Conte du lundi

Problèmes de dés : Pascal, Fermat, Huygens et les autres

Groupe M. :A.T.H.

Introduction

Ce conte du lundi présente des textes étudiés lors de l'année 2019-2020 dans le groupe de lecture de textes historiques animé par le groupe M. : A.T.H. un lundi par mois, avec quelques compléments. Ces lectures portaient sur l'histoire des probabilités et nous avions choisi des textes portant sur des problèmes qu'il semblait intéressant d'utiliser en classe.

Dans une lettre à l'*Illustre Académie*[1] *Parisienne de Mathématiques* (1654), dans laquelle il donne une liste de ses travaux en cours, Pascal annonce « une recherche toute nouvelle et portant sur une matière entièrement inexplorée, savoir sur les combinaisons du hasard dans les jeux qui lui sont soumis [...]. La question a erré incertaine jusqu'à ce jour ; mais maintenant, si elle a été rebelle à l'expérience, elle n'a pu échapper à l'empire de la raison. Car nous l'avons réduite en art avec une telle sûreté, grâce à la géométrie, qu'ayant reçu part à la certitude de celle-ci, elle progresse désormais avec audace, et que, par l'union ainsi réalisée entre les démonstrations mathématiques et l'incertitude du hasard, et par la conciliation entre les contraires apparents, elle peut tirer son nom de part et d'autre et s'arroger à bon droit ce titre étonnant : *Géométrie du hasard* »[2].

Nous partirons ici d'un extrait d'une lettre de Pascal à Fermat, qui donne un problème posé par le chevalier de Méré, et verrons la postérité de ce problème chez divers auteurs.

Extrait d'une lettre de Pascal à Fermat (29 juillet 1654)[3]

> « Je n'ai pas le temps de vous envoyer la démonstration d'une difficulté qui étonnait fort M. <de Méré>, car il a très bon esprit, mais il n'est pas géomètre (c'est, comme vous le savez, un grand défaut) et même il ne comprend pas qu'une ligne mathématique soit divisible à l'infini et croit fort bien entendre qu'elle est composée de points en nombre fini, et jamais je n'ai pu l'en tirer. Si vous pouviez le faire, on le rendrait parfait.
>
> Il me disait donc qu'il avait trouvé fausseté dans les nombres par cette raison :
>
> Si on entreprend de faire un *six* avec un dé, il y a avantage de l'entreprendre en 4, comme de 671 à 625.
>
> Si on entreprend de faire *Sonnés*[4] avec deux dés, il y a désavantage de l'entreprendre en 24.
>
> Et néanmoins, 24 est à 36 (qui est le nombre des faces des deux dés) comme 4 est à 6 (qui est le nombre des faces d'un dé).
>
> Voilà quel était son grand scandale qui lui faisait dire hautement que les propositions n'étaient pas constantes et que l'arithmétique se démentait : mais vous en verrez bien aisément la raison par les principes où vous êtes. »

1. Académie fondée à Paris par Mersenne en 1635, que Mersenne affirme être « la plus noble académie du monde » et qu'elle sera « toute mathématique ».
2. Pascal B., *Œuvres complètes*, II, texte établi et présenté par Jean Mesnard, Desclée de Brouwer, 1970, réédition 1990, pages 1034-1035.
3. Fermat, *Œuvres*, tome II, éditées par Tannery et Henry, Paris, 1894, pages 295-296.
4. C'est-à-dire un double six.

Pascal n'explique pas comment on arrive au résultat énoncé, sous la forme habituelle à l'époque : « il y a avantage de l'entreprendre en 4 comme de 671 à 625 », c'est-à-dire, en termes modernes, que, si on lance 4 fois successivement un dé à six faces, et si on appelle A l'évènement « obtenir au moins un six », le rapport de $p(A)$ à $p(\overline{A})$ est égal à $\frac{671}{625}$, ce qui prouve que $p(A) > \frac{1}{2}$. Pascal parle en termes de pari et conclut donc qu'il y a « avantage » à parier que A se réalisera plutôt que $\overline{A}$, en donnant le rapport quantifiant cet avantage. Ce problème sera repris pas d'autres mathématiciens, et généralisé par certains. Nous donnerons-ci dessous quelques extraits de textes commentés sur ce problème et d'autres problèmes de dés abordés dans de petits traités ou la correspondance de savants aux XVII^e et XVIII^e siècle. Certains auteurs utilisent l'espérance comme outil pour résoudre ces problèmes, mais le sens que recouvre cette notion dans ces textes est inhabituel pour nous. La rubrique « Bonnes Vieilles Pages » de ce numéro de *Mnemosyne* peut vous aider dans la lecture des textes cités ici.

Huygens : *Du calcul dans les jeux de hasard* (1656 – 1657)

Dans ce court traité, Huygens résout plusieurs problèmes en utilisant ce qu'il appelle « la valeur de la chance » et que nous nommons l'espérance. Sa proposition III énonce : « Avoir p chances d'obtenir a et q chances d'obtenir b, les chances étant équivalentes, me vaut $\frac{pa+qb}{p+q}$. » La proposition X résout le problème : « Trouver en combien de fois l'on peut accepter de jeter un six avec un dé », en raisonnant de proche en proche. Comme Pascal, Huygens ne parle jamais de probabilité ; l'outil qui lui permet de résoudre le problème est l'espérance. La notion fondamentale est celle de « jeu équitable ». [5]

> « Il est certain que le joueur qui accepte de jeter un 6 en un seul coup a 1 chance de gagner l'enjeu et 5 de perdre. Car il y a 5 coups contre lui et pas plus qu'un seul pour lui. Appelons l'enjeu a. Il a donc 1 chance d'obtenir a et 5 chances de n'obtenir rien, ce qui [...] lui vaut $\frac{1}{6}a$. Il reste $\frac{5}{6}a$ pour celui qui l'engage à jeter le dé. Celui qui joue une partie d'un seul coup ne peut donc mettre que 1 contre 5. [6] » [7]

Huygens raisonne ensuite de proche en proche. Si un joueur parie qu'il obtiendra au moins un six en deux lancers, lorqu'il lance le dé une première fois, il a 1 chance d'obtenir 6 du premier coup et 5 chances de ne pas obtenir 6, auquel cas il relancera le dé. Donc il a une chance d'obtenir la mise a et 5 chances d'obtenir $\frac{1}{6}a$, d'après le calcul précédent. Donc la valeur de sa chance est $\frac{1\times a+5\times\frac{1}{6}a}{6} = \frac{11}{36}a$ et il reste $\frac{25}{36}a$ pour son adversaire. De même, si on joue en trois coups, il a 1 chance d'obtenir 6 du premier coup et 5 chances de ne pas obtenir 6, auquel cas il relancera le dé deux fois, donc il a une chance d'obtenir la mise a et 5 chances d'obtenir $\frac{11}{36}a$, d'après le calcul précédent. La valeur de sa chance est donc $\frac{1\times a+5\times\frac{11}{36}a}{6} = \frac{91}{216}a$. Huygens donne également les résultats pour 4 lancers ($\frac{671}{1296}a$, le joueur « peut donc mettre 671 contre 625, c'est-à-dire plus que 1 contre 1 »), puis pour 5 lancers ($\frac{4651}{7776}a$) et enfin 6 lancers ($\frac{31031}{46656}a$).

Huygens s'attaque alors, dans la proposition suivante, au problème : « Trouver en combien de fois l'on peut accepter de jeter 2 six avec 2 dés ». Il fait le même raisonnement de proche en proche, mais abrège habilement un calcul qui menace de devenir très long et fastidieux. Pour un lancer de dés, il y a 1 chance d'obtenir a et 35 chances de ne

5. Voir la rubrique « Bonnes Vieilles Pages ».

6. C'est-à-dire, que, pour que le jeu soit équitable, le joueur pariant que le six va sortir en un lancer de dés doit mettre au jeu une mise cinq fois plus petite que celle de son adversaire.

