N° 20

juin 2021

MNEMOSYNE

Groupe M.:A.T.H.

Mathématiques : Approche par des Textes Historiques

ISSN: 1956-385X

INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ DE PARIS

Imprimé par l'IREM de Paris – Université de Paris

Exemplaire **téléchargeable** sur notre site dans la section Publication
https://irem.u-paris.fr/

Coordonnées de l'IREM

Pour venir à l'IREM (il est possible de consulter et d'acheter les publications sur place):
Université de Paris, Bâtiment Sophie-Germain,
8 place Aurélie Nemours (sur l'avenue de France), huitième étage,
75013 Paris 13ème arrondissement
(métro 14 -Bibliothèque François Mitterrand ou tramway ligne T3a – Avenue de france)

Nous Contacter

Pour téléphoner : 01 57 27 91 93

Pour écrire à l'IREM concernant les publications:

par voie postale:
Locufier Nadine
IREM de Paris – Case 7018
Université de Paris
75205 Paris cedex 13

par voie électronique :
nlocufier@irem.univ-paris-diderot.fr

La liste des publications de l'IREM est mise à jour sur notre site web :

https://irem.u-paris.fr// (en bas à gauche de la page d'accueil)

Pour rester informé :

inscription à la liste de diffusion de l'IREM de Paris également sur le site de l'IREM

MNEMOSYNE

M. : *Mathématiques*

A. *Approche par des*

T. *Textes*

H. *Historiques*

Illustration « La mémoire » gravure allégorique
d'après Gravelot
Iconographie ou traité de la science des allégories, Tome 3
Gaucher Charles-Etienne (1741-1804). Auteur du texte.

Mnénosyne
Personnification de la mémoire.
Elle s'unit à Zeus pendant 9 nuits de suite ; de cette union naquirent les neuf Muses. (Dictionnaire Robert des noms propres)

Académie des jeux historiques
Liger
Estampe 1659 Paris BNF

Sommaire

Le groupe M. : A.T.H.

Le **groupe M. : A. T. H.** (Mathématiques : Approche par des Textes Historiques) est un groupe de l'IREM de Paris ; le but du groupe est de travailler à l'introduction d'une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques.

Sur le site de l'IREM, vous trouverez sur la page du groupe des dossiers thématiques, comportant des activités pour la classe et des textes historiques, ainsi que les publications du groupe.

1. Le site du groupe :

https://irem.u-paris.fr/groupes-irem/mathematiques-approche-par-des-textes-historiques-math

1. Les publications :

— Reproductions de textes anciens ainsi que les numéros de la revue Mnémosyne (19 numéros et 3 numéros spéciaux) :
https://irem.u-paris.fr/histoire-des-mathematiques-irem-de-paris

— Sans oublier les brochures n°61 et 79 et 91 :
https://irem.u-paris.fr/brochures-de-lirem

Le groupe de lecture de textes

Le groupe de lecture se réunit environ une fois par mois à l'IREM afin de découvrir ensemble des textes historiques, à la fois pour notre culture personnelle et avec l'idée d'utiliser certains extraits de textes pour des activités en classe.
Nos réunions ont toujours lieu le lundi après midi.

Si vous désirez nous rejoindre, il vous faut demander votre lundi après-midi dans la formulation des voeux de l'emploi du temps. Le groupe est ouvert à toute personne intéressée et nous serons très heureux d'accueillir de nouveaux membres. Contact sur le site du groupe.

CII Epistémologie et Histoire

Site de la Commission Inter IREM d'Épistémologie et d'Histoire des Mathématiques :
https://www.univ-irem.fr/spip.php?rubrique15

Éditorial

Mnémosyne est de retour après une longue absence, attirée par les programmes de mathématiques mis en œuvre à la rentrée 2019 qui comportent des items d'histoire des mathématiques, et inspirée par les lectures du « Groupe du lundi »[1] en 2018-2019 et 2019-2020, et des travaux antérieurs du Groupe M. : A.T.H.

Voici l'une des pistes ouvertes par le programme de la spécialité mathématiques de la classe de première générale : « On peut considérer que les origines du « calcul des probabilités » remontent au XVII^{e} siècle. Pascal, Huygens, Moivre, Bernoulli, Euler, d'Alembert appliquent les notions de variable aléatoire et d'espérance à des problèmes issus de questions liées aux jeux, aux assurances et à l'astronomie ». On trouve parmi les capacités attendues : utiliser la notion d'espérance dans une résolution de problème (mise pour un jeu équitable). Ce paragraphe nous a incitées à lire ou relire les textes de certains des auteurs cités, afin de mieux comprendre l'émergence de cette notion d'espérance, le sens qu'elle recouvre pour les auteurs des XVII^{e} et XVIII^{e} siècles, comment cette notion est utilisée dans la résolution de problèmes à l'époque.

Vous trouverez donc ici des « **Bonnes vieilles pages** » de Pascal, Huygens, de Moivre, Laplace, Lacroix et le *fac simile* de quelques pages de la troisième édition du livre de de Moivre, montrant comment notre « espérance », qui ne porte pas encore ce nom, permet de résoudre des problèmes de jeux de hasard, et comment cette notion est perçue à l'époque.

Le « **Conte du lundi** » débute avec une lettre de Pascal à Fermat, qui relate un problème de dés posé par le chevalier de Méré, et suscitera des réactions chez divers auteurs comme Huygens, de Montmort, Bernoulli, Struyck, de Moivre... De fait, la correspondance entre Pascal et Fermat avait intéressé le groupe M. : A.T.H dès le début de ses activités. La relecture de ces textes, à la lumière des nouvelles préoccupations pédagogiques, nous a amenées à étudier de manière plus approfondie les idées de Pascal. Ce dernier donne en effet une solution « algorithmique » au problème, qui permet des activités riches avec nos élèves, dans les domaines de l'algorithmique et de la programmation. Cette « **Étude** » présente la méthode de Pascal pour résoudre le problème, présentée dans une lettre à Fermat et dans le *Traité du Triangle Arithmétique*. Le *Traité* donne également la construction de ce fameux triangle arithmétique, ses propriétés, son usage pour les combinaisons et le principe de la démonstration par récurrence.

La rubrique « **Dans nos classes** » détaille ainsi deux thèmes.

1. Problèmes de dés.

La question de savoir en combien de lancers d'un dé on peut parier sans désavantage d'obtenir au moins un six, ou en combien de lancers de deux dés on peut parier d'obtenir au moins une fois un double six, a donné lieu à nombre d'études de la part des mathématiciens des XVII^{e} et XVIII^{e} siècles, dans des lettres ou des traités, et à diverses méthodes et généralisations. Ce problème a été utilisé en classe sous diverses formes, allant d'énon-

1. Rappelons que ce Groupe se retrouve un lundi par mois pour des lectures de textes historiques en lien avec les programmes du secondaire, et est ouvert à toute personne intéressée.

cés guidés à un problème ouvert. Nous donnons ici un problème destiné à des élèves de spécialité mathématiques (terminale générale) qui permet d'aborder la question à l'aide d'extraits de *La doctrine des chances* de de Moivre. La première partie est destinée à examiner les cas particuliers de lancers successifs d'un dé et de deux dés (la question étant là d'obtenir au moins une fois un as avec un dé ou au moins une fois deux as avec deux dés), et la seconde partie présente la généralisation que fait de Moivre, pour laquelle il utilise des logarithmes et une approximation de $\ln(1 + x)$. La première partie peut être remplacée par une séance de recherche en classe sur un problème ouvert. Nous mettons à la suite de ce problème, dont la première partie est guidée, un exemple d'énoncé de problème ouvert, qui a été utilisé en classe depuis de nombreuses années par les membres du groupe M. : A.T.H..

2. Le problème des partis.

Deux joueurs jouent à « un jeu de pur hasard », et le premier qui aura gagné un nombre déterminé de points sera déclaré vainqueur. Mais ils doivent « quitter le jeu » avant qu'aucun des deux joueurs n'ait atteint le nombre de points entraînant la victoire. Comment doivent-ils alors partager « l'argent qu'ils ont mis au jeu » ? L'Étude présente entre autres la solution que donne Pascal de ce problème, et en montre le caractère algorithmique, ainsi que l'intérêt que présentent les problèmes d'implémentation de cet algorithme dans un langage de programmation. Nous présentons ci-dessous un exercice destiné à des élèves de spécialité mathématiques de terminale générale exploitant le texte de Pascal. Cet exercice a été expérimenté en terminale scientifique (2016), mais en examinant le point de vue algorithmique sans la partie « programmation », aucun langage n'étant dans les attendus du programme à l'époque. Il peut être utile de faire au préalable un exercice présentant la récursivité ; nous faisons donc précéder cette étude de la méthode de Pascal d'un tel exercice.

Martine Bühler et Anne Michel-Pajus

Petite histoire de la notion d'« espérance mathématique »

Dominique Baroux et Martine Bühler

Les programmes de mathématiques mis en œuvre à la rentrée 2019 comportent des items d'histoire des mathématiques ; le programme de la spécialité mathématiques de la classe de première générale donne ainsi des pistes pour l'histoire des probabilités :

> « On peut considérer que les origines du « calcul des probabilités » remontent au XVII^e siècle. Pascal, Huygens, Moivre, Bernoulli, Euler, d'Alembert appliquent les notions de variable aléatoire et d'espérance à des problèmes issus de questions liées aux jeux, aux assurances et à l'astronomie.
>
> Capacités attendues
>
> - utiliser la notion d'espérance dans une résolution de problème (mise pour un jeu équitable [...]) »

Ce paragraphe nous a incitées à lire ou relire les textes de certains des auteurs cités, afin de mieux comprendre l'émergence de cette notion d'espérance, le sens qu'elle recouvre pour les auteurs des XVIIe et XVIIIe siècles, comment cette notion est utilisée dans la résolution de problèmes à l'époque.

Jeux de hasard et attente des joueurs

Pascal : *Traité du Triangle arithmétique*

On fait souvent remonter la naissance des probabilités à la correspondance de Pascal et Fermat en 1654 au sujet du problème des partis [1] :

> « Deux joueurs jouent à « un jeu de pur hasard », et le premier qui gagne un nombre de « parties » déterminé sera déclaré vainqueur. S'ils doivent « quitter le jeu » avant qu'il soit normalement achevé par la victoire de l'un ou de l'autre, comment doivent-ils partager « l'argent qu'ils ont mis au jeu » ? »(Coumet, 1967)

Comme l'explique Coumet dans son article, on trouve, antérieurement à la correspondance entre Pascal et Fermat en 1654, des traces de ce problème et des solutions chez divers auteurs italiens (Pacioli, Forestani, Cardan,...) du XVe siècle au tout début du XVIe siècle. Depuis, on a découvert des textes plus anciens anonymes (Meusnier, 2004).

Pascal reprend ce problème dans son opuscule *Traité du triangle arithmétique*, écrit probablement en 1654, puisque Fermat y fait allusion dans une lettre à Pascal d'août 1654, mais qui ne sera édité et diffusé qu'en 1665 après la mort de Pascal. Il y explique les principes qui lui permettent de résoudre le problème des partis :

> « Pour entendre les règles des partis, la première chose qu'il faut considérer est que **l'argent que les joueurs ont mis au jeu ne leur appartient plus** [2], car ils en ont quitté la propriété ; mais **ils ont reçu en revanche le droit d'attendre ce que le hasard leur en peut donner**, suivant les conditions dont ils sont convenus d'abord.
>
> Mais, comme c'est une loi volontaire, ils la peuvent rompre de gré à gré ; et ainsi, en quelque terme que le jeu se trouve, **ils peuvent le quitter** ; et, au

1. Le « parti » ou « party » est le partage qu'on doit faire de la mise entre les joueurs. Le mot « partir » vient du latin « partire » qui veut dire partager et s'employait en vieux français pour « partager, diviser ».
2. C'est nous qui soulignons.

> contraire de ce qu'ils ont fait en y entrant, **renoncer à l'attente du hasard, et rentrer chacun en la propriété de quelque chose**. Et en ce cas, le règlement de ce qui doit leur appartenir doit être tellement proportionné à ce qu'ils avaient droit d'espérer de la fortune que chacun d'eux trouve entièrement égal de prendre ce qu'on lui assigne ou de continuer l'aventure du jeu ; et cette juste distribution s'appelle le parti. » (Pascal, 1963, p. 60-63)

On voit apparaître ici la notion d'« attente du hasard », qui a une valeur « proportionné[e] à ce [que les joueurs] avaient droit d'espérer de la fortune ». Pascal explique alors comment faire le partage ; si, à un jeu de pur hasard, un joueur emporte la somme A s'il gagne et la somme B (avec $B < A$) s'il perd, alors, en cas d'arrêt du jeu, ce joueur doit recevoir la somme B en entier (puisqu'elle lui appartient qu'il gagne ou perde la partie suivante), et la moitié de la différence $A - B$, puisqu'il y a « autant de hasards pour l'un que pour l'autre » de gagner cette somme. Donc, le joueur doit emporter : $B + \frac{1}{2}(A - B) = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$. Bien sûr, nous pouvons reconnaître ici la formule de notre espérance mathématique dans un cas particulier, mais, d'une part cette formule n'est pas une définition de l'espérance, mais un résultat démontré à partir des principes énoncés par Pascal ; d'autre part, il ne s'agit pas, comme dans un cours de lycée, d'une « moyenne » des gains « espérés » [3], mais de la valeur de « l'attente de ce que le hasard peut donner » [4].

Christiaan Huygens : *Du calcul dans les jeux de hasard*

Christiaan Huygens (La Haye, 1629 – 1695), quant à lui, s'intéresse aux probabilités lors de son premier voyage à Paris en 1655, durant lequel il prend connaissance des problèmes sur les jeux de hasard qui circulent chez les mathématiciens français, en particulier le problème des partis, sans pour autant connaître les solutions apportées :

> « Mais ces savants [5], quoiqu'il se missent à l'épreuve l'un l'autre en se proposant beaucoup de problèmes difficiles à résoudre, ont cepensant caché leurs méthodes. J'ai donc dû examiner et approfondir moi-même toute cette matière à commencer par les éléments, et il m'est impossible pour la raison que je viens de mentionner d'affirmer que nous sommes partis d'un même premier principe. Mais pour ce qui est du résultat, j'ai constaté en bien des cas que mes solutions ne diffèrent nullement des leurs » [6] .

Il publie en 1657 le premier traité imprimé de « probabilités » intitulé *Du calcul dans les jeux de hasard*. Dans la traduction française de cet ouvrage, le mot « chance » a plusieurs significations ; Huygens parle de la « valeur de la chance » qu'un joueur a de gagner ou de perdre [7] ; on trouvera aussi le mot « chances » dans le sens d'« issues favorables » à un évènement [8], avec éventuellement la précision « chances égales » ou « équivalentes » qui signale une situation d'équiprobabilité.

On lit dans l'introduction :

> « Quoique dans les jeux de hasard par les résultats soient incertains, **la chance qu'un joueur a de gagner ou de perdre a cependant une valeur déterminée** [9]. [...] On peut calculer également pour quel prix je devrais

3. Notion de moyenne qui fait appel à la loi faible des grands nombres, qui assure que si cette expérience de jeu était répétée un grand nombre de fois, la moyenne « statistique » des gains du joueur tendrait vers $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$.

4. Voir, dans ce numéro, l'article « Pascal au carrefour des probabilités, de l'algorithmique, de la récurrence et de la combinatoire ».

5. Il s'agit de Pascal et Fermat.

6. Huygens, C. , Lettre à Von Schooten de 1657, citée dans *Œuvres complètes*, tome 14, p. 58, La Haye, Martinus Nijhoff, 1920.

7. Nous verrons ci-dessous ce que Huygens entend par « valeur de la chance ».

8. Dans la proposition III.

9. C'est nous qui soulignons.

raisonnablement céder mon jeu à quelqu'un qui désirerait le continuer en mon lieu.

> **Dans ces deux matières** [10] **je pars de l'hypothèse que dans un jeu la chance qu'on a de gagner quelque chose a une valeur telle que si l'on possède cette valeur on peut se procurer la même chance par un jeu équitable, c'est-à-dire un jeu qui ne vise au détriment de personne.** »(Huygens, 1920, p. 78 et suivantes)

Dans cette introduction, Huygens donne deux façons de considérer la « valeur de la chance » d'un joueur. D'une part, c'est la part de l'enjeu à laquelle il a droit en cas d'interruption du jeu ; d'autre part, il fait l'hypothèse que « la chance qu'on a de gagner quelque chose a une valeur telle que si l'on possède cette valeur on peut se procurer la même chance par un jeu équitable ». C'est cette hypothèse qu'il va utiliser dans la suite pour découvrir et démontrer la formule de calcul de la « valeur de la chance » [11].

« PROPOSITION I

Avoir des chances égales d'obtenir a ou b me vaut $\frac{a+b}{2}$.La situation est celle d'un jeu « de pur hasard » dans lequel chaque joueur a la même « chance » de gagner ou de perdre, comme par exemple à un jeu de pile ou face avec une pièce « équilibrée ».

Afin de non seulement démontrer cette règle mais de la découvrir, appelons x la valeur de ma chance. Il faut donc, que possédant x, je puisse me procurer de nouveau la même chance par un jeu équitable. Supposons que ce jeu soit le suivant. Je joue x contre une autre personne [12], dont l'enjeu est également x ; il est convenu que celui qui gagne donnera a à celui qui perd. Ce jeu est équitable [13], et il appert que j'ai ainsi une chance égale d'avoir a en perdant, ou $2x-a$ en gagnant le jeu car dans ce dernier cas j'obtiens l'enjeu $2x$, duquel je dois donner a à l'autre joueur [14]. Si $2x-a$ était égal à b, j'aurais donc une chance égale d'avoir a ou d'avoir b. Je pose donc $2x-a=b$, d'où je tire la valeur de ma chance $x=\frac{a+b}{2}$. »

Huygens démontre deux autres propositions du même type : « Avoir des chances égales d'obtenir a ou b ou c me vaut $\frac{a+b+c}{3}$ » et « Avoir p chances d'obtenir a et q chances d'obtenir b, les chances étant équivalentes [15], me vaut $\frac{pa+qb}{p+q}$ ». La proposition I donne le même résultat que le texte de Pascal pour la valeur de « l'attente du hasard », mais avec une méthode différente, reposant sur la notion de « jeu équitable » fictif. La proposition III est une généralisation lorsque les « chances » d'obtenir a et b ne sont pas égales ; on retrouve également notre formule de « l'espérance mathématique », la probabilité de gagner a étant $\frac{p}{p+q}$ et celle de gagner b étant $\frac{q}{p+q}$. Mais là encore, il ne s'agit pas d'une définition de « valeur moyenne », mais d'une justification du calcul de la « valeur de la chance ». Huygens utilise cette notion de « valeur de la chance » et ces 3 propositions pour résoudre le problème des partis et divers problèmes de dés [16]. Il pose cinq problèmes sur des jeux de hasard à la fin de son traité.

---

10. Il s'agit du problème des partis et de divers problèmes de dés cités en exemple par Huygens.
11. La situation est celle d'un jeu « de pur hasard » dans lequel chaque joueur a la même « chance » de gagner ou de perdre, comme par exemple à un jeu de pile ou face avec une pièce « équilibrée ».
12. Voir la note précédente.
13. En effet, chaque joueur mise la même somme x, et, en cas de gain emporte la mise totale, sur laquelle il donne a au perdant ; les deux joueurs sont donc « en même condition » de jeu.
14. Il faut maintenant déterminer x pour que ce jeu équitable me mette dans la situation de la proposition, c'est-à-dire d'avoir « des chances égales d'obtenir a ou b ».
15. « p chances » pour p issues favorables, et « chances équivalentes » car il s'agit d'une situation d'équiprobablilité.
16. Voir dans ce numéro l'article « Problèmes de dés : Pascal, Fermat, Huygens et les autres ».

La démonstration de la proposition 3 par Huygens étant assez compliquée, nous donnons celle de Bernoulli proposée dans l'*Ars conjectandi*, œuvre posthume publiée en 1713. La première partie de l'ouvrage de Bernoulli est constituée du Traité de Huygens *Du calcul dans les jeux de hasard*, avec des commentaires sur les démonstrations de Huygens, des propositions de démonstrations différentes de celles de Huygens ainsi que la résolution des problèmes posés à la fin du traité. Bernoulli donne une autre démonstration de la proposition III de Huygens (page 8 de l'édition de 1713).

> « Voici une autre démonstration de la même règle : Supposons un nombre de joueurs égal au nombre de cas en général, c'est-à-dire à $p + q$, de manière qu'il y ait un cas pour chaque joueur ; supposons, par exemple, qu'il y ait $p + q$ boîtes, et qu'on ait caché dans chacune ce que donne l'une des deux espèces de cas, savoir a dans chacune des boîtes dont le nombre est p, et b dans chacune de celles dont le nombre est q. Si chacun des joueurs reçoit une de ces boîtes, ils en recevront ensemble la totalité, et ils ne pourront manquer d'avoir conjointement tout ce qu'elles contiennent, savoir $pa + qb$ et comme ils ont tous une attente égale, il faudrait diviser ce qu'ils recevront ensemble par le nombre de joueurs, ou par le nombre de cas ; d'où il s'ensuit que l'attente de chacun vaudra $\frac{pa+qb}{p+q}$. On démontrera de la même manière que si j'ai p cas pour a, q cas pour b et r cas pour c, mon sort sera $\frac{pa+qb+cr}{p+q+r}$.
>
> Corollaire. De là, il résulte, que si j'ai p cas pour a, et q cas pour 0, mon attente vaudra $\frac{pa}{p+q}$. »(Samueli, 2009)

Abraham de Moivre : *The Doctrine of Chances*

Abraham de Moivre (Vitry-le-François, 1667 – Londres, 1754) publie en 1718 *The Doctrine of Chances*, avec comme sous-titre *or a Method of Calculating the Probabilities of Events in Play*, qui représente un apport fondamental en probabilités. Le livre sera réédité plusieurs fois, avec des compléments. Dans la préface de l'édition de 1718, de Moivre cite le traité de Huygens comme le premier qui ait publié « les règles de ce calcul »[17]. Il précise qu'il n'a pas suivi la méthode de Huygens pour résoudre les problèmes liés aux jeux de hasard, tout en reconnaissant sa dette envers lui pour avoir présenté les premières notions sur ce type de calcul[18]. Il cite également l'*Analyse des jeux de Hazard* de Pierre Rémond de Montmort, dont la première édition date de 1708, dans lequel celui-ci résout les problèmes de dés de Huygens en utilisant la notion de « sort des joueurs »[19], mais également les combinaisons pour d'autres problèmes de jeux de hasard, en particulier des jeux de cartes.

L'ouvrage de de Moivre commence par une introduction, qui comporte les définitions et résultats nécessaires pour la résolution de problèmes. Nous donnons des extraits de la troisième édition (Traduction libre du groupe M. : A.T.H.). Le texte anglais est donné à la fin de cet article. Voici les premiers mots de cette introduction.

> « La probabilité d'un évènement est plus ou moins grande selon le nombre de chances par lequel il peut se produire, comparé au nombre de toutes les chances qu'il a de se produire ou d'échouer à se produire.

Ainsi, si un événement a 3 chances de se produire et 2 d'échouer, on peut estimer que la probabilité qu'il se produise est de $\frac{3}{5}$, et celle qu'il échoue de $\frac{2}{5}$.

Par conséquent, si on ajoute la probabilité de la réussite et celle de l'échec, la somme sera toujours égale à l'unité.

[...]

17. « The Rules of this Calculation ».
18. « His book having settled in my Mind the first notions of this Doctrine ».
19. Notion assez semblable à la « valeur de la chance » de Huygens. Voir dans ce numéro l'article « Problèmes de dés : Pascal, Fermat, Huygens et les autres ».

4. Si, au cas où un évènement se produit, j'ai droit à une certaine somme d'argent, mon attente[20] d'obtenir cette somme a une valeur déterminée avant la survenue de l'évènement. Ainsi, si je dois obtenir 10 livres au cas où un évènement se produit, évènement dont les probabilités de succès ou d'échec sont égales, mon attente avant que cet évènement se produise vaut 5 livres ; car je me trouve exactement dans la même situation que celui qui, dans un jeu équitable, hasarde 5 livres pour, soit en gagner 10, soit perdre ses 5. Maintenant, celui qui hasarde 5 livres dans un jeu équitable possède ces 5 livres avant la décision du jeu ; ainsi mon attente dans le cas mentionné ci-dessus doit aussi valoir 5 livres[21].

5. Dans tous les cas, on évalue la valeur de l'attente d'obtenir une certaine somme en multipliant la valeur de cette somme par la probabilité de l'obtenir[22].

Ainsi, si j'ai 3 chances parmi 5 d'obtenir 100 livres. Je dis que la valeur actuelle de mon attente est le produit de 100 livres par la fraction $\frac{3}{5}$, et par conséquent qu'elle vaut 60 livres.

Car, en supposant qu'un évènement puisse se produire également pour chaque personne dans un groupe de 5, et que la personne pour laquelle il se réalise dût en retirer 100 livres, il est clair que le droit que chacune a sur la somme attendue est $\frac{1}{5}$ de 100 livres. Ce droit repose sur ceci que si les cinq personnes concernées par la réalisation de l'évènement décidaient de ne pas s'en remettre au hasard, mais de partager entre elles la somme attendue, chacune devrait alors réclamer $\frac{1}{5}$ de 100 livres. Qu'elles choisissent de partager la somme également entre elles ou de s'en remettre au hasard quant à l'évènement, aucune d'entre elles n'a ainsi aucun avantage ni désavantage ; elles sont toutes sur un pied d'égalité, l'attente de chacune vaut par conséquent $\frac{1}{5}$ de 100 livres. Supposons maintenant que deux des cinq personnes concernées par l'évènement acceptent de renoncer à leur chance en faveur de l'une des trois autres ; alors, la personne en faveur de laquelle on renonce à ces deux chances a désormais un droit triple de celui qu'elle avait auparavant, son attente vaut donc désormais $\frac{3}{5}$ de 100 livres.

Maintenant, si nous considérons que la fraction $\frac{3}{5}$ exprime la probabilité d'obtenir la somme de 100 livres, et que $\frac{3}{5}$ de 100 livres est la même chose que $\frac{3}{5}$ multiplié par 100, nous devons naturellement conclure que la valeur de l'attente d'une certaine somme est déterminée en multipliant la somme attendue par la probabilité de l'obtenir ; ce dont nous avons fait un principe.

Quoique déduite d'un cas particulier, on voit aisément que cette manière de raisonner est générale et applicable à tout autre cas.

COROLLAIRE

De ce qui précède, suit nécessairement que, si la valeur d'une attente est donnée, ainsi que la valeur de la chose espérée, alors, en divisant la première

20. Nous avons choisi de traduire le mot anglais *Expectation* (attente, espérance, prévision) par « attente » plutôt que par « espérance ». En effet, le mot « espérance » a une signification précise actuellement en mathématiques, qui n'est pas exactement la définition que donne de Moive pour « expectation ». D'autre part, le mot actuel pour l'espérance mathématique en anglais est « expected value ». Le mot « attente » nous a semblé plus proche du concept de l'époque.

21. Ainsi, avant que le jeu commence, on considère que le joueur possède la valeur de « l'attente du hasard », « la valeur de la chance », « la valeur de [son] attente », ce que nous appelons maintenant l'espérance. Si un autre joueur veut prendre sa place, il doit d'ailleurs donner cette somme au joueur qu'il veut remplacer. C'est cettte considération qui permet de comprendre certaines démonstrations utilisant comme outil cette « attente », comme par exemple celle du paragraphe suivant dans le livre de de Moivre.

22. Ce qui, dans nos cours, est la définition de l'espérance mathématique est donc ici une propriété démontrée de la « valeur de l'attente ».

valeur par la seconde, le quotient exprimera la probabilité d'obtenir la somme espérée.

[...]

8. Si, pour obtenir une certaine somme, il faut que se produisent plusieurs évènements indépendants les uns des autres, alors on trouve la valeur de l'attente de cette somme en multipliant ensemble les probabilités des différents évènements, et en multipliant de nouveau le produit obtenu par la valeur de la somme espérée.

Ainsi, en supposant que, pour obtenir 90 livres, deux évènements doivent se produire, le premier ayant 3 chances de se produire, et 2 d'échouer, le second ayant 4 chances de se produire et 5 d'échouer, et que je veuille connaître la valeur de cette attente, je dirai :

La probabilité que le premier se produise est $\frac{3}{5}$, la probabilité que le second se produise est $\frac{4}{9}$; maintenant multipliant ces deux probabilités ensemble, le produit sera $\frac{12}{45}$ ou $\frac{4}{15}$; et ce produit étant de nouveau multiplié par 90, le nouveau produit sera $\frac{360}{15}$ ou 24, donc l'attente vaudra 24 livres.

La démonstration en est très facile, si on considère que, supposant que le premier évènement s'est réalisé, alors l'attente dépendant maintenant entièrement du second, on trouvera, avant la détermination du second, que cette attente vaut exactement $\frac{4}{9} \times 90$ livres ou 40 livres (par l'article 5). On peut désormais considérer la réalisation du premier évènement comme la condition pour obtenir une attente de 40 livres, mais on a supposé que la probabilité du premier évènement est égale à $\frac{3}{5}$, donc l'attente cherchée doit être estimée à $\frac{3}{5} \times 40$, ou $\frac{3}{5} \times \frac{4}{9} \times 90$; c'est-à-dire, égale au produit des deux probabilités multiplié par la somme espérée [23].

[...]

COROLLAIRE

Si nous faisons abstraction de la valeur de la somme à obtenir, la simple probabilité de l'obtenir sera le produit des diverses probabilités des évènements, ce qui apparaît évident par le 8e article et par le corollaire du 5e article.

Jusqu'ici, je me suis limité à la considération d'évènements indépendants ; mais de crainte que, dans ce qui suivra, les termes « indépendants » et « dépendants », n'occasionnent quelque obscurité, il semble nécessaire, avant d'aller plus loin, de définir pleinement ces termes.

Deux évènements sont indépendants, quand ils n'ont aucune connexion l'un avec l'autre, et que la réalisation de l'un d'eux ne favorise pas, ni ne gêne la réalisation de l'autre [24]. Deux évènements sont dépendants, quand ils sont liés de sorte que la probabilité de la réalisation de chacun est changée par la réalisation de l'autre.

De façon à illustrer ceci, il n'est pas inapproprié de proposer les deux petits problèmes suivants.

1°. On considère un paquet de 13 cartes d'une certaine couleur, et un autre paquet de 13 cartes d'une autre couleur ; quelle est la probabilité, lorsqu'on tire au hasard une carte de chaque paquet, de tirer les deux aappraîtras ?

23. Autrement dit, dans la situation où j'obtiendrai 90 livres si deux évènements A et B se produisent tous les deux, et si A s'est produit, mon attente avant la détermination de B étant 40 livres, c'est comme si, après la réalisation de A et avant que B soit déterminé (c'est-à-dire avant que B se réalise ou non), j'avais effectivement ces 40 livres. Ainsi, ce que me donne la réalisation de A est cette somme de 40 livres et, si je laissais ma place à un autre joueur à ce moment-là, il devrait me donner 40 livres.

24. La définition d'évènements indépendants est donc la définition « intuitive ». La notion de valeur de l'attente permet alors de démontrer : si les évènements A et B sont indépendants, alors $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$; alors que, pour nous, cette propriété est la définition même d'évènements indépendants.

