière dont les enseignants font un retour aux élèves. Black et Wiliam (2009) interrogent eux aussi le lien entre feedback et implication des élèves dans les discussions en classe. Il semble ainsi important que les enseignants s'appuient sur l'activité réelle des élèves et qu'ils s'assurent de leur possible implication dans la manière de prendre en compte ce retour, au vu notamment de leurs connaissances. Cette question de la proximité entre les connaissances disponibles des élèves et la pertinence des retours faits par l'enseignant est aussi interrogée par Robert et Vandebrouck (2014) quant aux aides constructives et à leur lien avec la zone proximale de développement des élèves.

Si nos observations ne nous ont pas permis de saisir la cohérence des pratiques évaluatives de Rémi, nous associons la cohérence des pratiques des deux autres enseignants à l'articulation entre des dimensions formative et certificative de leurs pratiques évaluatives autour d'un projet global, guidé par les objectifs qu'ils visent dans ce cours. En particulier, pour ces deux enseignants, les informations recueillies lors des discussions informelles avec les élèves viennent compléter celles obtenues de manière formelle via l'évaluation et le dispositif de la narration de recherche, et permettent ainsi d'améliorer leur appréciation des compétences des élèves.

VII. APPORTS, LIMITES ET PERSPECTIVES DE LA RECHERCHE

De manière générale, il semble que cette recherche a permis de mobiliser et d'opérationnaliser deux outils originaux pour l'étude de la résolution de problèmes. D'une part, le concept de potentiel (Georget, 2009) comme outil d'analyse des problèmes de type activités RPP complétant ainsi l'analyse *a priori* en prenant en compte certaines spécificités de ce type de problèmes. D'autre part, l'identification d'apprentissages possibles en résolution de problèmes en termes de démarches, raisonnement et preuve (Houdement, 2009). Dans la continuité de nombreux autres travaux récents, cette recherche a aussi montré une possible articulation de deux points de vue complémentaires ; l'évaluation des apprentissages et la didactique des mathématiques, ici pour tenter de saisir la complexité des pratiques évaluatives des enseignants amenés à enseigner un objet nouveau et peu défini.

Différentes limites de cette recherche amènent cependant à être vigilant quant au caractère général de ces résultats. Nous en pointons ici quelques-unes. Tout d'abord, la particularité de certains problèmes et l'organisation particulière de certaines séances interrogent la représentativité de la séquence observée chez l'un des enseignants. Un nombre plus important de séances aurait pu permettre d'affiner la compréhension des logiques d'action observées. Une limite conceptuelle ensuite, du fait que les pratiques d'évaluation à visée formative ont été considérées depuis un point de vue de chercheuse. L'intégration du point de vue des enseignants aurait pu permettre de compléter, d'affiner voire de contraster nos interprétations. Concernant les pratiques d'évaluation certificative, nous n'avons pas eu accès et donc pas analysé l'activité de l'enseignant lorsque celui-ci est en train d'évaluer les narrations de recherche de ses élèves. Ceci aurait permis d'accéder à des référentiels implicites et/ou émergents (Mottier Lopez & Dechamboux, 2017) venant compléter les attentes explicites apparaissant sous la forme de critères dans les grilles d'évaluation.

Mais cette recherche ouvre aussi des perspectives. La première concerne la mise à disposition d'éléments d'analyse des problèmes auprès des enseignants via la prise en compte des démarches, raisonnements et preuves *a priori* mis en jeu lors de leur résolution. Dans le cadre d'un travail collaboratif en cours impliquant quatre enseignants et un collègue chercheur⁴, nous avons cherché à opérationnaliser cette manière de considérer les apprentissages possibles en résolution de problèmes en vue de la constitution d'une ressource à destination des enseignants.

Par ailleurs, nous avons montré que les pratiques observées décrivent des logiques d'action différentes. Cela fait écho à la recherche menée par Choquet Pineau (2014) sur les pratiques d'enseignants de primaire proposant des problèmes ouverts à leurs élèves, et aux profils d'enseignants qu'elle a identifiés : le premier avec principalement pour but de faire chercher les élèves et de les amener à trouver la solution attendue ; le deuxième visant à faire apprendre des mathématiques aux élèves par le biais de la recherche. Ceci questionne les apprentissages qui peuvent être visés par la pratique de la résolution de problèmes et relance la question posée par Hersant (2010) de l'existence de savoirs associés.

Les observations en classe ont de plus fait apparaître qu'aucune phase d'institutionnalisation n'avait pu être observée, dans aucune des trois classes observées. Choquet Pineau (2014) montre elle aussi qu'aucun des cinq enseignants qu'elle a suivis n'institutionnalise des savoirs ou des méthodes en jeu dans les problèmes ouverts proposés aux élèves. Il semble donc que ce

⁴ Stéphane Favier, équipe DiMaGe, Université de Genève

constat dépasse le cadre de ces deux études et rend prégnante la question de l'institutionnalisation dans le contexte d'un enseignement centré sur la résolution de problèmes.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- ALLAL, L. (2007). Régulations des apprentissages : Orientations conceptuelles pour la recherche et la pratique en éducation. In L. Allal & L. Mottier Lopez (Éds.), *Régulation des apprentissages en situation scolaire et en formation* (p. 7-23). De Boeck.
- ALLAL, L. (2008). Evaluation des apprentissages. In A. Van Zanten (Éd.), *Dictionnaire de l'éducation* (p. 311-314). Presses Universitaires de France.
- ALLAL, L. (2011, juin). « *Assessment for learning* » culture in the classroom... and beyond [Communication]. International Seminar on Assessment for Learning, Solstrand, Norway.
- ALLAL, L., & MOTTIER LOPEZ, L. (2005). L'évaluation formative de l'apprentissage : Revue de publications en langue française. In *L'évaluation formative : Pour un meilleur apprentissage dans les classes secondaires* (p. 265-290). OCDE.
- ARSAC, G., GERMAIN, G., & MANTE, M. (1991). *Problème ouvert et situation-problème*. IREM de Lyon.
- BLACK, P. (2013). Formative and Summative Aspects of Assessment : Theoretical and Research Foundations in the Context of Pedagogy. In J. H. McMillan (Éd.), *SAGE Handbook of Research on Classroom Assessment* (p. 167-178). Sage.
- BLACK, P., & WILLIAM, D. (2009). Developing the theory of formative assessment. *Educational Assessment, Evaluation and Accountability*, 21(5), 5-31.
- BLOOM, B. S., HASTINGS, J. T., & MADDAUS, G. (1971). *Handbook on Formative and Summative Evaluation of Student Learning*. Mc Graw-Hill. <http://eric.ed.gov/?id=ED049304>
- BLOOM, B.-S. (1968). *Learning for Mastery*. 1(2), 1-12.
- BONAFÉ, F., SAUTER, M., CHEVALLIER, A., COMBES, M.-C., DEVILLE, A., DRAY, L., & ROBERT, J.-P. (2002). Les narrations de recherche du primaire au Lycée. *Brochure APMEP*, 151.
- CHANUDET, M. (2019a). *Etude des pratiques évaluatives des enseignants dans le cadre d'un enseignement centré sur la résolution de problèmes en mathématiques* [Doctorat en didactique des mathématiques]. Université de Genève.
- CHANUDET, M. (2019b). Quelques résultats concernant les compétences en résolution de problèmes d'élèves évalués sur un même problème et à l'aide d'une même grille d'évaluation. In M. Abboud (Éd.), *Mathématiques en scène, des ponts entre les disciplines. Actes du colloque EMF 2018* (p. 1532-1539). IREM de Paris.
- CHANUDET, M. (2019c). Assessing Inquiry-Based Mathematics Education with Both a Summative and Formative Purpose. In P. Liljedahl & M. Santos-Trigo (Éds.), *Mathematical Problem Solving* (p. 177-207). Springer.
- CHANUDET, M. (2019d). Etude des pratiques d'évaluation formative informelle de trois enseignants de mathématiques genevois dans le cadre d'un enseignement de la résolution de problèmes. In C. Gremion, E. Sylvestre, & N. Younes (Éds.), *Actes du 31ème Colloque scientifique international de l'ADMEE-Europe : Entre normalisation, contrôle et développement formatif. Évaluations sources de synergies ?* (p. 469-474). IFFP et CSE de l'Université de Lausanne.
- CHANUDET, M. (2017). Teachers' formative assessment practices : The case of an IBME-centered course. In T. Dooley & G. Gueudet (Éds.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME10)* (p. 3436-3443).
- CHEVALLARD, Y. (1985). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. La pensée sauvage.
- CHEVALLIER, A. (1992). Narration de recherche : Un nouveau type d'exercice scolaire. *Petit x*, 33, 71-79.
- CHOQUET PINEAU, C. (2014). *Une caractérisation des pratiques de professeurs des écoles lors de séances de mathématiques dédiées à l'étude de problèmes ouverts au cycle* [Thèse de doctorat en didactique des mathématiques]. Nantes.
- COPPE, S. (2018). Evaluation et didactique des mathématiques : Vers de nouvelles questions, de nouveaux travaux. *Mesure et évaluation en éducation*, 41(1), 7-40.
- COPPE, S., & MOULIN, M. (2017). Évaluation entre pairs et débat argumenté dans le cadre d'un problème complexe en mathématiques. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 1-20. <https://doi.org/10.1080/14926156.2017.1378832>
- GANDIT, M. (2015). L'évaluation au cours de séances d'investigation en mathématiques. *Recherches en éducation*, 25, 67-80.
- GANDIT, M. (2017). Débat et institutionnalisation à deux niveaux : Deux outils d'évaluation formative. *Actes du 29e colloque de l'ADMEE Europe - L'évaluation : un levier pour l'enseignement et la formation*, 34-38.
- GANDIT, M., & LEPAREUR, C. (2016). Effets de différentes modalités d'évaluation formative sur l'évolution du milieu de l'élève. *Actes du 28e colloque de l'ADMEE Europe - Evaluations et apprentissages*, 752-758.
- GEORGET, J.-P. (2009). *Activités de recherche et de preuve entre pairs à l'école élémentaire : Perspectives ouvertes par les communautés de pratique d'enseignants* [Thèse de doctorat en didactique des mathématiques]. Université Paris Diderot.
- GIROUD, N. (2014). Etude de la démarche expérimentale dans les situations de recherche pour la classe. In S. Coppé & M. Haspekian (Éds.), *Actes du Séminaire National de Didactique des Mathématiques 2013* (p. 69-84).
- GOASDOUE, R., & VANTOURET, M. (2014). Approches et validité psycho-didactiques des évaluations. *Education et Formation*, 302, 139-156.

- GRANGEAT, M. (2013). Modéliser les enseignements scientifiques fondés sur les démarches d'investigation : Développement des compétences professionnelles, apport du travail collectif. In M. Grangeat (Éd.), *Les enseignants de sciences face aux démarches d'investigation* (p. 199-234). Presses Universitaires de France.
- GRAPIN, N. (2015). *Étude de la validité de dispositifs d'évaluation et conception d'un modèle d'analyse multidimensionnelle des connaissances numériques des élèves de fin d'école* [Doctorat en didactique des mathématiques]. Université Paris-Diderot (Paris 7).
- GRAPIN, N., & MOUNIER, E. (2018, janvier 10). Évaluer les connaissances des élèves sur le nombre en fin de CP (grade 1) : Exploitation d'un cadre didactique et premiers résultats. *L'évaluation en éducation et en formation face aux transformations des sociétés contemporaines*. 30e colloque de l'ADMEE-Europe, Esch-sur-Alzette.
- GRENIER, D. (2012). La démarche d'investigation dans les situations de recherche pour la classe (SiRC). In J.-L. Dorier & S. Coutat (Éds.), *Enseignement des mathématiques et contrat social : Enjeux et défis pour le 21e siècle*. Actes du colloque EMF2012 (p. 1354-1364).
- GRENIER, D., & PAYAN, C. (2002). Situation de recherches « en classe » : Essai de caractérisation et proposition de modélisation. In V. Durand Guerrier & C. Tisseron (Éds.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques* (p. 189-205).
- GRUGEON-ALLYS, B. (2016). Évaluer en mathématiques : Une approche didactique et épistémologique. In P. Detroz, M. Crahay, & A. Fagnant, *L'évaluation à la lumière des contextes et des disciplines* (p. 63-90). De Boeck Supérieur.
- GRUGEON-ALLYS, B., RODITI, E., & SAYAC, N. (2018). Évaluer en mathématiques : Une question interdisciplinaire ? *Mesure et évaluation en éducation*, 41(1), 1-6.
- HADJI, C. (1989). *L'évaluation, règles du jeu*. ESF éditions.
- HARLEN, W. (2012). On the relationship between assessment or formative and summative purposes. In J. Gardner (Éd.), *Assessment and learning* (2^e éd., p. 87-102). Sage.
- HERSANT, M. (2010). *Empirisme et rationalité au cycle 3, vers la preuve en mathématiques* [Mémoire complémentaire pour l'Habilitation à diriger des recherches].
- HOUEMENT, C. (2009). Une place pour les problèmes pour chercher. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 14, 31-59.
- JEANNOTTE, D. (2015). *Raisonnement mathématique : Proposition d'un modèle conceptuel pour l'apprentissage et l'enseignement au primaire et au secondaire* [Thèse de doctorat en éducation]. Université du Québec.
- JULO, J. (1995). *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques : Un apport de la psychologie cognitive à l'enseignement*. Presses universitaires de Rennes.
- KIWAN ZACKA, M. (2018). *Des pratiques d'enseignement de l'algèbre élémentaire aux apprentissages des élèves. Cas des expressions algébriques en EB7 et EB8 au Liban* [Thèse de doctorat en Sciences de l'Éducation]. Université Saint Joseph, Liban.
- LEPAREUR, C. (2016). *L'évaluation dans les enseignements scientifiques fondés sur l'investigation : Effets de différentes modalités d'évaluation formative sur l'autorégulation des apprentissages* [Thèse de doctorat en Sciences de l'Éducation]. Université Grenoble Alpes.
- MOTTIER LOPEZ, L. (2009). L'évaluation en éducation : Des tensions aux controverses. In L. Mottier Lopez & M. Crahay (Éds.), *Evaluations en tension. Entre la régulation des apprentissages et le pilotage des systèmes* (p. 7-25). De Boeck Université.
- MOTTIER LOPEZ, L. (2015). *Évaluations formative et certificative des apprentissages. Enjeux pour l'enseignement*. De Boeck Université.
- MOTTIER LOPEZ, L., & DECHAMBOUX, L. (2017). D'un référentiel d'évaluation fixe à une co-constitution référentielle dynamique, ce que nous apprend le jugement situé de l'enseignant. *Contextes et didactiques*, 9, 12-29.
- NEWELL, A., & SIMON, H. A. (1972). *Human Problem Solving*. Prentice-Hall.
- PILET, J., & HOROKS, J. (2016, novembre). Analyser les pratiques d'évaluation des enseignants du 2nd degré en algèbre : Méthodologie et premiers résultats. *Évaluation en mathématiques: dispositifs, validités et pratiques*.
- PILET, J., & HOROKS, J. (2015). Une recherche en cours sur les pratiques enseignantes d'évaluation des apprentissages des collégiens en algèbre. *Actes du séminaire national de l'ARDM*, 89-98.
- ROBERT, A. (2001). Les recherches sur les pratiques des enseignants et les contraintes de l'exercice du métier d'enseignant. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 21(1.2), 57-80.
- ROBERT, A. (2006). Une méthodologie pour décrire des déroulements de séances de classe à partir de vidéos dans des recherches sur les pratiques d'enseignants de mathématiques au collège et au lycée. In M. J. Perrin Glorian & Y. Reuter (Éds.), *Les méthodes de recherche en didactiques* (p. 191-202). Presses du Septentrion.
- ROBERT, A. (2008a). La double approche didactique et ergonomique pour l'analyse des pratiques d'enseignants de mathématiques. In *La classe de mathématiques : Activités des élèves et pratiques des enseignants* (p. 59-67). Octarès.
- ROBERT, A. (2008b). Le cadre général de nos recherches en didactique des mathématiques. In F. Vandebrouck (Éd.), *La classe de mathématiques : Activités des élèves et pratiques des enseignants* (p. 11-22). Octarès.
- ROBERT, A., & ROGALSKI, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : Une double approche. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 2(4), 505-528.
- ROBERT, A., & VANDEBROUCK, F. (2014). Proximités-en-acte mises en jeu en classe par les enseignants du secondaire et ZPD des élèves : Analyses de séances sur les tâches complexes. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 34(2-3), 239-283.
- RODITI, E., HASPEKIAN, M., & KIWAN, M. (2016, novembre 21). *L'évaluation formative dans les interactions en classe de mathématiques : Une approche didactique* [Communication]. Évaluation en mathématiques : dispositifs, validités & pratiques, Paris.

- RUIZ-PRIMO, M. A., & FURTAK, E. M. (2004). *Informal Formative Assessment of Students' Understanding of Scientific Inquiry* (CSE N° 639).
- RUIZ-PRIMO, M. A., & FURTAK, E. M. (2007). Exploring Teachers' Informal Formative Assessment Practices and Students' Understanding in the Context of Scientific Inquiry. *Journal of Research in Science Teaching*, 44(1), 57-84.
- SAUTER, M. (1998). Narration de recherche : Une nouvelle pratique pédagogique. *Repères IREM*, 30, 9-21.
- SAYAC, N. (2017). *Approche didactique de l'évaluation et de ses pratiques en mathématiques : Enjeux d'apprentissages et de formation* [Note de synthèse d'HDR].
- SAYAC, N. (2019). Approche didactique de l'évaluation et de ses pratiques en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 39(3), 283-329.
- SCHOENFELD, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press Inc.
- SCRIVEN, M. (1967). The methodology of evaluation. In R. Mills Gagné, R. W. Tyler, & M. Scriven, *Perspectives of curriculum evaluation* (p. 39-83). Rand Mc Nally.
- SHAVELSON, R. J., YOUNG, D. B., AYALA, C. C., BRANDON, P. R., FURTAK, E. M., RUIZ-PRIMO, M. A., TOMITA, M. K., & YIN, Y. (2008). On the Impact of Curriculum-Embedded Formative Assessment on Learning : A Collaboration between Curriculum and Assessment Developers. *Applied Measurement in Education*, 21(4), 295-314.
- TIBERGHIE, A., MALKOUM, L., BUTY, C., SOUASSY, N., & MORTIMER, E. (2007). Analyse des savoirs en jeu en classe de physique à différentes échelles de temps. In G. Sensevy & A. Mercier (Éds.), *Agir ensemble : L'action didactique conjointe du professeur et des élèves* (p. 93-122). PUR.

ANNEXES

Annexe 1. Grille d'évaluation utilisée par Salomé sur le problème « L'escalier »

Critères de correction		
<i>L'écriture doit être soignée, les fautes d'orthographe évitées, les phrases bien construites. Pense à mettre un en-tête à chacune des étapes demandées !</i> <i>Tous tes essais et tes remarques doivent y figurer. Ne rien effacer !!</i>		
Présentation	• Titre, nom, prénom, classe • Soins du travail (/propreté, écriture)	/1
Énoncé (appropriation du problème)	• Reformuler la question en précisant ce que l'on cherche (sous forme de tableau, calcul, schéma) • Dégager les points importants de l'énoncé	/1 /2
Style	• Utilisation de phrases complètes • Facilité de lecture	/1
Stratégie	• Cohérence dans le raisonnement et l'enchaînement des actions. • Formulation explicite d'hypothèses. • Liste exhaustive des essais. • Les différents essais et leur vérification / validation sont clairement exposés : N'oublie pas de prouver tout ce que tu fais et de l'expliquer. • Description du raisonnement par l'utilisation de tableau, schéma ou autre. • Expliquer toutes les parties des calculs utilisés. • Trouver une FORMULE ALGÈBRE qui décrit la logique du problème	/4 /1
Communication	• Tous les essais sont décrits. • La narration permet de comprendre le déroulement de la recherche, pas d'étape implicite. Tout doit figurer par écrit. • Mention des idées erronées et mise en évidence des vérifications qui provoquent des changements de stratégies, mention d'aides éventuelles. • Sincérité du récit : faire part de ses doutes, de ses hésitations, décrire ses erreurs, structure du récit, emploi du « je ».	/3
Technique	• Les outils et concepts mathématiques sont utilisés correctement. • Les codes, notations, symboles utilisés, qui ne font pas partie du problème, sont définis.	/2
Solution	• Solution exacte • Énoncé de la solution sous forme de phrase	/2
TOTAL		/17

Annexe 2. Grille d'analyse des épisodes interactifs

Comment l'enseignant recueille l'information ?	Sur quoi porte l'information recueillie / renvoyée ?	Comment l'enseignant utilise l'information recueillie ?
il s'appuie sur la production de(s) (l') élève(s) ;	les aspects formels (codes, notations, écriture mathématique) ;	il compare la production de l'élève ;
il s'appuie sur des discussions entre ou avec les élèves ;	les éléments (arguments, méthodes, procédures ou solutions) proposés précédemment ;	il donne des pistes ou des informations complémentaires ;
il pose une question au groupe classe ;	la compréhension de la tâche (vocabulaire, données, contraintes) ;	il fait ressortir les idées, procédures ou difficultés mises en œuvre ou rencontrées par l'élève ;
il pose une question à l'élève en s'appuyant sur son(leur) travail ou sur des discussions ;	les connaissances des élèves ;	il incite l'élève à poursuivre ;
l'élève pose une question à l'enseignant.	les attendus ou les critères d'évaluation de l'enseignant ;	il laisse en suspens ou ne répond pas ;
	les erreurs ;	il renvoie à l'élève ou à un autre élève ou lui demande de valider ou invalider une proposition, une explication ou une solution ;
	l'objectif de la tâche ou le résultat attendu ;	il réexplique ou fait des rappels ;
	les procédures mises en œuvre par les élèves ;	il répond à la question ou donne la solution, la réponse ;
	les résultats obtenus ;	il valide ou invalide lui-même directement.
	les stratégies à mettre en œuvre ;	
	les heuristiques ;	
	les modes de raisonnement ;	
	les éléments associés à la preuve.	

LA RESOLUTION DE PROBLEMES COMME OBJET OU MOYEN D'ENSEIGNEMENT AU CŒUR DES APPRENTISSAGES DANS LA CLASSE DE MATHEMATIQUES

Pierre-François BURGERMEISTER, Sylvia COUTAT, Sylvie COPPE, Marina DE
SIMONE, Jean-Luc DORIER, Nataly ESSONNIER, Céline VENDEIRA

Equipe DiMaGe, Université de Genève, SUISSE¹

Résumé

L'objet de ce texte est de présenter succinctement un projet de recherche qui questionne la résolution de problèmes sous des angles variés, à l'appui de plusieurs études dans différents contextes, dans lequel la résolution de problèmes est soit un objet d'enseignement, soit un moyen pour développer l'apprentissage des mathématiques.

Plus particulièrement, dans ce texte nous présentons la structure générale d'un questionnaire passé à des élèves de la fin du primaire au début du secondaire II du canton de Genève pour mieux cerner leur perception des mathématiques et plus particulièrement de la résolution de problème. Nous montrons ensuite quelques aspects des deux recherches qui utilisent la résolution de problèmes comme moyen d'enseignement ; l'une portant sur l'enseignement des fonctions au secondaire II et l'autre sur l'enseignement des formes géométriques au début du primaire. Nous donnerons brièvement quelques éléments sur deux autres thèses en fin de réalisation liées au projet. Enfin nous présenterons les premières conclusions de l'ensemble du projet.

Mots clés

Résolution de problèmes – Fonctions – Formes géométriques – Evaluation – Heuristique.

I. PRESENTATION GENERALE DU PROJET

Le projet de recherche ResoPro en cours, mené par 14 membres² (ou associés) de l'équipe de didactique des mathématiques à Genève (DiMaGe) est piloté conjointement par Sylvie Coppé et Jean-Luc Dorier et soutenu par le Fonds National Suisse pour la recherche (FNS) (Subside n° 100019_173105 / 1, du 1.9.2017 au 31.1.2022). Il a officiellement commencé en septembre 2017 et repose sur des travaux dont l'ancienneté (parfois antérieure au début officiel du projet) et l'avancée sont variables.