7. HUYGENS C., *Du calcul dans les jeux de* hasard, in *Œuvres complètes*, tome XIV, La Haye, Martinus Nijhoff, 1920, p.78.

rien obtenir, ce qui vaut $\frac{1}{36}a$. Si on joue en deux coups, on a « au commencement » 1 chance d'obtenir a et 35 chances d'obtenir $\frac{1}{36}a$, ce qui vaut au joueur $\frac{71}{1296}a$. À partir de là, Huygens abrège les calculs : « On peut trouver en partant de là la chance ou la part de celui qui joue en 4 parties ; on peut sauter le cas du jeu en 3 coups. » En effet, si on joue en 4 lancers, pour les deux premiers lancers, le joueur qui parie sur le double six a 71 chances de gagner, donc d'obtenir a contre 1225 de perdre, donc de pouvoir rejouer deux fois, ce qui lui vaut $\frac{71}{1296}a$. Donc la « valeur de sa chance » est $\frac{71a+1225\times\frac{71}{1296}a}{1296} = \frac{178991}{1296^2}a = \frac{178991}{1679616}a$ et il reste pour son adversaire $\frac{1679616-178991}{1679616}a = \frac{15000625}{1679616}a$. On peut alors passer directement à 8 lancers, puis à 16 lancers, et enfin à 24 lancers en combinant 16 et 8 lancers. Cependant, Huygens ne donne pas le détail des calculs, les nombres en jeu devenant trop grands, et conclut : « dans ce calcul, comme il s'agit surtout de chercher pour quel nombre de coups les chances des deux joueurs commencent à devenir égales, on peut omettre une partie des derniers Chiffres des nombres qui sans cela deviendraient très grands. Je trouve que celui qui joue en 24 parties a encore un léger désavantage, et qu'on ne peut accepter la partie avec avantage qu'en jouant 25 coups au moins. » [8]

Pierre Rémond de Montmort : *Essay d'analyse sur les jeux de hazard* (1708)

La première partie de l'édition de 1708 traite des problèmes sur les jeux de hasard [9]. De Montmort commence par définir ce qu'il appelle « le sort » de chaque joueur.

> « [...] l'argent que risque un joueur est censé ne plus lui appartenir, car il en a quitté la propriété, mais en revanche il acquiert un certain droit sur le fond du Jeu, c'est-à-dire, sur l'argent de la gageure.
>
> [...] dans les Jeux, dont les conditions sont inégalement avantageuses [...], si [les joueurs] veulent se retirer & quitter la partie [...] ils doivent prendre une partie plus ou moins grande [de l'argent du jeu], selon qu'il y a plus ou moins de probabilité que les uns ou les autres gagneront la somme entière dont ils sont convenus.
>
> Cela posé, si l'on nomme a l'argent du jeu, je dirai que le *sort* de chaque joueur est le juste degré d'espérance qu'il a d'obtenir a. » [10]

Il énonce ensuite et justifie la proposition I :

> « *Le nombre des hazards qui peuvent faire gagner Pierre, et lui donner A, étant m ; & le nombre des hazards qui peuvent le faire perdre ou lui donner zéro, étant n, je dis que s'il n'y a que ces deux sortes de hazards, & qu'on entende par A l'argent du jeu, on aura le sort de Pierre* $= \frac{mA+n\times 0}{m+n}$.
>
> Pour le prouver, soit x le sort de Pierre, y celui de l'autre joueur, qu'on nommera Paul, on aura $x+y=A$. On aura aussi [11] $x.y :: m.n$, car le sort de chacun de ces joueurs est comme leur espérance, & cette espérance est proportionnée aux facilités ou aux moyens qu'ils ont de gagner, c'est-à-dire au nombre de coups qui leur donneront A. De ces deux équations $y = \frac{nx}{m}$ & $x+y=A$, on tirera $x = \frac{Am}{n+m}$ $\mathscr{C}.\mathscr{Q}.f.\mathscr{D}.$ »

Pierre Rémond de Montmort donne dans sa proposition XLIV une généralisation de ces problèmes de dés, qu'il va appliquer ensuite aux exemples ci-dessus.

8. Ib., p. 82.
9. Dans la deuxième édition (1713), cette partie est précédée d'un traité sur les combinaisons, plus complet que ce qu'on trouve sur ce thème à la suite des problèmes dans la première édition.
10. De Montmort P.R., *Essay d'analyse sur les jeux de hazard*, Paris, 1708, p.1-2.
11. $x.y :: m.n$ signifie $\frac{x}{y} = \frac{m}{n}$.

> « *Le nombre qui exprime le rapport du sort de Pierre à celui de Paul, en supposant que Pierre parie contre Paul de faire certaine chose du premier coup, étant donné, On demande quel est le nombre qui exprime le sort de Pierre, en supposant qu'on lui accorde un certain nombre de coups pour faire la chose proposée* » [12]

Par exemple, si Pierre parie qu'il obtiendra un six en un lancer d'un dé cubique, le rapport du sort de Pierre à celui de Paul est $\frac{1}{5}$, car, pour employer le langage de l'époque, il y a une chance pour Pierre et 5 pour Paul. Ce rapport étant connu, on demande le « sort » de Pierre s'il parie d'obtenir au moins un six en un nombre h donné de lancers. Revenons au texte de De Montmort :

> « Si l'on exprime par l'inconnue x son sort lorsqu'ayant manqué à gagner du premier coup il va rejouer son second coup, & y son sort lors qu'ayant manqué à gagner du second coup il va rejouer son troisième coup, & z son sort lors qu'ayant manqué de gagner à son troisième coup il en va rejouer un quatrième, &c employant de suite les lettres x, y, z, u, t, r &c pour exprimer le sort inconnu de Pierre à son second, troisième, quatrième, cinquième, sixième, septième coup, &c. Nommant encore p le nombre des hazards favorables à Pierre ; q le nombre des rencontres favorables à Paul, & supposant que $m = p+q$, on aura le sort de Pierre au commencement du jeu $= \frac{p}{m}+\frac{q}{m}x$, $x = \frac{p}{m}+\frac{q}{m}y$, $y = \frac{p}{m}+\frac{q}{m}z$, $z = \frac{p}{m}+\frac{q}{m}u$, $u = \frac{p}{m}+\frac{q}{m}t$, $t = \frac{p}{m}+\frac{q}{m}r$ &c & substituant toutes ces quantités, on aura le sort de Pierre exprimé par cette suite infinie $S = \frac{p}{m}+\frac{pq}{mm}+\frac{pqq}{m^3}+\frac{pq^3}{m^4}+\frac{pq^4}{m^5}+\frac{pq^5}{m^6}+\frac{pq^6}{m^7}+\&c.$ ajoutant autant de termes de cette suite qu'il en sera nécesssaire pour que S soit égale à $\frac{1}{2}$. On concluera que Pierre peut entreprendre la gageure but à but en autant de coups qu'on aura employé de termes de cette suite pour trouver $S = \frac{1}{2}$, ou un peu plus grand.
>
> Cette méthode est fort simple, & n'est presque pas différente de celle qu'emploie M. Hugens pour déterminer en combien de coups on peut parier but à but d'amener sonnez avec deux dés ; mais elles ont toutes deux cet inconvénient qu'elles sont absolument impraticables lorsque p étant un petit nombre, m et q en expriment de grands. » [13]

De Montmort donne alors un moyen d'éviter de trop longs calculs. Il remarque que « la somme de cette suite infinie est toujours égale à l'unité, puisqu'il est clair que s'il y a quelque possibilité que Pierre gagne du premier coup, il y a certitude qu'il gagnera ayant un nombre infini de coups à jouer de suite ». Il manipule ensuite la somme des termes de S pour arriver à un résultat équivalent au fait que la somme des h premiers termes de S est égale à $1-\frac{q^h}{m^h}$, résultat que nous pouvons obtenir simplement grâce à la somme des termes d'une suite géométrique. Il en conclut que, « pour trouver le nombre de coups qui rendrait le sort de Pierre égal à celui de Paul », il faudrait que $\frac{q^h}{m^h} = \frac{1}{2}$ ou soit plus petit que $\frac{1}{2}$; c'est-à-dire qu'il faut « m^h plus grand que $2 \times q^h$. Ce qui servira de formule ». De Montmort traite ensuite des exemples.

