Petite histoire de la notion d'« espérance mathématique »

Dominique Baroux et Martine Bühler

Les programmes de mathématiques mis en œuvre à la rentrée 2019 comportent des items d'histoire des mathématiques ; le programme de la spécialité mathématiques de la classe de première générale donne ainsi des pistes pour l'histoire des probabilités :

> « On peut considérer que les origines du « calcul des probabilités » remontent au XVII^{e} siècle. Pascal, Huygens, Moivre, Bernoulli, Euler, d'Alembert appliquent les notions de variable aléatoire et d'espérance à des problèmes issus de questions liées aux jeux, aux assurances et à l'astronomie.
>
> Capacités attendues
>
> - utiliser la notion d'espérance dans une résolution de problème (mise pour un jeu équitable [. . .]) »

Ce paragraphe nous a incitées à lire ou relire les textes de certains des auteurs cités, afin de mieux comprendre l'émergence de cette notion d'espérance, le sens qu'elle recouvre pour les auteurs des XVII^{e} et XVIII^{e} siècles, comment cette notion est utilisée dans la résolution de problèmes à l'époque.

Jeux de hasard et attente des joueurs

Pascal : *Traité du Triangle arithmétique*

On fait souvent remonter la naissance des probabilités à la correspondance de Pascal et Fermat en 1654 au sujet du problème des partis [1] :

> « Deux joueurs jouent à « un jeu de pur hasard », et le premier qui gagne un nombre de « parties » déterminé sera déclaré vainqueur. S'ils doivent « quitter le jeu » avant qu'il soit normalement achevé par la victoire de l'un ou de l'autre, comment doivent-ils partager « l'argent qu'ils ont mis au jeu » ? »(Coumet, 1967)

Comme l'explique Coumet dans son article, on trouve, antérieurement à la correspondance entre Pascal et Fermat en 1654, des traces de ce problème et des solutions chez divers auteurs italiens (Pacioli, Forestani, Cardan,. . .) du XV^{e} siècle au tout début du XVI^{e} siècle. Depuis, on a découvert des textes plus anciens anonymes (Meusnier, 2004).

Pascal reprend ce problème dans son opuscule *Traité du triangle arithmétique*, écrit probablement en 1654, puisque Fermat y fait allusion dans une lettre à Pascal d'août 1654, mais qui ne sera édité et diffusé qu'en 1665 après la mort de Pascal. Il y explique les principes qui lui permettent de résoudre le problème des partis :

> « Pour entendre les règles des partis, la première chose qu'il faut considérer est que **l'argent que les joueurs ont mis au jeu ne leur appartient plus** [2], car ils en ont quitté la propriété ; mais **ils ont reçu en revanche le droit d'attendre ce que le hasard leur en peut donner**, suivant les conditions dont ils sont convenus d'abord.
>
> Mais, comme c'est une loi volontaire, ils la peuvent rompre de gré à gré ; et ainsi, en quelque terme que le jeu se trouve, **ils peuvent le quitter** ; et, au

1. Le « parti » ou « party » est le partage qu'on doit faire de la mise entre les joueurs. Le mot « partir » vient du latin « partire » qui veut dire partager et s'employait en vieux français pour « partager, diviser ».
2. C'est nous qui soulignons.

contraire de ce qu'ils ont fait en y entrant, **renoncer à l'attente du hasard, et rentrer chacun en la propriété de quelque chose**. Et en ce cas, le règlement de ce qui doit leur appartenir doit être tellement proportionné à ce qu'ils avaient droit d'espérer de la fortune que chacun d'eux trouve entièrement égal de prendre ce qu'on lui assigne ou de continuer l'aventure du jeu ; et cette juste distribution s'appelle le parti. » (Pascal, 1963, p. 60-63)

On voit apparaître ici la notion d'« attente du hasard », qui a une valeur « proportionné[e] à ce [que les joueurs] avaient droit d'espérer de la fortune ». Pascal explique alors comment faire le partage ; si, à un jeu de pur hasard, un joueur emporte la somme A s'il gagne et la somme B (avec $B < A$) s'il perd, alors, en cas d'arrêt du jeu, ce joueur doit recevoir la somme B en entier (puisqu'elle lui appartient qu'il gagne ou perde la partie suivante), et la moitié de la différence $A - B$, puisqu'il y a « autant de hasards pour l'un que pour l'autre » de gagner cette somme. Donc, le joueur doit emporter : $B + \frac{1}{2}(A - B) = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$. Bien sûr, nous pouvons reconnaître ici la formule de notre espérance mathématique dans un cas particulier, mais, d'une part cette formule n'est pas une définition de l'espérance, mais un résultat démontré à partir des principes énoncés par Pascal ; d'autre part, il ne s'agit pas, comme dans un cours de lycée, d'une « moyenne » des gains « espérés » [3], mais de la valeur de « l'attente de ce que le hasard peut donner » [4].

Christiaan Huygens : *Du calcul dans les jeux de hasard*

Christiaan Huygens (La Haye, 1629 – 1695), quant à lui, s'intéresse aux probabilités lors de son premier voyage à Paris en 1655, durant lequel il prend connaissance des problèmes sur les jeux de hasard qui circulent chez les mathématiciens français, en particulier le problème des partis, sans pour autant connaître les solutions apportées :

> « Mais ces savants [5], quoiqu'il se missent à l'épreuve l'un l'autre en se proposant beaucoup de problèmes difficiles à résoudre, ont cepensant caché leurs méthodes. J'ai donc dû examiner et approfondir moi-même toute cette matière à commencer par les éléments, et il m'est impossible pour la raison que je viens de mentionner d'affirmer que nous sommes partis d'un même premier principe. Mais pour ce qui est du résultat, j'ai constaté en bien des cas que mes solutions ne diffèrent nullement des leurs » [6] .

Il publie en 1657 le premier traité imprimé de « probabilités » intitulé *Du calcul dans les jeux de hasard*. Dans la traduction française de cet ouvrage, le mot « chance » a plusieurs significations ; Huygens parle de la « valeur de la chance » qu'un joueur a de gagner ou de perdre [7] ; on trouvera aussi le mot « chances » dans le sens d'« issues favorables » à un évènement [8], avec éventuellement la précision « chances égales » ou « équivalentes » qui signale une situation d'équiprobabilité.

On lit dans l'introduction :

> « Quoique dans les jeux de hasard par les résultats soient incertains, **la chance qu'un joueur a de gagner ou de perdre a cependant une valeur déterminée** [9]. [...] On peut calculer également pour quel prix je devrais

3. Notion de moyenne qui fait appel à la loi faible des grands nombres, qui assure que si cette expérience de jeu était répétée un grand nombre de fois, la moyenne « statistique » des gains du joueur tendrait vers $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$.

4. Voir, dans ce numéro, l'article « Pascal au carrefour des probabilités, de l'algorithmique, de la récurrence et de la combinatoire ».

5. Il s'agit de Pascal et Fermat.

6. HUYGENS, C. , Lettre à Von Schooten de 1657, citée dans *Œuvres complètes*, tome 14, p. 58, La Haye, Martinus Nijhoff, 1920.

7. Nous verrons ci-dessous ce que Huygens entend par « valeur de la chance ».

8. Dans la proposition III.

9. C'est nous qui soulignons.

raisonnablement céder mon jeu à quelqu'un qui désirerait le continuer en mon lieu.