Depuis les années 1980, dans différents pays et à divers niveaux d'enseignement, en mathématiques, tant les recherches en éducation que les responsables institutionnels et les programmes d'enseignement prônent la résolution de problèmes non plus seulement comme une façon de valider la bonne utilisation des connaissances mais aussi comme une méthode

¹ <https://www.unige.ch/fapse/dimage/fr/>

² Outre les personnes qui présentent cet exposé, il y a Maud Chanudet, Michel Coray, Audrey Daina, Stéphane Favier, Jana Lackova, Laurence Merminod et Laura Weiss.

pour développer les apprentissages des élèves. Des ressources pour aider les enseignants ont été élaborées dans ce sens, mais les études menées sur les pratiques montrent que l'évolution est encore lente, malgré des efforts certains du côté de la formation et du développement professionnel des enseignants.

En Europe le rapport de l'Organisation de Coopération et de Développement Économiques (OCDE) (Rocard et al., 2007) et les résultats des grandes enquêtes internationales de type PISA ont été les points de départ d'un grand plan de financement d'initiatives au sein de la communauté européenne.

Dans la contre-réforme qui a suivi celle des mathématiques modernes, depuis les années 1980, en accord avec la demande sociale et politique, les injonctions officielles de nombreux pays ont clairement évolué dans ce sens depuis plus ou moins longtemps. On pourra à ce sujet consulter Coppé & Houdement (2010) et Coppé (2011) pour deux études du cas français (primaire et secondaire) et Dorier (2012) qui fait le point dans les 12 pays européens du projet PRIMAS.

En Suisse romande, la résolution de problème est au cœur des enseignements depuis les années 1980 et le Plan d'Études Romand (PER) qui régit les onze années (élèves de 4 à 15 ans) de la scolarité obligatoire de tous les cantons romands, entré en vigueur en 2011, affiche clairement cet objectif comme une visée prioritaire (cf. les commentaires généraux du domaine Mathématiques et Sciences de la Nature (CIIP 2010, p. 7)).

Parallèlement, les moyens d'enseignement romands de mathématiques pour ces mêmes onze années sont composés d'une large palette de problèmes abordant tous les thèmes d'enseignement. Ces moyens officiels et communs à toute la Romandie privilégient donc nettement la résolution de problèmes et pas du tout l'exposé du cours, quasi inexistant dans les moyens primaires et concentré dans le livre « Aide-mémoire » commun aux trois ans du secondaire I (cycle 3 du PER dénommé Cycle d'orientation à Genève, élèves de 12 à 15 ans). Cependant, ils laissent totalement à la charge des enseignants l'organisation d'une progression des problèmes ce qui peut d'une part, se révéler être une difficulté et d'autre part, engendrer des pratiques très différentes comme l'a montré la thèse de Daina (2013).

Dans le monde francophone, dès l'origine du champ de la didactique des mathématiques dans les années septante avec les premières ingénieries didactiques de Brousseau (1998) ou les travaux de Vergnaud (1990) dans la théorie des champs conceptuels, tout indique que la notion de problème est centrale pour la construction des connaissances. Plus récemment dans le champ de la Théorie anthropologique du didactique, la notion de parcours d'étude et de recherche (PER) (Chevallard, 1999) a donné une nouvelle impulsion théorique à la question de la résolution de problèmes.

Parallèlement à ces recherches « théoriques », des travaux de « recherche-action » ont permis de développer des ressources et des dispositifs innovants qui ont été testés dans des expérimentations. Ces travaux ont donné lieu à des théorisations plus ou moins poussées en lien avec les cadres précédemment évoqués. Il s'agit des problèmes ouverts (Arsac et al., 1991; Arsac & Mante, 2007) des situations problèmes (Brun, 1990), des situations de recherche pour la classe (Eysseric, 2002 ; Grenier, 2007 ; Grenier & Payan, 2002), du débat scientifique (Legrand, 1990). On trouvera par ailleurs des revues de ces différents travaux dans Dorier (2012) et Georget (2009). Ces travaux essentiellement francophones font écho à un courant international que nous allons rapidement esquisser ci-dessous.

A l'échelle internationale, les travaux de Polya (1945), ont initié dès les années 60 un courant de recherche, dit « problem solving », dans lequel on tente de comprendre comment des experts résolvent des problèmes de mathématiques pour développer des activités visant à entraîner les élèves à mettre en œuvre une démarche (comprendre le problème, concevoir un plan, le mettre

à exécution et examiner la solution obtenue). Mais ces travaux n'ont pas donné les résultats attendus même si des programmes d'enseignement, basés sur la résolution de problèmes, ont été développés aux États-Unis. Schoenfeld (1985; 1979) a repris ces premiers travaux en donnant des bases plus théoriques et il a ainsi initié un important courant de recherches, principalement dans le monde anglo-saxon, mais aussi au-delà.

Des chercheurs ont prolongé cette approche en développant le concept du « problem posing » (Cai et al., 2013; Kilpatrick, 1967; Silver & Cai, 1996). Cette approche postule qu'au-delà de la capacité à résoudre des problèmes, c'est l'activité qui consiste à bien savoir les poser qui serait un signe du développement des compétences mathématiques. Ainsi Silver & Cai (1996) partent du postulat que savoir poser des problèmes augmente chez les élèves la capacité à les résoudre. Cai & al. (2013) indiquent que lors d'évaluations classiques, les élèves ayant eu un enseignement intégrant régulièrement des séances de « problem posing », réussissaient au moins aussi bien que les autres sur des activités classiques, techniques, tout en témoignant d'une compréhension plus fine des concepts. Ces travaux sont fort intéressants, mais les exemples qu'ils donnent à voir sont constitués le plus souvent de problèmes relativement scolaires et complètement contrôlés par les enseignants.

Plus récemment, les travaux sur les démarches d'investigation IBSL (Inquiry Based Sciences Learning), inspirés de Dewey (1916, 1938) élargissent la perspective de la résolution de problèmes puisqu'ils mettent fortement en avant l'investigation notamment grâce aux outils technologiques qui permettent aux élèves de rechercher des informations qui ne sont pas données mais que les élèves doivent aller chercher et organiser avant de les traiter. Depuis une dizaine d'années, plusieurs projets européens de recherche comme Fibonacci³, PRIMAS⁴, S - TEAM⁵ ou bien LEMA⁶ se sont centrés sur ce type d'approche et mettent en avant une plus grande authenticité des questions posées, plus en lien avec celles de la vie courante, une recherche plus ouverte, un aspect expérimental fort avec des retours critiques et une dimension collaborative du travail des élèves.

Ces différents projets sur la démarche d'investigation s'attachent, en présentant des activités innovantes, à donner des outils aux enseignants, mais peu d'entre eux questionnent les réels apprentissages des élèves, même si cette question est toujours sous-jacente. En effet, souvent, l'intérêt de la résolution de problème est un présupposé qui n'est peu ou pas questionné. En outre, questionner les effets des pratiques et des types de problèmes sur les apprentissages effectifs des élèves reste théoriquement et méthodologiquement complexe. Comme les évaluations mises en place dans les classes pour évaluer les apprentissages dépendent fortement du type d'enseignement donné, sur quels éléments se baser pour évaluer les apprentissages ? A quelle échelle de temps ? Quels sont les effets liés à l'enseignant, notamment ses compétences à engager et à maintenir les élèves dans les tâches, à soutenir la motivation ?

C'est pourquoi dans notre projet, nous nous sommes donnés comme objectif d'interroger et d'évaluer les effets sur les apprentissages des élèves de la pratique de la résolution de problèmes en classe de mathématiques selon divers cadres théoriques relevant de la didactique des mathématiques ou de l'évaluation. Nous nous appuyons sur différents travaux de l'équipe passés, en cours ou débutants dans différents degrés scolaires où la résolution de problèmes est utilisée soit comme un moyen d'enseigner des savoirs thématiques, soit comme un objet d'enseignement (pour apprendre à résoudre des problèmes). Nous cherchons ainsi d'une part à évaluer comment les apprentissages de thèmes mathématiques classiques peuvent se réaliser

³ <http://www.fibonacci-project.eu/>

⁴ <http://www.primas-project.eu/>

⁵ <http://www.s-teamproject.eu/>

⁶ <http://www.lemma-project.org/web.lemaproject/web/eu/tout.php>

principalement par la résolution de problèmes et d'autre part, à mieux déterminer ce que l'on peut apprendre quand on se centre sur la résolution de problèmes indépendamment des contenus mathématiques, puis comment les élèves peuvent repérer ces savoirs et savoirs faire construits (comment peuvent être gérées les institutionnalisations) et quelles aides peuvent leur être fournies.

Nous donnons ci-dessous un tableau très synthétique pour permettre au lecteur non genevois de visualiser comment l'enseignement est structuré dans notre canton suisse entre les trois ordres d'enseignement primaire et secondaires I et II.

Primaire (8 ans)	Secondaire I (3 ans) Cycle d'orientation (CO)	Secondaire II (4ans) Collège
Cycle 1 : 1P-4P (4-8 ans) Cycle 2 : 5P-8P (8-12 ans)	9 ^e -10 ^e -11 ^e (12-15 ans) Cycle 3 - filières CT, LC, LS	1 ^e , 2 ^e , 3 ^e , 4 ^e du collège Maths fort ou normal
Enseignants généralistes	Enseignants mono ou bi-disciplinaires.	Enseignants généralement mono-disciplinaires
<i>Moyens d'enseignement romands</i>	<i>Moyens d'enseignement romands</i>	<i>Polycopiés</i>

Tableau 1 – Différents ordres d'enseignement à Genève

Le projet ResoPro de notre équipe s'appuie sur :

- trois thèses de doctorat qui portent toutes sur des aspects objet de la résolution de problèmes couvrant les 3 ordres d'enseignement (toutefois celle au niveau secondaire II se situe dans l'enseignement du baccalauréat international) ;
- deux projets de recherche portant sur des enseignements par la résolution de problèmes, un au début du primaire et l'autre au début du secondaire II ;
- deux questionnaires destinés aux élèves d'une part et aux enseignants d'autre part de tous les ordres d'enseignement.

Maud Chanudet a présenté sa thèse (Chanudet, 2019) dans un autre chapitre de ces actes. Son travail porte sur l'étude des pratiques évaluatives des enseignants dans le cadre d'un cours proposé au cycle d'orientation centré sur la résolution de problèmes en mathématiques.

Nous ne présentons pas ici les deux thèses en fin de réalisation qui feront l'objet de présentation au séminaire ARDM nous l'espérons dans un futur proche.

Il s'agit d'une part de la thèse de Stéphane Favier, tout à fait centrale dans notre projet, qui vise à documenter le travail des élèves de différents niveaux scolaires dans des situations de résolution de problèmes amenant à des essais/ajustements. L'objectif principal est de déterminer quels sont les ressorts et les dynamiques du travail des élèves, selon trois niveaux : celui de l'organisation globale, celui des heuristiques et enfin celui de la gestion des essais et des ajustements. Ces analyses devraient permettre d'accéder à une meilleure compréhension de ce qui favorise la réussite des élèves et de mieux comprendre les difficultés.

D'autre part, la thèse de Jana Lackova interroge la place de la démarche d'investigation dans le baccalauréat international et le rôle du dispositif d'évaluation spécifique nommé « Exploration en mathématiques ». Elle cherche notamment à documenter les rôles respectifs des enseignants et des élèves à travers l'observation de deux enseignants de l'école internationale de Genève et trois de leurs élèves pendant toute la durée de la préparation du travail.

Nataly Essonnier et Marina De Simone présentent une étude longitudinale portant sur la perception de la résolution de problèmes mathématiques par les élèves. Nous avons aussi mené une étude sur les enseignants dont les analyses sont en cours. L'étude sur les élèves vise à

documenter la perception que les élèves ont des mathématiques et, en particulier, de la résolution de problèmes.

Nous présenterons également des résultats de deux autres études s'intéressant à la résolution de problèmes comme un outil pour enseigner des notions mathématiques. La première, par Sylvia Coutat et Céline Vendeira, porte sur l'enseignement de la géométrie au primaire. Leur travail vise à développer des situations qui permettent un changement de regard progressif des formes vers les figures géométriques, soit de la perception globale des formes vers la prise en compte de leurs propriétés. La deuxième étude, menée par Pierre-François Burgermeister, Michel Coray, Laurence Merminod et Marina De Simone, porte sur l'élaboration d'une ingénierie didactique sur l'enseignement des fonctions au secondaire II intégrant une forte dimension de résolution de problèmes et mettant l'accent sur les jeux entre registres de représentation sémiotiques au sens de Duval.

II. PERCEPTION DES MATHÉMATIQUES ET DE LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Dans le cadre de notre projet, nous avons voulu avoir une idée de la façon dont les élèves et les enseignants des différents ordres d'enseignement percevaient les mathématiques et particulièrement la résolution de problèmes. En effet, il nous semblait important de mettre en rapport les perceptions des enseignants et des élèves et de les comparer entre l'enseignement primaire, secondaire 1 et secondaire 2, et en particulier comment la résolution de problèmes se situaient dans ces différents contextes. Dans cet article nous ne présentons que succinctement les questionnaires passés aux élèves et les résultats obtenus.

1. Cadrage théorique

Pour obtenir des éléments sur la perception des élèves concernant les mathématiques et notamment la résolution de problèmes, nous avons orienté notre travail sur le domaine de l'affect en considérant comme Grootenboer et Marshman (2016, p. 22, citant Hannula, 2006), que l'affect fait partie intégrante de l'apprentissage et de ce qui est appris dans la classe de mathématiques. Nous rappelons que l'intérêt pour l'affect lié à l'enseignement des mathématiques et aux mathématiques a une histoire relativement ancienne, avec semble-t-il un élan particulier dans les années 1970 (Leder & Grootenboer, 2005). À cette époque, cet intérêt portait plutôt sur les inégalités entre les sexes en matière de participation et de performance en mathématiques abordées selon deux dimensions : l'anxiété et les attitudes mathématiques (Grootenboer & Marshman, 2016, p. 3). Notons néanmoins que dès 1957, Pólya mentionnait l'espoir, la détermination et les émotions dans la résolution de problèmes (Hannula, 2020, p. 32). Puis le rôle de l'affect a été développé plus explicitement dans plusieurs ouvrages publiés dans les années 1980 et 1990 concernant les états affectifs qui évoluent rapidement dans la dynamique de la résolution de problèmes (par exemple, Cobb et al., 1989 ; Schoenfeld, 1985). En 1992 McLeod, dans un chapitre fondateur concernant la recherche sur l'affect dans l'enseignement des mathématiques présente un cadre de recherche pour l'étude de la littérature sur ce domaine organisé autour des croyances, des attitudes et des émotions (p. 576). Plus tard, plusieurs auteurs, dont on retrouve les liens dans (Leder & Grootenboer, 2005) s'appuient sur le modèle suivant de conceptions du domaine de l'affect que nous reprenons :

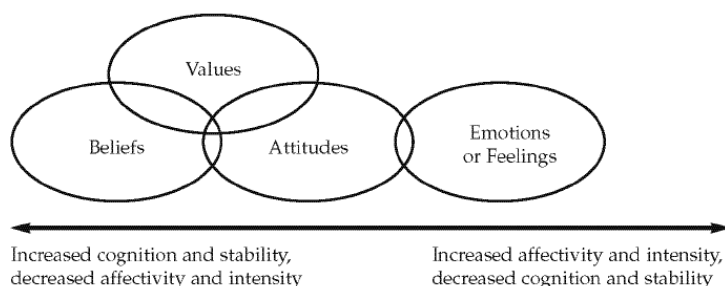


Figure 1 – Modèle de conceptions du domaine de l'affect (Leder & Grootenboer, 2005, p. 2, d'après Grootenboer, 2003)

Ce modèle est constitué des croyances, des valeurs, des attitudes et des émotions ou sentiments qui interagissent mutuellement, les émotions étant distinctes des croyances :

[...] the figure highlights that in the literature, beliefs, values and attitudes are inter-related and defined in somewhat inter-changeable ways, and also shows emotions are generally conceptualized as distinct from beliefs and values, but related to attitudes. Furthermore, the continuums related to affectivity, cognition, intensity and stability are shown at the bottom of the diagram, highlighting, for example, the relative intensity, stability, affectivity and cognition of emotions vis-à-vis beliefs. (Grootenboer & Marshman, 2016, pp. 14-15)

Les croyances, au niveau individuel, sont considérées comme jouant un rôle de filtre, modérant ce que les enfants apprennent en mathématiques et comment ils le font ; elles doivent être déduites et ne sont pas accessibles directement. De nombreux travaux soulignent l'importance des croyances des élèves dans leur apprentissage des mathématiques, voir Grootenboer & Marshman (2016).

Pour notre étude, nous avons retenu la définition de croyances⁷ (*beliefs*) de Op't Eynde et al. (2002) qui sont définies comme des conceptions subjectives (par conséquent, pour décrire les croyances des élèves nous faisons référence à des conceptions).

Students' mathematics-related beliefs are the implicitly or explicitly held subjective conceptions students hold to be true about mathematics education, about themselves as mathematicians, and about the mathematics class context. These beliefs determine in close interaction with each other and with students' prior knowledge their mathematical learning and problem solving in class. (Op't Eynde et al., 2002, p. 27)

En effet, ces derniers ont mis en évidence que les croyances mathématiques des élèves ont un impact sur « their decisions for solving problems, the approach chosen, the techniques and cognitive strategies used, even on a motivational point of view » (Ibid., p. 15). Les travaux de Op't Eynde et al. (2002, 2006) et de De Corte et Verschaffel (2008) organisent les croyances en trois catégories : sur ses propres compétences en mathématiques et en résolution de problèmes, sur le contexte social (par exemple le cours de mathématiques) et sur les mathématiques et la résolution de problèmes en particulier.

Nous considérons que la perception des élèves se reflète à travers leurs croyances et leurs émotions. Néanmoins, nous ne parlerons dans cette partie que des croyances et n'aborderons pas les émotions. Pour notre étude nous avons conduit une enquête avec l'objectif de mettre en évidence les conceptions des élèves en mathématiques et en résolution de problèmes et des profils d'élèves. Nous poursuivons en expliquant comment sur la base de ces apports théoriques nous avons conçu notre questionnaire et notre méthodologie.

⁷ D'après une revue de la littérature sur les croyances des élèves effectuée à partir d'articles dans ERIC, PSYCINFO et dans certains actes des conférences du Groupe international *Psychology of Mathematics Education* - PME

2. Questionnaire, données recueillies et méthodologie d'analyse

Pour accéder aux conceptions et émotions des élèves qui déterminent leur perception des mathématiques et de la résolution de problèmes, nous avons élaboré un questionnaire (voir annexe 1), à partir des trois catégories de conceptions mentionnées précédemment et de quelques émotions. Après quelques informations générales (âge, sexe, nom de l'enseignant ou de l'établissement, langue maternelle, classe, niveau de mathématique estimé), nous poursuivons par cinq rubriques sur diverses conceptions des mathématiques et de la résolution de problèmes, le vécu en classe et des émotions.

- Des opinions très générales sur les mathématiques : « Selon vous, faire des mathématiques c'est ... ».
- Des impressions sur le vécu de l'élève en classe : « Dans notre classe de mathématiques ... ».
- Des références aux émotions (peurs, inquiétudes, bien être, aisance, confiance...) : « Comment je me sens quand je fais des mathématiques ? ».
- Des opinions sur ce que c'est qu'être bon en mathématiques : « Quelqu'un qui est bon en mathématiques est quelqu'un qui ... ».
- Le rapport personnel aux mathématiques en termes de ce qu'on aime, plutôt que ce à quoi on réussit : « En mathématiques, j'aime ... ».

Nous avons déterminé les différents items en nous basant sur nos expériences de formateurs et formatrices. Les trois premières rubriques du questionnaire demandent aux élèves de se positionner grâce à une échelle de Likert à quatre modalités soit :

- en accord (1 : pas du tout d'accord, 2 : plutôt pas d'accord, 3 : plutôt d'accord, 4 : tout à fait d'accord) pour la rubrique « Selon vous, faire des mathématiques c'est ... » ;
- en fréquence (1 : jamais ou presque, 2 : parfois, 3 : souvent, 4 : très souvent) pour les rubriques « Dans notre cours de mathématiques ... » et « Comment je me sens quand je fais des mathématiques ? ».

En attribuant un nombre de 1 à 4 pour chaque modalité, nous calculons la moyenne qui nous donne un ordre d'accord ou de fréquence à l'item.

Pour les deux dernières rubriques du questionnaire : « Quelqu'un qui est bon en maths est quelqu'un qui ... » et « En mathématiques, j'aime... », les élèves choisissent les trois affirmations (non hiérarchisées) avec lesquelles ils sont le plus d'accord.

Nous avons distribué le questionnaire dans plusieurs établissements à Genève du primaire au secondaire II (en nous limitant à la filière gymnasiale du Secondaire II⁸) et nous avons recueilli 1352 réponses d'élèves répartis comme détaillé dans le tableau suivant :

⁸ Rappelons qu'à Genève le primaire dure 8 ans, de la 1P à la 8P (élèves de 4 à 12 ans), le secondaire I (appelé Cycle d'orientation) dure 3 ans (9^e, 10^e et 11^e) et le secondaire II comprend plusieurs filières plus ou moins académiques ou d'apprentissage. La filière la plus académique qui est dénommée gymnasiale selon le terme fédéral suisse correspond à Genève au Secondaire II qui dure 4 ans.

Ordre d'enseignement	Primaire (durée : 8 ans) 1P à 8P	Secondaire I (durée : 3 ans) 9 ^e à 11 ^e du cycle d'orientation	Secondaire II (durée : 4 ans) 1 ^e à 4 ^e du collège
Classes et âges des élèves concernés	7P-8P (10 - 11 ans)	10 ^e CT, LC et LS (13 ans)	1 ^e , 2 ^e , 3 ^e et 4 ^e (16 à 19 ans)
Nombre de réponses	279	455	618
Nombre d'élèves à Genève pour la/les classes concerné(es)	Environ 9'000 élèves	Environ 4'000 élèves	Environ 8'000 élèves

Tableau 2 – Établissements, classes et nombre de réponses

Les analyses statistiques des réponses des élèves ont été réalisées avec le logiciel SPSS. Nous avons utilisé les statistiques descriptives et nous avons créé des clusters en utilisant l'algorithme *TwoStep* propre à SPSS.

Nous avons procédé à la création de clusters en appliquant la démarche suivante :

- (1) Choix d'une rubrique ;
- (2) Choix des items non corrélés de cette rubrique pour lancer la création des clusters (notons que pour repérer les items corrélés statistiquement à l'intérieur d'une rubrique, nous avons fait générer au logiciel la matrice de corrélation de la rubrique concernée) ;
- (3) Création automatique des clusters ;
- (4) Étude du résultat obtenu en fonction des critères de sélections choisis (nos critères de sélection des clusters ont reposé sur la qualité, le nombre, la taille et l'importance des prédicteurs) ;
- (5) Affinement en modifiant : le choix de la rubrique, le nombre de clusters ou les items retenus en fonction de leur importance.

En raison de la nature de nos données, nous avons traité séparément les réponses des élèves du primaire, du secondaire I (CO) et du secondaire II (collège) dans le but de mettre en évidence une évolution ou une stabilité des conceptions et de l'état émotionnel à partir de différences et de similitudes au fil de la scolarité.

3. Résultats et discussions

Analyse des résultats de statistiques descriptives

Nous commençons avec la rubrique « Selon vous faire des mathématiques c'est ... ». Les résultats montrent que les moyennes des items pour cette rubrique ont des valeurs très proches pour les trois ordres d'enseignement. Nous en déduisons qu'en moyenne les élèves ont une conception des mathématiques qui est relativement stable tout au long de la scolarité. De plus, toutes les moyennes des items de cette rubrique sont comprises entre 2,75 et 3,55 par conséquent, en moyenne, les élèves sont plutôt d'accord avec tous les items proposés. Néanmoins, au-delà de l'accord global, il existe entre les ordres d'enseignement des différences subtiles qui marquent une évolution de la perception de ce que sont les mathématiques au fil de la scolarité. Ainsi la conception 'calculatoire' (« faire des calculs ») domine au primaire, alors, que c'est la conception 'procédurale' (« apprendre et appliquer des formules ») avec une place importante faite aux calculs, qui prend le pas au secondaire I, puis la conception 'logique' (« être logique »), déjà très marquée, devient dominante au secondaire II. Cependant, la conception 'logique' est prégnante pour tous les ordres. La conception 'expérimentale' (« faire des essais, tester des hypothèses et tâtonner ») possède une prégnance qui diminue au fil des

ordres d'enseignement, alors qu'elle dépasse la conception 'procédurale' au primaire, cette dernière dominant au secondaire I. Le besoin de justifier une réponse, conception 'justification', est plus prégnante au secondaire I et au secondaire II qu'au primaire. Enfin la nécessité de bien rédiger une réponse, conception 'rédaction', possède la prégnance la plus faible à tous les ordres d'enseignement.