La probabilité de tirer un as du premier paquet est $\frac{1}{13}$: maintenant, comme il est évident (clair) que le fait de tirer ou non l'as du premier paquet n'a aucune influence sur le fait de tirer l'as du second paquet, ces deux évènements étant indépendants, la probabilité qu'ils se réalisent tous les deux est $\frac{1}{13} \times \frac{1}{13} = \frac{1}{169}$.

2°. Supposons qu'on entreprenne de tirer d'un seul paquet de 13 cartes d'une couleur l'as d'abord puis le deux, et qu'on demande la probabilité de le faire ; on doit considérer que, bien que la probabilité de tirer l'as en premier soit $\frac{1}{13}$, et que la probabilité de tirer le deux en second lieu serait aussi $\frac{1}{13}$, si ce second évènement était considéré en lui-même sans aucun lien avec le premier, cependant, l'as ayant été supposé tiré en premier, il ne restera plus que 12 cartes dans le paquet, et donc, sous la supposition que l'as a été tiré en premier, la probabilité de tirer le deux ensuite sera changée et deviendra $\frac{1}{12}$; et donc on peut conclure que ces deux évènements sont dépendants, et que la probabilité qu'ils se réalisent tous les deux est $\frac{1}{13} \times \frac{1}{12} = \frac{1}{156}$.[25]

D'où on peut déduire que la probabilité que deux évènements dépendants se réalisent tous les deux est le produit de la probabilité de l'un d'entre eux par la probabilité que l'autre a de se réaliser, quand on considère que le premier s'est réalisé[26] ; et la même règle s'étend à la réalisation d'autant d'évènements qu'on veut.

9. Mais, pour déterminer, de la manière la plus facile possible, la probabilité que se réalisent plusieurs évènements dépendants, il sera commode de distinguer par la pensée l'ordre de ces évènements, et de supposer l'un d'eux être le premier, un autre le second, et ainsi de suite : une fois cela fait, on peut considérer la probabilité du premier comme indépendante [des autres ?], la probabilité du deuxième doit être déterminée sous la supposition que le premier s'est réalisé, la probabilité du troisième sous la supposition que le premier et le deuxième se sont réalisés, et ainsi de suite : alors la probabilité qu'ils se réalisent tous sera le produit de la multiplication des diverses probabilités déterminées de cette façon. » (De Moivre, 1756, p.1-7)

Espérance mathématique et espérance morale

On trouve le mot « espérance » dans le traité de de Montmort, *Analyse des jeux de Hazard* (1708) ; de Montmort définit ce qu'il appelle « le sort » de chaque joueur. Il précise : « Cela posé, si l'on nomme a l'argent du jeu, je dirai que le *sort* de chaque joueur est le juste degré d'espérance qu'il a d'obtenir a ». Il résout ainsi certains problèmes de jeux de hasard[27]. Pour d'autres problèmes, il utilise les combinaisons. Le concept d'espérance tel que nous le connaissons se trouve chez Laplace et Lacroix.

25. On remarque que de Moivre ne refait pas de démonstration pour le cas des évènements dépendants. Mais la relecture de la démonstration de la propriété des probabilités d'évènements indépendants montre que, de fait, l'indépendance n'est utilisée que pour affirmer que, si A est réalisé, alors cela ne change pas la probabilité de B. Et le même raisonnement peut donc servir à démontrer la propriété énoncée pour des évènements dépendants.

26. Le texte de de Moivre est, à notre connaissance, le premier où on trouve cette notion qui est pour nous celle de probabilité conditionnelle d'un évènement par rapport à un autre. Ce résultat était déjà dans la première édition. Remarquons là encore que ce qui est dans nos cours de lycée une définition de probabilité conditionnelle est ici une propriété démontrée par l'utilisation de la « valeur de l'attente » dans le cas où les évènements se suivent dans un certain ordre.

27. Voir l'article sur les problèmes de dés.

Laplace : *Théorie analytique des probabilités*

Condorcet et Laplace travaillent dès 1770 – 1771 sur l'estimation des probabilités. À l'époque, ils ne connaissent pas les travaux de Bayes. Laplace s'intéresse au sujet par le biais de la fiabilité des observations astronomiques, Condorcet plutôt par ce qu'il appelle « la mathématique sociale » ; il s'agit d'éclairer les prises de décisions politiques en utilisant le calcul des probabilités, ce qui induit pour lui la nécessité d'enseigner les probabilités à tous les citoyens (et pour Condorcet, cela inclut les citoyennes) [28].Pierre Simon de Laplace (1749 – 1827) publie en 1812 son traité *Théorie analytique des probabilités.* Il y donne les raisons de s'intéresser aux probabilités :

> « Cette recherche intéresse les observateurs, en leur indiquant les milieux qu'ils doivent choisir entre les résultats de leurs observations, et la probabilité des erreurs qu'ils ont encore à craindre. Enfin, elle mérite l'attention des philosophes, en faisant voir comment la régularité finit par s'établir dans les choses mêmes qui nous paraissent entièrement livrées au hasard [...]. C'est sur la régularité des résultats moyens des évènements considérés en grand nombre, que reposent divers établissements, tels que les rentes viagères, les tontines, les assurances, etc. Les questions qui leur sont relatives, ainsi qu'à l'inoculation de la vaccine, et aux décisions des assemblées électorales, n'offrent aucune difficulté d'après ma théorie. »

Plus loin, il introduit la notion d'espérance :

> « La probabilité des évènements sert à déterminer l'espérance et la crainte des personnes intéressées à leur existence. Le mot *espérance* a diverses acceptions ; il exprime généralement l'avantage de celui qui attend un bien quelconque, dans une supposition qui n'est que vraisemblable. Dans la théorie des hasards, cet avantage est le produit de la somme espérée, par la probabilité de l'obtenir : c'est la somme partielle qui doit revenir, lorsqu'on ne veut point courir les risques de l'évènement. Cette manière de la répartir, est la seule équitable, quand on fait abstraction de toute circonstance étrangère ; parce qu'avec un égal degré de probabilité, on a un droit égal sur la somme espérée. Nous nommerons cet avantage, *espérance mathématique*, pour le distinguer de l'espérance morale qui dépend, comme lui, du bien espéré et de la probabilité de l'obtenir, mais qui se règle encore sur mille circonstances variables qu'il est presque toujours impossible, et plus encore, d'assujétir au calcul. Ces circonstances, il est vrai, ne faisant qu'augmenter ou diminuer la valeur du bien espéré, on peut considérer l'espérance morale elle-même comme le produit de cette valeur, par la probabilité de l'obtenir ; mais on doit alors distinguer dans le bien espéré, sa valeur relative, de sa valeur absolue : celle-ci est indépendante des motifs qui le font désirer, au lieu que la première croît avec ces motifs. »

Lacroix : *Traité élémentaire du calcul des probabilités*

Sylvestre-François Lacroix (1765 – 1843) est reconnu comme un pédagogue de premier plan et a écrit de nombreux traités. L'ouvrage de Laplace sur les probabilités n'est accessible qu'à un public très averti. Aussi Lacroix rédige-t-il son *Traité élémentaire du calcul des probabilités* (1816) pour permettre une plus vaste diffusion de cette théorie. Il précise son but dans l'Avertissement [29] :

28. Voir MEUSNIER N., *Sur l'histoire de l'enseignement des probabilités et statistiques*, http ://www.jehps.net/Decembre2006/Meusnier.pdf

29. Voir l'introduction du N°7 de la nouvelle série des reproductions de textes anciens du groupe MATH, consacré au livre de Lacroix ; http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/publications/IPS99012.pdf

> « Après quelques ouvrages superficiels ou incomplets on ne trouve plus que des Mémoires académiques ou des Traités fondés sur les parties élevées de l'analyse ; en sorte que, même avec des connaissances assez étendues dans les Mathématiques élémentaires, il faut encore se borner à croire sur parole la vérité des points fondamentaux de la théorie des probabilités [...]. C'est pour remplir cette lacune que j'ai rédigé le Traité que j'offre en ce moment au public ».

Lacroix donne (pages 109 – 110) la définition de l'espérance mathématique, lorsque deux joueurs jouent à un jeu de hasard :

> « *l'espérance mathématique* du premier, laquelle *se formera alors en multipliant le profit ou la perte que lui apportent chacun des évènements possibles, par la probabilités de ces évènements, et donnant aux pertes le signe –* . Elle sera égale à zéro, dans le cas de pari équitable ; ce qui veut dire que l'état du joueur doit être envisagé comme n'étant pas changé par son entrée au jeu.
>
> Ce dernier point de vue semble comporter une contradiction dans les termes ; car l'état indiqué par l'espérance mathématique du joueur est fictif : il n'est point celui qui a lieu dans la réalité. Après la décision du sort, l'argent du joueur sera augmenté de b ou diminué de a, selon qu'il aura gagné ou perdu [30]. Dans l'un ou l'autre cas, son état sera différent de ce qu'il était avant le jeu. Comment donc interpréter cette conclusion, dans laquelle semblent se compenser l'un par l'autre deux évènements qui s'excluent mutuellement ? Par les conséquences répétées, dont la multiplication tend sans cesse à rapprocher la distribution des évènements simples du rapport de leurs probabilités ».

Lacroix explique cependant plus loin que le calcul de l'espérance mathématique n'est pas suffisant pour prendre la décision de jouer, et parle lui aussi de « l'espérance morale » (pages 124 – 125) :

> « Ce n'est pas seulement à un jeu inégal qu'un homme sensé ne voudra point exposer une somme un peu forte, dans l'espérance d'un petit gain très probable ; il penserait encore ainsi, quand même les conditions du jeu seraient égales ; mais il se déterminerait aisément à risquer une faible somme, pour obtenir un gain considérable, et d'une probabilité fort petite. L'un et l'autre de ces cas peuvent néanmoins répondre à la même espérance mathématique [...]. par exemple, le pari dans lequel $a = 10000$, $b = 10$, $e = \frac{1000}{1001}$, $f = \frac{1}{1001}$, quoiqu'équitable [31], serait-il tenu par un homme de bon sens, ne possédant qu'une très petite fortune ? Courrait-il le risque de perdre 10000 francs pour gagner 10 francs, quoique les probabilités soient en raison inverse de ces sommes ? Non, sans doute : l'appréciation morale de l'évènement diffère donc ici de son évaluation mathématique. La cause en est dans la disproportion entre les conséquences d'une perte qui diminuerait considérablement la fortune du joueur, et celles d'un gain qui n'y apporterait qu'une très légère augmentation. »

Laplace et Lacroix n'utilisent pas cette espérance, mathématique ou morale, pour résoudre les problèmes liés aux jeux de hasard, mais le concept de probabilité, défini par Laplace (voir infra). On retrouve cependant une allusion à l'espérance mathématique pour les calculs liés aux rentes viagères, aux assurances sur la vie et aux caisses d'épargne (pages 221 – 222).

30. Lacroix a traité un exemple ou deux joueurs ont misé, le premier a et le second b, dans un jeu de hasard où le premier a la probabilité e de gagner et le second la probabilité f de gagner.

31. Les notations sont celles de la citation précédente.

Conclusion

A la lumière de ce que nous venons d'exposer, les extraits du programme cités au début de cet article nous inspirent quelques commentaires. En premier lieu, ni Pascal, ni Huygens, ni de Moivre n'utilisent les mots « espérance » ou « variable aléatoire ». On trouve évoqué dans leurs écrits le concept de « valeur de l'attente » [32], mais il est *a priori* différent du concept de l'espérance de nos cours. Les auteurs définissent cettte « valeur de l'attente » comme « le droit d'attendre ce que le hasard peut donner » au joueur (Pascal), ou une « valeur » qui permet de « se procurer la même chance par un jeu équitable » (Huygens). En outre, les auteurs démontrent la formule permettant de calculer cette valeur, alors que, dans nos cours, l'espérance est définie par une formule et on explique ensuite qu'elle peut s'interpréter comme une « moyenne » en faisant appel à la loi des grands nombres.

On peut souligner aussi une différence dans l'utilisation de ces notions. Dans nos classes la notion d'espérance n'est utilisée que pour savoir si un jeu est équitable, favorable ou défavorable au joueur, ou déterminer la mise qui rend le jeu équitable. Pascal et Huygens utilisent la notion de « valeur de l'attente » pour résoudre les problèmes de dés et des partis et de Moivre utilise la notion de « valeur de l'attente » pour démontrer des résultats sur la probabilité de « A et B ». Notons que de Moivre, pour résoudre des problèmes liés au hasard, utilisera ensuite les propriétés des probabilités démontrées dans son introduction.

Le programme de première cite également les travaux de Bayes et Laplace. Notons que Bayes, dans son ouvrage *An essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chances* (publication posthume en 1763), définit la probabilité à partir de la notion de « valeur de l'attente » [33], considérée comme « notion première », en reprenant comme définition le corollaire de de Moivre cité plus haut [34]. Cependant, contrairement aux auteurs étudiés ici, Bayes ne définit pas la « valeur de l'attente », ni ne donne de moyen de la calculer ; cette notion lui sert en fait à justifier des résultats sur les probabilités conditionnelles, dont il a besoin dans la suite de son traité.

Laplace, dans sa *Théorie analytique des probabilités* (1812), commence le livre second par ce qu'on appelle désormais la définition laplacienne de la probabilité :

> « La théorie des probabilités consiste à réduire tous les évènements qui peuvent avoir lieu dans une circonstance donnée, à un certain nombre de cas également possibles, c'est-à-dire tels que nous soyons également indécis sur leur existence, et à déterminer parmi ces cas, le nombre de ceux qui sont favorables à l'évènement dont on cherche la probabilité. Le rapport de ce nombre à celui de tous les cas possibles, est la mesure de cette probabilité qui n'est donc qu'une fraction dont le numérateur est le nombre des cas favorables, et dont le dénominateur est celui de tous les cas possibles. » (Laplace, 1812, p. 178)

À la suite de Laplace, les mathématiciens reprendront cette définition et c'est cette notion de probabilité qui deviendra l'outil des démonstrations.

32. Cette expression nous paraît plus proche des auteurs étudiés que le mot « espérance », très connoté pour nous.

33. Bayes emploie le mot « expectation ».

34. Il est probable que Bayes connaît le livre de de Moivre.

Bibliographie

BESSOT D. et al, 2006, *L'espérance du Hollandais* », Cercle d'histoire des sciences, IREM de Basse-Normandie, Ellipses, Paris.

COUMET E., 1965, « Le problème des partis avant Pascal », In *Archives Internationales d'histoire des Sciences*, 18/73, pp245-272.
Disponible en ligne : http://www.jehps.net/Juin2007/Coumet_partis.pdf

COUMET, E., 1970, « La théorie du hasard est-elle née par hasard ? » In : *Annales. Économies, Sociétés, Civilisations.* 25e année, N. 3. p. 574-598.
https://www.persee.fr/doc/ahess_0395-2649_1970_num_25_3_422242

HUYGENS, C., 1920, *De ratiociniis in Ludo aleae ;* trad. « Du calcul dans les jeux de hasard » in tome 14, *Œuvres complètes* , La Haye, Martinus Nijhoff, 1920, p.78 et suivantes.
https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k77862v?rk=150215;2

LACROIX F – S, 1816, *Traité élémentaire du calcul des probabilités*, Paris (nombreuses rééditions).
Disponible en ligne : https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k62104507?rk=257512;0

LAPLACE , 1812, *Théorie Analytique des probabilités*, Paris.
Disponible en ligne :https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b8625611h?rk=21459;2#

MEUSNIER N., 2004, « Le problème des partis avant Pacioli », In *Histoire de probabilités et de statistiques*, Commission Inter-IREM d'Épistémologie et d'Histoire des mathématiques, Ellipses, Paris.

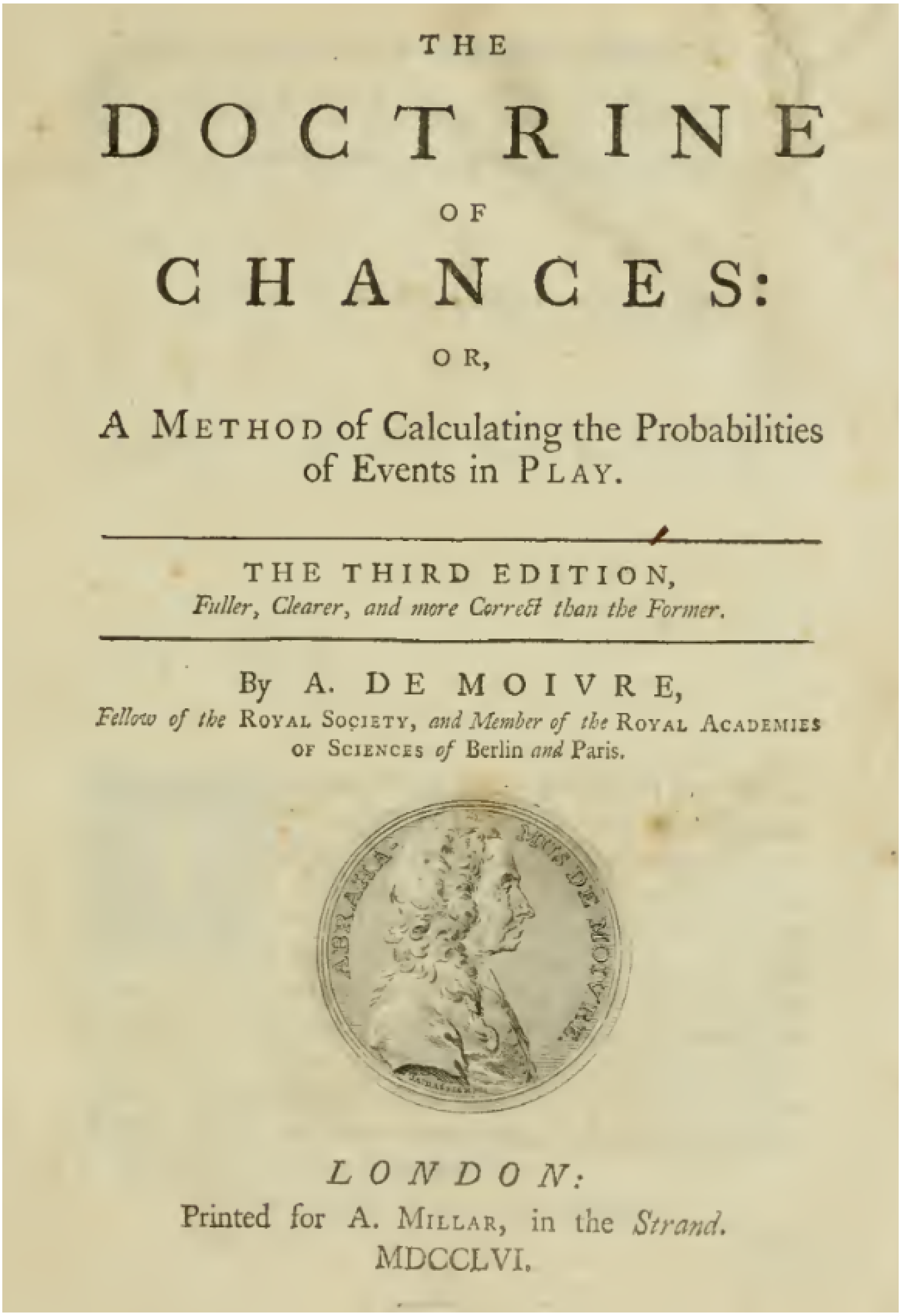
DE MOIVRE A., 1756, *The doctrine of chances or, a method of calculating the probability of events in play*, Londres, (3e édition).
Disponible en ligne : https://www.ime.usp.br/~walterfm/cursos/mac5796/DoctrineOfChances.pdf

DE MONTMORT P .R ., 1708, *Essay d'analyse sur les jeux de hazard* , Paris.

PASCAL B., 1963, *Œuvres complètes*, présentations et notes de Louis Lafuma, Seuil, Paris.

SAMUELI, BOUDENOT, 2009, *Une histoire des probabilités des origines à 1900*, Ellipses, Paris.

Source des images ci-dessous :
https://www.ime.usp.br/~walterfm/cursos/mac5796/DoctrineOfChances.pdf



THE

DOCTRINE

OF

CHANCES:

OR,

A METHOD of Calculating the Probabilities
of Events in PLAY.

THE THIRD EDITION,
Fuller, Clearer, and more Correct than the Former.

By A. DE MOIVRE,
Fellow of the ROYAL SOCIETY, *and Member of the* ROYAL ACADEMIES
OF SCIENCES *of* Berlin *and* Paris.

LONDON:
Printed for A. MILLAR, in the *Strand.*
MDCCLVI.

THE DOCTRINE OF CHANCES.

The INTRODUCTION.

1. THE Probability of an Event is greater or leſs, according to the number of Chances by which it may happen, compared with the whole number of Chances by which it may either happen or fail.

2. Wherefore, if we conſtitute a Fraction whereof the Numerator be the number of Chances whereby an Event may happen, and the Denominator the number of all the Chances whereby it may either happen or fail, that Fraction will be a proper deſignation of the Probability

bability of happening. Thus if an Event has 3 Chances to happen, and 2 to fail, the Fraction $\frac{3}{5}$ will fitly repreſent the Probability of its happening, and may be taken to be the meaſure of it.

The ſame thing may be ſaid of the Probability of failing, which will likewiſe be meaſured by a Fraction whoſe Numerator is the number of Chances whereby it may fail, and the Denominator the whole number of Chances, both for its happening and failing; thus the Probability of the failing of that Event which has 2 Chances to fail and 3 to happen will be meaſured by the Fraction $\frac{2}{5}$.

3. The Fractions which repreſent the Probabilities of happening and failing, being added together, their Sum will always be equal to Unity, ſince the Sum of their Numerators will be equal to their common Denominator: now it being a certainty that an Event will either happen or fail, it follows that Certainty, which may be conceived under the notion of an infinitely great degree of Probability, is fitly repreſented by Unity.

Theſe things will eaſily be apprehended, if it be conſidered, that the word Probability includes a double Idea; firſt, of the number of Chances whereby an Event may happen; ſecondly, of the number of Chances whereby it may either happen or fail.

If I ſay that I have three Chances to win any Sum of Money, it is impoſſible from that bare aſſertion to judge whether I am like to obtain it; but if I add that the number of Chances either to obtain it, or to miſs it, is five in all, from hence will enſue a compariſon between the Chances that favour me, and the whole number of Chances that are for or againſt me, whereby a true judgment will be formed of my Probability of ſucceſs: from whence it neceſſarily follows, that it is the comparative magnitude of the number of Chances to happen, in reſpect to the whole number of Chances either to happen or to fail, which is the true meaſure of Probability.

4. If upon the happening of an Event, I be intitled to a Sum of Money, my Expectation of obtaining that Sum has a determinate value before the happening of the Event.

Thus, if I am to have 10 $^{L.}$ in caſe of the happening of an Event which has an equal Probability of happening and failing, my Expectation before the happening of the Event is worth 5 $^{L.}$: for I am preciſely in the ſame circumſtances as he who at an equal Play ventures 5 $^{L.}$ either to have 10, or to loſe his 5. Now he who ventures 5 $^{L.}$ at an equal Play, is poſſeſſor of 5 $^{L.}$ before the deciſion of the Play;

Play; therefore my Expectation in the case above-mentioned must also be worth 5^{L}

5. In all cases, the Expectation of obtaining any Sum is estimated by multiplying the value of the Sum expected by the Fraction which represents the Probability of obtaining it.

Thus, if I have 3 Chances in 5 to obtain $100^{L.}$ I say that the present value of my Expectation is the product of $100^{L.}$ by the fraction $\frac{3}{5}$, and consequently that my expectation is worth $60^{L.}$

For supposing that an Event may equally happen to any one of 5 different Persons, and that the Person to whom it happens should in consequence of it obtain the Sum of $100^{L.}$ it is plain that the right which each of them in particular has upon the Sum expected is $\frac{1}{5}$ of $100^{L.}$ which right is founded in this, that if the five Persons concerned in the happening of the Event, should agree not to stand the Chance of it, but to divide the Sum expected among themselves, then each of them must have $\frac{1}{5}$ of $100^{L.}$ for his pretension. Now whether they agree to divide that sum equally among themselves, or rather chuse to stand the Chance of the Event, no one has thereby any advantage or disadvantage, since they are all upon an equal foot, and consequently each Person's expectation is worth $\frac{1}{5}$ of $100^{L.}$ Let us suppose farther, that two of the five Persons concerned in the happening of the Event, should be willing to resign their Chance to one of the other three; then the Person to whom those two Chances are thus resigned has now three Chances that favour him, and consequently has now a right triple of that which he had before, and therefore his expectation is now worth $\frac{3}{5}$ of $100^{L.}$

Now if we consider that the fraction $\frac{3}{5}$ expresses the Probability of obtaining the Sum of $100^{L.}$, and that $\frac{3}{5}$ of 100, is the same thing as $\frac{3}{5}$ multiplied by 100, we must naturally fall into this conclusion, which has been laid down as a principle, that the value of the Expectation of any Sum, is determined by multiplying the Sum expected by the Probability of obtaining it.

This manner of reasoning, tho' deduced from a particular case, will easily be perceived to be general, and applicable to any other case.

COROLLARY.

From what precedes, it neceſſarily follows that if the Value of an Expectation be given, as alſo the Value of the thing expected, then dividing the firſt value by the ſecond, the quotient will expreſs the Probability of obtaining the Sum expected: thus if I have an Expectation worth $60^{L.}$ and that the Sum which I may obtain be worth $100^{l.}$ the Probability of obtaining it will be expreſt by the quotient of 60 divided by 100, that is by the fraction $\frac{60}{100}$ or $\frac{3}{5}$.

6. The Riſk of loſing any Sum is the reverſe of Expectation; and the true meaſure of it is, the product of the Sum adventured multiplied by the Probability of the Loſs.

7. Advantage or Diſadvantage in Play, reſults from the combination of the ſeveral Expectations of the Gameſters, and of their ſeveral Riſks.

Thus ſuppoſing that *A* and *B* play together, that *A* has depoſited 5^{L} and *B* $3^{L.}$ that the number of Chances which *A* has to win is 4, and the number of Chances which *B* has to win is 2, and that it were required in this circumſtance to determine the advantage or diſadvantage of the Adventurers, we may reaſon in this manner: Since the whole Sum depoſited is 8, and that the Probability which *A* has of getting it is $\frac{4}{6}$, it follows that the Expectation of *A* upon the whole Sum depoſited is $8 \times \frac{4}{6} = 5\frac{1}{3}$, and for the ſame reaſon the Expectation of *B* upon that whole Sum depoſited is $8 \times \frac{2}{6} = 2\frac{2}{3}$.

Now, if from the reſpective Expectations which the Adventurers have upon the whole ſum depoſited, be ſubtracted the particular Sums which they depoſit, that is their own Stakes, there will remain the Advantage or Diſadvantage of either, according as the difference is poſitive or negative.

And therefore if from $5\frac{1}{3}$, which is the Expectation of *A* upon the whole Sum depoſited, 5 which is his own Stake, be ſubtracted, there will remain $\frac{1}{3}$ for his advantage; likewiſe if from $2\frac{2}{3}$ which is the Expectation of *B*, 3 which is his own Stake be ſubtracted, there will remain $-\frac{1}{3}$, which being negative ſhews that his Diſadvantage is $\frac{1}{3}$.

Theſe concluſions may alſo be derived from another conſideration; for if from the Expectation which either Adventurer has upon the Sum

Sum depofited by his Adverfary, be fubtracted the Rifk of what he himfelf depofits, there will likewife remain his Advantage or Difadvantage, according as the difference is pofitive or negative.

Thus in the preceding cafe, the Stake of B being 3, and the Probability which A has of winning it, being $\frac{4}{6}$, the Expectation of A upon that Stake is $3 \times \frac{4}{6} = 2$; moreover the Stake of A being 5, and the Probability of lofing it, being $\frac{2}{6}$, his Rifk ought to be eftimated by $5 \times \frac{2}{6} = 1\frac{2}{3}$; wherefore, if from the Expectation 2, the Rifk $1\frac{2}{3}$ be fubtracted, there will remain $\frac{1}{3}$ as before for the Advantage of A: and by the fame way of proceeding, the Difadvantage of B will be found to be $\frac{1}{3}$.

It is very carefully to be obferved, that what is here called Advantage or Difadvantage, and which may properly be called Gain or Lofs, is always eftimated before the Event is come to pafs; and altho' it be not cuftomary to call that Gain or Lofs which is to be derived from an Event not yet determined, neverthelefs in the Doctrine of Chances, that appellation is equivalent to what in common difcourfe is called Gain or Lofs.

For in the fame manner as he who ventures a Guinea in an equal Game may, before the determination of the Play, be faid to be poffeffor of that Guinea, and may, in confideration of that Sum, refign his place to another; fo he may be faid to be a Gainer or Lofer, who would get fome Profit, or fuffer fome Lofs, if he would fell his Expectation upon equitable terms, and fecure his own Stake for a Sum equal to the Rifk of lofing it.

8. If the obtaining of any Sum requires the happening of feveral Events that are independent on each other, then the Value of the Expectation of that Sum is found by multiplying together the feveral Probabilities of happening, and again multiplying the product by the Value of the Sum expected.

Thus fuppofing that in order to obtain 90^{l} two Events muft happen; the firft whereof has 3 Chances to happen, and 2 to fail, the fecond has 4 Chances to happen, and 5 to fail, and I would know the value of that Expectation; I fay,

The Probability of the firft's happening is $\frac{3}{5}$, the Probability of the fecond's happening is $\frac{4}{9}$; now multiplying thefe two Probabilities together, the product will be $\frac{12}{45}$ or $\frac{4}{15}$; and this product being again

again multiplied by 90, the new product will be $\frac{160}{15}$ or 24, therefore that Expectation is worth 24 *L.*

The Demonſtration of this will be very eaſy, if it be conſider'd, that ſuppoſing the firſt Event had happened, then that Expectation depending now intirely upon the ſecond, would, before the determination of the ſecond, be found to be exactly worth $\frac{4}{9} \times 90$ *L.* or 40 *L.* (by Art. 5th) We may therefore look upon the happening of the firſt, as a condition of obtaining an Expectation worth 40 *L.* but the Probability of the firſt's happening has been ſuppoſed $\frac{3}{5}$, wherefore the Expectation ſought for is to be eſtimated by $\frac{3}{5} \times 40$, or by $\frac{3}{5} \times \frac{4}{9} \times 90$; that is, by the product of the two Probabilities of happening multiplied by the Sum expected.

And likewiſe, if an Expectation depends on the happening of one Event, and the failing of another, then its Value will be the product of the Probability of the firſt's happening by the Probability of the ſecond's failing, and of that again by the Value of the Sum expected.

And again, if an Expectation depends on the failing of two Events, the Rule will be the ſame; for that Expectation will be found by multiplying together the two Probabilities of failing, and multiplying that again by the Value of the Sum expected.

And the ſame Rule is applicable to the happening or failing of as many Events as may be aſſigned.

COROLLARY.

If we make abſtraction of the Value of the Sum to be obtained, the bare Probability of obtaining it, will be the product of the ſeveral Probabilities of happening, which evidently appears from this 8th Art. and from the Corollary to the 5th.

Hitherto, I have confined myſelf to the conſideration of Events independent; but for fear that, in what is to be ſaid afterwards, the terms independent or dependent might occaſion ſome obſcurity, it will be neceſſary, before I proceed any farther, to ſettle intirely the notion of thoſe terms.

Two Events are independent, when they have no connexion one with the other, and that the happening of one neither forwards nor obſtructs the happening of the other.

Two Events are dependent, when they are ſo connected together as that the Probability of either's happening is altered by the happening of the other.

In

In order to illuſtrate this, it will not be amiſs to propoſe the two following eaſy Problems.

