



Actes du séminaire de didactique des mathématiques

Année 2019

Édités par

Julia Pilet & Céline Vendeira



IREM de Paris - Université Paris Diderot
Directeur de publication Christophe Hache
www.irem.univ-paris-diderot.fr
Dépôt légal : 2020 - ISBN : 978-2-86612-398-7

PRESENTATION

Le séminaire de didactique des mathématiques de l'ARDM, organisé par l'Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques (ARDM), a pour but de favoriser la mise en discussion et la diffusion des recherches en didactique des mathématiques. Il s'agit d'un outil que s'est donné l'ARDM pour soutenir la structuration d'une communauté de chercheur-e-s. Sous réserve de l'accord des intervenant-e-s, les présentations sont filmées et [diffusées en ligne](#). Le travail de capture, de montage et d'hébergement des vidéos est assuré par l'IREM de Paris. Au fur et à mesure de la finalisation des textes, ceux-ci sont mis à disposition sur le site de l'ARDM. Ils sont ensuite regroupés en un volume. Le présent ouvrage regroupe les textes issus des séminaires de l'année 2019. Par ailleurs, depuis 2014, le groupe des jeunes chercheur-e-s de l'ARDM organise une session de poster durant les sessions du séminaire. Ces présentations affichées donnent lieu à des textes courts que vous trouvez également dans ce volume d'actes.

Les deux séminaires de l'année 2019 ont eu lieu en mars et novembre à Paris. Le séminaire de novembre 2019, a accueilli, comme les années précédentes, le colloquium CFEM-ARDM, sur une demi-journée. Ce dernier a été organisé avec le soutien de l'Université Paris Diderot, du LDAR, de l'IREM de Paris et de la CFEM. Le thème était « Enseigner les mathématiques de la maternelle à l'université. Quelle formation pour les enseignants ? ». Le colloquium n'a cette fois-ci pas donné lieu à des actes mais les vidéos des présentations sont disponibles sur le site de l'IREM de Paris.

Bonne lecture.

Julia Pilet et Céline Vendeira

Responsables du séminaire de l'ARDM
pour les années 2018 et 2019

SOMMAIRE

Séminaire des 28 et 29 mars 2019

Travaux en cours 6

Maha Abboud, Alf Coles, Aurélie Chesnais, Julie Horoks, Barbara Jaworski, Christine Mangiante-Orsola, Marie-Jeanne Perrin-Glorian, Heidi Strømskag, Aline Robert et Janine Rogalski

Présentation du projet de collaboration franco-britannique (2014-2017) : Quand des didacticiens de mathématiques français discutent des théories avec des chercheurs britanniques et européens.

Présentation d'habilitation à diriger des recherches.....22

Nathalie Sayac

Approche didactique de l'évaluation et de ses pratiques en mathématiques.

Présentation de thèse36

Sylvie Grau

Problématiser en mathématiques : le cas de l'apprentissage des fonctions affines.

Présentation de thèse57

Olivier Rivière

Extension de la notion d'énumération : comment mieux rendre compte du caractère commun de certaines difficultés des sujets en situation.

Travaux en cours72

Maggy Schneider

Quels usages du concept de modèle épistémologique de référence pour la recherche ? Et pour la formation ?

Travaux en cours87

Marianna Bosch

Les modèles praxéologiques de référence : réflexions méthodologiques en TAD.

Session de posters.....99

Sonia Maria Monteiro da Silva Burigato, José Luiz Magalhães de Freitas et Cécile Ouvrier-Bufferet

L'introduction du concept de limite de fonction au Brésil et en France.

Séminaire des 21 et 22 novembre 2019

Présentation d'habilitation à diriger des recherches.....101

Faïza Chellougui

Pertinence de la prise en compte du formalisme logique pour une étude didactique de l'activité mathématique.

<u>Travaux en cours</u>	120
Christophe Hache et Zoé Mesnil Outils logiques pour analyser les formulations des preuves dans des manuels de lycée.	
<u>Présentation d’habilitation à diriger des recherches</u>	137
Aurélié Chesnais Un point de vue de didactique des mathématiques sur les inégalités scolaires et le rôle du langage dans l’apprentissage et l’enseignement.	
<u>Travaux en cours</u>	138
Sophie Soury-Lavergne Apport d’un jeu tangible et numérique pour l’évolution des conceptions des élèves en numération décimale de position.	
<u>Présentation de thèse</u>	139
Mireille Morellato Usages et force des représentations dans l’ingénierie didactique coopérative ACE - Arithmécole.	
<u>Session de posters</u>	157
Blandine Masselin Etude du travail de l’enseignant par le biais de la trajectoire d’avatars en trois boucles.	
<u>Session de posters</u>	160
Rosa Elvira Páez Murillo, François Pluinage et Laurent Vivier Analyse cognitive d’une tâche d’évaluation dans le cadre de la théorie des espaces de travail mathématique.	
<u>Session de posters</u>	163
Florence Peteers et Laurent Vivier Mesures de grandeur dans le système sécimal pour la formation des professeurs des écoles.	
<u>Session de posters</u>	165
Valentin Roussel Exercer l’esprit critique en classe de mathématiques au cycle 3.	

QUAND DES DIDACTICIENS DE MATHÉMATIQUES FRANÇAIS DISCUTENT DES
THEORIES AVEC DES CHERCHEURS BRITANNIQUES ET EUROPEENS

Maha **ABBOUD** (coord.)

Université de Cergy Pontoise, LDAR

maha.abboud-blanchard@u-cergy.fr

Alf **COLES**

University of Bristol, School of Education

alf.coles@bris.ac.uk

Aurélie **CHESNAIS**

Université de Montpellier, Lirdef

aurelie.chesnais@umontpellier.fr

Julie **HOROKS**

Université Paris Est Creteil, LDAR

jhoroks@gmail.com

Barbara **JAWORSKI**

University of Loughborough

b.jaworski@lboro.ac.uk

Christine **MANGIANTE-ORSOLA**

ESPE Lille Nord de France, LML

christine.mangiante@espe-Inf.fr

Marie-Jeanne **PERRIN-GLORIAN**

LDAR

marie-jeanne.perrin@univ-paris-diderot.fr

Heidi **STRØMSKAG**

Norwegian University of Science and Technology

heidi.stromskag@ntnu.no

Aline **ROBERT**

LDAR

robertaline.robertaline@orange.fr

Janine **ROGALSKI**

LDAR

rogalski.muret@gmail.com

Résumé

Ce texte est constitué de quatre parties correspondant à trois communications et une table ronde. Nous avons choisi de présenter ces contributions en un seul texte étant donné qu'elles rendent compte des travaux et des résultats d'un même projet Franco-Britannique qui s'est déroulé sur quatre années. Chaque partie est rédigée par un groupe d'auteurs et formée de deux à quatre pages qui résument l'article correspondant déjà publié dans le numéro spécial 2018 de la revue *Annales de didactique et des Sciences cognitives*. Ce numéro regroupe l'ensemble des travaux réalisés pendant le projet Franco-Britannique, le lecteur peut s'y référer pour plus de détails.

Mots clés

Pratiques des enseignants, formation, théories, didactique, mathematics education

I. LE ROLE DES THEORIES DANS L'ANALYSE DES PRATIQUES ENSEIGNANTES ET DES PRATIQUES DE FORMATION : UN PROJET DE COLLABORATION FRANCO-BRITANNIQUE (ABBOUD ET COLES)

1. Introduction

Des rencontres répétées au cours de colloques internationaux, des échanges à l'occasion de rédaction d'ouvrages, des correspondances, certaines affinités scientifiques... ont créé petit à petit une envie de travailler ensemble. Des didacticiens de mathématiques et des chercheurs européens en *mathematics education* (de nationalités britannique, française, norvégienne et grecque) ont voulu alors transformer cette envie en une réelle dynamique de collaboration. A l'initiative de membres du Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR), une première rencontre a eu lieu à Paris en janvier 2014 d'une vingtaine de chercheurs, dont dix français. Un projet de collaboration a vu ainsi le jour et s'est développé pendant quatre ans avec au cœur du travail le rôle des théories dans les recherches menées par les participants. Le fruit de cette collaboration fut la publication d'un numéro spécial dans les *Annales de didactique et de sciences cognitives* (Abboud & Coles (eds), 2018).

Dans cette première partie, nous exposons brièvement les thèmes discutés et travaillés au cours du projet et rendons compte également de la dynamique propre à un travail conjoint de chercheurs venant de traditions diverses de recherche et de contextes culturels et institutionnels variés. Afin d'illustrer les éléments qui ont, ou non, rendu cette collaboration raisonnée, utile et qui ouvrent des perspectives pour d'autres types de collaboration, nous utilisons le concept d'objet-frontière (*boundary object*) défini par Star et Griesemer (1989).

2. Dynamique de collaboration

La thématique générale fut définie dès l'émergence du projet comme étant celle de discuter et de comparer les cadres théoriques utilisés pour l'étude des pratiques enseignantes et de la formation des enseignants de mathématiques. Nous ne voulions pas nous contenter d'exposer nos travaux et nos idées les uns aux autres, mais plutôt construire un espace de travail dans lequel des idées peuvent être partagées et où d'autres peuvent émerger. Trois dimensions de

travail étaient alors en jeu. La première est centrée sur les théories, permettant ainsi aux participants de mutualiser leurs cadres et de discuter leurs perspectives théoriques. La deuxième correspond à l'objectif principal de nos recherches respectives : l'étude des pratiques d'enseignement. Enfin, la troisième dimension est celle de l'intérêt que nous portons à l'étude du développement professionnel des enseignants et à l'impact de nos approches théoriques sur la formation des enseignants.

Nous avons dès le début conscience de l'existence dans les approches franco-anglaises de domaines d'intérêt commun, mais avec peu de connaissances mutuelles suffisamment approfondies des détails de ces approches. Il a fallu d'abord trouver des « façons » de travailler ensemble, et, ensuite, de délimiter les questions de recherche et de préciser les données qui permettraient à nos « conversations » de prendre corps. Le travail conjoint a ensuite évolué vers la constitution de petits groupes autour de thématiques ou d'approches spécifiques. Le travail de ces petits groupes a donné lieu à son tour à des écrits communs dont l'aboutissement est le numéro spécial de la revue *Annales de didactique et des Sciences cognitives* (ADSC) avec les différents articles qui le composent.

3. Des « objets frontières » qui permettent de communiquer et d'avancer ensemble

Nous constatons a posteriori que la volonté de travailler sur des thématiques communes s'est transformée graduellement en un travail sur des objets communs supports de la co-construction d'analyses comparatives. Ces objets peuvent être qualifiés d'objets-frontière. En effet, Star & Grieseman (1989) les définissent comme étant des objets qui permettent la communication entre des groupes sociaux et facilitent la confrontation de points de vue ou la résolution des conflits de manière créative. Ces objets sont « à la fois suffisamment flexibles, pour s'adapter aux contraintes et besoins locaux des différents groupes qui les utilisent, et assez robustes, pour maintenir une identité commune au-delà des spécificités de chacun » (p. 393). En reprenant cette citation à notre compte dans le contexte du travail des groupes de notre projet, les objets-frontière peuvent, par exemple, être analysés dans différentes traditions de recherche, mais malgré cela garder un sens et une identité commune à travers ces analyses. Une des difficultés de communication entre des groupes sociaux, ou dans le cas de notre travail de chercheurs issus de différentes traditions est que les objets utilisés de façon routinière sont « naturalisés » (Bowker & Star, 1999). Autrement dit, certains termes et concepts sont utilisés si couramment dans une tradition de recherche que leur signification est considérée comme allant de soi. De plus, dans un même domaine de recherche (la didactique des mathématiques) certains de ces termes sont utilisés pour des idées « naturalisées » différentes. Un objet-frontière est celui qui n'est naturalisé dans aucun groupe, mais qui émerge lorsque des mondes sociaux, dans notre cas des traditions de recherche, se croisent. Le statut de ces objets n'est pas nécessairement fixé définitivement puisqu'un objet-frontière peut évoluer pour devenir naturalisé dans les deux traditions et perdre ainsi son statut d'objet-frontière.

Par exemple, l'expression « *teachers' professional learning* » a souvent été employée dans les discussions des groupes sans qu'aucune théorisation correspondante ne soit mentionnée. De plus, un regard sur l'ensemble des textes produits laisse voir que certains termes sont utilisés régulièrement dans une acception commune, sans pour autant que cette acception soit clairement explicitée. On observe ainsi, qu'il existe, sans que cela soit clairement mentionné, une conception constructiviste de l'apprentissage des élèves dans toutes les études présentées; peut-être s'agissait-il ici d'une hypothèse « naturalisée » pour la plupart des collègues des deux traditions anglaise et française.

Nous pouvons aussi considérer ce propos sous l'angle de la théorie de l'activité -qui constitue un cadre de référence pour plusieurs des textes produits- qui offre d'autres possibilités de conceptualiser la notion d'objet-frontière. En effet, la théorie de l'activité de troisième génération (Engeström, 2001) fournit un cadre d'analyse de l'interaction de deux systèmes d'activité connexes, chacun avec ses propres communautés, règles, division du travail, outils, sujets et objets. Chacun de ces systèmes (par exemple un club vidéo anglais pour enseignants de mathématiques) développe ses propres objets qui font tout simplement partie de la situation (par exemple, un enseignant faisant des commentaires sur un enregistrement vidéo d'un cours de mathématiques). Collectivement, ces objets deviennent significatifs au sein du système d'activité (par exemple, le commentaire de l'enseignant peut être catégorisé par la communauté, explicitement, en tant qu'évaluation ou interprétation et non comme simple observation). Lorsque les systèmes d'activité se rejoignent (par exemple, notre collaboration Franco-Britannique), il est possible que des objets soient « construits conjointement » (Engeström, 2001, p.136). Cette construction conjointe peut être considérée comme le développement d'un objet-frontière, significatif, mais différent, dans les deux systèmes d'activité (nous permettant par exemple de devenir sensibles aux cadres théoriques de chacun).

4. En conclusion...

Ce travail collaboratif qui s'est installé dans la durée, nous rend conscients de l'existence de différences significatives dans nos approches de l'enseignement, l'apprentissage et la recherche en didactique, ainsi que des ressemblances évidentes dans nos questions de recherche et nos centres d'intérêt. Les trois parties qui suivent dans cet article en donnent un aperçu.

Nous invitons le lecteur à se rapporter au numéro spécial de ADSC pour accéder aux détails de nos travaux, de nos hésitations et de nos compromis et ainsi avoir une vue unique sur la rencontre de deux traditions et le foisonnement d'idées qui peut en résulter.

II. LE ROLE DU FORMATEUR, PLACE DE LA THEORIE : UNE COMPARAISON DE SEANCES DE FORMATION UTILISANT LA VIDEO EN FRANCE ET EN ANGLETERRE (COLES, CHESNAIS ET HOROKS)

Nous –A. Coles, A. Chesnais et J. Horoks- comparons des pratiques effectives d'utilisation de la vidéo en formation d'enseignants du 1^{er} et 2nd degré, pour l'enseignement des mathématiques. Au-delà des différences culturelles, nous nous interrogeons sur le rôle joué par la théorie dans ces approches. En comparant nos pratiques, nous nous demandons ce qui guide l'organisation de la formation et l'action du formateur pendant ces séances utilisant des vidéos. Nous mettons en lumière les similarités et les différences dans nos pratiques, que nous analysons à travers l'idée de « théories du formateur », explicites ou non, transmises ou non aux enseignants formés.

1. Comparer nos différences pour mieux appréhender nos pratiques de formateur

Notre positionnement

Pour cette présentation, nous nous positionnons en tant que formateurs d'enseignants, étant par ailleurs aussi des chercheurs travaillant sur les pratiques des enseignants. Nous questionnons la façon dont nous (formateurs) planifions et organisons une séance de formation à l'enseignement à l'aide d'une vidéo, compte tenu des outils théoriques que nous (chercheurs) utilisons pour analyser les pratiques enseignantes et la formation. Nous voulons ainsi rendre explicites les liens entre les théories que nous adoptons, en tant que chercheurs sur les pratiques des enseignants, et nos pratiques en tant que formateurs d'enseignants. Quels éléments de ces théories mettons-nous en œuvre pour la formation des enseignants (programme, séances, évaluation, etc.) ? Quels éléments voulons-nous transmettre aux enseignants ? Avec quelle transposition ?

Différents contextes de formation

Nous nous intéressons ici à deux exemples pour illustrer notre propos :

- l'exemple anglais premier concerne une formation initiale et continue d'enseignants du 1^{er} degré au Royaume Uni, dans le cadre d'un « club vidéo » de huit professeurs volontaires pour travailler sur des problèmes qu'ils avaient identifiés dans leur pratique ;
- l'exemple français (qui est double) porte sur des formations initiales en Ecole Supérieure du Professorat et de l'Éducation (ESPE) en France, pour l'enseignement secondaire dans le cadre de suivi de stage ou pour l'enseignement primaire dans le cadre de l'initiation à la recherche.

Différents fondements théoriques

Dans le chapitre 5 du numéro spécial des ADSC, nous avons développé les éléments théoriques que nous adoptons en tant que chercheurs : l'Enactivisme (Brown & Cole, 2011) d'une part, et la Double Approche (Robert & Rogalski, 2002) d'autre part. Nous ne revenons pas sur le détail de ces théories ici.

2. Différents usages de la vidéo

L'exemple anglais

La vidéo sélectionnée par le formateur ou par les enseignants dure 3 à 4 minutes. Après son visionnage, le formateur demande aux enseignants participants de « reconstruire » ce qui s'est passé, et intervient pour établir la distinction entre l'observation et le jugement. Puis, après un éventuel nouveau visionnage, le groupe passe à l'analyse et à l'identification de stratégies d'enseignement.

Les actions du formateur sont ici guidées par le fait qu'il croit que la discussion ne peut être productive que si on s'éloigne des habitudes des enseignants pour regarder la classe. D'un point de vue « enactiviste », la discussion des enseignants est poussée vers le détail des événements de la vidéo, de sorte qu'il y ait alors la possibilité d'identifier et d'étiqueter de nouvelles catégories de pratiques. Il est important pour le formateur que les enseignants distinguent l'observation du jugement et de l'interprétation.

Les exemples français

Dans les deux exemples qui suivent, la sélection de la vidéo repose sur le choix de la tâche mathématique qui est proposée aux élèves. Dans le premier exemple, pour les enseignants du second degré, la formatrice travaille avec les vidéos de deux enseignants différents, proposant une même tâche. Les enseignants stagiaires doivent d'abord réaliser une analyse a priori de la tâche (pour identifier les activités que les élèves pourraient développer), avec des outils adaptés de la recherche en didactique. Ils analysent les contenus visés en anticipant en particulier les réponses possibles des élèves, les connaissances mathématiques à mobiliser (en rapport avec le curriculum) et les adaptations nécessaires de ces connaissances, pour résoudre la tâche. Le visionnage des deux vidéos et la discussion qui s'ensuit, doivent permettre d'identifier des écarts entre l'analyse a priori et a posteriori, et des différences dans les pratiques des deux enseignants, en particulier en ce qui concerne les initiatives laissées aux élèves dans la recherche de la tâche, et la façon de structurer les connaissances en jeu. La discussion doit permettre d'envisager des alternatives aux pratiques observées, tout en tenant compte de ce qui peut ou non être possible pour un enseignant donné dans une classe donnée. Dans le second exemple, en module de formation par la recherche dans le premier degré, les modalités de travail sont les mêmes, mais la vidéo est utilisée pour discuter des questions de recherche, en analysant les données (tâche, vidéo) à l'aide d'outils théoriques. Nous faisons l'hypothèse que ces outils ne sont pas seulement utiles pour la recherche, mais qu'ils peuvent aussi être transférés à la planification et à la réflexion sur l'enseignement.

L'objectif des formatrices est ici d'enrichir les pratiques des enseignants en partant des pratiques (presque) déjà là et en s'appuyant aussi sur le collectif. Leurs hypothèses sur un apprentissage se faisant à travers les activités mathématiques des élèves en mathématiques et le discours de l'enseignant, et leurs outils pour analyser cette activité potentielle à travers les tâches (adaptations) guident leurs choix pour ce type de séance. Une grande partie de ces outils sont d'ailleurs proposés aux enseignants en formation : les composantes des pratiques et les résultats de recherche qu'elles ont permis de dégager, et surtout les outils d'analyse a priori des tâches mathématiques, en lien avec le contenu visé.

3. Conclusion sur le rôle des théories

Des différences

Ce qui nous a tout d'abord frappés, est l'importance du contenu mathématique et de l'analyse a priori, très présente dans les exemples français, mais absente du contexte anglais évoqué.

La place des pratiques personnelles (en relation avec ce qui est montré dans la vidéo dans une salle de classe ordinaire) à un point de vue plus général à travers la discussion collective, et de retour aux pratiques personnelles (que nous espérons enrichir), n'est pas la même non plus.

Enfin, l'utilisation explicite avec l'étudiant d'outils théoriques issus de notre champ de recherche (analyse des tâches, pratiques et interprétation, méthodologie d'analyse des vidéos), n'est présente ici que dans le cas français.

Sur le rôle des théories

Le fait de distinguer ici les éléments théoriques du formateur (ses hypothèses et outils pour analyser les pratiques et apprentissages), les éléments de théorie implémentés (pour construire le scénario et les séances de formation) et les éléments théoriques explicitement transmis aux enseignants en formation, nous a permis de comparer et d'expliciter nos pratiques, de les relier à nos hypothèses de chercheurs, et de mieux comprendre le rôle de ces outils pour la formation.

III. LA THEORIE DES SITUATIONS DIDACTIQUES COMME OUTIL POUR COMPRENDRE ET DEVELOPPER DES PRATIQUES D'ENSEIGNEMENT EN MATHEMATIQUES (MANGIANTE-ORSOLA, PERRIN- GLORIAN ET STRØMSKAG)

Notre article (Mangiante-Orsola, Perrin-Glorian & Strømskag, 2018) s'appuie principalement sur la théorie des situations didactiques (TSD), pour analyser des séquences d'enseignement dans des contextes qui diffèrent, par le contenu mathématique, l'objectif de la recherche, la collaboration entre enseignants et chercheurs et les conditions institutionnelles de formation et de recrutement des enseignants. Dans le premier cas, les séances analysées concernent l'enseignement de la multiplication en Norvège, dans un projet de recherche sur l'usage de la langue en mathématiques, dans le cadre de la formation initiale des enseignants. Dans le second cas, il s'agit de produire une ressource pour l'enseignement de la géométrie en France, dans une collaboration entre chercheurs, formateurs de terrain et enseignants. Dans les deux cas, la TSD est utilisée dans le cadre d'une ingénierie didactique dans l'enseignement élémentaire dans la perspective de la formation des enseignants et d'une diffusion dans l'enseignement ordinaire. Dans ce texte, nous ne parlerons pas de la première partie de l'article consacrée à une brève présentation de la TSD (Brousseau, 1998) et de la manière dont elle peut aider les chercheurs à comprendre les pratiques des enseignants, et aider les enseignants ou formateurs à les développer (Hersant & Perrin-Glorian 2005; Margolinas, Coulange & Bessot 2005). Après une rapide présentation des deux contextes en mettant en avant leur comparaison, nous centrons notre présentation sur la troisième partie de l'article qui porte sur la manière dont la TSD peut aider la collaboration entre chercheurs, formateurs et enseignants dans une recherche sur le développement de pratiques professionnelles sur un domaine mathématique précis. Nous concluons sur la complémentarité avec d'autres cadres théoriques, notamment inspirés par la théorie de l'activité.

1. Les deux contextes

Des séances sur la multiplication en Norvège

Le contexte norvégien est une étude de cas tirée d'un projet de recherche de quatre ans dans une école primaire de Trondheim sur l'utilisation et le développement du langage en classe de mathématiques (LaUDiM). L'équipe comprend cinq chercheurs dont une didacticienne des mathématiques (H. Strømskag), et une enseignante, l'étude porte sur l'enseignement de la multiplication dans une classe de 18 élèves (8 ans). La séquence a été élaborée et pré-analysée par l'équipe d'enseignants et chercheurs. Ce travail a été enregistré par vidéo ainsi que la mise en œuvre en classe des deux séances et l'analyse a posteriori par l'équipe. Une réunion de réflexion entre les deux séances a été enregistrée au magnétophone.

La TSD est utilisée pour identifier le potentiel didactique des situations proposées, le milieu prévu et sa gestion par l'enseignante. Deux problèmes étaient proposés aux élèves, le premier relevant d'une addition répétée, le second d'une organisation en lignes et colonnes. Le premier problème visait à l'introduction de la convention d'écriture en Norvège selon laquelle le premier facteur dans un produit signifie le nombre de groupes équivalents et le second facteur signifie la taille des groupes, 12×4 c'est 12 fois 4. Le second problème visait la

commutativité de la multiplication. Dans la réalisation, un conflit s'est produit entre ces deux aspects à propos de $1000 \text{ fois } 4$. La comparaison des analyses a priori et a posteriori révèle des lacunes dans la prévision de ce conflit : l'intention didactique était liée principalement à la situation non commutative (tâche 1) avec des objectifs sémiotiques de représentation par des schémas et des écritures arithmétiques additives et l'introduction de l'écriture multiplicative, en négligeant la situation commutative (tâche 2).

