Problèmes de dés

Groupe M. :A.T.H.

Vous trouverez dans cette rubrique des propositions d'activités pour la classe utilisant des extraits de textes historiques en lien, d'une part avec les problèmes de dés étudiés dans la rubrique « Conte du Lundi », d'autre part avec la méthode de Pascal pour résoudre le « problème des partis », présentée dans la rubrique « Étude ».

Problème de dés

La question de savoir en combien de lancers d'un dé on peut parier sans désavantage d'obtenir au moins un six, ou en combien de lancers de deux dés on peut parier d'obtenir au moins une fois un double six, a donné lieu à nombre d'études de la part des mathématiciens des XVII^e^ et XVIII^e^ siècles, dans des lettres ou des traités, et à diverses méthodes et généralisations. Ce problème a été utilisé en classe sous diverses formes, allant d'énoncés guidés à un problème ouvert. Nous donnons ci-dessous un problème destiné à des élèves de spécialité mathématiques (terminale générale) qui permet d'aborder la question à l'aide d'extraits de *La doctrine des chances* de de Moivre. La première partie est destinée à examiner les cas particuliers de lancers successifs d'un dé et de deux dés (la question étant là d'obtenir au moins une fois un as avec un dé ou au moins une fois deux as avec deux dés), et la seconde partie présente la généralisation que fait de Moivre, pour laquelle il utilise des logarithmes et une approximation de $\ln(1+x)$.

La première partie peut être remplacée par une séance de recherche en classe sur un problème ouvert. Nous mettons à la suite de ce problème, dont la première partie est guidée, un exemple d'énoncé de problème ouvert, qui a été utilisé en classe depuis de nombreuses années par les membres du groupe M. :A.T.H.. Vous trouverez sur la page du groupe consacrée à l'histoire des probabilités [1] des comptes-rendus de séances en classe et de l'exploitation faite de ces séances pour le cours de probabilités.

Étude du texte de de Moivre

I. Étude d'un problème de dés

Le texte suivant est une traduction d'un extrait de : Abraham DE MOIVRE, *The doctrine of chances or, a method of calculating the probability of events in play* (3 ème édition, 1756) ; dans cet extrait (pages 9 -11), Abraham de Moivre se propose de résoudre un problème de probabilités concernant le lancer d'un dé équilibré à six faces numérotés de 1 à 6. Dans ce texte, « obtenir un as » signifie « obtenir au moins un as ».

1. https ://irem.u-paris.fr/utilisation-de-lhistoire-des-mathematiques-en-probabilites

CAS I

Trouver la probabilité d'obtenir un as en deux lancers d'un dé

SOLUTION

La probabilité d'obtenir un as la première fois est $\frac{1}{6}$; donc $\frac{1}{6}$ est la première partie de la probabilité demandée.
Si l'as n'est pas sorti la première fois, il peut encore être obtenu la seconde, mais la probabilité de ne pas sortir la première fois est $\frac{5}{6}$, et la probabilité de l'obtenir la seconde fois est $\frac{1}{6}$; donc la probabilité d'échouer la première fois et de l'obtenir la seconde fois est $\frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$; et c'est la seconde partie de la probabilité demandée, et donc la probabilité demandée est en tout : $\frac{1}{6} + \frac{5}{36} = \frac{11}{36}$.

1. Illustrer la situation par un arbre de probabilités (Lors de l'expérience aléatoire consistant à lancer un dé équilibré à six faces numérotés de 1 à 6, on notera A l'évènement « Obtenir un as ») et retrouver le résultat de de Moivre.
2. Déterminer la probabilité d'obtenir au moins un as en lançant trois fois de suite le dé, puis quatre fois de suite.
3. En déduire le nombre n de lancers nécessaires pour que la probabilité d'obtenir au moins un as soit supérieure à $\frac{1}{2}$.
4. On lance désormais deux dés simultanément.
   (a) Quelle est la probabilité d'obtenir deux as en un lancer des deux dés ?
   (b) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois deux as en deux lancers de deux dés ?
   (c) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois deux as en n lancers de deux dés ?
   (d) En déduire le nombre n de lancers nécessaires pour que la probabilité d'obtenir au moins une fois deux as en n lancers de deux dés soit supérieure à $\frac{1}{2}$.

II. Étude d'un texte de de Moivre

Voici un autre extrait (pages 36 -37) du même ouvrage d'Abraham de Moivre.

PROBLÈME III

Trouver en combien d'essais un évènement se produira probablement, ou combien d'essais seront nécessaires pour qu'il soit indifférent de parier sur sa réussite ou son échec, en supposant que a est le nombre de chances pour sa réussite à chaque essai, et b le nombre de chances de son échec.