Concernant l'activité dans la classe de mathématiques, les résultats par ordre d'enseignement montrent peu de différences. En effet, selon les déclarations des élèves, les activités les plus fréquentes, quel que soit l'ordre d'enseignement, sont « faire des exercices d'entraînement » et « appliquer les méthodes que l'enseignant [nous] montre ». Il apparaît donc que c'est une perception de travail procédural et d'entraînement répétitif qui domine chez les élèves à tous les ordres d'enseignement, à savoir, une forte prise en compte du contexte d'entraînement en classe. Globalement les élèves déclarent faire peu de problèmes en lien avec la vie quotidienne, et cela diminue au fil des ordres d'enseignement. Néanmoins, en prenant en compte plus finement les moyennes des fréquences, nous voyons qu'au primaire les élèves semblent penser un peu plus que les autres qu'on leur laisse « assez de temps de réfléchir pour trouver les réponses » que les élèves aux secondaires I et II. De même, si au primaire les élèves ne semblent pas avoir plus besoin de se faire aider en mathématiques que dans les autres disciplines, cela change assez nettement au secondaire I et s'aggrave encore au secondaire II. Au primaire et au secondaire I les élèves déclarent résoudre plus souvent des problèmes qu'au secondaire II, alors qu'au secondaire I et au secondaire II, les élèves ont l'impression de faire plus souvent des exercices de calcul que de la résolution de problèmes (les deux items correspondants ont les mêmes moyennes et sont statistiquement corrélés). Il est intéressant de remarquer que le sentiment d'insécurité ou le manque d'autonomie en mathématiques s'accroît alors même que les tâches semblent devenir plus calculatoires et procédurales au fur et à mesure de la scolarité.

L'étude de la rubrique « Quelqu'un qui est bon en maths est quelqu'un qui ... » va nous permettre d'affiner notre compréhension de la perception des mathématiques par les élèves. Nous constatons qu'environ deux tiers des élèves pensent que pour être bon en mathématiques, il faut « penser logiquement », quel que soit l'ordre d'enseignement, complétant la conception 'logique' précédente. C'est ensuite « Savoir appliquer les bonnes méthodes » qui renforce la conception 'procédurale' et « savoir trouver et corriger ses erreurs », conception 'vérification autocorrection', qui reçoivent les plus hauts suffrages entre la moitié et les deux tiers à tous les ordres d'enseignement. « Connaître les formules et la théorie », conception 'théorie', dépasse la moitié au secondaire I, alors qu'il représente un assez faible pourcentage (de l'ordre du tiers) au primaire mais aussi au secondaire II. On peut voir aussi que : « savoir faire des calculs » qui accentue la conception 'calculatoire' est beaucoup moins choisi au secondaire II, qu'aux deux autres ordres, « argumenter pour justifier une réponse » qui complète la conception 'justification' est de plus en plus choisi au fil des ordres d'enseignement, et « trouver rapidement la réponse ... » est moins choisi au secondaire II qu'aux autres ordres. La conception 'rapidité' est alors moins prégnante au secondaire II qu'aux autres ordres d'enseignement.

Enfin, nous terminons avec la rubrique « En mathématiques j'aime ... ». Les choix des élèves dans cette rubrique rendent plus particulièrement compte de l'engagement et la motivation de ces derniers en mathématiques, tout en complétant les informations sur leurs conceptions. « Avoir trouvé la réponse à quelque chose de compliqué » et « raisonner logiquement » qui enrichit la conception 'logique' apparaît dans le trio de tête à tous les ordres d'enseignement avec une adhésion particulièrement élevée au secondaire II. Alors qu'au primaire le troisième choix est « Faire des calculs » au secondaire I comme au secondaire II, c'est « trouver rapidement la solution d'un problème » qui complète le trio de tête. Quant au radar des fréquences, il nous permet de mettre en avant que c'est au primaire que les choix ont l'air les

plus diversifiés. Les calculs et la recherche de réponses qui ne sont pas tout de suite évidentes semblent perdre de leur attrait auprès des élèves au fil des ordres d'enseignement. Par ailleurs être confronté à des difficultés et la recherche de réponses qui ne sont pas tout de suite évidentes reçoivent très peu d'adhésion et, de façon surprenante, encore moins au fur et à mesure de la scolarité. L'attrait pour les calculs n'est pas très populaire et décroît au fur et à mesure de la scolarité. De même, avoir du temps pour se plonger dans un problème n'est choisi que par un quart des élèves du primaire ou du secondaire I et seulement 20% au secondaire II.

En résumé, nous donnons dans le tableau suivant une vue simplifiée des conceptions de la majorité des élèves concernant les différents ordres d'enseignement.

Primaire	Secondaire I	Secondaire II
Conception calculatoire puis logique, expérimentale, procédurale, justification et rédaction et vérification autocorrection .	Conception procédurale puis logique, expérimentale, justification, rédaction, théorie et rapidité .	Conception logique puis procédurale, expérimentale, justification, rédaction et vérification autocorrection .

Tableau 3 – Représentation simplifiée des conceptions aux différents ordres d'enseignement

Nous passons à présent à la création de profils d'élèves pour chaque ordre d'enseignement, afin d'affiner notre étude sur les conceptions des élèves quant aux mathématiques.

Création de clusters et de profils d'élèves pour chaque ordre d'enseignement

Nous avons choisi de ne prendre en compte que les données non statistiquement corrélées d'une rubrique du questionnaire pour créer les clusters. Nous avons effectué notre choix en fonction de la meilleure qualité possible des clusters, de leur nombre, de leur taille et de la plus forte importance des prédicteurs retenus. Ensuite, nous avons réalisé les radars des moyennes par cluster, rubrique et ordres d'enseignement.

Ces radars des moyennes pour les rubriques sur les mathématiques en général et sur l'activité mathématique en classe pour tous les clusters ont une forme très similaire quel que soit l'ordre d'enseignement. Par conséquent, en moyenne, les conceptions liées à ces deux rubriques pour chacun des clusters se ressemblent beaucoup et ressemblent à ce que nous avons vu dans la partie précédente. Les radars des moyennes nous montrent que les différences entre les clusters proviennent des réponses à ce qu'ils pensent être un bon mathématicien et sur ce qu'ils aiment en mathématiques. Pour ces deux rubriques, nous avons relevé les items qui ont été choisis par au moins 50% des élèves dans un cluster, puis nous les avons classés par ordre de choix décroissant pour chacune des deux rubriques. L'ensemble de ces résultats nous permet d'inférer des profils (les caractères gras permettent de mettre en avant une prégnance plus grande et le soulignement marque une prégnance encore plus forte).

Clusters et profils au primaire

Nous avons créé les clusters au primaire à partir de trois items de la rubrique « Quelqu'un qui est bon en maths est quelqu'un qui ... » : « sait faire les calculs », « trouve rapidement la réponse à un problème », et « sait appliquer les bonnes méthodes ». Nous avons obtenu les profils synthétiques suivants :

Profil 1 (26,7%)	Profil 2 (21,9%)	Profil 3 (31,2%)	Profil 4 (20,4%)
Conceptions procédurale (surtout calculs), logique et expérimentale, vérification autocorrection , rédaction.	Conceptions calculatoire , puis logique, expérimentale, rapidité , justification, procédurale, rédaction.	Conceptions logique <u>expérimentale, procédurale</u> , vérification autocorrection, justification, rédaction.	Conceptions logique , <u>expérimentale</u> , procédurale, vérification autocorrection , théorie , justification , rédaction.

Tableau 4 – Résumé des profils d'élèves au primaire

Le profil 1 est associé à des aspects procéduraux et à la logique, alors que pour le profil 2 est associé à une idée de rapidité. Les profils 3 et 4 sont marqués par la conception ‘logique’, mais aussi ‘expérimentale’. Le profil 3 se caractérise par la conception procédurale plus prégnante. Pour le profil 4 ce sont surtout les conceptions liées à la vérification et l’autocorrection avec la justification qui dominent. Globalement, les profils 3 et 4 paraissent être les deux profils les plus orientés vers la résolution de problèmes en mathématiques alors que le profil 2 en paraît le plus éloigné.

Clusters et profils au secondaire I

Nous avons créé les clusters au secondaire I à partir de quatre items de la rubrique « Quelqu’un qui est bon en maths est quelqu’un qui ... » : « sait faire les calculs », « trouve rapidement la réponse à un problème », « sait trouver ses erreurs et les corriger », et « trouve des façons originales pour résoudre un problème ». Nous avons cinq profils présentés de façon synthétique dans le tableau, ci-après.

Profil 1 (24,8%)	Profil 2 (22,9%)	Profil 3 (13,6%)	Profil 4 (21,1%)	Profil 5 (17,6%)
Conceptions procédurale, logique, justification expérimentale, rédaction, rapidité , et théorie.	Conceptions procédurale, logique , justification, expérimentale, rédaction, vérification autocorrection et théorie.	Conceptions procédurale, logique , justification, rédaction, expérimentale et originalité.	Conceptions procédurale (prégnance des calculs), logique , justification, rédaction, expérimentale, théorie et vérification autocorrection.	Conceptions logique , procédurale, justification, rédaction, expérimentale, théorie et rapidité.

Tableau 5 – Résumé des profils d’élèves au secondaire I

Nous remarquons que la conception ‘procédurale’ est la plus prégnante pour les profils 1 à 4 alors que c’est la conception ‘logique’ pour le 5. La conception ‘expérimentale’ apparaît comme beaucoup moins prégnante pour tous les profils. Nous constatons que la conception ‘calculatoire’ seule disparaît et vient enrichir la conception procédurale. Néanmoins, nous observons que le profil 4 dans sa conception ‘procédurale’ conserve encore une forte prégnance pour les calculs et que les élèves du profil 2 sont les plus nombreux à déclarer aimer faire des calculs. Le profil 3 possède une conception ‘originalité’ qui n’existe pas au primaire. Ce profil 3 est aussi marqué par une plus grande prégnance de la conception logique. C’est le seul qui ne possède pas la conception ‘théorie’. Les profils 2 et 5 présentent aussi une forte prégnance de la conception ‘logique’. Aucun de ces profils des élèves du secondaire I ne se distingue par une forte composante expérimentale et ne semble plus favorable à la résolution de problème. Finalement, il semble qu’entre la fin du primaire et le secondaire I, les élèves perçoivent nettement plus les mathématiques comme procédurale et logique et beaucoup moins expérimentales.

Clusters et profils au secondaire II

Les clusters au secondaire II ont été réalisés à partir de quatre items de la rubrique « Quelqu’un qui est bon en maths est quelqu’un qui ... » : « sait faire les calculs », « trouve rapidement la réponse à un problème », « trouve des façons originales de résoudre un problème », et « sait argumenter pour justifier une réponse ». Et, nous avons obtenu cinq profils rassemblés de façon synthétique dans le tableau, suivant.

Profil 1 (34,8%)	Profil 2 (12,1%)	Profil 3 (13,1%)	Profil 4 (17,3%)	Profil 5 (22,7%)
Conceptions logique , procédurale , justification, expérimentale, rédaction, vérification autocorrection, rapidité et théorie.	Conceptions, logique , procédurale, justification, expérimentale, rédaction et originalité.	Conceptions procédurale, logique , justification et expérimentale, rédaction et rapidité .	Conceptions procédurale (avec les calculs), logique , justification, rédaction, expérimentale, rapidité et théorie.	Conceptions logique , procédurale , justification , rédaction, expérimentale et vérification autocorrection.

Tableau 6 – Résumé des profils d'élèves au secondaire II

Nous remarquons que la conception 'logique' est la plus prégnante pour les clusters 1, 2 et 5, et c'est plutôt la conception 'procédurale' pour les clusters 3 et 4. Comme au secondaire I, la conception 'justification' est plus prégnante que la conception 'expérimentale'. Nous constatons que le profil 2 est le seul profil qui possède la conception 'originalité'. Ainsi, nous retrouvons comme au secondaire I un profil avec la conception 'originalité', mais à la différence du secondaire I où la conception 'procédurale' dominait, au secondaire II c'est la conception 'logique' qui prend le dessus. Comme au secondaire I la conception expérimentale a disparu des tendances dominantes de tous les profils. Notons que les profils 1 et 4 mettent davantage en avant l'application (théorie formules, méthodes) et également les calculs pour le profil 1, c'est pourquoi nous considérons qu'ils sont plus orientés entraînement (*drill*). Par ailleurs, le profil 5 qui possède la plus forte prégnance des conceptions 'justification' et 'vérification autocorrection' semble donc le plus orienté vers la résolution de problèmes.

4. Conclusion

Tout d'abord, nous avons mis en avant des conceptions légèrement différentes entre les différents ordres d'enseignement. Nous avons constaté qu'en moyenne les conceptions des mathématiques en général et de l'activité dans la classe de mathématiques sont relativement uniformes à l'intérieur de chaque ordre d'enseignement et que la notion d'entraînement dans la classe de mathématique est très prégnante dans la conception de la majorité des élèves. C'est donc surtout à partir de ce que les élèves pensent être un bon mathématicien et de ce qu'ils aiment en mathématiques que nous avons pu élaborer des profils variés à l'intérieur de chaque ordre. Nous ne reviendrons pas ici sur les détails de ces divers profils, mais il est important de noter que seuls le profil 4 au primaire et un peu moins le profil 5 au secondaire II semblent se caractériser par une certaine appétence pour la résolution de problèmes. Cela semble montrer que la scolarité actuelle à Genève ne permet pas à une grande majorité d'élèves de percevoir la dimension résolution de problèmes dans leur approche des mathématiques. La logique semble bien plus être perçue comme le marqueur principal des mathématiques, talonnée par les aspects calculatoires et procéduraux. Il est enfin significatif de noter que si la résolution de problèmes apparaît encore au primaire, elle semble nettement en retrait au secondaire I pour revenir timidement au secondaire II.

A l'échelle du Canton de Genève, le nombre de réponses que nous avons obtenu n'est pas négligeable. Toutefois nous ne pouvons en aucun cas prétendre avoir un échantillon représentatif de la population scolaire générale. De plus, nous savons tous les biais que comportent des questionnaires d'opinion et il serait certainement important de pouvoir les compléter par des entretiens. Néanmoins, nous pensons avoir pu dégager des tendances intéressantes qui dépassent certainement le seul cadre genevois.

III. ENSEIGNER LA RECONNAISSANCE DE FORMES GEOMETRIQUES PAR LA RESOLUTION DE PROBLEMES AU DEBUT DU PRIMAIRE

1. Introduction et contexte de la recherche

La présente recherche s'intéresse à une séquence didactique construite autour de la reconnaissance de formes pour le début de l'école primaire. Cette séquence utilise une collection de formes manipulables. Les pièces qui composent la collection sont des gabarits qui s'encastrent dans des pochoirs (Vendeira & Coutat, 2017). Les observations présentées ont été réalisées avec des élèves de 4-6 ans dans une école genevoise. Dans ces premiers degrés, en général ce sont les formes simples, c'est-à-dire le carré, le rectangle, le triangle et le cercle qui sont principalement travaillées. L'étude de Clements et al. (1999) complétée par la suite par l'étude de Pinet et Gentaz (2007) montrent que les élèves de 4 à 6 ans reconnaissent facilement le cercle et le carré, ce qui n'est pas le cas du rectangle et du triangle. En effet, les orientations ainsi que les dimensions des côtés de ces formes influencent leur reconnaissance. Par exemple, un triangle posé sur sa pointe ou n'étant pas isocèle, ni équilatéral n'est souvent pas considéré comme un triangle. Ces triangles diffèrent trop du triangle « classique » isocèle, voir équilatéral, posé sur sa base. Ce dernier est le triangle de référence, représentant de l'ensemble des triangles. Cependant un quadrilatère comme un fer-de-lance, pointé vers le haut, sera lui considéré comme un triangle car proche perceptivement à cause de son orientation. C'est-à-dire que les élèves considèrent comme triangle les formes qui se rapprochent perceptivement du triangle de référence. Ainsi pour la reconnaissance de formes, les élèves ne s'appuient pas sur les sous-objets encore moins leurs relations mais sur une ressemblance à des formes représentatives de chaque classe, des formes prototypiques. Selon Duval (2005) ce traitement des figures ne considère que des caractéristiques de contours. Les élèves utilisent le contour pour associer la forme à une forme connue. Cette association par ressemblance est ce que Duval la vision iconique (Duval, 2005). Cependant cette vision qui n'utilise la reconnaissance que par le contour des formes fait obstacle à la prise en compte des propriétés géométriques. Avant d'atteindre une vision qui prend en compte les propriétés des formes dans des activités de constructions instrumentées par exemple, nous considérons la vision par les caractéristiques (Vendeira & Coutat, 2017) qui prend en compte les sous-objets (les sommets ou les côtés) et leurs relations tout en restant dans un espace sensible avec des formes manipulables.

2. Cadrage théorique

Afin d'enrichir la vision iconique d'une vision par les caractéristiques, nous avons conçu une séquence d'enseignement qui s'appuie sur la résolution de problème et des choix didactiques spécifiques. Un jeu sur les variables didactiques de la collection de pièces manipulables permet la construction d'un milieu qui est au cœur des différents problèmes (Brousseau, 1998). Une première catégorie de problèmes consiste en l'appariement de pochoirs avec leurs gabarits, l'encastrement permettant la validation. Une autre catégorie de problèmes consiste en des classements qui doivent être argumentés, cela permet la formulation voire la validation d'une vision spécifique à la collection. Les variables didactiques utilisées sont les formes de la collection, l'accès aux pièces de la collection, les modalités de travail (individuel ou en groupe).

Dans le cas où les formes sont perceptivement distinctes, les élèves peuvent utiliser une vision iconique (« la forme ressemble à un poisson » ou « la forme ressemble à un dent ») pour distinguer la forme parmi les autres. Les formes peuvent être proches perceptivement afin de

rendre la vision iconique peu efficace et inciter les élèves à utiliser une vision par les caractéristiques (pour distinguer deux formes qui ressemblent à un poisson par exemple).

Les gabarits et pochoirs peuvent être sur la même table ce qui permet un contrôle continu dans les tâches d'appariement. Lorsque gabarits et pochoirs sont sur des tables différentes, les élèves doivent mémoriser un ensemble d'informations qui caractérisent la forme cherchée. Selon la collection, la vision iconique ou la vision par les caractéristiques sera plus efficace.

Enfin lorsque les élèves travaillent seuls, leurs connaissances sont principalement présentes à travers l'action. Dans des tâches collectives ils doivent formuler ces connaissances. Plusieurs tâches collectives sont envisageables. Dans les tâches d'appariement, les élèves peuvent communiquer à deux sous la forme d'un émetteur qui possède un pochoir spécifique et doit donner des informations orales pour qu'un élève récepteur choisissent le gabarit correspondant parmi plusieurs. Dans les tâches de classement, les élèves formulent leurs critères de classement qui peut utiliser une vision iconique ou une vision par les caractéristiques.

La séquence didactique vise un double objectif. D'une part les élèves doivent développer une vision par les caractéristiques, qui complète la vision iconique. D'autre part ils doivent pouvoir utiliser la vision la plus efficace selon le problème posé, c'est-à-dire une flexibilité du regard (« je cherche une forme de poisson » ou « je cherche une forme avec des arrondis sans pointe » ou « je cherche un poisson avec des arrondis »).

Notre recherche s'intéresse tout particulièrement à la place de la résolution de problème dans le développement de cette flexibilité du regard en géométrie avec la question de recherche : comment la résolution de problème permet-elle le développement du regard en géométrie pour la reconnaissance de formes au cycle 1 (élèves de 4 à 7 ans) ?

Pour répondre à cette question nous avons analysé les interactions des élèves avec le milieu pour les tâches individuelles et les interactions verbales entre élèves pour des tâches en groupes ou collectives. Ces deux directions d'analyses sont présentées successivement illustrés d'exemples représentatifs, un pour les interactions avec le milieu et un pour les interactions verbales.

3. Interactions avec le milieu

Pour exemplifier les interactions avec le milieu, nous utilisons l'encastrement libre, activité qui se situe au début de la séquence et peut se répéter à divers moments pour « ranger le matériel ». Dans cette activité l'élève doit associer un gabarit et à son pochoir, il a toutes les pièces à sa disposition et bénéficie d'autant d'essais que souhaités. La validation des associations se fait par encastrement du gabarit dans le pochoir. L'exemple présenté sur l'image suivante illustre les interactions avec le milieu de Charlie. Dans cet exemple les formes mises à disposition sont perceptivement proches pour inciter une vision par les caractéristiques.

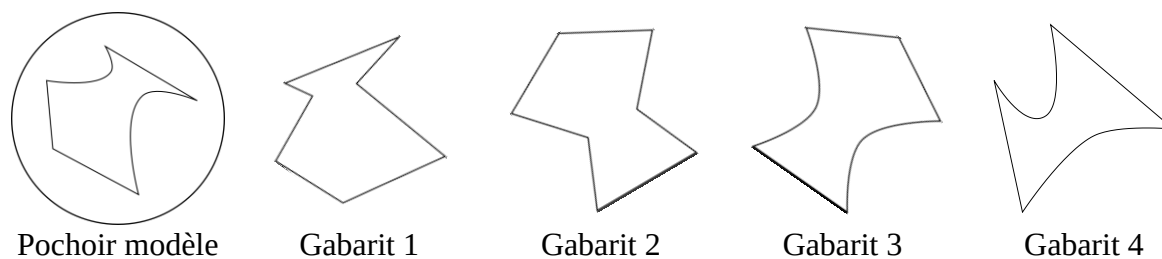


Figure 2 – Exemple de plusieurs tentatives chez Charlie dans un encastrement libre

Pour son premier essai, Charlie utilise un gabarit dont l'aspect est globalement proche de la forme de son pochoir. On peut supposer qu'il s'appuie sur une vision iconique. Lors de sa tentative d'encastrement, le milieu invalide le choix de Charlie, le gabarit coince au niveau des

deux bords courbes. Cette invalidation surprend et questionne l'élève qui rapidement repère la présence de bords courbes. L'élève touche un bord courbe du pochoir et accompagne son geste de « Ah oui parce qu'il y a un arrondi ! ». L'invalidation par encastrement lui permet de prendre en compte une caractéristique qui ne l'avait pas été lors de la première recherche : la présence de bords courbes. Le deuxième gabarit choisi est rapidement écarté sans tentative d'encastrement. Le troisième gabarit contient cette fois-ci deux bords courbes. On peut supposer que la caractéristique identifiée précédemment est devenu un critère de recherche, c'est-à-dire que Charlie a mobilisé cette fois-ci un regard par cette caractéristique. L'encastrement ne valide toujours pas le gabarit. Pour finir, le quatrième gabarit possède des bords courbes non symétriques, comme pour le pochoir modèle. Là encore on peut supposer que l'élève a utilisé un regard par la caractéristique « bords courbes opposés non symétriques⁹ ». Après cette dernière invalidation, Charlie change de pochoir et recommence une nouvelle recherche.

On voit dans l'évolution des gabarits choisis et testés que le critère de ressemblance globale avec le pochoir disparaît progressivement au profit de la prise en compte d'une caractéristique : des bords courbes opposés non symétriques. On peut supposer que Charlie a délaissé une vision iconique pour un regard par les caractéristiques des bords courbes opposés et non symétriques. Les interactions avec le milieu favorisent la prise en compte des caractéristiques dans la recherche du gabarit et semblent permettre à l'élève de faire évoluer sa vision iconique vers un regard par les caractéristiques. Cependant en se focalisant sur ces caractéristiques mise à jour par le milieu, l'élève semble délaisser les autres caractéristiques. En effet, ce regard reste insuffisant pour trouver le bon gabarit car incomplet.

Il est aussi important de noter que lors des tentatives d'encastrement, Charlie prend le temps de comprendre pourquoi ces gabarits ne s'encastrent pas, ce qui lui permet d'identifier puis d'affiner une caractéristique. Il y a donc une interprétation pertinente par l'élève des rétroactions du milieu liées à l'invalidation par encastrement. L'identification des caractéristiques à prendre en compte dans la recherche passe par l'interprétation de l'invalidation par encastrement. Bien que dans cet exemple la recherche n'aboutit pas, une évolution dans les procédures de cet élève est visible. Après avoir réalisé différentes tâches en lien avec la collection de forme, le même élève reprend cette activité avec la même collection de forme plus tard dans la séquence et parvient à trouver le bon gabarit dès le premier essai pour chacune des 6 formes de la collection.

On peut donc voir qu'il a réussi au cours de la séquence à s'approprier une vision par les caractéristiques. C'est bien la multiplication des interactions (validations et invalidations) avec le milieu qui ont permis à l'élève de maîtriser une telle procédure.