La production d'une ressource sur la géométrie au cycle 3 en France

Le contexte français est un LÉA¹ dans lequel collaborent depuis plusieurs années deux chercheurs (C. Mangiante et M.J. Perrin), des formateurs et enseignants afin de réfléchir à l'enseignement de la géométrie auprès d'élèves de 8 à 11 ans et de produire des ressources pour les enseignants. Ce travail prend appui sur une approche de la géométrie développée par une équipe de recherche du Nord de la France (Perrin-Glorian & Godin, 2014) qui vise à prendre en compte la vision naturelle des figures comme surfaces juxtaposées (voire partiellement superposées) et aider les élèves à passer à une vision géométrique des figures comme définies par des relations reliant des lignes et des points. Dans ce but, la ressource propose des problèmes de reproduction de figures sous certaines conditions. Les élèves ont à leur disposition une figure modèle, une amorce de la figure à reproduire et des outils à disposition (des outils géométriques habituels, à l'exception des outils de mesure, mais également des outils non conventionnels, tels que des gabarits). Le choix de la figure, de l'amorce et des outils sont des variables didactiques car les connaissances nécessaires pour réaliser la figure en dépendent fortement.

Un dispositif à deux niveaux permettant la collaboration des chercheurs, formateurs et enseignants a été mis en place : un groupe restreint composé des chercheurs et formateurs est au cœur de l'ingénierie. Un groupe élargi incluant les enseignants, affine la mise en œuvre en classe et produit une première analyse. La production de ressources est un moyen d'élargir la collaboration entre enseignants, formateurs et chercheurs en leur donnant un objectif commun. Dans cette collaboration, même s'ils restent en grande partie implicites pour les formateurs et les enseignants, les concepts de TSD sont opérationnels pour traiter collectivement la question cruciale des liens entre le choix de la situation et les connaissances en jeu. Ils aident les chercheurs et les formateurs à analyser l'interprétation faite par les enseignants des situations élaborées en utilisant la TSD. Les questions qui émergent de l'observation des classes et visent à comprendre l'origine des changements apportés, la gestion du savoir en jeu à travers la situation, amènent des modifications et un enrichissement des situations de façon à ce que des enseignants ordinaires, sans contact avec la recherche, puissent les utiliser plus facilement, ce qui est une perspective importante de la recherche.

Comparaison des deux contextes

Dans les deux cas, les questions de recherche concernent l'enseignement d'un contenu particulier et l'élaboration de situations acceptables par les enseignants pour améliorer leurs pratiques. Dans les deux cas, les questions de recherche comprennent la validité théorique des situations en lien avec les éléments essentiels du savoir visé mais, dans le cas de la géométrie, ils incluent aussi l'étude de l'adaptabilité des situations dans l'enseignement ordinaire, en prenant en compte les contributions des enseignants et la perspective d'évolution de leurs pratiques. Après une première validation dans les classes des enseignants impliqués dans la recherche, l'objectif est de décrire les situations dans une ressource, avec la perspective que les enseignants l'utilisent hors de tout contact avec la recherche. Il s'ensuit que c'est le

¹ Lieu d'éducation Associé à l'Institut Français de l'Éducation.

processus de production de la ressource et non la situation elle-même qui est au centre du dispositif à deux étages visible dans les schémas suivants.

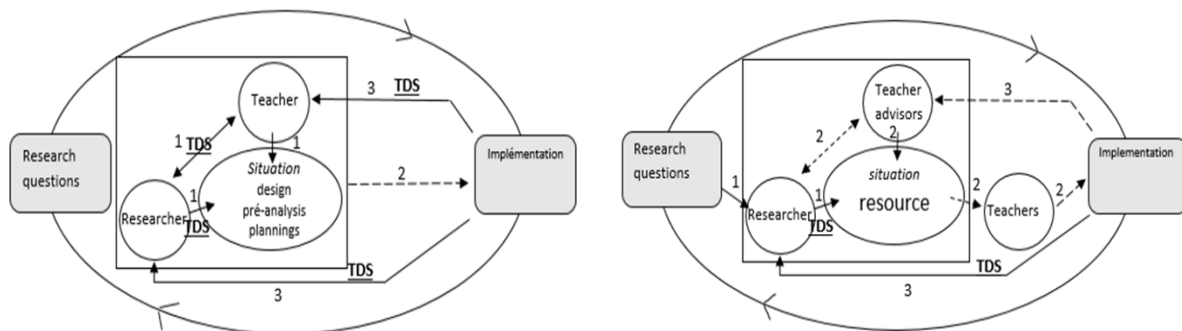


Figure 1 : Utilisation de la TSD et collaboration entre les différents acteurs dans le contexte norvégien (schéma à gauche) et dans le contexte français (schéma à droite).

Dans le contexte de la multiplication, c'est la situation qui est au cœur du processus. En géométrie, c'est la ressource qui est au centre du dispositif. Il y a un travail avec les formateurs dans un groupe restreint inclus dans un groupe élargi à des enseignants.

Les concepts de TSD sont utilisés explicitement avec les professeurs dans le contexte norvégien (flèches 1 et 3), implicitement (flèches 2 et 3 pointillées) dans le contexte français. Cela découle de l'hypothèse que le développement des pratiques des professeurs se fait à travers l'implémentation, l'analyse et l'adaptation d'une situation dont un premier jet émane des chercheurs.

2. Utilisation de la TSD dans les deux contextes

Dans les deux contextes, la TSD a servi aux chercheurs et aux formateurs non seulement pour élaborer les situations d'apprentissage mais aussi pour analyser le déroulement lors de l'implémentation en classe et pour identifier des questions visant le développement des pratiques professionnelles. Dans les deux contextes les analyses en TSD ont été menées par les chercheurs mais elles rejoignent des questions professionnelles des enseignants concernant l'élucidation des objectifs d'enseignement, l'organisation des tâches pour les élèves de façon qu'ils puissent eux-mêmes saisir quelque chose de la pertinence et de l'efficacité de leurs réponses ainsi que la manière de gérer le travail des élèves. Les questions des enseignants correspondent en partie à celles des chercheurs mais sont davantage liées à la pratique : le professeur doit traduire les concepts de TSD en termes d'actions pour préparer sa classe ou analyser ce qui s'y passe.

La comparaison des deux contextes soulève une question : jusqu'à quel point les professeurs ou les formateurs ont-ils besoin de connaître les concepts de la TSD pour les utiliser dans la pratique ? Sans expliciter le cadre théorique, le chercheur peut formuler avec les enseignants des questions qui émergent d'une analyse en termes de TSD. La notion de milieu est essentielle et peut se formuler en termes de moyens de contrôle de leurs actions par les élèves et de pistes pour leur réflexion. Une collaboration directe avec des chercheurs aide ainsi les enseignants et les formateurs à développer leurs pratiques mais il n'est ni réaliste ni souhaitable d'attendre qu'ils puissent tous collaborer directement avec des chercheurs. Se pose alors la question de la formation des enseignants et des formateurs qui n'ont pas de contact direct avec les chercheurs.

3. Complémentarités entre la TSD et les approches théoriques dérivées des travaux de Vygotski

Du côté de l'apprentissage des élèves

Vygotski (1986) suppose que la formation des concepts scientifiques ne se fait pas spontanément, qu'elle nécessite l'intervention de quelqu'un qui sait (le professeur) dans la zone proximale de développement de l'élève : ce que celui-ci peut faire avec aide. La TSD, par l'analyse du savoir et la recherche de leviers pour aménager un milieu capable de faire évoluer les connaissances et conceptions des élèves, est complémentaire. Le milieu aménagé pour provoquer un apprentissage n'est pas un milieu quotidien. De plus, il est évolutif. Vygotski s'intéresse à l'évolution du sujet, la TSD à l'organisation et à la gestion d'un milieu favorable à l'apprentissage.

Du côté de l'analyse des pratiques des enseignants

Comme elle s'intéresse à un élève générique, la TSD s'intéresse à un enseignant générique ; elle recherche des conditions sur un milieu et ses évolutions possibles dans un ensemble de contraintes. L'accent est mis sur le savoir, son utilité dans la situation et sa progression dans la classe. L'apprentissage peut se vérifier par le traitement par l'élève d'autres situations.

La double approche, inscrite dans la théorie de l'activité, s'intéresse davantage à la gestion de la situation par l'enseignant. L'accent est mis sur les sujets et les actions didactiques de l'enseignant pour réduire la distance entre ce que fait l'élève et ce qu'il doit apprendre et qui est attendu de lui.

Du côté du travail collaboratif entre chercheurs et enseignants pour la production de ressources

Nous empruntons aux travaux de Beguin (2005), l'idée selon laquelle la conception (ici d'une ressource) peut être vue comme un processus dialogique qui s'installe entre deux « mondes » (ici celui de la recherche et celui de l'enseignement) et qui, à terme, peut permettre la construction d'un « monde commun », un « lieu d'apprentissages mutuels ». Tout au long de ce processus de conception (monde commun), les notions issues de la TSD (monde de la recherche) sont mobilisées pour répondre à des questions que se posent les enseignants (monde de l'enseignement) mais aussi pour mettre en évidence l'intérêt de propositions faites par les enseignants eux-mêmes pour enrichir la ressource. Parfois, les notions issues de la TSD permettent de régler durablement les questions qui émergent mais parfois cela prend du temps, il y a « négociation » car il faut réussir à tenir compte conjointement du « point de vue » des chercheurs et de celui des « enseignants ». Ces mouvements et négociations témoignent de la présence d'un processus dialogique.

IV. TABLE RONDE : DIFFERENTS USAGES DE LA THEORIE DE L'ACTIVITE EN DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES ET « MATHEMATICS EDUCATION » (JAWORSKI, ROBERT ET ROGALSKI)

Les différentes interventions de la table ronde sont résumées ci-dessous. Elles s'appuient sur les textes dans le numéro spécial 2018 des ADSC.

1. La place des analyses de tâches dans l'usage de la Théorie de l'Activité par A. Robert et J. Rogalski

Après avoir rappelé quelques éléments clés de notre cadre théorique inspiré de la théorie de l'activité, nous présentons la place de l'analyse des tâches ainsi que quelques résultats. Nous signalons la différence avec les approches de nos collègues anglais et terminons avec un certain nombre de questions encore ouvertes.

Des activités aux tâches

Au centre de notre usage de la théorie de l'activité, nous plaçons les activités des élèves, que ce soit pour développer et/ou apprécier les apprentissages (Abboud, Robert, Rogalski & Vandebrouck, 2017). Ce cadrage inclut l'adoption d'hypothèses sur les apprentissages² et leur adaptation aux mathématiques en situation scolaire, en termes de conceptualisation mathématique (processus et produit).

Ces activités sont souvent analysées en séances d'exercices ou sur des productions d'élèves en comparant ce qui est attendu et ce qui observable. Ce qui est attendu est analysé grâce aux analyses de tâches, rapportées aux mises en fonctionnement des connaissances. Ces analyses sont ainsi nécessaires, in situ ou non. Elles sont aussi « relatives » : elles sont référées à une triple analyse croisée, mathématique, curriculaire et cognitive (relief). Ce qui est observable est rapporté aux choix des enseignants, et aux pratiques, dans leur complexité pendant les déroulements, d'où la restriction de nos ambitions aux activités possibles des élèves.

Types de résultats

La plupart des travaux mettent en jeu une classification des tâches, en termes d'adaptations des connaissances. En particulier, cela permet :

- l'identification des modifications des activités attendues des élèves en classe (souvent à partir d'analyses de vidéos tournées en classe),
- l'identification des retours des enseignants sur les activités des élèves (corrections par exemple) – vers des interprétations (côté élèves et côté pratiques enseignantes),
- l'identification de l'ensemble des activités possibles sur un chapitre et le travail sur les scénarios,
- la prise en compte de l'importance des déroulements, et même de la complexité des pratiques, pour apprécier les activités des élèves en classe à partir des tâches (initiales et modifiées au cours du déroulement).

² Les théories générales convoquées sont celles de Piaget et de Vygotsky. La définition de la conceptualisation de Vergnaud et ses champs conceptuels sont également utilisés, tout comme des concepts et outils de Didactique des mathématiques.

Les travaux de nos collègues anglais

Au cours du projet franco-britannique, nous avons constaté une différence notable entre la démarche des collègues anglais et la nôtre dans la mesure où, dans leurs travaux, ces analyses de tâches sont implicites et non pas préalables à l'analyse de ce qui se passe en classe (Abboud, Goodchild, Jaworski, Potari, Robert & Rogalski, 2018).

Des questions encore ouvertes :

- Comment doit-on inclure des paramètres actuellement négligés, comme par exemple les facteurs affectifs ?
- Comment adapter les hypothèses portant sur les relations entre activités et apprentissages individuels au cas de la classe ?
- Comment l'analyse de tâches articule-t-elle le point de vue de la conceptualisation et le point de vue de l'exécution ?
- Comment passer d'analyses locales pour étudier les activités aux apprentissages globaux, dans la durée ?

2. Deux extensions des analyses de tâches

Les analyses pour l'étude des activités sur logiciel

L'analyse de la tâche devient multi-orientée, vers la tâche et vers le logiciel. Les analyses de tâches sont à adapter (Vandebrouck & Robert, 2017). L'activité doit aussi impliquer l'élève comme « sujet cognitif » pour interpréter des prises d'information et des utilisations de commandes (en particulier, mais pas seulement au début des interactions élèves-logiciels).

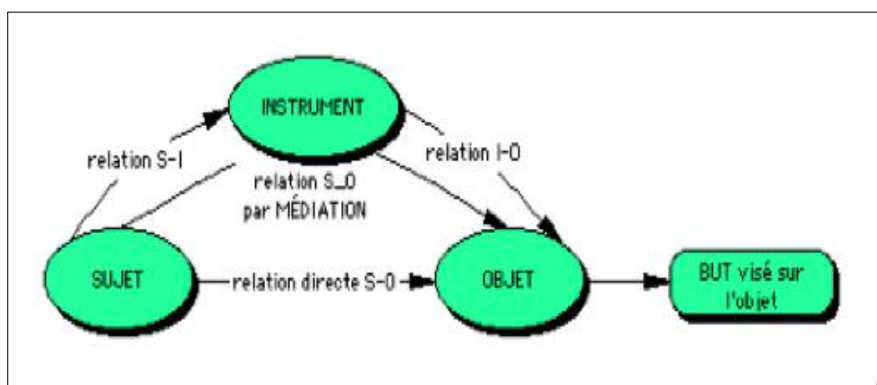


Figure 2 : Représentation de l'activité d'un sujet sur un objet, pour atteindre un but, via la médiation d'un instrument (modèle d'action instrumentée de Rabardel).

Dans ce contexte, plusieurs éléments sont en jeu :

- la relation élèves-logiciel du point de vue de l'usage (« en amont » de la tâche mathématique) : il faut savoir « définir », « draguer », prendre en compte la robustesse de la construction le cas échéant, repérer les traitements possibles... ;
- la transposition informatique, des objets mathématiques à ceux du logiciel : la représentation logicielle des objets est toujours discrète, finie ; cela peut poser des problèmes dans l'utilisation des approximations (par exemple, à 10^{-1} près la somme des angles d'un triangle peut ne plus être 180°) ;
- le changement de représentations et de traitement : aux figures géométriques sont attachées des mesures ; en algèbre, on a la possibilité d'induire les variations de certaines variables à l'aide d'un curseur.

Ainsi, doit-on tenir compte, dans l'analyse des tâches d'une dimension instrumentale centrale (Abboud, & Rogalski, 2017). Sur ces points, on relève de fortes convergences avec les approches des collègues anglais (Abboud, Clark-Wilson, Jones & Rogalski, 2018).

Les analyses pour l'étude des moments de cours

Les activités des élèves pendant les moments d'exposition des connaissances sont pratiquement inobservables. On est donc amené à suggérer un détour pour, à partir des discours de l'enseignant, identifier ce qui pourrait être en relation avec les activités que les élèves ont déjà conduites (prolongement), ou avec des activités à venir (préparation) (Bridoux, Grenier-Boley, Hache & Robert, 2018).

Est en jeu la possibilité de familiariser les élèves avec les mots et les formalisations de ce qui est « général », et de faire activer ensuite (ou grâce à ce qui s'est passé avant) des connexions, des liens explicites, entre mots (et/ou formules...) et activités mathématiques en contexte. Cependant, c'est l'ensemble {cours, tâches, déroulements} qui est en jeu dans les analyses.

L'efficacité des cours et les activités des élèves pendant le cours dépendraient en partie des occasions et de la qualité des connexions – et donc des tâches, des discours des enseignants ainsi que des échanges avec et entre élèves, reprises (et questions), explications, explicitations données à partir du travail effectif des élèves, de leurs connaissances déjà-là (activités déjà faites ou en train de se faire), ancien/nouveau et général/contextualisé, des questions et réponses des élèves.

On définit en particulier des proximités discursives : rapprochements explicites dans le discours de l'enseignant avec ce qui vient des élèves, en distinguant les rapprochements du contextualisé au général et du général au contextualisé.

Des entrées différentes de celles utilisées par Barbara Jaworski

Un exemple d'échange illustre une perspective d'abord orientée vers les contenus cognitifs des activités et des représentations des élèves pour Jaworski alors que la notion de "proximités" est d'abord orientée vers les objets et les tâches mathématiques, pour nous.

BJ: "What do you mean with this notion of "proximité"? If I have understood it correctly, it means 'closeness' – how close a teacher comes to understanding what a student needs, and in responding to a student's difficulty with mathematics. This is a useful concept; I believe it is useful for a teacher to find ways to understand students' *ways of seeing* mathematical concepts and to respond to students in helpful ways. The idea of *proximité* both considers the degree of closeness, and the process of getting close (or alternatively not so close), enabling a teacher to develop awareness of teaching-learning situations and how to judge her responses to students.

AR: yes, but not 'way of seeing', rather 'way of doing or saying'...

3. Quelques éléments clés de l'usage de la Théorie de l'Activité par B. Jaworski

En référence au modèle d'Engeström (1999), c'est le second niveau d'analyse que nous utilisons pour nos recherches sur les processus de développement dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Une inscription stricte en Théorie de l'Activité (TA) aurait emprunté le premier niveau, basé sur les données recueillies au cours de la séance de classe.

Dans ces recherches, c'est une perspective socio-culturelle qui sert de fil directeur, suivant en cela Vygotski pour qui savoir et apprentissage sont considérés d'abord comme des éléments sociaux ; l'apprentissage individuel étant vu comme faisant partie d'un engagement social. L'étude des situations d'enseignement-apprentissage nous amène alors à chercher à mieux comprendre la complexité des interactions entre enseignants et élèves. Cela dépasse

l'apprentissage individuel, en mettant en jeu les activités, leurs buts et motifs, les manières dont elles se déroulent, et tous les éléments dans lesquels l'apprentissage s'inscrit (Jaworski & Goodchild, 2006). C'est pourquoi l'activité engageant ensemble enseignant et élèves est si fondamentale à étudier, dans la mesure où elle permet de comprendre comment apprentissage et enseignement se complètent (ou non).

Par exemple, dans Jaworski & Potari (2009), nous analysons les interactions dans une classe du secondaire où un enseignant travaille dans sa classe les concepts statistiques de mode, moyenne et médiane. Il avait préalablement demandé aux élèves de faire un exercice à la maison, consistant à trouver dans un dictionnaire les significations des termes : mode, moyenne, médiane. Dans la mesure où un certain nombre d'élèves n'avaient pas fait ce travail, arguant qu'ils n'avaient pas de dictionnaire à la maison, l'enseignant ne pouvait plus développer la séance prévue. Il réprimanda les élèves en question, en disant qu'ils auraient pu utiliser la bibliothèque pour trouver des dictionnaires. Puis il leur fournit des dictionnaires pour qu'ils puissent effectuer la tâche pendant la séance. Cette interaction montra que ces élèves étaient incapables d'utiliser le dictionnaire ; ils pensaient que c'était un dictionnaire français car il s'avéra que la seule occasion qu'ils avaient eue d'utiliser un dictionnaire était les cours de français. Ces élèves développèrent une certaine hostilité à la manière dont l'enseignant les avait traités et mirent du temps à s'engager dans le travail sur les concepts statistiques, d'où un succès limité de la séance pour eux. Notre usage de la théorie (TA) nous a amenées à élargir hors de la classe l'étude des interactions dans la seule classe de mathématiques, en faisant intervenir les expériences des élèves, à l'école (plus largement qu'en mathématiques) et à la maison. Les hypothèses de l'enseignant n'étaient pas appropriées pour ces élèves-là et ont conduit à des tensions dans les relations avec ses élèves, qui se sont sentis bloqués par des reproches qu'ils considéraient comme injustes.

Pour nos analyses détaillées, nous utilisons le triangle des médiations de Engeström (1999), qui permet de mettre en évidence les tensions : entre les outils et la communauté où l'utilisation d'un dictionnaire, demandée par l'enseignant, n'est pas une activité « normale » des communautés d'appartenance de certains élèves ; entre les outils, la communauté et les règles (par exemple le dictionnaire et son usage, les familles, la culture) ; entre les règles, les outils et la division du travail (par exemple la règle scolaire veut que les élèves fassent le travail à la maison) : les élèves ne peuvent pas (ou ne veulent pas) s'engager dans la tâche, donc la division du travail ne peut fonctionner (cf. Figure 3).

Dans Jaworski, Robinson, Matthews et Croft (2012), nous analysons des données qui proviennent d'interviews d'étudiants, futurs ingénieurs, de première année d'université suivant un module de mathématiques comportant un dispositif innovant mis en œuvre. On a demandé aux étudiants de travailler par petits groupes sur des tutoriels permettant d'aborder des questions à résoudre par une démarche d'investigation, avec un ordinateur servant de médium (Geogebra) pour aider à la compréhension conceptuelle. Les tâches sur ordinateur demandaient d'explorer des propriétés des fonctions pour trouver des relations comme celle liant une fonction et son inverse. Les interviews ont révélé qu'alors même que les étudiants savaient pourquoi les enseignants avaient organisé cette recherche sur Geogebra, ils ne pensaient pas que c'était le meilleur moyen d'apprendre les mathématiques en jeu. Ils auraient préféré un style plus procédural d'enseignement-apprentissage.

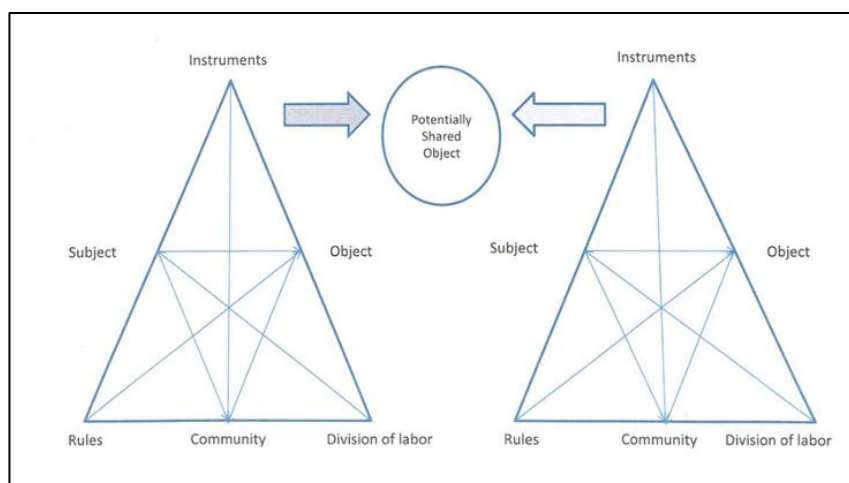


Figure 3 : Deux versions du triangle des médiations étendu d'Engeström (EMT) représentant les perspectives de l'environnement d'enseignement-apprentissage des professeurs à gauche et les élèves à droite.

Dans la figure 3, nous mettons en regard l'activité d'enseignement (des enseignants) et celle des étudiants en train d'apprendre en utilisant les trois niveaux de Leontiev (1979) : toute activité est motivée (niveau 1) et peut être interprétée en actions explicitement reliées à son but (niveau 2). Les actions peuvent être vues comme médiatisées par certaines opérations conditionnées par des circonstances dominantes et des contraintes (niveau 3). Ce cadre met en lumière les manières dont les activités peuvent vraiment différer selon les deux cultures impliquées, celles des enseignants et celles des élèves.

Dans l'exemple considéré, les actions des enseignants comportaient le choix des tâches et des questions d'investigation, avec comme objectif l'engagement des étudiants, l'exploration puis le dépassement d'un point de vue procédural des mathématiques. L'utilisation de Geogebra, avait pour objectif de fournir un autre environnement pour représenter les fonctions, offrant des méthodes de visualisation et permettant d'enrichir les perceptions des propriétés des fonctions et de leurs relations. Les actions des étudiants consistaient à participer au module : assister aux cours et aux groupes tutoriels ; utiliser le système LEARNVLE et des textes mathématiques divers ; les buts pouvaient inclure l'intention d'assister aux cours – parce que c'est là qu'on peut récupérer ce dont on a besoin pour passer l'examen ; vouloir savoir ce qu'il faut faire et comment ; vouloir faire le minimum de travail pour passer l'examen, etc.

Ainsi le contraste entre les actions et les buts respectivement des enseignants et des étudiants révèle des différences clefs dans les cultures en présence, mettant en jeu les manières dont les uns et les autres perçoivent les questions d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques.