On considère une expérience aléatoire, comme par exemple : « lancer un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 » et et un évènement A résultat possible de cette expérience, comme par exemple « Obtenir un as ». On répète n fois l'expérience, ce que de Moivre appelle « faire n essais ». « Parier sur la réussite ou l'échec de l'évènement A » signifie pour de Moivre : « Parier que l'évènement A se produira au moins une fois durant les n « essais ».

1. On suppose que *« a est le nombre de chances pour sa réussite à chaque essai, et b le nombre de chances de son échec »*.

(a) Pour l'expérience aléatoire donnée en exemple ci-dessus et l'évènement A, donner la valeur de a et b. Quelle est la probabilité de A ?

(b) D'une manière générale, donner la probabilité p d'un évènement en fonction du « nombre a de chances pour sa réussite » et du « nombre b de chances de son échec », ainsi que la probabilité de l'évènement contraire.

(c) Comment appelle-t-on, dans notre langage moderne, le « nombre a de chances pour la réussite » d'un évènement A ?

2. On répète n fois l'expérience aléatoire considérée et on appelle E_n l'évènement : « l'évènement A se réalise au moins une fois lors des n essais ».

(a) Exprimer par une phrase l'évènement $\overline{E_n}$.

(b) Quelle doit être la probabilité q_n de l'évènement $\overline{E_n}$ pour qu'il soit « indifférent de parier » que l'évènement E_n se produit ou non ?

(c) Exprimer q_n en fonction de la probabilité q de l'évènement $\overline{A}$, puis en fonction de a et b.

(d) De Moivre affirme que, dans l'hypothèse où il est « indifférent de parier sur la réussite ou l'échec », on a : $n = \frac{\ln 2}{\ln(a+b)-\ln b}$. Justifier cette affirmation.

(e) On pose $\frac{a}{b} = \frac{1}{r}$. Exprimer n en fonction de r

3. Une approximation de $\ln(1+x)$.

(a) Pour tout x réel positif, donner la valeur exacte de $\int_0^x \frac{1}{1+t}dt$.

(b) Justifier : Pour tout t réel positif, justifier : $\frac{1}{1+t} = 1 - \frac{t}{1+t}$.

(c) En déduire, pour tout x réel positif, l'expression de $ln(1+x) - x$ comme une intégrale.

(d) Montrer que, pour tout x réel positif, $|\ln(1+x) - x| \leq \frac{x^2}{2}$.

(e) De Moivre, pour le problème étudié aux deux premières questions, explique : « Supposons maintenant que r est [...] suffisamment grand par rapport à l'unité [2], [...] nous aurons par conséquent l'équation $\frac{n}{r} = \ln 2$, ou $n = r \ln 2$ ». Vérifier, à l'aide du résultat de 2.e, que cela revient à remplacer $\ln(1+r)$ par r. Donner, en fonction de r, une majoration de l'erreur commise en prenant pour n cette valeur.

(f) De Moivre donne comme premier exemple d'application : « Soit proposé de trouver en combien de lancers on peut parier d'obtenir deux as avec deux dés, avec égalité de chance ». Donner dans ce cas les valeurs de a, b, r. Quel résultat obtient-il avec sa formule ? Comparer avec la partie I.

2. C'est-à-dire que $\frac{1}{r}$ est très petit.

Un problème ouvert

Texte distribué aux élèves

Georges et Méré, comme chaque jour à midi, jouent au 421 sur le comptoir du bar de Port-Royal, à la station de R.E.R.. Une discussion s'engage sur les paris :

Il est évidemment désavantageux de parier qu'on obtiendra 6 en lançant une fois un dé. Est-ce encore le cas si on parie qu'on obtiendra au moins une fois un 6 en lançant deux fois le dé ? En le lançant trois fois ? En le lançant quatre fois ?

Georges se tourne alors vers son voisin de droite, un certain Blaise Pascal, pour lui demander son avis. Retrouver la réponse de celui-ci en développant ses raisonnements.

Questions supplémentaires :

1. On lance quatre fois un dé : est-il plus avantageux de parier qu'on va obtenir exactement une fois le numéro 6 ou exactement deux fois le numéro 6 ?
2. Même question si on lance douze fois le dé.
3. Est-il plus avantageux de parier qu'on va obtenir au moins une fois le numéro 6 en lançant quatre fois un dé ou de parier qu'on va obtenir au moins une fois un double-six en lançant vingt-quatre fois deux dés ?

Enoncé (provenant d'un problème historique) inspiré de : Frugier, *Exercices ordinaires de probabilités*, Ellipse, 1992.

Le problème des partis

Deux joueurs jouent à « un jeu de pur hasard », et le premier qui aura gagné un nombre déterminé de points sera déclaré vainqueur. Mais ils doivent « quitter le jeu » avant qu'aucun des deux joueurs n'ait atteint le nombre de points entraînant la victoire. Comment doivent-ils alors partager « l'argent qu'ils ont mis au jeu » ?