> **Dans ces deux matières**[10] **je pars de l'hypothèse que dans un jeu la chance qu'on a de gagner quelque chose a une valeur telle que si l'on possède cette valeur on peut se procurer la même chance par un jeu équitable, c'est-à-dire un jeu qui ne vise au détriment de personne.** »(Huygens, 1920, p. 78 et suivantes)

Dans cette introduction, Huygens donne deux façons de considérer la « valeur de la chance » d'un joueur. D'une part, c'est la part de l'enjeu à laquelle il a droit en cas d'interruption du jeu ; d'autre part, il fait l'hypothèse que « la chance qu'on a de gagner quelque chose a une valeur telle que si l'on possède cette valeur on peut se procurer la même chance par un jeu équitable ». C'est cette hypothèse qu'il va utiliser dans la suite pour découvrir et démontrer la formule de calcul de la « valeur de la chance »[11].

« Proposition I

Avoir des chances égales d'obtenir a ou b me vaut $\frac{a+b}{2}$.La situation est celle d'un jeu « de pur hasard » dans lequel chaque joueur a la même « chance » de gagner ou de perdre, comme par exemple à un jeu de pile ou face avec une pièce « équilibrée ».

> Afin de non seulement démontrer cette règle mais de la découvrir, appelons x la valeur de ma chance. Il faut donc, que possédant x, je puisse me procurer de nouveau la même chance par un jeu équitable. Supposons que ce jeu soit le suivant. Je joue x contre une autre personne[12], dont l'enjeu est également x ; il est convenu que celui qui gagne donnera a à celui qui perd. Ce jeu est équitable[13], et il appert que j'ai ainsi une chance égale d'avoir a en perdant, ou $2x - a$ en gagnant le jeu car dans ce dernier cas j'obtiens l'enjeu $2x$, duquel je dois donner a à l'autre joueur[14]. Si $2x - a$ était égal à b, j'aurais donc une chance égale d'avoir a ou d'avoir b. Je pose donc $2x - a = b$, d'où je tire la valeur de ma chance $x = \frac{a+b}{2}$. »

Huygens démontre deux autres propositions du même type : « Avoir des chances égales d'obtenir a ou b ou c me vaut $\frac{a+b+c}{3}$ » et « Avoir p chances d'obtenir a et q chances d'obtenir b, les chances étant équivalentes[15], me vaut $\frac{pa+qb}{p+q}$ ». La proposition I donne le même résultat que le texte de Pascal pour la valeur de « l'attente du hasard », mais avec une méthode différente, reposant sur la notion de « jeu équitable » fictif. La proposition III est une généralisation lorsque les « chances » d'obtenir a et b ne sont pas égales ; on retrouve également notre formule de « l'espérance mathématique », la probabilité de gagner a étant $\frac{p}{p+q}$ et celle de gagner b étant $\frac{q}{p+q}$. Mais là encore, il ne s'agit pas d'une définition de « valeur moyenne », mais d'une justification du calcul de la « valeur de la chance ». Huygens utilise cette notion de « valeur de la chance » et ces 3 propositions pour résoudre le problème des partis et divers problèmes de dés[16]. Il pose cinq problèmes sur des jeux de hasard à la fin de son traité.

---

10. Il s'agit du problème des partis et de divers problèmes de dés cités en exemple par Huygens.
11. La situation est celle d'un jeu « de pur hasard » dans lequel chaque joueur a la même « chance » de gagner ou de perdre, comme par exemple à un jeu de pile ou face avec une pièce « équilibrée ».
12. Voir la note précédente.
13. En effet, chaque joueur mise la même somme x, et, en cas de gain emporte la mise totale, sur laquelle il donne a au perdant ; les deux joueurs sont donc « en même condition » de jeu.
14. Il faut maintenant déterminer x pour que ce jeu équitable me mette dans la situation de la proposition, c'est-à-dire d'avoir « des chances égales d'obtenir a ou b ».
15. « p chances » pour p issues favorables, et « chances équivalentes » car il s'agit d'une situation d'équiprobablilité.
16. Voir dans ce numéro l'article « Problèmes de dés : Pascal, Fermat, Huygens et les autres ».

La démonstration de la proposition 3 par Huygens étant assez compliquée, nous donnons celle de Bernoulli proposée dans l'*Ars conjectandi*, œuvre posthume publiée en 1713. La première partie de l'ouvrage de Bernoulli est constituée du Traité de Huygens *Du calcul dans les jeux de hasard*, avec des commentaires sur les démonstrations de Huygens, des propositions de démonstrations différentes de celles de Huygens ainsi que la résolution des problèmes posés à la fin du traité. Bernoulli donne une autre démonstration de la proposition III de Huygens (page 8 de l'édition de 1713).

> « Voici une autre démonstration de la même règle : Supposons un nombre de joueurs égal au nombre de cas en général, c'est-à-dire à $p + q$, de manière qu'il y ait un cas pour chaque joueur ; supposons, par exemple, qu'il y ait $p + q$ boîtes, et qu'on ait caché dans chacune ce que donne l'une des deux espèces de cas, savoir a dans chacune des boîtes dont le nombre est p, et b dans chacune de celles dont le nombre est q. Si chacun des joueurs reçoit une de ces boîtes, ils en recevront ensemble la totalité, et ils ne pourront manquer d'avoir conjointement tout ce qu'elles contiennent, savoir $pa + qb$ et comme ils ont tous une attente égale, il faudrait diviser ce qu'ils recevront ensemble par le nombre de joueurs, ou par le nombre de cas ; d'où il s'ensuit que l'attente de chacun vaudra $\frac{pa+qb}{p+q}$. On démontrera de la même manière que si j'ai p cas pour a, q cas pour b et r cas pour c, mon sort sera $\frac{pa+qb+cr}{p+q+r}$.
>
> Corollaire. De là, il résulte, que si j'ai p cas pour a, et q cas pour 0, mon attente vaudra $\frac{pa}{p+q}$. »(Samueli, 2009)

Abraham de Moivre : *The Doctrine of Chances*

Abraham de Moivre (Vitry-le-François, 1667 – Londres, 1754) publie en 1718 *The Doctrine of Chances*, avec comme sous-titre *or a Method of Calculating the Probabilities of Events in Play*, qui représente un apport fondamental en probabilités. Le livre sera réédité plusieurs fois, avec des compléments. Dans la préface de l'édition de 1718, de Moivre cite le traité de Huygens comme le premier qui ait publié « les règles de ce calcul » [17]. Il précise qu'il n'a pas suivi la méthode de Huygens pour résoudre les problèmes liés aux jeux de hasard, tout en reconnaissant sa dette envers lui pour avoir présenté les premières notions sur ce type de calcul [18]. Il cite également l'*Analyse des jeux de Hazard* de Pierre Rémond de Montmort, dont la première édition date de 1708, dans lequel celui-ci résout les problèmes de dés de Huygens en utilisant la notion de « sort des joueurs » [19], mais également les combinaisons pour d'autres problèmes de jeux de hasard, en particulier des jeux de cartes.

L'ouvrage de de Moivre commence par une introduction, qui comporte les définitions et résultats nécessaires pour la résolution de problèmes. Nous donnons des extraits de la troisième édition (Traduction libre du groupe M. : A.T.H.). Le texte anglais est donné à la fin de cet article. Voici les premiers mots de cette introduction.