4. Conclusion : Utilisation et impact des recherches dans les deux contextes

Malgré les différences entre les approches, il y a malheureusement un grand point commun : la **non reprise** des recherches en didactique ou en mathematics education par les décideurs (Jaworski & Robert, 2018). Même si on peut évoquer le fait que les recherches sont souvent qualitatives, dispersées, dépendant fortement des contextes, on pourrait chercher des perspectives unificatrices à partir de ce qui est fait. Il s'agirait alors de dégager ce qui est commun dans les résultats ou les démarches, comme l'importance de la prise en compte des déroulements pour comprendre ce qui se passe dans la classe et les apprentissages possibles. Les travaux comparés dans les symposiums ont aussi révélé la qualité des formations par co-

développement (didacticiens / enseignants). Ils ont pu aussi présenter des exemples analogues de dispositifs favorables.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- ABBOUD, M. & COLES, A. (EDS.) (2018). English-French use of theories in mathematics teaching, teaching development and teacher education. *Special issue of the Annales de didactique et de sciences cognitives*.
- ABBOUD, M., CLARK-WILSON, A., JONES, K. & ROGALSKI, J. (2018). Analysing teachers' classroom experiences of teaching with dynamic geometry environments: Comparing and contrasting two approaches. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, Numéro spécial, 93-118.
- ABBOUD, M., GOODCHILD, S., JAWORSKI, B., POTARI, D., ROBERT, A. & ROGALSKI, J. (2018). Use of activity theory to make sense of mathematics teaching: A dialogue between perspectives. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, Numéro spécial, 61-92.
- ABBOUD, M. & ROGALSKI, J. (2017). Des outils conceptuels pour analyser l'activité de l'enseignant "ordinaire" utilisant les technologies. *Recherches en didactique des mathématiques*, 37(2-3), 161-216.
- ABBOUD, M., ROBERT, A., ROGALSKI, J. & VANDEBROUCK, F. (2017). Pour une théorie de l'activité en didactique des mathématiques. *Cahiers du LDAR*, 18.
- BEGUIN, P. (2005). Concevoir pour les genèses professionnelles. In P. Rabardel & P. Pastré (éd.) *Modèles du sujet pour la conception. Dialectiques activités développement*. Toulouse : Octarès.
- BOWKER, G., & STAR, S. (1999). *Sorting things out: Classification and its consequences*. Cambridge, MA: MIT Press.
- BRIDOUX, B., GRENIER-BOLEY, N., HACHE, C. & ROBERT, A. (2018). Les moments d'exposition des connaissances en mathématiques analyses et exemples. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 21, 187-234.
- BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des situations didactiques (didactique des mathématiques (1970-1990))*, textes rassemblés et préparés par Balacheff, N., Cooper, M., Sutherland, R. & Warfield, V. Grenoble : La Pensée sauvage.
- BROWN, L., COLES, A. (2011). Developing expertise: How enactivism re-frames mathematics teacher development. *ZDM*, 43.6-7, 861-873.
- ENGESTRÖM, Y. (1999). Activity theory and individual and social transformation. In Y. Engeström, R. Miettinen and R.L. Punamäki (eds), *Perspectives on activity theory* (pp. 19-38). Cambridge: Cambridge University Press.
- ENGESTRÖM, Y. (2001). Expansive Learning at Work: Toward an activity theoretical reconceptualization. *Journal of Education and Work*, 14(1), 133-156.
- JAWORSKI, B., & GOODCHILD, S. (2006). Inquiry community in an activity theory frame. In J. Novotna, H. Moraova, M. Kratka and N. Stehlikova (eds), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 353-360). Prague: Charles University.
- JAWORSKI, B., ROBINSON, C., MATTHEWS, J. & CROFT, A. C. (2012). Issues in teaching mathematics to engineering students to promote conceptual. *The International Journal for Technology in Mathematics Education*, 19(4), 147-152.
- HERSANT, M. & PERRIN-GLORIAN, M. J. (2005). Characterization of an ordinary teaching practice with the help of the theory of didactic situations. *Educational Studies in Mathematics* 59, 113-151.
- LEONT'EV, A. N. (1979). The problem of activity in psychology, In J. V. Wertsch (ed), *The concept of activity in Soviet psychology* (37-71). New York: M. E. Sharpe.
- MANGIANTE-ORSOLA, C., PERRIN-GLORIAN, M.J. & STRØMSKAG, H. (2018). La théorie des situations didactiques comme outil pour comprendre et développer des pratiques d'enseignement en mathématiques. *Annales de didactique et sciences cognitives*, volume spécial English-French, 145-174.
- MARGOLINAS, C., COULANGE, L. & BESSOT, A. (2005). What can the teacher learn in the classroom? *Educational Studies in Mathematics* 59, 205-234.
- PERRIN-GLORIAN, M.J. & GODIN M. (2014). De la reproduction de figures géométriques avec des instruments vers leur caractérisation par des énoncés. *Math-École*, 222, 26-36.
- ROBERT, A., & ROGALSKI, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Canadian Journal of Math, Science & Technology Education*, 2(4), 505-528.
- STAR, S., & GRIESEMER, J. (1989). Institutional ecology, 'translations' and boundary objects: amateurs and professionals in berkeley's museum of vertebrate zoology, 1907-39. *Social studies of science*, 19 (3), 387-420.
- JAWORSKI, B. & ROBERT, A. (2018). French and English Theoretical perspectives in Mathematics Education Research : an overview and discussion of key issues – Des recherches en didactique des mathématiques anglaises et françaises : bilan et mise en discussion des perspectives théoriques et des principales questions abordées. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, Numéro spécial, 175-203.
- VANDEBROUCK, F., & ROBERT, A. (2017). Activités mathématiques des élèves avec les technologies numériques. *Recherches en didactique des mathématiques*, 37(2/3), 333-382.
- VYGOTSKY, L. S. (1986). *Thought and language* (A. Kozulin, Trans.). Cambridge, MA: MIT Press. (Original work published 1934).

APPROCHE DIDACTIQUE DE L'ÉVALUATION ET DE SES PRATIQUES EN MATHÉMATIQUES

Nathalie SAYAC

Université Paris-Est Créteil (INSPE)/LDAR

nathalie.sayac@u-pec.fr

Résumé

Le cadre didactique de l'évaluation qui sera présenté a été conçu pour penser et analyser les "faits évaluatifs" (Chevallard, 1986) en conjuguant savoirs scientifiques en évaluation (dans la diversité des champs scientifiques concernés) et savoirs didactiques. Il prend en compte à la fois des contenus disciplinaires et des réalités professionnelles permettant de définir une nouvelle approche scientifique de l'évaluation, plus didactique et volontairement ancrée dans la réalité des pratiques en classe. Ce cadre s'articule autour de deux axes d'analyse des pratiques d'évaluation en mathématiques, l'un focalisé sur les *épisodes évaluatifs* proposés aux élèves et l'autre structuré par la "logique évaluative" des professeur·e·s. Dans ces actes nous reviendrons sur quelques travaux français sur l'évaluation en mathématiques qui nous semblent importants de rappeler pour introduire notre approche. Une recherche en cours menée au sein du réseau RE.S.E.I.D.A sera également présentée. Cette recherche vise d'une part à éprouver les potentialités et les limites du cadre présenté en le confrontant à une autre discipline scientifique (SVT) et un autre pays (Suisse), et d'autre part à étudier dans quelle mesure les pratiques d'évaluation peuvent contribuer à la production d'inégalités scolaires.

Mots clés

Épisode évaluatif, pratiques d'évaluation, jugements, mathématiques, didactique

Dans les actes ARDM de 2015, Antoine Bodin avait interpellé la communauté des didacticien·nes en posant plusieurs questions et notamment : à terme, l'évaluation est-elle soluble dans la didactique ? l'évaluation doit-elle intéresser la recherche en didactique des mathématiques ? Le cadre présenté dans les actes de 2019 vise à tenter de répondre à ces interrogations qui, 4 ans plus tard, gardent toute leur pertinence.

Dans un premier temps, nous rendrons compte de travaux ayant ouvert la voie à une approche didactique de l'évaluation, puis dans un deuxième temps nous présenterons le cadre didactique que nous avons développé pour étudier les pratiques d'évaluation des professeur·es en mathématiques. Un troisième temps sera consacré à une étude de cas traité à partir du cadre présenté.

I. TRAVAUX AUTOUR DE L'ÉVALUATION EN MATHÉMATIQUES

Dans les années 1990 des ouvrages très intéressants ont été publiés autour de l'évaluation en mathématiques (Leder, 1992 ; Niss, 1993 ; Van Den Heuvel-Panuizen, 1996), mais aucun ne concernait la France. En France, au-delà des travaux de Chevallard et Feldman qui datent de 1986, c'est incontestablement Antoine Bodin qui s'est le premier emparé des questions d'évaluation en mathématiques et qui les a le plus étudiées. En 1987, dans le cadre de l'APMEP (Association des Professeurs de mathématiques de l'Enseignement Public), il a créé un observatoire de l'enseignement des mathématiques (EVAPM), chargé de recueillir et d'analyser des informations sur les conditions d'enseignement et sur l'état des acquis des élèves en mathématiques, de façon continue, en France. Mais c'est surtout autour des évaluations standardisées, notamment PISA et TIMSS, que Bodin a apporté sa contribution principale, suivi depuis par d'autres chercheurs en didactique des mathématiques (Grapin, Roditi) et en didactique des sciences (De Hosson, Décamp).

1. Autour des évaluations standardisées

Dans un article datant de 2006 autour des évaluations du PISA, Bodin a présenté les cadres théoriques sur lesquels s'appuient les évaluations standardisées telles PISA, ainsi que leur évolution. Il s'est intéressé à leur validité et à la signification qu'il convenait de donner aux résultats produits dans ces enquêtes dans un contexte français. Dans sa conclusion, il invitait les chercheurs en didactiques des mathématiques à mener des recherches complémentaires sur ce type d'évaluation.

Cette invitation a été entendue puisque depuis, des réflexions théoriques (Artigue & Winsløw, 2010), des thèses (Rumino-Vergara, 2014 ; Grapin, 2015 ; Chanudet, 2019) et des analyses (Sayac & Grapin, 2015 ; Roditi & Salles, 2015, Martinez & Roditi, 2017 ; Grapin & Bodin, 2016, 2018) d'évaluations standardisées (PISA, TIMSS, CEDRE, SIMCE¹) ont été produites par des didacticien·nes des mathématiques. Ces travaux mobilisant des outils et des concepts didactiques permettent une analyse plus fine des savoirs mathématiques évalués dans les différents types d'évaluation à partir de la prise en compte de paramètres épistémiques et institutionnels éprouvant leur validité. A l'heure où les évaluations standardisées prennent une place de plus en plus importante dans les systèmes scolaires et les politiques éducatives des pays (cf. le développement depuis 3 ans d'évaluations nationales en CP, CE1, Sixième, en France), il est indispensable de pouvoir considérer dans quelle mesure elles peuvent réellement contribuer à rendre compte des acquis des élèves français en mathématiques, voire à les améliorer, quelle confiance accorder à leurs résultats en fonction de leurs différentes caractéristiques (visée, forme, contenu, recouvrement curriculaire, etc.) et quels usages les professeurs pourraient en faire dans leur(s) classe(s).

¹ *Système de Mesure de la Qualité de l'Éducation.*

2. Autour des évaluations sommatives et formatives

La question des évaluations de classe est généralement posée en termes de fonctions de l'évaluation (diagnostique, sommative, formative, formatrice, etc.). Cette entrée par les fonctions des évaluations ne satisfait pas et nous souhaitons la dépasser (voir plus loin). Néanmoins, des travaux autour des évaluations sommatives et formatives méritent d'être cités dans cette présentation car ils s'inscrivent clairement dans une approche didactique de l'évaluation et apportent un éclairage spécifique sur des « faits évaluatifs » (Chevallard, 1986).

Évaluation sommative

Dans la deuxième partie de leur note sur l'évaluation, Chevallard & Feldman (1986) ont étudié finement à la fois les épreuves de contrôles d'un échantillon de professeur·e·s de mathématiques enseignant en collège et à la fois les fluctuations des notes des élèves d'une classe. Cette étude a permis d'illustrer la négociation didactique en jeu dans ce type d'évaluation, mais aussi de définir des trajectoires d'élèves au cours d'un trimestre.

Dans sa thèse, Coppé (1993) s'est intéressée à l'évaluation à partir d'une entrée singulière, centrée sur les élèves. Elle a étudié les processus de vérifications que développent les élèves lorsqu'ils sont en situation de devoirs surveillés en mathématiques, ce qui était pour le moins novateur et instructif pour une étude portant sur des évaluations sommatives.

Horoks (2006) et Chesnais (2009) se sont également intéressées aux évaluations sommatives, mais dans une approche davantage outil qu'objet puisqu'elles ont toutes deux étudié les contrôles comme un moyen de renseignement sur les connaissances acquises par les élèves en fin de séquence sur les triangles semblables en 2nd pour Horoks et sur la symétrie axiale en 6^{ème} pour Chesnais.

De notre côté, nous avons étudié les évaluations sommatives données en mathématiques par un échantillon de 25 professeurs des écoles à partir d'un outil développé pour analyser les tâches de l'évaluation nationale CEDRE 2008 en mathématiques (Sayac & Grapin, 2015). Cet outil nous a permis de réaliser que les tâches données par ces professeurs étaient, dans une grande majorité, d'un faible niveau de complexité et de compétence, et qu'elles correspondaient presque exclusivement à des tâches que les élèves avaient réalisées lors des séances ayant précédé les évaluations sommatives étudiées. Ce constat rejoint le principe de "WYTIWYG" (*What you teach is what you get*) évoqué par Kenneth Ruthven dans un article publié en 1994 dans *Educational Studies in Mathematics*. Il fait également écho à la crainte « d'écrasement des objectifs sur l'évaluation » que Brousseau avait très tôt exprimée et que Bodin avait rappelée dans les actes ARDM de 2015.

Évaluation formative

Du côté de l'évaluation formative qui intéresse légitimement les didacticien·nes car ce type d'évaluation est intégrée aux processus d'apprentissages, nous avons plus particulièrement retenu les travaux récents de :

- Coppé qui s'intéresse à la place, la fonction et la nature de l'évaluation formative dans les pratiques de classe en mathématiques et qui s'interroge sur la nécessité à laquelle ce type d'évaluation peut correspondre dans le cours d'une étude (projet ASSIST-ME).
- Aldon qui étudie les potentialités des technologies pour la mise en place de stratégies d'évaluation formative, dans le cadre du projet européen FaSMEd (Formative Assessment for Science and Maths Education).

- Roditi et Kiwan qui étudient l'évaluation formative en classe de mathématiques et plus particulièrement la notion de feedback, en lien avec les interactions professeur·es/élèves durant les séances.
- Horoks, Pilet et Haspékian qui s'intéressent à l'évaluation formative en algèbre élémentaire et étudient les pratiques évaluatives des professeur·es au collège dans le cadre de leur LéA Pécanumeli.

L'entrée par l'évaluation formative a le mérite de donner accès à l'évaluation telle qu'elle se pratique (ordinairement ou expérimentalement) dans les classes et permet d'étudier les pratiques évaluatives de professeur·es qui font, dans les faits, l'objet de peu de travaux (Mons, 2014).

3. Autour des pratiques d'évaluation

En 1992, dans son livre intitulé "*Assessment and learning of Mathematics*" Gilah Leder a rassemblé des contributions s'intéressant aux liens entre apprentissages mathématiques des élèves et méthodes d'enseignement et d'évaluation dans différents pays (Australie, États-Unis, Pays-Bas et Royaume Uni). Dans cet ouvrage, plusieurs chercheur·es se sont intéressé·es aux effets de la perception qu'ont les enseignant·es de leur rôle dans les apprentissages mathématiques des élèves et à l'influence des contextes sociaux sur les pratiques d'enseignement et d'évaluation des professeur·es. En 1993, suite à la sixième étude ICMI (International Commission on Mathematical Instruction) portant sur "*Assessment in Mathematics Education and Its Effects*", Mogens Niss a coordonné la publication de deux ouvrages autour de l'évaluation en mathématiques. Le premier "*Cases of Assessment in Mathematics Education*" présente des études de cas d'évaluation dans différents pays (Espagne, Chine, Caraïbe, pays arabes, États-Unis, Royaume uni, Norvège, Danemark, Pays-Bas, Australie) alors que le second "*Investigations into Assessment in Mathematics Education*" propose davantage une analyse de l'évaluation en mathématiques et de ses effets à partir de différentes approches (historique, psychologique, sociologique, épistémologique, idéologique et politique). Dans ces deux ouvrages de nombreux chercheur·es ont dressé un portrait désastreux des pratiques évaluatives dans leur pays. Au-delà de ces travaux datant d'il y a plus de vingt ans et menés hors de France, nous n'avons pas connaissance de travaux ayant porté sur les pratiques d'évaluation en mathématiques et en France.

Dans sa thèse, Vantourout (2004) s'est bien intéressé aux compétences évaluatives de professeur·es des premier et second degré en mathématiques, mais à partir de situations "simulées" d'évaluation formative. Il a montré que des jugements évaluatifs, apparemment identiques, peuvent en fait reposer sur une grande diversité de connaissances et de processus et que les connaissances disciplinaires des professeur·es jouent un rôle essentiel dans la qualité des jugements émis.

A partir de 2013, nous nous sommes intéressée aux pratiques évaluatives des enseignant·es du primaire en mathématiques que nous avons étudiées dans le cadre de recherches collaboratives (2015, 2017), plus adaptées à l'étude de ces pratiques spécifiques. Ces travaux, menés dans la réalité de classes ordinaires et pour certains en REP, ont permis de témoigner de la grande diversité des évaluations en mathématiques proposées aux élèves de l'école primaire et de leurs usages très variés selon les professeur·es. Ils ont également montré à quel point les pratiques de ces professeur·es sont peu construites professionnellement et conçues majoritairement de manière individuelle, à partir d'une grande diversité de ressources (sites Internet, manuels divers, manuel de la classe, etc.).

Ces travaux et la nécessité de prendre en compte des facteurs contextuels et individuels pour analyser plus finement les pratiques d'évaluation des professeur·es en mathématiques nous ont amenée à élaborer le cadre didactique de l'évaluation et de ces pratiques que nous allons, à présent, décrire.

II. APPROCHE DIDACTIQUE DES PRATIQUES D'ÉVALUATION

1. Positionnement théorique

Lorsque nous avons commencé à nous intéresser à l'évaluation, nous avons naturellement exploré les différents travaux disponibles pouvant nous éclairer sur cette problématique peu traitée en didactique des mathématiques. Nous avons alors fait le constat que l'approche scientifique développée en Sciences de l'éducation pour étudier les questions d'évaluation (externe, de classe, de pratiques, etc.) était, certes, extrêmement riche et fructueuse, mais qu'elle n'était pas suffisante quand des contenus mathématiques étaient en jeu. Parallèlement, nous avons constaté que l'approche didactique n'était pas totalement satisfaisante quand elle ne prenait pas en compte des résultats cruciaux développés en Sciences de l'éducation, notamment les dimensions psycho-cognitives ou psycho-sociales qui interfèrent dans les relations enseignant·e/élèves. En effet, les didacticien·nes qui s'intéressent à l'évaluation utilisent souvent *a minima* les concepts de l'évaluation développés en Science de l'éducation principalement en tant qu'outils au service de leurs objets d'étude habituels (savoir spécifique comme l'algèbre, pratiques enseignantes, etc.). D'un autre côté, les chercheur·es en Sciences de l'éducation qui étudient des évaluations en mathématiques n'exploitent souvent qu'en surface les savoirs en jeu et ignorent généralement les concepts et méthodes développés en didactique des mathématiques qui leur permettraient d'analyser plus finement leurs données. Le cadre que nous proposons a été conçu pour penser et analyser les "faits évaluatifs" (Chevallard, 1986) en conjuguant efficacement savoirs scientifiques en évaluation (dans la diversité des champs scientifiques concernés) et savoirs didactiques. Il se caractérise par différents positionnements :

- Les travaux en Sciences de l'éducation sur l'évaluation explorant les liens entre évaluation et apprentissages des élèves sont principalement axés sur les différentes fonctions de l'évaluation. Un courant fort autour de l'évaluation formative (*Formative Assessment* ou *Assessment For Learning*) et de la régulation des apprentissages s'est développé à travers le monde. Ce courant promeut des formes d'évaluation qui se retrouvent dans de nombreux curricula (Canada, Angleterre, Portugal, etc.). En France, on ne trouve pas explicitement d'injonctions institutionnelles exprimées en termes d'évaluation formative, mais les nouveaux programmes de 2015 ont été conçus autour de principes qui s'y réfèrent indirectement (on y parle d'évaluation positive, bienveillante, constructive, etc.). Les professeur·es sont tous capables de distinguer théoriquement les différentes fonctions de l'évaluation (certificative, formative, diagnostique), mais ils ou elles sont souvent peu outillé·es et peu formé·es pour mettre en place formellement d'autres formes d'évaluation que les évaluations sommatives qui leur permettent de remplir leur "mission" d'évaluation (remplir des livrets, rendre compte de niveaux de connaissances des élèves, etc.). Bodin a d'ailleurs précisé dans les actes ARDM de 2015 que « *l'évaluation dite formative est souvent devenue l'alibi pour une évaluation permanente de nature plutôt sommative* ». Nous considérons que ces fonctions ne doivent pas être au cœur d'un cadre didactique de l'évaluation car d'une part, elles enferment l'évaluation dans des

catégories distinctes qui ne le sont pas forcément dans la réalité des pratiques de classe et que d'autre part, elles peuvent amener les professeur·es à concevoir/penser l'évaluation comme disjointe des processus d'enseignement et d'apprentissage². **Le cadre didactique de l'évaluation que nous proposons ne retient donc pas une entrée par les différentes fonctions de l'évaluation.**

- Pour étudier les pratiques d'évaluation des professeur·es en mathématiques, la double approche de Robert et Rogalski (2002) est adaptée puisqu'elle permet de prendre en compte, à la fois cette activité spécifique des professeur·es (Roditi, 2011) et à la fois les apprentissages des élèves qui sont au cœur de toute évaluation. Néanmoins, elle ne suffit pas toujours à rendre compte, pour tous les acteurs et actrices concerné·es, de ce qui se joue autour de l'évaluation dans la réalité des pratiques de classe. Elle ne permet pas d'étudier, avec une égale pertinence, les différents moments d'évaluation dans la diversité de leur nature et de leur réalisation dans les classes. D'autre part, même si la composante personnelle est bien présente dans ce cadre, elle n'est pas suffisamment prise en compte pour analyser les pratiques d'évaluation des enseignant·es alors que de nombreux travaux en Sciences de l'éducation et en *Math Education* ont montré l'importance de la prise en compte des facteurs personnels dans l'activité d'évaluation. Elle ne permet pas non plus de prendre en compte les pratiques de notation qui jouent pourtant un rôle important dans la négociation didactique liée à l'évaluation (Chevallard, 1986). **Le cadre didactique de l'évaluation que nous proposons s'inscrit dans la continuité des travaux de Robert et Rogalski (2002) et de Roditi (2011) sur les pratiques enseignantes, mais il intègre des éléments développés dans d'autres cadres et accorde une place importante à la dimension personnelle des pratiques d'évaluation.**

- **Ce cadre prend en compte à la fois des contenus disciplinaires et à la fois des réalités professionnelles permettant de définir une nouvelle approche scientifique de l'évaluation, plus didactique et volontairement ancrée dans la réalité des pratiques en classe.** Les notions d'épisode évaluatif, de contrat didactique en évaluation et de jugement professionnel et didactique en évaluation qui s'inscrivent dans la "logique évaluative" d'un·e professeur·e sont au cœur de ce cadre. Elles permettent d'inscrire pleinement l'évaluation dans les processus d'enseignement et d'apprentissages tout en prenant en compte les acteurs et actrices principales que sont les professeur·es et les élèves. Nous allons, à présent, développer ces notions-clé de notre cadre.

2. Les épisodes évaluatifs

Pour étudier l'évaluation dans un cadre didactique, nous avons développé le concept d'*épisode évaluatif* qui permet d'appréhender l'évaluation en mathématiques sous toutes ses formes et au-delà de ses fonctions. Un *épisode évaluatif* correspond à un moment de l'enseignement durant lequel l'enseignant·e se met/est en capacité, de manière formelle ou informelle, de porter des jugements sur l'état de connaissance de ses élèves par rapport à un savoir ou savoir-faire prescrit ou enseigné.

Pour étudier un épisode évaluatif, il convient de prendre en compte le moment où il est proposé (ce qui permet de dépasser l'entrée par les fonctions), mais aussi les tâches évaluatives qui le

² William (2000) a clairement dénoncé cela en expliquant comment l'étiquetage des différentes fonctions de l'évaluation avait participé à opposer évaluation et apprentissages.

constituent (analyse *a priori* et *a posteriori* des tâches à partir des productions des élèves) ainsi que la gestion que l'enseignant·e en fait et le contrat didactique qui lui est associé. En effet, chaque épisode évaluatif intègre des dimensions de jugements et de régulation qui dépendent de la gestion adoptée par l'enseignant·e. Le contrat didactique qui lie professeur·e et élèves à propos du savoir est spécifique à chaque épisode évaluatif. Il intègre des dimensions de communication, de pouvoir et de négociation didactiques, c'est pourquoi nous le désignons par *contrat didactique en évaluation*. C'est un contrat qui peut s'apparenter à un *méscontrat* didactique (Perrin-Glorian & Hersant, 2003) et qui permet de considérer ce qui se joue, pour les élèves et pour l'enseignant·e, dans un épisode évaluatif donné. L'explicitation d'un tel contrat est un enjeu didactique pour penser et concevoir une évaluation "pour apprendre" (*Assessment for Learning*).

Pour chaque épisode évaluatif, il convient donc de considérer le contrat didactique en évaluation en jeu car ce contrat n'est pas sans incidence sur la façon dont l'élève va être amené·e à percevoir cette évaluation et produire une réponse, mais aussi la façon dont l'enseignant·e va en tenir compte pour réguler son enseignement ou pour rendre compte des apprentissages des élèves. Selon la nature de l'épisode évaluatif considéré, le contrat didactique en jeu peut être différent, aussi bien pour l'enseignant·e que pour chaque élève (prise en compte de dimensions psycho-cognitives ou psycho-sociales côté élèves et côté enseignant·e).

→ Un épisode évaluatif est donc caractérisé par : le moment où il est proposé, son contenu, sa gestion et le contrat didactique qui lui est associé.