> « PREMIER EXEMPLE
>
> Soit supposé que l'on cherche en combien de coups Pierre peut parier d'amener six avec un dé, il faudra substituer 6, 5, 1 pour les lettres m, q, p, [...], & l'on connaîtra sans peine que h étant 4, c'est-à-dire, Pierre se proposant d'amener six en quatre coups, il y aura de l'avantage pour lui, car $1-\frac{5^4}{6^4} = 1-\frac{625}{1296}$; or cette fraction $\frac{625}{1296}$ est plus petite que $\frac{1}{2}$ de la quantité $\frac{23}{1296}$

12. De Montmort P.R., *Essay d'analyse sur les jeux de hazard*, Paris, 1708, p. 180.
13. Ib., p. 180-181.

qui exprimera l'avantage de Pierre en pariant d'amener un six avec un dé dans quatre coups. L'on connaîtra aussi qu'en substituant 3 pour h, c'est-à-dire que Pierre se proposant d'amener un six en trois coups, il y aurait pour lui du désavantage, et que son désavantage serait $\frac{17}{216}$.

Il est clair que l'exposant h doit etre d'autant plus grand que q est plus grand par rapport à p, en sorte que, par exemple, q étant $= 5$, & par conséquent $m = 6$, h doit être $= 4$, & q étant $= 35$, h doit être $= 25$.

[...]

REMARQUE

Pour éviter le tâtonnement, il faudra convertir la formule $m^h = 2 \times q^h$ en une autre où h soit seule dans un des membres de l'égalité, ce qui se peut en employant le calcul des exponentiels. Car je trouve qu'elle se change en cette autre $h = \frac{log.2}{log.m - log.q}$, & cette formule où h exprime le nombre de coups que l'on cherche, donnera d'abord la solution du Problème proposé.

Par exemple, si l'on veut savoir en combien de coups on peut parier à but d'amener sonnés avec deux dés, on trouvera en substituant pour m, 36, & pour q, 35, $h = \frac{3010300}{15563025 - 15440680} = 24 + \frac{14804}{24469}$, ce qui fait voir qu'on l'entreprendrait avec avantage en 25 coups, & avec désavantage en 24 coups.

[...]

On pourra même découvrir par cette voie de combien sera l'avantage ou le désavantage par rapport à tel nombre de coups que ce soit. »[14]

Jacques Bernoulli : *Ars conjectandi* (1713)

L'*Ars conjectandi* est publiée en 1713, huit ans après la mort de Jacques Bernoulli, par son neveu Nicolas Bernoulli ; mais Jacques Bernoulli a commencé à travailler sur le traité de Huygens bien plus tôt, vers 1685.[15] La première partie de l'ouvrage de Bernoulli est constituée du Traité de Huygens *Du calcul dans les jeux de hasard*, avec des commentaires sur les démonstrations de Huygens, des propositions de démonstrations différentes de celles de Huygens ainsi que la résolution des problèmes posés à la fin du traité. Au sujet de la proposition XI de Huygens (voir supra), Bernoulli remarque qu'il revient au même, pour un joueur qui entreprend de faire un nombre de points donné avec un certain nombre k de dés, de lancer ces dés ou de lancer un seul dé dont le nombre des faces serait le nombre total a des résultats possibles avec ces k dés, et dont c faces ne porteraient pas le nombre de points requis, les autres portant ce nombre. Ainsi, par exemple, si on veut obtenir un double six avec deux dés cubiques ordinaires, il revient au même de lancer un dé à 36 faces dont l'une est marquée 12 (la face « favorable ») et les 35 autres portent un autre résultat. Il suffit donc de chercher le nombre de lancers de ce dé fictif nécessaire pour que le joueur puisse parier de façon équitable qu'il obtiendra au moins une fois le résultat voulu. Or lancer n fois ce dé (qui a a faces en tout, dont c défavorables) revient à lancer une fois n dés semblables.

« Qu'ainsi soient pris n dés, chacun muni de a faces, parmi lesquelles il y a en ait c non marquées par ce nombre de points. Ainsi le nombre de tous les cas dans l'ensemble de n dés sera a^n ; (comme l'Auteur l'a montré plus haut

14. Ib., p. 182-184.
15. MEUSNIER N., « L'émergence d'une mathématique du probable au XVII^e siècle », *Revue d'histoire des mathématiques*, 2 (1996), p. 119-147, http://www.numdam.org/article/RHM_1996__2_1_119_0.pdf

après la Prop IX), et pour la même raison le nombre de ceux, pour lesquels les points choisis n'apparaissent sur aucun dé, c^n ; parce que certainement en raison du choix d'un seul dé parmi ceux à c faces, n'importe quel dé du même nombre de faces peut tomber en même temps. Il est donc nécessaire pour que ces points soient trouvés à tout le moins dans l'un des dés, que ce soit dans les $a^n - c^n$ cas restants. C'est pourquoi celui qui joue sur une telle condition, a $a^n - c^n$ cas pour obtenir 1, et c^n cas pour obtenir 0 ; c'est pourquoi, à nouveau comme auparavant, celui-là gagne $\frac{a^n - c^n}{a^n}$, de sorte qu'à l'adversaire il reste toujours $\frac{c^n}{a^n}$.

Ayant ainsi montré la solution générale du Problème, si maintenant nous désirons en savoir davantage avec l'Auteur, à quel nombre de jets commence la chance égale entre les adversaires, il faut seulement égaler entre elles les chances trouvées, de sorte qu'on ait $a^n - c^n = c^n$, ce qui fait $a^n = 2c^n$; où il est indiqué que rien d'autre n'est requis que le nombre de tous les cas, et le nombre de ceux dans lesquels il n'est pas obtenu ce qui est entrepris. [...] Cette opération est plus appropriée que celle de Huygens, en ce qu'elle ne suppose la connaissance par chance d'aucun cas précédent : il obtient en effet d'autres raccourcis, dont se souvient l'Auteur.[...] Mais on peut voir, dans un exemple de l'Auteur, dans lequel a vaut 36 et c 35, toute l'opération adjointe. » [16]

	justo minor	major		min.	maj.
a ꝏ	36		c ꝏ	35	
aa ꝏ	1296 .		cc ꝏ	1225	
a^4 ꝏ	1679 . .	1680 . .	c^4 ꝏ	1500 . .	1501 . .
a^8 ꝏ	2819 . .	2823 . .	c^8 ꝏ	2250 . .	2254 . .
a^{16} ꝏ	7946 . .	7970 . .	c^{16} ꝏ	5062 . .	5081 . .
a^{24} ꝏ	2239 . .	2250 . .	c^{24} ꝏ	1138 . .	1146 . .
a^{25} ꝏ	8060 . .	8100 . .	c^{25} ꝏ	3983 . .	4011 . .
			$2c^{24}$ ꝏ	2276 . .	2292 . .
			$2c^{25}$ ꝏ	7966 . .	8022 . .