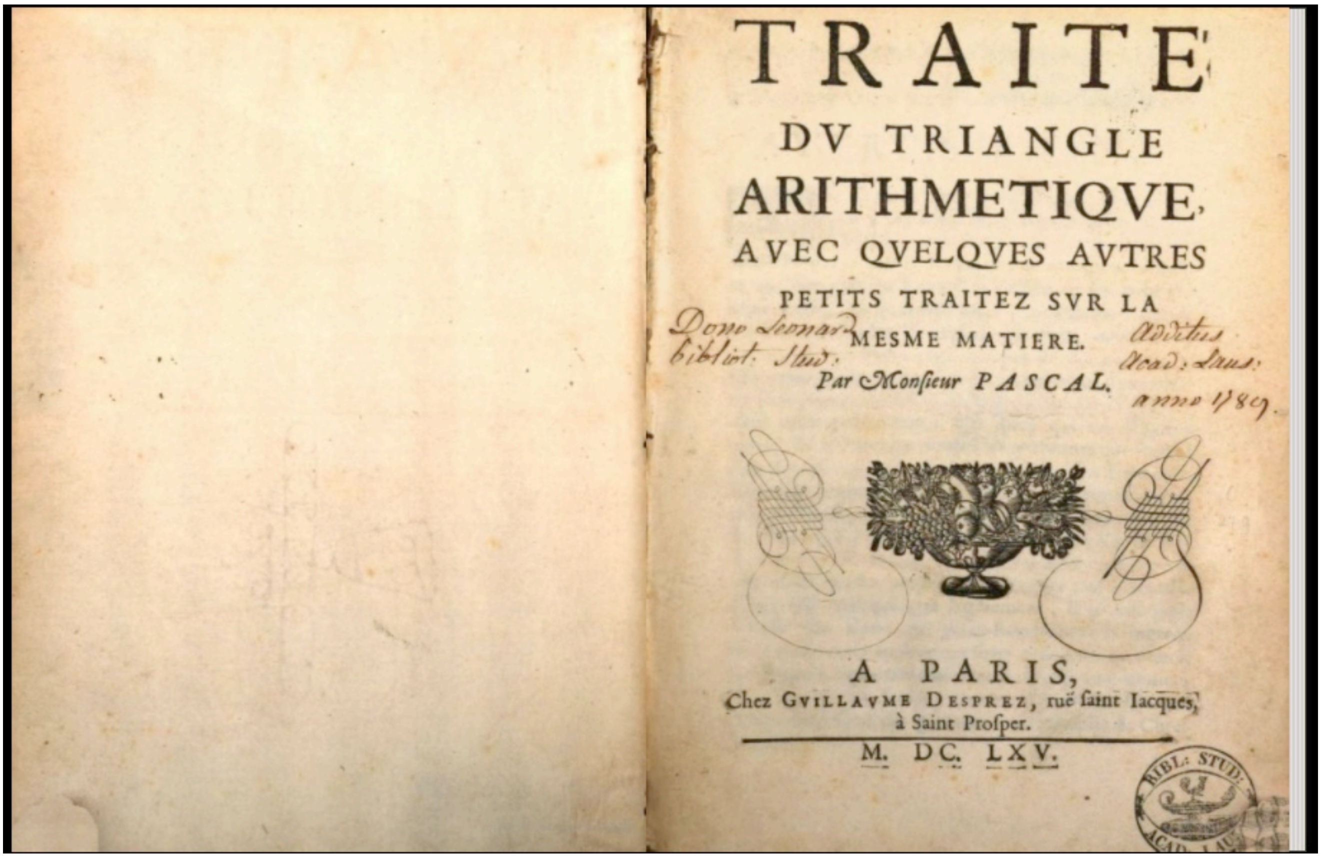
1°. Suppoſe there is a heap of 13 Cards of one colour, and another heap of 13 Cards of another colour, what is the Probability that taking a Card at a venture out of each heap, I ſhall take the two Aces?

The Probability of taking the Ace out of the firſt heap is $\frac{1}{13}$: now it being very plain that the taking or not taking the Ace out of the firſt heap has no influence in the taking or not taking the Ace out of the ſecond; it follows, that ſuppoſing that Ace taken out, the Probability of taking the Ace out of the ſecond will alſo be $\frac{1}{13}$; and therefore, thoſe two Events being independent, the Probability of their both happening will be $\frac{1}{13} \times \frac{1}{13} = \frac{1}{169}$.

2°. Suppoſe that out of one ſingle heap of 13 Cards of one colour, it ſhould be undertaken to take out the Ace in the firſt place, and then the Deux, and that it were required to aſſign the Probability of doing it; we are to conſider that altho' the Probability of the Ace's being in the firſt place be $\frac{1}{13}$, and that the Probability of the Deux's being in the ſecond place, would alſo be $\frac{1}{13}$, if that ſecond Event were conſidered in itſelf without any relation to the firſt; yet that the Ace being ſuppoſed as taken out at firſt, there will remain but 12 Cards in the heap, and therefore that upon the ſuppoſition of the Ace being taken out at firſt, the Probability of the Deux's being next taken will be alter'd, and become $\frac{1}{12}$; and therefore, we may conclude that thoſe two Events are dependent, and that the Probability of their both happening will be $\frac{1}{13} \times \frac{1}{12} = \frac{1}{156}$.

From whence it may be inferred, that the Probability of the happening of two Events dependent, is the product of the Probability of the happening of one of them, by the Probability which the other will have of happening, when the firſt is conſidered as having happened; and the ſame Rule will extend to the happening of as many Events as may be aſſigned.

9. But to determine, in the eaſieſt manner poſſible, the Probability of the happening of ſeveral Events dependent, it will be convenient to diſtinguiſh by thought the order of thoſe Events, and to ſuppoſe one of them to be the firſt, another to be the ſecond, and ſo on: which being done, the Probability of the happening of the firſt may be



TRAITE
DV TRIANGLE
ARITHMETIQVE,
AVEC QVELQVES AVTRES
PETITS TRAITEZ SVR LA
MESME MATIERE.
Par Monsieur PASCAL.

Dono Leonardi
bibliot: Stud:

Additus
Acad: Laus:
anno 1789.

A PARIS,
Chez GVILLAVME DESPREZ, ruë saint Iacques,
à Saint Prosper.
M. DC. LXV.

https://ia902802.us.archive.org/26/items/bub_gb_UqgUAAAAQAAJ/bub_gb_UqgUAAAAQAAJ.pdf

Traité du triangle arithmétique avec quelques autres petits traitez sur la mesme matière
Pascal 1665

Étude

Pascal au carrefour des probabilités, de l'algorithmique, de la récurrence et de la combinatoire

Dominique Baroux et Martine Bühler

Le groupe M. : A.T.H. s'est intéressé, dès le début de ses activités, à la correspondance de Pascal et Fermat sur le « problème des partis » et à l'utilisation qu'on peut en faire en classe. La relecture de ces textes, à la lumière de nouvelles préoccupations pédagogiques, nous a amenées à étudier de manière plus approfondie les idées de Pascal. Ce dernier donne en effet une solution « algorithmique » au problème, qui permet des activités riches avec nos élèves, dans les domaines de l'algorithmique et de la programmation, apparus au cours des dernières années dans les programmes de mathématiques. L'article présente la méthode de Pascal pour résoudre le problème, présentée dans une lettre à Fermat et dans le *Traité du Triangle Arithmétique.* La rubrique « Dans nos classes » présente l'utilisation qui peut être faite en classe de ces textes, aussi bien du point de vue mathématique, qu'algorithmique ou informatique. Le *Traité* donne également la construction de ce fameux triangle arithmétique, ses propriétés, le principe de la démonstration par récurrence et son usage pour les combinaisons.

Introduction

En 1654, Pascal et Fermat échangent une correspondance au sujet d'un problème de partage de mise entre les joueurs, quand une partie est interrompue, connu sous le nom de « problème des partis ». Cet échange épistolaire est souvent considéré comme l'acte de naissance des probabilités, une affirmation qu'on pourrait nuancer en tenant compte des études sur les discussions antérieures autour de ce problème (Coumet, 1965 et Meusnier, 2004) et d'autres questions liées aux jeux de hasard, par exemple le problème du Duc de Toscane (Henry, 2011).

Dans une première partie, nous nous intéresserons particulièrement à la solution donnée par Pascal dans une de ses lettres. Cette solution est clairement algorithmique, et prend pour l'enseignement des mathématiques en terminale une nouvelle résonance avec la présence de plus en plus importante de l'algorithmique et de la programmation. Pascal revient sur ce problème dans la troisième partie de son *Traité du Triangle Arithmétique*, publié de façon posthume en 1665, en précisant les principes qui doivent, selon lui, nous guider vers la solution, et donne à nouveau sa solution algorithmique, qui n'utilise pas le triangle arithmétique. Cependant, dans le *Traité*, Pascal donne une solution au problème à l'aide de ce fameux triangle.

Nous examinerons donc ensuite ce *Traité du Triangle Arithmétique*, en expliquant la génération du triangle, et celles de ses propriétés utiles pour la compréhension de la suite. Dans les usages du triangle arithmétique figure une étude des combinaisons, tout à fait utilisable en classe. Pascal y présente en effet clairement la notion de combinaison, et donne la relation de récurrence (dite de Pascal dans les programmes) avec une démonstration sur un exemple générique qui peut permettre aux élèves de comprendre, et peut-être même d'aborder seul·es, la démonstration générale.

Nous pourrons alors étudier la troisième partie du *Traité du Triangle Arithmétique*, consacrée à une autre solution du problème des partis, utilisant ce triangle. Pascal utilise les mêmes principes donnés en première partie de l'article, et montre comment la connaissance du triangle donne immédiatement les règles du partage à effectuer. En développant ces questions, aussi bien celles des propriétés du triangle que celles sur les combinaisons ou la règle des partis, Pascal est amené à donner les principes de la démonstration par récurrence.

Les extraits de textes sont tirés de l'édition des *Œuvres Complètes* de Pascal citée en bibliographie.

La méthode algorithmique de Pascal

Le problème des partis et la lettre de Pascal de juillet 1654

Rappelons le problème, sur lequel on peut faire travailler les élèves, en groupes en classe ou à la maison, comme problème ouvert et/ou narration de recherche [1] . Mieux vaut d'ailleurs avoir déjà réfléchi au problème avant de lire la suite de l'article.

> Deux joueurs jouent à un jeu de pur hasard ; le premier qui gagne un nombre déterminé de parties (par exemple 3) remporte la mise. Or, ils doivent quitter le jeu avant que l'un d'entre eux ait gagné (par exemple, le joueur A a 2 points et le joueur B a 1 point). Comment doivent-ils partager la mise [a] ?
>
> *a.* Il s'agit d'un problème de partage, d'où le nom de problème des partis, écrit aussi parfois party, le mot « parti » ayant le sens de « partage ».

Dans une lettre à Fermat du 29 Juillet 1654, Pascal explique sa méthode sur l'exemple d'un jeu en trois parties, lorsque le premier joueur a un point et le second zéro, en commençant par des cas plus simples qui lui permettront de résoudre son exemple en procédant de proche en proche [2].

> « Voici à peu près comment je fais pour savoir la valeur de chacune des parties, quand deux joueurs jouent, par exemple, en trois parties, et chacun a mis 32 pistoles au jeu :
>
> Posons que le premier en ait deux et l'autre une ; ils jouent maintenant une partie, dont le sort est tel que, si le premier la gagne, il gagne tout l'argent qui est au jeu, savoir 64 pistoles ; si l'autre la gagne, ils sont deux parties à deux parties, et par conséquent, s'ils veulent se séparer, il faut qu'ils retirent chacun leur mise, savoir chacun 32 pistoles.
>
> Considérez donc, Monsieur, que, si le premier gagne, il lui appartient 64 ; s'il perd, il lui appartient 32. Donc, s'ils veulent se séparer sans la jouer, le premier doit dire : « Je suis sûr d'avoir 32 pistoles, car la perte même me les donne ; mais pour les 32 autres, peut-être je les aurai, peut-être vous les aurez, le hasard est égal. Partageons donc ces 32 pistoles par la moitié et me donnez, outre cela, les 32 qui me sont sûres ». Il aura donc 48 pistoles et l'autre 16.
>
> Posons maintenant que le premier ait deux parties et l'autre point, et ils commencent à jouer une partie. Le sort de cette partie est tel que, si le premier la gagne, il tire tout l'argent, 64 pistoles ; si l'autre la gagne, les voilà revenus au cas précédent, auquel le premier aura deux parties et l'autre une.
>
> Or, nous avons déjà montré qu'en ce cas il appartient, à celui qui a les deux parties, 48 pistoles : donc, s'ils veulent ne point jouer cette partie, il doit

1. Vous trouverez dans la rubrique « Dans nos classes » un problème donné en terminale scientifique. Vous trouverez dans le dossier sur l'histoire des probabilités en classe du groupe MATH, cité en bibliographie, un compte-rendu d'expérience en classe sur ce problème.

2. Fermat, *Œuvres*, publiées par P. Tannery et C. Henry, tome II, Gauthier-Villars, Paris, 1894, p. 290-291.

dire ainsi : « Si je la gagne, je gagnerai tout, qui est 64 ; si je la perds, il m'appartiendra légitimement 48 : donc donnez-moi les 48 qui me sont certaines, au cas même que je perde, et partageons les 16 autres par moitié, puisqu'il y a autant de hasard que vous les gagniez comme moi ». Ainsi, il aura 48 et 8, qui sont 56 pistoles.

Posons enfin que le premier n'ait qu'*une* partie et l'autre *point*. Vous voyez, Monsieur, que, s'ils commencent une partie nouvelle, le sort en est tel que, si le premier la gagne, il aura *deux* parties à *point*, et partant, par le cas précédent, il lui appartient 56 ; s'il la perd, ils sont partie à partie : donc il lui appartient 32 pistoles. Donc il doit dire : « Si vous voulez ne la pas jouer, donnez-moi 32 pistoles qui me sont sûres, et partageons le reste de 56 par la moitié. De 56 ôtez 32, reste 24 ; partagez donc 24 par la moitié, prenez-en 12 et moi 12, qui, avec 32, font 44. » »

Les principes utilisés par Pascal

Pascal utilise deux principes qu'il précisera dans son *Traité du Triangle Arithmétique*[3].

« USAGE DU TRIANGLE ARITHMÉTIQUE

POUR DÉTERMINER LES PARTIS QU'ON DOIT FAIRE ENTRE DEUX JOUEURS QUI JOUENT EN PLUSIEURS PARTIES

[...]Le premier principe qui fait connaître de quelle sorte on doit faire les partis est celui-ci. Si un des joueurs se trouve en telle condition que, quoiqu'il arrive, une certaine somme doive lui appartenir en cas de perte et de gain, sans que le hasard la lui puisse ôter, il n'en doit faire aucun parti, mais la prendre entière comme assurée parce que, le parti devant être proportionné au hasard, puisqu'il n'y a nul hasard de perdre, il doit tout retirer sans parti. »

C'est bien ce principe qu'a utilisé Pascal dans l'extrait ci-dessus lorsqu'il affirme : « Je suis sûr d'avoir 32 pistoles, car la perte même me les donne [...] donnez[-moi][...] les 32 qui me sont sûres ».

« Le second est celui-ci. Si deux joueurs se trouvent en cette situation que, si l'un gagne, il lui appartiendra une certaine somme, et, s'il perd, elle appartiendra à l'autre ; si le jeu est de pur hasard et qu'il y ait autant de hasards pour l'un que pour l'autre, et par conséquent non plus de raison de gagner pour l'un que pour l'autre, s'ils veulent se séparer sans jouer, et prendre ce qui leur appartient légitimement, le parti est qu'ils séparent la somme qui est au hasard par la moitié, et que chacun prenne la sienne. »

Ce second principe a également été utilisé : « mais pour les 32 autres, peut-être je les aurai, peut-être vous les aurez, le hasard est égal. Partageons donc ces 32 pistoles par la moitié ».

Ces deux principes répondent à l'exigence que les joueurs « ont reçu [...]le droit d'attendre ce que le hasard leur [...] peut donner. [...] le règlement de ce qui doit leur appartenir doit être tellement proportionné à ce qu'ils avaient droit d'espérer de la fortune que chacun d'eux trouve entièrement égal de prendre ce qu'on lui assigne ou de continuer l'aventure du jeu. »

Les deux principes énoncés permettent à Pascal de donner deux corollaires, le second équivalent au premier, qui permettent de faire le « parti ».

3. Pascal, *Œuvres complètes*, tome II, texte présenté, établi et annoté par Jean Mesnard, Desclée de Brouwer, 1970 (p. 1308-1311).

« *Corollaire premier*

Si deux joueurs jouent à un jeu de pur hasard, à condition que, si le premier gagne, il lui reviendra une certaine somme, et, s'il perd, il lui en reviendra une moindre ; et s'ils veulent se séparer sans jouer, et prendre chacun ce qui leur appartient, le parti est que le premier prenne ce qui lui revient en cas de perte, et de plus la moitié de l'excès dont ce qui lui reviendrait en cas de gain surpasse ce qui lui revient en cas de perte.

[...]*si, en cas de perte il lui appartient A, et en cas de gain $A+B$, le parti est qu'il prenne $A+\frac{1}{2}B$.*

Corollaire second

Si deux joueurs sont en la même condition qu'on vient de dire, je dis que le parti se peut faire de cette façon qui revient au même ; que l'on assemble les deux sommes de gain et de perte, et que le premier prenne la moitié de cette somme [4] ; [. . .] »

Pascal raisonne ici, comme dans sa lettre à Fermat, sur la somme que chaque joueur peut légitimement emporter si le jeu s'arrête, ce que nous nommons l'espérance de gain. Pascal remarque ensuite :

« qu'il ne faut proprement avoir égard qu'au nombre de parties qu'il reste à gagner à l'un et à l'autre, et non pas au nombre de celles qu'ils ont gagnées, puisque, comme nous avons dit, deux joueurs se trouvent en même état quand, jouant en deux parties, l'un en a une à point, que deux qui, jouant en douze parties, l'un en a onze à dix. Il faut donc proposer la question en cette sorte :

Étant proposés deux joueurs, à chacun desquels il manque un certain nombre de parties pour achever, faire le parti. »

Il n'est pas du tout intuitif qu'on ne doive tenir aucun compte des parties déjà gagnées, et ne considérer que les parties qui manquent à chaque joueur. Cette difficulté se retrouve aussi bien dans les solutions « historiques » envisagées avant le XVII^{e} siècle (Coumet, 1965), que dans les solutions proposées par les élèves lorsqu'on pose le problème de façon ouverte [5].

Un algorithme récursif

Pascal donne ensuite des exemples, très semblables à ceux de sa lettre, qui montrent bien qu'un cas se résout de proche en proche. Dans un jeu où il faut 3 points pour remporter la mise, pour savoir ce qui revient au premier joueur en cas d'arrêt du jeu quand le premier a 2 points et le second 0 point, il faut d'abord résoudre le cas où le premier a 3 et le second 0 (évident ici) et le cas où le premier a 2 points et le second a 1 point. Ce dernier cas nécessite de connaître le « parti » lorsque le premier a 3 points et le second 1 point (évident ici) et le cas où le premier et le second ont tous deux 2 points (partage par moitié selon le second principe).

Plus loin, il parle de la « portion [...] sur la somme qu'ils jouent, exprimée par une fraction », qui revient à un joueur. Cette fraction est, pour nous, la probabilité que le joueur gagne la partie, puisque « le parti [doit] être proportionné au hasard ». Il précise dans un lemme que, « si deux joueurs jouent à un jeu de pur hasard, à condition que, si

4. Pascal montre que cela est équivalent à la conclusion du corollaire premier car la somme considérée est $A+A+B$, dont la moitié est bien $A+\frac{1}{2}B$.

5. Vous trouverez un compte-rendu d'expérience dans le *Bulletin Vert* de l'APMEP, N° 514, p. 264-274. https://www.apmep.fr/IMG/pdf/AAA15029.pdf

le premier gagne, il lui appartiendra une portion quelconque sur la somme qu'ils jouent, et que, s'il perd, il lui appartiendra une moindre portion sur la même somme, exprimée par une autre fraction », on doit calculer la demi-somme de ces deux fractions et « cette fraction exprime la portion qui appartient au premier sur la somme qui est au jeu », en conformité avec ce qu'affirme le second corollaire. Nous pouvons traduire cela en termes de probabilités. Imaginons qu'il manque a parties au premier joueur et b parties au second, a et b non tous deux nuls ; appelons $P(a,b)$ la probabilité que le premier joueur gagne le jeu ; la portion de la mise que doit emporter le premier joueur est bien $P(a,b)$.

S'ils jouent maintenant une partie, si le premier la gagne, il manque alors au premier $a-1$ points et au second toujours b points. Donc, en cas de gain, il emporte la « portion » $P(a-1,b)$ de la mise ; si au contraire le premier perd, il lui manque alors toujours a points et au second $b-1$ points ; donc le premier joueur emporte la « portion » $P(a,b-1)$ de la mise. Le corollaire second affirme alors que, « s'ils veulent se séparer sans jouer », il lui revient la « portion » $\frac{1}{2}P(a-1,b)+\frac{1}{2}P(a,b-1)$ de la mise. On a donc :

$$P(a,b) = \frac{1}{2}P(a-1,b)+\frac{1}{2}P(a,b-1)$$

On voit bien ici une fonction récursive[6] $P(a,b)$ définie par :

---

a et b deux entiers naturels non tous deux nuls

- **Si** $a=0,\ P(a,b)=1$
  - **Sinon** : **Si** $b=0,\ P(a,b)=0$
    - **Sinon** : **Si** $a=b,\ P(a,b)=\frac{1}{2}$
      - **Sinon,** $P(a,b)=\frac{1}{2}P(a-1,b)+\frac{1}{2}P(a,b-1)$

On peut implémenter cet algorithme[7] dans le langage Python :

```python

def probaparti(a,b):
    if a<0 or b<0 or (a==0 and b==0):
        print('Mauvaises entrées')
        #raise ValueError()
        return -1
    elif a==0:
        return 1
    elif b==0:
        return 0
    elif a==b:
        return 0.5
    else:
        return(0.5*probaparti(a-1,b)+0.5*probaparti(a,b-1))

a = input('Tapez le nombre a:')
b = input('Tapez le nombre b:')

a = int(a)
b = int(b)

proba = probaparti(a,b)
print(proba)

```

6. Vous trouverez dans la rubrique « Dans nos classes » un exercice d'introduction à la récursivité pour une classe de terminale.

7. Vous trouverez sur la page du groupe M. :A.T.H. les algorithmes de cet article en langage Python https://irem.u-paris.fr/utilisation-de-lhistoire-des-mathematiques-en-probabilites

L'algorithme permet d'obtenir la probabilité que le premier joueur, A, gagne le jeu, losqu'il manque a parties au premier joueur et b parties au second joueur, B. On peut faire quelques essais :

```
In [11]: probaparti(2,3)
Out[11]: 0.6875

In [12]: probaparti(9,10)
Out[12]: 0.5927352905273438
```

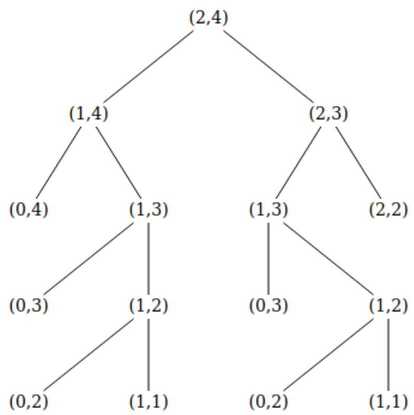
Voici ce qu'on obtient pour $(a, b) = (500, 501)$

```
RecursionError: maximum recursion depth exceeded in comparison
```

Que signifie ce message d'erreur ? Quels problèmes pose l'implémentation ? Ces problèmes sont-ils liés au langage, ou à la complexité de l'algorithme lui-même ?

Problèmes de l'implémentation de l'algorithme de Pascal

Examinons l'arbre de calcul suivant :



- **Pour** calculer P(2,4), il faut calculer P(1,4) et P(2,3).
  - **Pour** calculer P(1,4), il faut calculer P(0,4) et P(1,3) ; P(0,4)=1.
    - **Pour** calculer P(1,3), il faut calculer P(0,3) et P(1,2) ; P(0,3) = 1.
      - **Pour** calculer P(1,2), il faut calculer P(0,2), qui vaut 1, et P(1,1), qui vaut $\frac{1}{2}$.
  - **Pour** calculer P(2,3), il faut d'abord calculer P(1,3) et P(2,2) ; P(2,2) = 0.5.
    - **Pour** calculer P(1,3), il faut calculer P(0,3) et P(1,2) ; P(0,3) = 1.
      - **Pour** calculer P(1,2), il faut calculer P(0,2), qui vaut 1, et P(1,1), qui vaut $\frac{1}{2}$.

La « hauteur » de l'arbre est 4, car il y a quatre niveaux en plus de la « racine » (2,4). Pour chaque niveau, la somme $s = a + b$ est la même pour tous les couples du niveau : 6 à la racine, 5 au premier niveau, 4 au deuxième niveau, 3 au troisième niveau, 2 au quatrième niveau. En effet, le calcul de $P(a, b)$ nécessite celui de $P(a - 1, b)$ et de $P(a, b - 1)$ et $(a - 1) + b = a + (b - 1) = s - 1$. La somme s est donc un « invariant » du niveau. On est sûr que le dernier niveau correspond à $s = 2$. En effet, inutile de continuer l'arbre après ce niveau car les seules décompositions de 2 en somme de deux entiers naturels sont : $2 = 0 + 2 = 1 + 1 = 2 + 0$ et on connaît $P(0,2) = 1$, $P(1,1) = \frac{1}{2}$, $P(2,0) = 0$. Et on arrive toujours à ce niveau, car, partant de la racine (a,b) avec $s = a + b$, a et b non nuls, non égaux, et $a < b$, on doit passer par $(a-1,b)$, $(a-2,b)$..., $(1,b)$ (pour lesquels on a toujours $a - k < b$ et $a - k$ non nul, donc pas d'arrêt possible), puis par $(1,b)$, $(1,b-1)$, ..., $(1,2)$, $(1,1)$ (arrêt à ce moment). Il y a donc toujours $s - 2$ niveaux après la racine.

Cet arbre va nous permettre de comprendre ce qui se passe lors de l'exécution du programme, ce que signifie le message d'erreur précédent, et les problèmes de complexité que nous pourrons rencontrer.

Lorsque l'exécution d'une fonction F rencontre un appel à une fonction G, l'exécution des instructions de la fonction F s'interrompt le temps d'exécuter les instructions de la fonction G (qui peut elle-même impliquer d'autres appels de fonction). Lorsque l'exécution de G s'achève, il faut retourner à son point d'appel dans F, et reprendre l'exécution de F à partir de ce point. Au moment du passage à la fonction G, les informations nécessaires au retour dans la fonction F sont stockées dans une « pile d'exécution ». Ces informations seront utilisées (et retirées de la pile) à la reprise de l'exécution de la fonction F. Dans le cas d'une fonction récursive, F et G sont la même fonction, mais le mécanisme est le même. Ainsi, pour calculer P(2,4), le programme fait un appel récursif à P car le calcul nécessite les valeurs P(1,4) et P(2,3). Au moment de l'appel récursif de la fonction P, on interrompt l'exécution des instructions de la « première » fonction P ; le premier niveau de la pile d'exécution contient toutes les informations nécessaires au retour au point d'appel. Pour calculer P(1,4), on fait de nouveau appel à P, car on a besoin de P(0,4) et P(1,3). On stocke les informations nécessaires dans le deuxième niveau de la pile. Puis on exécute le code de P pour connaître P(0,4). On a atteint la condition d'arrêt, donc on passe au calcul de P(1,3). Appel à P pour connaître P(0,3) et P(1,2) et stockage des informations dans le troisième niveau de la pile. Pour P(0,3), on a atteint la condition d'arrêt ; nouvel appel de P pour le calcul de P(1,2) et stockage d'informations dans le quatrième niveau de la pile. Cette fois-ci, la condition d'arrêt est remplie pour les deux nombres P(0,2) et P(1,1). On peut donc calculer P(1,2) et « dépiler » le quatrième niveau, puis calculer P(1,3) et dépiler le troisième niveau, puis calculer P(1,4) et dépiler le deuxième niveau. On est revenu à une pile avec un seul niveau.

On passe ensuite au calcul de P(2,3), qui va nécessiter de stocker de nouvelles informations, en reconstituant une pile à partir du premier niveau. On voit donc que la hauteur de la pile varie au cours de l'exécution, et que la hauteur maximale atteinte est la hauteur de l'arbre.

C'est de la hauteur de l'arbre que vient notre message d'erreur pour le couple (500,501) ; en effet, Python ne favorise pas l'écriture récursive [8] ; la taille (ou hauteur) de la pile est limitée par défaut à 1000, un choix dû à Guido van Rossum, le créateur du langage Python [9].

D'autres essais sont intéressants. Pour le couple (17,18), la réponse arrive en un peu plus d'une minute, et, pour le couple (15,25), toujours pas de réponse au bout de 5 minutes, sans pourtant avoir le message d'erreur ci-dessus, qui arrive très vite pour (500,501). La hauteur de l'arbre n'est pas en cause (38 niveaux seulement), mais, par contre, sa largeur (nombre de couples à calculer pour un niveau donné) augmente rapidement. Pour le couple

8. Voir : ORTIZ P., *La récursivité*, article en ligne, mai 2021, http://pascal.ortiz.free.fr/contents/python/recursivite/recursivite.html

9. Voir : BECIRSPAHIC J.P., *Récursivité*, article en ligne, https://info-llg.fr/commun-mp/pdf/02.recursivite.pdf

(17,18) par exemple, la largeur est 2 au niveau 1, 2 au niveau 2 (car l'arbre s'arrête pour le couple (17,17)), 4 au niveau 3, 6 au niveau 4 et 11 au niveau 5. Au pire, on passe d'un niveau à l'autre en doublant le nombre de couples, mais cela n'arrive pas car il y a des arrêts pour $a = 0$, $b = 0$ ou $a = b$. Par exemple, à partir d'un couple (a, b) avec $a < b$, il y a au moins un arrêt après $b - a$ étapes lorsqu'on arrive à (a, a) après $(a, b-1)$, $(a, b-2)$, ... et également après a étapes lorsqu'on arrive à $(0, b)$.