Dans les travaux en sciences de l'éducation, le concept de validité occupe une place importante et ne peut donc être absent d'un cadre didactique de l'évaluation. Notre approche de la validité combine donc différentes orientations³, en y ajoutant les validités curriculaire et pédagogique que distingue De Landsheere (1988) pour dégager une validité didactique adaptée aux épisodes évaluatifs et donc aux évaluations de classe. Ainsi, dans le cadre didactique de l'évaluation que nous proposons, la validité d'un épisode évaluatif est éprouvée à partir :

- d'éléments liés aux dimensions épistémologique et/ou curriculaire du savoir en jeu dans l'épisode.
- d'éléments liés à la gestion de cet épisode par l'enseignant·e.

Pour qu'un épisode évaluatif soit valide, il faut donc à la fois qu'il s'inscrive dans le processus didactique en cours c'est-à-dire que l'enseignant·e lui attribue un rôle spécifique dans le processus d'enseignement, que les tâches qui lui sont associées soient suffisamment variées et représentatives du thème et à la fois qu'il soit géré de manière à permettre aux élèves "d'apprendre" au cours de cet épisode évaluatif. Nous entendons par là qu'il faut que l'enseignant·e le considère comme un outil au service des apprentissages des élèves.

Les points suivants concourent à l'édification de preuves de la validité d'un ou de plusieurs épisodes évaluatifs :

³ Pour certain·es chercheur·es (Moss, 2003 ; Kane, 2006 ; Cizeck, 2009) s'inscrivant dans la continuité des travaux de Messick (1989, 1995), la validité se conçoit en lien avec la qualité du jugement ou de l'interprétation émis à partir des réponses des élèves. Pour d'autres, la validité se conçoit telle que définie par De Ketele et Roegiers (1993) qui considèrent qu'une évaluation est valide si elle évalue bien ce qu'elle prétend évaluer. Nous prenons également en compte le point de vue de chercheuses comme Brookhart (2003) ou Rémond (2006) qui estiment que les critères de validité doivent porter sur les conditions qui permettent de rendre l'évaluation utile du point de vue des apprentissages des élèves.

- **Le recouvrement des tâches évaluatives** aussi bien du point de vue curriculaire que du point de l'univers de référence didactique.

- **La cohérence des tâches entre elles**, au-delà de ce recouvrement. Nous entendons par là que les tâches doivent constituer un tout cohérent du point de vue du savoir à évaluer (cf. la validité épistémo-didactique de Grapin 2015 ou Grugeon-Allys & Grapin 2016) et de celui de l'activité des élèves.

- **Les différents niveaux de complexité de ces tâches**, déterminés à partir d'outils didactiques (tels les niveaux de mise en fonctionnement des connaissances, les changements de cadres, les relations entre les registres de représentations sémiotiques, etc.) doivent permettre de rendre compte, finement, de ce que les élèves ont acquis en termes de connaissances, de savoirs et de compétences.

L'étude des épisodes évaluatifs n'a de sens qu'à travers une étude plus globale des pratiques évaluatives des enseignant·e·s en mathématiques. Comment les conçoivent-ils·elles ? Comment sont-ils intégrés dans les processus d'enseignement ? Quelle négociation didactique engendrent-ils ? etc. Ces questions sont fondamentales pour comprendre ce qui se joue du point de vue des apprentissages des élèves dans les moments d'évaluations qui ponctuent une séquence d'enseignement, c'est pourquoi nous proposons de les prendre en compte dans l'étude de la logique évaluative des enseignant·es.

3. La logique évaluative

Concernant les pratiques d'évaluation en mathématiques, nous considérons que **c'est l'ensemble des épisodes évaluatifs proposés qui constituent, en s'articulant les uns aux autres à partir d'une logique intégrant des dimensions personnelles, institutionnelles et professionnelles, les pratiques d'évaluation en mathématiques d'un·e professeur·e.**

Le cadre que nous proposons articule deux axes d'analyse des pratiques d'évaluation en mathématiques, un axe focalisé sur les épisodes évaluatifs proposés aux élèves et un axe centré sur la "logique évaluative" d'un·e professeur·e.

La "logique évaluative" d'un·e professeur·e est appréhendée à partir d'indicateurs retenus pour permettre de décrire cette logique personnelle activée lors des moments d'évaluation. Ces indicateurs sont :

- **la conception** (au sens *design*) des différents épisodes évaluatifs qui ponctuent l'étude d'un savoir mathématique, c'est-à-dire la façon dont les professeur·es les conçoivent (ressources utilisées, documents évaluatifs, méthodes).
- **le jugement professionnel et didactique en évaluation (JPDE)** de l'enseignant·e. Ce jugement s'appuie sur les travaux développés en Sciences de l'éducation sur le jugement professionnel en évaluation (Mottier Lopez & Allal, 2008 ; Tessaro, 2013), mais il est spécifié aux mathématiques et intègre des notions développées en didactique des mathématiques telle que la vigilance didactique (Pézard, 2010). Il dépend :
 - des connaissances mathématiques et didactiques des professeur·es,
 - des connaissances professionnelles : analyser les réponses des élèves, les intégrer au processus didactique et effectuer un retour constructif à l'élève, etc.
 - de facteurs individuels : croyances et représentations sur les apprentissages, sur l'évaluation, expériences évaluatives personnelles ou professionnelles.

Le jugement professionnel et didactique en évaluation des professeur·es est activé lorsque qu'ils ou elles doivent :

- émettre un avis sur l'état des connaissances mathématiques de leurs élèves,

- articuler les différents moments de l'étude entre eux (notamment intégrer les épisodes évaluatifs aux autres moments de l'étude),
 - gérer les épisodes évaluatifs de manière à favoriser les apprentissages de leurs élèves.
- **La notation** adoptée par l'enseignant·e pour rendre compte des acquis de ses élèves ou attribuer des échecs (Chevallard, 1988). Elle est liée au contrat didactique en évaluation par la dimension de négociation qu'elle génère et par son incidence sur les réponses des élèves (stratégies, vérifications, "course au 20"). La notation est également en lien avec le jugement professionnel et didactique en évaluation dans la mesure où elle résulte des jugements émis par les professeur·es. Chevallard (1989) percevait d'ailleurs la notation comme l'énonciation d'un jugement qu'il considérait comme une "passion institutionnelle". Elle est en quelque sorte une traduction institutionnelle et publique de ce jugement, même si elle n'est pas sans risque (Pluvinage, 1979) et qu'elle n'en est qu'une facette (Bressoux & Pansu, 2003).

Nous avons retenu ces trois entrées pour leur pertinence dans l'étude de ce qui se joue en termes d'apprentissages des élèves lors des différents épisodes évaluatifs, mais aussi pour les perspectives qu'elles offrent, en formation, pour faire évoluer les pratiques d'évaluation des professeur·es en mathématiques.

→ **La logique évaluative d'un·e enseignant·e peut être appréhendée à partir : de l'étude de la conception des évaluations (mode, ressources), du jugement professionnel et didactique en évaluation de l'enseignant·e (connaissances professionnelles, mathématiques et didactiques, facteurs personnels) et de la notation qu'il ou elle adopte.**

Le schéma ci-dessous synthétise les éléments constituant le cadre didactique que nous avons développé pour appréhender les pratiques d'évaluation des professeur·es en/de mathématiques.

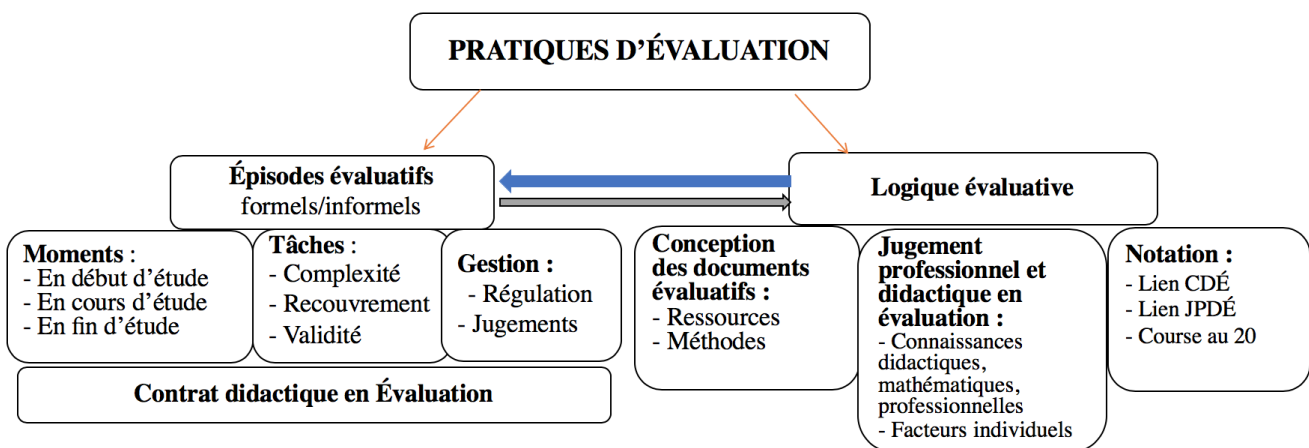


Figure 1: schéma relatif au cadre didactique de l'évaluation et de ses pratiques

III. UNE RECHERCHE EN COURS

Dans le cadre d'une recherche menée avec des chercheur·es français·es et suisses au sein du réseau RE.S.E.I.D.A (Recherches sur la Socialisation, l'Enseignement, les Inégalités et les

Différenciations dans les Apprentissages), nous avons éprouvé notre cadre pour étudier les pratiques d'évaluation d'une professeure des écoles enseignant en CM2 (Caroline), dans une école de Seine-Saint-Denis. Pour ce faire, nous avons choisi de nous focaliser sur une séquence d'enseignement relative aux fractions proposée par Caroline en début d'année à ses élèves. Nous avons récolté plusieurs types de données :

- Les 8 séances constituant la séquence ont toute été filmées, doublées d'un enregistrement audio du discours de Caroline.
- Les cahiers des élèves correspondant à la séquence ont été photocopiés, ainsi que les productions corrigées de l'évaluation finale.
- Un entretien *ante* a été réalisé en amont de l'étude afin de récolter des données personnelles et professionnelles de Caroline à partir de questions relatives à sa pratique d'évaluation, à ses croyances et représentations sur les apprentissages et l'évaluation, à sa manière de noter, etc.
- Un entretien *post* mené selon la méthode du Think-aloud (Charters, 2003) lors de la correction des productions des élèves à l'évaluation finale.

Nous avons repéré et étudié les épisodes évaluatifs présents dans chacune des séances et caractérisé la logique évaluative de cette enseignante à partir de différents éléments (entretiens, étude des copies corrigées des élèves, jugements émis au cours des séances, etc.).

Nous avons détaillé l'étude de cette séquence dans un article (à paraître) dans la revue RDM. Nous proposons, pour les actes du séminaire, une synthèse de cette étude à partir des deux axes d'analyse des pratiques d'évaluation de notre cadre.

Au niveau des épisodes évaluatifs :

La pratique évaluative de Caroline se caractérise par une prépondérance d'épisodes évaluatifs avec jugements furtifs⁴, sans trace proposés au cours de la séquence. Les tâches proposées durant ces épisodes sont d'une complexité variée et recouvrent globalement le domaine lié aux fractions, même si les fractions proposées sont majoritairement inférieures à 1, ce qui ne permet pas d'appréhender pleinement la notion de fraction. En dehors de l'évaluation finale, des jugements évaluatifs appuyés sont réservés à quelques élèves, toujours les mêmes. Ces élèves sont identifiés par l'enseignante comme étant en difficulté (pour 2 d'entre elles), ou potentiellement en difficulté (pour 1 élève). De rares épisodes donnent lieu à des traces écrites de jugements sur le cahier du jour ou sur l'évaluation finale.

La régulation proposée est majoritairement interactive (Allal, 1988) et s'appuie sur les erreurs ou difficultés repérées pour les trois élèves jouant un rôle central dans l'avancée du temps didactique. Le contrat didactique attaché aux épisodes évaluatifs furtifs avec ou sans trace autorise les élèves à montrer leurs erreurs et à exposer leurs procédures (même si Caroline ne les exploite pas forcément), mais pas à poser des questions. Les élèves s'y sont (sentis) autorisés seulement lors de la séance dédiée à la préparation de l'évaluation finale. Le contrat didactique attaché à cette évaluation s'apparente à celui proposé dans le dispositif évaluatif de l'EPCC (Antibi, 2014), mais il n'est pas respecté par l'enseignante dans la mesure où les tâches proposées dans l'évaluation finale sont plus complexes⁵ que celles proposées lors de la séance de préparation à cette évaluation.

⁴ Nous avons qualifié les jugements évaluatifs de « furtifs » lorsque qu'ils provenaient de brèves observations (par exemple lorsque la professeure passait rapidement dans les rangs pour regarder ce qu'avaient fait les élèves ou lorsqu'elle leur demandait de présenter sur l'ardoise leurs résultats ou de lever la main pour indiquer qui avait réussi). Nous les avons qualifiés d'« appuyés » lorsqu'ils résultaient d'une observation plus fine (temps d'arrêt sur le travail d'un élève pendant la séance, correction des productions des élèves). Nous avons rajouté "avec trace" ou "sans trace" pour indiquer dans quelle mesure la professeure avait gardé des traces de ses jugements évaluatifs, par exemple en annotant certains exercices dans le cahier du jour ou en corrigeant l'évaluation finale.

⁵ Dans un des exercices du test « révision » issu du manuel Capmaths, la bande-unité mesure 9 cm et les bandes A, B et C représentent respectivement $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{3}$ et $\frac{1}{3}$ de cette bande-unité. Dans le test « évaluation » la bande-

Au niveau de la logique évaluative :

Caroline s'appuie sur le manuel CapMaths pour la majorité des documents évaluatifs supports des épisodes évaluatifs proposés. Les seuls documents élaborés en dehors de ce manuel témoignent de carences didactiques.

Les séances proposées par Caroline sont exclusivement constituées d'épisodes évaluatifs qui s'enchaînent les uns à la suite des autres, sans réelle institutionnalisation, si ce n'est des moments qui pourraient s'y apparenter, mais qui restent très contextualisés. L'avancée du temps didactique est rythmée par les explications données à toute la classe à partir d'erreurs repérées chez quelques élèves (toujours les mêmes). Les jugements furtifs que Caroline portent sur les connaissances de ses élèves produisent des régulations qui sont dépendantes de ses connaissances didactiques peu développées⁶. Ces jugements concernent, dans la majorité des séances étudiées, une minorité d'élèves identifiés par Caroline comme étant en grande difficulté (3 plus spécifiquement), ce qui signifie que les autres élèves, qui constituent la majorité de la classe, ne bénéficient pas de jugements permettant à l'enseignante de connaître leurs acquis ou leurs difficultés et qui pourraient produire une régulation adaptée à leurs besoins. Nous avons également noté que la responsabilité de la régulation est souvent déléguée aux élèves. C'est à eux de décider s'ils savent, comprennent, font comme il faut (« pour ceux qui ont compris... », « pour ceux qui ont du mal... »).

Les croyances et représentations de Caroline sur les apprentissages⁷ l'amènent à centrer son enseignement sur les difficultés repérées chez quelques élèves en particulier (toujours les mêmes) et ont un impact sur le type de régulations proposées.

La notation adoptée par Caroline est différente selon les travaux considérés. Elle témoigne de jugements arbitraires et de multiples ambiguïtés ou incohérences évaluatives (Sayac & Ploye, soumis).

CONCLUSION

Le cadre didactique de l'évaluation que nous avons développé vise à analyser les pratiques d'évaluation en mathématiques en prenant en compte à la fois des paramètres institutionnels (programmes scolaires, prescriptions), sociaux (contexte de la classe, des établissements, etc.) et personnels (croyances et connaissances diverses de l'enseignant·e) et des paramètres liés au savoir en jeu dans les différents moments d'évaluation proposés par les enseignant·es dans leur(s) classe(s). Les deux axes qui structurent ce cadre didactique, parce qu'ils prennent en compte à la fois des contenus disciplinaires et à la fois des réalités professionnelles, permettent de définir une nouvelle approche scientifique de l'évaluation, plus didactique et volontairement ancrée dans la réalité des pratiques en classe.

unité proposée par CL mesure 11,5 cm et les bandes A et B respectivement 5,75 cm, 15,5 cm ce qui correspond approximativement aux fractions $\frac{1}{2}$ et $\frac{4}{3}$. Concernant la bande C aucune fraction simple ne correspond aux 9,75 cm de la bande C proposée. Les procédures des élèves sont donc restreintes au pliage dans le TS.

⁶ Caroline revendique elle-même avoir des difficultés en mathématiques et rencontrer des problèmes pour enseigner cette discipline. Elle a donc fait le choix de suivre la progression du manuel Capmaths qui est reconnu « par la communauté » et à laquelle elle adhère.

⁷ Les apprentissages se font par étapes, du simple au complexe. Il y aurait deux types de population dans la ville où elle enseigne : des élèves qui bénéficient d'un environnement familial stimulant et propice aux apprentissages scolaires et d'autres pour qui l'environnement familial est moins favorable, voire gênant.

Nous éprouvons ce cadre dans une recherche en cours dans laquelle sont également engagés des chercheurs en sciences de l'éducation, en sciences du langage et en approche clinique d'orientation psychanalytique qui permettent d'explorer pleinement toutes les dimensions de ce cadre. Les premiers résultats que nous avons obtenus (Sayac & Ployé, en cours ; Sayac, à paraître) nous convainquent de la pertinence de ce cadre et du caractère opérationnel des concepts d'épisodes évaluatifs et de logique évaluative pour analyser les pratiques évaluatives des professeur·es en mathématiques. L'étude du cas Caroline témoigne de la complexité des pratiques évaluatives et de l'intérêt de les étudier en prenant en compte les multiples paramètres qui les déterminent. Nous avons également constaté à quel point ces pratiques étaient imbriquées dans les pratiques plus globales d'enseignement et combien elles pouvaient conditionner les apprentissages des élèves. C'est pourquoi, il nous semble indispensable de relever le défi de leur étude spécifique à partir d'une approche didactique permettant de donner aux savoirs évalués la place qu'il est légitime de leur donner dans une conception de l'évaluation qui relève de l'*Assessment for Learning*.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- ANTIBI, A. (2014). *Pour des élèves heureux en travaillant. Les bienfaits de l'évaluation par contrat de confiance*, Paris, Nathan.
- ALLAL, L. (1988). Vers un élargissement de la pédagogie de maîtrise : processus de régulation interactive, rétroactive et proactive, In Huberman, M. (éd.), *Assurer la réussite des apprentissages scolaires. Les propositions de la pédagogie de maîtrise* (pp. 86-126). Paris, Delachaux et Niestlé.
- ALLAL, L. & LAVEAULT, D. (2009). *Assessment for Learning : Évaluation-soutien d'Apprentissage. Mesure et évaluation en éducation*, 32(2), 99-106.
- ARTIGUE, M. & WINSLOW, C. (2010). International comparative studies on mathematics education: A viewpoint from the anthropological theory of didactics. *Recherches en didactiques des mathématiques*, 30(1), 47-82.
- BLACK, P. & WILIAM, D. (1998). Assessment and classroom learning. *Assessment in Education: principles, policy & practice*, 5(1), 7-74.
- BODIN, A. (2016). Didactique des mathématiques et évaluation : petite histoire de 40 ans de chemins parallèles. À terme, l'évaluation est-elle soluble dans la didactique ? *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques de l'ARDM-Année 2015*, 2-13.
- BODIN, A. (2006). Ce qui est vraiment évalué par PISA en mathématiques. Ce qui ne l'est pas. Un point de vue français. *Bulletin de l'APMEP*, 463, 240-265.
- BODIN, A. & GRAPIN, N. (2016). Comparaison des cadres de référence et des instruments d'évaluation des enquêtes PISA et TIMSS. Paris : CNESEO. Repéré à www.cnesco.fr/fr/comparaison-pisa-timss.
- BODIN, A. & GRAPIN, N. (2018). Un regard didactique sur les évaluations du PISA et de la TIMSS : mieux les comprendre pour mieux les exploiter. *Mesure et évaluation en éducation*, 41(1), 67-96.
- BRESSOUX, P. & PANSU, P. (2003). *Quand les enseignants jugent leurs élèves*. Paris : Presses universitaires de France.
- CHANUDET, M. (2019). *Étude des pratiques évaluatives des enseignants dans le cadre d'un enseignement centré sur la résolution de problèmes en mathématiques*. Thèse de Doctorat, Université de Genève.
- CHARLES-PEZARD M. (2010). Installer la paix scolaire, exercer une vigilance didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 30 (2), 197-261.
- CHARTERS, E. (2003). The use of think-aloud methods in qualitative research an introduction to think-aloud methods. *Brock Education: A Journal of Educational Research and Practice*, 12(2), 68-82.
- CHESNAIS, A. (2009). *L'enseignement de la symétrie axiale en sixième dans des contextes différents : les pratiques de deux enseignants et les activités des élèves*. Thèse de Doctorat, Université Paris-Diderot, Paris 7.
- CHEVALLARD, Y. & FELDMANN, S. (1986). *Pour une analyse didactique de l'évaluation*. Marseille : IREM d'Aix-Marseille.
- CHEVALLARD, Y. (1986). Vers une analyse didactique des faits d'évaluation. In J-M. De Ketele (Ed.), *L'évaluation: approche descriptive ou prescriptive* (pp. 31-59). Bruxelles : De Boeck.
- CHEVALLARD, Y. (1988). *Notes sur la question de l'échec scolaire*. Marseille : IREM d'Aix-Marseille.
- COPPE, S. (1993). *Processus de vérification en mathématiques chez les élèves de première scientifique en situation de devoir surveillé* (Doctoral dissertation, Lyon 1).
- DE LANDSHEERE, V. (1988). *Faire réussir faire échouer : la compétence minimale et son évaluation*. Presses Universitaires de France.

GRAPIN, N. (2015). *Étude de la validité de dispositifs d'évaluation et conception d'un modèle d'analyse multidimensionnelle des connaissances numériques des élèves de fin d'école*, Thèse de Doctorat, Université Paris-Diderot, Paris 7.

HOROKS, J. (2006). *Les triangles semblables en classe de 2nde: Des enseignements aux apprentissages Etude de cas*, Thèse de Doctorat, Université Paris-Diderot, Paris 7.

LEDER, G. C. (1992). *Assessment and Learning of Mathematics*. Australian Council for Educational Research Ltd., Radford House, Frederick Street, Hawthorn, Victoria 3122, Australia.

MONS, N. (2014). L'évaluation des élèves par les enseignants dans la classe et les établissements : réglementation et pratiques. Une comparaison internationale dans les pays de l'OCDE. Rapport du CNESCO. http://www.cnesco.fr/wp-content/uploads/2014/12/Comparaison-internationale-sur-levaluation_Cnesco_091214.pdf

MOTTIER LOPEZ, L. & ALLAL, L. (2008). Le jugement professionnel en évaluation : un acte cognitif et une pratique sociale située. *Revue suisse de sciences de l'éducation*, 30(3), 465-482.

NISS, M. (1993). Assessment of mathematical applications and modelling in mathematics teaching, In J. de Lange, C. Keitel, I. Huntley, & M. Niss (Eds.), *Innovation in mathematics education by modelling and applications* (pp.41-51). Chichester: Horwood.

NISS, M. (1993). *Investigations in to assessment in mathematics education*, An ICMI Study, Springer Netherlands.

PERRIN-GLORIAN, M. J. & HERSANT, M. (2003). Milieu et contrat didactique, outils pour l'analyse de séquences ordinaires. *Recherches en didactique des mathématiques*, 23(2), 217-276.

PLUVINAGE, F. (1979). Loto-questionnaires (pour l'évaluation et l'auto-contrôle en mathématiques). *Educational Studies in Mathematics*, 10(4), 443-485.

REMOND, M. (2006). Éclairages des évaluations internationales PIRLS et PISA sur les élèves français. *Revue française de pédagogie. Recherches en éducation*, 157, 71- 84.

ROBERT, A. & ROGALSKI, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Canadian Journal of Math, Science & Technology Education*, 2(4), 505-528.

RODITI, E. (2011). *Recherches sur les pratiques enseignantes en mathématiques : apports d'une intégration de diverses approches et perspectives*, Note de synthèse pour l'Habilitation à Diriger des Recherches, Université René Descartes-Paris V.

RODITI, E. & SALLES, F. (2015). Nouvelles analyses de l'enquête PISA 2012 en mathématiques. *Éducation et formations*, 86, 236-267.

RODITI, E. & MARTINEZ, S. (2017). Programmes scolaires et apprentissages de la notion de fraction à l'école élémentaire. Quelques enseignements tirés de TIMSS 2015. *Revue Education & Formations, Ministère de l'Éducation Nationale*, 94, 23-41.

RUMINOT VERGARA, C. (2014). *Effets d'un système national d'évaluation sur l'enseignement des mathématiques : le cas de SIMCE au Chili*. Thèse de Doctorat, Université Paris- Diderot, Paris 7.

RUTHVEN, K. (1994). Better judgement: rethinking assessment in Mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 27(4), 433-450.

SAYAC, N. (2016). *Les pratiques d'évaluation en mathématiques des professeurs des écoles en France : quelques résultats à partir d'une recherche collaborative*. Communication au colloque international « Évaluation en mathématiques : dispositifs, validités et pratiques », Créteil.

SAYAC, N. (2017). Étude des pratiques évaluatives en mathématiques des professeurs des écoles en France : une approche didactique à partir de l'analyse des tâches données en évaluation, *Revue Mesure et Évaluation en Éducation*, 40(2), 1-31.

SAYAC, N. (2017). *Approche didactique pour l'évaluation et ses pratiques en mathématiques : enjeux d'apprentissages et de formation*. Note de synthèse pour le diplôme d'Habilitation à diriger des recherches, soutenue à l'université Paris Diderot, le 29 novembre. <https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01723752>

SAYAC, N. & GRAPIN, N. (2014). Évaluer par QCM en fin d'école : stratégies et degré de certitude, *Annales de Didactique et de sciences cognitives*, 19, 169-198.