Bernoulli conclut ainsi qu'il faut entre 24 et 25 lancers pour que le joueur puisse parier de manière équitable d'obtenir au moins un double six. Il précise ensuite l'intérêt de l'utilisation des logarithmes, qui permettent d'obtenir facilement le nombre n, car $a^n = 2c^n$ équivaut à $n \log a = \log 2 + n \log c$, d'où il tire $n = \frac{\log 2}{\log a - \log c}$, et, dans le cas particulier étudié ici, avec $a = 36$ et $c = 35$, $n = \frac{0.3010300}{0.0122345}$, soit « plus que 24 et moins que 25 ».

Nicolas Struyck : *Uytreekening der Kansen...* (Amsterdam, 1716) [17]

Nicolas Struyck, dans son avis au lecteur au début de l'ouvrage, cite ses prédécesseurs : Huygens, de Montmort, Jacques Bernoulli. Dans la première partie de son ouvrage (« calcul des chances grâce à l'arithmétique »), Nicolas Struyck commence par des considérations sur « la valeur moyenne de chaque chance » [18], puis s'occupe de dénombrer permutations, arrangements et combinaisons, et applique ces notions à des problèmes de tirages de cartes et de lancers de dés, pour finalement s'occuper des problèmes que pose Huygens à la fin de son traité. La deuxième partie s'intitule « calcul des chances grâce à l'algèbre », et le deuxième problème est une généralisation semblable à celle de de Montmort.

16. BERNOULLLI J., *Ars conjectandi* , 1713, p. 32-33, https ://archive.org/details/bub_gb_kz9nvk99EWoC/mode/2up

17. STRUYCK N. [1912], *Les œuvres de Nicolas Struyck, 1687-1769, qui se rapportent au calcul des chances, à la statistique générale, à la statistique des décès et aux rentes viagères tirées des œuvres complètes et traduites du hollandais par J.A. Vollgraff*, Amsterdam, Société générale néerlandaise d'assurances sur la vie et de rentes viagères, 1912. Disponible en ligne : https ://archive.org/details/lesoeuvresdenico00struuoft

18. Notre espérance.

« Deuxième problème

A joue un jeu où il y a c chances en tout. Il y a b chances de ne pas gagner le jeu de prime abord. On demande combien de fois on doit lui permettre de continuer à jouer, pour qu'il puisse parier à r contre p.

Posons le nombre demandé $= x$, et l'enjeu qu'on peut gagner $= 1$. Si l'on nous imposait de jeter 6 points du premier coup avec un dé ordinaire, nous aurions droit à $\frac{1}{6}$. Le reste est alors $\frac{5}{6}$. Au deuxième coup nous avons de nouveau droit à la sixième partie de $\frac{5}{6}$. Le reste est alors $\frac{5}{6} \times \frac{5}{6}$. Au troisième coup, nous avons de nouveau droit à la sixième partie de ce reste. Le reste sera alors $\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6}$. Six est le nombre total des chances : donc $c = 6$. Le nombre des chances défavorables à A est 5 au premier coup. Si on lui permet de jeter x fois, sa part est exprimée par $1 - \frac{b^x}{c^x}$ ou, si l'on pose $a = c - b$, il a a chances de gagner du premier coup. Sa part est donc $\frac{a}{c}$. En soustrayant cette fraction de l'unité, on voit qu'il reste $1 - \frac{a}{c}$ ou $\frac{b}{c}$. Après cela il a a chances de gagner ce reste. Le nombre total des chances est c. Le prix du deuxième coup est donc $\frac{ab}{cc}$. En soustrayant cette fraction de $\frac{b}{c}$, on voit qu'il reste $\frac{bb}{cc}$. Il appert par là que le prix du troisième coup sera $\frac{abb}{c^3}$, du quatrième $\frac{ab^3}{c^4}$, etc. A a donc droit à la somme $\frac{a}{c} + \frac{ab}{cc} + \frac{abb}{c^3} + \frac{ab^3}{c^4} + \frac{ab^4}{c^5} +$ etc. Le nombre de termes doit être x. La somme de ces termes, c.à.d. la part de A, est, comme nous l'avons dit plus haut, $1 - \frac{b^x}{c^x}$. Ce nombre doit être égal à $\frac{r}{p+r}$ (car si l'enjeu de A est r et celui du second joueur p, l'enjeu total est $p + r$, et la part de A est $\frac{r}{p+r}$). Nous trouvons par réduction de cette équation

$$\frac{c^x}{b^x} = \frac{p+r}{p}$$

En prenant le logarithme des deux membres et en tirant x de l'équation, on trouve [19]

$$x = \frac{\log .\overline{p+r} - \log .p}{\log .c - \log .b}$$

Premier Exemple

Supposons qu'on demande en combien de coups on pourrait parier (1 contre 1) de jeter 2 six avec 2 dés ordinaires. En ce cas $p = r = 1$, $c = 36$, $b = 35$. On trouvera : en 24 à 25 coups.

Deuxième Exemple

Mais si l'on veut parier 10 contre 1, on trouve 84 à 85 coups, et si l'on veut parier 3 contre 1, 49 coups et une fraction.

[...]

Quatrième Exemple

Si l'on veut parier 1 contre 1 de jeter 3 six avec 3 dés ordinaires, on trouve 149 coups. De même on peut accepter de jeter 4 six avec 4 dés en 898 coups à peu près. » [20]

Abraham de Moivre : *The Doctrine of Chances* (première édition, 1718)

L'ouvrage de de Moivre commence par une introduction, dans laquelle la première définition est celle de la probabilité d'un évènement.

19. $\overline{p+r}$ signifie $(p + r)$.
20. Struyck, op. cité, p. 52-53.

« La probabilité d'un évènement est plus ou moins grande selon le nombre de chances par lequel il peut se produire, comparé au nombre de toutes les chances qu'il a de se produire ou d'échouer à se produire.

Ainsi, si un événement a 3 chances de se produire et 2 d'échouer, on peut estimer que la probabilité qu'il se produise est de $\frac{3}{5}$, et celle qu'il échoue de $\frac{2}{5}$.

Par conséquent, si on ajoute la probabilité de la réussite et celle de l'échec, la somme sera toujours égale à l'unité. » [21]

Dans la troisième édition (1758), de Moivre donne la définition générale de la probabilité avant le même exemple numérique que ci-dessus :

« [...] si on constitue une fraction dont le numérateur est le nombre de chances par lequel un évènement peut se produire, et le dénominateur le nombre de toutes les chances qu'il a de se produire ou d'échouer à se produire, cette fraction sera une désignation correcte de la probabilité qu'il a de se produire ». [22]

Abraham de Moivre s'occupe également du problème du nombre de lancers d'un dé nécessaire pour qu'il y ait avantage à parier qu'on obtiendra au moins un six. Lui aussi procède de proche en proche, d'une manière assez proche de nos raisonnements actuels.

« CAS I

Trouver la probabilité d'obtenir un as[23] *en deux lancers d'un dé*

SOLUTION

La probabilité d'obtenir un as la première fois est $\frac{1}{6}$; donc $\frac{1}{6}$ est la première partie de la probabilité demandée.

Si l'as n'est pas sorti la première fois, il peut encore être obtenu la seconde, mais la probabilité de ne pas sortir la première fois est $\frac{5}{6}$, et la probabilité de l'obtenir la seconde fois est $\frac{1}{6}$; donc la probabilité d'échouer la première fois et de l'obtenir la seconde fois est $\frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$; et c'est la seconde partie de la probabilité demandée, et donc la probabilité demandée est en tout : $\frac{1}{6}+\frac{5}{36} = \frac{11}{36}$.