On voit également sur l'exemple de P(2,4) que les valeurs pour certains couples sont calculées plusieurs fois, par exemple P(1,2) et P(1,3). Le nombre de calculs à effectuer devient vite très grand. Et, comme nous l'avons remarqué, on doit calculer plusieurs fois le même couple : par exemple, pour (17,18), (13,17) apparaît 4 fois au niveau 5, et cela entraîne aussi bien sûr des calculs « inutiles » aux niveaux suivants. Il faut donc optimiser l'algorithme en gardant en mémoire les couples déjà calculés. Avec le langage Python, on peut créer un « dictionnaire » indexé par les couples d'entiers avec l'instruction dict().

```python
val_dict = dict()

def probaparti(a,b):

    if a<0 or b<0 or (a==0 and b==0):
        print('Mauvaises entrées')

        return -1

    elif a==0:
        return 1
    elif b==0:
        return 0
    elif a==b:
        return 0.5
    else:
        if (a,b) in val_dict.keys():
            return(val_dict[(a,b)])
        else:
            r = 0.5*probaparti(a-1,b)+0.5*probaparti(a,b-1)
            val_dict [(a,b)]=r

            return r

a = input('Tapez le nombre a:')
b = input('Tapez le nombre b:')

a = int(a)
b = int(b)

proba = probaparti(a,b)
print(proba)
```

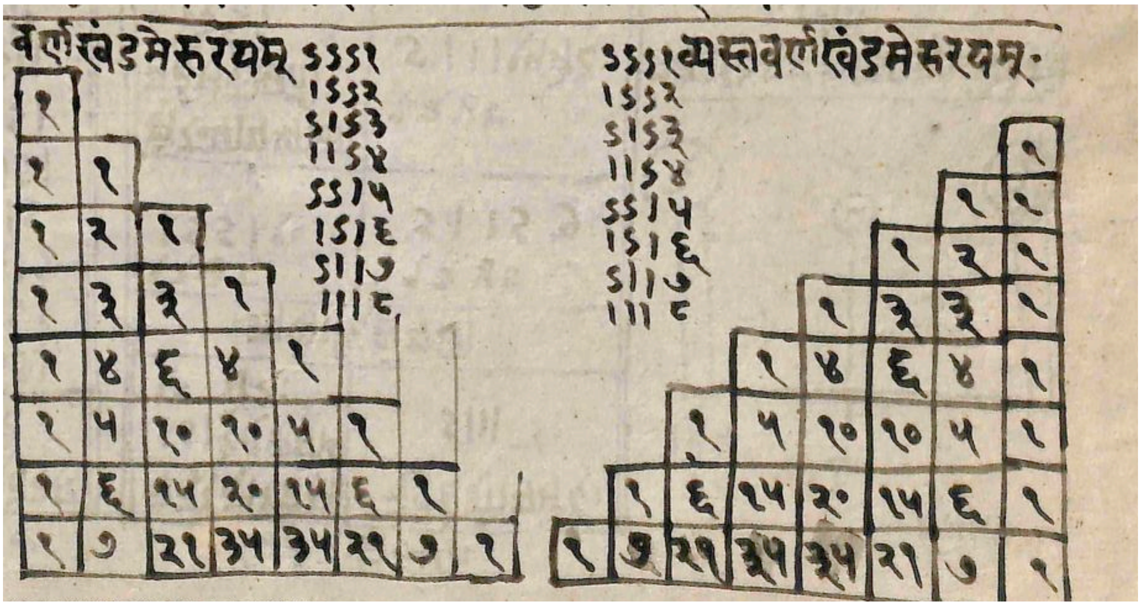
L'instruction val-dict = dict() établit un lien entre la « clé » (ici, le couple d'entiers (a, b)) et la valeur calculée pour ce couple (ici la valeur $probaparti(a, b)$). Avant l'appel récursif, on regarde si la valeur du couple est déjà dans le dictionnaire et, dans ce cas, on renvoie la valeur déjà calculée, sinon on effectue l'appel récursif, le processus continue, et, dès qu'une valeur est renvoyée, on la met dans le dictionnaire. En éliminant ainsi les calculs redondants, on gagne évidemment beaucoup en temps de calcul : pour le couple (15,25), le résultat est immédiat avec ce nouvel algorithme. C'est le cas également avec le couple (300,301).

Par contre, on utilise plus de mémoire ; la complexité en espace de mémoire est donc plus importante. On n'a par ailleurs rien gagné sur le problème de la hauteur de l'arbre, qui est un problème propre au langage, et nous aurons toujours des messages « RecursionError » pour le couple (500,501) ou tout couple pour lequel la hauteur de l'arbre dépasse

1000. Enfin, même si le gain en temps de calcul est amélioré, rechercher une valeur dans le dictionnaire coûte en temps de calcul. Pour améliorer ce dernier point, on peut construire l'arbre complet ligne à ligne ; comme on l'a déjà remarqué, pour chaque ligne de l'arbre, la somme $a+b$ est fixe. On peut construire cet arbre avec une fonction récursive, mais nous aurons alors toujours le même problème de « RecursionError » avec le langage Python. Or toute fonction récursive peut s'écrire avec une boucle. Nous donnons ci-dessous un algorithme permettant de calculer toutes les rangées de l'arbre, ligne par ligne, la variable *sum* étant la somme $a+b$, qui est un « invariant » de la ligne. L'algorithme calcule la probabilité de gagner du joueur A lorsqu'il manque a points à A et b points à B, en faisant varier la somme $a+b$ de 3 à $a+b$ et range dans un dictionnaire (*tree*) toutes les valeurs obtenues pour une somme donnée au cours du calcul (appelées *tree*$[(x,y)]$ dans l'algorithme ci-dessous).

```
 8
 9 def probaparti(a,b):
10
11     if a<0 or b<0 or (a==0 and b==0):
12         print('Mauvaises entrées')
13
14         return -1
15
16     elif a==0:
17         return 1
18     elif b==0:
19         return 0
20     elif a==b:
21         return 0.5
22     else:
23         tree = dict()
24         tree[(1,1)] = 0.5
25         for sum in range (3, a+b+1):
26             tree[(sum-1, 1)] = 0.5 * tree[(sum-2, 1)]
27             tree[(1, sum-1)] = 1.0 - tree[(sum-1, 1)]
28             for x in range (2, sum-1):
29                 y = sum - x
30                 r = 0.5 * tree[(x-1, y)] + 0.5 * tree[(x, y-1)]
31                 tree[(x, y)] = r
32         return tree[(a, b)]
33
34 a = input('Tapez le nombre a:')
35 b = input('Tapez le nombre b:')
36
37 a = int(a)
38 b = int(b)
39 proba = probaparti(a,b)
40 print(proba)
41
```

Regardons cet algorithme en détail : si $a=0$ ou $b=0$ ou $a=b$, l'algorithme renvoie directement les valeurs connues de $\mathrm{P}(a,\, b)$ (lignes 16 à 21). Dans les autres cas, on construit un dictionnaire appelé *tree*, dans lequel on va stocker les valeurs $\mathrm{P}(x,\, y)$ de toutes les lignes de l'arbre, pour les sommes $x+y$ allant de 3 à $a+b$ (il est inutile de calculer ces valeurs pour la somme 2, pour laquelle les seuls couples d'entiers sont (2,0), (1,1) et (0,2)). Rappelons que, dans le langage Python, l'instruction « for *sum* in range $(3,\, a+b+1)$ fait prendre à la variable *sum* les valeurs entières n vérifiant $3 \leq n \leq a+b$. On stocke dans le dictionnaire la valeur $\mathrm{P}(1{,}1) = 0.5$ (ligne 24), puis on construit l'arbre des valeurs de $\mathrm{P}(x,\, y)$. Lorsque la variable *sum* prend la valeur n, on commence par ranger dans le dictionnaire les valeurs $\mathrm{P}(n-1{,}1)$ et $\mathrm{P}(1{,}n-1)$, puis on fait varier x de 2 à $n-2$, on calcule $\mathrm{P}(x, n-x)$ et on le range dans le dictionnaire : on a ainsi stocké toutes les valeurs $\mathrm{P}(x,\, y)$ telles que $x+y=n$, avec $1 \leq x \leq n-1$. Le calcul de $\mathrm{P}(x, n-x)$ pour $2 \leq x \leq n-2$ a nécessité les valeurs $\mathrm{P}(x-1, n-x)$ et $\mathrm{P}(x, n-1-x)$ où $1 \leq x-1 \leq n-3$, qui avaient été calculé pour l'étape précédente, lorsque *sum* était égale à $n-1$. On peut remarquer que, lorsque *sum*$=3$, on



triangle des coefficients binomiaux pingala

Manuscrit de la bibliothèque de Raghunath J&K ; 755 après J.-C.

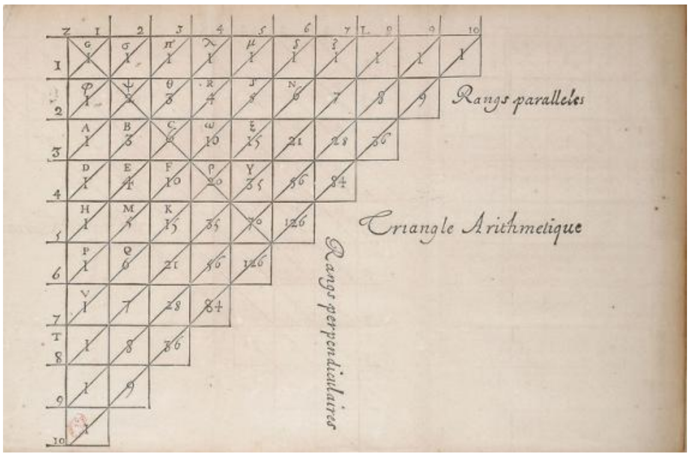
https://archive.org/details/PrakritPingalaPrastaraVarnaMatraPatakadiYantrani775GhaAlm4Shlf3DevanagariAlankarShastra/page/n10/mode/1up calcule et on stocke P(2,1) et P(1,2), mais on n'entre pas dans la boucle pour la variable x, car, pour $n = 3$, $n - 2 < 2$. Ainsi, on a calculé toutes les valeurs de P(x, y) telles que $x + y \leq a + b$, donc on a, en particulier, calculé P(a,b).

Cette fois-ci, on obtient immédiatement le résultat pour le couple (500,501) : 0.5126125090891802 (évidemment très proche de 0.5). Vous trouverez dans la rubrique « Dans nos classes » un problème qu'on peut proposer à des élèves de terminale générale ayant choisi la spécialité mathématique, qui permet d'aborder la récursivité et les problèmes de complexité en temps et en espace. Le programme suggère d'implémenter un algorithme permettant de construire le triangle arithmétique de Pascal, ce qui peut se faire de la même manière que pour construire l'arbre ci-dessus. Ce programme optimise le temps de calcul, mais, par contre, nécessite beaucoup d'espace mémoire et peut éventuellement poser des problèmes pour de très grandes valeurs des deux variables, si le programme utilisait toute la mémoire disponible de votre ordinateur ; l'OS peut décider de tuer un processus qui consomme trop de mémoire, mais cela ne fonctionne pas toujours. Nous vous conseillons donc la prudence avec ces programmes quant au choix des valeurs de (a, b). On peut cependant résoudre ce problème de mémoire. En effet, ce programme consomme beaucoup de mémoire car à la fin de son exécution, il a en mémoire (dans le dictionnaire *tree*) toutes les valeurs de l'arbre. Mais ce n'est pas nécessaire : pour calculer une nouvelle ligne de l'arbre, il n'a besoin que de la ligne précédente. Vous trouverez sur le site de l'IREM une version du programme qui résout le problème de consommation mémoire : au lieu d'utiliser un dictionnaire qui va contenir tout l'arbre, il utilise un nouveau dictionnaire pour chaque ligne. À chaque itération de la boucle principale sur *sum*, on ne garde en mémoire que deux dictionnaires, celui qui contient les valeurs de la ligne actuelle, et celui de la ligne précédente. Les dictionnaires construits par les autres itérations ne sont plus en mémoire. Cette version résout uniquement le problème de consommation mémoire, mais n'est pas plus rapide.

Le *Triangle Arithmétique*

La définition du Triangle

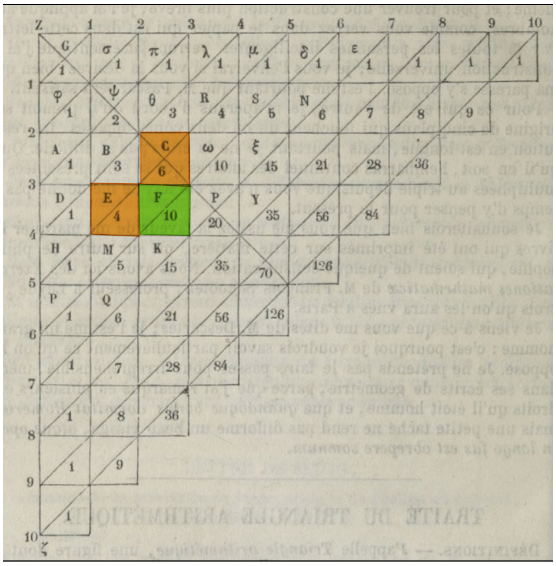
La figure provient du site de la BNF :



Blaise Pascal, *Traité du triangle arithmétique*, Paris, 1665. © B.N.F.
http://expositions.bnf.fr/pascal/grand/bla_070.htm

Les petits carrés sont des *cellules*, les *rangs parallèles* sont les lignes horizontales de cellules, les *rangs perpendiculaires* sont les lignes verticales, les nombres au-dessus du triangle s'appellent les *exposants* des rangs perpendiculaires et ceux à gauche du triangle les *exposants* des rangs parallèles, les « diagonales » sont les *bases* (comme par exemple les cellules contenant D, B, θ, λ, qui forment la quatrième base).

Le nombre de la première cellule est *a priori* arbitraire et s'appelle le *générateur* du triangle, mais, dans la pratique, les différents usages du triangle arithmétique utilisent le générateur 1, et les propriétés sont énoncées avec ce même générateur égal à l'unité, avec un commentaire sur ce que devient la propriété pour un générateur différent. Nous nous limiterons dans cet article aux propriétés et usages du triangle de générateur 1.



Génération du triangle

> « Le nombre de chaque cellule est égal à celui de la cellule qui la précède dans son rang perpendiculaire, plus à celui de la cellule qui la précède dans son rang parallèle. »

Exemple : F = E + C

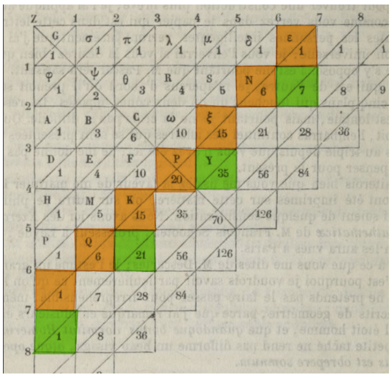
Quelques propriétés du triangle arithmétique

Pascal donne ensuite les conséquences de la génération du triangle, en appelant plus simplement cellule « le nombre de la cellule ». Par exemple, les cellules des premiers rangs parallèle et perpendiculaire sont toutes égales au générateur, Pascal considérant que, lorsqu'une cellule n'a pas de cellule qui la précède, on ajoute 0 au lieu de la celllule précédente. Chaque cellule est égale à sa réciproque (obtenue en échangeant les exposants des rangs parallèle et perpendiculaire). Les justifications sont données pour un exemple générique. Nous donnons ci-dessous les conséquences utilisées plus loin par Pascal, en utilisant un coloriage des cellules[10] pour faciliter la compréhension.

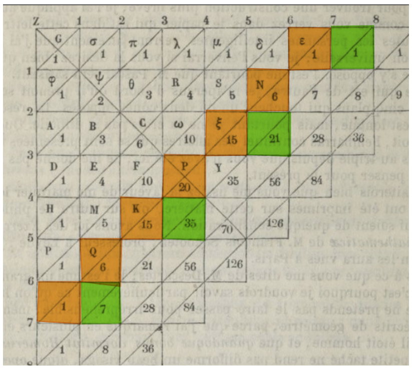
« *Conséquence septième*

[...] la somme des cellules de chaque base est double de celles de la base précédente »

10. Les coloriages ne sont pas dans le texte original.



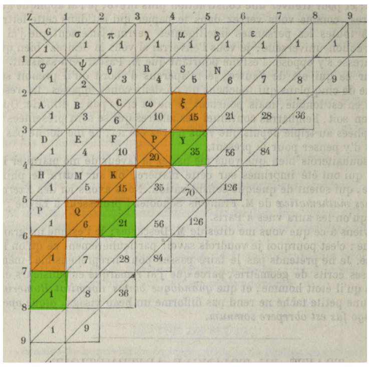
Somme des cellules oranges = somme des cellules vertes



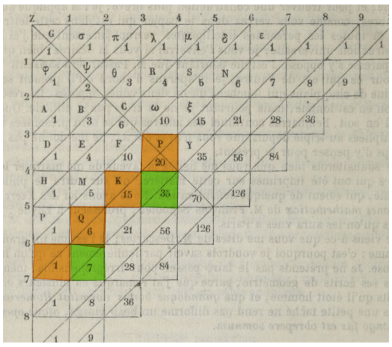
Somme des cellules oranges = somme des cellules vertes

Finalement, la somme des cellules de la base formée des cellules vertes est le double de la somme des cellules de la base formée des cellules oranges, c'est-à-dire de celles de la base précédente.

> « *Conséquence dixième*
>
> [...] la somme de tant de cellules continues qu'on voudra de sa base, à commencer par une extrémité, est égale à autant de cellules de la base précédente, plus encore à autant hormis une. »



Somme des cellules oranges = somme des cellules vertes



Somme des cellules oranges = somme des cellules vertes

Finalement la somme des b premières cellules de la $(n-1)^{\text{e}}$ base plus la somme des b–1 premières cellules de la $(n-1)^{\text{e}}$ base est égale à la somme des b premières cellules de la n^{e} base.

> « *Conséquence douzième*
>
> [...] deux cellules contiguës étant dans une même base, la supérieure est à l'inférieure comme la multitude des cellules depuis la supérieure jusques au haut de la base à la multitude de celles depuis l'inférieure jusques en bas inclusivement. »

Pascal donne l'exemple des cellules E et C, contiguës dans la 5$^{\text{e}}$base : E est à C comme 2 à 3 (autrement dit $\frac{E}{C}=\frac{2}{3}$) , car il y a deux cellules depuis E, la cellule inférieure, jusqu'en bas de la base (cellules E et H) et trois cellules depuis C (la cellule supérieure) jusqu'en haut de la base (cellule C, R, μ). Pascal explique le principe de la démonstration :

> « Quoique cette proposition ait une infinité de cas, j'en donnerai une démonstration bien courte, en supposant deux lemmes.
>
> Le 1$^{\text{er}}$, qui est évident de soi-même, que cette proportion se rencontre dans la seconde base ; car il est bien visible que φ est à σ comme 1 est à 1.
>
> Le 2$^{\text{e}}$, que si cette proportion se trouve dans une base quelconque, elle se trouvera nécessairement dans la base suivante.
>
> D'où il se voit qu'elle est nécessairement dans toutes les bases : car elle est dans la seconde base par le premier lemme ; donc par le second elle est dans la troisième base, donc dans la quatrième, et à l'infini. »

On voit là très clairement posé le principe de la démonstration par récurrence. Le deuxième lemme est démontré sur un exemple générique.

> « Il faut donc seulement démontrer le second lemme, en cette sorte. Si cette proportion se rencontre en une base quelconque, comme en la quatrième Dλ, c'est-à-dire si D est à B comme 1 à 3, et B à θ comme 2 à 2, et θ à λ comme 3 à 1, etc. ;
>
> Je dis que la même proportion se trouvera dans la base suivante, Hμ, et que, par exemple, E est à C comme 2 est à 3. Car D est à B comme 1 à 3, par l'hypothèse.
>
> Donc $\underbrace{D+B}_{E}$ est à B comme $\underbrace{1+3}_{4}$ est à 3 [c'est-à-dire E est à B comme 4 à 3].
>
> De même B est à θ comme 2 à 2, par l'hypothèse.
>
> Donc $\underbrace{B+\theta}_{C}$ est à B comme $\underbrace{2+2}_{4}$ à 2 [c'est-à-dire C à B comme 4 à 2].
>
> Mais B à E comme 3 à 4, comme il est montré.
>
> Donc, par la proportion troublée, C est à E comme 3 à 2.

Ce qu'il fallait démontrer.

On le montrera de même dans tout le reste, puisque cette preuve n'est fondée que sur ce que cette proportion se trouve dans la base précédente, et que chaque cellule est égale à sa précédente, plus à sa supérieure, ce qui est vrai partout. » [11]

Il est facile, avec des notations modernes, de montrer ce deuxième lemme de manière tout à fait générale. Considérons deux cellules contiguës de la $(n+1)^e$ base, c_k et c_{k+1}, de rangs parallèles respectifs k et $k+1$. On a : $c_k = b_k + b_{k-1}$ et $c_{k+1} = b_{k+1} + b_k$ où, b_{k-1}, b_k, b_k sont trois cellules contiguës de la n^e base, de rangs parallèles respectifs, $k-1$, k et $k+1$. L'hypothèse de récurrence assure $\frac{b_k}{b_{k-1}} = \frac{n-k+1}{k-1}$ et $\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{n-k}{k}$. Donc, $\frac{b_{k-1}}{b_k} = \frac{k-1}{n-k+1}$; on en déduit : $\frac{b_{k-1}+b_k}{b_k} = \frac{k-1+n-k+1}{n-k+1} = \frac{n}{n-k+1}$, c'est-à-dire $\frac{c_k}{b_k} = \frac{n}{n-k+1}$. De même $\frac{b_{k+1}+b_k}{b_k} = \frac{k+n-k}{k} = \frac{n}{k}$, c'est-à-dire $\frac{c_{k+1}}{b_k} = \frac{n}{k}$. On en tire alors $\frac{c_k}{c_{k+1}} = \frac{c_k}{b_k} \times \frac{b_k}{c_{k+1}} = \frac{k}{n-k+1} = \frac{k}{(n+1)-k}$. Ce qui assure l'hérédité.

Cette conséquence douzième permet à Pascal de résoudre le problème consistant à déterminer le nombre d'une cellule à l'aide des exposants k et l des rangs parallèle et perpendiculaire, sans utiliser le Triangle arithmétique. En effet, la cellule considérée c_k est alors la cellule de rang parallèle k de la n^e base, avec $n = k+l-1$. On a donc : $\frac{c_k}{1} = \frac{c_k}{c_n} = \frac{c_k}{c_{k+1}} \times \frac{c_{k+1}}{c_{k+2}} \times \ldots \times \frac{c_{k+l-2}}{c_n} = \frac{k}{n-k} \times \frac{k+1}{n-k-1} \times \frac{k+2}{n-k-2} \times \ldots \times \frac{k+l-2}{1} = \frac{k\times(k+1)\times\ldots\times(k+l-2)}{(l-1)\times(l-2)\times\ldots\times 1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\times(l-1)!}$ avec $n-1 = (k-1)+(l-1)$.

Les combinaisons dans le *Traité du Triangle Arithmétique*

Pascal donne « divers usages du triangle arithmétique », le second usage s'appliquant aux combinaisons. Il donne une définition des combinaisons :

> « Lorsque de plusieurs choses, on donne le choix d'un certain nombre, toutes les manières d'en prendre autant qu'il est permis entre toutes celles qui sont présentées s'appellent ici *les différentes combinaisons*.
>
> Par exemple, si de quatre choses exprimées par ces quatre lettres, on permet d'en prendre, par exemple, deux quelconques, toutes les manières d'en prendre deux différentes dans les quatre qui sont proposées s'appellent *Combinaisons*.
>
> Ainsi on trouvera, par expérience, qu'il y a six manières différentes d'en choisir deux dans quatre ; car on peut prendre A et B, ou A et C, ou A et D, ou B et C, ou B et D, ou C et D.
>
> Je ne compte pas A et A pour une des manières d'en prendre deux ; car ce ne sont pas des choses différentes, ce n'en est qu'une répétée.
>
> Ainsi, je ne compte pas A et B puis B et A pour deux manières différentes ; car on ne prend en l'une et l'autre manière que les deux mêmes choses, mais d'un ordre différent seulement ; et je ne prends point garde à l'ordre ; de sorte que je pouvais m'expliquer en un mot, en disant simplement que je parle seulement des combinaisons qui se font sans changer l'ordre ». [12]

Puis il démontre sur un exemple générique la relation de récurrence sur ces combinaisons. Ce que Pascal nomme la multitude des combinaisons d'un nombre k dans un nombre n est ce que nous notons $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$.

---

11. Pascal B., *Œuvres complètes*, tome II, texte présenté, établi et annoté par Jean Mesnard, Desclée de Brouwer, 1970, Ré-édition Alençon, 1990, p. 1294-1295.

12. Pascal B., *Œuvres complètes*, tome II, texte présenté, établi et annoté par Jean Mesnard, Desclée de Brouwer, 1970, Ré-édition Alençon, 1990, p. 1302.

« *Lemme 4*

S'il y a quatre nombres quelconques, le premier tel qu'on voudra, le second plus grand de l'unité, le troisième tel qu'on voudra, pourvu qu'il ne soit pas moindre que le second, le quatrième plus grand de l'unité que le troisième : la multitude des combinaisons du premier dans le troisième, jointe à la multitude des combinaisons du second dans le troisième, égale la multitude des combinaisons du second dans le quatrième.

Soient quatre nombres tels que j'ai dit :

Le premier tel qu'on voudra, par exemple : 1.

Le second plus grand de l'unité, savoir 2.

Le troisième tel qu'on voudra, pourvu qu'il ne soit pas moindre que le second, par exemple, 3.

Le quatrième plus grand de l'unité, savoir, 4.

Je dis que la multitude des combinaisons de 1 dans 3, plus la multitude des combinaisons de 2 dans 3, égale la multitude des combinaisons de 2 dans 4. Soient trois lettres quelconques, B, C, D. Soient les mêmes trois lettres, et une de plus, A, B, C, D.

[...] Il faut démontrer que la multitude des combinaisons de 1 dans 3 et celles de 2 dans 3 égalent celles de 2 dans 4.

Cela est aisé, car les combinaisons de 2 dans 4 sont formées par les combinaisons de 1 dans 3, et par celles de 2 dans 3.

Pour le faire voir, il faut remarquer qu'entre les combinaisons de 2 dans 4, savoir, AB, AC, AD, BC, BD, CD, il y en a où la lettre A est employée, et d'autres où elle ne l'est pas. Celles où elle n'est pas employée sont BC, BD, CD, qui par conséquent sont formées de deux de ces trois lettres, B, C, D ; donc ce sont des combinaisons de 2 dans ces trois, B, C, D. Donc les combinaisons de 2 dans ces trois lettres B, C, D, font portion des combinaisons de 2 dans ces quatre lettres, A, B, C, D, puisqu'elles forment celles où A n'est pas employée.

Maintenant si des combinaisons de 2 dans 4 est employée, savoir AB, AC, AD, on ôte l'A, il restera une lettre seule dans les trois, B, C, D seulement de ces trois B, C, D, savoir, B, C, D, qui sont précisément les combinaisons d'une lettre dans les trois, B, C, D. Donc si aux combinaisons d'une lettre dans les trois, B, C, D, on ajoute à chacune la lettre A, et qu'ainsi on ait AB, AC, AD, on formera les combinaisons de 2 dans 4, où A est employée ; donc les combinaisons de 1 dans 3 font portion des combinaisons de 2 dans 4.

D'où il se voit que les combinaisons de 2 dans 4 sont formées par les combinaisons de 2 dans 3, et de 1 dans 3 ; et partant que la multitude des combinaisons de 2 dans 4 égale celle de 2 dans 3, et de 1 dans 3.

On montrera la même chose dans tous les autres exemples [...] » [13]

Pascal fait ensuite le lien avec le triangle arithmétique, avec deux propositions dont la deuxième affirme :

> « Le nombre de quelque cellule que ce soit égale la multitude des combinaisons d'un nombre moindre de l'unité que l'exposant de son rang parallèle, dans un nombre moindre de l'unité que l'exposant de sa base ».

Autrement dit, le nombre de la cellule de rang parallèle k dans la n^e base est le nombre de combinaisons de $k-1$ dans $n-1$, ce qui ne nous surprend pas après la formule démontrée plus haut pour ce nombre. Nous ne donnons pas la démonstration de cette propriété,

13. Pascal B., *Œuvres complètes*, tome II, texte présenté, établi et annoté par Jean Mesnard, Desclée de Brouwer, 1970, Ré-édition Alençon, 1990, P. 1304-1305.

que Pascal démontre comme conséquence d'une propriété sur la somme des cellules d'un même rang parallèle. On pourrait la montrer tout simplement en utilisant le mode de génération du triangle et la relation de récurrence sur les combinaisons. Mais l'utilisation pédagogique de cette justification paraît difficile ; certes, la formule pour les combinaisons est au programme de la spécialité de terminale générale, mais le programme demande de donner deux démonstrations de la relation de récurrence sur les combinaisons, l'une utilisant la définition des combinaisons, comme l'a fait Pascal sur un exemple générique, l'autre utilisant la formule de calcul des combinaisons : il ne serait donc guère cohérent de démontrer la formule en utilisant cette même relation de récurrence !

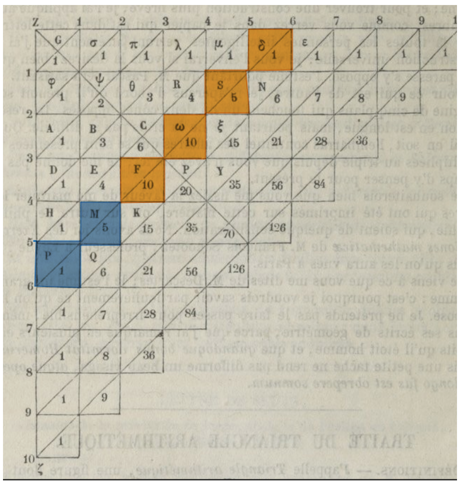
Problème des partis et triangle arithmétique

Rappel du principe de partage des mises

Rappelons le corollaire second sur le partage des mises lorsque les deux joueurs doivent arrêter le jeu lorsque'il manque un certain nombre de parties à chacun pour achever le jeu : « Si deux joueurs sont en la même condition qu'on vient de dire, je dis que le parti se peut faire de cette façon qui revient au même ; que l'on assemble les deux sommes de gain et de perte, et que le premier prenne la moitié de cette somme ; [...] ». Pascal explicite ce corollaire dans un lemme, en précisant que, s'il appartient à un joueur une certaine fraction (disons α) de la mise totale s'il gagne la partie, et une fraction moindre (β) s'il la perd, ce joueur doit emporter la fraction $\frac{\alpha+\beta}{2}$ de la mise totale. Pascal explique même comment prendre la demi-somme de deux fractions réduites au même dénominateur. Il est clair pour nous que ces fractions α et β sont les probabilités que le joueur gagne le jeu dans les cas où il gagne ou perd la partie suivante, si elle était jouée.

Lien avec le triangle arithmétique

Pascal donne la solution générale au problème, et donne des exemples pour faire comprendre ce calcul. Prenons le premier exemple de Pascal : il manque 2 parties à A et 4 parties à B. La mise totale est M. On considère la 6e base, car 6 est la somme des nombres de parties qui manquent à chacun des joueurs.

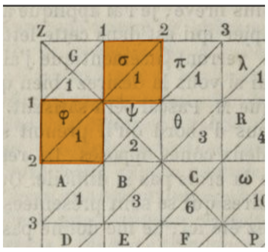


Règle de partage

A emporte la fraction suivante de la mise M : $\frac{F+\omega+S+\delta}{P+M+F+\omega+S+\delta}$, c'est-à-dire la fraction dont le numérateur est la somme des 4 cellules du « haut » de la base (4 étant le nombre de parties qui manquent au joueur A) et le dénominateur la somme de toutes les cellules de la base. Le joueur B emporte la fraction $\frac{P+M}{P+M+F+\omega+S+\delta}$.

D'une manière générale, s'il manque a points à A et b points à B, avec $n = a + b$, le « parti » est donné par la n^e base : la fraction de la mise totale qu'emporte A a pour numérateur la somme des b cellules « du haut » (ou par symétrie du triangle des b cellules du bas) et pour dénominateur la somme de toutes les cellules de la base. La démonstration se fait par récurrence sur n.