L'article « Pascal au carrefour des probabilités, de l'algorithmique, de la récurrence et de la combinatoire » de la rubrique « Étude » présente entre autres la solution que donne Pascal de ce problème, et en montre le caractère algorithmique, ainsi que l'intérêt que présentent les problèmes d'implémentation de cet algorithme dans un langage de programmation. Nous présentons ci-dessous un exercice destiné à des élèves de spécialité mathématiques de terminale générale exploitant le texte de Pascal. Cet exercice a été expérimenté en terminale scientifique (2016), mais en examinant le point de vue algorithmique sans la partie « programmation », aucun langage n'étant dans les attendus du programme à l'époque. Il peut être utile de faire au préalable un exercice présentant la récursivité ; nous faisons donc précéder cette étude de la méthode de Pascal d'un tel exercice. La question sur l'exponentiation rapide est particulièrement intéressante pour des élèves suivant l'option « maths expertes », qui comporte une partie « arithmétique ».

Il semble nécessaire que les élèves se soient approprié·es le problème avant de se lancer dans cette étude. Le groupe M. :A.T.H. a fait à ce sujet de multiples expérimentations en classe depuis de nombreuses années, sous des formes diverses, d'abord avec des exercices guidés, puis sous forme de problème ouvert. Nous donnons à la suite de l'exercice de lecture de la lettre de Pascal donnant sa solution les deux types d'exercices, chacun·e pouvant ainsi choisir et adapter la forme qui lui convient le mieux dans sa classe pour des exercices préliminaires.

Vous trouverez dans la brochure n°61 de l'IREM de Paris, disponible en ligne [3] ou que vous pouvez commander à l'IREM de Paris sous forme papier, une présentation historique du problème des partis, ainsi que les comptes-rendus de diverses expérimentations en classe sur les exercices guidés (pages 100 -138). Les annexes de ces pages présentent des textes historiques sur ce problème de Pacioli à la correspondance de Pascal et Fermat. La page « Histoire des maths et probabilités » [4] du groupe M.A.T.H. donne un compte-rendu d'expérimentation en classe de terminale scientifique du problème ouvert.

Enfin, nous mettons à la fin de cette rubrique des extraits de deux lettres de Pascal à Fermat, l'une du 29 juillet 1654 présentant la méthode de Pascal (un extrait plus large que celui de l'exercice étudiant cette méthode) et l'autre du 24 août 1654 rappelant la méthode de Fermat.

3. http ://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/publications/IPS97031.pdf
4. https ://irem.u-paris.fr/utilisation-de-lhistoire-des-mathematiques-en-probabilites

Récursivité

Récursivité et exponentiation rapide

En informatique, une fonction qui contient un appel à elle-même est dite récursive.

— **Un exemple simple : la factorielle.**

$$n! = \begin{cases} 1\, si\, n = 0 \\ n\,(n-1)!\ sinon \end{cases}$$

Les suites définies par récurrence sont un exemple de récursivité. Mais ce ne sont pas les seuls et la présentation récursive permet de présenter simplement des algorithmes astucieux et efficaces.

Il est essentiel de donner $0!=1$, pour permettre l'initialisation (exactement comme dans la définition de toute suite définie par récurrence). Cette initialisation est appelé cas de base.

— **Algorithme récursif de calcul de la fonction $\boldsymbol{Fac(n)}$** :
Si $n = 0$, renvoyer 1
Dans tous les autres cas, renvoyer : $nFac(n-1)$

Algorithme écrit dans le langage Python :

```
def fac(n):
    if n<0 :
        print('Mauvaise entrée')
        #raise ValueError()
        return -1
    elif n==0:
        return(1)
    else :
        return(n*fac(n-1))
```

• **Un exemple astucieux : l'élévation à une puissance ou exponentiation rapide**

Une remarque préalable : pour tout nombre a, $a^{14} = (a^7)^2$ et $a^{23} = a\,(a^{11})^2$. Ainsi, on ramène l'élévation à une puissance n au même calcul avec un exposant deux fois plus petit, suivi d'une élévation au carré et éventuellement d'un produit. Ainsi, si on calcule a^{14} par la méthode « naturelle », il faut effectuer 13 multiplications. En utilisant la remarque précédente, on a $a^{14} = (a^7)^2$, puis $a^7 = a\,(a^3)^2$, enfin $a^3 = a \times a^2$; on va donc effectuer 3 élévations au carré (c'est-à-dire trois multiplications), et deux multiplications par le nombre a, en commençant par le calcul de a^2, qu'on multiplie par a pour obtenir a^3, qu'on élève au carré, etc. Soit en tout 5 multiplications.