[...]

CAS II

Trouver la probabilité d'obtenir un as en trois lancers

SOLUTION

La probabilité d'obtenir un as la première fois est $\frac{1}{6}$, qui est la première partie de la probabilité demandée. Si l'as ne sort pas la première fois, il peut encore être obtenu lors des deux lancers restants ; mais la probabilité de ne pas sortir la première fois est $\frac{5}{6}$, et la probabilité de l'obtenir lors des deux fois restantes (Cas I) $= \frac{11}{36}$. Donc la probabilité d'échouer la première fois et de l'obtenir lors des deux derniers lancers est $\frac{5}{6} \times \frac{11}{36} = \frac{55}{216}$, qui est la deuxième partie de la probabilité demandée ; donc la probabilité demandée sera $\frac{1}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{11}{36} = \frac{91}{216}$. » [24]

21. De Moivre A., *The doctrine of chances or, a method of calculating the probability of events in play* , 1ère édition 1718, p.1. Disponible en ligne : https ://archive.org/details/b30412390/page/n8. Traduction libre du groupe M. :A.T.H.

22. De Moivre A., *The doctrine of chances or, a method of calculating the probability of events in play* , 3e édition, 1756, p.2-3. Disponible en ligne :https ://www.ime.usp.br/~walterfm/cursos/mac5796/DoctrineOfChances.pdf

23. nous dirions : « au moins un as ».

24. De Moivre A., *The doctrine of chances or, a method of calculating the probability of events in play* (3 ème édition, Londres, 1756), pages 9-10.

Le cas suivant est celui de 4 lancers, résolu de la même manière. Après d'autres exemples, de Moivre généralise le problème. en considérant immédiatement l'évènement contraire de « obtenir au moins une fois l'évènement donné en x essais », ce qui simplifie considérablement la question.

« PROBLÈME III

Trouver en combien d'essais un évènement se produira probablement, ou combien d'essais seront nécessaires pour qu'il soit indifférent de parier sur sa réussite ou son échec, supposant que a est le nombre de chances pour sa réussite à chaque essai, et b le nombre de chances de son échec.

SOLUTION

Soit x le nombre d'essais, alors *par le 16ème article de l'Introduction*, b^x représentera le nombre de chances que l'évènement échoue x fois successivement, et $(a+b)^x$ le nombre total de chances de réussite ou d'échec, et donc $\frac{b^x}{(a+b)^x}$ représente la probabilité que l'évènement échoue x fois de suite ; mais par la supposition que cette probabilité est égale à la probabilité que l'évènement se produise au moins une fois dans ce nombre d'essais, il s'ensuit que chacune de ces deux probabilités peut être exprimée par la fraction $\frac{1}{2}$: nous avons donc l'équation $\frac{b^x}{(a+b)^x} = \frac{1}{2}$, ou $(a+b)^x = 2b^x$, d'où on déduit l'équation $x \log .(a+b) = x \log .b + \log .2$; et donc $x = \frac{\log .2}{\log .(a+b) - \log .b}$.

De plus, revenons à l'équation $(a+b)^x = 2b^x$, dans laquelle nous supposons que $a, b \; :: \; 1, q$;[25] en conséquence, la dite équation se changera en celle-ci $\left(1+\frac{1}{q}\right)^x = 2$. Ou $x \times \log .\left(1+\frac{1}{q}\right) = \log .2$. Dans cette équation, si q est égal à 1, x sera de même égal à 1 ; mais si q est différent de l'unité, remplaçons $\log .\left(1+\frac{1}{q}\right)$ par sa valeur exprimée par une série ; à savoir

$$\frac{1}{q} - \frac{1}{2qq} + \frac{1}{3q^3} - \frac{1}{4q^4} + \frac{1}{5q^5} - \frac{1}{6q^6} \text{ \&c.}$$

Nous avons alors l'équation $\frac{x}{q} - \frac{x}{2qq}$,&c.$= \log .2$. Supposons maintenant que q est infini, ou suffisamment grand par rapport à l'unité, et alors le premier terme de la série sera suffisant ; nous aurons par conséquent l'équation $\frac{x}{q} = \log .2$, ou $x = q \log .2$. Mais il faut observer qu'ici, il faut prendre le logarithme hyperbolique, et non pas le logarithme des tables, lequel étant 0.693&c. Ou à peu près 0.7, il suit que $x = 0.7q$ à peu près.

[...]

Quelques utilisations de ce problème apparaîtront dans les exemples suivants.

EXEMPLE I.

Soit proposé de trouver en combien de lancers on peut parier d'obtenir deux as avec deux dés, avec égalité de chance.

Le nombre de chances avec deux dés étant 36, dont une seulement pour 2 as, il suit que le nombre de chances contre cela est 35 ; multipliez 35 par 0.7, et le produit 24.5 montrera que le nombre de lancers nécessaire à cet effet sera entre 24 et 25. »[26]

25. a est à b comme 1 est à q, c'est-à-dire $\frac{a}{b} = \frac{1}{q}$.

26. De Moivre A. , *The doctrine of chances or, a method of calculating the probability of events in play* (3 ème édition, Londres, 1756), pages 36-37-38.

D'autres problèmes de dés

Nous avons donné les extraits du Traité de Huygens sur le calcul dans les jeux de hasard traitant du probléme de dés évoqué par Pascal dans sa lettre à Fermat de juillet 1654. Les échanges épistolaires entre savants du XVII^{e} siècle ont été féconds et ont abordé d'autres problèmes sur les jeux de hasard. Lors de son séjour en France en 1655, Huygens ne rencontra ni Fermat, ni Pascal, ni Carcavy, mais il connut les problèmes que se posaient ces savants, entre autres par l'intermédiaire de Mylon, sans cependant connaître les méthodes et les solutions apportées par les uns et les autres.

Échanges épistolaires entre Huygens et Fermat

Dès 1656, Huygens travailla à son Traité, qui fut publié par Van Schooten en 1657 en latin et en hollandais en 1660. Dès avant cette publication, Huygens correspondit avec Roberval et Mylon [27] et leur posa divers problèmes sur le hasard, qui parvinrent à Fermat et Pascal par l'intermédiaire de Carcavy. Le problème principal était le suivant : deux joueurs A et B lancent tour à tour 2 dés cubiques ; A gagne dès qu'il amène la somme de 6 points et B la somme de 7 points. A joue le premier. Il s'agit de trouver « le rapport de leurs chances ». On voit là apparaître un sujet qui occupera les échanges : celui de l'avantage que donne la primauté à un joueur. Fermat résout ce problème et renvoie la solution, sans aucune indication de méthode, avec d'autres questions plus difficiles, à Carcavy, qui transmet à Huygens en juin 1656. Nous mettons ci-dessous les questions concernant les dés, les autres concernent des jeux de cartes.