> « La probabilité d'un évènement est plus ou moins grande selon le nombre de chances par lequel il peut se produire, comparé au nombre de toutes les chances qu'il a de se produire ou d'échouer à se produire.

Ainsi, si un événement a 3 chances de se produire et 2 d'échouer, on peut estimer que la probabilité qu'il se produise est de $\frac{3}{5}$, et celle qu'il échoue de $\frac{2}{5}$.

Par conséquent, si on ajoute la probabilité de la réussite et celle de l'échec, la somme sera toujours égale à l'unité.

[...]

17. « The Rules of this Calculation ».
18. « His book having settled in my Mind the first notions of this Doctrine ».
19. Notion assez semblable à la « valeur de la chance » de Huygens. Voir dans ce numéro l'article « Problèmes de dés : Pascal, Fermat, Huygens et les autres ».

4. Si, au cas où un évènement se produit, j'ai droit à une certaine somme d'argent, mon attente[20] d'obtenir cette somme a une valeur déterminée avant la survenue de l'évènement. Ainsi, si je dois obtenir 10 livres au cas où un évènement se produit, évènement dont les probabilités de succès ou d'échec sont égales, mon attente avant que cet évènement se produise vaut 5 livres ; car je me trouve exactement dans la même situation que celui qui, dans un jeu équitable, hasarde 5 livres pour, soit en gagner 10, soit perdre ses 5. Maintenant, celui qui hasarde 5 livres dans un jeu équitable possède ces 5 livres avant la décision du jeu ; ainsi mon attente dans le cas mentionné ci-dessus doit aussi valoir 5 livres[21].

5. Dans tous les cas, on évalue la valeur de l'attente d'obtenir une certaine somme en multipliant la valeur de cette somme par la probabilité de l'obtenir[22].

Ainsi, si j'ai 3 chances parmi 5 d'obtenir 100 livres. Je dis que la valeur actuelle de mon attente est le produit de 100 livres par la fraction $\frac{3}{5}$, et par conséquent qu'elle vaut 60 livres.

Car, en supposant qu'un évènement puisse se produire également pour chaque personne dans un groupe de 5, et que la personne pour laquelle il se réalise dût en retirer 100 livres, il est clair que le droit que chacune a sur la somme attendue est $\frac{1}{5}$ de 100 livres. Ce droit repose sur ceci que si les cinq personnes concernées par la réalisation de l'évènement décidaient de ne pas s'en remettre au hasard, mais de partager entre elles la somme attendue, chacune devrait alors réclamer $\frac{1}{5}$ de 100 livres. Qu'elles choisissent de partager la somme également entre elles ou de s'en remettre au hasard quant à l'évènement, aucune d'entre elles n'a ainsi aucun avantage ni désavantage ; elles sont toutes sur un pied d'égalité, l'attente de chacune vaut par conséquent $\frac{1}{5}$ de 100 livres. Supposons maintenant que deux des cinq personnes concernées par l'évènement acceptent de renoncer à leur chance en faveur de l'une des trois autres ; alors, la personne en faveur de laquelle on renonce à ces deux chances a désormais un droit triple de celui qu'elle avait auparavant, son attente vaut donc désormais $\frac{3}{5}$ de 100 livres.

Maintenant, si nous considérons que la fraction $\frac{3}{5}$ exprime la probabilité d'obtenir la somme de 100 livres, et que $\frac{3}{5}$ de 100 livres est la même chose que $\frac{3}{5}$ multiplié par 100, nous devons naturellement conclure que la valeur de l'attente d'une certaine somme est déterminée en multipliant la somme attendue par la probabilité de l'obtenir ; ce dont nous avons fait un principe.

Quoique déduite d'un cas particulier, on voit aisément que cette manière de raisonner est générale et applicable à tout autre cas.

COROLLAIRE

De ce qui précède, suit nécessairement que, si la valeur d'une attente est donnée, ainsi que la valeur de la chose espérée, alors, en divisant la première

20. Nous avons choisi de traduire le mot anglais *Expectation* (attente, espérance, prévision) par « attente » plutôt que par « espérance ». En effet, le mot « espérance » a une signification précise actuellement en mathématiques, qui n'est pas exactement la définition que donne de Moive pour « expectation ». D'autre part, le mot actuel pour l'espérance mathématique en anglais est « expected value ». Le mot « attente » nous a semblé plus proche du concept de l'époque.

21. Ainsi, avant que le jeu commence, on considère que le joueur possède la valeur de « l'attente du hasard », « la valeur de la chance », « la valeur de [son] attente », ce que nous appelons maintenant l'espérance. Si un autre joueur veut prendre sa place, il doit d'ailleurs donner cette somme au joueur qu'il veut remplacer. C'est cettte considération qui permet de comprendre certaines démonstrations utilisant comme outil cette « attente », comme par exemple celle du paragraphe suivant dans le livre de de Moivre.

22. Ce qui, dans nos cours, est la définition de l'espérance mathématique est donc ici une propriété démontrée de la « valeur de l'attente ».

valeur par la seconde, le quotient exprimera la probabilité d'obtenir la somme espérée.

[...]

8. Si, pour obtenir une certaine somme, il faut que se produisent plusieurs évènements indépendants les uns des autres, alors on trouve la valeur de l'attente de cette somme en multipliant ensemble les probabilités des différents évènements, et en multipliant de nouveau le produit obtenu par la valeur de la somme espérée.

Ainsi, en supposant que, pour obtenir 90 livres, deux évènements doivent se produire, le premier ayant 3 chances de se produire, et 2 d'échouer, le second ayant 4 chances de se produire et 5 d'échouer, et que je veuille connaître la valeur de cette attente, je dirai :

La probabilité que le premier se produise est $\frac{3}{5}$, la probabilité que le second se produise est $\frac{4}{9}$; maintenant multipliant ces deux probabilités ensemble, le produit sera $\frac{12}{45}$ ou $\frac{4}{15}$; et ce produit étant de nouveau multiplié par 90, le nouveau produit sera $\frac{360}{15}$ ou 24, donc l'attente vaudra 24 livres.

La démonstration en est très facile, si on considère que, supposant que le premier évènement s'est réalisé, alors l'attente dépendant maintenant entièrement du second, on trouvera, avant la détermination du second, que cette attente vaut exactement $\frac{4}{9} \times 90$ livres ou 40 livres (par l'article 5). On peut désormais considérer la réalisation du premier évènement comme la condition pour obtenir une attente de 40 livres, mais on a supposé que la probabilité du premier évènement est égale à $\frac{3}{5}$, donc l'attente cherchée doit être estimée à $\frac{3}{5} \times 40$, ou $\frac{3}{5} \times \frac{4}{9} \times 90$; c'est-à-dire, égale au produit des deux probabilités multiplié par la somme espérée[23].

[...]

COROLLAIRE

Si nous faisons abstraction de la valeur de la somme à obtenir, la simple probabilité de l'obtenir sera le produit des diverses probabilités des évènements, ce qui apparaît évident par le 8^{e} article et par le corollaire du 5^{e} article.

Jusqu'ici, je me suis limité à la considération d'évènements indépendants ; mais de crainte que, dans ce qui suivra, les termes « indépendants » et « dépendants », n'occasionnent quelque obscurité, il semble nécessaire, avant d'aller plus loin, de définir pleinement ces termes.