> « Quoique cette proposition ait une infinité de cas, je la démontrerai néanmoins en peu de mots par le moyen de deux lemmes.
>
> Le 1er, que la seconde base contient les partis des joueurs auxquels il manque deux parties en tout.
>
> Le 2^e, que si une base quelconque contient les partis de ceux auxquels il manque autant de parties que de cellules, la base suivante sera de même, c'est-à-dire qu'elle contiendra aussi les partis des joueurs auxquels il manque autant de parties qu'elle a de cellules.
>
> D'où je conclus, en un mot, que toutes les bases du Triangle arithmétique ont cette propriété : car la seconde l'a par le premier lemme ; donc, par le second lemme, la troisième l'a aussi, et par conséquent la quatrième ; et à l'infini.
>
> Il faut donc seulement démontrer ces deux lemmes.
>
> Le 1er est évident de lui-même ; car s'il manque une partie à l'un et une à l'autre, il est évident que leurs conditions sont comme φ à σ, c'est-à-dire comme 1 à 1, et qu'il appartient à chacun cette fraction :$\frac{\sigma}{\varphi+\sigma}$ qui est $\frac{1}{2}$ ».



Cas où $a + b = 2$

Pascal ne considère qu'un cas pour la somme $a + b = 2$, car il ne considère pas les cas évidents où $a = 0$ ou $b = 0$, qu'il a donnés dans son premier exemple, après ses principes, exemple qu'il juge « peut-être mal à propos de toucher, parce qu'il est trop clair ; [...] Si à un des joueurs il ne manque aucune partie, et à l'autre quelques-unes, la somme entière appartient au premier ».

Le deuxième lemme est prouvé sur l'exemple générique du passage de la quatrième base à la cinquième, en montrant que « s'il manque, par exemple, deux parties au premier, et trois à l'autre, la portion qui appartient au premier sur la somme qui se joue, est exprimée par cette fraction : $\frac{H+E+C}{H+E+C+R+\mu}$ » avec l'« hypothèse de récurrence » : la quatrième base donne la portion appartenant au premier joueur quand la somme du nombre de parties manquantes est 4 ; en particulier, s'il manque 1 partie au premier joueur et 3 au second joueur, la portion de la mise totale revenant au premier est $\frac{D+B+\theta}{D+B+\theta+\lambda}$ et s'il manque 2 parties à l'un et 2 à l'autre, la fraction qui appartient au premier est $\frac{D+B}{D+B+\theta+\lambda}$ (autrement dit ici $\frac{1}{2}$).

Pour calculer la part qui revient au premier joueur (A) s'il manque 2 parties au premier et 3 au second, rappelons le principe vu plus haut : on doit faire la demi-somme des fractions qui lui appartiennent en cas de gain et en cas de perte. Or, en cas de gain de la partie suivante, il manquera 1 partie au premier et 3 au second, donc A emportera la fraction $\alpha = \frac{D+B+\theta}{D+B+\theta+\lambda}$ et, en cas de perte, il manquera 2 partie au premier et 2 au second, donc A emportera la fraction $\beta = \frac{D+B}{D+B+\theta+\lambda}$. Donc, la part que nous cherchons est $\frac{\alpha+\beta}{2}$, soit $\frac{D+B+\theta+D+B}{2(D+B+\theta+\lambda)}$. Or, le double de la somme des cellules de la quatrième base est la somme des cellules de la cinquième base, donc $2(D+B+\theta+\lambda) = H+E+C+R+\mu$ et $D+B+\theta+D+B = H+E+C$ par la conséquence dixième. Ce qui montre bien que la fraction de la mise totale que doit remporter A est $\frac{H+E+C}{H+E+C+R+\mu}$. Pascal fait remarquer que « le fondement de cette preuve est qu'une base est toujours double de sa précédente, par la 7e conséquence » combinée avec la 10e conséquence.

On peut écrire le raisonnement sur le cas général. Supposons qu'il manque a points à A et b points à B, avec $n = a + b$. Si A gagne la partie suivante, il lui manquera alors $a - 1$ parties, et toujours b à B. L'hypothèse de récurrence nous affirme que la fraction emportée par A se trouve dans la $(n-1)^e$ base, avec comme numérateur la somme des b premières cellules. Si au contraire A perd, il lui manquera toujours a parties, mais $b-1$ seulement à B. Cette fois, la fraction emportée par A se trouve dans la $(n-1)^e$ base, avec comme numérateur la somme des $b-1$ premières cellules. Et nous avons vu que la septième conséquence et la dixième conséquence permettent de justifier que la demi-somme de ces deux fractions est la fraction dont le numérateur est la somme des numérateurs, et le dénominateur le double du dénominateur commun. Le dénominateur est donc le double de la somme des cellules de la $(n-1)^e$ base, qui est la somme des cellules de la n^e base. Le numérateur est, quant à lui, la somme des b premières cellules de la $(n-1)^e$ base plus la somme des $b-1$ premières cellules de la $(n-1)^e$ base. On a vu que cette somme est égale à la somme des b premières cellules de la ne base. Ce qui termine la récurrence.

Ce raisonnement sur le triangle est sans doute moins utilisable en classe. Il paraît plus simple pour nous d'utiliser tout simplement les combinaisons pour obtenir des formules générales, en raisonnant, comme le fait Fermat dans sa correspondance avec Pascal, sur le nombre maximum de parties qu'il resterait à jouer pour que « le jeu soit décidé absolument ». En effet, s'il manque a points à A et b points à B, le jeu sera décidé en au plus $a+b-1$ parties. Le nombre total d'issues possibles de ces $a+b-1$parties est 2^{a+b-1}et le nombre d'issues favorables à A est le nombre de ces issues pour lesquelles A gagne au moins a parties sur ces $a+b-1$ parties, c'est-à-dire, avec nos notations modernes, $\begin{pmatrix} a \\ a+b-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a+1 \\ a+b-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a+2 \\ a+b-1 \end{pmatrix} + ... + \begin{pmatrix} a+b-1 \\ a+b-1 \end{pmatrix}$. Ces résultats généraux permettent à Pascal de s'intéresser à d'autres problèmes sur ces répartitions de mise (*Mnémosyne* n°6).

Conclusion

La lecture des textes de Pascal amène ainsi à des réflexions sur des problèmes divers, qui croisent des thèmes importants pour notre enseignement, qu'il s'agisse de probabilités par le biais du partage des mises, d'algorithmique par la méthode de Pascal, du principe de récurrence ou des problèmes de complexité en mémoire ou en temps en informatique. Il nous paraît intéressant d'aborder un problème aussi riche avec les élèves, d'autant plus que la plupart des exercices d'algorithmique en probabilités ne sont que des exercices de simulation, alors qu'ici, nous avons un algorithme récursif de calcul des probabilités, dont la version « naïve » est tout à fait accessible à nos élèves. Un travail bidisciplinaire entre collègues de mathématiques et d'informatique enrichirait les deux disciplines, du moins si la structure des groupes de spécialité permet un tel échange.

Remerciements

Nous remercions Antoine Meyer [14], qui nous a initiées à l'algorithmique dans le groupe « Algorithmique » de l'IREM de Paris-Diderot, et nous a le premier parlé des problèmes de complexité qui surgissent lors de l'implémentation de l'algorithme de Pascal, lors d'une séance de lecture des écrits de Pascal. Nous n'avions pas alors creusé ces questions, la connaissance d'aucun langage de programmation n'étant à ce moment exigible pour les élèves. Nous avons repris ce texte après les changements de programmes de 2019, demandant explicitement aux collègues de mathématiques de faire programmer les élèves en Python, et nous sommes penchées sur l'écriture des algorithmes en Python et les problèmes rencontrés lors de l'exécution des programmes. Nous remercions Pauline Brunet [15] pour son aide à l'écriture des programmes et David Bühler [16] pour avoir répondu à nos questions sur l'exécution de ces programmes.

Très brève bibliographie

Articles

Coumet, E. « Le problème des partis avant Pascal », In *Archives Internationales d'histoire des Sciences*, 18/73, 1965, pp245-272.
http://www.jehps.net/Juin2007/Coumet_partis.pdf

Guillemot M., « Le triangle arithmétique à travers les âges », *Bulletin Vert* n°416, Paris, 1998, p. 351-362.https://www.apmep.fr/IMG/pdf/AAA98031.pdf

Henry M. « Simulations d'expériences aléatoires en classe. Un enjeu didactique pour comprendre la notion de modèle probabiliste, un outil de résolution de problèmes. » In *Bulletin de l'APMEP*. N° 496. p. 536-550, APMEP, Paris, 2011.

Legrand P. « La récurrence au fil des siècles. », In *Bulletin de l'APMEP*. N°506. p. 600-610, APMEP, Paris, 2013.
http://numerisation.univ-irem.fr/AAA/AAA13070/AAA13070.pdf

Meunier N. « Le problème des partis avant Pacioli », In *Histoire de probabilités et de statistiques*, Commission Inter-IREM d'Épistémologie et d'Histoire des mathématiques, Ellipses, Paris, 2004.

Textes originaux

Fermat P. *Œuvres*, publiées par P. Tannery et C. Henry, tome II, Gauthier-Villars, Paris, 1894. Disponible sur gallica.bnf.fr

Pascal B., *Œuvres complètes*, tome II, texte présenté, établi et annoté par Jean Mesnard, Desclée de Brouwer, 1970.

14. Maître de conférences à l'Université Paris-Est, responsable du groupe « algorithmique » de l'IREM Paris-Diderot.
15. Chercheuse au Laboratoire d'Intégration des Systèmes et des Technologies du C.E.A.
16. Chercheur au Laboratoire d'Intégration des Systèmes et des Technologies du C.E.A.

PASCAL B., *Œuvres complètes*, Tome III, Physique et mathématique, Hachette, Paris, 1869-1872. Disponible sur gallica.bnf.fr.

Documents pour la classe du groupe M. : A.T.H.

La rubrique « Dans nos classes » de ce numéro présente des activités pour la classe autour de la solution de Pascal au problème des partis, et vous trouverez également des compte-rendus de séances en classe sur les probabilités dans les références ci-dessous.

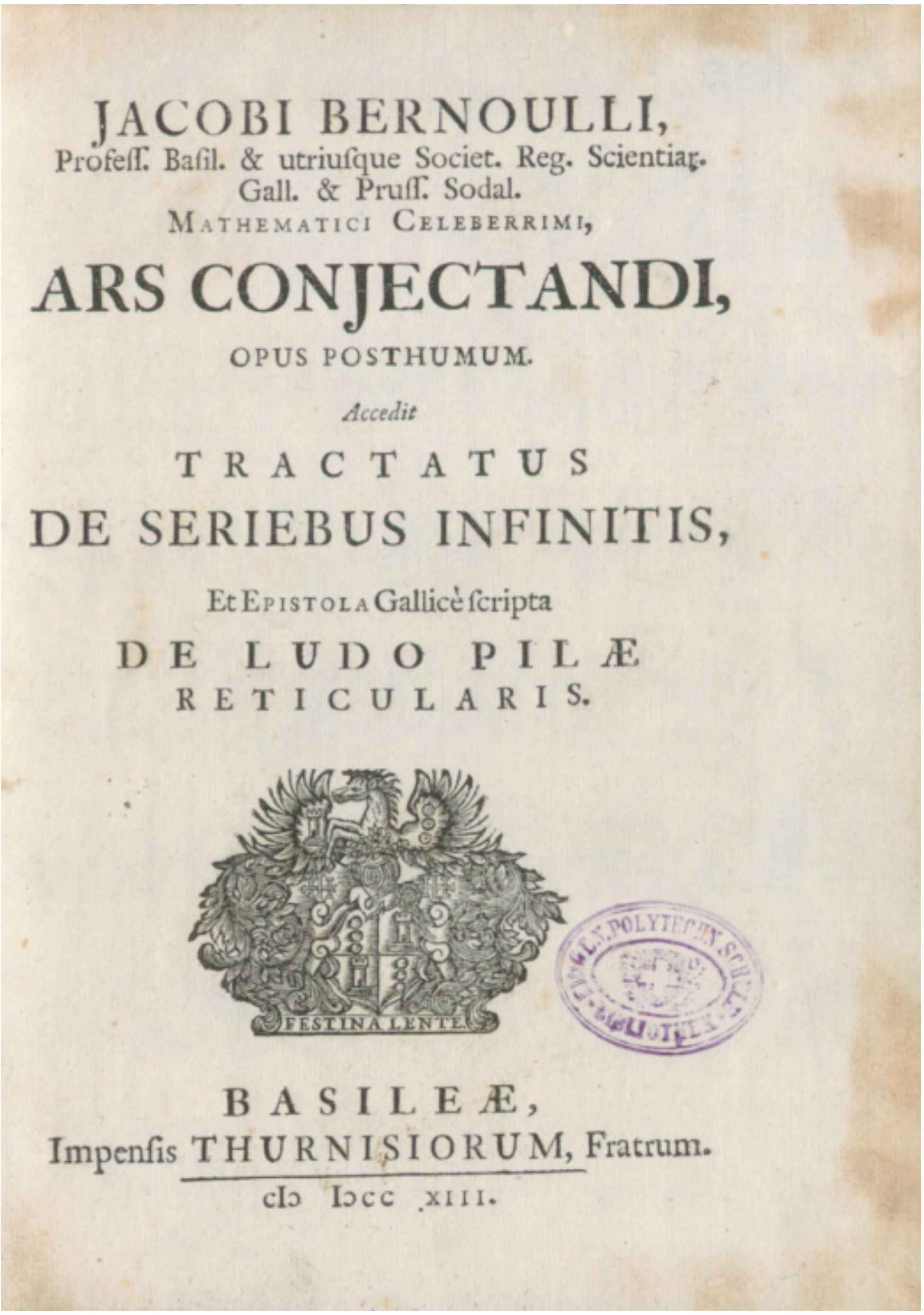
Brochures (disponibles en ligne sur la page du groupe, site de l'IREM de Paris Diderot) : les pages citées ci-dessous comportent des extraits de textes et les énoncés donnés aux élèves.

Brochure M. : A.T.H. n° 61 de l'IREM Paris : Extrait du *Triangle arithmétique* de Pascal et extrait d'un texte de Montmort (pp 83-94) ; le problème des partis de Pacioli à Pascal et Fermat (pp 99-147).

Brochure M. : A.T.H. n° 79 de l'IREM Paris : Extrait du *Triangle arithmétique* de Pascal (pp 99-106).

Revue *Mnémosyne* du groupe M. : A.T.H. n°6 : une généralisation du problème des partis avec un texte de Pascal (pp. 15-24).

Dossier « Utilisation de l'histoire des mathématiques en probabilités » du groupe M. : A.T.H.
https://irem.u-paris.fr/utilisation-de-lhistoire-des-mathematiques-en-probabilites



JACOBI BERNOULLI,
Profess. Basil. & utriusque Societ. Reg. Scientiar.
Gall. & Pruss. Sodal.
MATHEMATICI CELEBERRIMI,

ARS CONJECTANDI,

OPUS POSTHUMUM.

Accedit

TRACTATUS
DE SERIEBUS INFINITIS,

Et EPISTOLA Gallicè scripta
DE LUDO PILÆ
RETICULARIS.

FESTINA LENTE

BASILEÆ,
Impensis THURNISIORUM, Fratrum.
cIↃ IↃcc XIII.

Bernoulli, Jakob [1655-1705]
ars coniectandi, opus posthumus : accedit Tractatus de seriebus infinitis ;
et epistola Gallice scripta De Ludo Pilae Reticularis

http://dx.doi.org/10.3931/e-rara-9001

Conte du lundi

Problèmes de dés : Pascal, Fermat, Huygens et les autres

Groupe M. :A.T.H.

Introduction

Ce conte du lundi présente des textes étudiés lors de l'année 2019-2020 dans le groupe de lecture de textes historiques animé par le groupe M. : A.T.H. un lundi par mois, avec quelques compléments. Ces lectures portaient sur l'histoire des probabilités et nous avions choisi des textes portant sur des problèmes qu'il semblait intéressant d'utiliser en classe.

Dans une lettre à l'*Illustre Académie*[1] *Parisienne de Mathématiques* (1654), dans laquelle il donne une liste de ses travaux en cours, Pascal annonce « une recherche toute nouvelle et portant sur une matière entièrement inexplorée, savoir sur les combinaisons du hasard dans les jeux qui lui sont soumis [...]. La question a erré incertaine jusqu'à ce jour ; mais maintenant, si elle a été rebelle à l'expérience, elle n'a pu échapper à l'empire de la raison. Car nous l'avons réduite en art avec une telle sûreté, grâce à la géométrie, qu'ayant reçu part à la certitude de celle-ci, elle progresse désormais avec audace, et que, par l'union ainsi réalisée entre les démonstrations mathématiques et l'incertitude du hasard, et par la conciliation entre les contraires apparents, elle peut tirer son nom de part et d'autre et s'arroger à bon droit ce titre étonnant : *Géométrie du hasard* »[2].

Nous partirons ici d'un extrait d'une lettre de Pascal à Fermat, qui donne un problème posé par le chevalier de Méré, et verrons la postérité de ce problème chez divers auteurs.

Extrait d'une lettre de Pascal à Fermat (29 juillet 1654)[3]

> « Je n'ai pas le temps de vous envoyer la démonstration d'une difficulté qui étonnait fort M. <de Méré>, car il a très bon esprit, mais il n'est pas géomètre (c'est, comme vous le savez, un grand défaut) et même il ne comprend pas qu'une ligne mathématique soit divisible à l'infini et croit fort bien entendre qu'elle est composée de points en nombre fini, et jamais je n'ai pu l'en tirer. Si vous pouviez le faire, on le rendrait parfait.
>
> Il me disait donc qu'il avait trouvé fausseté dans les nombres par cette raison :
>
> Si on entreprend de faire un *six* avec un dé, il y a avantage de l'entreprendre en 4, comme de 671 à 625.
>
> Si on entreprend de faire *Sonnés*[4] avec deux dés, il y a désavantage de l'entreprendre en 24.
>
> Et néanmoins, 24 est à 36 (qui est le nombre des faces des deux dés) comme 4 est à 6 (qui est le nombre des faces d'un dé).
>
> Voilà quel était son grand scandale qui lui faisait dire hautement que les propositions n'étaient pas constantes et que l'arithmétique se démentait : mais vous en verrez bien aisément la raison par les principes où vous êtes. »

1. Académie fondée à Paris par Mersenne en 1635, que Mersenne affirme être « la plus noble académie du monde » et qu'elle sera « toute mathématique ».
2. PASCAL B., *Œuvres complètes*, II, texte établi et présenté par Jean Mesnard, Desclée de Brouwer, 1970, réédition 1990, pages 1034-1035.
3. FERMAT, *Œuvres*, tome II, éditées par Tannery et Henry, Paris, 1894, pages 295-296.
4. C'est-à-dire un double six.

Pascal n'explique pas comment on arrive au résultat énoncé, sous la forme habituelle à l'époque : « il y a avantage de l'entreprendre en 4 comme de 671 à 625 », c'est-à-dire, en termes modernes, que, si on lance 4 fois successivement un dé à six faces, et si on appelle A l'évènement « obtenir au moins un six », le rapport de $p(A)$ à $p(\overline{A})$ est égal à $\frac{671}{625}$, ce qui prouve que $p(A) > \frac{1}{2}$. Pascal parle en termes de pari et conclut donc qu'il y a « avantage » à parier que A se réalisera plutôt que $\overline{A}$, en donnant le rapport quantifiant cet avantage. Ce problème sera repris pas d'autres mathématiciens, et généralisé par certains. Nous donnerons-ci dessous quelques extraits de textes commentés sur ce problème et d'autres problèmes de dés abordés dans de petits traités ou la correspondance de savants aux XVII^e et XVIII^e siècle. Certains auteurs utilisent l'espérance comme outil pour résoudre ces problèmes, mais le sens que recouvre cette notion dans ces textes est inhabituel pour nous. La rubrique « Bonnes Vieilles Pages » de ce numéro de *Mnemosyne* peut vous aider dans la lecture des textes cités ici.

Huygens : *Du calcul dans les jeux de hasard* (1656 – 1657)

Dans ce court traité, Huygens résout plusieurs problèmes en utilisant ce qu'il appelle « la valeur de la chance » et que nous nommons l'espérance. Sa proposition III énonce : « Avoir p chances d'obtenir a et q chances d'obtenir b, les chances étant équivalentes, me vaut $\frac{pa+qb}{p+q}$. » La proposition X résout le problème : « Trouver en combien de fois l'on peut accepter de jeter un six avec un dé », en raisonnant de proche en proche. Comme Pascal, Huygens ne parle jamais de probabilité ; l'outil qui lui permet de résoudre le problème est l'espérance. La notion fondamentale est celle de « jeu équitable ».[5]

> « Il est certain que le joueur qui accepte de jeter un 6 en un seul coup a 1 chance de gagner l'enjeu et 5 de perdre. Car il y a 5 coups contre lui et pas plus qu'un seul pour lui. Appelons l'enjeu a. Il a donc 1 chance d'obtenir a et 5 chances de n'obtenir rien, ce qui [...] lui vaut $\frac{1}{6}a$. Il reste $\frac{5}{6}a$ pour celui qui l'engage à jeter le dé. Celui qui joue une partie d'un seul coup ne peut donc mettre que 1 contre 5.[6] »[7]

Huygens raisonne ensuite de proche en proche. Si un joueur parie qu'il obtiendra au moins un six en deux lancers, lorqu'il lance le dé une première fois, il a 1 chance d'obtenir 6 du premier coup et 5 chances de ne pas obtenir 6, auquel cas il relancera le dé. Donc il a une chance d'obtenir la mise a et 5 chances d'obtenir $\frac{1}{6}a$, d'après le calcul précédent. Donc la valeur de sa chance est $\frac{1\times a+5\times\frac{1}{6}a}{6} = \frac{11}{36}a$ et il reste $\frac{25}{36}a$ pour son adversaire. De même, si on joue en trois coups, il a 1 chance d'obtenir 6 du premier coup et 5 chances de ne pas obtenir 6, auquel cas il relancera le dé deux fois, donc il a une chance d'obtenir la mise a et 5 chances d'obtenir $\frac{11}{36}a$, d'après le calcul précédent. La valeur de sa chance est donc $\frac{1\times a+5\times\frac{11}{36}a}{6} = \frac{91}{216}a$. Huygens donne également les résultats pour 4 lancers ($\frac{671}{1296}a$, le joueur « peut donc mettre 671 contre 625, c'est-à-dire plus que 1 contre 1 »), puis pour 5 lancers ($\frac{4651}{7776}a$) et enfin 6 lancers ($\frac{31031}{46656}a$).

Huygens s'attaque alors, dans la proposition suivante, au problème : « Trouver en combien de fois l'on peut accepter de jeter 2 six avec 2 dés ». Il fait le même raisonnement de proche en proche, mais abrège habilement un calcul qui menace de devenir très long et fastidieux. Pour un lancer de dés, il y a 1 chance d'obtenir a et 35 chances de ne

5. Voir la rubrique « Bonnes Vieilles Pages ».

6. C'est-à-dire, que, pour que le jeu soit équitable, le joueur pariant que le six va sortir en un lancer de dés doit mettre au jeu une mise cinq fois plus petite que celle de son adversaire.

7. HUYGENS C., *Du calcul dans les jeux de* hasard, in *Œuvres complètes*, tome XIV, La Haye, Martinus Nijhoff, 1920, p.78.

rien obtenir, ce qui vaut $\frac{1}{36}a$. Si on joue en deux coups, on a « au commencement » 1 chance d'obtenir a et 35 chances d'obtenir $\frac{1}{36}a$, ce qui vaut au joueur $\frac{71}{1296}a$. À partir de là, Huygens abrège les calculs : « On peut trouver en partant de là la chance ou la part de celui qui joue en 4 parties ; on peut sauter le cas du jeu en 3 coups. » En effet, si on joue en 4 lancers, pour les deux premiers lancers, le joueur qui parie sur le double six a 71 chances de gagner, donc d'obtenir a contre 1225 de perdre, donc de pouvoir rejouer deux fois, ce qui lui vaut $\frac{71}{1296}a$. Donc la « valeur de sa chance » est $\frac{71a+1225\times\frac{71}{1296}a}{1296} = \frac{178991}{1296^2}a = \frac{178991}{1679616}a$ et il reste pour son adversaire $\frac{1679616-178991}{1679616}a = \frac{15000625}{1679616}a$. On peut alors passer directement à 8 lancers, puis à 16 lancers, et enfin à 24 lancers en combinant 16 et 8 lancers. Cependant, Huygens ne donne pas le détail des calculs, les nombres en jeu devenant trop grands, et conclut : « dans ce calcul, comme il s'agit surtout de chercher pour quel nombre de coups les chances des deux joueurs commencent à devenir égales, on peut omettre une partie des derniers Chiffres des nombres qui sans cela deviendraient très grands. Je trouve que celui qui joue en 24 parties a encore un léger désavantage, et qu'on ne peut accepter la partie avec avantage qu'en jouant 25 coups au moins. » [8]

Pierre Rémond de Montmort : *Essay d'analyse sur les jeux de hazard* (1708)

La première partie de l'édition de 1708 traite des problèmes sur les jeux de hasard [9]. De Montmort commence par définir ce qu'il appelle « le sort » de chaque joueur.

> « [...] l'argent que risque un joueur est censé ne plus lui appartenir, car il en a quitté la propriété, mais en revanche il acquiert un certain droit sur le fond du Jeu, c'est-à-dire, sur l'argent de la gageure.
>
> [...] dans les Jeux, dont les conditions sont inégalement avantageuses [...], si [les joueurs] veulent se retirer & quitter la partie [...] ils doivent prendre une partie plus ou moins grande [de l'argent du jeu], selon qu'il y a plus ou moins de probabilité que les uns ou les autres gagneront la somme entière dont ils sont convenus.
>
> Cela posé, si l'on nomme a l'argent du jeu, je dirai que le *sort* de chaque joueur est le juste degré d'espérance qu'il a d'obtenir a. » [10]

Il énonce ensuite et justifie la proposition I :

> « *Le nombre des hazards qui peuvent faire gagner Pierre, et lui donner A, étant m ; & le nombre des hazards qui peuvent le faire perdre ou lui donner zéro, étant n, je dis que s'il n'y a que ces deux sortes de hazards, & qu'on entende par A l'argent du jeu, on aura le sort de Pierre* $= \frac{mA+n\times 0}{m+n}$.
>
> Pour le prouver, soit x le sort de Pierre, y celui de l'autre joueur, qu'on nommera Paul, on aura $x+y=A$. On aura aussi [11] $x.y :: m.n$, car le sort de chacun de ces joueurs est comme leur espérance, & cette espérance est proportionnée aux facilités ou aux moyens qu'ils ont de gagner, c'est-à-dire au nombre de coups qui leur donneront A. De ces deux équations $y = \frac{nx}{m}$ & $x+y=A$, on tirera $x = \frac{Am}{n+m}$ $\mathscr{C}.\mathscr{Q}.f.\mathscr{D}.$ »

Pierre Rémond de Montmort donne dans sa proposition XLIV une généralisation de ces problèmes de dés, qu'il va appliquer ensuite aux exemples ci-dessus.

8. Ib., p. 82.

9. Dans la deuxième édition (1713), cette partie est précédée d'un traité sur les combinaisons, plus complet que ce qu'on trouve sur ce thème à la suite des problèmes dans la première édition.

10. De Montmort P.R., *Essay d'analyse sur les jeux de hazard*, Paris, 1708, p.1-2.

11. $x.y :: m.n$ signifie $\frac{x}{y} = \frac{m}{n}$.

« Le nombre qui exprime le rapport du sort de Pierre à celui de Paul, en supposant que Pierre parie contre Paul de faire certaine chose du premier coup, étant donné, On demande quel est le nombre qui exprime le sort de Pierre, en supposant qu'on lui accorde un certain nombre de coups pour faire la chose proposée » [12]

Par exemple, si Pierre parie qu'il obtiendra un six en un lancer d'un dé cubique, le rapport du sort de Pierre à celui de Paul est $\frac{1}{5}$, car, pour employer le langage de l'époque, il y a une chance pour Pierre et 5 pour Paul. Ce rapport étant connu, on demande le « sort » de Pierre s'il parie d'obtenir au moins un six en un nombre h donné de lancers. Revenons au texte de De Montmort :

> « Si l'on exprime par l'inconnue x son sort lorsqu'ayant manqué à gagner du premier coup il va rejouer son second coup, & y son sort lors qu'ayant manqué à gagner du second coup il va rejouer son troisième coup, & z son sort lors qu'ayant manqué de gagner à son troisième coup il en va rejouer un quatrième, &c employant de suite les lettres x, y, z, u, t, r &c pour exprimer le sort inconnu de Pierre à son second, troisième, quatrième, cinquième, sixième, septième coup, &c. Nommant encore p le nombre des hazards favorables à Pierre ; q le nombre des rencontres favorables à Paul, & supposant que $m = p+q$, on aura le sort de Pierre au commencement du jeu $= \frac{p}{m} + \frac{q}{m}x$, $x = \frac{p}{m} + \frac{q}{m}y$, $y = \frac{p}{m} + \frac{q}{m}z$, $z = \frac{p}{m} + \frac{q}{m}u$, $u = \frac{p}{m} + \frac{q}{m}t$, $t = \frac{p}{m} + \frac{q}{m}r$ &c & substituant toutes ces quantités, on aura le sort de Pierre exprimé par cette suite infinie $S = \frac{p}{m} + \frac{pq}{mm} + \frac{pqq}{m^3} + \frac{pq^3}{m^4} + \frac{pq^4}{m^5} + \frac{pq^5}{m^6} + \frac{pq^6}{m^7} + \&c.$ ajoutant autant de termes de cette suite qu'il en sera nécesssaire pour que S soit égale à $\frac{1}{2}$. On concluera que Pierre peut entreprendre la gageure but à but en autant de coups qu'on aura employé de termes de cette suite pour trouver $S = \frac{1}{2}$, ou un peu plus grand.
>
> Cette méthode est fort simple, & n'est presque pas différente de celle qu'emploie M. Hugens pour déterminer en combien de coups on peut parier but à but d'amener sonnez avec deux dés ; mais elles ont toutes deux cet inconvénient qu'elles sont absolument impraticables lorsque p étant un petit nombre, m et q en expriment de grands. » [13]

De Montmort donne alors un moyen d'éviter de trop longs calculs. Il remarque que « la somme de cette suite infinie est toujours égale à l'unité, puisqu'il est clair que s'il y a quelque possibilité que Pierre gagne du premier coup, il y a certitude qu'il gagnera ayant un nombre infini de coups à jouer de suite ». Il manipule ensuite la somme des termes de S pour arriver à un résultat équivalent au fait que la somme des h premiers termes de S est égale à $1 - \frac{q^h}{m^h}$, résultat que nous pouvons obtenir simplement grâce à la somme des termes d'une suite géométrique. Il en conclut que, « pour trouver le nombre de coups qui rendrait le sort de Pierre égal à celui de Paul », il faudrait que $\frac{q^h}{m^h} = \frac{1}{2}$ ou soit plus petit que $\frac{1}{2}$; c'est-à-dire qu'il faut « m^h plus grand que $2 \times q^h$. Ce qui servira de formule ». De Montmort traite ensuite des exemples.

> « PREMIER EXEMPLE
>
> Soit supposé que l'on cherche en combien de coups Pierre peut parier d'amener six avec un dé, il faudra substituer 6, 5, 1 pour les lettres m, q, p, [...], & l'on connaîtra sans peine que h étant 4, c'est-à-dire, Pierre se proposant d'amener six en quatre coups, il y aura de l'avantage pour lui, car $1 - \frac{5^4}{6^4} = 1 - \frac{625}{1296}$; or cette fraction $\frac{625}{1296}$ est plus petite que $\frac{1}{2}$ de la quantité $\frac{23}{1296}$

12. De Montmort P.R., *Essay d'analyse sur les jeux de hazard*, Paris, 1708, p. 180.
13. Ib., p. 180-181.

qui exprimera l'avantage de Pierre en pariant d'amener un six avec un dé dans quatre coups. L'on connaîtra aussi qu'en substituant 3 pour h, c'est-à-dire que Pierre se proposant d'amener un six en trois coups, il y aurait pour lui du désavantage, et que son désavantage serait $\frac{17}{216}$.