> « [...]1. Si A et B jouent avec deux dés en sorte que, si A amène 6 points en ses deux dés avant que B en amène 7, le joueur A gagne et, si B amène 7 avant que A ait amené 6, le joueur B aura gagné, et de plus le joueur A a la primauté, l'avantage de A à B est comme 30 à 31.
>
> 2. Si le joueur A a la première fois la primauté et ensuite le joueur B ait aussi la primauté la seconde fois, et ainsi alternativement (auquel cas A poussera le dé la première fois, et puis B deux fois de suite, et puis A deux fois de suite, et ainsi jusques à la fin), en cette espèce le parti du joueur A est à celui du joueur B comme 10355 à 12276.
>
> 3. Que si le joueur A joue premièrement deux fois et le joueur B trois fois, puis le joueur A deux fois et ensuite le joueur B trois fois, et ainsi à l'infini que le joueur A qui commence ne joue jamais que deux coups et que le joueur B en joue trois (supposant toujours que A cherche à ramener 6 et B 7), le parti de A est à B comme 72360 à 87451. » [28]

Huygens répond à Carcavy en juillet 1656, en reconnaissant que Fermat « a la méthode universelle pour trouver tout ce qui appartient à cette matière, ce que je désirais seulement de savoir en la proposant. La même raison de 30 à 31 est dans le traité que j'ai envoyé à M. Schooten il y a deux mois ». [29]

La solution de Huygens à la question 1.

La proposition XIV du traité de Huygens résout ce problème, en utilisant toujours l'outil de l'espérance et la proposition III de son traité, qu'il redonne dans sa lettre. On

27. Mylon est un ami de Carcavy, collègue de Fermat au Parlement de Toulouse. Huygens l'a rencontré à Paris et a correspondu avec lui , entre autres sur des problèmes liés au hasard.
28. Fermat P., *Œuvres complètes*, tome II, éditées par Tannery et Henry, Gauthiers-Villars, Paris, 1894, p.320-321.
29. Ib. p. 322.

appelle a l'enjeu, et x l'espérance de B. Chaque fois que revient le tour de A la « chance [de B] aura de nouveau la valeur x. Mais chaque fois que c'est [le tour de B] de jeter, [sa] chance doit avoir une valeur supérieure, mettons y. Or, attendu que parmi les 36 coups qu'on peut faire avec 2 dés, il y en a 5 qui peuvent donner 6 points à [A] et lui faire gagner la partie, et 31 coups à son désavantage, c'est-à-dire qui amènent [le tour de B] de jeter, B a 5 chances d'avoir 0 lorsque que [A] jette la première fois, et 31 chances d'avoir y ; ce qui [...] vaut $\frac{31y}{36}$. » Ainsi, on a : $\frac{31y}{36} = x$. Lorsque c'est le tour de B de jouer, B a 6 chances d'avoir *a,* puisqu'il y a 6 coups de 7 points, et 30 chances d'avoir x, car, si la somme 7 ne sort pas, c'est de nouveau à A de jouer. Donc $y = \frac{6a+30x}{36}$. En combinant les deux équations trouvées, on obtient $\frac{6a+30x}{36} = \frac{36x}{31}$, d'où la « valeur de la chance » de B est $x = \frac{31a}{61}$ et celle de A est donc $\frac{30a}{61}$. Ainsi, le rapport des chances de A à celles de B, qui est égal au rapport de leurs espérances, est bien de 30 à 31.

La solution de Huygens à la question 2.

Dans sa lettre de juillet 1656, Huygens résout les questions posées par Fermat. A jette les deux dés une fois, puis B deux fois, puis A deux fois, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'un des deux gagne le jeu, c'est-à-dire que A amène la somme 6 ou B la somme 7. Huygens appelle d ce qui est mis au jeu, et x la part qui appartient au joueur [30] A et remarque que, « quand A aura fait le premier coup et B ses deux coups de suite, et encore A l'un de ses deux coups, sans que ni l'un ni l'autre ait rencontré, que alors A aura derechef la même apparence pour gagner qu'il avait dès le commencement, et que par conséquent il lui appartiendra derechef la même part de ce qui est mis au jeu, c'est-à-dire x ». Donc, lorsque A a joué son premier coup, puis B ses deux coups, et que A va « faire le premier de ses deux coups de suite, il aura 5 hazards pour avoir d et 31 hazards pour avoir x, car de 36 divers coups que produisent deux dés, il y en a 5 de 6 points, c'est-à-dire qui lui donnent d ou ce qui est mis au jeu, et 31 qui lui font manquer les 6 points, et ainsi lui donnent x, le mettant en étant d'avoir encore un coup à faire devant que le tour de B soit venu. Mais 5 hazards pour avoir d et 31 hazards pour avoir x valent autant par le théorème précédent que $\frac{5d+31x}{36}$. Ceci est donc la part de A lorsque A fait le premier de ses deux coups de suite ». Ensuite, Huygens remonte ensuite jusqu'au début du jeu. Lorsque B va faire son deuxième coup, A a « 6 hazards pour avoir 0 ou rien [31], et 30 hazards pour avoir $\frac{5d+31x}{36}$ » [32]. Ceci vaut à A : $\frac{6\times 0+30\frac{5d+31x}{36}}{36} = \frac{150d+930x}{1296}$. En remontant encore d'un coup, quand B va jouer son premier coup, « A aura 6 hazards pour avoir 0, et 30 hazards pour avoir $\frac{150d+930x}{1296}$, ce qui vaut $\frac{4500d+27900x}{46656}$ ». Au commencement du jeu, quand A va jouer son premier coup, il a « 5 hazards pour avoir d et 31 hazards pour avoir $\frac{4500d+27900x}{46656}$, ce qui vaut $\frac{372780d+864900x}{1679616}$. Ceci est donc égal à x, et partant x égal à $\frac{10355d}{22631}$. Le parti du joueur A est donc $\frac{10355}{22631}$ de ce qui est mis au jeu, et le reste $\frac{12276}{22631}$ est le parti de B, et l'un est à l'autre comme $\frac{10355}{12276}$, qui sont les nombres de Monsieur de Fermat ». Pour la question suivante, lorsque A joue deux fois, puis B trois fois, puis A deux fois, puis B trois fois, et ainsi de suite, Huygens affirme trouver les mêmes nombres que Fermat, mais en inversant les résultats de A et B. Mais il ne donne aucun détail de calcul.

La solution de de Montmort

De Montmort, dans l'ouvrage déjà cité, résout le problème lorsque A joue une fois, puis B deux fois, puis A deux fois, etc., le joueur A étant Pierre et le joueur B, Paul. Sa

30. Nous dirions l'espérance de A.
31. Car B a 6 cas où il amène 7 points, donc remporte la mise.
32. Puisque, si B n'amène pas 7, A va faire le premier de ses deux coups de suite.

méthode est semblable à celle de Huygens, mais, au lieu de remonter à partir du moment où on revient à la situation initiale, il part du premier coup, et arrête son calcul au moment de ce retour à la situation initiale.

> « Présentement soit nommé A l'argent du jeu, x le sort de Pierre lorsqu'il va jouer son coup, y son sort lorsque Paul va jouer son premier coup, z son sort lorsque Paul va jouer son second coup, & enfin u son sort lorsque le tour de Pierre revenant il va jouer le premier de ses deux coups.
>
> On aura ces quatre égalités[33], $S = \frac{5}{36}A + \frac{31}{36}y$, $y = \frac{30}{36}z$, $z = \frac{30}{36}u$, $u = \frac{5}{36}A + \frac{31}{36}x$; ce qui donne[34] $S = \frac{5}{36}A + \frac{31}{36} \times \frac{25}{36} \times \overline{\frac{5}{36}A + \frac{31}{36}x}$, d'où on tire par réduction et transposition $S = \frac{10355}{22631}A$, ce qui exprime le sort de Pierre, & $A - S = \frac{12276}{22631}A$, qui exprime celui de Paul. »[35]

La solution de Struyck

Struyck, comme de Montmort, procède de proche en proche à partir du premier coup, mais de manière différente cependant.

> « A a 5 chances de gagner, B en a 6. On peut faire 36 coups différents avec 2 dés ordinaires. Nous calculerons d'abord la valeur du premier coup de A, et ensuite celle des coups doubles que les joueurs font tour à tour »[36].