SAYAC, N. & GRAPIN, N. (2015). Évaluation externe et didactique des mathématiques : un regard croisé nécessaire et constructif, *Recherche en didactique des mathématiques*, 35(1), 101-126.

SAYAC, N. & GRAPIN, N. (2016). Stratégies et degré de certitude des filles et des garçons en mathématiques : quelles différences pour quels résultats ? *Repères IREM*, 104, 43-58.

SAYAC, N. & PLOYE, A. (2018). *Évaluation et inégalités scolaires : étude exploratoire en mathématiques et en sciences, en France et en Suisse*. EMF 2018 (Cergy-Pontoise).

SAYAC, N. & PLOYE, A. (soumis). Approches didactique et clinique pour l'étude des pratiques évaluatives d'une professeure des écoles en mathématiques, *Carrefours de l'Éducation*.

TESSARO, W. (2013). Améliorer la qualité des pratiques évaluatives des enseignants : une articulation entre formation initiale et formation continue. *Bulletin de la Haute école pédagogique de Bern, du Jura et de Neuchâtel*, 21 (février), 8-9.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. H. A. M. (1996). *Assessment and realistic mathematics education* (Vol. 19). Utrecht University.

VANTOUROUT, M. (2004). *Etude de l'activité et des compétences de professeurs des écoles et de professeurs de mathématiques dans des situations "simulées" d'évaluation à visée formative en mathématiques*, Thèse de Doctorat, Université Paris 5.

WILIAM, D. (2000). Integrating summative and formative functions of assessment. Keynote address. In *First Annual Conference of the European Association for Educational Assessment*. Prague, Czech Republic.

MANUEL DE CLASSE

CHARNAY, R., DUSSUC, M-P., COMBIER, G., MADIER, D., ANSELMO, B. (2017). CAPMATHS CM2, Manuel de l'élève, HATIER.

PROBLEMATISER EN MATHÉMATIQUES : LE CAS DE L'APPRENTISSAGE DES FONCTIONS AFFINES

Sylvie GRAU

ESPE - CREN Université de Nantes

sylvie.grau@univ-nantes.fr

Résumé

La notion de fonction affine n'est pas disponible pour bon nombre d'élèves malgré un enseignement par les problèmes. Nous avons essayé de comprendre pourquoi et de trouver des pistes pour y remédier. Pour cela, nous avons analysé le savoir enseigné en lien avec l'épistémologie de cette notion, évalué les connaissances des élèves à la sortie du collège pour identifier les difficultés qu'ils rencontrent, et expérimenté différentes situations d'apprentissage. Nous avons utilisé des outils inspirés du cadre de la problématisation (Fabre et Orange, 1997) pour analyser les productions langagières des élèves, comprendre la manière dont ils posent les problèmes liés à l'affinité, comment ils agissent sur les objets et effectuent des changements de cadres (Douady, 1986) ou de registres (Duval, 2006). Cette étude nous a amenée à penser que la disponibilité du savoir est issue d'un double processus : un apprentissage par problématisation de l'outil, un processus de secondarisation du discours (Jaubert, Rebière, & Pujo, 2010). Nous faisons l'hypothèse qu'une approche de l'affinité par un point de vue global et covariationnel doit permettre aux élèves de mieux comprendre en quoi la fonction affine peut être un outil de modélisation pour résoudre des problèmes liés à la covariation de deux grandeurs. Nous avons alors pensé un format de séquence basé sur l'enchaînement de situations dans l'idée d'un processus de problématisation par analyse des productions des élèves (PPAP). L'objectif est de travailler la relation entre l'action et l'objet de savoir. Nous avons expérimenté cette ingénierie afin d'en tirer quelques conditions favorables pouvant servir à l'enseignement d'un savoir problématisé en mathématiques.

Mots clés

problématisation, résolution de problème, proportionnalité, fonction affine, registre explicatif, communauté discursive

Cet article est une présentation de mon travail de thèse intitulé « problématiser en mathématiques, le cas de l'apprentissage des fonctions affines » (Grau, 2017). Ce travail est parti d'une question qui s'est d'abord posée à moi en tant que professeure de mathématiques de lycée avant que je ne m'en empare comme chercheuse : comment rendre disponible (Robert, 1998) la notion de fonction affine pour l'ensemble des élèves de seconde ? En effet, nombreux sont les élèves qui ne font pas appel d'eux-mêmes aux fonctions affines pour modéliser, résoudre des problèmes ou interpréter des variations proportionnelles que ce soit en mathématiques ou dans d'autres disciplines. Malgré un travail régulier autour de cette notion, il me fallait comprendre pourquoi cette difficulté était résistante, quels étaient les éventuels obstacles et comment les dépasser. J'ai orienté mon travail suivant deux axes : d'une part mieux comprendre les raisons de cette non-disponibilité, ce qui constituera la première partie de cet article, et d'autre part penser des conditions pour améliorer l'enseignement/apprentissage de la fonction affine, que je présenterai en deuxième partie. Je préciserai ensuite la méthodologie, le cadre de l'expérimentation d'une ingénierie didactique dans deux classes de seconde et

l'analyse des données recueillies. Je présenterai enfin quelques résultats et les nouvelles pistes de recherche qu'ouvre ce travail.

I. A QUELLES CONDITIONS UN SAVOIR EST-IL DISPONIBLE ?

On peut estimer qu'une notion est disponible chez un élève si, face à une situation plus ou moins inédite, il peut la mobiliser seul et sans aide. Plusieurs facteurs interviennent alors :

1. Cette situation doit présenter les caractéristiques de la classe de problèmes pour laquelle la notion apporte des pistes de solutions.
2. La notion doit avoir du sens dans le contexte de la situation rencontrée.
3. L'élève doit maîtriser des techniques lui permettant des traitements dans un registre de représentation de la notion. Il doit maîtriser des conversions pour éventuellement passer d'un registre sémiotique à un autre afin de pouvoir effectuer plus facilement certains traitements.
4. Il dispose d'une représentation de la notion d'un genre second, c'est-à-dire formalisée pour une pratique argumentative liée à ce savoir au sein d'une communauté discursive scolaire. Cela suppose « une construction formelle d'un certain répertoire de règles ou de théorèmes connus » (Brousseau, 2010, p. 4). Cela suppose aussi des outils sémiotiques et des références communes au sein de la classe, permettant des débats mathématiques au sujet de cette notion.

Chacun de ces facteurs relève d'un enseignement spécifique et peut apporter des éléments de réponse pour expliquer les difficultés que rencontrent les élèves.

Pour ce qui concerne la fonction affine, de nombreux travaux portent sur chacun de ces facteurs, mon ambition était d'en faire une synthèse globale. Cependant, je me suis heurtée à une difficulté. La notion de fonction affine englobe en fait deux concepts : celui de fonction et celui de linéarité. Ces deux concepts peuvent relever de différents cadres au sens de Douady (Douady, 1986). Si bien que certains travaux de recherche s'inscrivent uniquement dans un de ces cadres ou se focalisent plus sur un concept que sur l'autre. Au final nous avons des éclairages partiels et même parfois des éclairages contradictoires. Nous allons préciser cela pour chacun des facteurs.

1. La question du sens

Pour ce qui est du sens, je me suis d'abord appuyée sur la Théorie des Situations Didactiques (TSD) de Brousseau. Je suis partie de l'idée qu'une situation porteuse de sens devait être au plus près des problèmes qu'elle a aidé à résoudre dans la communauté scientifique. Mon analyse épistémologique a montré que les genèses des deux concepts (fonction et linéarité) n'ont pas la même temporalité et qu'elles ne se sont pas faites dans les mêmes cadres. En effet on rencontre initialement la proportionnalité des écarts dans des problèmes géométriques puis dans des problèmes cinétiques, qui plus tard sont résolus par l'algèbre avant que l'ensemble ne soit englobé dans une théorie générale : l'algèbre linéaire. Le tableau suivant (Tableau 1) résume succinctement cette évolution en précisant les périodes, les types de problèmes qui induisent l'utilisation des fonctions affines ou du moins de ce qui caractérise cette notion et le cadre dans lequel la théorie vient s'inscrire. Il semble donc impossible de trouver une situation problème permettant de faire émerger à elle seule la notion de fonction affine.

	Types de problèmes qui induisent l'utilisation des fonctions affines	Types de caractérisation	Cadre au sens de Douady (1986)
Avant le XIV ^e	Problèmes géométriques comme cas particulier des problèmes de grandeurs	Théorie des proportions $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}$	Géométrie euclidienne
Moyen-âge et Renaissance	Problèmes de cinétique	Caractérisation fonctionnelle $v\left(\frac{x_1 + x_3}{2}\right) = \frac{v(x_1) + v(x_3)}{2}$	Mécanique
Époque classique	Problèmes géométriques ou cinétiques résolus par l'algèbre	Caractérisation analytique $f(x) = ax + b$	Géométrie analytique
Époque moderne	Problèmes liés à la résolution de systèmes linéaires	Caractérisation vectorielle $u(M + \vec{v}) = u(M) + f(\vec{v})$	Algèbre linéaire

Tableau 1: Genèse de la notion de fonction affine.

Par contre, le cadre épistémologique de Piaget a permis de repérer des sauts importants dans cette construction, sauts qui peuvent être assimilés à des obstacles au sens de Bachelard : le passage du discret au continu, du ponctuel au global, de la variation à la co-variation. En effet, par l'analyse en 1950 de la genèse historique de la géométrie et celle de l'arithmétique, Piaget identifie trois périodes qui se caractérisent par le fait que le sujet contemple, opère puis transforme. Lors de la première étape, qui est celle du « contempler », le sujet est absent en ce sens que la réalité est propre à l'objet, elle existe en dehors du sujet et le sujet est alors en contemplation de cette réalité qui lui préexiste. Le stade suivant est celui où le sujet peut « opérer » sur les objets, il peut les comparer, les classer, les relier par des critères, mais ces opérations restent imposées par l'objet. Le dernier stade est celui où le sujet peut « transformer » les objets et donc modifier la réalité de l'objet, la construire. C'est le stade où s'élaborent de nouvelles théories. Piaget fixe ces trois moments à l'antiquité, le début du XVII^{ème} et le XIX^{ème} ce qui correspond à ce que nous avons pu identifier dans la sociogenèse de la notion de fonction affine. Dans l'antiquité, les objets sont les grandeurs et les objets géométriques et l'activité mathématique consiste à décrire cette réalité. Le passage par la cinématique est décisif pour que l'on puisse imaginer opérer sur ces objets : on classe les courbes correspondant à des trajectoires et on commence à organiser une typologie. C'est au XIX^{ème} que la transformation de ces objets va permettre d'élaborer une nouvelle théorie englobante.

Pour chacune de ces trois périodes, nous retrouvons les trois obstacles épistémologiques cités plus haut. C'est le franchissement de ces obstacles qui rend possible le passage d'un niveau de l'épistémologie génétique de Piaget à l'autre. Ainsi pour pouvoir opérer sur les objets et donc dépasser la contemplation des rapports de grandeurs, il fallait pouvoir penser l'infini, or l'infini ne peut pas être observé. Par contre le travail sur la cinématique a permis d'opérer sur les objets et de rendre perceptible un aspect de l'infini par le tracé des trajectoires. Il a fallu le changement de point de vue entre le local et le global pour concevoir la fonction comme un nouvel objet permettant de modéliser le processus lié à la dépendance de deux grandeurs. Un dernier obstacle est le changement de point de vue du statique au dynamique. C'est lui qui va nous intéresser plus particulièrement dans la suite de notre travail.

Nous avons à enseigner un savoir qui traverse différents cadres (Douady, 1986): les grandeurs, la géométrie, le numérique, l'algèbre, l'analyse. Pour chacun de ces cadres, il est possible d'utiliser différents registres sémiotiques (Duval, 1993, 2002, 2006) en particulier le registre des tableaux, celui des écritures algébriques et celui des graphiques auxquels s'ajoute celui de la programmation. Les registres sémiotiques sont des modes de représentation des objets mathématiques qui utilisent des signes, des icônes et des symboles, et obéissent à des règles de

traitement. Le passage d'un registre à l'autre ne correspond à aucun isomorphisme et il n'est pas certain que chaque registre permette de représenter toutes les propriétés d'un objet mathématique. Certains registres sont plus adaptés à certains cadres, au point qu'il est parfois difficile de distinguer le cadre du registre. Ainsi, pour certains élèves, un registre amène à penser uniquement dans un seul cadre. Par exemple dans le cadre algébrique, le registre algébrique amène à manipuler des expressions : la formule résume une classe de situations et permet des calculs algébriques, on la reconnaît par l'usage de lettres ($x, y, f, g...$ pour ce qui concerne les fonctions affines) et d'un traitement par des transformations ou des équations. Dans le cadre des grandeurs, le registre algébrique permet de désigner les Grandeurs par des lettres choisies souvent à partir de l'initiale du nom de la grandeur (par exemple T pour température) et on précise l'unité. Il est alors plus difficile de reconnaître les variables dépendantes. Le registre des tableaux peut aussi être utilisé dans différents cadres. Les données sont souvent présentées dans un tableau qui peut être considéré comme une organisation concernant des grandeurs, des coordonnées de points, ou des nombres. De même, le graphique peut être considéré comme un ensemble de points d'une courbe, mais la courbe représentative figure le graphe de la fonction. De nombreux travaux ont déjà mis en évidence que les conversions de cadres et de registres peuvent être des obstacles pour les élèves, En particulier Comin pour le passage de l'arithmétique à l'algèbre (Comin, 2009) et Chauvat pour le passage de la courbe au graphe (Chauvat, 1998).

Dans un même cadre nous pouvons aussi avoir différents points de vue (Rogalski, 2001). En effet, la fonction peut être considérée de manière statique comme une transformation, une opération d'un ensemble vers un autre, dans l'idée d'une « boîte noire » dans laquelle un élément pénètre et ressort modifié. On parle de « variation » pour dire que la valeur en entrée peut varier, ce qui joue sur la valeur de sortie. Elle peut cependant être considérée de manière dynamique comme la mise en relation non pas d'éléments mais de variations. A toute variation dans un ensemble E correspond une variation dans un ensemble F. On parle alors de « co-variation » ce qui amène à penser les fonctions comme des outils de modélisation au plus proche de phénomènes observés. La différence est très importante au niveau de la représentation que les élèves peuvent se faire de la notion car la première suppose une transformation, une action, ce qui peut se traduire par des opérations ponctuelles, alors que la seconde ne présuppose pas d'une loi préexistante et engage à considérer la fonction d'un point de vue local (Illustration 1).

La disponibilité des connaissances est très liée à la capacité ou non de changer de cadre, de registre ou de point de vue. Pour les élèves du collège, ces cadres ne sont pas encore construits et il peut être difficile à ce stade de les caractériser explicitement. De plus certains registres sémiotiques semblent associés plus spécifiquement à certains cadres, ce qui ne rend pas toujours possible les conversions attendues. Par exemple le travail sur les fonctions affines peut être associé à un travail dans le cadre algébrique du fait de leur définition par l'écriture de leur expression sous forme algébrique.

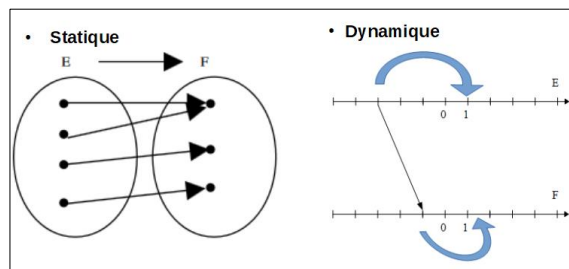


Illustration 1:

Deux points de vue (Rogalski, 2001).

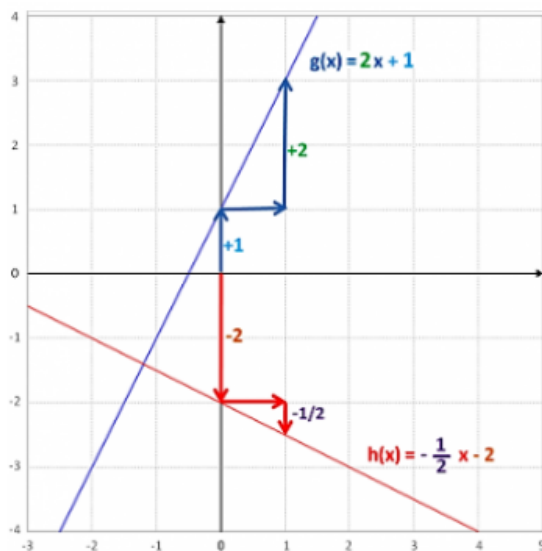
2. Analyse des programmes, des manuels et de l'organisation mathématique

La suite de mon travail m'a amenée à m'intéresser à la transposition didactique. J'ai donc cherché dans les programmes et dans les manuels comment la notion de fonction affine était supposée être enseignée. En fait, suivant les périodes, cet enseignement est différent, en fonction du contexte scientifique, des finalités de l'école et des pratiques. Il apparaît que le développement de l'algèbre de 1902 à 1960 et l'approche abstraite et formelle entre 1960 et 1980 ont laissé des traces dans la manière d'enseigner la notion de fonction affine. Jusqu'aux programmes de 2008, la fonction affine était définie par son expression algébrique comme un exemple simple de fonction, tout en servant de support à la construction du concept plus général de fonction, comprise comme « machine à calculer ». L'entraînement des élèves au calcul algébrique était censé leur donner un outil performant, permettant des traitements dans le registre des expressions algébriques ayant statut de preuve. Par ailleurs les fonctions linéaires sont introduites comme une nouvelle formalisation d'une situation de proportionnalité. L'aspect variation amenant à considérer principalement le coefficient de proportionnalité au détriment des propriétés de linéarité.

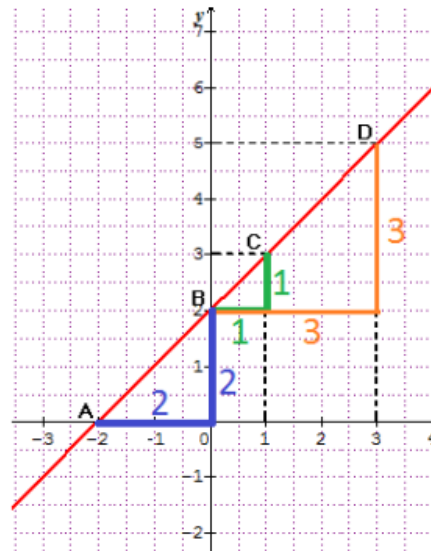
Depuis 2008, la fonction affine est considérée dès le collège comme un exemple de fonction, en parallèle de l'étude des généralités sur les fonctions, cette fois considérées comme outil de modélisation de la covariation de deux grandeurs. On peut penser que ce déplacement vise une plus grande disponibilité des fonctions affines. J'ai alors fait un détour pour voir ce qui se passe dans les pays ayant fait ce choix avant la France. Les travaux de Passaro (Passaro, 2009, 2013, 2016) en particulier, donnent une grille d'analyse fine de la manière dont le raisonnement covariationnel se met alors en place. Ce changement de point de vue est une vraie rupture et on peut comprendre que les enseignants français aient du mal avec son enseignement. A travers l'analyse des types de tâches attendues par le programme de 2008 en classe de 3^e, on voit que l'aspect ponctuel reste privilégié ainsi que le point de vue statique. Les conversions attendues sont des conversions de registres entre le registre des expressions algébriques et le registre graphique. Cependant ces conversions sont rarement à l'initiative de l'élève et leur nécessité n'est pas explicitée comme en atteste mon analyse des manuels les plus utilisés dans les classes de 3^e dans l'académie de Nantes.

Les seules formalisations relevant d'un genre second au sens de Jaubert et Rebière (2010) sont la caractérisation de la fonction affine par son tracé et sa caractérisation par son expression algébrique. La justification du lien entre ces deux caractéristiques n'est pas toujours étudiée en classe. Ces discours ne sont donc pas opérants pour modéliser puisqu'ils ne permettent pas d'expliquer ni de justifier.

Dans les manuels, les résumés de cours et les traces écrites, très peu d'arguments sont explicités dans les différents registres et permettent ainsi d'éventuelles conversions. Par exemple, les élèves identifient relativement facilement le coefficient additif b dans l'expression $ax + b$ sur le graphique comme étant « l'ordonnée à l'origine ». En effet, ils ont une formalisation qui permet de nommer le nombre en question tout en permettant son repérage sur le graphique. Ils peuvent donc utiliser cet élément dans leur argumentation quel que soit le registre utilisé. Il leur est beaucoup plus difficile de parler du coefficient multiplicateur (qui peut être nommé dans certains cas « coefficient de proportionnalité », « coefficient directeur » ou « pente ») car ce coefficient ne peut pas être lu directement sur le graphique. Pour le mettre en évidence, il est nécessaire d'ajouter des signes (souvent en couleur dans les manuels ou au tableau) dont la construction est souvent implicite et qui amènent un discours déictique par désignation avec le doigt (« Quand on avance de 1, on monte de a . ») impossible à transposer dans une pratique argumentative à l'écrit. De plus, suivant le codage choisi – car ce codage ne relève pas de conventions – les propriétés ainsi mises en évidence ne sont pas équivalentes. Dans l'exemple qui suit (Illustration 2) le premier graphique met en évidence la pente à partir du point de la droite d'ordonnée nulle alors que le second met en évidence la proportionnalité des écarts avec



Graphique 1



Graphique 2

Illustration 2: Graphiques proposés dans différents résumés de cours en classe de 3^e.

des couleurs différentes. Le premier indique des flèches dans l'idée d'un déplacement sur le graphique alors que le second indique des segments faisant apparaître des triangles semblables. En fait, les différents registres ne portent pas également le sens des paramètres et l'automatisation de l'usage de certains registres amène de fait des limites à l'interprétation. La fonction affine se caractérise par deux aspects : elle permet des traitements relativement simples sur les expressions algébriques, et surtout elle peut être entièrement déterminée à partir de données ponctuelles universelles. C'est pourquoi les recherches qui portent sur le concept général de fonctions au lycée et dans le supérieur sont difficilement transposables directement aux fonctions affines.

Nous avons donc plusieurs hypothèses pour expliquer les difficultés rencontrées par les élèves dans l'apprentissage des fonctions affines :

- une définition formelle des fonctions affines éloignée des utilisations dans les problèmes ;
- un travail dans différents cadres et l'utilisation de plusieurs registres sémiotiques sans explicitation des conversions et de leur nécessité ;
- une maîtrise devenue insuffisante du calcul algébrique par les élèves pour effectuer les traitements attendus ;
- un lien entre proportionnalité et linéarité qui ne prend pas en compte les propriétés de linéarité mais uniquement l'aspect opérateur.

3. La classe de problèmes associée aux fonctions affines

Toujours en analysant les manuels de 3^e, j'ai essayé de repérer une typologie des problèmes rencontrés au cours de l'apprentissage de la notion de fonctions. Si la classe de problèmes rencontrée n'est pas explicitée, certains aspects récurrents dans les situations mises au travail peuvent être interprétés par les élèves comme des caractéristiques. En particulier on remarque que dans certains manuels, les élèves rencontrent majoritairement des fonctions monotones croissantes (Tableau 2). La monotonie n'apparaît donc pas comme une spécificité des fonctions affines. Il semble aussi que certains élèves considèrent que toutes les fonctions sont des fonctions croissantes. Pour eux, la croissance peut suffire à identifier une fonction affine. A partir des erreurs des élèves, de leurs explicitations, des éléments proposés pour argumenter, j'ai pu lister plusieurs représentations erronées qui peuvent être considérées comme des

obstacles didactiques et qui peuvent s'expliquer du fait des situations les plus souvent rencontrées lors de l'apprentissage.

Manuels	Nombre total de contextes différents proposés	Nombre de fonctions mono-tones	Nombre de fonctions croissantes	Nombre de fonctions du temps
Sésamaths 2008 (Génération 5)	14	6 (43%)	5 (36%)	4 (29%)
Phare 2008 (Hachette)	26	21 (81%)	18 (69%)	11 (42%)
Transmath 2012 (Nathan)	45	36 (80%)	30 (67%)	16 (35%)
Prisme 2012 (Belin)	24	19 (79%)	11 (46%)	6 (25%)

Tableau 2: Caractéristiques des situations proposées dans différents manuels de 3^e.

Ces contextes ne sont pas représentatifs d'une classe de problèmes pour laquelle la fonction affine apporterait spécifiquement des pistes de solution. Alors comment identifier cette classe ? Les élèves sont censés reconnaître une fonction affine par l'alignement des points de sa représentation graphique ou la reconnaissance d'une expression algébrique de la forme $ax + b$. Ces deux caractéristiques expliquent le travail d'entraînement aux conversions entre le registre des expressions algébrique et le registre des graphiques, mais nous avons vu que ces conversions ne peuvent pas à elles seules porter le sens. La classe de problème qu'il s'agirait de construire à ce niveau de la scolarité se caractérise par la proportionnalité des variations de deux grandeurs. La difficulté est que les élèves ne disposent pas d'un système de représentation permettant des traitements à partir des variations. L'idée est donc de penser une ingénierie mettant à disposition des élèves des symboles pour pouvoir opérer sur les variations. Mettre en place une telle ingénierie suppose de pouvoir s'appuyer sur des connaissances communes. En particulier, les prérequis sont d'une part une certaine aisance pour opérer dans des situations de proportionnalité et d'autre part une bonne représentation de ce qu'est la mesure de grandeurs.