De manière générale : pour tout nombre a non nul et tout entier naturel n, on a (complétez les formules) :

— Cas de base : $a^0 = 1$.
— Si n est pair, $a^n = ...$
— Si n est impair, $a^n = ...$

1. Écrire l'algorithme récursif permettant de calculer a^n pour tout réel a non nul et tout entier naturel n. (Vous appellerez cette fonction récursive : puissance(a, n)).
2. Programmez cette fonction dans le langage Python.

Étude de la solution de Pascal

Le problème des partis : la méthode de Pascal

Partie I : le texte de Pascal

1. Lire (silencieusement et individuellement) la lettre ci-dessous et terminez le raisonnement de Pascal pour faire le partage.

EXTRAIT D'UNE LETTRE DE PASCAL À FERMAT 29 JUILLET 1654

Voici à peu près comment je fais pour savoir la valeur de chacune des parties, quand deux joueurs jouent, par exemple, en trois parties, et chacun a mis 32 pistoles au jeu [*la mise totale est donc 64 pistoles*] :

Posons que le premier en ait *deux* et l'autre *une* ; ils jouent maintenant une partie, dont le sort est tel que, si le premier la gagne, il gagne tout l'argent qui est au jeu, savoir 64 pistoles ; si l'autre la gagne, ils sont *deux* parties à *deux* parties, et par conséquent, s'ils veulent se séparer, il faut qu'ils retirent chacun leur mise, savoir chacun 32 pistoles.

Considérez donc, Monsieur, que, si le premier gagne, il lui appartient 64 ; s'il perd, il lui appartient 32. Donc, s'ils veulent se séparer sans la jouer, le premier doit dire : « Je suis sûr d'avoir 32 pistoles, car la perte même me les donne ; mais pour les 32 autres, peut-être je les aurai, peut-être vous les aurez, le hasard est égal. Partageons donc ces 32 pistoles par la moitié et me donnez, outre cela, les 32 qui me sont sûres ». Il aura donc 48 pistoles et l'autre 16.

Posons maintenant que le premier ait *deux* parties et l'autre *point*, et ils commencent à jouer une partie. Le sort de cette partie est tel que, si le premier la gagne, il tire tout l'argent, 64 pistoles ; si l'autre la gagne, les voilà revenus au cas précédent, auquel le premier aura deux parties et l'autre une.

Or, nous avons déjà montré qu'en ce cas il appartient, à celui qui a les deux parties, 48 pistoles : donc, s'ils veulent ne point jouer cette partie, il doit dire ainsi : « Si je la gagne, je gagnerai tout, qui est 64 ; si je la perds, il m'appartiendra légitimement 48 : donc donnez-moi les 48 qui me sont certaines, au cas même que je perde, et partageons les 16 autres par moitié, puisqu'il y a autant de hasard que vous les gagniez comme moi. » Ainsi, il aura 48 et 8, qui sont 56 pistoles.

Posons enfin que le premier n'ait qu'une partie et l'autre point. Vous voyez, Monsieur, que, s'ils commencent une partie nouvelle, le sort en est tel que,...

2. Rédiger sur feuille la fin du raisonnement de Pascal.

3. En 1654, Pascal écrit un *Traité du Triangle Arithmétique*, qui sera publié et diffusé en 1665, après sa mort. Il y explique l'usage de ce triangle pour résoudre le problème des partis. On peut y lire :

> « [...] la première chose qu'il faut remarquer est que deux joueurs qui jouent en deux parties, dont le premier en a une à point [le premier mène 1 à 0], sont en même condition que deux autres qui jouent en trois parties, dont le premier en a deux, et l'autre une : car il y a cela de commun que, pour achever, il ne manque qu'une partie au premier et deux à l'autre ; et c'est en cela que

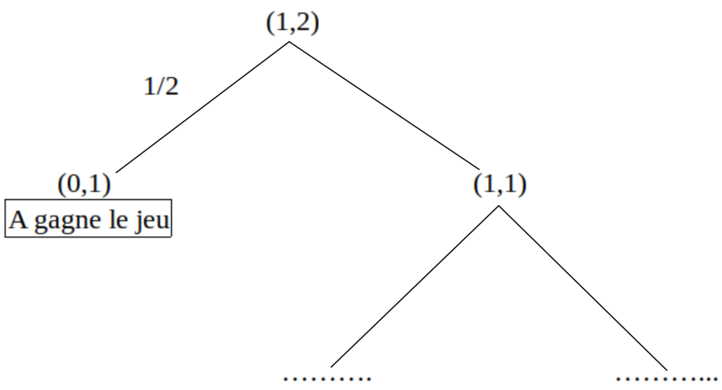
consiste la différence des avantages, et qui doit régler les partis ; de sorte qu'il ne faut proprement avoir égard qu'au nombre de parties qui restent à gagner à l'un et à l'autre, et non pas au nombre de celles qu'ils ont gagnées[...] »

Nous allons appliquer une méthode analogue à celle de Pascal, mais au lieu de raisonner sur la part de la mise qui appartient à chacun, nous raisonnerons sur la probabilité qu'a le premier joueur (appelé A) de gagner le jeu, lorsqu'on connaît le nombre de points qui lui manquent pour gagner, ainsi que le nombre de points qui manquent au deuxième joueur (appelé B).