Deux évènements sont indépendants, quand ils n'ont aucune connexion l'un avec l'autre, et que la réalisation de l'un d'eux ne favorise pas, ni ne gêne la réalisation de l'autre[24]. Deux évènements sont dépendants, quand ils sont liés de sorte que la probabilité de la réalisation de chacun est changée par la réalisation de l'autre.

De façon à illustrer ceci, il n'est pas inapproprié de proposer les deux petits problèmes suivants.

1°. On considère un paquet de 13 cartes d'une certaine couleur, et un autre paquet de 13 cartes d'une autre couleur ; quelle est la probabilité, lorsqu'on tire au hasard une carte de chaque paquet, de tirer les deux aappraîtras ?

23. Autrement dit, dans la situation où j'obtiendrai 90 livres si deux évènements A et B se produisent tous les deux, et si A s'est produit, mon attente avant la détermination de B étant 40 livres, c'est comme si, après la réalisation de A et avant que B soit déterminé (c'est-à-dire avant que B se réalise ou non), j'avais effectivement ces 40 livres. Ainsi, ce que me donne la réalisation de A est cette somme de 40 livres et, si je laissais ma place à un autre joueur à ce moment-là, il devrait me donner 40 livres.

24. La définition d'évènements indépendants est donc la définition « intuitive ». La notion de valeur de l'attente permet alors de démontrer : si les évènements A et B sont indépendants, alors $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$; alors que, pour nous, cette propriété est la définition même d'évènements indépendants.

La probabilité de tirer un as du premier paquet est $\frac{1}{13}$: maintenant, comme il est évident (clair) que le fait de tirer ou non l'as du premier paquet n'a aucune influence sur le fait de tirer l'as du second paquet, ces deux évènements étant indépendants, la probabilité qu'ils se réalisent tous les deux est $\frac{1}{13} \times \frac{1}{13} = \frac{1}{169}$.

2°. Supposons qu'on entreprenne de tirer d'un seul paquet de 13 cartes d'une couleur l'as d'abord puis le deux, et qu'on demande la probabilité de le faire ; on doit considérer que, bien que la probabilité de tirer l'as en premier soit $\frac{1}{13}$, et que la probabilité de tirer le deux en second lieu serait aussi $\frac{1}{13}$, si ce second évènement était considéré en lui-même sans aucun lien avec le premier, cependant, l'as ayant été supposé tiré en premier, il ne restera plus que 12 cartes dans le paquet, et donc, sous la supposition que l'as a été tiré en premier, la probabilité de tirer le deux ensuite sera changée et deviendra $\frac{1}{12}$; et donc on peut conclure que ces deux évènements sont dépendants, et que la probabilité qu'ils se réalisent tous les deux est $\frac{1}{13} \times \frac{1}{12} = \frac{1}{156}$.[25]

D'où on peut déduire que la probabilité que deux évènements dépendants se réalisent tous les deux est le produit de la probabilité de l'un d'entre eux par la probabilité que l'autre a de se réaliser, quand on considère que le premier s'est réalisé[26] ; et la même règle s'étend à la réalisation d'autant d'évènements qu'on veut.

9. Mais, pour déterminer, de la manière la plus facile possible, la probabilité que se réalisent plusieurs évènements dépendants, il sera commode de distinguer par la pensée l'ordre de ces évènements, et de supposer l'un d'eux être le premier, un autre le second, et ainsi de suite : une fois cela fait, on peut considérer la probabilité du premier comme indépendante [des autres ?], la probabilité du deuxième doit être déterminée sous la supposition que le premier s'est réalisé, la probabilité du troisième sous la supposition que le premier et le deuxième se sont réalisés, et ainsi de suite : alors la probabilité qu'ils se réalisent tous sera le produit de la multiplication des diverses probabilités déterminées de cette façon. » (De Moivre, 1756, p.1-7)

Espérance mathématique et espérance morale

On trouve le mot « espérance » dans le traité de de Montmort, *Analyse des jeux de Hazard* (1708) ; de Montmort définit ce qu'il appelle « le sort » de chaque joueur. Il précise : « Cela posé, si l'on nomme a l'argent du jeu, je dirai que le *sort* de chaque joueur est le juste degré d'espérance qu'il a d'obtenir a ». Il résout ainsi certains problèmes de jeux de hasard[27]. Pour d'autres problèmes, il utilise les combinaisons. Le concept d'espérance tel que nous le connaissons se trouve chez Laplace et Lacroix.

25. On remarque que de Moivre ne refait pas de démonstration pour le cas des évènements dépendants. Mais la relecture de la démonstration de la propriété des probabilités d'évènements indépendants montre que, de fait, l'indépendance n'est utilisée que pour affirmer que, si A est réalisé, alors cela ne change pas la probabilité de B. Et le même raisonnement peut donc servir à démontrer la propriété énoncée pour des évènements dépendants.

26. Le texte de de Moivre est, à notre connaissance, le premier où on trouve cette notion qui est pour nous celle de probabilité conditionnelle d'un évènement par rapport à un autre. Ce résultat était déjà dans la première édition. Remarquons là encore que ce qui est dans nos cours de lycée une définition de probabilité conditionnelle est ici une propriété démontrée par l'utilisation de la « valeur de l'attente » dans le cas où les évènements se suivent dans un certain ordre.

27. Voir l'article sur les problèmes de dés.

Laplace : ***Théorie analytique des probabilités***

Condorcet et Laplace travaillent dès 1770 – 1771 sur l'estimation des probabilités. À l'époque, ils ne connaissent pas les travaux de Bayes. Laplace s'intéresse au sujet par le biais de la fiabilité des observations astronomiques, Condorcet plutôt par ce qu'il appelle « la mathématique sociale » ; il s'agit d'éclairer les prises de décisions politiques en utilisant le calcul des probabilités, ce qui induit pour lui la nécessité d'enseigner les probabilités à tous les citoyens (et pour Condorcet, cela inclut les citoyennes) [28].Pierre Simon de Laplace (1749 – 1827) publie en 1812 son traité *Théorie analytique des probabilités.* Il y donne les raisons de s'intéresser aux probabilités :

> « Cette recherche intéresse les observateurs, en leur indiquant les milieux qu'ils doivent choisir entre les résultats de leurs observations, et la probabilité des erreurs qu'ils ont encore à craindre. Enfin, elle mérite l'attention des philosophes, en faisant voir comment la régularité finit par s'établir dans les choses mêmes qui nous paraissent entièrement livrées au hasard [. . .]. C'est sur la régularité des résultats moyens des évènements considérés en grand nombre, que reposent divers établissements, tels que les rentes viagères, les tontines, les assurances, etc. Les questions qui leur sont relatives, ainsi qu'à l'inoculation de la vaccine, et aux décisions des assemblées électorales, n'offrent aucune difficulté d'après ma théorie. »

Plus loin, il introduit la notion d'espérance :