4. Un test pour voir si ce constat peut être généralisé

Toutes mes hypothèses devaient être vérifiées auprès d'un échantillon plus représentatif que les différentes cohortes d'un seul lycée. Un test a donc été proposé aux collègues de l'académie et j'ai sélectionné certains établissements de sorte à avoir un échantillon le plus représentatif possible (type d'établissement, taille, structure, résultats au DNB diplôme national du brevet). Chaque item de ce test a pour objectif de vérifier une seule hypothèse, par contre l'analyse peut être croisée pour montrer en quoi les réponses sont cohérentes ou non. Si une cohérence peut émerger, il s'agit de mettre alors en évidence les modèles ou les idées construites par l'élève qui peuvent expliquer ses réponses.

Ce test a permis de constater que :

- les élèves maîtrisent la proportionnalité dans le contexte des grandeurs mesurées ;
- la présentation de données en tableau induit la proportionnalité plus sûrement que des données sur un graphique preuve que la conversion de registre n'opère pas ;
- le vocabulaire et les notations liés aux fonctions sont globalement maîtrisés mais les élèves n'utilisent pas ces symboles pour effectuer des traitements, ils les utilisent uniquement pour désigner des objets.

Ce test a aussi confirmé que certains automatismes amènent l'élève à penser toute relation entre grandeurs comme une relation de proportionnalité. Pour préciser la nature de l'obstacle, j'ai effectué des expérimentations à différents niveaux de la scolarité. Elles ont montré qu'il

s'agissait plutôt d'un obstacle didactique. Par exemple, les propriétés de linéarité peuvent être disponibles sans avoir été objet d'étude assez tôt dans la scolarité alors qu'elles ne le sont plus en fin de collège après l'enseignement des fonctions linéaires ou du produit en croix. Ces propriétés permettent de vérifier parfois très facilement qu'une situation n'est pas proportionnelle.

5. Le cadre de la problématisation pour interpréter les représentations des élèves et leur fonctionnement

De manière générale, Brousseau (2010) définit les obstacles comme :

un ensemble de difficultés d'un actant (sujet ou institution), liées à « sa » conception d'une notion. Cette conception a été établie par une activité et par une adaptation correcte, mais dans des conditions particulières, qui l'ont déformée ou qui en ont limité la portée. Les difficultés créées par cette conception sont liées par des « raisonnements » mais aussi par les nombreuses circonstances où cette conception intervient. Ainsi la conception résiste au simple apprentissage d'une connaissance plus correcte. Les difficultés semblent disparaître, mais elles réapparaissent de façon inattendues et causent des erreurs par des relations insoupçonnées. L'identification et l'inclusion explicite du rejet d'un obstacle dans la nouvelle connaissance sont généralement des conditions nécessaires à son usage correct. (p. 4)

Cependant l'identification d'un obstacle n'est pas aisée, cela nécessite d'observer, entendre et faire s'exprimer chaque élève sur de multiples situations suffisamment bien choisies. En particulier, il est difficile d'avoir accès aux « raisonnements » qui organisent le fonctionnement des représentations de l'élève. Brousseau (1986) explique que nous ne pouvons que produire un « modèle implicite d'action pour expliquer le patron de réponses obtenu à partir des manifestations observables » (p.6).

Le cadre de la problématisation développé par Fabre et Orange (Fabre & Orange, 1997) m'a permis de mieux comprendre la manière dont les élèves se représentent les situations qu'ils rencontrent et donc de mieux identifier les obstacles qu'il s'agit de lever.

La problématisation se joue dans une dialectique d'ouverture/fermeture de possibles. Elle peut se résumer dans le schéma du losange de problématisation (Illustration 3). Ce losange met en évidence quatre composantes : la question en elle-même, sa solution et les contraintes qui peuvent être de deux natures (celles internes au problème, c'est-à-dire les contraintes liées au contexte, aux données initiales ou construites, et celles externes au problème qui sont les connaissances, représentations, schèmes d'actions...). Les conditions regroupent tout ce que l'actant a comme ressources internes, comme modèles, comme conceptions, pour se représenter

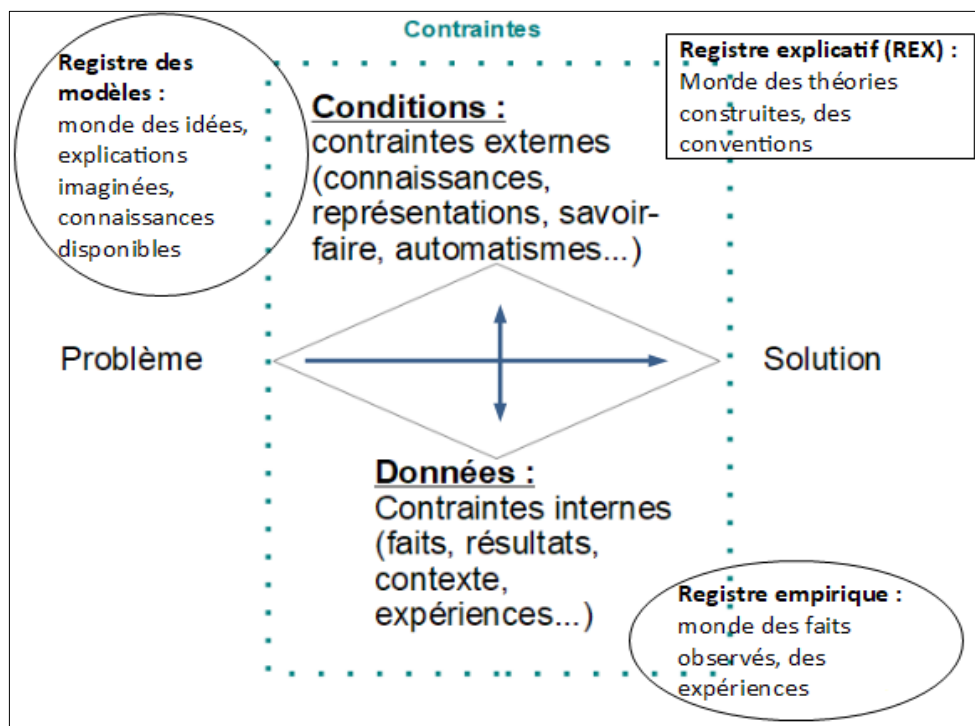


Illustration 3: Losange de problématisation (Fabre, 2011).

le problème et le traiter. Ces différents répertoires sont mobilisés suivant une certaine logique visant un équilibre et selon des principes d'ergonomie.

Si résoudre le problème amène à privilégier un axe horizontal du problème vers la solution, la problématisation suppose la mise en tension sur l'axe verticale des données et des conditions. Cette mise en tension donne des éléments de compréhension de la manière dont le sujet mobilise ses différents répertoires. On peut l'analyser à partir de trois entrées différentes que Orange appelle des registres de problématisations (Orange, 2005). Le registre empirique est le monde des faits, de ce qui est observé, de l'expérience. Le registre des modèles est celui des idées, des explications imaginées, des connaissances disponibles. Le registre explicatif (REX) est le monde des théories construites, des conventions, des structures.

Le registre des modèles est alimenté par différents éléments :

- la connaissance et la maîtrise des différents cadres et registres sémiotiques ;
- les capacités de traitement dans les différents registres sémiotiques, les automatismes installés, ces traitements peuvent permettre la construction de nouvelles données ;
- la capacité à effectuer des conversions de cadre ou de registre sémiotique ;
- la disposition d'un langage de type second permettant des justifications, des argumentations ;
- les classes de problèmes construites à travers la mise en évidence de caractéristiques explicites ou la fréquence des contextes rencontrés par l'élève.

L'apprentissage suppose l'inhibition pour ouvrir de nouveaux possibles, la disponibilité des savoirs outils et objets suppose, quant à elle, la mise en évidence de ce que nous appellerons des nécessités (ce qui fait que c'est ainsi et que ce ne peut pas être autrement).

II. CONCEPTION D'UNE INGENIERIE DIDACTIQUE

A partir des hypothèses sur les obstacles que rencontrent les élèves et sur ce qui peut devenir un frein à la disponibilité des connaissances, il s'agissait de concevoir une ingénierie didactique telle que la définit Brousseau (2011) :

« L'ingénierie didactique doit produire diverses sortes de situations : celles qui rendent nécessaire, pour le contrôle d'un milieu, la communication de telle connaissance choisie à l'avance alors que les répertoires auxquels il est fait appel sont connus, et celles qui exigent l'adaptation du répertoire ou la création d'un nouveau. » (p.7)

Dans notre cas, l'ingénierie doit rendre nécessaire l'utilisation de connaissances sur la proportionnalité et les mesures de grandeurs et exiger la création d'un nouveau répertoire lié à l'étude des variations. L'objectif étant de faire émerger la nécessité de proportionnalité des variations de deux grandeurs pour caractériser une relation affine entre ces grandeurs.

Concevoir des situations au sein d'une ingénierie didactique suppose à la fois un travail sur les savoirs et un travail sur la médiation de ces savoirs. Les résultats et analyses précédentes ainsi que de nombreuses expérimentations m'ont permis de faire des choix.

Au niveau du savoir, il s'agissait de concevoir une situation ayant les caractéristiques permettant d'identifier une classe de problèmes pertinente. C'est pourquoi j'ai laissé intentionnellement les aspects les plus communément travaillés dans les classes ordinaires pour me focaliser sur ce qui faisait le plus défaut, à savoir :

- une situation proposée dans le cadre des mesures de grandeurs et plus particulièrement des mesures de grandeurs repérables ;
- une situation de modélisation de la covariation de deux grandeurs mais pas de même nature et en évitant si possible les fonctions du temps ;
- une situation qui rende nécessaire d'opérer sur les variations et dans le registre des tableaux ;
- une situation qui s'appuie sur les connaissances relatives à la proportionnalité.

Pour ce qui est de la médiation, je suis restée dans le cadre de la théorie des situations didactiques de Brousseau, donc dans une approche constructiviste et un apprentissage par adaptation, dans une confrontation actant/milieu. Cependant, sachant que les élèves passent par les différentes unités de raisonnement définies par Passaro (2016), il me fallait comprendre comment la notion de fonction affine pouvait naître de nécessités clairement identifiées par le cheminement entre ces unités de raisonnement.

Pour cela, le cadre de la problématisation (Fabre & Orange, 1997) m'a apporté des outils. Les espaces de contraintes m'ont permis de compléter l'analyse *a priori* en mettant en évidence tous les possibles en lien avec les registres des modèles et les registres explicatifs (REX) considérés comme les grands domaines des mathématiques. Ces éléments ont permis de penser l'actant comme un individu qui a un projet par rapport à un problème qu'il a lui-même construit, problème qui peut être temporaire et éloigné du problème théorique comme nous le verrons un peu plus loin.

Dans les pratiques ordinaires, la rencontre avec les situations problèmes est souvent organisée suivant le modèle de séquence que j'ai appelée IGDT : un temps de travail individuel (I), un temps de travail de groupe (G), un débat autour des productions (D) et une mise en texte d'une solution porteuse des savoirs nouveaux (T).

Ce format a été fortement incité par les programmes à partir de 2000, dans les formations et dans de nombreux livres du maître. Il est très peu remis en cause du fait qu'il permet une avancée du temps didactique. Pourtant si on l'analyse en terme de problématisation, on voit un malentendu entre la représentation que se fait l'élève s'il pense l'activité en terme de résolution et celle de l'enseignant qui la pense en terme d'enseignement (Tableau 3). En particulier on comprend que le processus d'institutionnalisation ne porte sans doute pas sur les mêmes objets. Si l'enseignant cherche à construire un discours second autour du processus, l'élève peut ne retenir de la situation qu'un modèle de résolution associé à un contexte spécifique, sans identifier la classe de problèmes auxquels ce modèle peut s'appliquer. L'adaptation se fait donc à partir d'éléments du contexte, plus ou moins pertinents suivant que ces éléments ont été explicités ou non, et qui font office de conditions d'application du modèle.

Démarche IGDT	Objectifs en terme d'enseignement	Objectifs en terme de résolution de problème	Objectifs en terme de problématisation
Temps de recherche individuelle I	Dévolution du problème	Trouver la solution ou au moins une idée	Se représenter le problème, construire un schéma de résolution
Travail de groupe G	Confrontation pour amener les élèves à argumenter leurs choix et expliciter leurs procédures	Savoir si la réponse est correcte ou avoir une piste de solution	Comparer son schéma avec celui des autres pour mesurer sa pertinence et son efficacité, changer de point de vue, planifier
Débat autour des productions D	Justifier la validité des réponses, expliquer les procédures	Corriger	Expliciter les choix et les méthodes utilisées, faire des conversions, comparer les solutions
Mise en texte d'une solution T	Institutionnaliser	Recopier la solution qui servira de modèle pour pouvoir résoudre le même problème ou un problème semblable	Identifier le schéma correspondant au problème ou à une classe de problèmes

Tableau 3: Différents objectifs dans une démarche IGDT.

Par ailleurs, si on analyse des phases de débats en classe entière avec l'utilisation d'outils comme les structures argumentatives, on peut voir que l'évolution se fait linéairement avec un guidage plus ou moins conscient de l'enseignant pour arriver à une formalisation du savoir proche d'une forme préexistante. C'est par exemple le cas pour le débat en annexe 1. L'analyse des interventions montre par ailleurs que tous les élèves ne participent pas également à toutes les étapes du débat.

Le même outil d'analyse peut permettre de construire la structure argumentative des échanges dans de petits groupes d'élèves. Les structures ont alors d'autres organisations comme dans l'exemple de l'annexe 2 où il est possible de voir l'avancée des arguments et les rôles de chaque élève au sein du groupe. Nous avons en fait repéré quatre rôles au cours des interactions verbales entre élèves :

- Celui qui agit : il propose, fait, opère, exécute, construit de nouvelles données...
- Celui qui vérifie : il contrôle, compare, vérifie que la ligne directrice est respectée, il valide...

- Celui qui questionne : il remet en cause, demande des explicitations, des explications, il amène des reformulations...
- Celui qui formalise : synthétise, formule ou reformule, pose des conclusions provisoires, pose les problématiques, les savoirs...

Ces rôles sont identifiés à partir de l'activité (explicitée oralement, photographiée, filmée) ou des traces laissées de cette activité (productions, brouillons, écrans d'ordinateur ou de calculatrice...), et les pratiques langagières (enregistrement des interactions, productions écrites). Nous allons identifier leur fonction à travers le modèle du losange de Fabre.

La circulation dans le losange peut se faire d'un sommet à n'importe quel autre. Ainsi face au problème posé par l'enseignant et aux données, l'élève peut les mettre en tension avec ses conditions propres et donc construire un problème temporaire différent dont le traitement ou la résolution peut amener à la construction de nouvelles données ou de nouvelles conditions d'où la construction d'un nouveau problème et ainsi de suite. Si les problèmes construits par l'élève sont trop éloignés du problème théorique posé par l'enseignant, le milieu est très certainement insuffisant. Il me fallait donc un outil pour mesurer cet écart et mesurer les variations au cours du travail afin de repérer des moments clés identifiés comme des événements de problématisation. Ces informations devaient me permettre de savoir quand et comment introduire dans le milieu des éléments inducteurs de problématisation.

Le cadre épistémique de Piaget réinterprété par Tall (2006) au regard des connaissances en neurosciences et sciences cognitives amène à penser l'activité cognitive de l'élève dans trois mondes dont l'intersection est non-vide : l'empirique, le symbolique et le théorique. L'analyse des productions langagières en lien avec l'activité des élèves permet de faire des hypothèses sur les mondes dans lesquels les élèves pensent et agissent et de comprendre comment se fait, pour chaque élève, le tissage entre les différents registres de la problématisation : le registre empirique, celui des modèles et le registre explicatif. Il s'agit d'identifier les nécessités rétroactives ou proactives qui amènent l'élève à faire certains traitements, certains choix, à proposer certaines pistes, à en refuser d'autres. Comme l'explique Duval (2002) :

L'analyse en amont requiert que l'on prenne en compte les différentes variations possibles d'un énoncé de problème ET les variations éventuelles de conduite et de production des élèves. Elle renvoie donc aux conditions permettant à un sujet d'entrer, relativement rapidement, dans une démarche mathématique sur un type de problème. Et dans cette perspective, la reconnaissance proactive, ou même seulement rétroactive, d'un « changement de... » à effectuer est un enjeu décisif d'apprentissage. (p.19)

Or ces variations de conduite et de production des élèves sont liées au tissage entre les registres de problématisation. Dans la pratique IGDT, tout est fait pour amener les élèves à résoudre un problème théorique et l'analyse *a priori* comme celle *a posteriori* se base le plus souvent sur un élève générique. Si le débat donne des outils d'analyse rétroactive, j'ai cherché à mettre en place un autre format de séquence à visée proactive qui prenne aussi en compte les variations entre élèves.

Pour cela, j'ai adapté un modèle de séquence proposé en Sciences et Vie de la Terre par Christian Orange dans le but d'amener chaque élève à analyser des écrits intermédiaires pour réduire les écarts entre le problème qu'il a construit initialement et le problème théorique porteur des nécessités du savoir visé. Ces écarts peuvent concerner aussi bien la question, les données, les conditions ou les solutions du problème. Ce type de séquence que j'appelle PPAP (problématisation par analyse des productions), est constitué d'un enchaînement de situations (Annexe 3). Cet enchaînement se caractérise par une reconfiguration par l'enseignant des productions écrites des élèves à une étape n , pour en élaborer le support qui servira son projet d'enseignement dans la situation $n+1$. La PPAP vise la construction d'un savoir problématisé par la résolution de problèmes qui deviennent explicatifs d'une part et par une secondarisation du discours d'autre part.

Les grandes étapes de la PPAP sont :

- la construction et la résolution d'un problème dans un cadre précis ;
- la comparaison des procédures dans différents cadres et l'explication des changements de cadres ;
- l'explicitation des nécessités dans différents registres et différents cadres.

Un des éléments essentiels de la PPAP est la figuration, il s'agit du support proposé aux élèves à partir de ce qu'ils ont produit à l'étape précédente. La figuration est une production écrite anonyme dans laquelle l'enseignant a sélectionné et réorganisé les éléments produits par les élèves selon trois principes qui correspondent à trois fonctions :

- La figuration amène des éléments symboliques qui permettent un discours autour des éléments caractéristiques de la notion étudiée (dans notre cas par exemple les flèches dans les tableaux pour symboliser les variations). Elle est donc une épure du savoir visé car elle vise la construction de ce savoir.
- Elle exerce un floutage pour centrer l'attention sur les éléments essentiels qui doivent amener les élèves à questionner ce qui est proposé. Pour cela, elle doit mettre en évidence un paradoxe, une nouveauté, une incohérence. C'est un filtre qui a pour fonction de provoquer la critique ou de rendre nécessaire l'élaboration d'une preuve.
- Elle amplifie des éléments qui doivent appeler certaines connaissances, déclencher certains automatismes, amener une reconnaissance d'objets ou de procédures. Elle a donc une fonction d'appel, elle doit activer des connaissances.

III. EXPERIMENTATION ET ANALYSE

1. Méthodologie et analyse *a priori*

L'ingénierie a été expérimentée dans deux classes de seconde en début d'année scolaire pour éviter un impact trop important du contrat didactique. Les élèves sont issus de collèges différents, ils n'ont pas encore retravaillé les fonctions, ils n'ont pas encore été évalués, ils n'ont pas d'habitudes ou de postures établies trop fortement dans le groupe. Les élèves sont en demi-groupes pour la première séance, l'enseignant intervient le moins possible, le dispositif a été présenté comme un dispositif de recherche visant à mieux comprendre comment les élèves organisent leur recherche, tous les travaux sont anonymes, les groupes sont tirés au sort. Les données recueillies sont les travaux, des photographies (en particulier des écrans, de gestes singuliers, de postures), les notes prises pendant la séance et deux vidéos fixes. Les interactions sont analysées au regard des productions et des indices visuels recueillis pour reconstruire ce qu'on appelle un espace de problématisation, c'est-à-dire une reconstruction des différents registres de problématisation dans les groupes. L'évolution des problèmes temporaires que construisent les élèves vers un problème explicatif porteur des nécessités du savoir visé est un indicateur de problématisation.

Le problème proposé aux élèves est un problème de modélisation de la relation entre la variation de la température et la variation de la pression d'un même corps dans un récipient hermétique (Annexe 4). Ces grandeurs ont été choisies car il s'agit de grandeurs repérables alors que leur variation est une grandeur mesurable. Le passage par la variation est donc une nécessité pour caractériser la relation entre la pression et la température quelle que soit les unités choisies. C'est historiquement de cette manière que l'idée d'une unité permettant de modéliser la relation entre la pression et la température par une relation de proportionnalité est née avant même la notion de zéro absolu. La température et la pression sont deux grandeurs que les élèves connaissent, par contre ils ne connaissent pas la loi de Gay-Lussac.

La situation propose aux élèves un tableau de mesures. Cependant différentes unités ont été utilisées pour la température, il s'avère que la relation entre la température et la pression n'a

pas la même forme, elle est linéaire pour les Kelvins et affines pour les degrés Celsius ou Fahrenheit. Ce paradoxe doit amener les élèves à interpréter les données dans différents registres pour en tirer la caractéristique commune qui est la proportionnalité des variations. Des traitements au niveau des expressions algébriques peuvent alors permettre de caractériser la fonction affine qui modélise la relation entre les deux grandeurs pour chacune des unités choisies. L'objectif est de mettre en évidence la nécessité de la proportionnalité des écarts pour caractériser les problèmes relevant des fonctions affines et de formaliser cette nécessité dans chacun des registres sémiotiques.

Les élèves peuvent utiliser différentes procédures pour vérifier la proportionnalité. Ils peuvent faire une représentation graphique, tester les propriétés de linéarité, chercher s'il existe un coefficient de proportionnalité, utiliser le produit en croix, chercher l'image de 0. Les élèves ont à disposition des calculatrices et des ordinateurs. Les tracés et les calculs peuvent donc être rapidement effectués. Chaque groupe de trois ou quatre a un tableau dans une mesure spécifique mais dans l'étape suivante de nouveaux groupes sont constitués de trois ou quatre élèves ayant étudié des tableaux dans des unités différentes mettant en évidence le paradoxe. Après vérification des résultats et validation des conclusions, les élèves vont devoir trouver une relation valide quelle que soit l'unité de température choisie. Les représentations graphiques peuvent amener les élèves à reconnaître des fonctions affines du fait de l'alignement des points dans les trois cas. Les élèves peuvent aussi chercher à convertir les mesures dans une même unité pour pouvoir les comparer. Enfin les élèves peuvent aussi accéder aux formules de conversion et essayer de les utiliser pour exprimer les relations entre les grandeurs.

Pour mesurer l'évolution des problèmes, j'ai construit trois niveaux de problématisation pour chacun des sommets du losange de problématisation (Illustration 4).

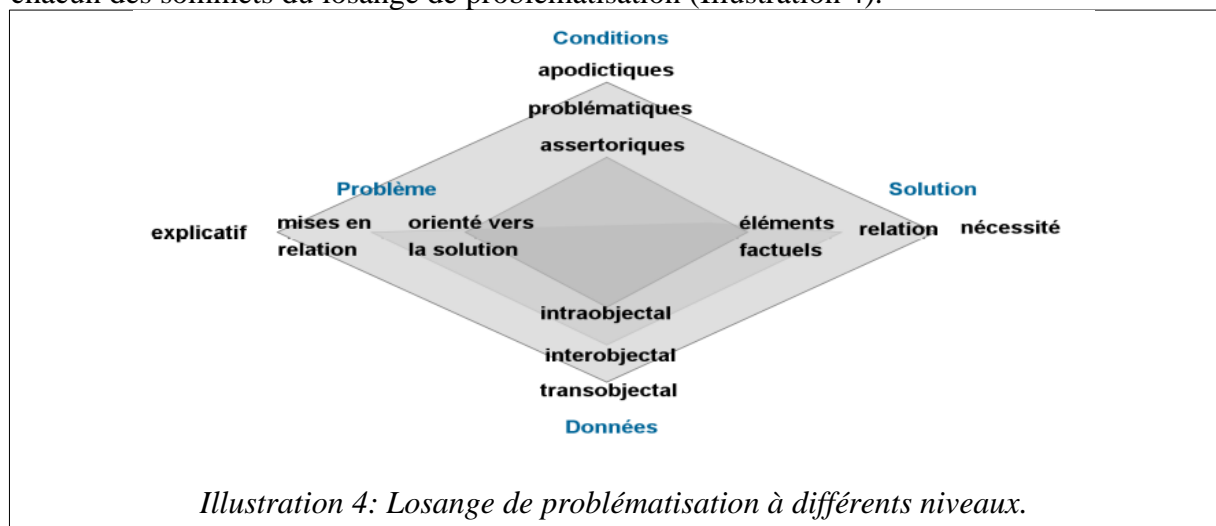


Illustration 4: Losange de problématisation à différents niveaux.

Le problème peut être orienté vers la solution, il peut être un problème de comparaison, de mise en relation ou un problème explicatif donc porteur d'arguments. La solution peut être factuelle, une relation ou une nécessité. Les données peuvent être traitées de manière intraobjectale, interobjectale ou transobjectale et les conditions peuvent être assertoriques, problématiques ou apodictiques. En fait l'évolution n'est pas linéaire on peut avoir une déformation du losange suivant le niveau à chaque sommet. Nous allons voir sur un exemple que ces déformations permettent de visualiser la dynamique de problématisation dans les petits groupes.