Partie II : application de la méthode

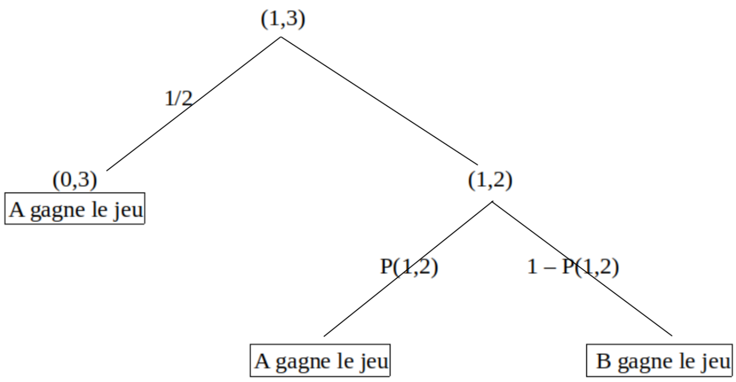
Dans la suite, on appelle $P(a, b)$ la probabilité que A gagne le jeu lorsqu'il manque a points à A et b points à B, a et b étant deux entiers naturels non tous les deux nuls (*Prendre le temps de réfléchir à ce que cela signifie*). Ainsi, $P(2, 4)$ est la probabilité que A gagne le jeu lorsqu'il manque 2 points à A et 4 points à B.

1. Donner la valeur de $P(1, 1), P(0, 1), P(1, 0)$.
2. Compléter l'arbre ci-dessous, et calculer $P(1, 2)$. Le couple $(1; 2)$ s'appelle la racine de l'arbre et désigne l'événement "il manque 1 point à A et 2 points à B".



Arbre de probabilités

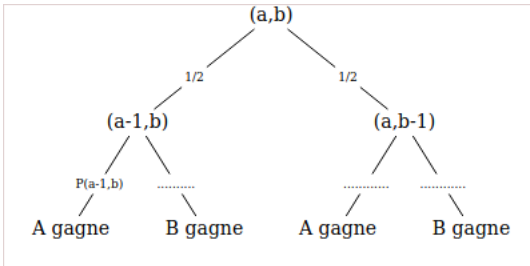
3. À l'aide de l'arbre suivant à compléter, donner l'expression de $P(1, 3)$ à l'aide de $P(1, 2)$, puis calculer $P(1, 3)$.



Calcul de $P(1, 3)$

4. Construisez un arbre analogue pour calculer $P(2, 3)$(vous pouvez utiliser les résultats obtenus dans les questions précédentes pour abréger les calculs).

5. À l'aide de l'arbre suivant à compléter, exprimer $P(a\ ;\ b)$ en fonction de $P(a\ ;\ b-1)$ et $P(a-1\ ;\ b)$.



Relation de récurrence

6. Que valent $P(0\ ;b)$, $P(a\ ;\ 0)$, $P(a\ ;\ a)$ où a et b sont des entiers naturels strictement positifs ?
7. **Application au calcul de** $P(2,3)$.
   a. Construire un arbre en plaçant à la racine de l'arbre le couple $(2;3)$ et en arrêtant les branches dès que $a = 0$ ou $b = 0$ ou $a = b$ (Inutile de spécifier « gagne le jeu » ; vous pouvez simplement entourer les couples donnant la victoire à A en couleur, et ceux vérifant $a = b$ dans une autre couleur).
   b. Compléter : $P(0\ ;\ 2) =$............... et $P(1\ ;\ 1) =$....................... donc $P(1\ ;\ 2) =$..................
   c. Continuer les calculs pour obtenir $P(2\ ;\ 3)$ en « remontant » l'arbre.
8. Donner une relation entre $P(a\ ;\ b)$ et $P(b\ ;\ a)$ en justifiant votre réponse.

Partie III : Algorithme et programmation

(salle informatique)

La partie précédente permet de définir une fonction récursive, qu'on notera $probaparti(a, b)$, qui renvoie, pour deux entiers naturels a et b non tous deux nuls, la probabilité que A gagne le jeu s'il manque a points à A et b points à B.

1. Écrire l'algorithme récursif permettant de calculer $P(a, b)$.
2. Ouvrez le fichier algopascal.py et utilisez l'algorithme pour calculer $P(2, 3)$. Le résultat est-il conforme à votre attente ?
3. Faire des essais avec d'autres couples.