> « La probabilité des évènements sert à déterminer l'espérance et la crainte des personnes intéressées à leur existence. Le mot *espérance* a diverses acceptions ; il exprime généralement l'avantage de celui qui attend un bien quelconque, dans une supposition qui n'est que vraisemblable. Dans la théorie des hasards, cet avantage est le produit de la somme espérée, par la probabilité de l'obtenir : c'est la somme partielle qui doit revenir, lorsqu'on ne veut point courir les risques de l'évènement. Cette manière de la répartir, est la seule équitable, quand on fait abstraction de toute circonstance étrangère ; parce qu'avec un égal degré de probabilité, on a un droit égal sur la somme espérée. Nous nommerons cet avantage, *espérance mathématique*, pour le distinguer de l'espérance morale qui dépend, comme lui, du bien espéré et de la probabilité de l'obtenir, mais qui se règle encore sur mille circonstances variables qu'il est presque toujours impossible, et plus encore, d'assujétir au calcul. Ces circonstances, il est vrai, ne faisant qu'augmenter ou diminuer la valeur du bien espéré, on peut considérer l'espérance morale elle-même comme le produit de cette valeur, par la probabilité de l'obtenir ; mais on doit alors distinguer dans le bien espéré, sa valeur relative, de sa valeur absolue : celle-ci est indépendante des motifs qui le font désirer, au lieu que la première croît avec ces motifs. »

Lacroix : ***Traité élémentaire du calcul des probabilités***

Sylvestre-François Lacroix (1765 – 1843) est reconnu comme un pédagogue de premier plan et a écrit de nombreux traités. L'ouvrage de Laplace sur les probabilités n'est accessible qu'à un public très averti. Aussi Lacroix rédige-t-il son *Traité élémentaire du calcul des probabilités* (1816) pour permettre une plus vaste diffusion de cette théorie. Il précise son but dans l'Avertissement [29] :

28. Voir Meusnier N., *Sur l'histoire de l'enseignement des probabilités et statistiques*, http ://www.jehps.net/Decembre2006/Meusnier.pdf

29. Voir l'introduction du N°7 de la nouvelle série des reproductions de textes anciens du groupe MATH, consacré au livre de Lacroix ; http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/publications/IPS99012.pdf

« Après quelques ouvrages superficiels ou incomplets on ne trouve plus que des Mémoires académiques ou des Traités fondés sur les parties élevées de l'analyse ; en sorte que, même avec des connaissances assez étendues dans les Mathématiques élémentaires, il faut encore se borner à croire sur parole la vérité des points fondamentaux de la théorie des probabilités [...]. C'est pour remplir cette lacune que j'ai rédigé le Traité que j'offre en ce moment au public ».

Lacroix donne (pages 109 – 110) la définition de l'espérance mathématique, lorsque deux joueurs jouent à un jeu de hasard :

> « *l'espérance mathématique* du premier, laquelle *se formera alors en multipliant le profit ou la perte que lui apportent chacun des évènements possibles, par la probabilités de ces évènements, et donnant aux pertes le signe –* . Elle sera égale à zéro, dans le cas de pari équitable ; ce qui veut dire que l'état du joueur doit être envisagé comme n'étant pas changé par son entrée au jeu.
>
> Ce dernier point de vue semble comporter une contradiction dans les termes ; car l'état indiqué par l'espérance mathématique du joueur est fictif : il n'est point celui qui a lieu dans la réalité. Après la décision du sort, l'argent du joueur sera augmenté de b ou diminué de a, selon qu'il aura gagné ou perdu [30]. Dans l'un ou l'autre cas, son état sera différent de ce qu'il était avant le jeu. Comment donc interpréter cette conclusion, dans laquelle semblent se compenser l'un par l'autre deux évènements qui s'excluent mutuellement ? Par les conséquences répétées, dont la multiplication tend sans cesse à rapprocher la distribution des évènements simples du rapport de leurs probabilités ».

Lacroix explique cependant plus loin que le calcul de l'espérance mathématique n'est pas suffisant pour prendre la décision de jouer, et parle lui aussi de « l'espérance morale » (pages 124 – 125) :

> « Ce n'est pas seulement à un jeu inégal qu'un homme sensé ne voudra point exposer une somme un peu forte, dans l'espérance d'un petit gain très probable ; il penserait encore ainsi, quand même les conditions du jeu seraient égales ; mais il se déterminerait aisément à risquer une faible somme, pour obtenir un gain considérable, et d'une probabilité fort petite. L'un et l'autre de ces cas peuvent néanmoins répondre à la même espérance mathématique [...]. par exemple, le pari dans lequel $a = 10000$, $b = 10$, $e = \frac{1000}{1001}$, $f = \frac{1}{1001}$, quoiqu'équitable [31], serait-il tenu par un homme de bon sens, ne possédant qu'une très petite fortune ? Courrait-il le risque de perdre 10000 francs pour gagner 10 francs, quoique les probabilités soient en raison inverse de ces sommes ? Non, sans doute : l'appréciation morale de l'évènement diffère donc ici de son évaluation mathématique. La cause en est dans la disproportion entre les conséquences d'une perte qui diminuerait considérablement la fortune du joueur, et celles d'un gain qui n'y apporterait qu'une très légère augmentation. »

Laplace et Lacroix n'utilisent pas cette espérance, mathématique ou morale, pour résoudre les problèmes liés aux jeux de hasard, mais le concept de probabilité, défini par Laplace (voir infra). On retrouve cependant une allusion à l'espérance mathématique pour les calculs liés aux rentes viagères, aux assurances sur la vie et aux caisses d'épargne (pages 221 – 222).

---

30. Lacroix a traité un exemple ou deux joueurs ont misé, le premier a et le second b, dans un jeu de hasard où le premier a la probabilité e de gagner et le second la probabilité f de gagner.

31. Les notations sont celles de la citation précédente.

Conclusion

A la lumière de ce que nous venons d'exposer, les extraits du programme cités au début de cet article nous inspirent quelques commentaires. En premier lieu, ni Pascal, ni Huygens, ni de Moivre n'utilisent les mots « espérance » ou « variable aléatoire ». On trouve évoqué dans leurs écrits le concept de « valeur de l'attente » [32], mais il est *a priori* différent du concept de l'espérance de nos cours. Les auteurs définissent cettte « valeur de l'attente » comme « le droit d'attendre ce que le hasard peut donner » au joueur (Pascal), ou une « valeur » qui permet de « se procurer la même chance par un jeu équitable » (Huygens). En outre, les auteurs démontrent la formule permettant de calculer cette valeur, alors que, dans nos cours, l'espérance est définie par une formule et on explique ensuite qu'elle peut s'interpréter comme une « moyenne » en faisant appel à la loi des grands nombres.

On peut souligner aussi une différence dans l'utilisation de ces notions. Dans nos classes la notion d'espérance n'est utilisée que pour savoir si un jeu est équitable, favorable ou défavorable au joueur, ou déterminer la mise qui rend le jeu équitable. Pascal et Huygens utilisent la notion de « valeur de l'attente » pour résoudre les problèmes de dés et des partis et de Moivre utilise la notion de « valeur de l'attente » pour démontrer des résultats sur la probabilité de « A et B ». Notons que de Moivre, pour résoudre des problèmes liés au hasard, utilisera ensuite les propriétés des probabilités démontrées dans son introduction.

Le programme de première cite également les travaux de Bayes et Laplace. Notons que Bayes, dans son ouvrage *An essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chances* (publication posthume en 1763), définit la probabilité à partir de la notion de « valeur de l'attente » [33], considérée comme « notion première », en reprenant comme définition le corollaire de de Moivre cité plus haut [34]. Cependant, contrairement aux auteurs étudiés ici, Bayes ne définit pas la « valeur de l'attente », ni ne donne de moyen de la calculer ; cette notion lui sert en fait à justifier des résultats sur les probabilités conditionnelles, dont il a besoin dans la suite de son traité.