2. Un exemple de production langagière dans un groupe de 4 élèves dans une classe de seconde

Mon analyse a porté essentiellement sur les groupes pour lesquels un changement de registre explicatif a été mis en évidence afin de comprendre comment ce changement se produit. Dans l'extrait choisi, l'échange a duré 28 minutes. On peut le découper en épisodes, chaque épisode correspondant à un problème temporaire que les élèves énoncent explicitement ou que nous pouvons reconstruire à partir des productions. Deux épisodes correspondent à des échanges

autour de la mise en forme ou la rédaction de la production écrite qui sera rendue à la fin de la séance. Nous obtenons le découpage suivant :

Épisode 1	01:08 = le coefficient de proportionnalité
Épisode 2	05:45 = les différentes unités de température
Épisode 3	07:07 = le lien entre pression et température
Épisode 4	09:43 = la conversion des °C en K
Épisode 5	11:26 = la rédaction du compte-rendu
Épisode 6	16:20 = le paradoxe
Épisode 7	17:58 = les fonctions affines et linéaires
Épisode 8	19:42 = le modèle pour les °F
Épisode 9	20:49 = la formalisation avec les écritures algébriques
Épisode 10	24:53 = la rédaction et la conclusion

Ces épisodes schématisés avec le losange de problématisation et les différents niveaux que nous avons définis, montre que l'avancée dans le travail n'est pas linéaire, elle passe par des retours en arrière, des sauts, mais elle montre aussi une formalisation de nécessités qui atteste d'une problématisation (Annexe 5). En particulier l'épisode 8 témoigne de la construction d'un problème explicatif et la mise en relation de différentes données. Les élèves ont mis en évidence une nécessité durant l'épisode 6 : la relation entre pression et température doit être une relation affine. S'en suit un débat autour du modèle et à l'épisode 8, le nouveau problème qui se pose est alors de déterminer la fonction affine dans le cas où la température est exprimée en °F qui rende compte de l'ensemble des données initiales ou construites. Les conditions sont apodictiques et la solution attendue est bien une relation. Les données sont travaillées de manière trans-objectales puisqu'elles sont étudiées à partir de la structure « fonction affine » qui amène une nouvelle interprétation de certaines données.

La transcription des échanges dans le groupe permet de repérer les rôles endossés alternativement par les élèves et de voir comment la répartition des rôles évolue. La problématisation est le résultat d'un changement régulier de rôles car les nécessités émergent des allers-retours entre l'agir, le penser et le dire. L'extrait de l'épisode 8 qui suit montre comment chaque rôle vient nourrir la réflexion :

- Questionner : « Les Kelvins en fait le zéro absolu c'est zéro du coup y a pas de chiffres négatifs dans les degrés ? »
- Agir : « Au pire c'est bizarre par exemple regarde le premier ça fait le coefficient regarde, le premier coefficient ça fait 110 alors que le deuxième ça fait 17. »
- Vérifier : « Lui il fait tout, enfin le zéro absolu, il est pas, c'est pas un zéro en fait donc, ça peut pas être heu... »
- Formaliser : « J'ai compris... j'ai compris en fait les degrés Celsius c'est pas proportionnel mais c'est une fonction affine justement, parce que tu fais plus 273 à chaque fois. »

L'objectif est donc que chaque élève puisse prendre alternativement chacun de ces rôles ce qui correspondrait à un « débat intérieur ». Une manière de forcer ces changements de rôles peut être de proposer des situations contraignantes qui imposent à certains moments à tous les élèves d'endosser explicitement un de ces rôles. Ainsi demander de critiquer des solutions oblige l'élève à questionner alors que demander de valider une solution l'oblige à vérifier. L'enjeu des étapes de la PPAP est de faire passer les élèves par les différents rôles.

3. Résultats de l'expérimentation

La situation testée montre que :

- Le sens de l'affinité se construit bien en lien avec les connaissances qu'ont les élèves sur la proportionnalité. Le travail sur les fonctions affines semble même renforcer la maîtrise du concept de proportionnalité.

- Les élèves inventent de nouveaux répertoires pour pouvoir opérer sur les objets (comme les variations ou les relations fonctionnelles par exemple).
- Les consignes de travail à partir des figurations amènent les élèves à contrôler, vérifier, valider, expliquer, ce qui provoque des changements de rôles des élèves, soit par la tâche qui est demandée, soit par la nature des échanges dans les groupes.
- Enfin l'analyse des productions montre une évolution vers un discours qui tend vers un genre second et donc vers l'expression de nécessités indépendamment des registres sémiotiques utilisés.

IV. CONCLUSION ET PISTES DE TRAVAIL

Ce travail de thèse apporte des résultats suivant trois angles différents mais il ouvre pour chacun de nouvelles pistes de travail qu'il s'agirait d'explorer pour répondre à la fois aux attentes des enseignants dans les classes qui se disent en difficulté face à la place accordée aux problèmes dans l'enseignement-apprentissage et aux besoins des élèves peu efficaces devant des situations inédites.

Du point de vue de l'enseignement-apprentissage des fonctions affines, j'ai posé l'hypothèse que problématiser la notion la rend plus disponible. Ma recherche a cependant permis d'entrevoir d'autres pistes. Il serait intéressant de mesurer les effets d'une autre organisation mathématique tout au long des cycles 3 et 4. Au lieu de considérer la fonction affine comme un cas simple amenant à généraliser le concept de fonction, il s'agirait d'introduire la notion d'affinité comme un outil dans le cadre des mesures de grandeurs permettant des traitements dans différents registres lorsqu'il y a proportionnalité des écarts. Une seconde piste serait de tester le changement de point de vue sur les fonctions, en particulier privilégier l'approche co-variationnelle dans le cadre des mesures de grandeurs. Enfin il pourrait être intéressant d'introduire des symboles pour travailler sur les variations et de mesurer les procepts ainsi développés.

Du point de vue de la structure des séquences autour de la résolution de problèmes, la PPAP offre des avantages. Elle se déroule sur un temps long, favorisant des pauses, retours en arrière, des ouvertures et des fermetures. Elle permet aussi des interventions moins spontanées de l'enseignant et une activité réflexive de l'élève à partir des figurations. L'élaboration des figurations nécessiterait cependant un travail de recherche conséquent pour penser la formation des enseignants. Elle suppose une analyse didactique et une empathie cognitive développées ainsi qu'une anticipation des éléments théoriques à mettre en place. L'explicitation du tissage entre les registres de problématisation (registre empirique, registre des modèles et REX) donne des pistes d'interprétation des erreurs et permet d'ouvrir de nouveaux possibles pour penser l'étayage ou comprendre la portée de certaines variables didactiques. C'est aussi un enjeu pour que l'enseignement soit moins discriminant socialement en prenant conscience des écarts entre les registres de problématisation liés aux expériences vécues et aux feedbacks reçus.

Du point de vue des cadres théoriques mobilisés différents champs de questions sont ouverts :

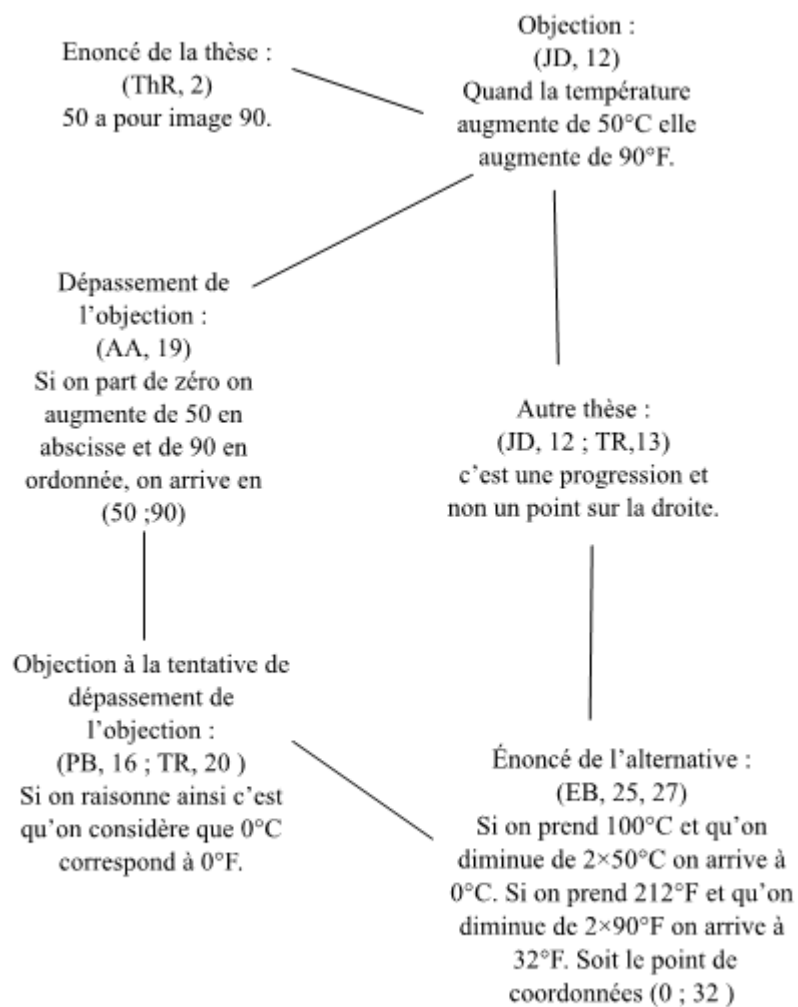
- Comment poursuivre l'articulation et la complémentarité entre la TSD et la problématisation ? Les outils de la problématisation se sont révélés utiles pour mieux comprendre et analyser l'activité de l'élève. J'ai posé l'hypothèse implicite que l'actant agit en fonction d'un projet en lien avec un problème qu'il a construit et que ce problème est lié à des contraintes externes et internes elles-mêmes en lien étroit avec la configuration que chaque élève tisse entre le registre empirique, celui des modèles et le registre explicatif. Que serait un apprentissage qui relèverait à la fois de l'adaptation et de la problématisation ?

- Le discours n'est peut-être pas aussi révélateur de l'activité cognitive. Comment savoir si un discours de genre premier ne cache pas une problématisation alors qu'un discours de genre second peut être tenu sans qu'il y ait eu problématisation ? Par ailleurs, il reste des élèves muets, ce qui ne signifie pas qu'ils ne problématisent pas. Comment peut-on avoir des traces de la problématisation chez les élèves ? Cette problématisation est-elle effectivement liée aux inter-actions ?
- Un apprentissage par problématisation amène-t-il réellement une meilleure disponibilité des connaissances ? En particulier, la PPAP proposée, permet-elle réellement à l'élève de problématiser ou ne vient-elle qu'exposer à l'élève un savoir problématisé par l'enseignant ? Cette approche permet-elle à chaque élève d'accéder à un savoir plus disponible ou serait-elle discriminante ? Et dans ce dernier cas, quels sont les implicites qui peuvent être source de malentendus ?

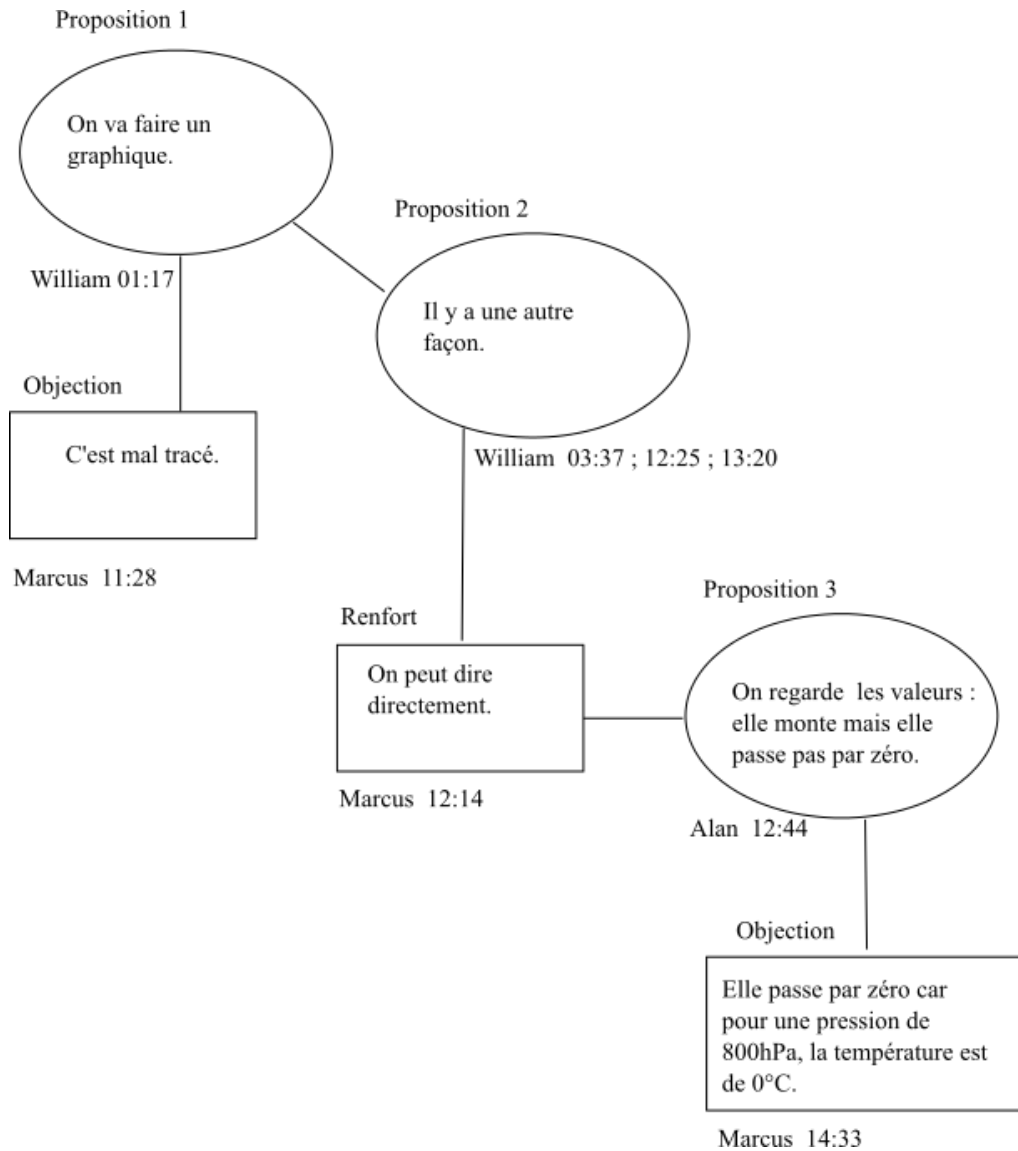
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- BROUSSEAU, G. (1986). *Théorisation des phénomènes d'Enseignement des Mathématiques* (Université de Bordeaux 1). Consulté à l'adresse <http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2011/06/MONTREAL-archives-GB1.pdf>
- BROUSSEAU, G. (2010). *Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques*. Consulté à l'adresse <http://guy-brousseau.com/biographie/glossaires/>
- CHAUVAT, G. (1998). Courbes et fonctions au collège. *Petit x*, 51, 23-44.
- COMIN, E. (2009). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans le cadre des fonctions en seconde. *Petit x*, 79, 23-47.
- DOUADY, R. (1986). Jeu de cadres et dialectique outil/objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7/2, 5-32.
- DUVAL, R. (1993). *Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée*. Strasbourg: IREM.
- DUVAL, R. (2002). *Comment décrire et analyser l'activité mathématique ? Cadres et registres*. 83-105. Consulté à l'adresse <http://tecfa.unige.ch/tecfa/teaching/staf26/Doua.pdf>
- DUVAL, R. (2006). *La conversion des représentations : un des deux processus fondamentaux de la pensée*. Grenoble: Presses Universitaires de Grenoble.
- FABRE, M. (2011). *Eduquer pour un monde problématique : la carte et la boussole*. Paris: PUF.
- FABRE, M. & ORANGE, C. (1997). Construction des problèmes et franchissement des obstacles. *ASTER*, 24, 37-57.
- GRAU, S. (2017). *Problématisation en mathématiques : le cas de l'apprentissage des fonctions affines*. Thèse de Doctorat, Bretagne Loire, Nantes. Consulté à l'adresse HAL archives ouvertes <https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01629911/document>.
- JAUBERT, M., REBIÈRE, M. & PUJO, J. (2010). Communauté discursives disciplinaires scolaires et formats d'interactions. *Colloque international ICAR Université Lyon 2*. Présenté à Spécificités et diversité des interactions didactiques : disciplines, finalités, contextes, Lyon. Consulté à l'adresse HAL archives ouvertes. (hal-00534616)
- ORANGE, C. (2005). Problème et problématisation dans l'enseignement scientifique. *ASTER*, 40, 3-12.
- PASSARO, V. (2009). Obstacle à l'acquisition du concept de covariation et l'introduction de la représentation graphique en deuxième secondaire. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 14, 61-77.
- PASSARO, V. (2013). Jouer avec le concept de fonction ou explorer la fonction par l'étude covariationnelle. *Bulletin AMQ*, LIII, 3, 73-86.
- PASSARO, V. (2016). Analyse du raisonnement covariationnel et des situations qui en favorisent le déploiement chez des élèves de 15 à 18 ans au Québec. *Enjeux et débats en didactique des mathématiques. XVIIIe école d'été de didactique des mathématiques*. Grenoble : Éditions La pensée sauvage.
- ROBERT, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18(2), 139-190.
- ROGALSKI, M. (2001). Les changements de cadre dans la pratique des mathématiques et le jeu de cadres de Régine Douady. *Actes de la journée en hommage à Régine Douady*, 13-30.
- TALL, D. (2006). A theory of mathematical growth through embodiment, symbolism and proof. *Annales de didactique de Strasbourg*, 11, 195-215.

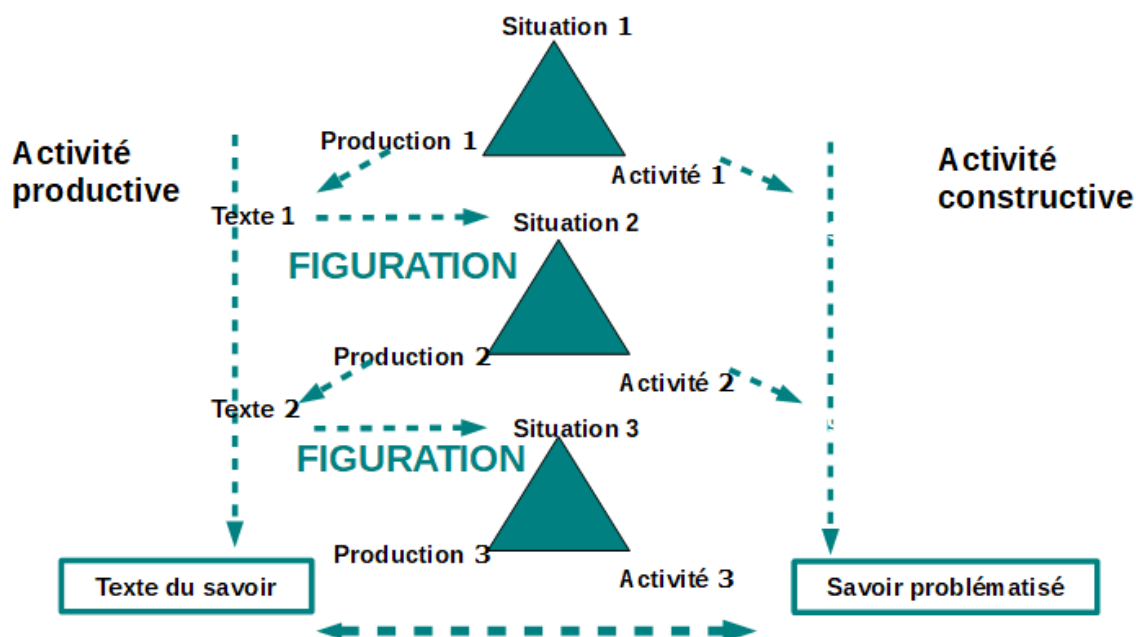
ANNEXE 1 : STRUCTURE ARGUMENTATIVE D'UN DÉBAT EN CLASSE ENTIÈRE



ANNEXE 2 : STRUCTURE ARGUMENTATIVE D'UN DÉBAT EN PETIT GROUPE



ANNEXE 3 : SCHÉMA D'UNE SÉQUENCE DE TYPE PPAP



ANNEXE 4 : PROBLÈME POSÉ EN SITUATION 1 DE L'INGÉNIERIE PPAP

Situation 1 : 1^{ère} étape

Trois professeurs font la même expérience. Ils mesurent la pression en hPa (hectopascal) en faisant varier la température d'un même corps dans un même récipient. Voici le tableau de mesures obtenues pour un volume constant et un nombre de moles constant par

le professeur A :

T en °C	- 15,2	7,5	10,2	23,7	41	43,7
P en hPa	774	842	850	890	942	950

le professeur B :

T en °F	4,64	45,5	50,36	74,66	105,8	110,66
P en hPa	774	842	850	890	942	950

le professeur C :

T en K	257,95	280,65	283,35	296,85	314,15	316,85
P en hPa	774	842	850	890	942	950

D'après ces données, la pression est-elle proportionnelle à la température ?

2^{ème} étape :

Déterminer une relation entre la température et la pression qui est vraie quelle que soit l'unité choisie pour mesurer la température.

ANNEXE 5 : EVOLUTION DU LOSANGE DE PROBLEMATISATION AU COURS D'UNE INTER-ACTION DANS UN GROUPE DE 4 ELEVES EN CLASSE DE SECONDE

<p align="center">Épisode 1</p>	<p align="center">Épisode 2</p>
<p align="center">Épisode 3</p>	<p align="center">Épisode 4</p>
<p align="center">Épisode 5</p>	<p align="center">Épisode 6</p>
<p align="center">Épisode 7</p>	<p align="center">Épisode 8</p>

EXTENSION DE LA NOTION D'ENUMERATION : COMMENT MIEUX RENDRE COMPTE DU CARACTERE COMMUN DE CERTAINES DIFFICULTES DES SUJETS EN SITUATION

Olivier **RIVIERE**

Laboratoire ACTé, ESPE Clermont, Université Clermont-Auvergne

olivier.riviere@uca.fr

Résumé

Des travaux de didactique des mathématiques, conduits par Briand (1993,1999), ont permis de montrer l'existence de connaissances spécifiques d'organisation dans le domaine des problèmes concernant le dénombrement et les opérations arithmétiques, connaissances qui relèvent de ce que Brousseau a appelé l'énumération.

Nous nous proposons dans ce texte de montrer comment l'étude de la situation fondamentale de l'énumération permet d'exhiber de nouvelles variables et de compléter l'étude des stratégies proposée par Briand. Une nouvelle définition de l'énumération est proposée, permettant d'unifier conceptuellement la description des difficultés rencontrées.

Cette nouvelle définition modifie le regard porté sur l'énumération en rendant cette connaissance visible dans de nombreuses situations, montrant ainsi que ces « connaissances d'énumération » ne sont spécifiques ni au champ numérique, ni même aux mathématiques.

Mots clés

Enumération, connaissance, savoir, situation, définition

I. INTRODUCTION

Après avoir précisé l'usage méthodologique que nous faisons des situations, nous produisons une modélisation de situations d'énumération en termes de relations entre deux collections.

Nous étudions comment cette modélisation nous conduit à proposer une reformulation de la définition de l'énumération.

L'étude des difficultés rencontrées par des sujets dans une situation non didactique nous conduit à proposer une extension de la définition de l'énumération, extension dont nous étudions la compatibilité avec la définition antérieure et la robustesse.

II. LA PLACE DES SITUATIONS DANS NOTRE ETUDE

Commençons par préciser certains aspects qui nous semblent caractéristiques de notre travail. Dans l'étude du processus de diffusion des connaissances, la fabrication de modèles de ces connaissances relève pour Brousseau (1997) d'une double dynamique :

Les modèles doivent être alors envisagés sous deux formes qu'il s'agit de faire « coïncider » :

- Comme nécessité théorique, déduite du savoir lui-même, et d'un fonctionnement minimal supposé de l'élève,

- Comme représentation des situations réelles, didactiques ou non, où la connaissance devrait « se déduire » des décisions et des comportements du sujet. (Brousseau, 1997, p.3)

Le premier point est fondamental pour nous car il fait de la situation un objet théorique dont une des fonctions est de décrire le savoir. Il installe comme élément premier du modèle de diffusion de la connaissance une modélisation du savoir par des situations.

Le second point nous fournit des clés d'observation de la connaissance. C'est par l'observation des décisions et des actions du sujet que nous pouvons en déduire des manifestations de la connaissance.

III. CONSTRUCTION D'UNE PREMIERE DEFINITION DE L'ENUMERATION

Dans cette partie, en appui sur les travaux de Briand (1993, 1999), nous montrons comment l'observation des difficultés dans deux situations (la situation de dénombrement d'une collection de jetons et la situation des allumettes) nous conduisent à produire une nouvelle formulation de la définition de l'énumération.

1. Modélisation de la situation en terme de relation entre deux collections

Le mot « énumération » est introduit par Brousseau (1984) dans différents contextes numériques. L'étude des difficultés d'élèves dans les situations de dénombrement par comptage permet à Briand (1993) de faire émerger l'énumération comme savoir.

Pour dénombrer une collection de jetons, il faut pouvoir en faire un inventaire. Chaque élément de la collection des jetons doit être compté une fois et une seule. Le dénombrement par comptage d'une collection peut être modélisé par la construction d'une relation entre les éléments de cette collection de jetons et la collection des mots nombres. Chacun des éléments de la collection des jetons doit être mis en relation avec un élément et un seul de la collection des mots nombres.

Quand la collection des jetons est bien comptée, une bijection a alors été construite entre cette collection et un sous-ensemble de la collection des mots nombres (Figure 1).

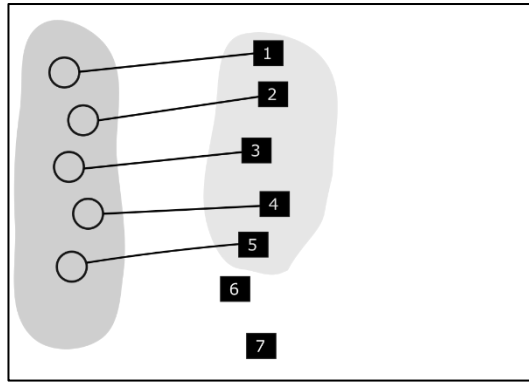


Figure 1: La situation de dénombrement des jetons - mise en évidence d'une bijection entre la collection de jetons et un sous-ensemble de l'ensemble des mots nombres.