Il est clair que l'exposant h doit etre d'autant plus grand que q est plus grand par rapport à p, en sorte que, par exemple, q étant $= 5$, & par conséquent $m = 6$, h doit être $= 4$, & q étant $= 35$, h doit être $= 25$.

[...]

REMARQUE

Pour éviter le tâtonnement, il faudra convertir la formule $m^h = 2 \times q^h$ en une autre où h soit seule dans un des membres de l'égalité, ce qui se peut en employant le calcul des exponentiels. Car je trouve qu'elle se change en cette autre $h = \frac{log.2}{log.m - log.q}$, & cette formule où h exprime le nombre de coups que l'on cherche, donnera d'abord la solution du Problème proposé.

Par exemple, si l'on veut savoir en combien de coups on peut parier à but d'amener sonnés avec deux dés, on trouvera en substituant pour m, 36, & pour q, 35, $h = \frac{3010300}{15563025 - 15440680} = 24 + \frac{14804}{24469}$, ce qui fait voir qu'on l'entreprendrait avec avantage en 25 coups, & avec désavantage en 24 coups.

[...]

On pourra même découvrir par cette voie de combien sera l'avantage ou le désavantage par rapport à tel nombre de coups que ce soit. »[14]

Jacques Bernoulli : *Ars conjectandi* (1713)

L'*Ars conjectandi* est publiée en 1713, huit ans après la mort de Jacques Bernoulli, par son neveu Nicolas Bernoulli ; mais Jacques Bernoulli a commencé à travailler sur le traité de Huygens bien plus tôt, vers 1685.[15] La première partie de l'ouvrage de Bernoulli est constituée du Traité de Huygens *Du calcul dans les jeux de hasard*, avec des commentaires sur les démonstrations de Huygens, des propositions de démonstrations différentes de celles de Huygens ainsi que la résolution des problèmes posés à la fin du traité. Au sujet de la proposition XI de Huygens (voir supra), Bernoulli remarque qu'il revient au même, pour un joueur qui entreprend de faire un nombre de points donné avec un certain nombre k de dés, de lancer ces dés ou de lancer un seul dé dont le nombre des faces serait le nombre total a des résultats possibles avec ces k dés, et dont c faces ne porteraient pas le nombre de points requis, les autres portant ce nombre. Ainsi, par exemple, si on veut obtenir un double six avec deux dés cubiques ordinaires, il revient au même de lancer un dé à 36 faces dont l'une est marquée 12 (la face « favorable ») et les 35 autres portent un autre résultat. Il suffit donc de chercher le nombre de lancers de ce dé fictif nécessaire pour que le joueur puisse parier de façon équitable qu'il obtiendra au moins une fois le résultat voulu. Or lancer n fois ce dé (qui a a faces en tout, dont c défavorables) revient à lancer une fois n dés semblables.

« Qu'ainsi soient pris n dés, chacun muni de a faces, parmi lesquelles il y a en ait c non marquées par ce nombre de points. Ainsi le nombre de tous les cas dans l'ensemble de n dés sera a^n ; (comme l'Auteur l'a montré plus haut

14. Ib., p. 182-184.
15. MEUSNIER N., « L'émergence d'une mathématique du probable au XVII^e siècle », *Revue d'histoire des mathématiques*, 2 (1996), p. 119-147, http://www.numdam.org/article/RHM_1996__2_1_119_0.pdf

après la Prop IX), et pour la même raison le nombre de ceux, pour lesquels les points choisis n'apparaissent sur aucun dé, c^n ; parce que certainement en raison du choix d'un seul dé parmi ceux à c faces, n'importe quel dé du même nombre de faces peut tomber en même temps. Il est donc nécessaire pour que ces points soient trouvés à tout le moins dans l'un des dés, que ce soit dans les $a^n - c^n$ cas restants. C'est pourquoi celui qui joue sur une telle condition, a $a^n - c^n$ cas pour obtenir 1, et c^n cas pour obtenir 0 ; c'est pourquoi, à nouveau comme auparavant, celui-là gagne $\frac{a^n - c^n}{a^n}$, de sorte qu'à l'adversaire il reste toujours $\frac{c^n}{a^n}$.

Ayant ainsi montré la solution générale du Problème, si maintenant nous désirons en savoir davantage avec l'Auteur, à quel nombre de jets commence la chance égale entre les adversaires, il faut seulement égaler entre elles les chances trouvées, de sorte qu'on ait $a^n - c^n = c^n$, ce qui fait $a^n = 2c^n$; où il est indiqué que rien d'autre n'est requis que le nombre de tous les cas, et le nombre de ceux dans lesquels il n'est pas obtenu ce qui est entrepris. [...] Cette opération est plus appropriée que celle de Huygens, en ce qu'elle ne suppose la connaissance par chance d'aucun cas précédent : il obtient en effet d'autres raccourcis, dont se souvient l'Auteur.[...] Mais on peut voir, dans un exemple de l'Auteur, dans lequel a vaut 36 et c 35, toute l'opération adjointe. » [16]

	justo	minor	major			min.	maj.
				c	∞	35	
a	∞	36		cc	∞	1225	
aa	∞	1296		c^4	∞	1500 . .	1501 . .
a^4	∞	1679 . .	1680 . .	c^8	∞	2250 . .	2254 . .
a^8	∞	2819 . .	2823 . .	c^{16}	∞	5062 . .	5081 . .
a^{16}	∞	7946 . .	7970 . .	c^{24}	∞	1138 . .	1146 . .
a^{24}	∞	2239 . .	2250 . .	c^{25}	∞	3983 . .	4011 . .
a^{25}	∞	8060 . .	8100 . .	$2c^{24}$	∞	2276 . .	2292 . .
				$2c^{25}$	∞	7966 . .	8022 . .

Bernoulli conclut ainsi qu'il faut entre 24 et 25 lancers pour que le joueur puisse parier de manière équitable d'obtenir au moins un double six. Il précise ensuite l'intérêt de l'utilisation des logarithmes, qui permettent d'obtenir facilement le nombre n, car $a^n = 2c^n$ équivaut à $n \log a = \log 2 + n \log c$, d'où il tire $n = \frac{\log 2}{\log a - \log c}$, et, dans le cas particulier étudié ici, avec $a = 36$ et $c = 35$, $n = \frac{0.3010300}{0.0122345}$, soit « plus que 24 et moins que 25 ».

Nicolas Struyck : *Uytreekening der Kansen...* (Amsterdam, 1716) [17]

Nicolas Struyck, dans son avis au lecteur au début de l'ouvrage, cite ses prédécesseurs : Huygens, de Montmort, Jacques Bernoulli. Dans la première partie de son ouvrage (« calcul des chances grâce à l'arithmétique »), Nicolas Struyck commence par des considérations sur « la valeur moyenne de chaque chance » [18], puis s'occupe de dénombrer permutations, arrangements et combinaisons, et applique ces notions à des problèmes de tirages de cartes et de lancers de dés, pour finalement s'occuper des problèmes que pose Huygens à la fin de son traité. La deuxième partie s'intitule « calcul des chances grâce à l'algèbre », et le deuxième problème est une généralisation semblable à celle de de Montmort.

16. Bernoullli J., *Ars conjectandi* , 1713, p. 32-33, https ://archive.org/details/bub_gb_kz9nvk99EWoC/mode/2up

17. Struyck N. [1912], *Les œuvres de Nicolas Struyck, 1687-1769, qui se rapportent au calcul des chances, à la statistique générale, à la statistique des décès et aux rentes viagères tirées des œuvres complètes et traduites du hollandais par J.A. Vollgraff*, Amsterdam, Société générale néerlandaise d'assurances sur la vie et de rentes viagères, 1912. Disponible en ligne : https ://archive.org/details/lesoeuvresdenico00struuoft

18. Notre espérance.

« Deuxième problème

A joue un jeu où il y a c chances en tout. Il y a b chances de ne pas gagner le jeu de prime abord. On demande combien de fois on doit lui permettre de continuer à jouer, pour qu'il puisse parier à r contre p.

Posons le nombre demandé $= x$, et l'enjeu qu'on peut gagner $= 1$. Si l'on nous imposait de jeter 6 points du premier coup avec un dé ordinaire, nous aurions droit à $\frac{1}{6}$. Le reste est alors $\frac{5}{6}$. Au deuxième coup nous avons de nouveau droit à la sixième partie de $\frac{5}{6}$. Le reste est alors $\frac{5}{6} \times \frac{5}{6}$. Au troisième coup, nous avons de nouveau droit à la sixième partie de ce reste. Le reste sera alors $\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6}$. Six est le nombre total des chances : donc $c = 6$. Le nombre des chances défavorables à A est 5 au premier coup. Si on lui permet de jeter x fois, sa part est exprimée par $1 - \frac{b^x}{c^x}$ ou, si l'on pose $a = c - b$, il a a chances de gagner du premier coup. Sa part est donc $\frac{a}{c}$. En soustrayant cette fraction de l'unité, on voit qu'il reste $1 - \frac{a}{c}$ ou $\frac{b}{c}$. Après cela il a a chances de gagner ce reste. Le nombre total des chances est c. Le prix du deuxième coup est donc $\frac{ab}{cc}$. En soustrayant cette fraction de $\frac{b}{c}$, on voit qu'il reste $\frac{bb}{cc}$. Il appert par là que le prix du troisième coup sera $\frac{abb}{c^3}$, du quatrième $\frac{ab^3}{c^4}$, etc. A a donc droit à la somme $\frac{a}{c} + \frac{ab}{cc} + \frac{abb}{c^3} + \frac{ab^3}{c^4} + \frac{ab^4}{c^5} +$ etc. Le nombre de termes doit être x. La somme de ces termes, c.à.d. la part de A, est, comme nous l'avons dit plus haut, $1 - \frac{b^x}{c^x}$. Ce nombre doit être égal à $\frac{r}{p+r}$ (car si l'enjeu de A est r et celui du second joueur p, l'enjeu total est $p + r$, et la part de A est $\frac{r}{p+r}$). Nous trouvons par réduction de cette équation

$$\frac{c^x}{b^x} = \frac{p+r}{p}$$

En prenant le logarithme des deux membres et en tirant x de l'équation, on trouve [19]

$$x = \frac{\log .\overline{p+r} - \log .p}{\log .c - \log .b}$$

Premier Exemple

Supposons qu'on demande en combien de coups on pourrait parier (1 contre 1) de jeter 2 six avec 2 dés ordinaires. En ce cas $p = r = 1$, $c = 36$, $b = 35$. On trouvera : en 24 à 25 coups.

Deuxième Exemple

Mais si l'on veut parier 10 contre 1, on trouve 84 à 85 coups, et si l'on veut parier 3 contre 1, 49 coups et une fraction.

[...]

Quatrième Exemple

Si l'on veut parier 1 contre 1 de jeter 3 six avec 3 dés ordinaires, on trouve 149 coups. De même on peut accepter de jeter 4 six avec 4 dés en 898 coups à peu près. » [20]

Abraham de Moivre : *The Doctrine of Chances* (première édition, 1718)

L'ouvrage de de Moivre commence par une introduction, dans laquelle la première définition est celle de la probabilité d'un évènement.

19. $\overline{p+r}$ signifie $(p+r)$.
20. Struyck, op. cité, p. 52-53.

> « La probabilité d'un évènement est plus ou moins grande selon le nombre de chances par lequel il peut se produire, comparé au nombre de toutes les chances qu'il a de se produire ou d'échouer à se produire.
>
> Ainsi, si un événement a 3 chances de se produire et 2 d'échouer, on peut estimer que la probabilité qu'il se produise est de $\frac{3}{5}$, et celle qu'il échoue de $\frac{2}{5}$.
>
> Par conséquent, si on ajoute la probabilité de la réussite et celle de l'échec, la somme sera toujours égale à l'unité. » [21]

Dans la troisième édition (1758), de Moivre donne la définition générale de la probabilité avant le même exemple numérique que ci-dessus :

> « [...] si on constitue une fraction dont le numérateur est le nombre de chances par lequel un évènement peut se produire, et le dénominateur le nombre de toutes les chances qu'il a de se produire ou d'échouer à se produire, cette fraction sera une désignation correcte de la probabilité qu'il a de se produire ». [22]

Abraham de Moivre s'occupe également du problème du nombre de lancers d'un dé nécessaire pour qu'il y ait avantage à parier qu'on obtiendra au moins un six. Lui aussi procède de proche en proche, d'une manière assez proche de nos raisonnements actuels.

« CAS I

Trouver la probabilité d'obtenir un as[23] *en deux lancers d'un dé*

SOLUTION

La probabilité d'obtenir un as la première fois est $\frac{1}{6}$; donc $\frac{1}{6}$ est la première partie de la probabilité demandée.

Si l'as n'est pas sorti la première fois, il peut encore être obtenu la seconde, mais la probabilité de ne pas sortir la première fois est $\frac{5}{6}$, et la probabilité de l'obtenir la seconde fois est $\frac{1}{6}$; donc la probabilité d'échouer la première fois et de l'obtenir la seconde fois est $\frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$; et c'est la seconde partie de la probabilité demandée, et donc la probabilité demandée est en tout : $\frac{1}{6}+\frac{5}{36} = \frac{11}{36}$.

[...]

CAS II

Trouver la probabilité d'obtenir un as en trois lancers

SOLUTION

La probabilité d'obtenir un as la première fois est $\frac{1}{6}$, qui est la première partie de la probabilité demandée. Si l'as ne sort pas la première fois, il peut encore être obtenu lors des deux lancers restants ; mais la probabilité de ne pas sortir la première fois est $\frac{5}{6}$, et la probabilité de l'obtenir lors des deux fois restantes (Cas I) $= \frac{11}{36}$. Donc la probabilité d'échouer la première fois et de l'obtenir lors des deux derniers lancers est $\frac{5}{6} \times \frac{11}{36} = \frac{55}{216}$, qui est la deuxième partie de la probabilité demandée ; donc la probabilité demandée sera $\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\times\frac{11}{36} = \frac{91}{216}$. » [24]

---

21. De Moivre A., *The doctrine of chances or, a method of calculating the probability of events in play* , 1[ère] édition 1718, p.1. Disponible en ligne : https ://archive.org/details/b30412390/page/n8. Traduction libre du groupe M. :A.T.H.
22. De Moivre A., *The doctrine of chances or, a method of calculating the probability of events in play* , 3[e] édition, 1756, p.2-3. Disponible en ligne :https ://www.ime.usp.br/~walterfm/cursos/mac5796/DoctrineOfChances.pdf
23. nous dirions : « au moins un as ».
24. De Moivre A., *The doctrine of chances or, a method of calculating the probability of events in play* (3 ème édition, Londres, 1756), pages 9-10.

Le cas suivant est celui de 4 lancers, résolu de la même manière. Après d'autres exemples, de Moivre généralise le problème. en considérant immédiatement l'évènement contraire de « obtenir au moins une fois l'évènement donné en x essais », ce qui simplifie considérablement la question.

« PROBLÈME III

Trouver en combien d'essais un évènement se produira probablement, ou combien d'essais seront nécessaires pour qu'il soit indifférent de parier sur sa réussite ou son échec, supposant que a est le nombre de chances pour sa réussite à chaque essai, et b le nombre de chances de son échec.

SOLUTION

Soit x le nombre d'essais, alors *par le 16ème article de l'Introduction*, b^x représentera le nombre de chances que l'évènement échoue x fois successivement, et $(a+b)^x$ le nombre total de chances de réussite ou d'échec, et donc $\frac{b^x}{(a+b)^x}$ représente la probabilité que l'évènement échoue x fois de suite ; mais par la supposition que cette probabilité est égale à la probabilité que l'évènement se produise au moins une fois dans ce nombre d'essais, il s'ensuit que chacune de ces deux probabilités peut être exprimée par la fraction $\frac{1}{2}$: nous avons donc l'équation $\frac{b^x}{(a+b)^x} = \frac{1}{2}$, ou $(a+b)^x = 2b^x$, d'où on déduit l'équation $x \log .(a+b) = x \log .b + \log .2$; et donc $x = \frac{\log .2}{\log .(a+b) - \log .b}$.

De plus, revenons à l'équation $(a+b)^x = 2b^x$, dans laquelle nous supposons que $a, b \;::\; 1, q$;[25] en conséquence, la dite équation se changera en celle-ci $\left(1+\frac{1}{q}\right)^x = 2$. Ou $x \times \log .\left(1+\frac{1}{q}\right) = \log .2$. Dans cette équation, si q est égal à 1, x sera de même égal à 1 ; mais si q est différent de l'unité, remplaçons $\log .\left(1+\frac{1}{q}\right)$ par sa valeur exprimée par une série ; à savoir

$$\frac{1}{q} - \frac{1}{2qq} + \frac{1}{3q^3} - \frac{1}{4q^4} + \frac{1}{5q^5} - \frac{1}{6q^6} \text{ \&c.}$$

Nous avons alors l'équation $\frac{x}{q} - \frac{x}{2qq}$,&c.$= \log .2$. Supposons maintenant que q est infini, ou suffisamment grand par rapport à l'unité, et alors le premier terme de la série sera suffisant ; nous aurons par conséquent l'équation $\frac{x}{q} = \log .2$, ou $x = q \log .2$. Mais il faut observer qu'ici, il faut prendre le logarithme hyperbolique, et non pas le logarithme des tables, lequel étant 0.693&c. Ou à peu près 0.7, il suit que $x = 0.7q$ à peu près.

[...]

Quelques utilisations de ce problème apparaîtront dans les exemples suivants.

EXEMPLE I.

Soit proposé de trouver en combien de lancers on peut parier d'obtenir deux as avec deux dés, avec égalité de chance.

Le nombre de chances avec deux dés étant 36, dont une seulement pour 2 as, il suit que le nombre de chances contre cela est 35 ; multipliez 35 par 0.7, et le produit 24.5 montrera que le nombre de lancers nécessaire à cet effet sera entre 24 et 25. »[26]

25. a est à b comme 1 est à q, c'est-à-dire $\frac{a}{b} = \frac{1}{q}$.

26. De Moivre A. , *The doctrine of chances or, a method of calculating the probability of events in play* (3 ème édition, Londres, 1756), pages 36-37-38.

D'autres problèmes de dés

Nous avons donné les extraits du Traité de Huygens sur le calcul dans les jeux de hasard traitant du probléme de dés évoqué par Pascal dans sa lettre à Fermat de juillet 1654. Les échanges épistolaires entre savants du XVIIe siècle ont été féconds et ont abordé d'autres problèmes sur les jeux de hasard. Lors de son séjour en France en 1655, Huygens ne rencontra ni Fermat, ni Pascal, ni Carcavy, mais il connut les problèmes que se posaient ces savants, entre autres par l'intermédiaire de Mylon, sans cependant connaître les méthodes et les solutions apportées par les uns et les autres.

Échanges épistolaires entre Huygens et Fermat

Dès 1656, Huygens travailla à son Traité, qui fut publié par Van Schooten en 1657 en latin et en hollandais en 1660. Dès avant cette publication, Huygens correspondit avec Roberval et Mylon [27] et leur posa divers problèmes sur le hasard, qui parvinrent à Fermat et Pascal par l'intermédiaire de Carcavy. Le problème principal était le suivant : deux joueurs A et B lancent tour à tour 2 dés cubiques ; A gagne dès qu'il amène la somme de 6 points et B la somme de 7 points. A joue le premier. Il s'agit de trouver « le rapport de leurs chances ». On voit là apparaître un sujet qui occupera les échanges : celui de l'avantage que donne la primauté à un joueur. Fermat résout ce problème et renvoie la solution, sans aucune indication de méthode, avec d'autres questions plus difficiles, à Carcavy, qui transmet à Huygens en juin 1656. Nous mettons ci-dessous les questions concernant les dés, les autres concernent des jeux de cartes.

> « [...]1. Si A et B jouent avec deux dés en sorte que, si A amène 6 points en ses deux dés avant que B en amène 7, le joueur A gagne et, si B amène 7 avant que A ait amené 6, le joueur B aura gagné, et de plus le joueur A a la primauté, l'avantage de A à B est comme 30 à 31.
>
> 2. Si le joueur A a la première fois la primauté et ensuite le joueur B ait aussi la primauté la seconde fois, et ainsi alternativement (auquel cas A poussera le dé la première fois, et puis B deux fois de suite, et puis A deux fois de suite, et ainsi jusques à la fin), en cette espèce le parti du joueur A est à celui du joueur B comme 10355 à 12276.
>
> 3. Que si le joueur A joue premièrement deux fois et le joueur B trois fois, puis le joueur A deux fois et ensuite le joueur B trois fois, et ainsi à l'infini que le joueur A qui commence ne joue jamais que deux coups et que le joueur B en joue trois (supposant toujours que A cherche à ramener 6 et B 7), le parti de A est à B comme 72360 à 87451. » [28]

Huygens répond à Carcavy en juillet 1656, en reconnaissant que Fermat « a la méthode universelle pour trouver tout ce qui appartient à cette matière, ce que je désirais seulement de savoir en la proposant. La même raison de 30 à 31 est dans le traité que j'ai envoyé à M. Schooten il y a deux mois ». [29]

La solution de Huygens à la question 1.

La proposition XIV du traité de Huygens résout ce problème, en utilisant toujours l'outil de l'espérance et la proposition III de son traité, qu'il redonne dans sa lettre. On

27. Mylon est un ami de Carcavy, collègue de Fermat au Parlement de Toulouse. Huygens l'a rencontré à Paris et a correspondu avec lui , entre autres sur des problèmes liés au hasard.
28. Fermat P., *Œuvres complètes*, tome II, éditées par Tannery et Henry, Gauthiers-Villars, Paris, 1894, p.320-321.
29. Ib. p. 322.

appelle a l'enjeu, et x l'espérance de B. Chaque fois que revient le tour de A la « chance [de B] aura de nouveau la valeur x. Mais chaque fois que c'est [le tour de B] de jeter, [sa] chance doit avoir une valeur supérieure, mettons y. Or, attendu que parmi les 36 coups qu'on peut faire avec 2 dés, il y en a 5 qui peuvent donner 6 points à [A] et lui faire gagner la partie, et 31 coups à son désavantage, c'est-à-dire qui amènent [le tour de B] de jeter, B a 5 chances d'avoir 0 lorsque que [A] jette la première fois, et 31 chances d'avoir y ; ce qui [...] vaut $\frac{31y}{36}$. » Ainsi, on a : $\frac{31y}{36} = x$. Lorsque c'est le tour de B de jouer, B a 6 chances d'avoir a, puisqu'il y a 6 coups de 7 points, et 30 chances d'avoir x, car, si la somme 7 ne sort pas, c'est de nouveau à A de jouer. Donc $y = \frac{6a+30x}{36}$. En combinant les deux équations trouvées, on obtient $\frac{6a+30x}{36} = \frac{36x}{31}$, d'où la « valeur de la chance » de B est $x = \frac{31a}{61}$ et celle de A est donc $\frac{30a}{61}$. Ainsi, le rapport des chances de A à celles de B, qui est égal au rapport de leurs espérances, est bien de 30 à 31.

La solution de Huygens à la question 2.

Dans sa lettre de juillet 1656, Huygens résout les questions posées par Fermat. A jette les deux dés une fois, puis B deux fois, puis A deux fois, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'un des deux gagne le jeu, c'est-à-dire que A amène la somme 6 ou B la somme 7. Huygens appelle d ce qui est mis au jeu, et x la part qui appartient au joueur[30] A et remarque que, « quand A aura fait le premier coup et B ses deux coups de suite, et encore A l'un de ses deux coups, sans que ni l'un ni l'autre ait rencontré, que alors A aura derechef la même apparence pour gagner qu'il avait dès le commencement, et que par conséquent il lui appartiendra derechef la même part de ce qui est mis au jeu, c'est-à-dire x ». Donc, lorsque A a joué son premier coup, puis B ses deux coups, et que A va « faire le premier de ses deux coups de suite, il aura 5 hazards pour avoir d et 31 hazards pour avoir x, car de 36 divers coups que produisent deux dés, il y en a 5 de 6 points, c'est-à-dire qui lui donnent d ou ce qui est mis au jeu, et 31 qui lui font manquer les 6 points, et ainsi lui donnent x, le mettant en étant d'avoir encore un coup à faire devant que le tour de B soit venu. Mais 5 hazards pour avoir d et 31 hazards pour avoir x valent autant par le théorème précédent que $\frac{5d+31x}{36}$. Ceci est donc la part de A lorsque A fait le premier de ses deux coups de suite ». Ensuite, Huygens remonte ensuite jusqu'au début du jeu. Lorsque B va faire son deuxième coup, A a « 6 hazards pour avoir 0 ou rien[31], et 30 hazards pour avoir $\frac{5d+31x}{36}$ »[32]. Ceci vaut à A : $\frac{6\times 0+30\frac{5d+31x}{36}}{36} = \frac{150d+930x}{1296}$. En remontant encore d'un coup, quand B va jouer son premier coup, « A aura 6 hazards pour avoir 0, et 30 hazards pour avoir $\frac{150d+930x}{1296}$, ce qui vaut $\frac{4500d+27900x}{46656}$ ». Au commencement du jeu, quand A va jouer son premier coup, il a « 5 hazards pour avoir d et 31 hazards pour avoir $\frac{4500d+27900x}{46656}$, ce qui vaut $\frac{372780d+864900x}{1679616}$. Ceci est donc égal à x, et partant x égal à $\frac{10355d}{22631}$. Le parti du joueur A est donc $\frac{10355}{22631}$ de ce qui est mis au jeu, et le reste $\frac{12276}{22631}$ est le parti de B, et l'un est à l'autre comme $\frac{10355}{12276}$, qui sont les nombres de Monsieur de Fermat ». Pour la question suivante, lorsque A joue deux fois, puis B trois fois, puis A deux fois, puis B trois fois, et ainsi de suite, Huygens affirme trouver les mêmes nombres que Fermat, mais en inversant les résultats de A et B. Mais il ne donne aucun détail de calcul.

La solution de de Montmort

De Montmort, dans l'ouvrage déjà cité, résout le problème lorsque A joue une fois, puis B deux fois, puis A deux fois, etc., le joueur A étant Pierre et le joueur B, Paul. Sa

30. Nous dirions l'espérance de A.
31. Car B a 6 cas où il amène 7 points, donc remporte la mise.
32. Puisque, si B n'amène pas 7, A va faire le premier de ses deux coups de suite.

méthode est semblable à celle de Huygens, mais, au lieu de remonter à partir du moment où on revient à la situation initiale, il part du premier coup, et arrête son calcul au moment de ce retour à la situation initiale.

> « Présentement soit nommé A l'argent du jeu, x le sort de Pierre lorsqu'il va jouer son coup, y son sort lorsque Paul va jouer son premier coup, z son sort lorsque Paul va jouer son second coup, & enfin u son sort lorsque le tour de Pierre revenant il va jouer le premier de ses deux coups.
>
> On aura ces quatre égalités[33], $S = \frac{5}{36}A + \frac{31}{36}y$, $y = \frac{30}{36}z$, $z = \frac{30}{36}u$, $u = \frac{5}{36}A + \frac{31}{36}x$; ce qui donne[34] $S = \frac{5}{36}A + \frac{31}{36} \times \frac{25}{36} \times \overline{\frac{5}{36}A + \frac{31}{36}x}$, d'où on tire par réduction et transposition $S = \frac{10355}{22631}A$, ce qui exprime le sort de Pierre, & $A - S = \frac{12276}{22631}A$, qui exprime celui de Paul. »[35]

La solution de Struyck

Struyck, comme de Montmort, procède de proche en proche à partir du premier coup, mais de manière différente cependant.

> « A a 5 chances de gagner, B en a 6. On peut faire 36 coups différents avec 2 dés ordinaires. Nous calculerons d'abord la valeur du premier coup de A, et ensuite celle des coups doubles que les joueurs font tour à tour »[36].

Struyck pose que l'enjeu est 1. Au premier coup, A a 5 chances d'emporter 1 et 31 chances d'emporter 0 ; donc le premier coup de A vaut $\frac{5\times1+31\times0}{36} = \frac{5}{36}$. La partie de l'enjeu qui reste pour les deux joueurs après ce premier coup est donc $\frac{31}{36}$. B joue alors 2 coups. Pour son premier coup, il a 6 chances d'obtenir ces $\frac{31}{36}$ encore en jeu, et 30 chances d'obtenir 0. Le premier coup de B vaut donc $\frac{6\times\frac{31}{36}}{36} = \frac{31}{216}$ et il reste donc en jeu $\frac{31}{36} - \frac{31}{216} = \frac{155}{216}$. Le deuxième coup de B vaut alors $\frac{6\times\frac{155}{216}}{36} = \frac{155}{1296}$ et il reste en jeu après les deux coups de B $\frac{155}{216} - \frac{155}{1296} = \frac{775}{1296}$. Les deux coups de B lui valent donc $\frac{31}{216} + \frac{155}{1296} = \frac{341}{1296}$ et il reste en jeu $\frac{775}{1296}$ après ces deux coups de B. Un calcul analogue pour les deux coups de A donne pour le premier coup de A $\frac{3875}{46656}$ avec un reste de$\frac{24025}{46656}$ et pour son deuxième coup $\frac{120125}{1679616.}$. Les deux coups de A valent ensemble $\frac{259625}{1679616}$. Struyck conclut :

> « Et comme les nombres qui correspondent aux deux coups que B et A font l'un après l'autre conservent entre eux la même proportion jusqu'à l'infini, et qui est donc égale à la proportion des sommes des nombres correspondant aux deux premiers coups que les joueurs font l'un après l'autre[37], il faut diviser $\frac{31}{36}$, la partie de l'enjeu qui reste pour les deux joueurs après le premier coup de A, en raison de ces sommes[38], ce qui se fait de la manière suivante. En divisant, pour abréger le calcul, les numérateurs par 31 et les dénominateurs par 1296, on voit que ces sommes sont l'une à l'autre comme 11 est à $\frac{8375}{1296}$. La somme de ces nombres est $\frac{22631}{1296}$.[39]

33. S est « le sort » de Pierre, donc x et S sont égaux.
34. La barre au-dessus d'une expression joue le rôle de parenthèses.
35. De Montmort P.R., op. cité, p. 157.
36. Struyck N., op. cité, p.32.
37. Les sommes calculées auparavant, $\frac{341}{1296}$ qui est la somme de ce que valent les deux coups de B et $\frac{259625}{1679616}$ qui est la somme de ce que valent les deux coups de A.
38. c'est-à-dire proportionnellement à ces sommes.
39. Si S_B est la part de B, S_A la part de A et qu'on veuille que ces parts soient dans le même rapport que les nombres b et a, on aura : $\frac{S_B}{S_A} = \frac{b}{a}$, donc $\frac{S_B}{b} = \frac{S_A}{a} = \frac{S_B+S_A}{b+a}$ où $S_B + S_A$ est la somme à partager, soit ici $\frac{31}{36}$.