Laplace, dans sa *Théorie analytique des probabilités* (1812), commence le livre second par ce qu'on appelle désormais la définition laplacienne de la probabilité :

> « La théorie des probabilités consiste à réduire tous les évènements qui peuvent avoir lieu dans une circonstance donnée, à un certain nombre de cas également possibles, c'est-à-dire tels que nous soyons également indécis sur leur existence, et à déterminer parmi ces cas, le nombre de ceux qui sont favorables à l'évènement dont on cherche la probabilité. Le rapport de ce nombre à celui de tous les cas possibles, est la mesure de cette probabilité qui n'est donc qu'une fraction dont le numérateur est le nombre des cas favorables, et dont le dénominateur est celui de tous les cas possibles. » (Laplace, 1812, p. 178)

À la suite de Laplace, les mathématiciens reprendront cette définition et c'est cette notion de probabilité qui deviendra l'outil des démonstrations.

32. Cette expression nous paraît plus proche des auteurs étudiés que le mot « espérance », très connoté pour nous.
33. Bayes emploie le mot « expectation ».
34. Il est probable que Bayes connaît le livre de de Moivre.

Bibliographie

BESSOT D. et al, 2006, *L'espérance du Hollandais* », Cercle d'histoire des sciences, IREM de Basse-Normandie, Ellipses, Paris.

COUMET E., 1965, « Le problème des partis avant Pascal », In *Archives Internationales d'histoire des Sciences*, 18/73, pp245-272.
Disponible en ligne : http://www.jehps.net/Juin2007/Coumet_partis.pdf

COUMET, E., 1970, « La théorie du hasard est-elle née par hasard ? » In : *Annales. Économies, Sociétés, Civilisations.* 25e année, N. 3. p. 574-598.
https://www.persee.fr/doc/ahess_0395-2649_1970_num_25_3_422242

HUYGENS, C., 1920, *De ratiociniis in Ludo aleae ;* trad. « Du calcul dans les jeux de hasard » in tome 14, *Œuvres complètes* , La Haye, Martinus Nijhoff, 1920, p.78 et suivantes.
https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k77862v?rk=150215;2

LACROIX F – S, 1816, *Traité élémentaire du calcul des probabilités*, Paris (nombreuses rééditions).
Disponible en ligne : https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k62104507?rk=257512;0

LAPLACE , 1812, *Théorie Analytique des probabilités*, Paris.
Disponible en ligne :https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b8625611h?rk=21459;2#

MEUSNIER N., 2004, « Le problème des partis avant Pacioli », In *Histoire de probabilités et de statistiques*, Commission Inter-IREM d'Épistémologie et d'Histoire des mathématiques, Ellipses, Paris.

DE MOIVRE A., 1756, *The doctrine of chances or, a method of calculating the probability of events in play*, Londres, (3e édition).
Disponible en ligne : https://www.ime.usp.br/~walterfm/cursos/mac5796/DoctrineOfChances.pdf

DE MONTMORT P .R ., 1708, *Essay d'analyse sur les jeux de hazard* , Paris.

PASCAL B., 1963, *Œuvres complètes*, présentations et notes de Louis Lafuma, Seuil, Paris.

SAMUELI, BOUDENOT, 2009, *Une histoire des probabilités des origines à 1900*, Ellipses, Paris.

Source des images ci-dessous :
https://www.ime.usp.br/~walterfm/cursos/mac5796/DoctrineOfChances.pdf

THE

DOCTRINE

OF

CHANCES:

OR,

A METHOD of Calculating the Probabilities
of Events in PLAY.

THE THIRD EDITION,
Fuller, Clearer, and more Correct than the Former.

By A. DE MOIVRE,
Fellow of the ROYAL SOCIETY, *and Member of the* ROYAL ACADEMIES
OF SCIENCES *of* Berlin *and* Paris.

LONDON:
Printed for A. MILLAR, in the *Strand*.
MDCCLVI.

J. Mynde ſculp.

THE

DOCTRINE OF CHANCES.

The INTRODUCTION.

1. THE Probability of an Event is greater or leſs, according to the number of Chances by which it may happen, compared with the whole number of Chances by which it may either happen or fail.

2. Wherefore, if we conſtitute a Fraction whereof the Numerator be the number of Chances whereby an Event may happen, and the Denominator the number of all the Chances whereby it may either happen or fail, that Fraction will be a proper deſignation of the Pro-

bability of happening. Thus if an Event has 3 Chances to happen, and 2 to fail, the Fraction $\frac{3}{5}$ will fitly repreſent the Probability of its happening, and may be taken to be the meaſure of it.

The ſame thing may be ſaid of the Probability of failing, which will likewiſe be meaſured by a Fraction whoſe Numerator is the number of Chances whereby it may fail, and the Denominator the whole number of Chances, both for its happening and failing; thus the Probability of the failing of that Event which has 2 Chances to fail and 3 to happen will be meaſured by the Fraction $\frac{2}{5}$.

3. The Fractions which repreſent the Probabilities of happening and failing, being added together, their Sum will always be equal to Unity, ſince the Sum of their Numerators will be equal to their common Denominator: now it being a certainty that an Event will either happen or fail, it follows that Certainty, which may be conceived under the notion of an infinitely great degree of Probability, is fitly repreſented by Unity.

Theſe things will eaſily be apprehended, if it be conſidered, that the word Probability includes a double Idea; firſt, of the number of Chances whereby an Event may happen; ſecondly, of the number of Chances whereby it may either happen or fail.

If I ſay that I have three Chances to win any Sum of Money, it is impoſſible from that bare aſſertion to judge whether I am like to obtain it; but if I add that the number of Chances either to obtain it, or to miſs it, is five in all, from hence will enſue a compariſon between the Chances that favour me, and the whole number of Chances that are for or againſt me, whereby a true judgment will be formed of my Probability of ſucceſs: from whence it neceſſarily follows, that it is the comparative magnitude of the number of Chances to happen, in reſpect to the whole number of Chances either to happen or to fail, which is the true meaſure of Probability.

4. If upon the happening of an Event, I be intitled to a Sum of Money, my Expectation of obtaining that Sum has a determinate value before the happening of the Event.

Thus, if I am to have 10 *L.* in caſe of the happening of an Event which has an equal Probability of happening and failing, my Expectation before the happening of the Event is worth 5 *L.*: for I am preciſely in the ſame circumſtances as he who at an equal Play ventures 5 *L.* either to have 10, or to loſe his 5. Now he who ventures 5 *L.* at an equal Play, is poſſeſſor of 5 *L.* before the deciſion of the Play;

Play; therefore my Expectation in the case above-mentioned must also be worth 5^{L}

5. In all cases, the Expectation of obtaining any Sum is estimated by multiplying the value of the Sum expected by the Fraction which represents the Probability of obtaining it.