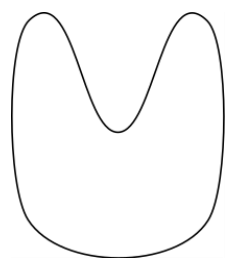
Il est cependant difficile de savoir si cet élève utilise uniquement une vision par les caractéristiques ou s'il utilise aussi une vision iconique, c'est-à-dire qu'il a développé une mobilité du regard. Afin de compléter notre analyse, nous avons étudié les interactions entre élèves.

4. Interactions verbales

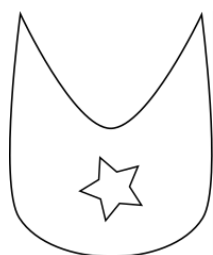
Pour ce deuxième exemple, nous utilisons une autre activité. Ici les élèves travaillent à deux, un élève émetteur possède deux pochoirs dont l'un marqué d'une étoile. Il doit donner des informations à un élève récepteur pour que ce dernier trouve quel gabarit correspond au pochoir indiqué par l'étoile. Dans cette tâche de communication les élèves doivent identifier et

⁹ Cette formulation n'est bien sûr pas celle que l'élève va utiliser, il peut très bien se construire une image mentale plutôt que des représentations discursives.

communiquer des informations discriminantes pour distinguer une forme d'une autre. Ces informations peuvent s'appuyer sur une vision par les caractéristiques ou une vision iconique ou un mélange des deux visions. L'image suivante présente un échange entre deux élèves.



Forme 1



Forme 2

Émetteur : la forme à 2 côtés

Récepteur : [compte devant émetteur] un deux trois [sur forme 1] un deux trois [sur forme 2]

Émetteur : ah ben non en fait 3

Récepteur : ben c'est tous les deux c'est trois

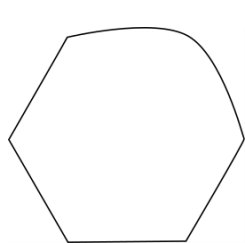
Émetteur : et c'est pointu

Récepteur : lui [forme 2]

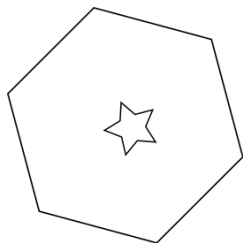
Émetteur : bravo

Dans cet exemple, l'élève émetteur utilise la caractéristique du nombre de côtés qui n'est pas concluante chez l'élève récepteur. Cela amène l'élève émetteur à reprendre son message sur une autre caractéristique, la présence de sommets. Le premier indice donné par l'élève indique une vision par les caractéristiques. Au cours de l'échange l'élève émetteur adapte ses indices à l'aide des réactions de l'émetteur.

L'image suivante présente un deuxième échange à propos d'un nouveau duo de formes.



Forme 1



Forme 2 (*)

Émetteur : alors il y a des pics (Forme 2)

Récepteur : c'est quoi les différences

Émetteur : l'autre est un peu arc-en-ciel, arrondie on va dire

Dans ces échanges l'élève émetteur utilise la caractéristique des sommets « il a des pics » puis complète à la demande de l'élève récepteur par une caractéristique des bords qui utilise aussi une vision iconique dans sa référence à l'arc-en-ciel. Pour cet exemple on voit une mobilité du regard qui utilise conjointement une vision par les caractéristiques et une vision iconique.

Ces échanges illustrent que les élèves émetteurs mobilisent une vision par les caractéristiques (nombre de côtés) même si cette caractéristique n'est pas pertinente au départ. Finalement ce sont les interactions entre les élèves qui permettent d'enrichir la prise en compte de certaines caractéristiques voir de mettre en œuvre une mobilité du regard.

5. Conclusion

Cette recherche s'intéresse à la place de la résolution de problème pour les premiers apprentissages sur les formes géométriques. La séquence conçue et observée utilise fortement la résolution de problème. Les objectifs sont d'une part l'appropriation d'un regard par les caractéristiques et d'autre par le développement d'une flexibilité du regard entre vision iconique et regard par les caractéristiques. Pour atteindre ces objectifs d'apprentissage, nous avons utilisé la résolution de problème dans l'élaboration d'un milieu qui s'adapte au fur et à mesure du déroulement de la séquence. Ainsi les connaissances des élèves sont constamment sollicitées et doivent s'adapter aux nouvelles contraintes de chaque tâche. Les collections proposées aux élèves peuvent contenir des formes perceptivement proches pour rendre inefficace la vision iconique et ainsi favoriser la mise en œuvre d'un regard par les caractéristiques. Pour répondre

à notre question de recherche sur la place de la résolution de problème dans le développement du regard en géométrie pour la reconnaissance de formes au cycle 1 nous avons analysé les interactions des élèves avec le milieu ou avec les autres élèves. Dans le premier exemple, nous voyons que même si le milieu est peu antagoniste, la validation par encastrement constitue une rétroaction forte que l'élève peut utiliser pour s'orienter vers un regard par les caractéristiques. Dans le deuxième exemple, les élèves utilisent en majorité un regard sur une caractéristique, peu mobilisent une vision iconique qui serait pourtant parfois plus économique. Cependant leur regard s'adapte tout le long de l'échange selon les réactions de l'élève récepteur.

Ainsi la résolution de problème joue un rôle important dans le développement du regard en géométrie pour la reconnaissance de formes au cycle 1 par les différentes interactions qu'elle permet. En effet, les exemples montrent que les interactions soit avec le milieu soit entre les élèves, permettent effectivement aux élèves, d'une part, de prendre en compte les caractéristiques des formes et d'autre part de développer la flexibilité dans la nature de leur regard. Ce développement est obtenu par l'enchaînement des différentes séances et de leurs spécificités qui évoluent au cours de la séquence. Les spécificités essentielles semblent être les interactions avec le milieu et avec les autres acteurs de chaque situation qui permettent de questionner et tester en continue les connaissances des élèves.

IV. ENSEIGNER LES FONCTIONS PAR LA RESOLUTION DE PROBLEMES AU SECONDAIRE II

1. Introduction

Dans cette étude, nous analysons le travail des élèves lors d'une situation de résolution de problèmes tirée de notre séquence sur l'enseignement des fonctions en 1^e année du Collège de Genève (secondaire II – élèves de 15-16 ans). Plus particulièrement nous nous focalisons sur la première partie de la situation « Les vases » (Annexe 2), intervenant dans la partie initiale de la séquence, laquelle vise, à travers une série de problèmes basés sur des situations mathématiques en lien avec le quotidien des élèves, à renforcer la perception de la co-dépendance de deux grandeurs variables. Pour cette partie initiale, nous avons choisi de développer avec les élèves les représentations graphiques des fonctions en jeu sans recourir à leurs représentations algébriques. Nous avons opéré ce choix sur la base du constat que nous partageons avec d'autres chercheurs (Vanderbrouck, 2011, Passaro, 2016) et selon lequel le registre algébrique se trouve surdéveloppé dans le secondaire II, ce qui a pour effet de limiter l'accessibilité des différentes perspectives (ponctuelle, locale, globale) (Rogalski, 2008) sur les fonctions étudiées. Ainsi la perspective globale, qui est plus directement liée au registre graphique (pensons en particulier à l'étude du caractère croissant ou décroissant d'une fonction donnée), se trouve moins accessible que la perspective ponctuelle si on reste cantonné au registre algébrique.

La situation les vases est une activité de résolution de problèmes par groupes de quatre élèves visant à créer des interactions épistémologiquement riches, c'est-à-dire qui contribuent à étoffer la conceptualisation de la notion de fonction, encore embryonnaire à ce stade de l'apprentissage.

Notre analyse s'appuiera donc sur les deux outils théoriques évoqués ci-dessus et que nous développons dans la section 2 : les registres de représentation sémiotique (Duval, 1993) et les perspectives ponctuelles, locales et globales (Rogalski, 2008).

2. Cadrage théorique

Nous présentons ici les deux outils théoriques que nous avons mobilisés pour effectuer des analyses *a priori* et *a posteriori* de nos situations de résolution de problèmes : les registres de représentation sémiotiques (Duval, 1993, 2006) et les perspectives (Rogalski, 2008).

Les registres de représentation sémiotiques

La notion de fonction, comme tout objet mathématique, est un concept abstrait, qui n'est « pas directement accessible[s] dans la perception, ou dans une expérience intuitive immédiate, comme le sont les objets communément dits “réels” ou “physiques” ! Il faut donc pouvoir en donner des représentants. » (Duval, 1993, p. 38).

Ses représentants les plus courants dans l'enseignement des mathématiques sont l'expression analytique, la courbe représentative et le tableau des valeurs. Chacun de ces représentants se matérialise dans un registre de représentation sémiotique propre : les registres de l'écriture algébrique, de la représentation graphique et de l'écriture numérique.

Or, une conceptualisation consistante de la notion de fonction requiert de maîtriser plusieurs de ces représentations. En effet, le « recours à plusieurs registres semble (...) une condition nécessaire pour que les objets mathématiques ne soient pas confondus avec leurs représentations » (Ibid., p. 40). De plus, il ne s'agit pas seulement de maîtriser la notion de manière cloisonnée dans plusieurs registres de représentation distincts, mais aussi de pouvoir convertir dans l'un les informations récoltées dans l'autre, et vice-versa, c'est-à-dire d'être capable de coordonner ces différents registres de représentation. Duval pose le postulat suivant : « La compréhension (intégrative) d'un contenu conceptuel repose sur la coordination d'au moins deux registres de représentation, et cette coordination se manifeste par la rapidité et la spontanéité de l'activité cognitive de conversion » (Ibid., 1993, p. 51).

C'est bien ce que nous visons dans la situation « Les vases », où l'élève doit pouvoir coordonner deux registres de représentation : le registre des dessins géométriques (formes des vases) et le registre des représentations graphiques (les graphiques de remplissage associés à ces vases). Or, il a besoin pour cela de se créer une représentation mentale du processus de remplissage de chaque vase en tenant compte du fait que le débit ne varie pas. Par exemple, il doit pouvoir se représenter que le niveau de remplissage du vase cylindrique s'élève à vitesse constante. Duval rajoute que « les représentations **mentales** recouvrent l'ensemble des images et, plus globalement, des conceptions qu'un individu peut avoir sur un objet, sur une situation, et sur ce qui leur est associé » (Ibid., 1993, p. 38-39). Dans notre cas, nous dirons que l'élève doit pouvoir s'appuyer sur une *représentation mentale dynamique* de la situation de remplissage pour pouvoir coordonner adéquatement les deux registres de représentation présents dans l'énoncé de la situation.

Notre premier outil d'analyse consiste donc à coupler les conversions entre registres de représentation sémiotiques avec les représentations mentales dynamiques de la situation.

Cependant, il nous est apparu qu'une analyse se basant uniquement sur ce premier outil ne suffisait pas à décrire l'élaboration des conceptualisations en cours durant les situations analysées. En effet, différents élèves peuvent mobiliser un même registre de représentation, par exemple graphique, en y lisant des éléments différents qui dépendent du regard porté sur cette représentation. Pour combler cette lacune, nous avons utilisé un deuxième outil d'analyse tiré de Rogalski (2008), visant à distinguer les différents points de vue portés sur une même représentation (sémiotique ou mentale).

Les perspectives ponctuelle, locale et globale

A la suite de Rogalski (2008), nous estimons qu'« un enjeu important de l'enseignement des fonctions est certainement de développer chez les étudiants une prise de conscience de l'existence de points de vue spécifiques sur les fonctions, associés à ces trois perspectives [globale, locale, ponctuelle], ainsi qu'une mise en fonctionnement de toutes ces perspectives d'une fonction » (Vandebrouck, 2011, p. 5).

Plus précisément, chacune de ces perspectives correspond au regard porté sur les différentes propriétés (ponctuelle, locale, globale) de la fonction considérée (Rogalski, 2008, p. 66) :

- **Propriété ponctuelle** : c'est une propriété d'une fonction f relativement à un point x_0 qui ne dépend que de la valeur de f au point x_0 . Par exemple, énoncer que $f(x_0) = 3$ est une propriété ponctuelle.

- **Propriété locale** : c'est une propriété d'une fonction f en un point x_0 qui ne dépend que des valeurs de f sur un voisinage de x_0 , aussi petit soit-il. Par exemple, la propriété « f est croissante en x_0 » est une propriété locale.

- **Propriété globale** : c'est une propriété d'une fonction f sur un intervalle donné I faisant intervenir toutes les valeurs de f sur l'intervalle. Par exemple, la propriété « $f(x) > 0$ pour tout x de I » est une propriété globale de même que la propriété « f admet exactement trois minima locaux sur I ».

La perspective globale est « particulièrement liée à la représentation graphique de la fonction qui permet, en effet, de déterminer rapidement comment se comporte une fonction » (Passaro, 2016). Or, l'enseignement des fonctions au secondaire II tend le plus souvent à privilégier le travail dans le registre algébrique rendant ainsi la perspective globale plus difficilement accessible. C'est ce que remarque aussi Vandebrouck (2011) lorsqu'il écrit :

le manque de disponibilité de cette perspective globale, la non articulation entre les perspectives ponctuelles et globales, associée à la seule disponibilité du registre algébrique au détriment des registres graphique ou symbolique, constitue sans doute l'un des obstacles majeurs à l'entrée des lycéens et des étudiants dans les exercices d'analyse, où les mises en perspective sont souvent pertinentes. (p. 178)

Nous postulons qu'une conceptualisation consistante de la notion de fonction passe nécessairement par la capacité à mobiliser différents registres de représentation sémiotique et à les coordonner entre eux, ainsi que, au sein de chaque registre de représentation, par l'accès aux différentes perspectives sur les fonctions étudiées.

3. Méthodologie de recherche

Nous nous focalisons sur le travail d'un groupe d'élèves d'une classe de 1^e année (« Math niveau normal ») du collège de Genève (élèves de 15-16 ans).

Plus particulièrement, nous présentons le travail du trio constitué par Luca, Mélanie et Sara. La phase de travail de groupe analysée fait suite à une phase de travail individuel des élèves et précède la phase de la mise en commun.

Nous avons filmé le travail du trio dans son intégralité, et nous avons transcrit leurs échanges, que nous avons analysé en termes de coordination de différents registres de représentation sémiotique et de mobilisation de différents points de vue sur chacune de ces représentations. Nous avons cherché ainsi à mettre en lumière les moments caractérisés par ces éléments afin de documenter l'évolution des élèves dans leur conceptualisation du phénomène en jeu : la variation de la hauteur de remplissage atteinte en fonction du temps écoulé, telle qu'elle se

déduit des caractéristiques géométriques du vase et telle qu'elle se représente graphiquement. Dans la suite nous nous concentrons plus particulièrement sur l'évolution de Mélanie dans sa conceptualisation grâce aux interactions avec ses camarades.

4. Analyse *a priori* de la situation « Les vases »

Nous présentons ici quelques éléments d'analyse *a priori* relativement à la première partie de la situation « Les vases » car l'analyse *a posteriori* du travail des élèves portera sur cette partie du problème.

Nous mettons en correspondance ci-dessous, pour chacun des points de vue (global, local, ponctuel) portés sur la vitesse d'élévation du niveau d'eau dans certains vases (nous avons choisi de ne présenter ici que les éléments les plus saillants), les aspects qui relèvent du registre graphique avec ceux qui relèvent du registre des dessins géométriques, ceci en explicitant l'expérience mentale dynamique (EMD) qui permet de faire le lien entre les deux. Noter que les éléments d'une ligne du tableau peuvent se lire aussi bien de droite à gauche (conversion du registre des dessins géométriques au registre graphique) que de gauche à droite (conversion du registre graphique au registre des dessins géométriques).

LES VASES 1 ^{IERE} PARTIE	GRAPHIQUE	EXPÉRIENCE MENTALE DYNAMIQUE (EMD)	DESSIN GEOMETRIQUE
GLOBAL	La troisième représentation graphique est linéaire	La vitesse d'élévation du niveau d'eau est constante	Les sections horizontales du vase cylindrique sont toutes identiques
PONCTUEL	La courbe passe par le point milieu (1,5 ; 45)	Les deux hémisphères ayant même volume leurs durées de remplissage respectives sont identiques	Le vase sphérique est symétrique par rapport à son plan équatorial (les deux hémisphères sont identiques)
LOCAL	1) Sur le graphique d, la croissance est d'abord rapide et puis de plus en plus lente 2) Sur le graphique a, la croissance est d'abord rapide, puis de plus de plus lente, et puis elle devient de plus en plus rapide	1) La vitesse d'élévation du niveau d'eau est d'abord rapide et puis de plus en plus lente 2) La vitesse d'élévation est d'abord rapide puis de plus de plus lente et puis à nouveau de plus en plus rapide	1) Les sections horizontales du vase conique grandissent du bas vers le haut 2) Les sections horizontales du vase sphérique sont d'abord étroites, puis large, puis à nouveau étroites lorsque l'on se déplace du point le plus bas au point le plus haut

Tableau 7 – Information croisée entre points de vue et registres

5. Analyse *a posteriori* de la situation « Les vases »

Nous présentons ci-dessous quelques extraits des échanges entre trois élèves (Luca, Mélanie et Sara) au cours de leur résolution de la situation « Les vases ». Dans ce qui suit, nous nous focalisons plus particulièrement sur les interactions entre Luca et Mélanie qui constituent l'essentiel des échanges et qui ont permis à Mélanie d'évoluer de manière consistante dans sa conceptualisation du concept de fonction.

Les tableaux montrent les échanges entre les élèves du groupe. À la suite de chaque tableau, nous donnons des éléments d'analyse le concernant. Dans les transcriptions, nous avons utilisé différentes couleurs pour distinguer les différents registres convoqués par les élèves et pour souligner le recours à l'expérience mentale dynamique du processus de remplissage des vases.

En violet : convocation de la part des élèves du registre des dessins géométriques.

En rouge : recours à l'expérience mentale dynamique.

En vert : convocation du registre graphique.

Les élèves ont d'abord travaillé individuellement sur la situation « Les vases » (cf. Annexe 1). Voici les réponses individuelles données par les élèves du groupe analysé :

Mélanie a répondu : 1-b, 2-c, 3-a

Luca a répondu : 1-a, 2-c, 3-b

Sara a répondu : 1-b, 2-c, 3-d

Après cette phase de travail individuel, le travail de groupe commence par une confrontation des productions individuelles entre les trois élèves.

1	Luca (L) à Mélanie (M) : « mais pourquoi t'as mis ça toi ? » (en pointant le graphique a et à propos du vase 3)
2	M : « bah lui (en pointant le vase 1) il se remplit genre lentement parce qu'il a beaucoup de (...) surface enfin beaucoup de volume par rapport à lui (en pointant le vase 3) »

Mélanie se situe à la fois dans le registre dessin et dans l'EMD. Elle semble considérer les dessins des vases 1 et 3 d'un point de vue très global, en considérant que le volume du premier vase est plus grand que celui du deuxième, sans distinguer les changements locaux de leurs formes respectives.

4	[...] M : « je sais mais là (pointe le vase 1) ça va se remplir plus lentement que si le truc il était comme ça (resserre les deux mains), du coup, là (en pointant le graphique b) ça va prendre plus de temps tandis que là (en pointant la base du graphique a) ça prend genre très peu de temps. Mais ce que je veux dire c'est que là (en pointant le vase 3) ça va se remplir plus vite au début mais à la fin ça va se (...) « désaccélérer ». Du coup, là (en pointant la base du graphique a) ça va aller hyper vite, et puis après progressivement plus lentement »
---	---

Mélanie utilise explicitement l'EMD pour faire le lien entre le registre des dessins géométriques et le registre graphique.

Elle associe, par exemple, le caractère *large* du vase 1 à la pente *faible* de la base du graphique b en passant par l'idée de remplissage *lent*.

Son utilisation de l'EMD (« ça va prendre plus de temps », « ça va se remplir plus vite au début mais à la fin ça va se `désaccélérer` ») est cohérente avec son interprétation spatiale des dessins des trois vases.

Cependant, il est possible qu'elle interprète la sphère comme *globalement large* et qu'elle y associe une vitesse d'élévation du niveau d'eau *globalement lente*. Dans ce cas, elle considérerait la sphère globalement et en 3D sans percevoir en 2D les différents disques correspondant aux différents niveaux de remplissage (les disques en haut et en bas sont plus petits que ceux du centre). Ainsi, pour nous, l'erreur qu'elle commet en considérant que le vase 1 « va se remplir plus lentement » peut provenir d'une perception géométrique incomplète de la sphère, mais pas d'une erreur sur l'EMD.

D'autre part, pour choisir le graphique correspondant au vase 1, elle semble ne considérer sur les graphiques a et b que les parties correspondant au début du remplissage. Elle en déduit que le bon choix est le b puisqu'au début la courbe montre une croissance lente. Lorsqu'elle déclare « ça va aller hyper vite, et puis après progressivement plus lentement », elle semble adopter un point de vue local sur les représentations graphiques considérées, sans tenir compte de leur globalité.

24	[...] <i>Luca explique à Sara pourquoi l'association 1-b n'est pas correcte :</i> L : « mais regarde parce qu'ici (en pointant le haut du graphique b) il accélère pas du tout, il reste tout le temps ... tout le temps lent (pointant le graphique b)) ... du genre à la fin ... à la fin d'accord ce sera plus rapide (pointant le haut du vase 1) ... pas là (pointant le haut du graphique b)), là tu vois c'est lent alors qu'à la fin (pointant le haut du vase 1) il est fin, ça devrait être trop rapide, tu vois ce que je veux dire ? »
25	M : « ouais ... ouais »
26	Sara (S) : « ouais c'est vrai ça t'as raison »

Afin de réfuter l'association 1-b de Mélanie, Luca développe le recours à la notion de vitesse qu'il n'avait qu'ébauchée à la ligne 10. Il porte un regard local tant sur le graphique que sur le dessin.

27	M parcourt lentement la courbe b avec son index (Fig. 4) puis : « oui puis en plus ici (en pointant le milieu de la courbe b) c'est rapide alors que (en pointant le milieu du vase 1) c'est (...) »
	M : « oui, c'est juste »
28	Mélanie corrige sa production : elle avait mis 1-b et 3-a et maintenant elle associe correctement 1-a et 3-d.

Mélanie complète la coordination de Luca en comparant le milieu de la sphère avec le milieu du graphique b. Par rapport à son intervention de la ligne 4, Mélanie semble avoir enrichi ses points de vue en ajoutant un regard local sur la sphère et un regard global sur le graphique.

6. Conclusions

Rappelons notre question initiale qui consiste à évaluer dans quelle mesure la résolution du problème « Les vases » peut amener des interactions épistémologiquement riches entre élèves, c'est-à-dire qui contribuent à étoffer la conceptualisation de la notion de fonction. L'analyse du travail du trio présentée dans cet article montre que cette situation a amené des interactions épistémologiquement riches entre Luca et Mélanie : elles ont contribué à étoffer la conceptualisation de Mélanie du concept de fonction par des points de vue plus riches sur les représentations graphiques et sur les dessins géométriques correspondants en renforçant leurs liens, à travers l'EMD, avec le phénomène décrit ; elles ont aussi amené Luca à expliciter ses points de vue et, ce faisant, à parfaire sa conceptualisation des représentations graphiques en jeu dans cette situation.

Le croisement de nos deux outils d'analyse s'est révélé fécond en nous permettant de récolter des informations précises sur l'évolution des conceptions des élèves au cours de leur travail.

Nos deux outils d'analyse nous ont donc permis de repérer des évolutions dans les conceptualisations des élèves dans le contexte d'une situation de résolution de problèmes. Mais les mêmes évolutions auraient-elles pu s'opérer tout aussi bien à travers un dispositif d'enseignement plus frontal, dans lequel la résolution de problèmes ne jouerait, au plus, qu'un rôle secondaire ? Nous pensons avoir montré que le contexte d'une activité de recherche en groupe a amené Mélanie et Luca à s'impliquer fortement dans la réflexion en y investissant leurs points de vue initiaux, puis en parvenant à les enrichir par confrontation avec ceux de leurs pairs. Mais nous croyons aussi qu'un type de tâche qui implique le passage par une expérience mentale dynamique, comme c'est le cas dans la situation « les vases » et dans d'autres situations de la première partie de notre séquence d'enseignement, se prête particulièrement bien à un travail de recherche en groupe. En effet, une expérience mentale étant par nature propre à chaque individu, le travail collectif oblige chaque élève à expliciter la sienne et à la confronter avec celle des autres, explicitation et confrontation étant toutes deux de puissants leviers pour ébranler des conceptions inadéquates.