Exercices préliminaires guidés

Les exercices ci-dessous ont été expérimentés en première A_1 dans les années quatre-vingts, du temps où le lycée général proposait un enseignement par série : la série littéraire était désignée par la lettre générique A et se déclinait en A_1 (lettres et mathématiques avec un horaire en première et en terminale de 5 heures hebdomadaires et un programme préconisant l'utilisation de l'histoire des mathématiques), A_2 (lettres et langues, avec un horaire de deux heures hebdomadaires), A_3 (lettres et art, même horaire que A_2), [5] ...Ces exercices constituaient une introduction à la lecture de la correspondance entre Pascal et Fermat. Le compte-rendu des séances en classe se trouvent pages 124-128 de la brochure citée plus haut [6].

Exercices proposés aux élèves

Ariane et Bernard jouent à un jeu qui consiste en plusieurs parties de « pile ou face ».

Chaque partie rapporte un point à celle ou celui qui la gagne.

Celui ou celle qui obtiendra en premier 3 points gagnera la mise de 64€.

Mais Ariane et Bernard doivent s'arrêter avant d'avoir pu terminer le jeu. Avant de se séparer, il leur faut se partager la mise équitablement.

Exercice 1 (première méthode)

1. Quand le jeu s'arrête, Ariane a gagné 2 points et Bernard 1 point. Comment répartir équitablement la mise de 64€ ?

   Indication *:*

   Au moment où le jeu s'arrête, il manque 1 point à Ariane et 2 points à Bernard pour gagner 64€. On peut donc examiner les différents scenarios possibles pour les parties qui se joueraient si Ariane et Bernard ne devaient pas s'arrêter. La présentation de ces scenarios sous forme d'un arbre facilitera la recherche d'une répartition équitable.

   On notera A une partie gagnée par Ariane, et B une partie gagnée par Bernard.
2. Quand le jeu s'arrête, Ariane a gagné 1 point et Bernard 0 point. Proposer une répartition équitable de la mise.

Exercice 2 (deuxième méthode) Quand le jeu s'arrête, Ariane a gagné 1 point et Bernard 0 point.

1. Quel est le nombre maximum des parties qui resteraient à jouer ? Soit n ce nombre.
2. En notant A une partie gagnée par Ariane, et B une partie gagnée par Bernard, dresser le tableau des résultats que pourraient donner ces n parties, si elles étaient jouées.
3. En déduire une répartition équitable de la mise de 64€.

   Indications :

   Si le nombre maximum de parties était 3, l'écriture « ABA » signifierait :

   — $n = 3$.

   — Ariane gagne la première et la troisième partie, Bernard la deuxième.

5. À partir de 1995, à l'occasion de la mise en place des bacs L, ES, S, les horaires hebdomadaires de mathématiques ont commencé à diminuer.

6. Lien : http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/publications/IPS97031.pdf

Un problème ouvert

Un problème de partage

Consignes

- Un temps de recherche individuelle silencieuse (environ un quart d'heure).
- Mise en commun des méthodes de résolution du problème.
- Chaque groupe rédige sur feuille (une feuille par groupe) la (ou les) solutions(s) trouvé(e) pour la première situation, AVANT de chercher les solutions des autres situations.
- Traiter de même la deuxième situation, puis la troisième.

Première situation : Ariane et Bernard jouent à un jeu qui consiste en plusieurs parties de « pile ou face ». Chaque partie rapporte 1 point à celui qui la gagne. Le premier qui a 3 points est le vainqueur du jeu et il gagne 64 euros (cette somme s'appelle la « mise »).

Mais Ariane et Bernard sont obligés de s'arrêter avant d'avoir pu terminer le jeu. Quand ils s'arrêtent, Ariane a gagné deux parties (elle a donc 2 points) et Bernard une partie (il a donc 1 point). Avant de se séparer, ils veulent se partager la mise puisque personne ne l'a complètement gagnée.

Mais alors, comment partager la mise, c'est-à-dire que donner à Ariane et Bernard pour que le partage soit équitable ?

Quel partage proposez-vous et pourquoi ?

Deuxième situation : La règle du jeu est la même. Le vainqueur est celui qui obtient le premier 3 points.

Quel partage proposez-vous si, au moment de l'arrêt du jeu, Ariane a 1 point et Bernard a 0 point ?

Troisième situation : le premier qui obtient 8 points est le vainqueur du jeu. Au moment de l'arrêt du jeu, Ariane a 1 point et Bernard a 0 point. Quel partage proposez-vous ?