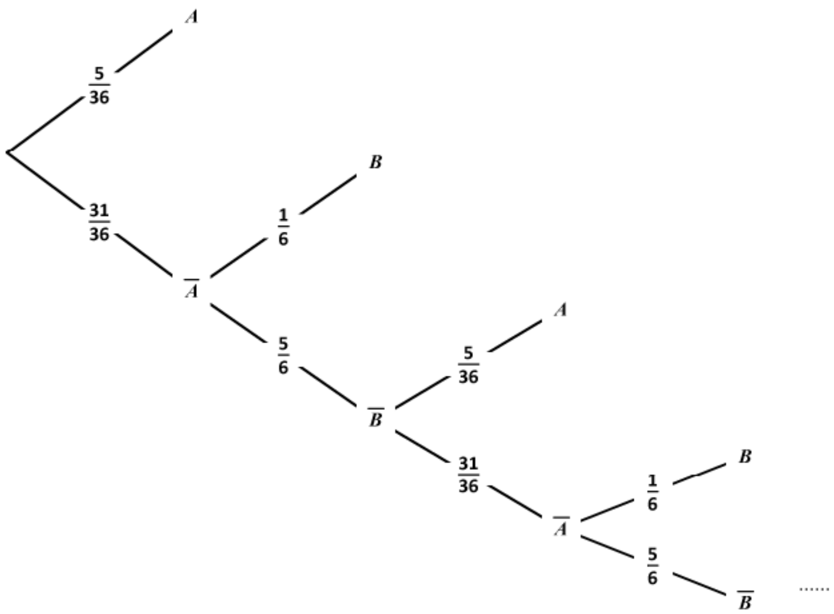
[...] La part de B sera $\frac{12276}{22631}$. Si nous soustrayons ce nombre de l'unité, il reste $\frac{10355}{22631}$; c'est la part de A. La chance de gagner du joueur A est donc à celle de B comme 10355 est à 12276. Ce qu'il fallait trouver » [40].

Résolution grâce aux arbres de probabilités

Les problèmes étudiés peuvent se résoudre avec l'outil des arbres pondérés. Dans toute cette section, lorsque le joueur A lance le dé, on désigne par A l'évènement « A amène la somme 6 » et, lorsque le joueur B lance le dé, on désigne par B l'évènement, « B amène la somme 7 ».

Question 1 de la lettre de Fermat

Les joueurs A et B lancent deux dé cubiques à tour de rôle. A gagne le jeu dès qu'il amène la somme 6 et B gagne le jeu dès qu'il amène la somme 7. A effectue le premier lancer. On peut décrire la situation par deux types d'arbres.



Un tel arbre conduit à une somme infinie pour le calcul de la probabilité x que A gagne le jeu.

$$x = \frac{5}{36} + \frac{31}{36} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{36} + \left(\frac{31}{36} \times \frac{5}{6}\right)^2 \times \frac{5}{36} + \left(\frac{31}{36} \times \frac{5}{6}\right)^3 \times \frac{5}{36} + \left(\frac{31}{36} \times \frac{5}{6}\right)^4 \times \frac{5}{36} \ldots$$

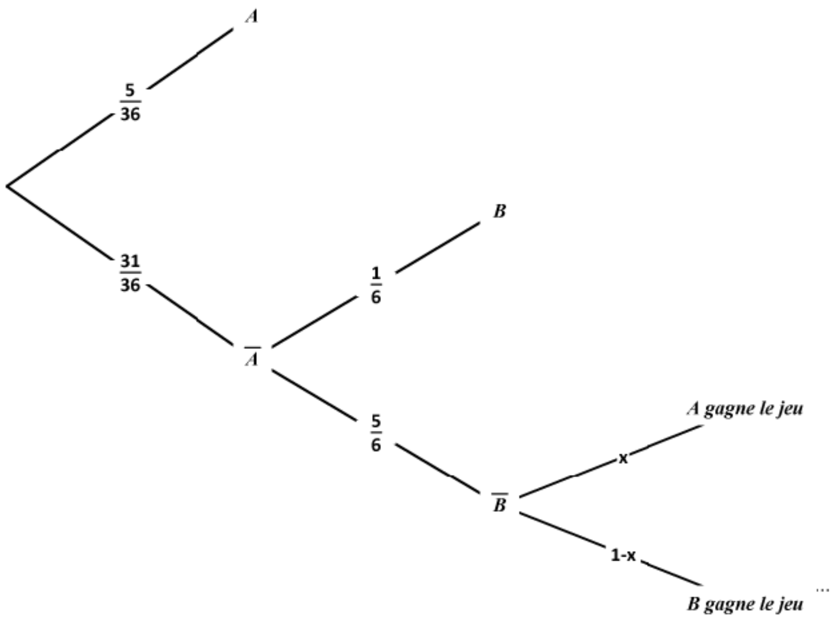
Les connaissances des élèves de terminale sur les sommes de suites géométriques leur permettent de résoudre la question.

$$x = \lim_{n \to +\infty} \frac{5}{36} \sum_{k=0}^{k=n} \left(\frac{31}{36} \times \frac{5}{6}\right)^n = \lim_{n \to +\infty} \frac{5}{36} \times \frac{1 - \left(\frac{31}{36} \times \frac{5}{6}\right)^{n+1}}{1 - \frac{31}{36} \times \frac{5}{6}} = \frac{5}{36} \times \frac{1}{1 - \frac{31}{36} \times \frac{5}{6}} = \frac{30}{61}$$

La probabilité que B gagne le jeu est alors $1 - x = \frac{31}{61}$ et on retrouve le résultat de Fermat et Huygens.

On peut aussi, comme le fait Huygens, remarquer que, lorsque A a lancé une fois le dé sans amener la somme 6, puis B une fois sans amener la somme 7, on se retrouve dans la situation de départ. L'arbre suivant décrit la situation, x étant toujours la probabilité que A gagne le jeu au commencement de celui-ci.

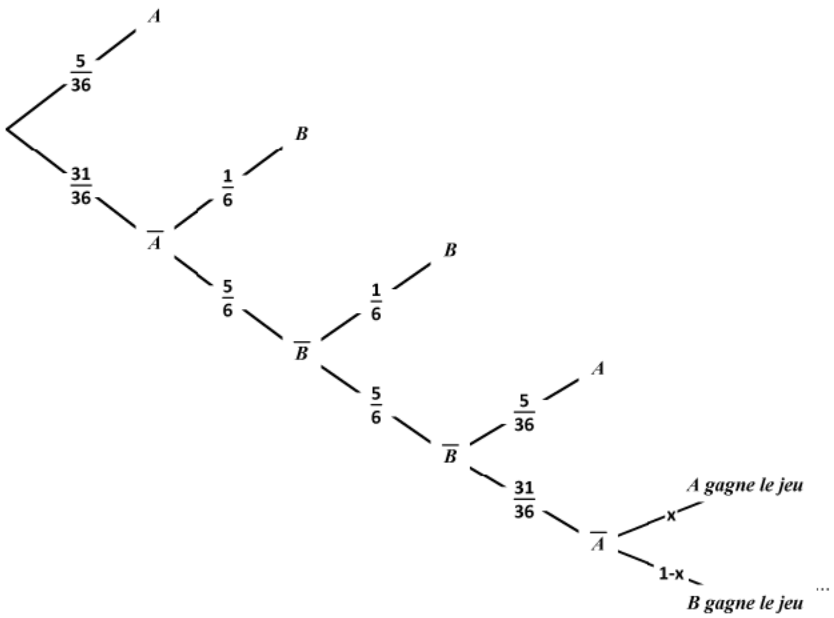
40. Struyck N., op. cité, p.32-34.



On a donc : $x = \frac{5}{36} + \frac{31}{36} \times \frac{5}{6}x$, ce qui redonne $x = \frac{30}{61}$.

Question 2 de la lettre de Fermat

Le joueur A lance les dés une fois, puis le joueur B lance les dés deux fois, puis A deux fois, puis B deux fois, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'un d'eux gagne le jeu. On pourrait aussi faire deux types d'arbres, l'un menant à une somme infinie, l'autre utilisant le fait que, lorsque A a lancé une fois les dés sans amener la somme 6, puis B deux fois sans amener la somme 7, puis A une fois sans amener la somme 6, on se retrouve dans la situation de départ. Nous nous contenterons de ce deuxième arbre, avec toujours les mêmes notations.



On obtient :

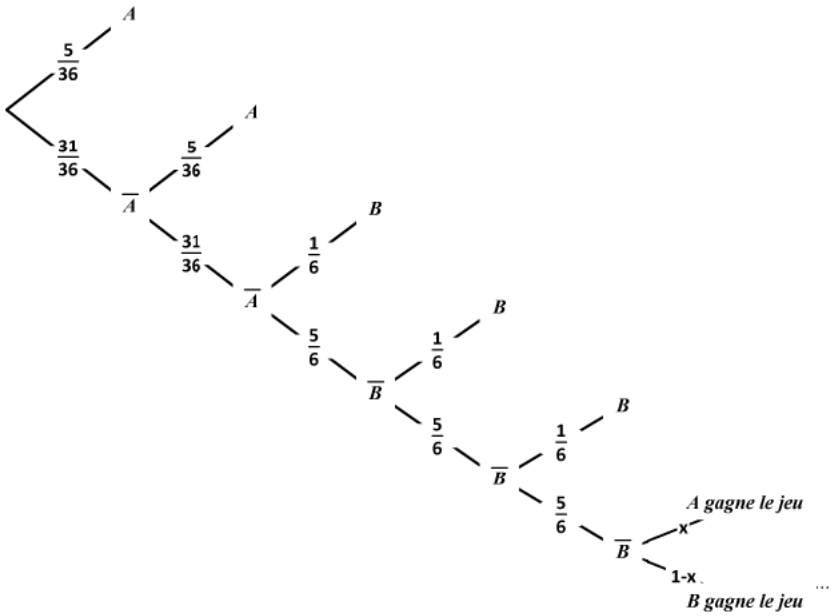
$$x = \frac{5}{36} + \frac{31}{36} \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 \times \frac{5}{36} + \frac{31}{36} \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 \times \frac{31}{36} \times x$$

Toutes réductions faites :

$$x = \frac{5\left(36 \times 6^2 + 31 \times 5^2\right)}{36^2 \times 6^2 - 31^2 \times 5^2} = \frac{10355}{22631} \text{ et } 1 - x = \frac{12276}{22631}$$

Question 3 de la lettre de Fermat

Le joueur A lance les dés deux fois, puis le joueur B lance les dés trois fois, puis A deux fois, puis B trois fois, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'un d'eux gagne le jeu. Nous nous contenterons de donner l'arbre de probabilités qui vous permettra de départager Fermat et Huygens sur cette question.



Conclusion

Le premier problème cité, évoqué dans la lettre de Pascal, a fait l'objet de différentes utilisations en classe depuis très longtemps, en terminale de séries scientifiques d'abord, puis, lorsque la notion d'expériences répétées indépendantes s'est trouvée au programme de 1S (réforme dite « Chatel », de 2011 à 2019), dans cette classe. Avec la nouvelle réforme des lycées (dite « Blanquer »), ce problème trouverait sa place en spécialité mathématiques de terminale générale. Vous trouverez l'énoncé d'un problème ouvert et des comptes-rendus d'expériences en classe sur la page consacrée à « Utilisation de l'histoire des mathématiques en probabilités » du groupe M. : A.T.H. du site de l'IREM de Paris [41].

Nous proposons dans la rubrique « Dans nos classes » un problème possible sur la généralisation proposée par de Moivre. Nous espérons que cet article donnera envie à nos lectrices et lecteurs de faire lire des extraits de certains des textes présentés à leurs élèves et serions très intéressées par un retour sur d'éventuelles séances en classe.

41. https ://irem.u-paris.fr/utilisation-de-lhistoire-des-mathematiques-en-probabilites

https://archive.org/details/BIUSante_353589/page/n4/mode/1up

Pascasii Justi *de Alea* libri duo
Joueurs de Dés
Gravure de Cornelis Van Dalen

Problèmes de dés

Groupe M. :A.T.H.

Vous trouverez dans cette rubrique des propositions d'activités pour la classe utilisant des extraits de textes historiques en lien, d'une part avec les problèmes de dés étudiés dans la rubrique « Conte du Lundi », d'autre part avec la méthode de Pascal pour résoudre le « problème des partis », présentée dans la rubrique « Étude ».

Problème de dés

La question de savoir en combien de lancers d'un dé on peut parier sans désavantage d'obtenir au moins un six, ou en combien de lancers de deux dés on peut parier d'obtenir au moins une fois un double six, a donné lieu à nombre d'études de la part des mathématiciens des XVII^e^ et XVIII^e^ siècles, dans des lettres ou des traités, et à diverses méthodes et généralisations. Ce problème a été utilisé en classe sous diverses formes, allant d'énoncés guidés à un problème ouvert. Nous donnons ci-dessous un problème destiné à des élèves de spécialité mathématiques (terminale générale) qui permet d'aborder la question à l'aide d'extraits de *La doctrine des chances* de de Moivre. La première partie est destinée à examiner les cas particuliers de lancers successifs d'un dé et de deux dés (la question étant là d'obtenir au moins une fois un as avec un dé ou au moins une fois deux as avec deux dés), et la seconde partie présente la généralisation que fait de Moivre, pour laquelle il utilise des logarithmes et une approximation de $\ln(1+x)$.

La première partie peut être remplacée par une séance de recherche en classe sur un problème ouvert. Nous mettons à la suite de ce problème, dont la première partie est guidée, un exemple d'énoncé de problème ouvert, qui a été utilisé en classe depuis de nombreuses années par les membres du groupe M. :A.T.H.. Vous trouverez sur la page du groupe consacrée à l'histoire des probabilités [1] des comptes-rendus de séances en classe et de l'exploitation faite de ces séances pour le cours de probabilités.

Étude du texte de de Moivre

I. Étude d'un problème de dés

Le texte suivant est une traduction d'un extrait de : Abraham DE MOIVRE, *The doctrine of chances or, a method of calculating the probability of events in play* (3 ème édition, 1756) ; dans cet extrait (pages 9 -11), Abraham de Moivre se propose de résoudre un problème de probabilités concernant le lancer d'un dé équilibré à six faces numérotés de 1 à 6. Dans ce texte, « obtenir un as » signifie « obtenir au moins un as ».

1. https ://irem.u-paris.fr/utilisation-de-lhistoire-des-mathematiques-en-probabilites

CAS I

Trouver la probabilité d'obtenir un as en deux lancers d'un dé

SOLUTION

La probabilité d'obtenir un as la première fois est $\frac{1}{6}$; donc $\frac{1}{6}$ est la première partie de la probabilité demandée.
Si l'as n'est pas sorti la première fois, il peut encore être obtenu la seconde, mais la probabilité de ne pas sortir la première fois est $\frac{5}{6}$, et la probabilité de l'obtenir la seconde fois est $\frac{1}{6}$; donc la probabilité d'échouer la première fois et de l'obtenir la seconde fois est $\frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$; et c'est la seconde partie de la probabilité demandée, et donc la probabilité demandée est en tout : $\frac{1}{6} + \frac{5}{36} = \frac{11}{36}$.

1. Illustrer la situation par un arbre de probabilités (Lors de l'expérience aléatoire consistant à lancer un dé équilibré à six faces numérotés de 1 à 6, on notera A l'évènement « Obtenir un as ») et retrouver le résultat de de Moivre.
2. Déterminer la probabilité d'obtenir au moins un as en lançant trois fois de suite le dé, puis quatre fois de suite.
3. En déduire le nombre n de lancers nécessaires pour que la probabilité d'obtenir au moins un as soit supérieure à $\frac{1}{2}$.
4. On lance désormais deux dés simultanément.
   (a) Quelle est la probabilité d'obtenir deux as en un lancer des deux dés ?
   (b) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois deux as en deux lancers de deux dés ?
   (c) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois deux as en n lancers de deux dés ?
   (d) En déduire le nombre n de lancers nécessaires pour que la probabilité d'obtenir au moins une fois deux as en n lancers de deux dés soit supérieure à $\frac{1}{2}$.

II. Étude d'un texte de de Moivre

Voici un autre extrait (pages 36 -37) du même ouvrage d'Abraham de Moivre.

PROBLÈME III

Trouver en combien d'essais un évènement se produira probablement, ou combien d'essais seront nécessaires pour qu'il soit indifférent de parier sur sa réussite ou son échec, en supposant que a est le nombre de chances pour sa réussite à chaque essai, et b le nombre de chances de son échec.

On considère une expérience aléatoire, comme par exemple : « lancer un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 » et et un évènement A résultat possible de cette expérience, comme par exemple « Obtenir un as ». On répète n fois l'expérience, ce que de Moivre appelle « faire n essais ». « Parier sur la réussite ou l'échec de l'évènement A » signifie pour de Moivre : « Parier que l'évènement A se produira au moins une fois durant les n « essais ».

1. On suppose que *« a est le nombre de chances pour sa réussite à chaque essai, et b le nombre de chances de son échec »*.

(a) Pour l'expérience aléatoire donnée en exemple ci-dessus et l'évènement A, donner la valeur de a et b. Quelle est la probabilité de A ?

(b) D'une manière générale, donner la probabilité p d'un évènement en fonction du « nombre a de chances pour sa réussite » et du « nombre b de chances de son échec », ainsi que la probabilité de l'évènement contraire.

(c) Comment appelle-t-on, dans notre langage moderne, le « nombre a de chances pour la réussite » d'un évènement A ?

2. On répète n fois l'expérience aléatoire considérée et on appelle E_n l'évènement : « l'évènement A se réalise au moins une fois lors des n essais ».

(a) Exprimer par une phrase l'évènement $\overline{E_n}$.

(b) Quelle doit être la probabilité q_n de l'évènement $\overline{E_n}$ pour qu'il soit « indifférent de parier » que l'évènement E_n se produit ou non ?

(c) Exprimer q_n en fonction de la probabilité q de l'évènement $\overline{A}$, puis en fonction de a et b.

(d) De Moivre affirme que, dans l'hypothèse où il est « indifférent de parier sur la réussite ou l'échec », on a : $n = \frac{\ln 2}{\ln(a+b) - \ln b}$. Justifier cette affirmation.

(e) On pose $\frac{a}{b} = \frac{1}{r}$. Exprimer n en fonction de r

3. Une approximation de $\ln(1 + x)$.

(a) Pour tout x réel positif, donner la valeur exacte de $\int_0^x \frac{1}{1+t} dt$.

(b) Justifier : Pour tout t réel positif, justifier : $\frac{1}{1+t} = 1 - \frac{t}{1+t}$.

(c) En déduire, pour tout x réel positif, l'expression de $ln(1 + x) - x$ comme une intégrale.

(d) Montrer que, pour tout x réel positif, $|\ln(1 + x) - x| \leq \frac{x^2}{2}$.

(e) De Moivre, pour le problème étudié aux deux premières questions, explique : « Supposons maintenant que r est [...] suffisamment grand par rapport à l'unité [2], [...] nous aurons par conséquent l'équation $\frac{n}{r} = \ln 2$, ou $n = r \ln 2$ ». Vérifier, à l'aide du résultat de 2.e, que cela revient à remplacer $\ln(1 + r)$ par r. Donner, en fonction de r, une majoration de l'erreur commise en prenant pour n cette valeur.

(f) De Moivre donne comme premier exemple d'application : « Soit proposé de trouver en combien de lancers on peut parier d'obtenir deux as avec deux dés, avec égalité de chance ». Donner dans ce cas les valeurs de a, b, r. Quel résultat obtient-il avec sa formule ? Comparer avec la partie I.

2. C'est-à-dire que $\frac{1}{r}$ est très petit.

Un problème ouvert

Texte distribué aux élèves

Georges et Méré, comme chaque jour à midi, jouent au 421 sur le comptoir du bar de Port-Royal, à la station de R.E.R.. Une discussion s'engage sur les paris :

Il est évidemment désavantageux de parier qu'on obtiendra 6 en lançant une fois un dé. Est-ce encore le cas si on parie qu'on obtiendra au moins une fois un 6 en lançant deux fois le dé ? En le lançant trois fois ? En le lançant quatre fois ?

Georges se tourne alors vers son voisin de droite, un certain Blaise Pascal, pour lui demander son avis. Retrouver la réponse de celui-ci en développant ses raisonnements.

Questions supplémentaires :

1. On lance quatre fois un dé : est-il plus avantageux de parier qu'on va obtenir exactement une fois le numéro 6 ou exactement deux fois le numéro 6 ?
2. Même question si on lance douze fois le dé.
3. Est-il plus avantageux de parier qu'on va obtenir au moins une fois le numéro 6 en lançant quatre fois un dé ou de parier qu'on va obtenir au moins une fois un double-six en lançant vingt-quatre fois deux dés ?

Enoncé (provenant d'un problème historique) inspiré de : Frugier, *Exercices ordinaires de probabilités*, Ellipse, 1992.

Le problème des partis

Deux joueurs jouent à « un jeu de pur hasard », et le premier qui aura gagné un nombre déterminé de points sera déclaré vainqueur. Mais ils doivent « quitter le jeu » avant qu'aucun des deux joueurs n'ait atteint le nombre de points entraînant la victoire. Comment doivent-ils alors partager « l'argent qu'ils ont mis au jeu » ?

L'article « Pascal au carrefour des probabilités, de l'algorithmique, de la récurrence et de la combinatoire » de la rubrique « Étude » présente entre autres la solution que donne Pascal de ce problème, et en montre le caractère algorithmique, ainsi que l'intérêt que présentent les problèmes d'implémentation de cet algorithme dans un langage de programmation. Nous présentons ci-dessous un exercice destiné à des élèves de spécialité mathématiques de terminale générale exploitant le texte de Pascal. Cet exercice a été expérimenté en terminale scientifique (2016), mais en examinant le point de vue algorithmique sans la partie « programmation », aucun langage n'étant dans les attendus du programme à l'époque. Il peut être utile de faire au préalable un exercice présentant la récursivité ; nous faisons donc précéder cette étude de la méthode de Pascal d'un tel exercice. La question sur l'exponentiation rapide est particulièrement intéressante pour des élèves suivant l'option « maths expertes », qui comporte une partie « arithmétique ».

Il semble nécessaire que les élèves se soient approprié·es le problème avant de se lancer dans cette étude. Le groupe M. :A.T.H. a fait à ce sujet de multiples expérimentations en classe depuis de nombreuses années, sous des formes diverses, d'abord avec des exercices guidés, puis sous forme de problème ouvert. Nous donnons à la suite de l'exercice de lecture de la lettre de Pascal donnant sa solution les deux types d'exercices, chacun·e pouvant ainsi choisir et adapter la forme qui lui convient le mieux dans sa classe pour des exercices préliminaires.

Vous trouverez dans la brochure n°61 de l'IREM de Paris, disponible en ligne [3] ou que vous pouvez commander à l'IREM de Paris sous forme papier, une présentation historique du problème des partis, ainsi que les comptes-rendus de diverses expérimentations en classe sur les exercices guidés (pages 100 -138). Les annexes de ces pages présentent des textes historiques sur ce problème de Pacioli à la correspondance de Pascal et Fermat. La page « Histoire des maths et probabilités » [4] du groupe M.A.T.H. donne un compte-rendu d'expérimentation en classe de terminale scientifique du problème ouvert.

Enfin, nous mettons à la fin de cette rubrique des extraits de deux lettres de Pascal à Fermat, l'une du 29 juillet 1654 présentant la méthode de Pascal (un extrait plus large que celui de l'exercice étudiant cette méthode) et l'autre du 24 août 1654 rappelant la méthode de Fermat.

3. http ://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/publications/IPS97031.pdf
4. https ://irem.u-paris.fr/utilisation-de-lhistoire-des-mathematiques-en-probabilites

Récursivité

Récursivité et exponentiation rapide

En informatique, une fonction qui contient un appel à elle-même est dite récursive.

— **Un exemple simple : la factorielle.**

$$n! = \begin{cases} 1\, si\, n = 0 \\ n\,(n-1)!\ sinon \end{cases}$$

Les suites définies par récurrence sont un exemple de récursivité. Mais ce ne sont pas les seuls et la présentation récursive permet de présenter simplement des algorithmes astucieux et efficaces.

Il est essentiel de donner $0\,!{=}1$, pour permettre l'initialisation (exactement comme dans la définition de toute suite définie par récurrence). Cette initialisation est appelé cas de base.

— **Algorithme récursif de calcul de la fonction $\boldsymbol{Fac(n)}$** :
Si $n = 0$, renvoyer 1
Dans tous les autres cas, renvoyer : $nFac(n-1)$

Algorithme écrit dans le langage Python :

```
def fac(n):
    if n<0 :
        print('Mauvaise entrée')
        #raise ValueError()
        return -1
    elif n==0:
        return(1)
    else :
        return(n*fac(n-1))
```

• **Un exemple astucieux : l'élévation à une puissance ou exponentiation rapide**

Une remarque préalable : pour tout nombre a, $a^{14} = \left(a^7\right)^2$ et $a^{23} = a\left(a^{11}\right)^2$. Ainsi, on ramène l'élévation à une puissance n au même calcul avec un exposant deux fois plus petit, suivi d'une élévation au carré et éventuellement d'un produit. Ainsi, si on calcule a^{14} par la méthode « naturelle », il faut effectuer 13 multiplications. En utilisant la remarque précédente, on a $a^{14} = \left(a^7\right)^2$, puis $a^7 = a\left(a^3\right)^2$, enfin $a^3 = a \times a^2$; on va donc effectuer 3 élévations au carré (c'est-à-dire trois multiplications), et deux multiplications par le nombre a, en commençant par le calcul de a^2, qu'on multiplie par a pour obtenir a^3, qu'on élève au carré, etc. Soit en tout 5 multiplications.

De manière générale : pour tout nombre a non nul et tout entier naturel n, on a (complétez les formules) :

— Cas de base : $a^0 = 1$.
— Si n est pair, $a^n = ...$
— Si n est impair, $a^n = ...$

1. Écrire l'algorithme récursif permettant de calculer a^n pour tout réel a non nul et tout entier naturel n. (Vous appellerez cette fonction récursive : puissance(a, n)).
2. Programmez cette fonction dans le langage Python.

Étude de la solution de Pascal

Le problème des partis : la méthode de Pascal

Partie I : le texte de Pascal

1. Lire (silencieusement et individuellement) la lettre ci-dessous et terminez le raisonnement de Pascal pour faire le partage.

EXTRAIT D'UNE LETTRE DE PASCAL À FERMAT 29 JUILLET 1654

Voici à peu près comment je fais pour savoir la valeur de chacune des parties, quand deux joueurs jouent, par exemple, en trois parties, et chacun a mis 32 pistoles au jeu [*la mise totale est donc 64 pistoles*] :

Posons que le premier en ait *deux* et l'autre *une* ; ils jouent maintenant une partie, dont le sort est tel que, si le premier la gagne, il gagne tout l'argent qui est au jeu, savoir 64 pistoles ; si l'autre la gagne, ils sont *deux* parties à *deux* parties, et par conséquent, s'ils veulent se séparer, il faut qu'ils retirent chacun leur mise, savoir chacun 32 pistoles.

Considérez donc, Monsieur, que, si le premier gagne, il lui appartient 64 ; s'il perd, il lui appartient 32. Donc, s'ils veulent se séparer sans la jouer, le premier doit dire : « Je suis sûr d'avoir 32 pistoles, car la perte même me les donne ; mais pour les 32 autres, peut-être je les aurai, peut-être vous les aurez, le hasard est égal. Partageons donc ces 32 pistoles par la moitié et me donnez, outre cela, les 32 qui me sont sûres ». Il aura donc 48 pistoles et l'autre 16.

Posons maintenant que le premier ait *deux* parties et l'autre *point*, et ils commencent à jouer une partie. Le sort de cette partie est tel que, si le premier la gagne, il tire tout l'argent, 64 pistoles ; si l'autre la gagne, les voilà revenus au cas précédent, auquel le premier aura deux parties et l'autre une.

Or, nous avons déjà montré qu'en ce cas il appartient, à celui qui a les deux parties, 48 pistoles : donc, s'ils veulent ne point jouer cette partie, il doit dire ainsi : « Si je la gagne, je gagnerai tout, qui est 64 ; si je la perds, il m'appartiendra légitimement 48 : donc donnez-moi les 48 qui me sont certaines, au cas même que je perde, et partageons les 16 autres par moitié, puisqu'il y a autant de hasard que vous les gagniez comme moi. » Ainsi, il aura 48 et 8, qui sont 56 pistoles.

Posons enfin que le premier n'ait qu'une partie et l'autre point. Vous voyez, Monsieur, que, s'ils commencent une partie nouvelle, le sort en est tel que,...

2. Rédiger sur feuille la fin du raisonnement de Pascal.

3. En 1654, Pascal écrit un *Traité du Triangle Arithmétique*, qui sera publié et diffusé en 1665, après sa mort. Il y explique l'usage de ce triangle pour résoudre le problème des partis. On peut y lire :

> « [...] la première chose qu'il faut remarquer est que deux joueurs qui jouent en deux parties, dont le premier en a une à point [le premier mène 1 à 0], sont en même condition que deux autres qui jouent en trois parties, dont le premier en a deux, et l'autre une : car il y a cela de commun que, pour achever, il ne manque qu'une partie au premier et deux à l'autre ; et c'est en cela que

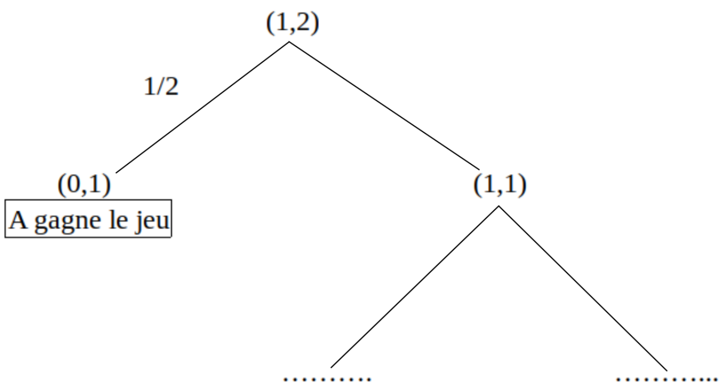
consiste la différence des avantages, et qui doit régler les partis ; de sorte qu'il ne faut proprement avoir égard qu'au nombre de parties qui restent à gagner à l'un et à l'autre, et non pas au nombre de celles qu'ils ont gagnées[...] »

Nous allons appliquer une méthode analogue à celle de Pascal, mais au lieu de raisonner sur la part de la mise qui appartient à chacun, nous raisonnerons sur la probabilité qu'a le premier joueur (appelé A) de gagner le jeu, lorsqu'on connaît le nombre de points qui lui manquent pour gagner, ainsi que le nombre de points qui manquent au deuxième joueur (appelé B).

Partie II : application de la méthode

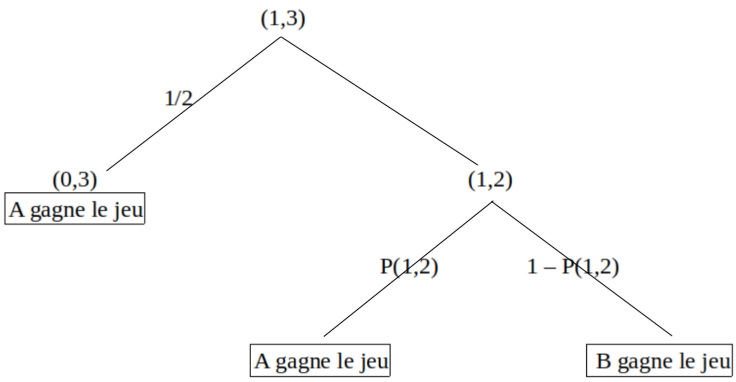
Dans la suite, on appelle $P(a, b)$ la probabilité que A gagne le jeu lorsqu'il manque a points à A et b points à B, a et b étant deux entiers naturels non tous les deux nuls (*Prendre le temps de réfléchir à ce que cela signifie*). Ainsi, $P(2, 4)$ est la probabilité que A gagne le jeu lorsqu'il manque 2 points à A et 4 points à B.