V. CONCLUSION

Nous nous sommes lancés dans un projet ambitieux avec plusieurs ramifications et il est difficile alors que le projet n'a pas encore touché à son terme de dégager des conclusions générales. Le livre que nous préparons permettra toutefois de rendre compte de façon détaillée de ce que nos différents travaux permettent de dire sur des questions semblables touchant à la résolution de problèmes.

L'analyse des questionnaires élèves (mais aussi de ce que nous avons pu voir de ceux des enseignants) ne montrent pas de positions caricaturales, ce qui nous semble important à souligner. Toutefois on distingue assez nettement une distinction entre les ordres d'enseignement. Clairement c'est au secondaire I que la résolution a le plus de mal à vivre. Est-ce une caractéristique genevoise ? Rien n'est moins sûr au vu de ce que l'on sait du contexte français mais il faudrait le vérifier mais il se peut que la différence soit exacerbée à Genève. Pourtant, à Genève comme en France, les enseignants du secondaire ont une formation identique, contrairement à la quasi-totalité des autres cantons suisses, où la formation et le niveau de recrutement sont différents entre secondaire I et II. A Genève toutefois, contrairement à la France, les enseignants du secondaire I sont souvent bi-disciplinaire (mais moins que dans les autres cantons suisses). Il existe aussi une spécificité romande avec un manuel d'enseignement unique composé seulement de problèmes, qui bien que supposé favoriser la résolution de problèmes a peut-être une forme qui ne permet pas aux enseignants de s'en saisir efficacement puisque toute l'organisation didactique est à la charge de l'enseignant. Mais, au-delà de ces différences de contexte, il se peut aussi que ce soit la nature des mathématiques enseignées au secondaire I qui ne favorise pas la résolution de problèmes. Peut-on faire l'hypothèse que les savoirs mathématiques enseignés à l'école primaire se prêtent davantage à la résolution de problèmes que ceux enseignés ensuite qui peuvent paraître plus abstraits ? Les difficultés bien connues des élèves avec les nombres relatifs, les rationnels ou l'algèbre, sans parler des théorèmes de Pythagore ou Thalès rendent peut-être ainsi obsolète toute appréciation positive des élèves, et peut-être aussi des enseignants à l'égard de la résolution de problèmes. Au secondaire II, nous sommes limités à la filière gymnasiale qui à Genève correspond à peu près aux bacs généraux mais avec un taux de sélection plus fort (dû en partie au fait que les apprentissages plus professionnels sont moins dévalorisés qu'en France). On voit alors que la résolution de problèmes retrouve une place timide. Il était donc important que nos travaux prennent bien en compte les divers ordres d'enseignement.

A un autre niveau, la distinction entre les enseignements sur la résolution de problèmes de ceux qui utilisent la résolution de problèmes pour enseigner des contenus mathématiques spécifiques est pertinente du point de vue de la recherche. En effet, ce que nous venons de présenter a permis de mettre l'accent sur ce qui est en jeu dans un enseignement utilisant la résolution de problème comme la flexibilité des registres et des points de vue pour les fonctions ou le changement de regard sur les formes géométriques. Dans le cas d'un enseignement de la résolution de problème, comme on peut le voir dans le travail de Chanudet dans ces actes, c'est le contenu même de ce qui est à apprendre qui est en jeu et sur lequel portent les aides et les régulations de l'enseignant. Apparaissent alors des enjeux en termes de dialectique entre dévolution et institutionnalisation, pour que les élèves puissent s'approprier les tâches à résoudre et que les enseignants mettent en évidence des apprentissages caractéristiques d'une forme de résolution de problèmes. Nos divers travaux ont permis de voir qu'il existe en ce sens des choses qui se jouent sur le temps long en mettant bien en évidence dans tous les travaux des différences sensibles entre les enjeux au niveau d'une séance et ceux au niveau d'une

séquence toujours beaucoup plus difficiles à identifier et à mettre en œuvre tant par les élèves que par les enseignants.

La thèse de Jana Lackova sur le dispositif du Baccalauréat international qui offre aux élèves la possibilité d'un travail assez autonome, individuel, sur une question mathématique de leur choix va permettre une analyse fine d'un dispositif unique inséré dans une évaluation formelle (20% de la note du bac). Grâce aux outils de la Théorie anthropologique du didactique et des différentes dialectiques, surtout médias-milieus et recherche-études, son travail montre quelques exemples de ce qui peut favoriser ou au contraire gêner une investigation mathématique de qualité.

La thèse de Stéphane Favier analyse finement le travail d'élèves du primaire et du secondaire I sur des problèmes nécessitant des démarches d'essais-ajustements dans le cadre de la classe ordinaire sur une séance. Il n'y a donc pas d'enjeu de temps long, l'étude se concentre sur ce qui fait que les élèves seuls ou en groupes font et qui leur permet ou non de s'approcher de la solution. Outre une analyse des démarches et des types de raisonnement en jeu, le travail s'appuie sur un découpage en épisodes et une analyse des transitions en particulier en termes d'heuristique à l'appui entre autres d'un travail initial de Schoenfeld (1985, 1992) complété par Rott (2014).

Les travaux conjoints de Chanudet et Favier ont ainsi conduit à des questions et appelé à poursuivre les recherches quant à la manière de dévoluer la résolution de problèmes et à ce qui peut être institutionnalisé à l'issue de telles séances. Mais ils ont aussi fait émerger des pistes quant aux moyens de soutenir l'activité des élèves en résolution de problèmes. Ces divers éléments nous ont ainsi conduit à nous intéresser aux régulations que les enseignants peuvent favoriser, aux heuristiques auxquelles ils peuvent recourir et aux apprentissages visés considérés du point de vue des raisonnements et des démarches mathématiques mobilisés. Ces derniers ont aussi, en marge de leurs travaux de thèse, collaboré avec un groupe d'enseignants du secondaire I pour opérationnaliser les phénomènes didactiques observés dans la perspective de constitution d'une ressource didactique. C'est dans la continuité et l'élargissement de ce premier travail que nous avons soumis un nouveau projet qui vise la mise en place de travaux collaboratifs avec des groupes d'enseignants à l'appui notamment des éléments soulignés précédemment (régulations, heuristiques, raisonnement et démarches) en vue d'étudier deux processus complémentaires, la dévolution et l'institutionnalisation, avec une perspective d'élaboration d'outils pour la formation.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- ARSAC, G., GERMAIN, G., & MANTE, M. (1991). Problème ouvert et situation-problème. IREM de Lyon.
- ARSAC, G., & MANTE, M. (2007). Les pratiques du problème ouvert. Scéren édition.
- BROUSSEAU, G. (1998). Théories des situations didactiques. La pensée sauvage.
- BRUN, J. (1990). La résolution de problèmes arithmétiques : Bilan et perspectives. *Math-Ecole*, 141, 2-15.
- CAI, J., MOYER, J. C., WANG, N., HWANG, S., BIKAI, N., & GARBER, T. (2013). Mathematical problem posing as a measure of curricular effect on students' learning. *Educational Studies in Mathematics*, 83, 57-69.
- CHEVALLARD, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(2), 221-265. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-265.
- CLEMENTS, H.-D., SWAMINATHAN, S., ZEITLER HANNIBAL, M.-A., & SARAMA, J. (1999). Young Children's Concepts of Shape. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(2), 192-212.
- COBB, P., YACKEL, E., & WOOD, T. (1989). Young Children's Emotional Acts While Engaged in Mathematical Problem Solving. In D. B. McLeod & V. M. Adams (Éds.), *Affect and Mathematical Problem Solving : A New Perspective* (p. 117-148). Springer New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-3614-6_9
- COPPE, S. (2011). Les problèmes dans les programmes depuis la contre réforme en France. In B. Grugeon (Ed.). (Pp. 9-16). Actes du 17ème colloque de la CORFEM Caen 2010, 9-16.
- COPPE, S. & HOUEMENT, C. (2010). Résolution de problèmes à l'école primaire : Perspectives curriculaire et didactique. In C. Houement & C. Bulf (Éds.), *L'Enseignement des Mathématiques à l'Ecole : Où est le Problème* (p. 48-71). P. Danos, P. Eysseric, P. Masselot, C. Ouvrier-Bufferet, M.-J. Perrin, & A. Simard.

- DAINA, A. (2013). Utilisation des ressources : De la préparation d'une séquence à sa réalisation dans la classe de mathématiques / cinq études de cas sur la notion d'aire dans l'enseignement primaire genevois. Genève.
- DE CORTE, E., & VERSCHAFFEL, L. (2008). Apprendre et enseigner les mathématiques : Un cadre conceptuel pour concevoir des environnements d'enseignement-apprentissage stimulants. In M. Crahay, L. Verschaffel, E. De Corte, & J. Grégoire, Enseignement et apprentissage des mathématiques. Que disent les recherches psychopédagogiques (Vol. 2). De Boeck Supérieur.
- DORIER, J. L. (2012). Context analysis for the implementation of IBL: International synthesis report. Deliverable of PRIMAS project.
<http://www.primas-project.eu/servlet/supportBinaryFiles?referenceId=19&supportId=1247>
- DORIER, J.-L. (2012). La démarche d'investigation en classe de mathématiques : Quel renouveau pour le questionnement didactique ? In B. Calmettes (Ed.), Démarches d'investigation. Références, représentations, pratiques et formation (p. 35-56). L'Harmattan.
- DUVAL, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. Annales de didactique et de sciences cognitives, 5, 37-65.
- DUVAL, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : Développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. Annales de didactique et de sciences cognitives, 10, 5-53.
- DUVAL, R. (2006). Transformations de représentations sémiotiques et démarches de pensée en mathématiques. Actes du XXXI^e colloque COPIRELEM. Enseigner les mathématiques en France, en Europe et ailleurs, 67-89.
- EYSSERIC, P. (2002). Les ateliers de recherche en mathématiques (expérimentation dans les classes et formation des professeurs des écoles). Grand N, 70, 7-34.
- GEORGET, J.-P. (2009). Activités de recherche et de preuve entre pairs à l'école élémentaire : Perspectives ouvertes par les communautés de pratique d'enseignants [Didactique des mathématiques].
- GRENIER, D. (2007). Des situations de recherche en mathématiques pour une formation à la démarche scientifique. Actes de l'Université d'été « Démarche expérimentale ».
- GRENIER, D., & PAYAN, C. (2002). Situation de recherches « en classe » : Essai de caractérisation et proposition de modélisation. In V. Durand Guerrier & C. Tisseron (Éds.), Actes du séminaire national de didactique des mathématiques (p. 189-205).
- GROOTENBOER, P. & MARSHMAN, M. (2016). The affective domain, mathematics, and mathematics education. In Mathematics, affect and learning (p. 13-33). Springer. https://doi.org/10.1007/978-981-287-679-9_2
- HANNULA, M. S. (2020). Affect in Mathematics Education. In S. Lerman (Ed.), Encyclopedia of Mathematics Education (p. 32-36). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_174
- KILPATRICK, J. (1967). Analyzing the solution of word problems in mathematics : An exploratory study. Stanford.
- LEDER, G. & GROOTENBOER, P. (2005). Affect and mathematics education. Mathematics Education Research Journal, 2(17), 1-8.
- LEGRAND, M. (1990). Rationalité et démonstration mathématiques, le rapport de la classe à une communauté scientifique. Recherches en Didactique des Mathématiques, 9(3), 365-406.
- MCLEOD, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education : A reconceptualization. In Handbook of research on mathematics teaching and learning : A project of the National Council of Teachers of Mathematics. (p. 575-596). Macmillan Publishing Co, Inc.
- OP'T EYNDE, P., DE CORTE, E., & VERSCHAFFEL, L. (2002). Framing Students' Mathematics-Related Beliefs. In G. C. Leder, E. Pehkonen, & G. Törner (Éds.), Beliefs : A Hidden Variable in Mathematics Education? (p. 13-37). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/0-306-47958-3_2.
- OP'T EYNDE, P., DE CORTE, E. & VERSCHAFFEL, L. (2006). Epistemic dimensions of students' mathematics-related belief systems. International Journal of Educational Research, 45(1-2), 57-70.
- PASSARO, V. (2016). Analyse du raisonnement covariationnel favorisant le passage de la fonction à la dérivée et des situations qui en sollicitent le déploiement chez des élèves de 15 à 18 ans : Montréal.
- PINET, L. & GENTAZ, E. (2007). La reconnaissance de figures géométriques planes (cercle, carré, rectangle et triangle) chez des enfants de cinq ans. Grand N, 80, 17-24.
- PÓLYA, G. (1945). How to solve It. Princeton NJ.
- ROCARD, M., CSERMELY, P., JORDE, D., LENZEN, D., WALBERG-HENRIKSSON, H., & HEMMO, V. (2007). Science Education Now : A Renewed Pedagogy for the Future of Europe. Commission européenne. <http://ec.europa.eu>.
- ROGALSKI, M. (2008). Les rapports entre local et global : Mathématiques, rôle en physique élémentaire, questions didactiques. In L. Viennot (Ed.), Didactique, épistémologie et histoire des sciences. Penser l'enseignement (p. 61-87). PRESSES UNIVERSITAIRES DE FRANCE.
- ROTT, B. (2014). Rethinking Heuristics – Characterizations and Examples. In A. Ambrus & E. Vasarhelyi (Éds.), Problem Solving in Mathematics Education – Proceedings of the 15th ProMath Conference (p. 176-192).
- SCHOENFELD, A. H. (1979). Explicit heuristic training as a variable in problem-solving performance. Journal for RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION, 10, 173-187.
- SCHOENFELD, A. H. (1985). Mathematical problem solving. Academic Press Inc.
- SCHOENFELD, A. H. (1992). On paradigms and methods : What do you do when the ones you know don't do what you want them to ? Issues in the analysis of data in the form of videotapes. The Journal of the Learning Sciences, 2(2), 179-214.
- SILVER, E. A., & CAI, J. (1996). An analysis of arithmetic problem posing by middle school students. Journal for Research in Mathematics Education, 27(5), 521-539.
- VANDEBROUCK, F. (2011). Perspectives et domaines de travail pour l'étude des fonctions. Annales de didactique et de sciences cognitives, 16, 149-185.

- VENDEIRA, C., & COUTAT, S. (2017). «C'est une montagne ou une trompette ? » entre perception globale et caractéristiques des formes au cycle 1 et 2. *Grand N*, 100, 79-104.
- VERGNAUD, G. (1990). Théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(23), 133-170.

ANNEXE 1

QUESTIONNAIRE SUR LES MATHÉMATIQUES

Âge: ____

Sexe : ☐ Fille ☐ GarçonClasse : ☐ 10^e CT ☐ 10^e LS ☐ 10^e LCSi je suis en 10^e LS, je suis le cours de DMS ("Démarches mathématiques et scientifiques") :☐ oui ☐ nonLangue(s) maternelle(s) : ☐ français ☐ autre(s) préciser :

Globalement en mathématiques, je pense que je suis :

☐ très bon ☐ bon ☐ moyen ☐ pas très bon ☐ en difficulté

Selon vous, faire des mathématiques c'est ...

	Pas du tout d'accord	Plutôt pas d'accord	Plutôt d'accord	Tout à fait d'accord
Faire des calculs				
Répondre à des questions nouvelles				
Être logique				
Apprendre et appliquer des formules				
Faire des essais, tester des hypothèses, tâtonner				
Résoudre des problèmes compliqués				
Trouver la bonne façon pour justifier une réponse				
Bien rédiger la solution				

Dans notre classe de mathématiques :

	Jamais ou presque	Parfois	Souvent	Très souvent
Nous avons besoin que l'enseignant nous aide plus que dans les autres disciplines				
Nous avons des choses à apprendre par cœur				
Nous appliquons les méthodes que l'enseignant nous montre				
Nous résolvons des problèmes en lien avec la vie quotidienne				
Nous avons le temps de réfléchir pour trouver les réponses, l'enseignant nous laisse assez de temps				
Nous faisons des exercices de calcul				
Nous résolvons des problèmes				
Nous faisons des exercices pour nous entraîner				
Nous aidons les camarades en difficulté				
Nous cherchons seuls à comprendre nos erreurs				

Comment je me sens quand je fais des mathématiques ?

	Jamais ou presque	Parfois	Souvent	Très souvent
Je me sens bien parce que ce que j'apprends est clair, facile à appliquer				
J'ai peur de ne pas trouver la réponse				
Je suis confiant.e car je comprends toujours les nouvelles notions				
J'ai peur de ne pas comprendre les problèmes proposés				
Je me sens plus facilement perdu.e que dans les autres disciplines				
Je me sens à l'aise pour faire le travail qui est demandé				
J'ai peur de me tromper dans les calculs				
Je suis inquiet/inquiète si je ne comprends pas tout de suite, parce qu'alors ce sera très difficile d'y arriver				

Pour les deux dernières rubriques, cochez **les trois phrases** avec lesquelles vous êtes **le plus en accord**.

Quelqu'un qui est bon en mathématiques est quelqu'un qui ...

Sait faire les calculs	
Connaît les formules et la théorie	
Trouve rapidement la réponse à un problème	
Pense logiquement	
Sait argumenter pour justifier une réponse	
Sait appliquer les bonnes méthodes	
Trouve des façons originales pour résoudre un problème	
Sait trouver ses erreurs et les corriger	

En mathématiques, j'aime ...

Faire des calculs	
Chercher des réponses qui ne sont pas tout de suite évidentes	
Apprendre et appliquer des formules, des méthodes	
Réussir à trouver rapidement la solution d'un problème	
Être confronté à une vraie difficulté	
Raisonner logiquement	
Avoir le temps de me plonger dans un problème	
Avoir trouvé une réponse à quelque chose de compliqué	

ANNEXE 2

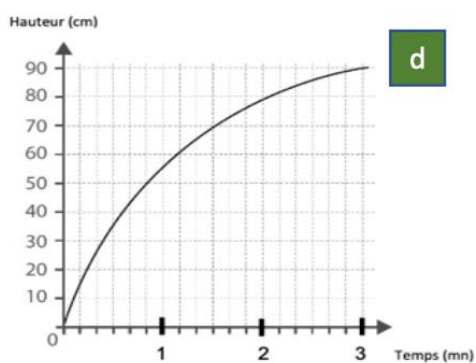
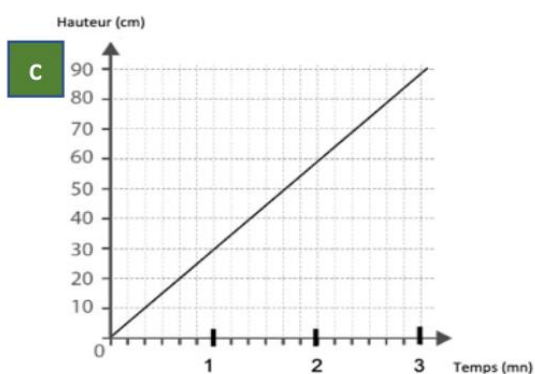
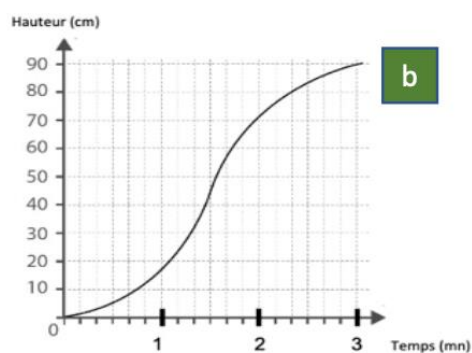
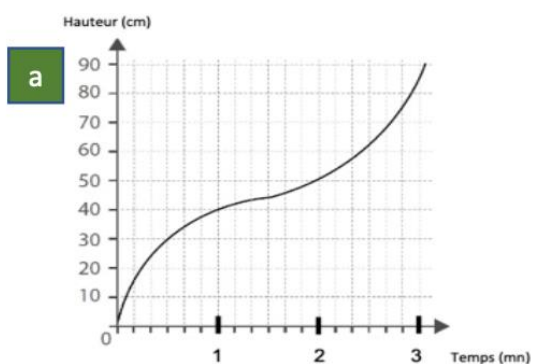
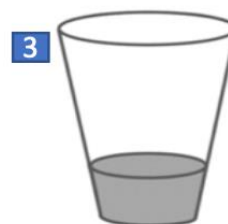
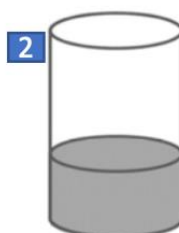
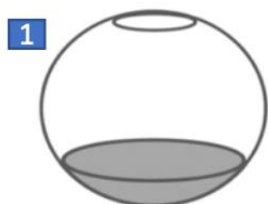
LA SITUATION « LES VASES »

*Les vases***Première partie :**

Ces trois récipients ont la même hauteur de 90 cm et le même volume. On les remplit en 3 minutes, l'un après l'autre, à un robinet dont le débit ne varie pas.

Les graphiques indiquent la hauteur de remplissage des récipients en fonction du temps.

Associer, si possible, chaque récipient à sa courbe de remplissage.



L'USAGE DU CADRE DE L'APPRENTISSAGE PAR PROBLÉMATISATION EN DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES : QUELS APPORTS POSSIBLES ?

Magali HERSANT

CREN, Université Nantes

magali.hersant@univ-nantes.fr

Résumé

Dans ce texte, je présente le cadre de l'apprentissage par problématisation élaboré par Fabre et Orange, en développant notamment les raisons de l'attention portée à la construction du problème. Après avoir établie la possibilité épistémologique d'utiliser ce cadre en didactique des mathématiques, j'illustre avec un exemple un usage possible de ce cadre pour étudier une situation et analyser l'activité mathématique des élèves. Cela me conduit à dégager des apports possibles du cadre à la didactique des mathématiques et des pistes de recherche.

Mots clés

apprentissage par problématisation, didactique des mathématiques, cadre théorique, didactique comparée

I. INTRODUCTION

Le cadre de l'apprentissage par problématisation (CAP dans la suite du texte) est profondément ancré dans une réflexion sur la place de la résolution de problèmes dans les apprentissages scolaires, menée à partir des années 80 dans un contexte de formation des enseignants (Doussot et al., à paraître). Ce « cadre théorique de la construction de problèmes » (Orange, 2012, p. 32) a été constitué en tant que tel au CREN dans les années 90 par Michel Fabre et Christian Orange (voir par exemple Fabre et Orange, 1997 ; Fabre, 2017 ; Orange, 2002, 2003, 2005a, 2005b). Ces pères fondateurs étant respectivement philosophe de l'éducation et didacticien des SVT, le CAP n'est donc pas un cadre construit spécifiquement pour la didactique des mathématiques. Toutefois, comme nous le verrons, les travaux en didactique des mathématiques ont été pour Michel Fabre une source de réflexion importante.

1. D'où vient mon questionnement sur le CAP ?

Les didacticiens des mathématiques disposent de cadres théoriques conçus précisément pour répondre à leurs questions et ambitions. Le CAP a émergé en référence à des questions exogènes à la didactique des mathématiques. On peut donc légitimement se questionner sur les raisons pour lesquelles un·e didacticien·ne des mathématiques peut s'intéresser à ce cadre. A priori, ces raisons peuvent être variées. Elles peuvent évoluer en fonction des contextes. Ainsi, par exemple, les questions de didactique comparée qui ont pris une importance croissante ces dernières années peuvent amener à s'intéresser à ce cadre.

En ce qui me concerne, mon intérêt pour le CAP correspond à la rencontre d'une curiosité intellectuelle, nourrie par un contexte institutionnel, et d'une limite ressentie dans le travail d'une question de recherche. En effet, j'ai commencé à assister aux séminaires « Problématisation » (sous la responsabilité de M. Fabre et C. Orange à l'époque) peu de temps après mon arrivée au CREN en 2003. À l'époque quelques didacticien·ne·s, autres que des SVT (l'EPS, les sciences physiques mais aussi l'histoire) mobilisaient déjà le CAP et leurs travaux étaient discutés dans le séminaire. Cela donnait à voir des possibilités. Au même moment, en lien avec des questions de formation des professeurs des écoles, je me questionnais sur la façon dont la didactique des mathématiques pouvait appréhender les « problèmes pour chercher » (MEN, 2002) et les questions qu'ils posaient aux enseignants et aux élèves, sans voir comment travailler toutes mes interrogations avec les cadres usuels de la didactique des mathématiques. La question des savoirs en jeu dans ces problèmes me semblait particulièrement résistante, avec tout ce que cela impliquait comme interrogations sur la gestion des débats associés à ces situations et sur l'institutionnalisation, pour les enseignants, mais aussi en termes d'activité pour les élèves (Hersant, 2008 ; Hersant & Morin, 2013). L'usage du CAP m'a semblé une possibilité à explorer. C'est ainsi que je me suis engagée dans un projet de recherche à long terme visant à étudier la possibilité et l'intérêt de l'usage du CAP en didactique des mathématiques.