Lettre de Pascal à Fermat du 29 juillet 1654 (extrait) [7]

1. L'impatience me prend aussi bien qu'à vous et, quoique je sois encore au lit, je ne puis m'empêcher de vous dire que je reçus hier au soir, de la part de M. de Carcavi, votre lettre sur les partis, que j'admire si fort que je ne puis vous le dire. Je n'ai pas le loisir de m'étendre, mais, en un mot, vous avez trouvé les deux partis des dés et des parties dans la parfaite justesse : j'en suis tout satisfait, car je ne doute plus maintenant que je ne sois dans la vérité, après la rencontre admirable où je me trouve avec vous.

J'admire bien davantage la méthode des parties que celle des dés ; j'avois vu plusieurs personnes trouver celle des dés, comme M. le chevalier de Méré, qui est celui qui m'a proposé ces questions, et aussi M. de Roberval : mais M. de Méré n'avoit jamais pu trouver

7. Fermat *Œuvres*, publiées par P. Tannery et C. Henry, tome II, Gauthier-Villars, Paris, 1894, p. 290-291.

la juste valeur des parties ni de biais pour y arriver, de sorte que je me trouvois seul qui eusse connu cette proportion.

2. Votre méthode est très sûre et m'est la première venue à la pensée dans cette recherche ; mais parce que la peine des combinaisons est excessive, j'en ai trouvé un abrégé et proprement une autre méthode bien plus courte et bien plus nette, que je voudrais pouvoir vous dire ici en peu de mots : car je voudrais désormais vous ouvrir mon cœur, s'il se pouvait, tant j'ai de joie de voir notre rencontre. Je vois bien que la vérité est la même à Toulouse et à Paris.

Voici à peu près comment je fais pour savoir la valeur de chacune des parties, quand deux joueurs jouent, par exemple, en trois parties, et chacun a mis 32 pistoles au jeu :

Posons que le premier en ait deux et l'autre une ; ils jouent maintenant une partie, dont le sort est tel que, si le premier la gagne, il gagne tout l'argent qui est au jeu, savoir 64 pistoles ; si l'autre la gagne, ils sont deux parties à deux parties, et par conséquent, s'ils veulent se séparer, il faut qu'ils retirent chacun leur mise, savoir chacun 32 pistoles.

Considérez donc, Monsieur, que, si le premier gagne, il lui appartient 64 ; s'il perd, il lui appartient 32. Donc, s'ils veulent se séparer sans la jouer, le premier doit dire : « Je suis sûr d'avoir 32 pistoles, car la perte même me les donne ; mais pour les 32 autres, peut-être je les aurai, peut-être vous les aurez, le hasard est égal. Partageons donc ces 32 pistoles par la moitié et me donnez, outre cela, les 32 qui me sont sûres ». Il aura donc 48 pistoles et l'autre 16.

Posons maintenant que le premier ait deux parties et l'autre point, et ils commencent à jouer une partie. Le sort de cette partie est tel que, si le premier la gagne, il tire tout l'argent, 64 pistoles ; si l'autre la gagne, les voilà revenus au cas précédent, auquel le premier aura deux parties et l'autre une.

Or, nous avons déjà montré qu'en ce cas il appartient, à celui qui a les deux parties, 48 pistoles : donc, s'ils veulent ne point jouer cette partie, il doit dire ainsi : « Si je la gagne, je gagnerai tout, qui est 64 ; si je la perds, il m'appartiendra légitimement 48 : donc donnez-moi les 48 qui me sont certaines, au cas même que je perde, et partageons les 16 autres par moitié, puisqu'il y a autant de hasard que vous les gagniez comme moi. » Ainsi, il aura 48 et 8, qui sont 56 pistoles.

Posons enfin que le premier n'ait qu'*une* partie et l'autre *point*. Vous voyez, Monsieur, que, s'ils commencent une partie nouvelle, le sort en est tel que, si le premier la gagne, il aura *deux* parties à *point*, et partant, par le cas précédent, il lui appartient 56 ; s'il la perd, ils sont partie à partie : donc il lui appartient 32 pistoles. Donc il doit dire : « Si vous voulez ne la pas jouer, donnez-moi 32 pistoles qui me sont sûres, et partageons le reste de 56 par la moitié. De 56 ôtez 32, reste 24 ; partagez donc 24 par la moitié, prenez-en 12 et moi 12, qui, avec 32, font 44.