Thus, if I have 3 Chances in 5 to obtain $100^{L.}$ I say that the present value of my Expectation is the product of $100^{L.}$ by the fraction $\frac{3}{5}$, and consequently that my expectation is worth $60^{L.}$

For supposing that an Event may equally happen to any one of 5 different Persons, and that the Person to whom it happens should in consequence of it obtain the Sum of $100^{L.}$ it is plain that the right which each of them in particular has upon the Sum expected is $\frac{1}{5}$ of $100^{L.}$ which right is founded in this, that if the five Persons concerned in the happening of the Event, should agree not to stand the Chance of it, but to divide the Sum expected among themselves, then each of them must have $\frac{1}{5}$ of $100^{L.}$ for his pretension. Now whether they agree to divide that sum equally among themselves, or rather chuse to stand the Chance of the Event, no one has thereby any advantage or disadvantage, since they are all upon an equal foot, and consequently each Person's expectation is worth $\frac{1}{5}$ of $100^{L.}$ Let us suppose farther, that two of the five Persons concerned in the happening of the Event, should be willing to resign their Chance to one of the other three; then the Person to whom those two Chances are thus resigned has now three Chances that favour him, and consequently has now a right triple of that which he had before, and therefore his expectation is now worth $\frac{3}{5}$ of $100^{L.}$

Now if we consider that the fraction $\frac{3}{5}$ expresses the Probability of obtaining the Sum of $100^{L.}$, and that $\frac{3}{5}$ of 100, is the same thing as $\frac{3}{5}$ multiplied by 100, we must naturally fall into this conclusion, which has been laid down as a principle, that the value of the Expectation of any Sum, is determined by multiplying the Sum expected by the Probability of obtaining it.

This manner of reasoning, tho' deduced from a particular case, will easily be perceived to be general, and applicable to any other case.

COROLLARY.

From what precedes, it neceſſarily follows that if the Value of an Expectation be given, as alſo the Value of the thing expected, then dividing the firſt value by the ſecond, the quotient will expreſs the Probability of obtaining the Sum expected: thus if I have an Expectation worth 60 *l.* and that the Sum which I may obtain be worth 100 *l.* the Probability of obtaining it will be expreſt by the quotient of 60 divided by 100, that is by the fraction $\frac{60}{100}$ or $\frac{3}{5}$.

6. The Riſk of loſing any Sum is the reverſe of Expectation; and the true meaſure of it is, the product of the Sum adventured multiplied by the Probability of the Loſs.

7. Advantage or Diſadvantage in Play, reſults from the combination of the ſeveral Expectations of the Gameſters, and of their ſeveral Riſks.

Thus ſuppoſing that *A* and *B* play together, that *A* has depoſited 5 *L.* and *B* 3 *L.* that the number of Chances which *A* has to win is 4, and the number of Chances which *B* has to win is 2, and that it were required in this circumſtance to determine the advantage or diſadvantage of the Adventurers, we may reaſon in this manner: Since the whole Sum depoſited is 8, and that the Probability which *A* has of getting it is $\frac{4}{6}$, it follows that the Expectation of *A* upon the whole Sum depoſited is $8 \times \frac{4}{6} = 5\frac{1}{3}$, and for the ſame reaſon the Expectation of *B* upon that whole Sum depoſited is $8 \times \frac{2}{6} = 2\frac{2}{3}$.

Now, if from the reſpective Expectations which the Adventurers have upon the whole ſum depoſited, be ſubtracted the particular Sums which they depoſit, that is their own Stakes, there will remain the Advantage or Diſadvantage of either, according as the difference is poſitive or negative.

And therefore if from $5\frac{1}{3}$, which is the Expectation of *A* upon the whole Sum depoſited, 5 which is his own Stake, be ſubtracted, there will remain $\frac{1}{3}$ for his advantage; likewiſe if from $2\frac{2}{3}$ which is the Expectation of *B*, 3 which is his own Stake be ſubtracted, there will remain $-\frac{1}{3}$, which being negative ſhews that his Diſadvantage is $\frac{1}{3}$.

Theſe concluſions may alſo be derived from another conſideration; for if from the Expectation which either Adventurer has upon the Sum

Sum deposited by his Adversary, be subtracted the Risk of what he himself deposits, there will likewise remain his Advantage or Disadvantage, according as the difference is positive or negative.

Thus in the preceding case, the Stake of B being 3, and the Probability which A has of winning it, being $\frac{4}{6}$, the Expectation of A upon that Stake is $3 \times \frac{4}{6} = 2$; moreover the Stake of A being 5, and the Probability of losing it, being $\frac{2}{6}$, his Risk ought to be estimated by $5 \times \frac{2}{6} = 1\frac{2}{3}$; wherefore, if from the Expectation 2, the Risk $1\frac{2}{3}$ be subtracted, there will remain $\frac{1}{3}$ as before for the Advantage of A: and by the same way of proceeding, the Disadvantage of B will be found to be $\frac{1}{3}$.

It is very carefully to be observed, that what is here called Advantage or Disadvantage, and which may properly be called Gain or Loss, is always estimated before the Event is come to pass; and altho' it be not customary to call that Gain or Loss which is to be derived from an Event not yet determined, nevertheless in the Doctrine of Chances, that appellation is equivalent to what in common discourse is called Gain or Loss.

For in the same manner as he who ventures a Guinea in an equal Game may, before the determination of the Play, be said to be possessor of that Guinea, and may, in consideration of that Sum, resign his place to another; so he may be said to be a Gainer or Loser, who would get some Profit, or suffer some Loss, if he would sell his Expectation upon equitable terms, and secure his own Stake for a Sum equal to the Risk of losing it.

8. If the obtaining of any Sum requires the happening of several Events that are independent on each other, then the Value of the Expectation of that Sum is found by multiplying together the several Probabilities of happening, and again multiplying the product by the Value of the Sum expected.

Thus supposing that in order to obtain 90^{l} two Events must happen; the first whereof has 3 Chances to happen, and 2 to fail, the second has 4 Chances to happen, and 5 to fail, and I would know the value of that Expectation; I say,

The Probability of the first's happening is $\frac{3}{5}$, the Probability of the second's happening is $\frac{4}{9}$; now multiplying these two Probabilities together, the product will be $\frac{12}{45}$ or $\frac{4}{15}$; and this product being again

again multiplied by 90, the new product will be $\frac{160}{15}$ or 24, therefore that Expectation is worth 24 *L.*

The Demonſtration of this will be very eaſy, if it be conſider'd, that ſuppoſing the firſt Event had happened, then that Expectation depending now intirely upon the ſecond, would, before the determination of the ſecond, be found to be exactly worth $\frac{4}{9} \times 90$ *L.* or 40 *L.* (by Art. 5^{th}) We may therefore look upon the happening of the firſt, as a condition of obtaining an Expectation worth 40 *L.* but the Probability of the firſt's happening has been ſuppoſed $\frac{3}{5}$, wherefore the Expectation ſought for is to be eſtimated by $\frac{3}{5} \times 40$, or by $\frac{3}{5} \times \frac{4}{9} \times 90$; that is, by the product of the two Probabilities of happening multiplied by the Sum expected.

And likewiſe, if an Expectation depends on the happening of one Event, and the failing of another, then its Value will be the product of the Probability of the firſt's happening by the Probability of the ſecond's failing, and of that again by the Value of the Sum expected.

And again, if an Expectation depends on the failing of two Events, the Rule will be the ſame; for that Expectation will be found by multiplying together the two Probabilities of failing, and multiplying that again by the Value of the Sum expected.

And the ſame Rule is applicable to the happening or failing of as many Events as may be aſſigned.