La recherche dont rend compte mon mémoire complémentaire d'HDR (Hersant, 2010a) constitue un travail fondateur sur la question. Dans cette ingénierie didactique sur l'entrée dans la rationalité mathématique à la fin de l'école élémentaire à partir de « problèmes pour chercher », le CAP est mobilisé d'abord pour revisiter les enjeux associés à la résolution de problème comme « objet » d'enseignement (voir aussi ECCEmaths, 2012) et questionner le « problème ouvert » (Arsac, Germain, Mante, 1991). Puis, la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998) et le CAP sont utilisés de façon complémentaire pour élaborer les situations de l'ingénierie.

Ainsi, le CAP qui m'est apparu comme un cadre « possible » et fructueux pour avancer sur certaines questions est devenu petit à petit pour moi un cadre théorique supplémentaire, disponible pour traiter des questions de didactique des mathématiques. J'ai exploré ses possibilités d'usage, son intérêt et ses limites, dans différents travaux (Hersant, 2008, 2009, 2010a, 2011 ; Hersant et Orange-Ravachol, 2015 ; Hersant et Quiniou, 2017 ; Hersant et Choquet, 2019 ; Hankeln et Hersant, 2020 ; Hersant, 2020) toujours nourris par les échanges du séminaire « problématisation » et du réseau « Probléma »¹, ainsi qu'à travers des directions de thèses (Grau, 2017 ; Legrand et Zebiche, en cours) ou de masters 2 « Enseignement Expertise Apprentissages ».

2. Enjeux

Chercher à identifier ce que peut apporter un cadre supplémentaire au champ de la didactique des mathématiques s'inscrit dans une démarche de didactique comparée qui vise à saisir les spécificités et les « domaines » d'usage possible des cadres. Cette étude ne peut, bien entendu, être envisagée que si l'on s'assure préalablement de la compatibilité des fondements épistémologiques du CAP avec les mathématiques.

Une fois cette compatibilité établie, considérant que les didacticiens se dotent de cadres pour modéliser et analyser les situations d'enseignement et d'apprentissage (activité de l'élève, des élèves, de l'enseignant) et pour construire de telles situations (démarches d'ingénierie), les

¹Le réseau Probléma regroupe les chercheurs qui utilisent le CAP dans leurs travaux. Ce réseau organise chaque année un colloque thématique.

questions suivantes viennent : que peut apporter le CAP à la modélisation et à la compréhension de l'activité de l'élève et de l'enseignant dans une situation d'enseignement des mathématiques ? Que peut apporter le CAP à la conception de situations d'apprentissages mathématiques ? L'usage du CAP en didactique des mathématiques ouvre-t-il des possibilités nouvelles ? Lesquelles ?

Ces questions sont le pendant de questions plus pragmatiques qui peuvent se poser à tout·e didacticien·ne dès lors que les cadres usuels de la discipline montrent des limites.

3. Remarques sur le plan de l'intervention

Le CAP étant encore peu connu dans la communauté des didacticiens des mathématiques, il me semble incontournable d'en faire une présentation avant d'entrer dans le cœur du sujet. Pour ce faire, j'ai opté pour un point de vue qui, d'une part, me semble être singulier et essentiel du cadre et, d'autre part, me semble revêtir un intérêt particulier pour la didactique des mathématiques : l'attention portée à la construction du problème.

Cette présentation est nécessairement synthétique, j'espère qu'elle ne conduira pas à une représentation trop caricaturale du CAP. Par ailleurs, la littérature sur le CAP étant abondante, j'ai privilégié les références qui me semblent les plus faciles d'accès.

Il semble par ailleurs indispensable d'examiner l'adéquation épistémologique du CAP aux mathématiques. Ne pouvant tout développer dans l'espace imparti, je traite rapidement ce point fondamental et renvoie le lecteur à (Hersant 2010a) et (Hersant, à paraître) pour plus de précisions.

Pour donner un aperçu de ce que peut apporter ce cadre, je développe ensuite un exemple relatif à l'analyse de l'activité de professeurs des écoles à propos d'une situation bien connue en didactique des mathématiques, les « solides de Platon » (Dias 2008, 2009a, 2009b ; Dias, Durand-Guerrier, 2005). Cette étude de cas me permettra de dégager des éléments de réponse aux questions posées.

II. LE CADRE DE L'APPRENTISSAGE PAR PROBLEMATISATION : L'ATTENTION PORTEE A LA CONSTRUCTION DU PROBLEME

Le terme « problématisation » évoque l'idée d'un processus de construction de problèmes.

1. D'où vient l'intérêt porté à la construction du problème dans le CAP ?

Dans les années 80, la « situation problème » devient le maître-mot de l'enseignement dans différentes disciplines scolaires et en formation. Fabre et Orange questionnent ce type de situation avec une position épistémologique marquée par Popper, Bachelard et Dewey (Fabre & Orange, 1997 ; Fabre, 1997, 1999, 2005, 2006, 2009 ; Orange 2012). Ils font le constat que cette « troisième forme de problème » (Fabre, 1999) est associée une épistémologie de la résolution de problème qui entre en tension avec l'idée de problème chez leurs référents épistémologiques, notamment Bachelard (Fabre, 1993 ; Orange, 1993). En effet, la construction des problèmes apparaît comme un « point aveugle de la situation-problème » (Fabre, 1999, p. 175) alors que, fondamentalement, la solution du problème est étroitement liée à la façon de le poser. À cet égard, Fabre et Orange écrivent, par exemple :

« En dépit de ses références quasi obsessionnelles au constructivisme Bachelardien, la littérature pédagogique ou didactique sur la situation problème fait généralement peu de cas de la construction des problèmes. Elle semble focalisée sur la résolution, comme si la valeur des solutions ne dépendait pas de la manière de définir les problèmes et comme si le plus important, dans la pensée et dans l'apprendre, n'était pas de construire de « bons » problèmes, ainsi que ne cesse d'ailleurs de le répéter Bachelard, si généreusement invoqué. Telle est la quatrième ambiguïté de la situation-problème : s'obnubiler sur la résolution, tout en invoquant rituellement la nécessité d'une construction des problèmes ! » (Fabre, 1999, p. 177)

« Tout cela plaide donc encore pour donner une grande importance à ce qui se passe entre problème perçu et solution, et pour ne pas le réduire à une simple représentation du problème comme cela a pu être fait parfois : c'est bien d'une construction dont il s'agit, celle du problème, ou problématisation. On voit aussi les liens qui doivent encore exister entre cette problématisation et les savoirs construits, qui ne peuvent aucunement se limiter à la solution du problème. » (Orange, 2005a, p. 73)

Par ailleurs, la pédagogie de la situation-problème les questionne aussi quant à l'apprentissage comme continuité (point de vue piagétien) ou comme rupture (point de vue bachelardien). En effet, la situation-problème en sciences est souvent associée à la notion d'obstacle (Orange, 2012, p. 30-35) et au recueil des conceptions des élèves. Cette pédagogie propose d'impulser un changement conceptuel, ce qui présente deux limites fortes pour Orange. D'abord, remplacer une conception par une autre ne permet pas un changement de nature des connaissances des élèves et peut expliquer que les conceptions erronées réapparaissent dès que possible. En effet, les conceptions initiale et finale sont toutes deux de l'ordre de l'assertorique alors que le savoir scientifique est, si l'on se réfère à Bachelard (1938), de nature apodictique. « Savoir ce n'est pas savoir que mais savoir que ça ne peut pas être autrement » résume souvent Orange. Ensuite, cette pédagogie peut laisser penser que les conceptions des élèves préexistent à la situation et sont relativement indépendantes des problèmes. Or, pour Orange, ce sont des constructions issues du vécu des élèves, des enseignements reçus, des vulgarisations qui correspondent à la façon dont ils s'expliquent le problème. C'est pourquoi « le savoir visé ne peut résider uniquement dans la solution de la question posée ; il doit prendre en compte la construction du problème » (Orange, 2012, p. 35). En conséquence, permettre la construction de savoirs apodictiques par les élèves renvoie à un travail didactique et non pédagogique :

« Si les conceptions ou représentations sont censées être des entités pré-formées, la situation dans laquelle on va mettre les élèves pour les recueillir ne relève que du moyen pédagogique (...). Au contraire si les conceptions sont considérées comme des constructions de l'élève face à un problème, il devient essentiel de choisir la question de sorte qu'elle conduise les élèves à travailler un problème pertinent par rapport aux savoirs que l'on veut leur faire construire. » (Orange, 2012, p. 31)

Finalement, Fabre et Orange se posent la question suivante :

« À quelles conditions, l'idée de situation problème pourrait-elle basculer résolument d'une épistémologie cartésienne de la résolution à une épistémologie bachelardienne de la problématisation ? » (Fabre, 1993, p. 6).

et proposent de travailler à des dispositifs didactiques qui permettent la construction des problèmes et pas seulement leur résolution.

2. Poser, construire et résoudre des problèmes : que faut-il entendre par là ?

Il faut d'abord préciser que toute problématisation s'effectue dans un cadre qui détermine « quels sont les types de questions et les types de réponses pertinentes dans un contexte donné » (Fabre, 2016, p. 17).

Un processus multidimensionnel

À l'intérieur de ce cadre, le processus de problématisation est multidimensionnel et se déploie d'abord dans deux directions :

- une dimension cognitive, de la position du problème à sa résolution, en passant par sa construction ;
- une articulation des données et des conditions.

Par ailleurs, ce processus s'effectue en lien avec plusieurs dialectiques : une dialectique d'inférence et de référence (ou d'idées et de faits chez Orange), une dialectique de théorie et d'expérience, une dialectique du connu et de l'inconnu (Fabre, 2011, p. 71). En effet, problématiser demande de disposer de points d'appui : on ne peut pas problématiser si on met tout en doute. Il faut disposer de certitudes sur lesquelles s'appuyer pour déployer la problématisation. Ces points d'appui sont des « échafaudages provisoires » (Fabre 2011, p. 71) qui pourront être remis en cause plus tard.

Enfin, la problématisation est un processus non linéaire contrôlé par la réflexivité du sujet, ce qui fait référence en particulier à la « surveillance de soi » chez Bachelard.

Dimension cognitive de la problématisation

Dans la première dimension – axe cognitif – la problématisation se définit comme un processus impliquant position, construction et résolution de problème. En effet, il ne suffit pas d'énoncer une question – un problème scolaire – pour que les élèves (se) posent effectivement un problème. Poser un problème, du point de vue du CAP, c'est prendre conscience d'un problème (Fabre, 1999, p. 181) à partir d'une énigme, d'un échec, d'une controverse... Construire un problème, c'est le déterminer (Fabre, 1999, p. 181), « chercher les données et les conditions pertinentes » (Fabre, 1999, p. 198) pour le circonscrire et le résoudre. Ces données et ces conditions sont des réponses à des questions implicites que l'on se pose (Fabre, 1999, p. 197-198), elles sont de l'ordre du comprendre et non de l'ordre du résoudre :

« On se trompe en résolution quand on n'arrive pas à planifier, quand on oublie des problèmes auxiliaires (Pólya, 1965) ou encore quand on erre dans les formules ou les calculs. On se trompe en compréhension quand on sélectionne mal les données ou conditions, quand on se méprend sur l'importance à attribuer à telle ou telle singularité de l'énoncé. » (Fabre, 1999, p. 197-198)

Données et conditions du problème

Dans une seconde dimension la problématisation se déploie à partir d'une mise en tension de données et de conditions. Que faut-il entendre par données et conditions du problème ? Les conditions du problème sont des contraintes non contingentes, des impératifs du problème (Fabre, 2011, p. 69), ce qu'il faut respecter et ce sur quoi on n'a pas prise. Elles renvoient aux normes, aux règles à prendre en compte (Fabre, 2016, p. 24) et ont une dimension culturelle :

« Les conditions du problème sont l'état de la culture et pas seulement un caprice du sujet. » (Fabre, 2011, p. 188)

Les conditions sont de l'ordre de l'apodictique, elles expriment des nécessités. Contrairement aux conditions, les données sont des contraintes contingentes du problème. Elles correspondent à des constats, des informations prélevées dans l'environnement ou le contexte (Fabre, 2016, p. 24) qui n'ont pas de caractère nécessaire. Elles relèvent de l'assertorique : c'est ainsi mais ça pourrait être autrement.

Pour illustrer cette différence entre données et conditions, je reprends un exemple de M. Fabre (Fabre, 2016, p. 16). Considérons le problème suivant : « Pierre a 18 billes, son frère Paul en a 46. Ils décident de les mettre en commun pour jouer. Combien ont-ils en tout ? ». Dans ce problème, les données sont : Pierre a 18 billes, Paul a 46 billes. Le fait que Pierre et Paul soient frères n'est pas retenu comme une donnée car ce n'est pas un élément pertinent au regard de la résolution du problème. Dans ce problème, les conditions sont : ils mettent en commun les billes ; on prend en compte toutes les billes. Ces éléments relèvent en effet des impératifs du problème dans le cadre de l'enseignement des mathématiques où le « combien » appelle un traitement mathématique du problème.

3. En Sciences de la Nature : la problématisation comme accès aux savoirs apodictiques

C'est donc l'articulation des données et des conditions qui va permettre d'avancer dans la construction du problème et sa résolution par la production d'idées, la formulation d'hypothèses, le test de ces hypothèses et l'invention d'un plan pour résoudre le problème. Ce processus de problématisation peut se réaliser et s'analyser dans différents contextes. Dans un contexte quotidien (Colombo qui cherche ses clés, Robinson qui construit sa pirogue...) ce processus aboutit à la construction de solutions pragmatiques. On le réfère plutôt à Dewey (Fabre, 2006). Dans un contexte scientifique (SVT, physique, mathématiques, histoire...), le processus doit aboutir à des solutions acceptables du point de vue de la communauté scientifique : l'épistémologie de la discipline cadre le travail de problématisation. C'est pourquoi la nature des problèmes et des savoirs en Sciences de la Nature conduit Orange à spécifier le processus de problématisation.

Problèmes explicatifs et registres empirique, des nécessités et explicatif

En Sciences de la Nature, les problèmes sont principalement des problèmes explicatifs c'est-à-dire liés à « des recherches d'explication et de caractérisation de phénomènes » ce qui se traduit « par le fait qu'ils articulent au moins deux registres : le registre empirique, celui des faits et phénomènes à expliquer, et le registre des modèles, où sont développées les explications (Martinand, 1992) » (Orange, 2007, p. 38). Ces deux registres sont étroitement liés à un troisième – le registre explicatif – qui permet de générer les explications que l'on propose du phénomène :

« des élèves de l'école élémentaire tentent d'expliquer comment est constitué le « bras » (membre supérieur) pour qu'il puisse bouger : les schémas et les textes explicatifs qu'ils produisent (registre des modèles) sont en permanente relation, dans leurs échanges, avec le registre empirique représenté par l'expérience qu'ils ont du fonctionnement et de l'organisation de leur corps ; expérience renouvelée lors du travail pendant lequel ils tâtent et bougent en permanence leur membre supérieur. Ces deux registres (registre empirique et registre de modèles) sont co-construits lors de la problématisation sous le contrôle d'un troisième registre, plus ou moins explicite, que nous avons nommé « registre explicatif » et qui contient les éléments théoriques, méthodologiques et méta-physiques qui font qu'une explication peut être reçue comme une explication (sans préjuger de sa pertinence) » (Orange, 2007, p. 38).

Ainsi, pour rendre compte du processus de problématisation, Orange opère la même distinction de fond entre données, conditions et cadre que Fabre (Fabre, Orange, à paraître) mais, en référence à l'épistémologie des sciences (Jacob, 1981 cité par Orange, 2000 et 2012, p. 23), aux travaux didactiques de Martinand (1992) et à ceux de Piaget et Garcia (1983), il préfère parler de « registre » de l'activité scientifique :

- le registre empirique est « le registre des faits provenant d'observations ou expériences » (Orange, 2012, p. 24), ces faits ne sont pas donnés mais construits ;
- le registre des modèles (des nécessités à l'intérieur des modèles initialement) est celui « des explications construites pour rendre compte des faits jugés pertinents pour le problème travaillé » (Orange, 2012, p. 24) ;
- le registre explicatif se rapproche du cadre épistémologique de Piaget, il correspond aux présupposés considérés comme allant de soi, qui ne sont pas remis en cause et permettent de générer les explications construites pour le problème ; ce registre « structure les explications des élèves et donc leur façon de travailler les problèmes scientifiques » (Orange, 2012, p. 26).

Problématisation et apodicticité des savoirs scientifiques

Les savoirs scientifiques sont des savoirs apodictiques (au sens de Bachelard), « caractérisés par la réduction des possibles qu'ils opèrent » (Orange, 2007, p. 38). Autrement dit savoir n'est pas « savoir que » mais « savoir que ça ne peut pas être autrement ». Le processus de problématisation en Sciences de la Nature doit donc être entendu comme un processus qui permet la construction des conditions du phénomène, c'est-à-dire des nécessités associées à ce phénomène :

« pour que les élèves qui travaillent sur le mouvement du membre supérieur accèdent à un savoir scientifique, la seule description de l'articulation du coude (c'est comme ça, mais cela pourrait être autrement...) n'est pas suffisante ; ni même la description de son fonctionnement. Il s'agit d'identifier au mieux les conditions pour qu'une articulation puisse fonctionner ; ce que nous appelons les nécessités : nécessité de cohérence, nécessité d'un mouvement au niveau du coude, nécessité d'une limitation de ce mouvement. Ces nécessités ne sont aucunement transcendantales : elles sont construites par le développement du problème dans un cadre épistémique mécaniste plus ou moins explicite. » (Orange, 2007, p. 38)

Le processus de problématisation renvoie donc à une construction du problème adossée à une exploration et à une réduction des possibles ainsi qu'à la production d'arguments critiques formulés en appui sur des connaissances et des éléments empiriques, dans un cadre explicatif partagé. Cette exploration permet de dégager des conditions de possibilités du phénomène qui sont des nécessités des modèles acceptables, elle aboutit à la construction de solutions raisonnées et critiques des problèmes.

4. Conséquences didactiques du positionnement épistémologique du CAP

Le processus de problématisation, ses fondements et les enjeux didactiques qu'il défend ont été précisés. Se pose maintenant la question didactique des conditions à mettre en place pour permettre aux élèves de problématiser. Quatre conditions émergent des travaux de Fabre et Orange.

Le « choix » du problème

Une première condition réside dans le choix méticuleux de la question posée aux élèves au regard du savoir que l'on vise. En effet, toutes les questions ne se valent pas et ne conduisent pas à la construction d'un problème. Par exemple, en SVT, la question « que deviennent les aliments que nous mangeons ? » n'offre pas vraiment la possibilité de travailler sur la nutrition ; les élèves vont décrire le « circuit » des aliments (Orange, 2012). En revanche la question « Comment expliquer que ce que j'ai mangé me donne des forces ? » (Orange, 2012) ou celle « comment expliquer que le lapin qui mange des carottes produise du muscle de lapin » force à s'interroger sur la transformation des aliments et leur distribution dans tout le corps.

Enjeux du débat explicatif

Une seconde condition concerne l'objectif du débat en classe. La construction du problème se réalise le plus souvent à l'intérieur des travaux de groupes et « à l'intérieur » de la tête des élèves. Il est difficile d'y accéder. Pourtant cela est essentiel pour identifier leur registre explicatif (REX) et le faire évoluer. Le débat peut permettre d'explicitier des données et des conditions, et donc d'inférer les REX des élèves. Mais pour cela, ce doit être un « débat explicatif », qui porte sur les modèles explicatifs des élèves (Orange, 2012, p. 50). Ce type de débat où sont exposées des thèses et dans lesquels émergent des objections qui vont conduire à produire de nouvelles thèses va permettre aux élèves d'« organiser et de délimiter le champ des possibles » (Orange, 2012, p. 50), c'est à dire de construire « l'espace problème ».

Pratiques et mise en texte des savoirs : les caricatures

Une troisième condition concerne l'ensemble du dispositif à mettre en place. La construction d'un problème, la problématisation d'une question, nécessite un travail explicite sur les modèles des élèves et les raisons pour lesquelles ces modèles fonctionnent ou ne fonctionnent pas ; les raisons pour lesquelles « c'est comme ça et ça ne peut pas être autrement » doivent faire partie de la trace écrite associée à la séquence si l'on veut permettre la construction de savoirs problématisés. Or, les argumentations orales produites lors d'un débat permettent rarement la production des éléments nécessaires à cette trace écrite pour différentes raisons :

« - d'une part elles se réalisent souvent dans un genre premier du discours très dépendant du contexte dans lequel elles sont produites (...).

- D'autre part la dynamique même du débat empêche de prélever des notes efficaces de ces argumentations (...)

- Enfin les argumentations produites par les élèves, et cela est d'autant plus vrai qu'il s'agit d'élèves jeunes, sont majoritairement des argumentations négatives contre un modèle. Si la raison qui fait refuser un modèle peu, en la généralisant, marquer une impossibilité (...) l'affirmation explicite clairement formulée de la nécessité (...) ne va pas de soi. » (Orange, 2012, p. 101)

Il faut pour cela un temps de travail spécifique (individuel et nouveau débat) sur ce que l'on appelle les « caricatures » :

« pour détacher les élèves de leur production, les focaliser sur les points épistémologiquement essentiels de ce qu'a produit la classe et les conduire à la production d'argumentations écrites, il est possible de s'appuyer sur ce qu'on peut nommer des caricatures (Orange et Orange Ravachol 2007 ; Chalak 2012). Ces caricatures reprennent les caractéristiques fonctionnelles fondamentales de certaines productions de groupe en

les homogénéisant du point de vue de la forme et en les dépersonnalisant. Elles permettent de demander aux élèves de produire individuellement des argumentations par écrit et de faire discuter la classe ensemble sans qu'elle se divise entre ceux qui ont produit l'affiche et ceux qui la discutent. » (Orange, 2012, p. 102)

5. Quels outils disponibles pour rendre compte d'une problématisation ?

Deux modèles sont utilisés pour rendre compte d'une problématisation associée à un problème : le losange de problématisation et l'espace de contraintes, respectivement proposés par Fabre et Orange (Fabre, Orange, à paraître).

Losange de problématisation

Le losange est une façon de représenter les deux dimensions de la problématisation : la dimension cognitive de position, construction, résolution du problème correspond à l'axe horizontal de la figure, la mise en tension des données et des conditions correspond à son axe vertical.

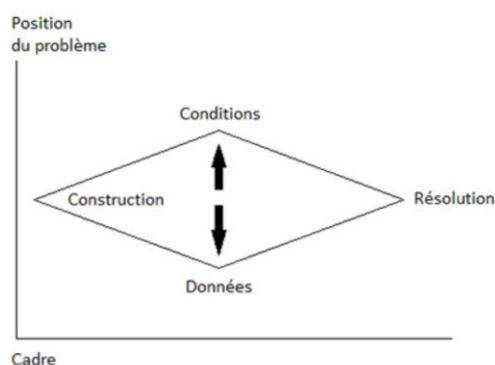


Figure 1 : Losange de problématisation, extrait de Fabre, 2017, p. 30

Proposé par Fabre, le losange permet de rendre compte de la problématisation d'un problème quotidien, d'un problème scientifique ou d'un problème scolaire. Dans la thèse de S. Grau (Grau, 2017, 2020), le lecteur trouvera des représentations de problématisations d'élèves en mathématiques sous forme de losanges.