Lettre de Pascal à Fermat du 24 Août 1654 (extrait) [8]

Voici comment vous procédez quand il y a *deux* joueurs :

Si deux joueurs, jouant en plusieurs parties, se trouvent en cet état qu'il manque *deux* parties au premier et *trois* au second, pour trouver le parti, il faut, dites-vous, voir en combien de parties le jeu sera décidé absolument. Il est aisé de supputer que ce sera en *quatre* parties, d'où vous concluez qu'il faut voir combien quatre parties se combinent entre deux joueurs et voir combien il y a de combinaisons pour faire gagner le premier et combien pour le second et partager l'argent suivant cette proportion. J'eusse eu peine à entendre ce discours, si je ne l'eusse su de moi-même auparavant ; aussi vous l'aviez écrit dans cette pensée. Donc, pour voir combien quatre parties se combinent entre deux joueurs, il faut imaginer qu'ils jouent avec un dé à deux faces (puisqu'ils ne sont que deux joueurs), comme à croix et pile, et qu'ils jettent quatre de ces dés (parce qu'ils jouent en quatre parties) ; et maintenant il faut voir combien ces dés peuvent avoir d'assiettes différentes. Cela est aisé à supputer : ils en peuvent avoir *seize*, qui est le second degré de *quatre*, c'est-à-dire le quarré. Car figurons-nous qu'une des faces est marquée a, favorable au premier joueur, et l'autre b, favorable au second ; donc ces quatre dés peuvent s'asseoir sur une de ces seize assiettes :

a	a	a	a	a	a	a	a	b	b	b	b	b	b	b	b
a	a	a	a	b	b	b	b	a	a	a	a	b	b	b	b
a	a	b	b	a	a	b	b	a	a	b	b	a	a	b	b
a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b
1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	2	1	2	2	2

Et parce qu'il manque deux parties au premier joueur, toutes les faces qui ont deux a le font gagner : donc il en a 11 pour lui ; et parce qu'il y manque trois parties au second, toutes les faces où il y a trois b le peuvent faire gagner : donc il y en a 5. Donc il faut qu'ils partagent la somme comme 11 à 5.

[...] Je communiquai votre méthode à nos Messieurs, sur quoi M. de Roberval me fit cette objection :

Que c'est à tort que l'on prend l'art de faire le parti sur la supposition qu'on joue en *quatre* parties, vu que, quand il manque *deux* parties à l'un et *trois* à l'autre, il n'est pas de nécessité que l'on joue *quatre* parties, pouvant arriver qu'on n'en jouera que *deux* ou *trois*, ou à la vérité peut-être *quatre* ;

Et ainsi qu'il ne voyoit pas pourquoi on prétendoit de faire le parti juste sur une condition feinte qu'on jouera *quatre* parties, vu que la condition naturelle du jeu est qu'on ne jouera plus dès que l'un des joueurs aura gagné, et qu'au moins, si cela n'étoit faux, cela n'étoit pas démontré, de sorte qu'il avoit quelque soupçon que nous avions fait un paralogisme.

[...] je lui démontrai la vérité du parti entre deux joueurs par les combinaisons en cette sorte :

N'est-il pas vrai que si deux joueurs se trouvant en cet état de l'hypothèse qu'il manque *deux* parties à l'un et *trois* à l'autre, conviennent maintenant de gré à gré qu'on joue *quatre* parties complètes [...], le parti doit être, tel que nous avons dit [...] ? Il en demeura d'accord et cela en effet est démonstratif ; mais il nioit que la même chose subsistât en ne s'astreignant pas à jouer les *quatre* parties.

8. Fermat *Œuvres*, publiées par P. Tannery et C. Henry, tome II, Gauthier-Villars, Paris, 1894, p. 301-303.

Je lui dis donc ainsi :

N'est-il pas clair que les mêmes joueurs, n'étant pas astreints à jouer <les> quatre parties, mais voulant quitter le jeu dès que l'un auroit atteint son nombre, peuvent sans dommage ni avantage s'astreindre à jouer les *quatre* parties entières et que cette convention ne change en aucune manière leur condition ? Car, si le premier gagne les deux premières parties de quatre et qu'ainsi il ait gagné, refusera-t-il de jouer encore deux parties, vu que, s'il les gagne, il n'a pas mieux gagné, et s'il les perd, il n'a pas moins gagné ? Car ces deux que l'autre a gagné ne lui suffisent pas, puisqu'il lui en faut trois, et ainsi il n'y a pas assez de quatre parties pour faire qu'ils puissent tous deux atteindre le nombre qui leur manque.

Certainement il est aisé de considérer qu'il est absolument égal et indifférent à l'un et à l'autre de jouer en la condition naturelle à leur jeu, qui est de finir dès qu'un aura son compte, ou de jouer les quatre parties entières : donc, puisque ces deux conditions sont égales et indifférentes, le parti doit être tout pareil en l'une et en l'autre. Or, il est juste quand ils sont obligés de jouer quatre parties, comme je l'ai montré : donc il est juste aussi en l'autre cas.

Voilà comment je le démontrai et, si vous y prenez garde, cette démonstration est fondée sur l'égalité des deux conditions, vraie et feinte, à l'égard de deux joueurs, et qu'en l'une et en l'autre un même gagnera toujours et, si l'un gagne ou perd en l'une, il gagnera ou perdra en l'autre et jamais deux n'auront leur compte.