Struyck pose que l'enjeu est 1. Au premier coup, A a 5 chances d'emporter 1 et 31 chances d'emporter 0 ; donc le premier coup de A vaut $\frac{5\times1+31\times0}{36} = \frac{5}{36}$. La partie de l'enjeu qui reste pour les deux joueurs après ce premier coup est donc $\frac{31}{36}$. B joue alors 2 coups. Pour son premier coup, il a 6 chances d'obtenir ces $\frac{31}{36}$ encore en jeu, et 30 chances d'obtenir 0. Le premier coup de B vaut donc $\frac{6\times\frac{31}{36}}{36} = \frac{31}{216}$ et il reste donc en jeu $\frac{31}{36} - \frac{31}{216} = \frac{155}{216}$. Le deuxième coup de B vaut alors $\frac{6\times\frac{155}{216}}{36} = \frac{155}{1296}$ et il reste en jeu après les deux coups de B $\frac{155}{216} - \frac{155}{1296} = \frac{775}{1296}$. Les deux coups de B lui valent donc $\frac{31}{216} + \frac{155}{1296} = \frac{341}{1296}$ et il reste en jeu $\frac{775}{1296}$ après ces deux coups de B. Un calcul analogue pour les deux coups de A donne pour le premier coup de A $\frac{3875}{46656}$ avec un reste de $\frac{24025}{46656}$ et pour son deuxième coup $\frac{120125}{1679616}$. Les deux coups de A valent ensemble $\frac{259625}{1679616}$. Struyck conclut :

> « Et comme les nombres qui correspondent aux deux coups que B et A font l'un après l'autre conservent entre eux la même proportion jusqu'à l'infini, et qui est donc égale à la proportion des sommes des nombres correspondant aux deux premiers coups que les joueurs font l'un après l'autre[37], il faut diviser $\frac{31}{36}$, la partie de l'enjeu qui reste pour les deux joueurs après le premier coup de A, en raison de ces sommes[38], ce qui se fait de la manière suivante. En divisant, pour abréger le calcul, les numérateurs par 31 et les dénominateurs par 1296, on voit que ces sommes sont l'une à l'autre comme 11 est à $\frac{8375}{1296}$. La somme de ces nombres est $\frac{22631}{1296}$.[39]

33. S est « le sort » de Pierre, donc x et S sont égaux.
34. La barre au-dessus d'une expression joue le rôle de parenthèses.
35. De Montmort P.R., op. cité, p. 157.
36. Struyck N., op. cité, p.32.
37. Les sommes calculées auparavant, $\frac{341}{1296}$ qui est la somme de ce que valent les deux coups de B et $\frac{259625}{1679616}$ qui est la somme de ce que valent les deux coups de A.
38. c'est-à-dire proportionnellement à ces sommes.
39. Si S_B est la part de B, S_A la part de A et qu'on veuille que ces parts soient dans le même rapport que les nombres b et a, on aura : $\frac{S_B}{S_A} = \frac{b}{a}$, donc $\frac{S_B}{b} = \frac{S_A}{a} = \frac{S_B+S_A}{b+a}$ où $S_B + S_A$ est la somme à partager, soit ici $\frac{31}{36}$.

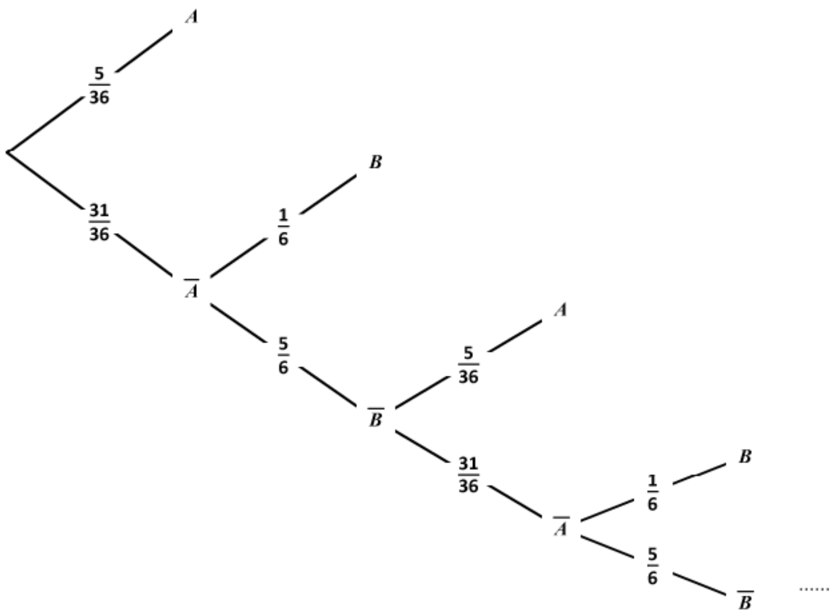
> [...] La part de B sera $\frac{12276}{22631}$. Si nous soustrayons ce nombre de l'unité, il reste $\frac{10355}{22631}$; c'est la part de A. La chance de gagner du joueur A est donc à celle de B comme 10355 est à 12276. Ce qu'il fallait trouver » [40].

Résolution grâce aux arbres de probabilités

Les problèmes étudiés peuvent se résoudre avec l'outil des arbres pondérés. Dans toute cette section, lorsque le joueur A lance le dé, on désigne par A l'évènement « A amène la somme 6 » et, lorsque le joueur B lance le dé, on désigne par B l'évènement, « B amène la somme 7 ».

Question 1 de la lettre de Fermat

Les joueurs A et B lancent deux dé cubiques à tour de rôle. A gagne le jeu dès qu'il amène la somme 6 et B gagne le jeu dès qu'il amène la somme 7. A effectue le premier lancer. On peut décrire la situation par deux types d'arbres.



Un tel arbre conduit à une somme infinie pour le calcul de la probabilité x que A gagne le jeu.

$$x = \frac{5}{36} + \frac{31}{36} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{36} + \left(\frac{31}{36} \times \frac{5}{6}\right)^2 \times \frac{5}{36} + \left(\frac{31}{36} \times \frac{5}{6}\right)^3 \times \frac{5}{36} + \left(\frac{31}{36} \times \frac{5}{6}\right)^4 \times \frac{5}{36} ...$$

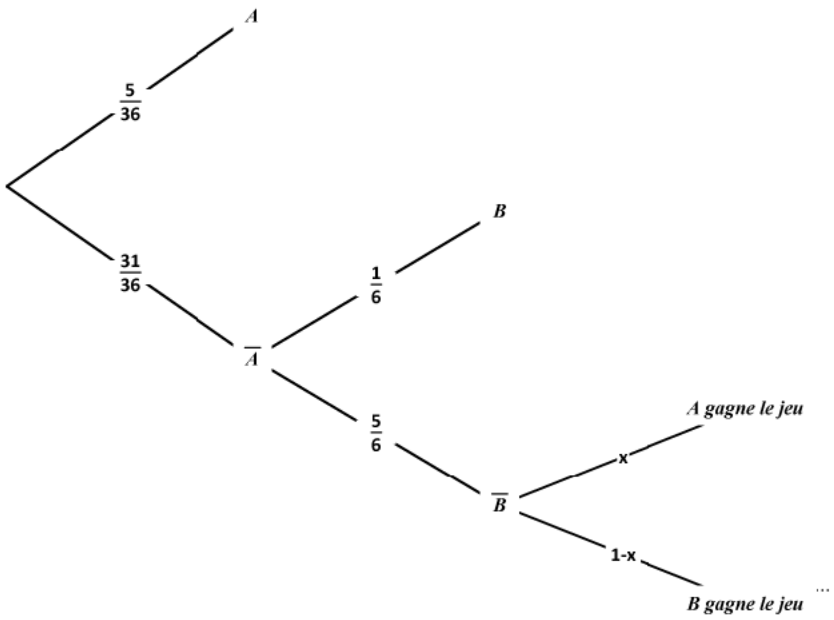
Les connaissances des élèves de terminale sur les sommes de suites géométriques leur permettent de résoudre la question.

$$x = \lim_{n \to +\infty} \frac{5}{36} \sum_{k=0}^{k=n} \left(\frac{31}{36} \times \frac{5}{6}\right)^n = \lim_{n \to +\infty} \frac{5}{36} \times \frac{1-\left(\frac{31}{36} \times \frac{5}{6}\right)^{n+1}}{1-\frac{31}{36} \times \frac{5}{6}} = \frac{5}{36} \times \frac{1}{1-\frac{31}{36} \times \frac{5}{6}} = \frac{30}{61}$$

La probabilité que B gagne le jeu est alors $1 - x = \frac{31}{61}$ et on retrouve le résultat de Fermat et Huygens.