Espace de contraintes

L'espace de contraintes est une modélisation de la façon dont, pour un problème donné, sont mis en tension les éléments empiriques et les éléments de l'ordre des modèles à l'intérieur d'un REX donné, au cours d'une problématisation, qu'elle soit scientifique ou réalisée en classe. Pour la classe il s'agit

« d'une mise en ordre des différents éléments problématisants qui sont apparus au cours de ce débat, d'une manière très implicite et même souvent inconsciente pour les élèves. Mais si ces éléments correspondent bien à des idées et des arguments produits par les élèves, il est clair qu'ils ont subi un filtre épistémologique, d'une part par la conduite du débat par le maître et, d'autre part, par l'interprétation que nous avons faite des propositions. Mais nous faisons l'hypothèse que cet espace a une valeur qui dépasse le cas étudié. D'une part car il gomme l'aspect chronologique de ce débat particulier au profit des relations logiques. D'autre part parce que, selon le principe de toute étude qualitative, nous pensons que ce cas fait sens. Et enfin parce que tout ou partie de cet espace se retrouve dans d'autres débats sur ce sujet, avec des élèves d'âge comparable. » (Orange, 2000, p. 72)

L'espace de contraintes ci-dessous modélise la problématisation associée à un débat sur la nutrition en CE1-CE2 :

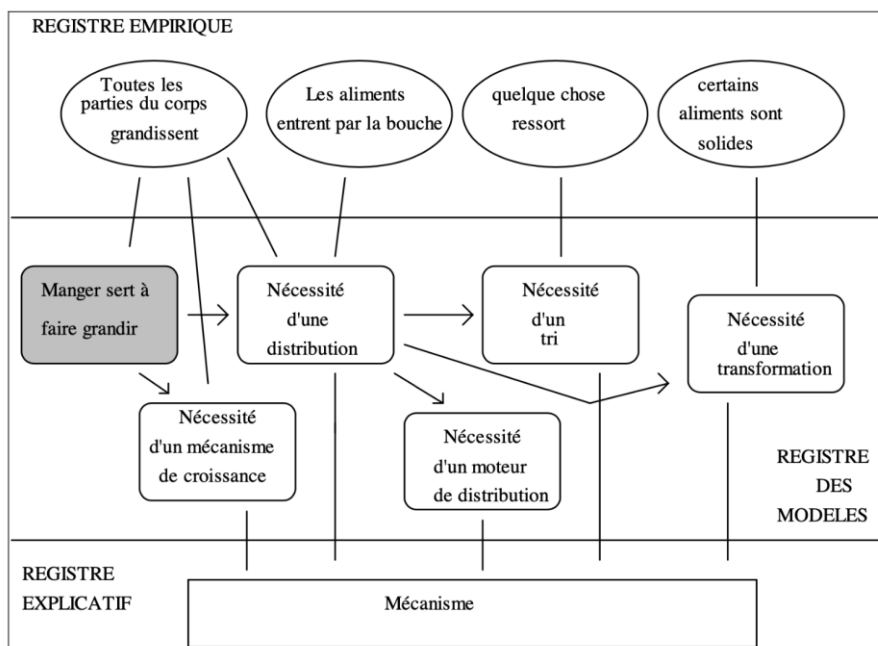


Figure 2 : Un exemple d'espace de contraintes. Extrait de Orange, 2000, p. 71

L'espace de contraintes est particulièrement bien adapté à la modélisation de problèmes explicatifs et scientifiques. Le lecteur en trouvera des exemples en mathématiques dans mon mémoire complémentaire d'HDR (Hersant, 2010a).

Ainsi, la problématisation est un *processus multidimensionnel impliquant position, construction et résolution de problèmes*, opérant par une *dialectique des faits et des idées* (Fabre et Orange, 1997 ; Orange, 2000). En SVT, ce processus porte sur des problèmes explicatifs et permet la construction de nécessités scientifiques, il donne accès à des savoirs apodictiques.

Penser l'enseignement et l'apprentissage des Sciences de la Nature en termes de problématisation implique de permettre l'exploration de problèmes et l'explicitation de nécessités associées à ces problèmes en lien avec des éléments empiriques dans un cadre explicatif donné, afin de permettre l'apprentissage de savoirs apodictiques.

III. LES APPORTS POSSIBLES DU CAP A LA DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES : ILLUSTRATION A PARTIR D'UN EXEMPLE

À l'instar de Orange, je considère que penser l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques en termes de problématisation implique un travail d'exploration d'un problème associé à l'explicitation de nécessités de ce problème, en lien avec des éléments empiriques dans un cadre explicatif donné, tout cela dans le but de permettre la construction de savoirs apodictiques et pas seulement de produire des solutions au problème. Dans quelle mesure cela est-il possible en mathématiques ? Qu'est-ce que ce point de vue apporte à la didactique des mathématiques ? Je propose d'explorer ces questions à partir d'un exemple, après avoir

rapidement montré que les fondements épistémologiques du CAP sont compatibles avec les mathématiques.

1. L'adéquation du CAP aux mathématiques

La possibilité de mobiliser le cadre de la problématisation en didactique des mathématiques renvoie donc d'abord à la question suivante : en quoi ce processus multidimensionnel et cette dialectique de faits et d'idées sont-ils pertinents pour les mathématiques ? Cette question est fondamentalement épistémologique avant d'être didactique.

Considérer la dimension expérimentale des mathématiques comme le propose, par exemple, le mathématicien Pòlya (Pòlya, 1965) permet, dans un premier temps de montrer que la dialectique de faits et d'idées n'est pas étrangère aux mathématiques. En effet, pour Pòlya l'observation « par hasard » de faits mathématiques suggère des « questions générales » (position du problème), tout comme l'observation de plantes ou de formations géologiques peut conduire le « naturaliste » à se poser des questions qui dépassent cette observation (Pòlya, 1965, p. 110-111). Alors, de façon similaire dans les deux disciplines, pour Pòlya, l'étude de ces questions à partir d'« exemples particuliers » (données, faits) suggère des « significations nouvelles » (idées) qui permettent d'établir une hypothèse (idée) puis une preuve (nécessité) :

« Dans un cas similaire, le naturaliste n'aurait guère de doute sur l'exactitude de la loi générale que lui ont suggérée les cas particuliers observés par lui ; cette loi générale est presque prouvée par induction. Le mathématicien s'exprime avec plus de réserve bien qu'au fond il pense de même. Il se bornera à dire que l'induction suggère fortement le théorème. » (Pòlya, 1965, p. 111)

Les propos de D. Perrin qui affirme que « les mathématiques sont aussi une science expérimentale » (2007) vont le même sens.

Il y a cependant des particularités, me semble-t-il, dans cette dialectique en mathématiques par rapport aux SVT. En premier lieu, la dimension empirique des faits n'est pas tout à fait la même. Cela a des conséquences sur l'enseignement. En effet, il n'est pas rare qu'en SVT les élèves aient une certaine familiarité avec les faits : depuis leur plus jeune âge ils sont confrontés à la transformation des aliments ingérés, au mouvement du coude.... Il semble y avoir une plus grande proximité avec des concepts quotidiens qu'en mathématiques, tout au moins pour certains domaines. Par ailleurs pour les mathématiques, il semble nécessaire de distinguer la dialectique faits – idées à l'œuvre dans le processus multidimensionnel de position – construction - résolution du problème et celle à l'œuvre dans la preuve : la preuve a pour fonction d'établir le caractère vrai d'une proposition mathématique en démontrant son caractère nécessaire, mais cela peut se faire parfois sans mettre en évidence les raisons profondes pour lesquelles il en est ainsi et pas autrement. Cette différence nous semble liée aux types de problème rencontrés en mathématiques : les problèmes mathématiques ne sont pas tous des problèmes explicatifs.

Malgré ces nuances, épistémologiquement, l'usage du CAP en didactique des mathématiques apparaît possible.

Je propose ci-dessous une étude de cas pour illustrer son usage et introduire la réflexion sur ce qu'il peut apporter à la didactique des mathématiques. Mon objectif dans ce texte est en particulier de rendre compte de la démarche de recherche que l'on peut utiliser avec le CAP pour proposer une situation qui permet une problématisation et pour étudier l'activité des élèves. Je m'attache donc particulièrement à expliciter cette démarche et la nature des résultats obtenus.

2. L'analyse de l'activité des élèves avec les outils du CAP : le cas des solides de Platon

La situation est celle des « solides de Platon ». Elle est proposée en formation continue à des professeurs des écoles (PE dans la suite du texte) lors d'un stage sur la démarche d'investigation en sciences et en mathématiques. J'ai présenté dans un poster à la 18^e école d'été de didactique des mathématiques le début de cette étude (Hersant, 2016).

Cette situation correspond à celle étudiée dans des circonstances proches par Dias et Durand-Guerrier (Dias, 2008 ; Dias, 2009a, 2009b ; Dias et Durand-Guerrier, 2005) dans le cadre de travaux sur la dimension expérimentale des mathématiques. Avec cet exemple, j'illustre comment on peut analyser avec le CAP l'activité des élèves² en utilisant un espace de contraintes et d'autres outils que j'ai développés pour rendre compte de la problématisation comme processus dynamique.

Précisions sur la situation et le corpus

L'énoncé du problème est le suivant : « Un polyèdre est un solide délimité par des faces planes. Un polyèdre régulier est un polyèdre convexe dont les faces sont des polygones réguliers (tous les côtés sont de même longueur et tous les angles ont la même mesure) deux à deux superposables tels qu'à tous les sommets corresponde un même nombre de faces. Déterminer tous les polyèdres réguliers ».

Les PE n'avaient pas le droit de consulter des documents ou internet mais disposaient de papier, scotch et polydrons pour construire, s'ils le souhaitaient, des solides. Ils travaillaient dans un premier temps en groupe.

À l'issue du travail de groupe, ils devaient fournir deux affiches : l'une sur les résultats de leur recherche, l'autre sur la chronique de leur recherche. Ces affiches avaient vocation à nourrir un débat sur le problème et sur la démarche d'investigation en mathématiques. En particulier, il s'agissait dans le temps de mise en commun et de synthèse de mettre en évidence que :

- l'investigation conduit à une construction du problème et à la construction de nécessités ;
- la solution ne réside pas uniquement dans la détermination du nombre de solides réguliers mais dans cette détermination argumentée ;
- la connaissance nouvelle et essentielle dans ce problème n'est pas le nombre de polyèdres réguliers mais les raisons construites et en particulier la condition de possibilité de construction d'un tel solide sur les angles dièdres.

En proposant cet énoncé, je visais à provoquer chez les PE un changement de regard sur la géométrie des solides. En effet, les PE ont un rapport très descriptif à la géométrie des solides, je souhaitais qu'ils saisissent que leur construction dépend de contraintes dont le nombre de faces, de sommets, d'arêtes ne sont que des conséquences. En d'autres termes, je souhaitais les faire évoluer d'un REX d'une géométrie assertorique et descriptive vers une géométrie apodictique liée aux contraintes de construction des solides. Ce changement de regard est associé à un changement de REX. Autrement dit, il s'agissait de permettre aux PE d'accéder au problème fondamental de l'explicitation des conditions de possibilités de construction d'un

² Dans l'exemple proposé, les « élèves » sont des professeurs des écoles en formation continue. Cela ne modifie pas de façon essentielle le type d'analyse qui peut être produit avec le CAP : en effet le CAP peut être utilisé pour étudier toute problématisation, qu'il s'agisse d'apprenants ou de scientifiques (voir les travaux de Orange sur Claude Bernard, Orange, 2003).

polyèdre régulier. L'analyse *a priori* de la situation ci-dessous montre que la situation présente de bonnes potentialités pour cela.

Les travaux de certains groupes, ainsi que la mise en commun et la synthèse ont été filmés. Les affiches produites ont été recueillies. Le cas étudié correspond au travail du groupe B, composé de quatre professeurs des écoles. L'analyse repose ainsi sur la transcription des échanges qui ont eu lieu dans ce groupe et sur les affiches produites.

Brève analyse a priori de la situation

Tout comme on mène une analyse *a priori* lors de l'élaboration d'une ingénierie didactique dans le cadre de la TSD pour s'assurer des potentialités didactiques de la situation (Artigue, 1990) je propose de mener une analyse *a priori* dans le double cadre de la TSD et du CAP (voir aussi Hersant, 2010a). Cette analyse a un double objectif : déterminer s'il existe un milieu suffisant pour fournir des rétroactions au PE qui leur permette de saisir si leurs propositions sont erronées ; évaluer les potentialités de la situation pour construire le problème et ses sous-problèmes ainsi que les nécessités associées à la détermination de tous les polyèdres réguliers. Je mène cette analyse à partir des questions suivantes :

- les PE disposent-ils des connaissances pour entrer dans le problème ?
- quelles sont les rétroactions possibles du milieu ?
- les PE ont-ils les connaissances qui leur permettent d'interpréter ces rétroactions et de progresser dans l'exploration du problème ?
- la situation permet-elle la construction des nécessités du problème ?

Le matériel proposé aux PE suggère, par un effet de contrat (facette sociale du contrat, Hersant, 2014), une exploration empirique des possibles à partir de la construction de solides en polydrons ou en papier. L'existence de certains solides bien connus ne sera pas problématique (cube, tétraèdre). On peut penser que le cas des solides à faces pentagonales ne sera pas envisagé dès le début car le matériel ne propose pas de pentagones (il faut construire les faces en papier, les connaissances pour cela ne sont probablement pas très disponibles chez les PE). En revanche, le cas du solide à faces hexagonales sera traité plus tôt car les PE disposent de polydrons hexagonaux. Ce cas posera problème, comme le mentionne par ailleurs Dias (Dias, 2008). En effet, ces hexagones assemblés pavent le plan mais le milieu n'est pas assez contraignant (Hersant, 2010b) de ce point de vue : si on a l'intention de former un solide, on peut assembler les pièces en faisant un angle très ouvert mais non plat et on ne « voit » pas le problème. En revanche, rapidement se pose la question du nombre de faces (on a l'impression qu'il en a énormément). Du point de vue du milieu, le peu de polydrons disponibles oblige à utiliser le papier, et donc à construire des hexagones. Cette tâche amène forcément à se questionner sur la valeur des angles au sommet de ce polygone (60°). Ce faisant cela permet d'introduire dans le milieu la notion d'angle, trièdre ou dièdre, qui est un levier de la situation. Par ailleurs, le coût de la construction de nombreux hexagones en papier constitue une rétroaction importante du milieu qui incite à poser et construire le problème : est-ce bien nécessaire de faire tous ces découpages ? Est-il vraiment possible de construire ce polyèdre ? et plus largement « faut-il construire tous ces polyèdres ? » puis « comment être sûr d'avoir tous les polyèdres ? ». Ces questions, associées aux éléments empiriques établis, devraient amener à la construction de nécessités pour circonscrire et réduire l'espace des possibles. Par ailleurs, cette construction du problème conduit bien à faire de la géométrie euclidienne.

Identification d'un événement de problématisation

L'affiche « résultats » du groupe observé (annexe 1) met en évidence deux regards très différents sur le problème.

Dans la partie supérieure, un tableau décrit les polyèdres identifiés en fonction de la forme de leur face et de leur nombre de faces, arêtes et sommets. Les flèches d'une colonne à l'autre du tableau et la formule sous le tableau indiquent la recherche de relations numériques (de proportionnalité) entre ces éléments. Cette partie de l'affiche situe le travail effectué principalement dans le cadre de la géométrie affine, en appui sur l'observation de solides construits. Cette façon d'envisager le problème et ses solutions renvoie à une forme de raisonnement où les nécessités du problème ne seront pas explicites car embarquées implicitement par la formule.

Dans la partie inférieure de l'affiche, un texte met en avant une nécessité sur la somme des angles dièdres au sommet, ce qui témoigne d'un travail de géométrie métrique et euclidienne organisé par la recherche d'une définition en extension de l'ensemble des solutions.

Ainsi, les différences de cadres (Douady, 1987) et de points de vue (Rogalski, 2001) mobilisés dans les deux parties de l'affiche témoignent d'un changement de grille de lecture de la situation accompagné de la construction de nécessités. Il y a donc eu dans ce groupe, d'une part, une problématisation et, d'autre part, ce que nous avons appelé avec S. Doussot et D. Orange-Ravachol un événement de problématisation (Doussot et al., 2012), c'est-à-dire une rupture d'intelligibilité de la situation qui a rendu possible un nouveau regard sur le problème, a enclenché une nouvelle intelligibilité de la situation et a conduit à la construction de nécessités. Étudier le processus de problématisation à l'œuvre dans ce groupe renvoie donc à identifier, d'une part, la façon dont les PE ont, petit à petit, posé et construit le problème à partir de l'énoncé et, d'autre part, ce qui a généré cette rupture d'intelligibilité ainsi que ce qu'elle signifie en termes de connaissances mathématiques.

Éléments de méthodologie

Pour ce faire, j'ai découpé en phases et épisodes les échanges recueillis dans le groupe de la façon suivante. Une phase correspond à un but. Ce but peut être interrompu puis repris ultérieurement. Un épisode correspond à un problème travaillé au cours de la réalisation de ce but (est-ce qu'on est sûr de nos dénombrements précédents ? est-ce qu'il y a toujours trois faces à chaque sommet ?...). Ces problèmes correspondent aux questions débattues au sein du groupe ; ces questions sont parfois formulées très clairement mais peuvent aussi rester relativement implicites. Il y a donc une reconstruction de ces problèmes par le chercheur.

Par ailleurs, j'ai recensé, toujours à partir de la vidéo³ et des échanges dans le groupe, les éléments empiriques que mobilisent les PE ainsi que ce qui est de l'ordre des nécessités pour eux. Parmi ces nécessités, certaines correspondent à des principes qu'ils tiennent pour vrais mais qui ne le sont pas. Ces principes qui organisent en partie l'activité des PE ne sont pas explicites au début de l'activité mais le deviennent au cours du travail du problème, ils sont alors questionnés. Ainsi, les PE considèrent qu'à un polygone régulier correspond exactement un polyèdre régulier. La condition « la somme des angles dièdres à chaque sommet du polyèdre doit être strictement inférieure à 360° » est quant à elle une nécessité « vraie » construite au cours du travail.

La construction du problème dans le groupe et ce qui l'organise

Dans le corpus j'identifie 5 phases de la construction du problème : 1) explorer les polyèdres connus et voir s'ils correspondent à des polyèdres réguliers, 2) rechercher une formule, 3) étudier le cas du polyèdre avec des faces hexagonales, 4) rechercher une formule, 5) déterminer

³La vidéo permet en particulier de savoir ce qui est désigné parfois dans le discours par « là », « ici »...

le nombre de faces à chaque sommet pour établir la formule. Dans chacune de ces phases, les PE travaillent plusieurs problèmes.

Par ailleurs, j'identifie aussi deux principes tenus pour vrais et qui sous-tendent une partie de leur travail. Tout d'abord, le principe que je nomme de régularité : « il y a trois faces à chaque sommet ». Ce principe reste implicite jusqu'à l'épisode 5a où il est questionné suite à une intervention de ma part pour éliminer une construction erronée (épisode 4e). Cette intervention conduit les PE à observer leur tableau et les solides qu'ils ont construits et à s'interroger sur d'autres possibles. Le second principe que je nomme de bijectivité est le suivant : « à tout polygone régulier correspond exactement un polyèdre régulier ». Ce principe organise le travail des PE jusqu'à l'épisode 4d où cette bijectivité commence à être questionnée en lien avec la recherche de la formule. Le tableau de la première partie de l'affiche est construit sur la base de ces deux principes.

Enfin, parmi les problèmes qu'ils mettent au travail, je distingue trois types qui correspondent à des questionnements de nature différente et jouent des rôles différents dans l'exploration et la délimitation des possibles. Le premier type est très lié à la recherche immédiate de la solution. Le second renvoie à des questionnements qui témoignent d'une réflexivité par rapport à la recherche immédiate de solutions et à une volonté de délimiter les possibles. Par exemple, les PE ne se questionnent pas sur la possibilité de construire un polyèdre régulier avec un hexagone ou sur le nombre de faces d'un tel polyèdre mais sur les raisons pour lesquelles ils n'arrivent pas à construire un polyèdre (3e, 5i) ou sur la nécessité de construire les polyèdres. Le troisième type de problème concerne le questionnement des PE sur les conditions de l'impossibilité mathématique du problème. Ce type de questionnement est présent dès l'épisode 1d mais ne revient pas ensuite. En fait, en 1d, il s'agit d'un phénomène de contrat didactique. En effet, lors des journées précédentes du stage les PE ont travaillé sur la problématisation en SVT et ont dégagé ce type de questionnement.

Pour rendre compte de la façon dont les PE construisent le problème par un travail d'exploration et de délimitation des possibles je représente les problèmes qu'ils travaillent sur deux axes : horizontalement, j'organise les problèmes selon les trois types mentionnés précédemment ; verticalement, de haut en bas, je dispose par ordre chronologique de la première rencontre les problèmes correspondant. Comme chaque problème peut être travaillé dans plusieurs épisodes, j'indique pour chacun les épisodes dans lesquels il est traité. Cela me conduit au schéma de la figure 3.

Ce schéma rend compte de l'ensemble des problèmes explorés par les PE. Il met en évidence que de nombreux problèmes de type 1 sont travaillés par les PE et que certains d'entre eux font l'objet de plusieurs épisodes : ils ne sont pas résolus en une seule fois, les PE y reviennent.

Le schéma fait aussi apparaître les proximités chronologiques dans le travail des différents problèmes. Il donne ainsi une idée de la façon dont cette exploration les conduit à une délimitation des possibles.

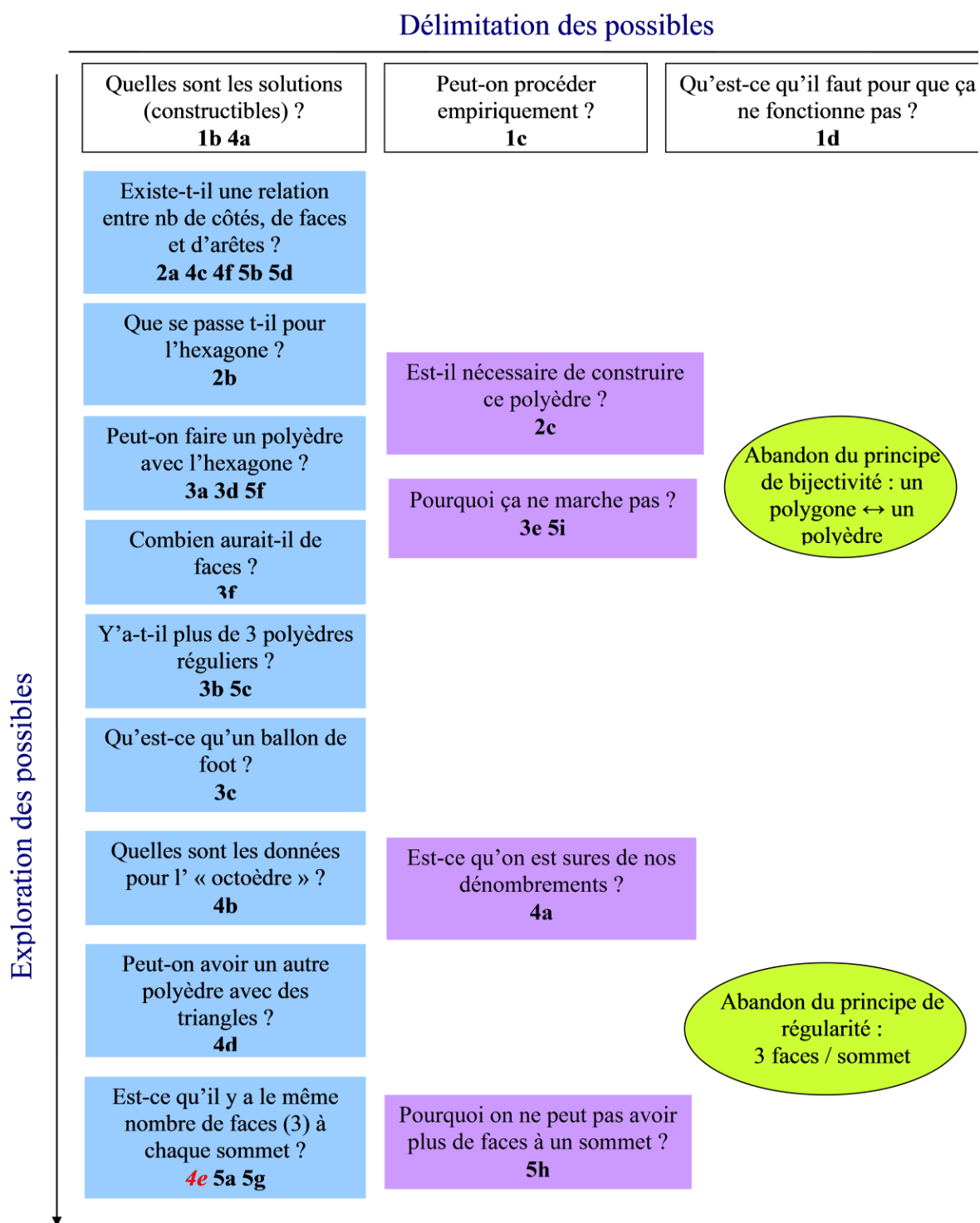


Figure 3 : exploration et délimitation des possibles

L'enchaînement des problèmes, leur cinématique

Le schéma de la figure 3 ne permet pas de comprendre quels problèmes amènent les PE à abandonner leurs deux principes. Pour cela, il faut préciser les liens entre les problèmes dans le travail des PE sans mettre au premier plan la chronologie, de façon à identifier les problèmes qui jouent un rôle particulier dans la construction du problème. En effet, chronologie n'est pas

logique et le passage d'un problème à un autre ne s'explique pas uniquement par ce qui vient de se passer juste avant.