1. Donner la valeur de $P(1, 1), P(0, 1), P(1, 0)$.
2. Compléter l'arbre ci-dessous, et calculer $P(1, 2)$. Le couple $(1; 2)$ s'appelle la racine de l'arbre et désigne l'événement "il manque 1 point à A et 2 points à B".



Arbre de probabilités

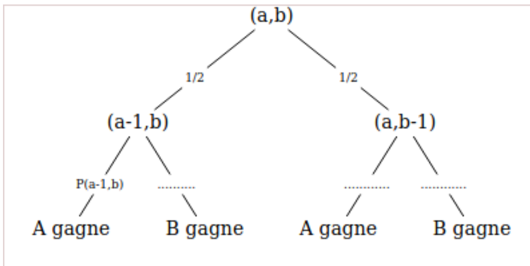
3. À l'aide de l'arbre suivant à compléter, donner l'expression de $P(1, 3)$ à l'aide de $P(1, 2)$, puis calculer $P(1, 3)$.



Calcul de $P(1, 3)$

4. Construisez un arbre analogue pour calculer $P(2, 3)$(vous pouvez utiliser les résultats obtenus dans les questions précédentes pour abréger les calculs).

5. À l'aide de l'arbre suivant à compléter, exprimer $P(a\ ;\ b)$ en fonction de $P(a\ ;\ b-1)$ et $P(a - 1\ ;\ b)$.



Relation de récurrence

6. Que valent $P(0\ ;b)$, $P(a\ ;\ 0)$, $P(a\ ;\ a)$ où a et b sont des entiers naturels strictement positifs ?
7. **Application au calcul de** $P(2, 3)$.
   a. Construire un arbre en plaçant à la racine de l'arbre le couple $(2; 3)$ et en arrêtant les branches dès que $a = 0$ ou $b = 0$ ou $a = b$ (Inutile de spécifier « gagne le jeu » ; vous pouvez simplement entourer les couples donnant la victoire à A en couleur, et ceux vérifiant $a = b$ dans une autre couleur).
   b. Compléter : $P(0\ ;\ 2) =$............... et $P(1\ ;\ 1) =$....................... donc $P(1\ ;\ 2) =$..................
   c. Continuer les calculs pour obtenir $P(2\ ;\ 3)$ en « remontant » l'arbre.
8. Donner une relation entre $P(a\ ;\ b)$ et $P(b\ ;\ a)$ en justifiant votre réponse.

Partie III : Algorithme et programmation

(salle informatique)

La partie précédente permet de définir une fonction récursive, qu'on notera $probaparti(a, b)$, qui renvoie, pour deux entiers naturels a et b non tous deux nuls, la probabilité que A gagne le jeu s'il manque a points à A et b points à B.

1. Écrire l'algorithme récursif permettant de calculer $P(a, b)$.
2. Ouvrez le fichier algopascal.py et utilisez l'algorithme pour calculer $P(2, 3)$. Le résultat est-il conforme à votre attente ?
3. Faire des essais avec d'autres couples.

Exercices préliminaires guidés

Les exercices ci-dessous ont été expérimentés en première A_1 dans les années quatre-vingts, du temps où le lycée général proposait un enseignement par série : la série littéraire était désignée par la lettre générique A et se déclinait en A_1 (lettres et mathématiques avec un horaire en première et en terminale de 5 heures hebdomadaires et un programme préconisant l'utilisation de l'histoire des mathématiques), A_2 (lettres et langues, avec un horaire de deux heures hebdomadaires), A_3 (lettres et art, même horaire que A_2), [5] ...Ces exercices constituaient une introduction à la lecture de la correspondance entre Pascal et Fermat. Le compte-rendu des séances en classe se trouvent pages 124-128 de la brochure citée plus haut [6].

Exercices proposés aux élèves

Ariane et Bernard jouent à un jeu qui consiste en plusieurs parties de « pile ou face ».

Chaque partie rapporte un point à celle ou celui qui la gagne.

Celui ou celle qui obtiendra en premier 3 points gagnera la mise de 64€.

Mais Ariane et Bernard doivent s'arrêter avant d'avoir pu terminer le jeu. Avant de se séparer, il leur faut se partager la mise équitablement.

Exercice 1 (première méthode)

1. Quand le jeu s'arrête, Ariane a gagné 2 points et Bernard 1 point. Comment répartir équitablement la mise de 64€ ?

   Indication *:*

   Au moment où le jeu s'arrête, il manque 1 point à Ariane et 2 points à Bernard pour gagner 64€. On peut donc examiner les différents scenarios possibles pour les parties qui se joueraient si Ariane et Bernard ne devaient pas s'arrêter. La présentation de ces scenarios sous forme d'un arbre facilitera la recherche d'une répartition équitable.

   On notera A une partie gagnée par Ariane, et B une partie gagnée par Bernard.

2. Quand le jeu s'arrête, Ariane a gagné 1 point et Bernard 0 point. Proposer une répartition équitable de la mise.

Exercice 2 (deuxième méthode) Quand le jeu s'arrête, Ariane a gagné 1 point et Bernard 0 point.

1. Quel est le nombre maximum des parties qui resteraient à jouer ? Soit n ce nombre.
2. En notant A une partie gagnée par Ariane, et B une partie gagnée par Bernard, dresser le tableau des résultats que pourraient donner ces n parties, si elles étaient jouées.
3. En déduire une répartition équitable de la mise de 64€.

   Indications :

   Si le nombre maximum de parties était 3, l'écriture « ABA » signifierait :

   — $n = 3$.

   — Ariane gagne la première et la troisième partie, Bernard la deuxième.

5. À partir de 1995, à l'occasion de la mise en place des bacs L, ES, S, les horaires hebdomadaires de mathématiques ont commencé à diminuer.

6. Lien : http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/publications/IPS97031.pdf

Un problème ouvert

Un problème de partage

Consignes

- Un temps de recherche individuelle silencieuse (environ un quart d'heure).
- Mise en commun des méthodes de résolution du problème.
- Chaque groupe rédige sur feuille (une feuille par groupe) la (ou les) solutions(s) trouvé(e) pour la première situation, AVANT de chercher les solutions des autres situations.
- Traiter de même la deuxième situation, puis la troisième.

Première situation : Ariane et Bernard jouent à un jeu qui consiste en plusieurs parties de « pile ou face ». Chaque partie rapporte 1 point à celui qui la gagne. Le premier qui a 3 points est le vainqueur du jeu et il gagne 64 euros (cette somme s'appelle la « mise »).

Mais Ariane et Bernard sont obligés de s'arrêter avant d'avoir pu terminer le jeu. Quand ils s'arrêtent, Ariane a gagné deux parties (elle a donc 2 points) et Bernard une partie (il a donc 1 point). Avant de se séparer, ils veulent se partager la mise puisque personne ne l'a complètement gagnée.

Mais alors, comment partager la mise, c'est-à-dire que donner à Ariane et Bernard pour que le partage soit équitable ?

Quel partage proposez-vous et pourquoi ?

Deuxième situation : La règle du jeu est la même. Le vainqueur est celui qui obtient le premier 3 points.

Quel partage proposez-vous si, au moment de l'arrêt du jeu, Ariane a 1 point et Bernard a 0 point ?

Troisième situation : le premier qui obtient 8 points est le vainqueur du jeu. Au moment de l'arrêt du jeu, Ariane a 1 point et Bernard a 0 point. Quel partage proposez-vous ?

Lettre de Pascal à Fermat du 29 juillet 1654 (extrait) [7]

1. L'impatience me prend aussi bien qu'à vous et, quoique je sois encore au lit, je ne puis m'empêcher de vous dire que je reçus hier au soir, de la part de M. de Carcavi, votre lettre sur les partis, que j'admire si fort que je ne puis vous le dire. Je n'ai pas le loisir de m'étendre, mais, en un mot, vous avez trouvé les deux partis des dés et des parties dans la parfaite justesse : j'en suis tout satisfait, car je ne doute plus maintenant que je ne sois dans la vérité, après la rencontre admirable où je me trouve avec vous.

J'admire bien davantage la méthode des parties que celle des dés ; j'avois vu plusieurs personnes trouver celle des dés, comme M. le chevalier de Méré, qui est celui qui m'a proposé ces questions, et aussi M. de Roberval : mais M. de Méré n'avoit jamais pu trouver

7. Fermat *Œuvres*, publiées par P. Tannery et C. Henry, tome II, Gauthier-Villars, Paris, 1894, p. 290-291.

la juste valeur des parties ni de biais pour y arriver, de sorte que je me trouvois seul qui eusse connu cette proportion.

2. Votre méthode est très sûre et m'est la première venue à la pensée dans cette recherche ; mais parce que la peine des combinaisons est excessive, j'en ai trouvé un abrégé et proprement une autre méthode bien plus courte et bien plus nette, que je voudrais pouvoir vous dire ici en peu de mots : car je voudrais désormais vous ouvrir mon cœur, s'il se pouvait, tant j'ai de joie de voir notre rencontre. Je vois bien que la vérité est la même à Toulouse et à Paris.

Voici à peu près comment je fais pour savoir la valeur de chacune des parties, quand deux joueurs jouent, par exemple, en trois parties, et chacun a mis 32 pistoles au jeu :

Posons que le premier en ait deux et l'autre une ; ils jouent maintenant une partie, dont le sort est tel que, si le premier la gagne, il gagne tout l'argent qui est au jeu, savoir 64 pistoles ; si l'autre la gagne, ils sont deux parties à deux parties, et par conséquent, s'ils veulent se séparer, il faut qu'ils retirent chacun leur mise, savoir chacun 32 pistoles.

Considérez donc, Monsieur, que, si le premier gagne, il lui appartient 64 ; s'il perd, il lui appartient 32. Donc, s'ils veulent se séparer sans la jouer, le premier doit dire : « Je suis sûr d'avoir 32 pistoles, car la perte même me les donne ; mais pour les 32 autres, peut-être je les aurai, peut-être vous les aurez, le hasard est égal. Partageons donc ces 32 pistoles par la moitié et me donnez, outre cela, les 32 qui me sont sûres ». Il aura donc 48 pistoles et l'autre 16.

Posons maintenant que le premier ait deux parties et l'autre point, et ils commencent à jouer une partie. Le sort de cette partie est tel que, si le premier la gagne, il tire tout l'argent, 64 pistoles ; si l'autre la gagne, les voilà revenus au cas précédent, auquel le premier aura deux parties et l'autre une.

Or, nous avons déjà montré qu'en ce cas il appartient, à celui qui a les deux parties, 48 pistoles : donc, s'ils veulent ne point jouer cette partie, il doit dire ainsi : « Si je la gagne, je gagnerai tout, qui est 64 ; si je la perds, il m'appartiendra légitimement 48 : donc donnez-moi les 48 qui me sont certaines, au cas même que je perde, et partageons les 16 autres par moitié, puisqu'il y a autant de hasard que vous les gagniez comme moi. » Ainsi, il aura 48 et 8, qui sont 56 pistoles.

Posons enfin que le premier n'ait qu'*une* partie et l'autre *point*. Vous voyez, Monsieur, que, s'ils commencent une partie nouvelle, le sort en est tel que, si le premier la gagne, il aura *deux* parties à *point*, et partant, par le cas précédent, il lui appartient 56 ; s'il la perd, ils sont partie à partie : donc il lui appartient 32 pistoles. Donc il doit dire : « Si vous voulez ne la pas jouer, donnez-moi 32 pistoles qui me sont sûres, et partageons le reste de 56 par la moitié. De 56 ôtez 32, reste 24 ; partagez donc 24 par la moitié, prenez-en 12 et moi 12, qui, avec 32, font 44.

Lettre de Pascal à Fermat du 24 Août 1654 (extrait) [8]

Voici comment vous procédez quand il y a *deux* joueurs :

Si deux joueurs, jouant en plusieurs parties, se trouvent en cet état qu'il manque *deux* parties au premier et *trois* au second, pour trouver le parti, il faut, dites-vous, voir en combien de parties le jeu sera décidé absolument. Il est aisé de supputer que ce sera en *quatre* parties, d'où vous concluez qu'il faut voir combien quatre parties se combinent entre deux joueurs et voir combien il y a de combinaisons pour faire gagner le premier et combien pour le second et partager l'argent suivant cette proportion. J'eusse eu peine à entendre ce discours, si je ne l'eusse su de moi-même auparavant ; aussi vous l'aviez écrit dans cette pensée. Donc, pour voir combien quatre parties se combinent entre deux joueurs, il faut imaginer qu'ils jouent avec un dé à deux faces (puisqu'ils ne sont que deux joueurs), comme à croix et pile, et qu'ils jettent quatre de ces dés (parce qu'ils jouent en quatre parties) ; et maintenant il faut voir combien ces dés peuvent avoir d'assiettes différentes. Cela est aisé à supputer : ils en peuvent avoir *seize*, qui est le second degré de *quatre*, c'est-à-dire le quarré. Car figurons-nous qu'une des faces est marquée a, favorable au premier joueur, et l'autre b, favorable au second ; donc ces quatre dés peuvent s'asseoir sur une de ces seize assiettes :

a	a	a	a	a	a	a	a	b	b	b	b	b	b	b	b
a	a	a	a	b	b	b	b	a	a	a	a	b	b	b	b
a	a	b	b	a	a	b	b	a	a	b	b	a	a	b	b
a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b
1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	2	1	2	2	2

Et parce qu'il manque deux parties au premier joueur, toutes les faces qui ont deux a le font gagner : donc il en a 11 pour lui ; et parce qu'il y manque trois parties au second, toutes les faces où il y a trois b le peuvent faire gagner : donc il y en a 5. Donc il faut qu'ils partagent la somme comme 11 à 5.

[...] Je communiquai votre méthode à nos Messieurs, sur quoi M. de Roberval me fit cette objection :

Que c'est à tort que l'on prend l'art de faire le parti sur la supposition qu'on joue en *quatre* parties, vu que, quand il manque *deux* parties à l'un et *trois* à l'autre, il n'est pas de nécessité que l'on joue *quatre* parties, pouvant arriver qu'on n'en jouera que *deux* ou *trois*, ou à la vérité peut-être *quatre* ;

Et ainsi qu'il ne voyoit pas pourquoi on prétendoit de faire le parti juste sur une condition feinte qu'on jouera *quatre* parties, vu que la condition naturelle du jeu est qu'on ne jouera plus dès que l'un des joueurs aura gagné, et qu'au moins, si cela n'étoit faux, cela n'étoit pas démontré, de sorte qu'il avoit quelque soupçon que nous avions fait un paralogisme.

[...] je lui démontrai la vérité du parti entre deux joueurs par les combinaisons en cette sorte :

N'est-il pas vrai que si deux joueurs se trouvant en cet état de l'hypothèse qu'il manque *deux* parties à l'un et *trois* à l'autre, conviennent maintenant de gré à gré qu'on joue *quatre* parties complètes [...], le parti doit être, tel que nous avons dit [...] ? Il en demeura d'accord et cela en effet est démonstratif ; mais il nioit que la même chose subsistât en ne s'astreignant pas à jouer les *quatre* parties.

8. Fermat *Œuvres*, publiées par P. Tannery et C. Henry, tome II, Gauthier-Villars, Paris, 1894, p. 301-303.

Je lui dis donc ainsi :

N'est-il pas clair que les mêmes joueurs, n'étant pas astreints à jouer <les> quatre parties, mais voulant quitter le jeu dès que l'un auroit atteint son nombre, peuvent sans dommage ni avantage s'astreindre à jouer les *quatre* parties entières et que cette convention ne change en aucune manière leur condition ? Car, si le premier gagne les deux premières parties de quatre et qu'ainsi il ait gagné, refusera-t-il de jouer encore deux parties, vu que, s'il les gagne, il n'a pas mieux gagné, et s'il les perd, il n'a pas moins gagné ? Car ces deux que l'autre a gagné ne lui suffisent pas, puisqu'il lui en faut trois, et ainsi il n'y a pas assez de quatre parties pour faire qu'ils puissent tous deux atteindre le nombre qui leur manque.

Certainement il est aisé de considérer qu'il est absolument égal et indifférent à l'un et à l'autre de jouer en la condition naturelle à leur jeu, qui est de finir dès qu'un aura son compte, ou de jouer les quatre parties entières : donc, puisque ces deux conditions sont égales et indifférentes, le parti doit être tout pareil en l'une et en l'autre. Or, il est juste quand ils sont obligés de jouer quatre parties, comme je l'ai montré : donc il est juste aussi en l'autre cas.

Voilà comment je le démontrai et, si vous y prenez garde, cette démonstration est fondée sur l'égalité des deux conditions, vraie et feinte, à l'égard de deux joueurs, et qu'en l'une et en l'autre un même gagnera toujours et, si l'un gagne ou perd en l'une, il gagnera ou perdra en l'autre et jamais deux n'auront leur compte.

Courtes biographies

Dominique Baroux

> « [La théorie des probabilités] doit la naissance à deux Géomètres français du dix-septième siècle, si fécond en grands hommes et en grandes découvertes, et peut-être de tous les siècles celui qui fait le plus d'honneur à l'esprit humain. Pascal et Fermat se proposèrent et résolurent quelques problèmes sur les probabilités. Huygens réunit ces solutions, et les étendit dans un petit traité sur cette matière, qui ensuite a été considéré d'une manière plus générale par les Bernoulli, Montmort, Moivre, et par plusieurs Géomètres célèbres de ces derniers temps. » [1]

Sans doute faut-il nuancer l'affirmation de Laplace, le problème des partis ayant donné lieu à des réflexions, des solutions, des critiques avant l'échange de lettres entre Pascal et Fermat. Les tentatives de résoudre ce problème au XV^e^ et au XVI^e^ siècle forment une histoire de ce problème qu'il est intéressant d'étudier. Cependant, le XVII^e^ siècle représente un tournant. La correspondance entre Pascal et Fermat ouvre la voie à de nouveaux développements et le premier traité de probabilités apparaît avec Huygens en 1657, en lien avec les problèmes discutés par Pascal et Fermat.

Pierre de Fermat (1ère décennie du XVIIe, Beaumont-de-Lomagne – 1665, Castres)

Fermat étudie à l'Université de Toulouse, puis à Bordeaux, où il prend connaissance de l'œuvre de Viète. Il est magistrat, conseiller au Parlement de Toulouse. À partir de 1636, son collègue Carcavi le met en contact avec le cercle de Mersenne et ses nombreux correspondants. Fermat est précurseur dans de nombreux domaines : théorie des nombres, géométrie analytique, calcul infinitésimal (recherches de tangentes, maximum et minimum, ...), optique, et bien sûr calcul des probabilités, avec ses échanges fructueux avec Pascal.

Blaise Pascal (1623, Clermont – 1662, Paris)

Mathématicien, physicien, inventeur, philosophe, moraliste et théologien. Enfant précoce il est éduqué par son père. Il travaille dans de nombreux domaines scientifiques : *Essai sur les coniques* (1640), invention d'une machine arithmétique, expériences sur la pression atmosphérique et le vide, et bien d'autres encore. Il développe en 1654 une méthode de résolution du « problème des partis » et d'un problème de dés qu'il expose dans sa correspondance avec Pierre de Fermat.

Christiaan Huygens (1629, La Haye – 8 juillet 1695, La Haye)

Son père est diplomate et il reçoit une éducation d'aristocrate. Après une courte carrière diplomatique il se consacre aux sciences. En 1656 il publie ses observations sur Saturne et sa découverte de Titan. Il est au courant de la correspondance entre Pascal et Fermat (1654) sur le problème des partis et les jeux de dés depuis son séjour à paris en 1655. Cependant, il ne connaît ni les solutions données, ni les méthodes employées, ainsi qu'il l'explique dans la préface de son ouvrage *Du calcul dans les jeux de hasard* publié

1. LAPLACE, P.-S. de (1749 -1827), *Théorie analytique des probabilités*, Paris, 1812, p. 5. Disponible sur Gallica.

en latin par van Schooten en 1657, et qui restera le seul traité sur ce calcul jusqu'au début du XVIIIe siècle. En 1666, sur l'invitation de Colbert, il devient membre et organise l'Académie Royale des Sciences à Paris. En 1673 il publie son travail sur la fabrication des horloges. Il écrit en 1678 un *Traité de la Lumière* où il développe des arguments en faveur de la théorie ondulatoire de la lumière.

Jacques ou Jakob Bernoulli (1654, Bâle – 1705, Bâle)

Il est l'aîné d'une famille de mathématiciens suisses de parents riches commerçants. Après des études de philosophie il entreprend de 1676 à 1683 des voyages en France, Angleterre et Pays-Bas et rencontre de nombreux mathématiciens. Il devient ensuite professeur à l'Université de Bâle jusqu'à sa mort. Il étudie avec son frère l'œuvre de Leibniz sur le calcul différentiel (il invente le terme « calcul intégral »), il s'intéresse aux séries, au calcul des probabilités, à certaines courbes (spirale logarithmique...) qui l'amènent à résoudre des équations différentielles. L'œuvre la plus originale de Jacques Bernoulli est l'*Ars Conjectandi* publié à Bâle en 1713, huit ans après sa mort, par son neveu Nicolas Bernoulli. Jacques Bernoulli a écrit ce texte entre 1684 et 1689, en tenant compte des travaux de Huygens, Cardano, Fermat et Pascal. La première partie de cet ouvrage reprend le traité de Huygens, avec des commentaires ; la deuxième partie porte sur les combinaisons, la troisième sur les jeux de hasard. La quatrième partie donne la démonstration de la « loi des grands nombres ».

Abraham de Moivre (1667, Vitry-le-François – 1754, Londres)

Son père est chirurgien, et sa famille est protestante. Après la révocation de l'édit de Nantes (1685), il est emprisonné, et il émigre ensuite en Angleterre en 1688. En 1697, il est nommé membre associé de la Royal Society de Londres grâce à ses travaux sur Newton et devient ami d'Isaac Newton et d'Edmond Halley. L'apport de de Moivre est fondamental en probabilités grâce à son ouvrage, *Doctrine of chances*, paru en 1718, et ré-édité en 1738 et 1756. Il explique dans la préface qu'il a lu Huygens et Pierre Rémond de Montmort. De Moivre introduit des outils nouveaux, comme les séries infinies, pour résoudre les problèmes, et donne l'approximation de la loi binomiale par une loi normale. L'autre ouvrage majeur de de Moivre est *Miscellanea Analytica* paru en 1730 dans lequel figurent des travaux sur les suites récurrentes, la trigonométrie, les fractions rationnelles.

Pierre Rémond de Montmort (1678, Paris – 1719, Paris)

Sa famille le destine à une charge de magistrature. En 1699, son père meurt en lui laissant du bien. Il se plonge alors dans la philosophie et les mathématiques et devient ensuite Chanoine. Vers la fin de 1704 il achète la Terre de Montmort. En 1706, il se défait de sa charge de canonicat et se marie. Il se fixe alors sur une matière neuve, les jeux de hasard, juste « effleurée » par Pascal et Huygens. A cette époque Jacques Bernoulli avait bien avancé sur le sujet, mais il n'avait rien fait paraître de ses écrits. En 1708, de Montmort fait paraître son *Essai d'analyse sur les jeux de hazard* et devient l'ami de Nicolas Bernoulli. Il est très piqué lors de la parution en 1710 du livre d'Abraham de Moivre *De mensura sortis* sur le même sujet, car il estime que cet ouvrage a été copié sur le sien. En 1715, à l'occasion d'un voyage en Angleterre, La Société Royale le reçoit dans son corps.

Nicolaas Struyck (1686, Amsterdam – 1769, Amsterdam)

Nicolas Struyck, né dans une famille bourgeoise aisée, a reçu une excellente éducation. Il a écrit divers ouvrages sur les mathématiques, la géographie, l'astronomie, la comptabilité. Son traité sur le calcul des chances parut en 1716. Il était membre de la Société Royale de Londres et l'Académie Royale de Paris et a correspondu avec des savants de France, Angleterre et Allemagne.

Sources

BRU Bernard, « Petite histoire des probabilités », in *Fragments d'histoire des mathématiques*, Brochure APMEP n°41, 1981.

HUYGENS C., *Œuvres complètes*, tome XIV, La Haye, Martinus Nijhoff, 1920, p.3 et suivantes.

Commission inter-IREM d'Épistémologie et d'Histoire des Mathématiques, *Histoires de probabilités et de statistiques*, ouvrage coordonné par E. BARBIN et J-P LAMARCHE, Paris, Ellipses, 2004.

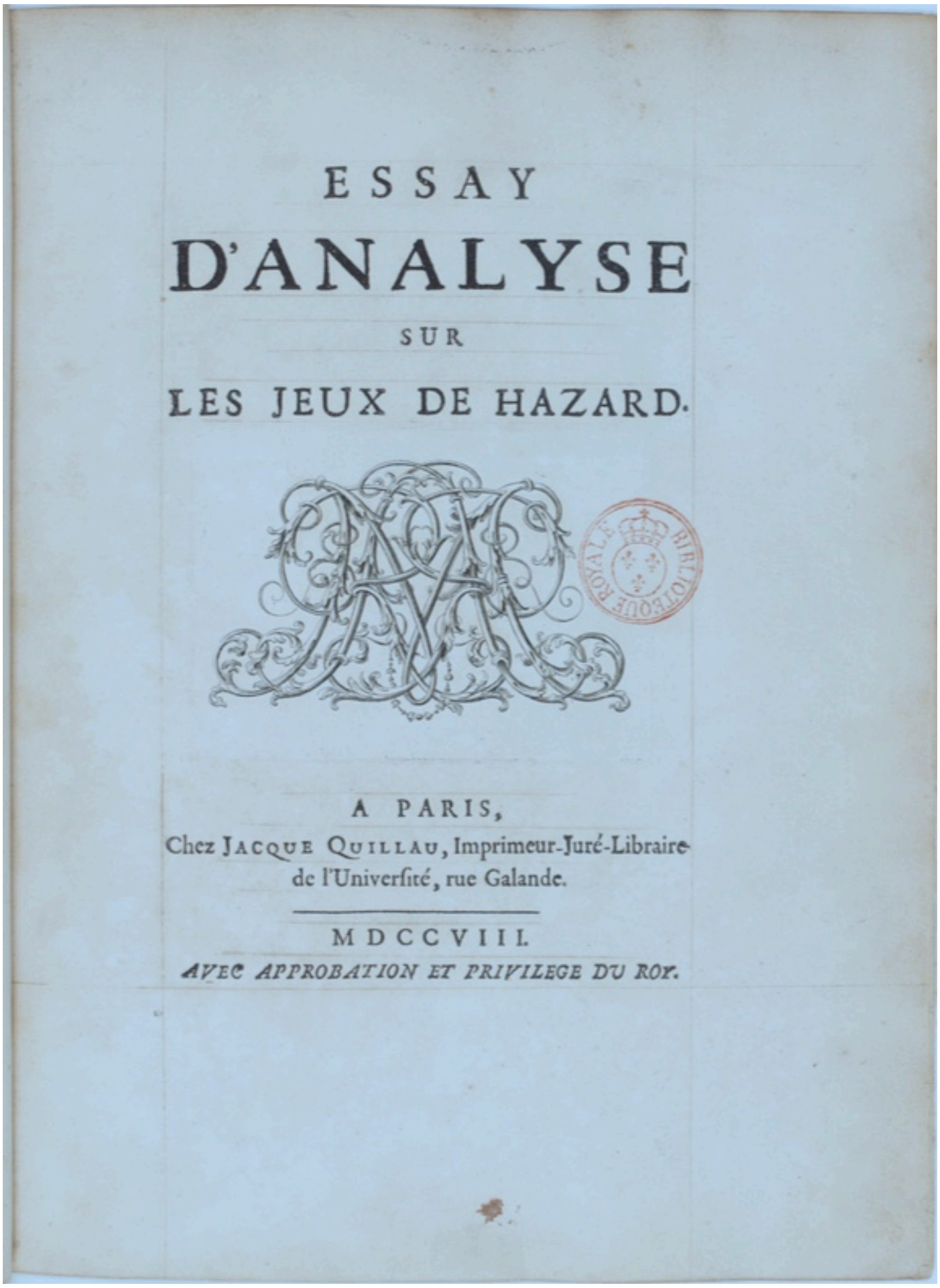
FONTENELLE, « Éloge de M. de Montmort », dans *Histoire de l'Académie royale des sciences* - Année 1719, Imprimerie royale, Paris, 1721, p. 83-93. Disponible sur Gallica. [2]

Les *Œuvres de* Nicolas STRUYCK, 1687-1769, *qui se rapportent au calcul des chances, à la statistique générale, à la statistique des décès et aux rentes viagères* tirées des *Œuvres complètes* et traduites du hollandais par J.A. VOLLGRAFF, et offertes aux membres du septième congrès international d'actuaires, réunis à Amsterdam en septembre 1912 par la Société générale néerlandaise d'assurances sur la vie et de rentes viagères.

Site Bibm@th : http://bibmath.net/bios/index.php

Wikipedia :
https://fr.wikipedia.org/wiki/Jacques_Bernoulli
https://fr.wikipedia.org/wiki/Christian_Huygens

2. Lien : https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k54262447/f92.item.r=de%20montmort



ESSAY
D'ANALYSE
SUR
LES JEUX DE HAZARD.

A PARIS,
Chez JACQUE QUILLAU, Imprimeur-Juré-Libraire de l'Université, rue Galande.

MDCCVIII.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.

Pierre Rémond de Montmort
*Essay d'analyse sur les jeux de hazar*d
Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France

Comité de rédaction

Dominique Baroux, *animatrice de l'IREM de Paris*

Martine Bühler, *animatrice de l'IREM de Paris*

Renaud Chorlay, *INSPE de Paris, animateur de l'IREM de Paris*

Michèle Lacombe, *animatrice de l'IREM de Paris*

Anne Michel-Pajus, *animatrice de l'IREM de Paris*

Les illustrations proviennent essentiellement d'ouvrages disponibles sur
Gallica http://gallica.bnf.fr/

TITRE :

Mnémosyne n°20

AUTEURS/AUTRICES :

Groupe M.A.T.H.

RÉSUMÉ :

Ce numéro 20 de *Mnémosyne* est centré sur les probabilités, en relation avec les nouveaux programmes de lycée de 2019.

Il propose des textes sources de Pascal, Huygens, Laplace, Lacroix et de Moivre en relation avec la notion d'espérance. On y trouve aussi une étude sur Pascal, « au carrefour des probabilités, de l'algorithmique, de la récurrence et de la combinatoire » : un article qui démarre avec la solution de Pascal au problème des partis, dans une lettre à Fermat et dans son *Traité du Triangle Arithmétique,* et aboutit à certaines propriétés du triangle de Pascal. Le conte du lundi étudie des « problèmes de dés » (Pascal, Fermat, Huygens, de Montmort, Bernoulli, Struyck, de Moivre).

Les activités en classe proposées (niveau Terminale Générale) portent ainsi sur deux thèmes : les problèmes de dés et le problème des partis, avec des idées (déjà expérimentées en classe) pour des problèmes ouverts, ou pas, utilisant les probabilités mais aussi l'algorithmique.

MOTS CLÉS :

Activités historico-mathématiques, Histoire des mathématiques, Probabilités, Espérance mathématique, Récurrence, Combinaisons, Algorithmique, Triangle de Pascal, Problème de dés, Problème des partis, Pascal, Fermat, Huygens, Laplace, Lacroix, De Moivre, De Montmort, Bernoulli, Struyck.

Éditeur: IREM de Paris
Responsable de la publication: C. Hache
IREM de Paris – Case 7018
Université de Paris
75205 Paris cedex 13
irem_de_paris@univ-paris-diderot.fr
https://irem.u-paris.fr/

Dépôt légal : **2021**
ISBN : 978-2-86612-399-4