On peut aussi, comme le fait Huygens, remarquer que, lorsque A a lancé une fois le dé sans amener la somme 6, puis B une fois sans amener la somme 7, on se retrouve dans la situation de départ. L'arbre suivant décrit la situation, x étant toujours la probabilité que A gagne le jeu au commencement de celui-ci.

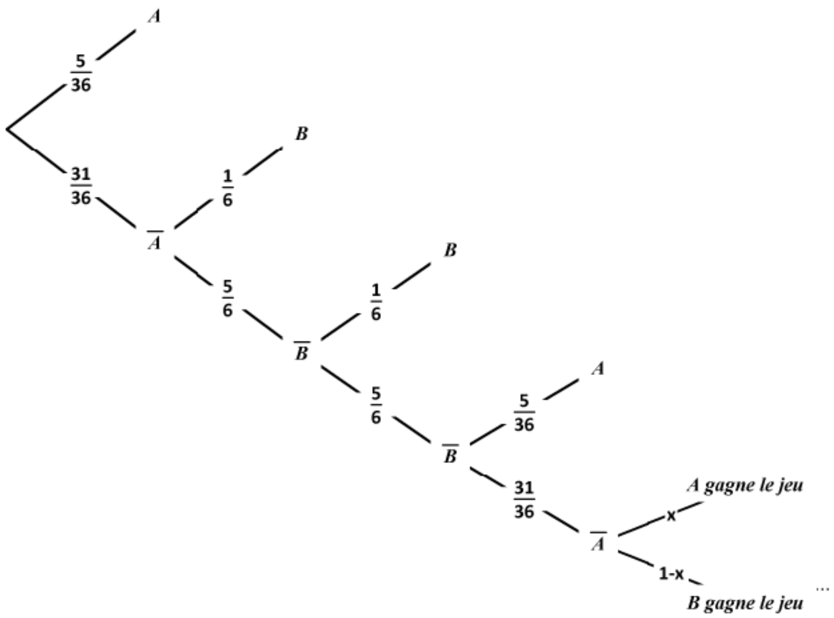
40. Struyck N., op. cité, p.32-34.



On a donc : $x = \frac{5}{36} + \frac{31}{36} \times \frac{5}{6}x$, ce qui redonne $x = \frac{30}{61}$.

Question 2 de la lettre de Fermat

Le joueur A lance les dés une fois, puis le joueur B lance les dés deux fois, puis A deux fois, puis B deux fois, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'un d'eux gagne le jeu. On pourrait aussi faire deux types d'arbres, l'un menant à une somme infinie, l'autre utilisant le fait que, lorsque A a lancé une fois les dés sans amener la somme 6, puis B deux fois sans amener la somme 7, puis A une fois sans amener la somme 6, on se retrouve dans la situation de départ. Nous nous contenterons de ce deuxième arbre, avec toujours les mêmes notations.



On obtient :

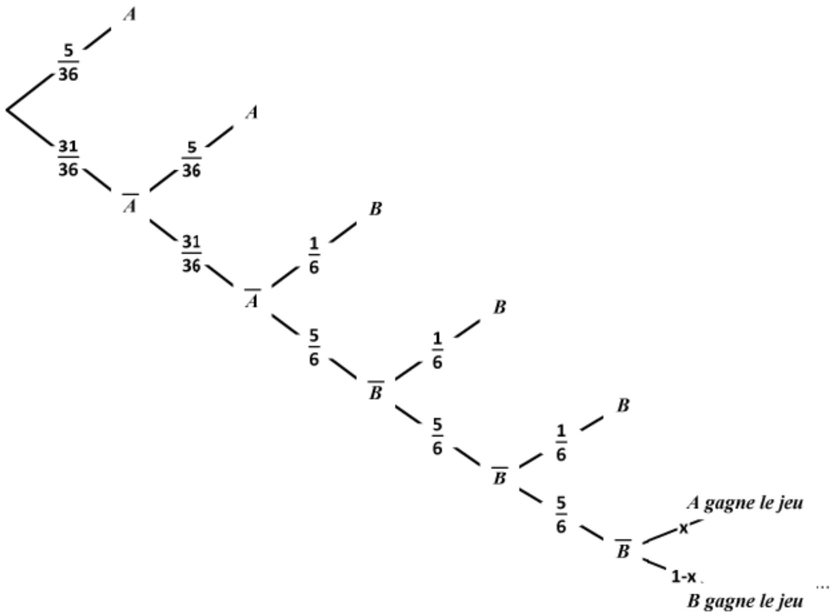
$$x = \frac{5}{36} + \frac{31}{36} \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 \times \frac{5}{36} + \frac{31}{36} \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 \times \frac{31}{36} \times x$$

Toutes réductions faites :

$$x = \frac{5\left(36 \times 6^2 + 31 \times 5^2\right)}{36^2 \times 6^2 - 31^2 \times 5^2} = \frac{10355}{22631} \text{ et } 1 - x = \frac{12276}{22631}$$

Question 3 de la lettre de Fermat

Le joueur A lance les dés deux fois, puis le joueur B lance les dés trois fois, puis A deux fois, puis B trois fois, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'un d'eux gagne le jeu. Nous nous contenterons de donner l'arbre de probabilités qui vous permettra de départager Fermat et Huygens sur cette question.



Conclusion

Le premier problème cité, évoqué dans la lettre de Pascal, a fait l'objet de différentes utilisations en classe depuis très longtemps, en terminale de séries scientifiques d'abord, puis, lorsque la notion d'expériences répétées indépendantes s'est trouvée au programme de 1S (réforme dite « Chatel », de 2011 à 2019), dans cette classe. Avec la nouvelle réforme des lycées (dite « Blanquer »), ce problème trouverait sa place en spécialité mathématiques de terminale générale. Vous trouverez l'énoncé d'un problème ouvert et des comptes-rendus d'expériences en classe sur la page consacrée à « Utilisation de l'histoire des mathématiques en probabilités » du groupe M. : A.T.H. du site de l'IREM de Paris [41].

Nous proposons dans la rubrique « Dans nos classes » un problème possible sur la généralisation proposée par de Moivre. Nous espérons que cet article donnera envie à nos lectrices et lecteurs de faire lire des extraits de certains des textes présentés à leurs élèves et serions très intéressées par un retour sur d'éventuelles séances en classe.

41. https ://irem.u-paris.fr/utilisation-de-lhistoire-des-mathematiques-en-probabilites

https://archive.org/details/BIUSante_353589/page/n4/mode/1up

Pascasii Justi *de Alea* libri duo
Joueurs de Dés
Gravure de Cornelis Van Dalen