COROLLARY.

If we make abſtraction of the Value of the Sum to be obtained, the bare Probability of obtaining it, will be the product of the ſeveral Probabilities of happening, which evidently appears from this 8^{th} Art. and from the Corollary to the 5^{th}.

Hitherto, I have confined myſelf to the conſideration of Events independent; but for fear that, in what is to be ſaid afterwards, the terms independent or dependent might occaſion ſome obſcurity, it will be neceſſary, before I proceed any farther, to ſettle intirely the notion of thoſe terms.

Two Events are independent, when they have no connexion one with the other, and that the happening of one neither forwards nor obſtructs the happening of the other.

Two Events are dependent, when they are ſo connected together as that the Probability of either's happening is altered by the happening of the other.

In

In order to illuſtrate this, it will not be amiſs to propoſe the two following eaſy Problems.

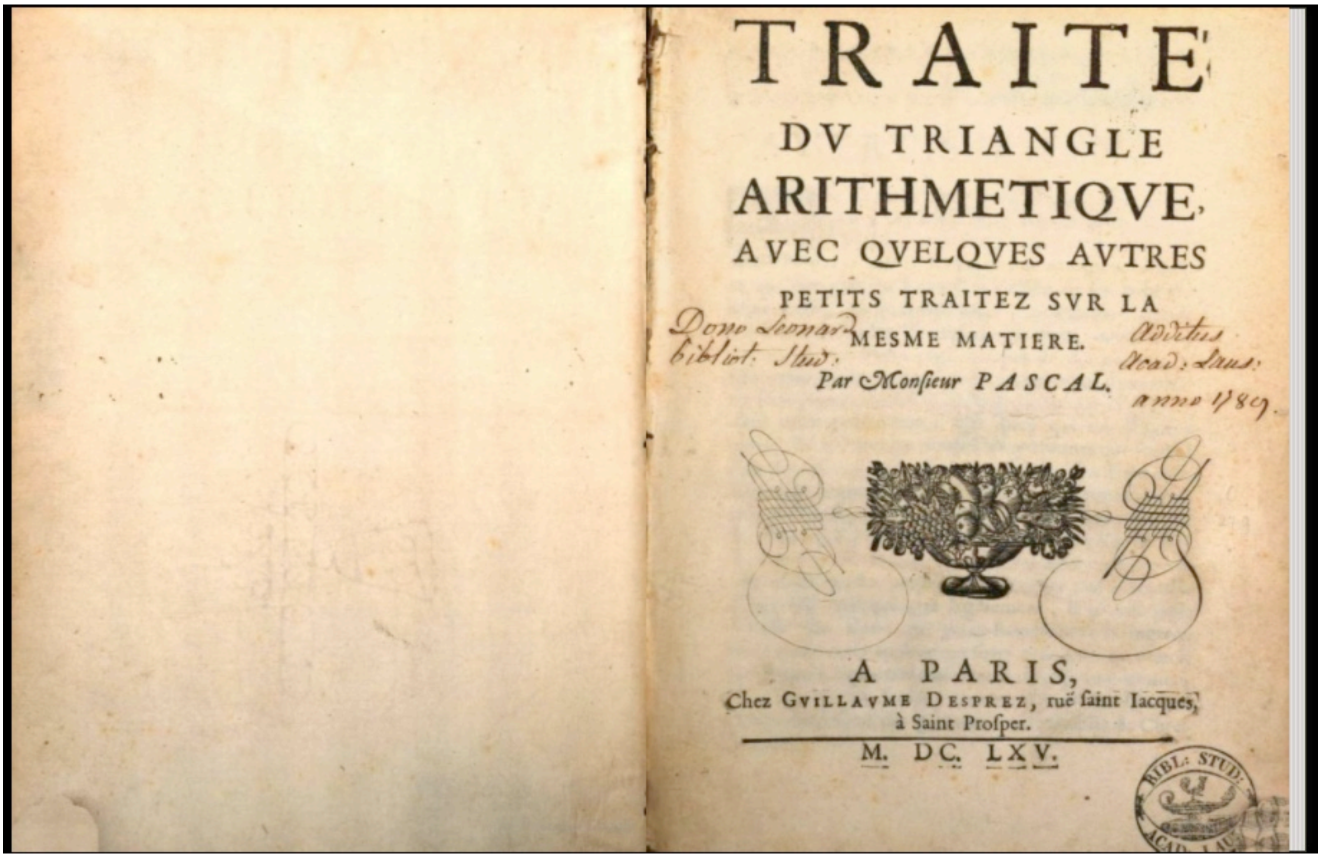
1°. Suppoſe there is a heap of 13 Cards of one colour, and another heap of 13 Cards of another colour, what is the Probability that taking a Card at a venture out of each heap, I ſhall take the two Aces?

The Probability of taking the Ace out of the firſt heap is $\frac{1}{13}$: now it being very plain that the taking or not taking the Ace out of the firſt heap has no influence in the taking or not taking the Ace out of the ſecond; it follows, that ſuppoſing that Ace taken out, the Probability of taking the Ace out of the ſecond will alſo be $\frac{1}{13}$; and therefore, thoſe two Events being independent, the Probability of their both happening will be $\frac{1}{13} \times \frac{1}{13} = \frac{1}{169}$.

2°. Suppoſe that out of one ſingle heap of 13 Cards of one colour, it ſhould be undertaken to take out the Ace in the firſt place, and then the Deux, and that it were required to aſſign the Probability of doing it; we are to conſider that altho' the Probability of the Ace's being in the firſt place be $\frac{1}{13}$, and that the Probability of the Deux's being in the ſecond place, would alſo be $\frac{1}{13}$, if that ſecond Event were conſidered in itſelf without any relation to the firſt; yet that the Ace being ſuppoſed as taken out at firſt, there will remain but 12 Cards in the heap, and therefore that upon the ſuppoſition of the Ace being taken out at firſt, the Probability of the Deux's being next taken will be alter'd, and become $\frac{1}{12}$; and therefore, we may conclude that thoſe two Events are dependent, and that the Probability of their both happening will be $\frac{1}{13} \times \frac{1}{12} = \frac{1}{156}$.

From whence it may be inferred, that the Probability of the happening of two Events dependent, is the product of the Probability of the happening of one of them, by the Probability which the other will have of happening, when the firſt is conſidered as having happened; and the ſame Rule will extend to the happening of as many Events as may be aſſigned.

9. But to determine, in the eaſieſt manner poſſible, the Probability of the happening of ſeveral Events dependent, it will be convenient to diſtinguiſh by thought the order of thoſe Events, and to ſuppoſe one of them to be the firſt, another to be the ſecond, and ſo on: which being done, the Probability of the happening of the firſt may be


TRAITE
DV TRIANGLE
ARITHMETIQVE,
AVEC QVELQVES AVTRES
PETITS TRAITEZ SVR LA
MESME MATIERE.
Par Monſieur PASCAL.

A PARIS,
Chez GVILLAVME DESPREZ, ruë ſaint Iacques,
à Saint Proſper.
M. DC. LXV.

https://ia902802.us.archive.org/26/items/bub_gb_UqgUAAAAQAAJ/bub_gb_UqgUAAAAQAAJ.pdf

Traité du triangle arithmétique avec quelques autres petits traitez sur la mesme matière
Pascal 1665