Pour cela, je regroupe les problèmes par proximité thématique pour constituer des catégories. J'obtiens ainsi quatre catégories que j'assimile à des macro-problèmes. La première regroupe les problèmes relatifs à la recherche d'une relation entre le nombre de faces, de sommets, d'arêtes du polyèdre. Je la désigne par « problème de la formule ». La seconde comprend les problèmes relatifs à la possibilité ou pas de construire un polyèdre avec des hexagones. Je l'appelle le « problème de l'hexagone ». Les troisième et quatrième catégories regroupent respectivement les problèmes relatifs à la mise en questionnement des deux principes que les PE tiennent pour vrais. Je les désigne respectivement « principe de bijectivité » et « principe de régularité ». Cette thématisation des problèmes rencontrés au niveau de chaque épisode me permet de construire le schéma de la figure 4 qui représente le cheminement, épisode (problème) par épisode, entre ces quatre macro-problèmes. Les épisodes en violet correspondent à un travail explicite sur la délimitation des possibles et la construction des nécessités (voir figure 3). Les autres correspondent à une exploration des possibles plus proche de la recherche de solutions (peut-on avoir un polyèdre avec les hexagones ? qu'est-ce qu'un ballon de foot ? peut-on avoir un autre polyèdre avec des triangles ? ...). Les flèches rendent compte du passage d'un problème à un autre, leur couleur n'a pas de signification particulière ici.

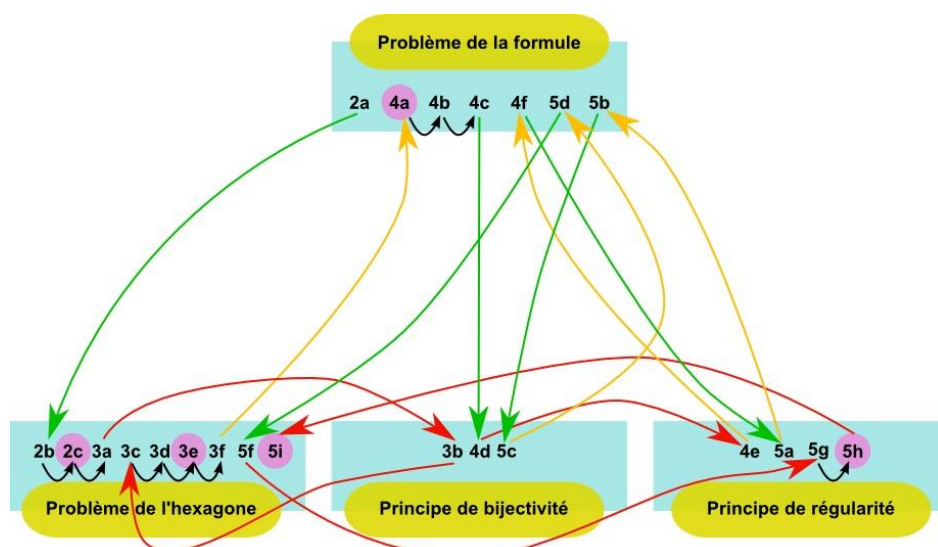


Figure 4

Ce schéma met en évidence que le macro-problème de la formule est récurrent : les professeurs des écoles y reviennent presque de façon obsessionnelle. Ce macro-problème est relié de façon dense aux trois autres ; il est le point de départ et d'arrivée de nombreuses flèches qui relient des épisodes associés à l'exploration des possibles (figure 3). Ainsi, le problème de la formule semble jouer un rôle majeur dans l'exploration des possibles.

Le problème de l'hexagone est celui qui comprend le plus grand nombre de sous-problèmes distincts et de passages d'un sous-problème à un autre en son sein. Par ailleurs, il est aussi le cœur des problèmes associés à une délimitation explicite des possibles. Il est donc intrinsèquement dense et joue un rôle important dans la délimitation des possibles. Il est aussi étroitement relié chronologiquement (allers-retours rapides) aux principes de bijectivité et de régularité. Cela me conduit à dire qu'il joue aussi un rôle majeur dans la remise en cause de ces principes. En d'autres termes, je le considère comme une source importante de la problématisation des PE.

Ce schéma montre qu'au départ, les possibles sont nombreux : autant de possibles que de polyèdres réguliers mais cela reste implicite et concevable pour les PE du groupe. C'est le principe de bijectivité. La difficulté matérielle qu'ils rencontrent dans la construction de « l'hexaèdre » (« ça plie un peu », « ça ne plie pas ») les amène à mettre en doute ce principe et à envisager d'autres possibles (plusieurs polyèdres réguliers pour un polygone régulier donné, pas de polyèdre régulier pour un polygone régulier donné), ce qui implique d'invalider le principe de régularité. Dans le registre empirique, et en relation avec le REX de la géométrie physique, cela conduit à la construction de l'octaèdre. Mais cet abandon du principe de régularité leur ouvre aussi des possibles d'une autre façon et appelle la construction de nouvelles nécessités. En effet, dès qu'ils imaginent qu'on peut placer plus de trois faces par sommet, ils perçoivent qu'il y aura une limite (au moins d'ordre physique). Et, ils perçoivent aussi que la recherche d'une formule liant le nombre de faces, de sommets et d'arêtes dans le registre de la géométrie affine ne permettra pas forcément de réduire les possibles, ni d'identifier les nécessités de cette réduction⁴. Ainsi, c'est l'impossibilité empirique de construire un polyèdre avec quatre pentagones par sommet, alors qu'on peut en construire un avec quatre triangles par sommet, qui conduit les PE à la recherche de raisons et à des changements de registre, au sens de Duval (1995), (patron vers 3D et inversement) et de cadre, de l'anneau vers le métrique. Dans cette évolution, le cadre métrique constitue alors une nouvelle grille de lecture de la réalité. Le mot « angle » apparaît dans les échanges, d'abord comme angle trièdre puis comme angle dièdre. La nécessité d'avoir une somme des angles dièdres au sommet inférieure à 360° est établie alors et la réduction des possibles, puis la liste des possibles en découle. Tout cela permet la construction d'une solution raisonnée du problème.

Conclusion de l'analyse

Finalement, qu'est-ce qui fait événement de problématisation et engendre la rupture d'intelligibilité ? À partir de ces trois schémas, j'ai précisé la façon dont les problèmes s'enchaînent, le rôle qu'ils jouent dans l'exploration et la délimitation des possibles et la façon dont se construisent les nécessités en lien avec ces problèmes et les registres empiriques et des explications. Je décris ainsi le processus de problématisation qui s'est réalisé dans le groupe dans ses deux dimensions et mets en évidence que c'est l'abandon du principe de régularité, lié en amont à l'abandon du principe de bijectivité, qui enclenche la nouvelle intelligibilité de la situation : les professeurs des écoles travaillent sur la même réalité (les mêmes objets) mais n'en n'ont pas la même lecture. Cela est bien mis en évidence par l'espace de contraintes où, dans le registre empirique, les mêmes objets (constructions 3D avec des polyèdres ou du papier et « patrons » des figures) sont interprétés de façons différentes selon que le cadre utilisé pour « voir » la réalité relève de la géométrie physique ou de la géométrie métrique. L'évolution du REX au cours de la recherche du problème, en lien avec la construction de problèmes, est associée à ce changement de regard.

IV. CONCLUSION

Après avoir introduit de façon synthétique les idées, les concepts ainsi que les outils du CAP et montré que le CAP est un cadre théorique épistémologiquement compatible avec les mathématiques, j'ai illustré par un exemple en quoi peut consister une analyse outillée par le

⁴Une telle démonstration est cependant possible avec la formule d'Euler-Poincaré.

CAP. À partir de cet exemple, je souhaite mettre en évidence ce que peut apporter, de mon point de vue, le CAP à la didactique des mathématiques.

Le premier point est que l'analyse avec le CAP donne accès à la façon dont les élèves construisent le problème à partir des éléments dont ils disposent. En effet, rendre compte du processus de problématisation des élèves conduit à analyser leur activité dans deux dimensions. Dans la dimension cognitive, il s'agit de construire l'espace problème parcouru et donc d'identifier les problèmes construits par les élèves, tout en distinguant ceux qui contribuent à l'exploration des possibles de ceux qui contribuent à la délimitation des possibles. Du point de vue de l'articulation des données et des conditions, il s'agit de renseigner les trois registres de l'activité des élèves et en particulier d'identifier leur REX et les évolutions de REX perceptibles. Cette évolution du REX est considérée comme un signe de l'initiation de nouveaux apprentissages. Les éléments issus de ce type d'analyse peuvent être utiles au didacticien pour concevoir des ingénieries didactiques et des situations forcées (Orange, 2010).

Le second point est qu'avec ce type d'analyse, on met à disposition du didacticien et de l'enseignant, me semble-t-il, plusieurs éléments intéressants à différents niveaux. En premier lieu, penser l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques en termes de problématisation engage à penser les relations entre les trois registres de l'activité (empirique, nécessités, explicatif), ce qui a pour moi deux conséquences. D'abord, on est amené à expliciter le REX des élèves, ce qui est, souvent, fondamentalement ce que l'on cherche à faire évoluer. Ensuite, on met en évidence la dialectique des données et des conditions à l'intérieur d'un REX, ce qui donne du corps à la question de l'investigation ou de l'expérience en mathématiques. En second lieu, les analyses avec le CAP permettent d'accéder, d'une part, à la dynamique des problèmes, en distinguant des problèmes de nature différente, d'autre part aux nécessités supposées ou construites par les élèves et enfin au REX. Ces éléments sont autant de points d'appui précieux, me semble-t-il, pour négocier avec les élèves un texte de savoir qui ne se réduit pas à la solution du problème mais rend compte d'une pratique de construction de savoirs mathématiques apodictiques. En particulier, ce texte de savoir pourra mettre en évidence les nécessités construites et les théorèmes en actes faux déconstruits, ainsi que certaines des questions cruciales dans l'avancée dans le problème, typiquement les problèmes qui permettent de délimiter les possibles. Cela conduit à dépasser la distinction problème-outil vs problème-objet (Hersant, 2010a, 2012) dans l'enseignement des mathématiques pour aller vers une conception unifiée de la résolution de problème en mathématiques. En effet, à partir de la situation des solides de Platon, on peut par exemple mettre en évidence à la fois des savoirs de géométrie des solides (par exemple : « pour pouvoir construire un polyèdre, il faut que la somme des angles dièdres à chaque sommet soit strictement inférieure à 360° ») mais aussi des savoirs liés à la résolution de problèmes en mathématiques (par exemple : « Dans ce problème on nous demande l'ensemble des solutions possibles, il y a deux possibilités : cet ensemble est fini ou infini. Il peut être intéressant d'essayer dans un premier temps de ce faire une idée à ce sujet. »). Réfléchir dans cette direction me semble une piste à explorer notamment pour (re)penser les questions d'institutionnalisation des savoirs et fournir aux enseignants des pistes pour la gestion de ce processus.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Arsac, G., Germain, G., & Mante, M. (1991). *Problèmes ouverts et situations-problèmes*. IREM de Lyon.
- Artigue, M. (1990). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(3), 281-308.
- Bachelard, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique*. Paris : Vrin.
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Dias, T. (2008). *La dimension expérimentale des mathématiques : Un levier pour l'enseignement et l'apprentissage*. Thèse Université de Lyon 1.
- Dias, T. (2009a). La dimension expérimentale en mathématiques. Un exemple avec la situation des polyèdres. *Grand N*, 83, 63-83.

- Dias, T. (2009b). L'apprentissage de la géométrie dans la scolarité obligatoire : une dialectique entre objets sensibles et objets théoriques. In F. Chellougui, C.-M. Chiocca, G. Gueudet, M. Hersant, A. Pressiat, É. Roditi, L. Trouche & F. Vandebrouck. (Eds.). *Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques. Cours de la XIV^e école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 43-63). La Pensée Sauvage.
- Dias, T., & Durand-Guerrier, V. (2005). Expérimenter pour apprendre en mathématiques. *Repères IREM*, 60, 61-78.
- Douady, R. (1987). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 5-31.
- Doussot, S., Hersant, M., Lhoste, Y., & Orange-Ravachol, D. (à paraître). *Le cadre de l'apprentissage par problématisation. Apports aux recherches en didactiques*. Rennes : Presses Universitaires de Rennes
- Doussot, S., Hersant, M., & Orange-Ravachol. (2012). *Événement de problématisation et dynamiques de problématisation*. Communication au 10^e colloque du réseau Probléma. Bruxelles
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine : Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang.
- ECCEmaths. (2012). La correspondance mathématique : d'un dispositif de recueil de données à un dispositif pédagogique. *Repères IREM*, 87, 41-58.
- Fabre, M. (1993). De la résolution de problème à la problématisation. *Les Sciences de l'éducation - Pour l'Ère nouvelle*, 4-5, 71-101.
- Fabre, M. (1997). Pensée pédagogique et modèles philosophiques : Le cas de la situation-problème. *Revue française de pédagogie*, 120, 49-58.
- Fabre, M. (1999). *Situations-problèmes et savoir scolaire*. Paris : Presses Universitaires de France.
- Fabre, M. (2005). Deux sources de l'épistémologie des problèmes : Dewey et Bachelard. *Les Sciences de l'éducation - Pour l'Ère nouvelle*, Vol. 38(3), 53-67.
- Fabre, M. (2006). Qu'est-ce que problématiser ? L'apport de John Dewey. *Perspectives en éducation et formation*, 15-30.
- Fabre, M. (2009). *Philosophie et pédagogie du problème*. Paris : Librairie Philosophique Vrin.
- Fabre, M. (2011). *Éduquer pour un monde problématique (1^{re} éd.)*. Paris : Presses Universitaires de France.
- Fabre, M. (2016). *Le sens du problème*. Bruxelles : de Boeck Éducation.
- Fabre, M. (2017). *Qu'est-ce que problématiser ?*. Paris : Vrin.
- Fabre, M., & Orange, C. (1997). Construction des problèmes et franchissements d'obstacles. *ASTER*, 24, 37-57.
- Fabre, M., & Orange, C. (à paraître). Postface. In S. Doussot, M. Hersant, Y. Lhoste & D. Orange-Ravachol (Eds.), *Le cadre de l'apprentissage par problématisation. Apports aux recherches en didactiques*. Rennes : Presses Universitaires de Rennes.
- Grau, S. (2017). *Problématiser en mathématiques : Le cas de l'apprentissage des fonctions affines*. Thèse de doctorat. Université de Nantes.
- Grau, S. (2020). Problématiser en mathématiques : le cas de l'apprentissage des fonctions affines. In J. Pilet & C. Vendaiera (Eds.), *Actes du séminaire de didactique des mathématiques. Année 2019*. (pp. 36-56). Paris : IREM Paris 7
- Hankeln, C., & Hersant, M. (2020). Processus de modélisation et processus de problématisation en mathématiques à la fin du lycée. Une étude de cas dans une perspective de didactique comparée. *Éducation & Didactique*, 14(3), 39-67.
- Hersant, M.. (2008). "Problèmes pour chercher" : Experience, Possible and Necessity in Pupils Reasonings. In *The First Century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908-2008). Reflecting and Shaping the World of Mathematics Education. Symposium on the Occasion of the 100th Anniversary of ICMI, Rome*. <http://www.unige.ch/math/EnsMath/Rome2008/partWG1.html>
- Hersant, M. (2009). Étude de l'activité mathématique de lycéens dans une correspondance mathématique à propos d'un problème de maximum. In L. Coulange & C. Hache, *Actes du Séminaire national de didactique des mathématiques*, (pp. 351-374). Paris : IREM Paris 7.
- Hersant, M. (2010a). *Empirisme et rationalité à l'école élémentaire, vers la preuve au cycle 3*. Mémoire de recherche, Habilitation à Diriger des recherches, Université de Nantes. <https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01777604>
- Hersant, M. (2010b). Le couple (contrat didactique, milieu) et les conditions de la rencontre avec le savoir : De l'analyse de séquences ordinaires au développement de situations didactiques. [Note de synthèse des travaux, habilitation à diriger des recherches, Université de Nantes]. <https://sites.google.com/site/magalihersant/publications/habilitation-a-diriger-des-recherches>
- Hersant, M. (2011). Correspondance mathématique et conditions d'une activité mathématique « créative » et problématisée à la fin du lycée. *Educational Studies in Mathematics*, 78(3), 343-370.
- Hersant, M. (2012). Recherche et résolution de problèmes dans l'enseignement des mathématiques : une étude didactique pour identifier les savoirs et les apprentissages possibles. In A. Robert & M. L. Elalouf (Eds.), *Les didactiques en questions. Etat des lieux et perspectives pour la recherche et la formation*. Bruxelles : De Boeck.
- Hersant, M. (2014). Facette épistémologique et facette sociale du contrat didactique : une distinction pour mieux caractériser la relation contrat didactique milieu, l'action de l'enseignant et l'activité potentielle des élèves. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 34(1), 9-31.
- Hersant, M. (2016). Démarche d'investigation et apprentissages géométriques chez les professeurs des écoles. Problématisation à propos des "solides" de Platon. In Y. Matheron, G. Gueudet, C. Winslow, S. Besnier, V. Celi, C. Derouet, D. Forest, M. Krysinka, S. Quilio, M. Rogalski, A. Sierra Tomas, & L. Trouche (Eds.), *Enjeux et débats en didactique des mathématiques. Actes de la 18^e école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 758-765). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Hersant, M. (2020). Pratiques de débutants en mathématiques en maternelle : matérialité des situations et chronologie. *Revue Française de Pédagogie*, 208, 17-30

- Hersant, M. (à paraître). Usages et apports du cadre de la problématisation à la didactique des mathématiques. In S. Doussot, M. Hersant, Y. Lhoste & D. Orange-Ravachol (Eds.), *Le cadre de l'apprentissage par problématisation. Apports aux recherches en didactiques*. Rennes : Presses universitaires Rennaises.
- Hersant, M., & Choquet, C. (2019). Is an Inquiry-Based Approach Possible at the Elementary School? In P. Liljedahl & M. Santos-Trigo (Eds.), *Mathematical Problem Solving. Current Themes, Trends, and Research*. (pp. 113-131). Springer.
- Hersant, M., & Morin, C. (2013). *Pratiques enseignantes en mathématiques : Expérience, savoir et normes*. Presses Universitaires de Bordeaux.
- Hersant, M., & Orange-Ravachol, D. (2015). Démarche d'investigation et problématisation en mathématiques et en SVT : des problèmes de démarcation aux raisons d'une union. *Recherche en Education*, 21, 95-108.
- Hersant, M., & Quiniou, A.-C. (2017). Conditions didactiques d'une activité mathématique au lycée professionnel : deux études de cas. *Spirale*, 59, 107-122.
- Martinand, J.-L. (1992). Présentation. In J.-L. Martinand (Eds.), *Enseignement et apprentissage de la modélisation en sciences* (pp. 7-22). Paris : INRP.
- MEN. (2002). Documents d'accompagnement des programmes. Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche, Direction de l'enseignement scolaire, Mathématiques, SCEREN CNDP.
- Orange, C. (1993). Repères épistémologiques pour une didactique du problème. *Les Sciences de l'éducation - Pour l'Ère nouvelle*, 4-5, 51-69.
- Orange, C. (2000). *Idées et raisons*. Mémoire de recherche, Habilitation à Diriger des recherches. Université de Nantes.
- Orange, C. (2002). Apprentissage scientifique et problématisation. *Les Sciences de l'éducation - Pour l'Ère nouvelle*, 35(1), 25-42.
- Orange, C. (2003). Un exemple de problématisation en biologie : Claude Bernard et le milieu intérieur. *Actes des troisièmes journées scientifiques de l'ARDIST*. Toulouse.
- Orange, C. (2005a). Problématisation et conceptualisation en sciences et dans les apprentissages scientifiques. *Les Sciences de l'éducation - Pour l'Ère nouvelle*, 38(3), 69-93.
- Orange, C. (2005b). Problème et problématisation dans l'enseignement scientifique. *Aster*, 40, 1-7.
- Orange, C. (2007). Quel milieu pour l'apprentissage par problématisation en sciences de la Vie et de la Terre ? *Education et didactique*, 2(1), 37-56.
- Orange, C. (2010). Situations forcées, recherches didactiques et développement du métier enseignant. *Recherches en éducation*, H.S. 2, 73-85.
- Orange, C. (2012). *Enseigner les sciences : problèmes, débats et savoirs scientifiques en classe*. Bruxelles : De Boeck.
- Piaget, J., & Garcia, R. (1983). *Psychogenèse et histoire des sciences*. Flammarion.
- Perrin, D. (2007). L'expérimentation en mathématiques. In Copirelem (Eds.), *Actes du 33^e colloque de la Copirelem*, 37-72. Paris : IREM Paris 7.
- Pòlya, G. (1965). *Comment poser et résoudre des problèmes*. Paris : Jacques Gabay.
- Rogalski, M. (2001). Les changements de cadre dans la pratique des mathématiques et les jeux de cadres de Régine Douady. In Didirem (Eds.), *Actes de la journée en hommage à Régine Douady*, (pp. 13-30). Paris : IREM Paris 7.

ANNEXE 1 : AFFICHE REALISEE PAR LE GROUPE

B

	nombre de faces	nombre de sommets	nombre côtés polygone	nombre d'arêtes
tétraèdre	4	4	3 $\times 3$	6 $\Rightarrow 12$
cube	6	8	4 $\times 3$	12 (24)
polyèdre à faces pentagonales	12	20	5 $\times 4$	30 (60)
...	8	6	3 $\times 4$	12 (24)
		12	3 $\times 5$	30 (60)

$\rightarrow$ nombre de faces par sommet

nombre sommets $\times 3$ = nombre arêtes
2

Au niveau de chaque sommet, il faut que la somme des angles soit inférieure à 360°

$\rightarrow$ triangle : 3 faces $\rightarrow 60^\circ \times 3 \Rightarrow 180^\circ$

5 polyèdres

4 faces $\rightarrow 60^\circ \times 4 \Rightarrow 240^\circ$

5 faces $\rightarrow 60^\circ \times 5 \Rightarrow 300^\circ$

6 faces $\rightarrow 60^\circ \times 6 = 360^\circ$ Impossible à construire

$\rightarrow$ Pentagone : 3 faces $\rightarrow 108^\circ \times 3 = 324^\circ$

4 faces $\rightarrow 108^\circ \times 4 = 432^\circ \rightarrow$ "

$\rightarrow$ Hexagone : 3 faces $\rightarrow 120^\circ \times 3 = 360^\circ \rightarrow$ "

$\rightarrow$ cube

TITRE

Actes du séminaire de didactique des mathématiques de l'ARDM, 2020

Editeurs

Aurélien Chesnais et Hussein Sabra

RESUME

Le séminaire de l'Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques (ARDM) a pour but de favoriser la mise en discussion et la diffusion des recherches en didactique des mathématiques. Il s'agit d'un outil que s'est donné l'ARDM pour soutenir la structuration de la communauté des chercheur-e-s de cette discipline. Le présent ouvrage regroupe les textes issus des séminaires de l'année 2020. Les deux séminaires de l'année 2020 ont eu lieu en janvier et en novembre. Les textes de ce volume sont identifiés en fonction de la nature de l'intervention. Certains correspondent à la présentation d'une thèse ou d'une Habilitation à Diriger des Recherches, certains rendent compte de travaux en cours, d'autres sont des textes associés à des posters. La rubrique « ouverture sur » inclut également des textes de chercheurs dont les travaux ne relèvent pas de la didactique des mathématiques mais s'inscrivent dans un domaine connexe et dont, en tant qu'organisateur, nous avons estimé qu'ils pouvaient présenter un intérêt pour la communauté. Enfin, la rubrique « thématique filée » regroupe les textes qui correspondent à des interventions visant à discuter les fondements des théories et leurs arrière-plans. L'objectif (ambitieux !), était d'initier une démarche pour aborder l'évolution du paysage théorique dans les recherches en didactique des mathématiques et de rouvrir la discussion sur ce qui fonde la discipline (à la fois du point de vue culturel, philosophique, épistémologique voire politique), pour mieux penser son avenir.

IREM de Paris – Université de Paris
Directeur de publication Christophe Hache

www.irem.u-paris.fr

Dépôt légal : 2021 – ISBN : 978-2-86612-400-7