Dans l'étude de la construction de la relation entre ces deux collections, certains dysfonctionnements peuvent apparaître.

Ainsi, la non-maitrise par le sujet de la comptine orale va rendre indisponible certains éléments de la collection des mots nombres et par conséquent interdire toute construction d'une bijection dans laquelle un sous-ensemble de cette collection intervient. C'est ce qui peut être observé quand un sujet interrompt le comptage de la collection des jetons au dernier des mots nombres qu'il connaît alors qu'il reste des jetons à dénombrer.

Tous les dysfonctionnements du comptage ne portent pas sur la seule non-disponibilité de la collection des mots nombres. Ainsi, quand le sujet affecte soit plus d'un mot nombre, soit aucun mot nombre à certains éléments de la collection des jetons, le comptage échoue malgré la disponibilité de la collection des mots nombres (Figure 2).

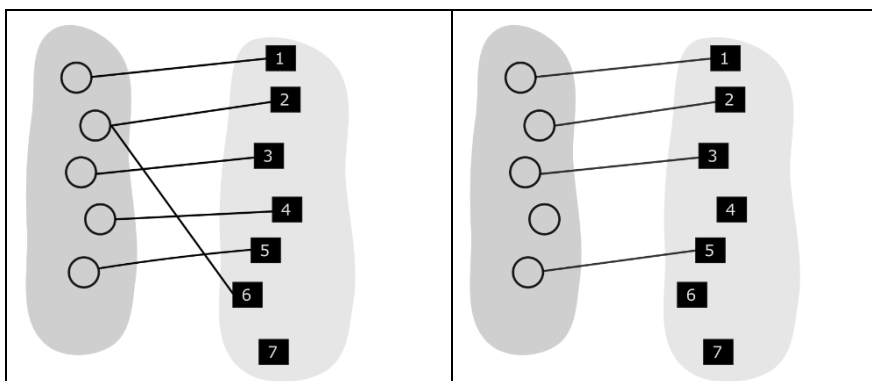


Figure 2 : La situation de dénombrement des jetons - mise en évidence de deux dysfonctionnements du comptage.

Dans la situation de dénombrement par comptage, l'énumération apparaît comme une connaissance nécessaire à la réussite, sans pour autant qu'elle soit la seule connaissance en jeu dans la situation.

Ce qui caractérise une connaissance est l'existence d'une situation dans laquelle la connaissance est la solution optimale du problème posé. Briand cherche à construire une situation de ce type, qui s'affranchisse du recours au nombre.

Comment alors mettre en place des situations dans lesquelles l'énumération d'une collection soit seule (indépendamment du nombre) la solution à un problème posé ? (Briand, 1999, p.57)

Même si Briand a pour objectif de produire une situation qui puisse permettre de fabriquer des ingénieries d'enseignement, c'est bien une nécessité théorique qui guide la fabrication de la situation. C'est dans ce contexte qu'il construit la situation des allumettes.

Briand (1999) donne une description de la situation.

Un élève dispose devant lui (sur une table) d'un tas de boîtes d'allumettes identiques percées sur le côté d'un petit trou permettant le passage d'une allumette. Des bâtonnets (sans le phosphore) sont les allumettes. Ces bâtonnets, en grand nombre, sont dans une boîte plastique. Il s'agit de placer une allumette et une seule dans chaque boîte sans l'ouvrir, de savoir lorsque l'on a terminé, puis de s'assurer si l'on a réussi ou échoué en ouvrant les boîtes. S'il y a une seule allumette dans chaque boîte et si aucune boîte n'est vide, alors l'élève a réussi. (Briand, 1999, p.57)

Briand produit une ingénierie qui, par un jeu sur différentes variables (notamment les boîtes d'allumettes mobiles ou bien fixées sur un support), propose un enseignement de l'énumération en moyenne section.

Formellement, la situation des allumettes peut être modélisée comme la construction d'une relation entre une collection de boîtes et une collection d'allumettes (Figure 3).

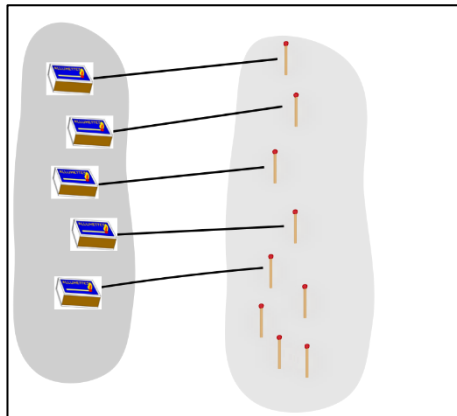


Figure 3 : Situation des allumettes- une modélisation en termes de collections.

En éliminant toute dimension numérique de la situation, Briand rend les dysfonctionnements dans la construction de la relation encore plus visibles. C'est cette connaissance dans l'action de construction de cette relation sous contraintes que Briand nomme énumération.

2. La fonction particulière de la seconde collection : évolution de la modélisation

Dans cette situation, comme dans la précédente, deux collections sont en jeu. Pour autant, les deux collections ne sont pas symétriques ; elles ne jouent pas le même rôle. La fonction de la seconde collection (mots nombres et allumettes) est de rendre observable la relation qui est construite sur les éléments de la première (jetons, boîtes). Ainsi, dans chacune des deux situations, un traitement va être réalisé sur les éléments de la première collection. Ce traitement va consister à affecter un mot nombre à un jeton ou bien à insérer une allumette dans une boîte. C'est la réalisation de ce traitement sur les éléments de la première collection qui permet d'observer le processus de fabrication de la relation.

Dans ces deux situations, quand le sujet saisit un élément de la première collection et qu'il effectue le traitement demandé (en lui affectant un élément de la seconde collection), la seule chose qui importe du point de vue de l'énumération est que cet élément de la première collection ait été traité.

La modélisation proposée peut donc se dispenser de représenter la seconde collection pour ne plus laisser apparaître que les éléments de la première collection et les traces de la relation spécifiques aux éléments de cette première collection.

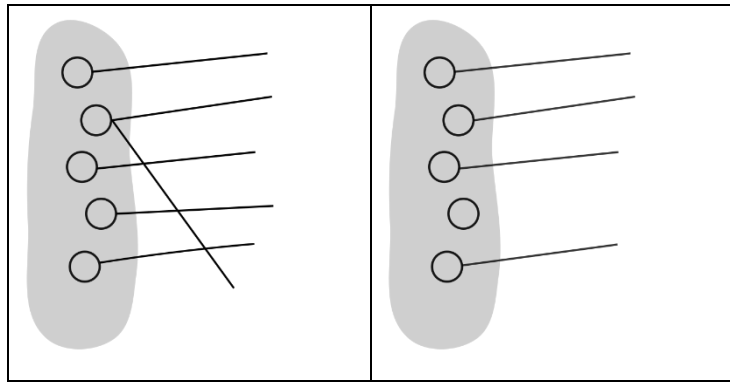


Figure 4 : La situation de dénombrement des jetons - modélisation ne montrant plus que la première collection et la relation.

La Figure 4 reprend les modélisations des deux dysfonctionnements du comptage décrits dans la Figure 2. Cette nouvelle modélisation met en évidence que ce qui importe du point de vue de l'énumération de la première collection est le nombre de traitements (nombre affecté à un jeton, allumette insérée dans un boîte) qui ont été réalisés sur chacun des éléments de cette collection. Finalement, du point de vue de l'énumération, la modélisation peut donc se réduire au codage du nombre de traitements réalisés sur chacun des éléments de la première collection. Par la suite, l'ordre de multiplicité d'un élément désignera le nombre de traitements réalisés sur cet élément.

3. Nouvelle formulation de la définition de l'énumération

Énumérer une collection, c'est traiter une fois et une seule chacun des éléments de cette collection. La modélisation développée permet de produire une formulation de la définition de l'énumération en appui sur l'ordre de multiplicité.

Soit un ensemble E d'éléments.

Dans une situation mettant en œuvre un traitement T , cet ensemble E est bien énuméré si et seulement si :

$$\forall e \in E m(e) = 1$$

où m représente l'ordre de multiplicité du point de vue du traitement T .

Dans la Figure 4, les collections de ronds ne sont pas bien énumérées car il existe un élément dont l'ordre de multiplicité est égal à 2 dans le premier cas et à 0 dans le second cas.

IV. REFORMULATION DE LA DEFINITION DE L'ENUMERATION

Dans cette partie, nous montrons comment l'étude des difficultés rencontrées dans une nouvelle situation d'énumération nous conduit à reformuler la définition de l'énumération.

Dans (Briand, 1999), nous disposons de commentaires détaillés sur la nature des gestes qui sont réalisés quand la collection des boîtes d'allumettes est déplaçable. L'influence de la position du tas d'allumettes est étudiée, tout comme l'effet produit par le secouage de chacune des boîtes. Par contre, dans le cas où les boîtes d'allumettes sont collées à un support, nous ne disposons que d'une analyse quantitative sur les progrès observés des sujets. Dans notre travail de thèse (Rivière, 2017), nous avons cherché à produire des analyses qualitatives sur les stratégies effectives mises en œuvre par les sujets dans le cas où les éléments de la collection énumérée

ne sont pas déplaçables. Pour cela, nous avons construit une nouvelle situation d'énumération, la situation des sucres.

1. La situation des sucres

Commençons par décrire la situation étudiée.

Une collection de ronds dessinés sur une feuille est présentée au sujet. Le sujet est invité à poser un sucre sur chaque rond et un chapeau sur chaque sucre. A l'issue de ce travail de préparation, chaque rond de la collection de départ est recouvert par un sucre qui est lui-même recouvert par un chapeau. Le jeu consiste à ramasser la totalité des sucres de la manière suivante : il faut attraper un chapeau, ramasser le sucre et reposer le chapeau sur le rond de la collection.

A chaque instant il ne peut y avoir plus d'un rond qui ne figure pas sous le chapeau qui lui est associé. Quand tous les chapeaux sont posés sur le support, aucun rond n'est visible. Quand le sujet soulève un chapeau et saisit le sucre qui y figurait, le rond qui était sous le sucre devient visible.

Le sujet n'aura le droit de soulever un autre chapeau que lorsqu'il aura replacé le chapeau sur le rond qu'il recouvrait initialement. L'expérimentateur contrôle le ramassage effectif des sucres et le retour effectif des chapeaux dans leur position initiale.

Le jeu est constitué a priori de deux phases : une phase d'action pendant laquelle le sujet ramasse les sucres et une phase de validation pendant laquelle le sujet vérifie que tous les sucres ont bien été ramassés.

Dans la phase de validation, la règle sur les chapeaux évolue. Le sujet a alors le droit de ramasser tous les chapeaux. S'il ne reste pas de sucre, alors il a gagné. Par contre, s'il reste au moins un sucre, alors la partie est perdue.

Le jeu peut s'arrêter dans la phase d'action si le sujet soulève un chapeau et qu'il n'y a pas de sucre sous ce chapeau. Dans ce cas la partie est perdue. (Rivière, 2017, p.56-57)



Figure 5: Situation des sucres - la configuration matérielle.

Dans ce jeu, le sujet perd dans deux cas :

- Dans la phase de validation, quand il reste un sucre sous un des chapeaux (cas 1) ;
- Dans la phase d'action, le sujet soulève un chapeau sous lequel ne figure pas de sucre (cas 2).

Le cas 1 est rencontré quand un élément au moins de la collection des chapeaux n'a pas été traité (puisque le sucre n'a pas été enlevé).

Le cas 2 est rencontré quand un élément de la collection des chapeaux est traité deux fois par le sujet (une première fois quand le chapeau est soulevé et le sucre enlevé et une seconde fois quand ce même chapeau est de nouveau soulevé sans qu'il soit possible à ce moment-là d'enlever un sucre). Il y a donc dans ce cas un élément de la collection que le sujet essaye de traiter deux fois.

Le cas 1 correspond au non-respect de la contrainte « chaque élément doit être traité au moins une fois », alors que le cas 2 correspond au non-respect de la contrainte « chaque élément doit être traité au plus une fois ».

Quand ni le cas 1, ni le cas 2 ne sont rencontrés pour aucun des éléments, c'est que la collection a été bien énumérée.

Appliquons à cette situation la modélisation développée précédemment.

Pour cette situation des sucres, la première collection en jeu est la collection des points dessinés sur la feuille (ou la collection des chapeaux puisqu'on peut par bijection confondre les deux collections). La seconde collection en jeu est la collection des sucres posés sur chaque point.

Le traitement consiste à soulever un chapeau et enlever le sucre présent sur le point (et sous le chapeau). La fonction des chapeaux est de rendre le traitement non visible lors de la phase d'action.

2. Nouvelle formulation de la définition de l'énumération

Dans la situation des allumettes, la partie s'arrête quand le sujet le décide, quand il pense qu'il a terminé. Dans la situation des sucres, la partie s'arrête également selon ce processus. Mais la partie peut aussi s'arrêter lorsque le sujet soulève un chapeau dont il a déjà enlevé le sucre.

Cette condition d'arrêt rend très visible l'erreur qui consiste à traiter plus d'une fois le même élément. Les règles du jeu créent une dissymétrie dans les raisons de l'échec à l'énumération de la collection. Dans notre volonté de décrire les erreurs effectuées par les sujets dans le jeu, cette dissymétrie nous conduit à décomposer les conditions de l'énumération en deux. La condition de l'énumération « chaque élément doit être traité une fois et une seule » se décompose en deux pour devenir « chaque élément doit être traité au moins une fois » (C1) et « chaque élément doit être traité au plus une fois » (C2).

La définition de l'énumération produite précédemment devient :

Soit un ensemble E d'éléments.

Dans une situation mettant en œuvre un traitement T , cet ensemble E est bien énuméré si et seulement si :

$$\forall e \in E m(e) \geq 1 \text{ (condition C1)}$$

$$\forall e \in E m(e) \leq 1 \text{ (condition C2)}$$

où m représente l'ordre de multiplicité du point de vue du traitement T .

Remarques :

Dans la situation des sucres, le second soulèvement d'un même chapeau provoque l'arrêt de la partie. Si on réduit le traitement au soulèvement d'un chapeau, l'ordre de multiplicité d'un élément ne peut pas être supérieur à 2.

La séparation en deux de la condition de l'énumération permet donc de décrire plus finement les dysfonctionnements de l'énumération dans cette situation.

Nous venons de mettre à jour une variable qui permet de mieux caractériser les situations d'énumération :

- Dans certaines situations, les deux conditions de l'énumération sont considérées de manière symétrique : le non-respect de l'une ou de l'autre génère le même type de rétroaction (asynchrone pour les allumettes : c'est lors de la phase de contrôle du contenu des boîtes d'allumettes que nous pouvons vérifier que chacune de celles-ci ne contient ni plus, ni moins d'une allumette)
- Dans d'autres situations, les deux conditions de l'énumération sont considérées de manière dissymétrique : le non-respect de la condition C2 entraîne l'arrêt immédiat de la partie (dans la phase de ramassage des sucres, quand le sujet soulève un chapeau sous lequel ne figure plus aucun sucre), alors que le non-respect de la condition C1 n'entraîne pas l'arrêt immédiat (dans la phase de contrôle, quand le sujet soulève un chapeau sous lequel figure encore un sucre)

V. EXTENSION DE LA NOTION D'ENUMERATION

Dans cette partie, nous montrons comment l'observation des difficultés rencontrées par les sujets en situations non didactiques nous conduit à proposer une extension de la notion d'énumération.

1. Une observation fondatrice

Nous nous appuyons sur la reconstitution d'une observation réalisée dans une classe de CP au mois de novembre. La situation est la suivante : le professeur a écrit au tableau une phrase. Les élèves doivent reconstituer cette phrase à partir d'un stock d'étiquettes-mots. Ils vont donc devoir sélectionner parmi l'ensemble de leurs étiquettes celles qui correspondent à des mots apparaissant dans la phrase modèle. Chaque élève dispose de son ensemble d'étiquettes stockées dans une boîte posée sur sa table.

Ce qui nous intéresse ici est la stratégie mise en œuvre par les élèves pour choisir les étiquettes qui conviennent. La phrase et le stock présentés ici ne correspondent pas à ce qui a été observé. Par contre, les gestes décrits ici sont ceux qui ont été observés en situation.

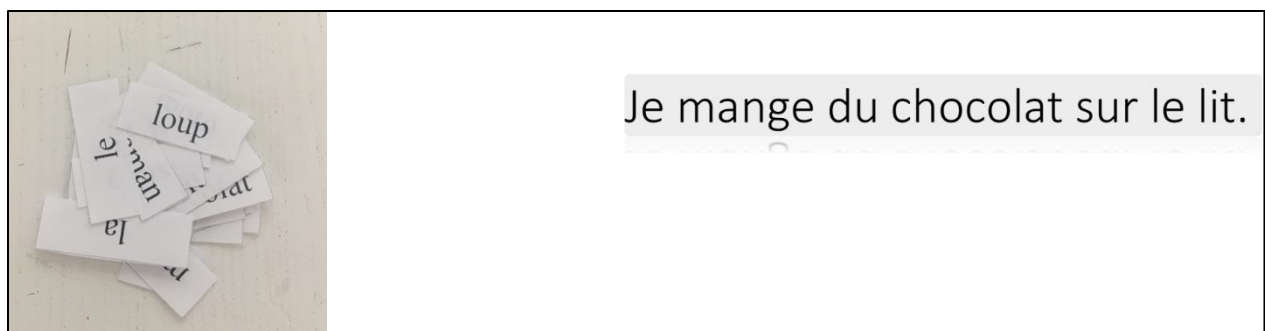


Figure 6 : Situation de la phrase (reconstitution) - stock d'étiquettes-mots et phrase modèle.

Nous observons un élève qui, chaque fois qu'il saisit une étiquette, réussit à la comparer au mot de la phrase qu'il cherche et qui pour autant ne réussit pas à reproduire la phrase dans le temps donné par le maître (20 minutes).

Décrivons comment notre sujet procède. Le sujet saisit une étiquette dans le stock (étiquette-mot « Papa » dans notre exemple), compare le mot de cette étiquette avec le mot de la phrase qu'il cherche (mot « Je » ici). Les deux mots n'étant pas les mêmes, il repose l'étiquette qu'il tenait dans sa main dans sa boîte.



Figure 7 : Situation de la phrase (reconstitution) - traitement d'un élément.

Ce sujet se retrouve ainsi à saisir les mêmes étiquettes à de nombreuses reprises, ce qui l'empêche de réaliser la tâche dans le temps imparti.

Formellement, pour trouver chaque mot de la phrase modèle, le sujet doit produire une partition de sa collection d'étiquettes en deux sous-ensembles, dont l'un est réduit à un seul élément, la seule étiquette du stock conforme au modèle. Comme chaque mot n'est présent que sur une seule étiquette, la partition est fabriquée dès lors que l'élément cherché a été trouvé. Il s'agit ici d'un tri dans lequel le critère est « le mot sur l'étiquette est-il conforme au mot modèle ? ».

Pour trouver un mot d'une phrase, la série d'actions réalisées par le sujet peut être décrite selon le même modèle que celui présenté pour les deux situations présentées précédemment.

Ici, la première collection est la collection des étiquettes-mots et la seconde collection est la collection des réponses produites dans la comparaison avec le mot de la phrase considérée. Le traitement consiste à comparer une étiquette-mot à un mot de la phrase. L'étiquette-mot est trouvée dès qu'une réponse positive à une des comparaisons est donnée.

Quand le sujet repose dans la boîte les étiquettes qu'il a déjà examinées, il peut se trouver dans la situation de réexaminer plusieurs fois les mêmes étiquettes, sans jamais saisir l'étiquette cherchée. Dans la figure suivante, les étiquettes sont représentées par des ronds, les saisies d'étiquettes et leur comparaison au modèle sont représentées par les traits issus de ces ronds et les rectangles sur lesquels pointent ces traits représentent le résultat de la comparaison.

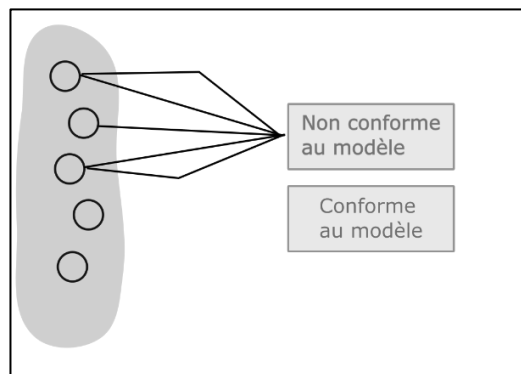


Figure 8 : Situation de la phrase (reconstitution) - modélisation de la suite des actions du sujet.

Décrivons maintenant la situation en termes d'ordre de multiplicité des traitements élémentaires (saisie et comparaison d'une étiquette au modèle). Certains éléments de la première collection ont un ordre de multiplicité supérieur à 1. La condition C2 de l'énumération n'est pas vérifiée. Si le sujet avait mis de côté les étiquettes qu'il avait saisies et qui n'étaient pas conformes au modèle, il se serait dispensé de traitements élémentaires qu'il avait déjà réalisés.

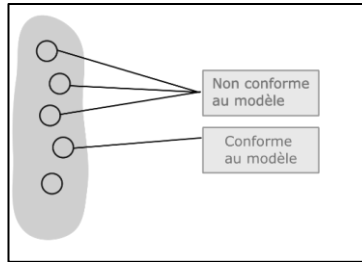


Figure 9: Situation de la phrase (reconstitution) - modélisation d'une suite d'actions optimales.

Dans cette suite d'actions, la recherche de l'étiquette conforme au modèle s'interrompt dès le quatrième essai. Chaque étiquette saisie l'a été au plus une fois. Certaines des étiquettes n'ont pas été saisies et comparées au modèle car le mot avait été préalablement trouvé.

Dans ce cas, aucun des éléments de la collection des étiquettes n'a un ordre de multiplicité supérieur à 1. La condition C2 de l'énumération est ici réalisée.

Pour trouver l'étiquette cherchée, le sujet est conduit à réaliser un tri dans lequel il peut mettre en œuvre la condition C2 de l'énumération.

2. Retour sur la situation des allumettes

Revenons maintenant à la situation des allumettes et aux données produites par Briand (2004). Nous disposons de vidéos des deux essais d'un même élève de MS, Romain.

Commençons par nous intéresser au premier de ces deux essais, essai au cours duquel il échoue.

Temps	Image extraite	Description de l'action
07,13 s		Il pose sur la table la boîte qu'il tenait dans la main gauche pendant qu'il saisit une nouvelle boîte avec sa main droite.
08,00 s		Il porte à son oreille droite la boîte qu'il tient dans sa main droite et la secoue.
08,21 s		Alors que la boîte qu'il tient dans sa main droite est toujours à côté de son oreille droite, il saisit avec sa main gauche une nouvelle boîte.

Figure 10 : Situation des allumettes - extraits de la vidéo du premier essai de Romain.

Comme l'élève de CP observé dans la situation de reproduction de la phrase, Romain saisit plusieurs fois les mêmes éléments (des boîtes d'allumettes ici). Il secoue pour vérifier que celles-ci sont vides. Quand le secouage ne produit pas de bruit, il insère une allumette. Dans tous les cas, il repose la boîte d'allumettes sur la table, à un endroit indifférencié.

Romain ne construit pas deux ensembles qui permettraient de séparer les éléments traités des éléments non encore traités. Sa difficulté tient à l'absence de mise en œuvre d'un tri. (Rivière, 2017, p.341)

Outre le fait que l'organisation mise en œuvre ne lui permet pas de réussir, celle-ci ne minimise pas le nombre de saisies de boîtes. Si le traitement considéré est la saisie d'une boîte, la condition C2 de l'énumération n'est pas vérifiée.

Examinons maintenant comment Romain fait évoluer sa stratégie pour son second essai.




<i>Temps</i>	<i>Image extraite</i>	<i>Description de l'action</i>
26,12 s		<i>Il a maintenant une allumette dans sa main droite. Il attrape avec sa main gauche une boîte.</i>
27,03 s		<i>Il met avec sa main droite l'allumette dans l'orifice latéral de la boîte qu'il tient dans sa main gauche.</i>
[...]		[...]
32,23 s		<i>Il pose la boîte qu'il tenait dans sa main gauche juste à côté des boîtes qu'il avait posées les unes à côté des autres.</i>

Figure 11 : Situation des allumettes - extraits de la vidéo du second essai de Romain.

Romain a décidé de placer près de lui les boîtes dans lesquelles il a mis une allumette. D'autres boîtes restent au centre de la table. Il a donc fait structuré sa collection de boîtes d'allumettes en deux sous-ensembles disjoints : les boîtes qu'il a déjà traitées et les boîtes qu'il n'a pas encore traitées.



Figure 12 : Situation des allumettes - agrandissement de la photo 1 ; zoom sur l'organisation mise en œuvre – essai 2.

Si le traitement considéré est la saisie d'une boîte, Romain met en œuvre une stratégie qui, à partir d'un certain moment, respecte la condition C2 de l'énumération. Par ailleurs, comme cet essai est gagnant, nous pouvons affirmer que la condition C1 est elle aussi respectée.

3. Stratégies de tri

Nous allons maintenant exhiber les modalisations de tri que nous avons produites dans notre thèse. Pour cela, nous nous appuyons sur la situation des jetons marqués. Disposant d'une collection de jetons dont certains ont une gommette collée sur une des faces, il s'agit de trier les jetons marqués. Formellement, il s'agit de construire une partition de la collection en deux sous-ensembles, les jetons qui ont une gommette et ceux qui n'en n'ont pas.

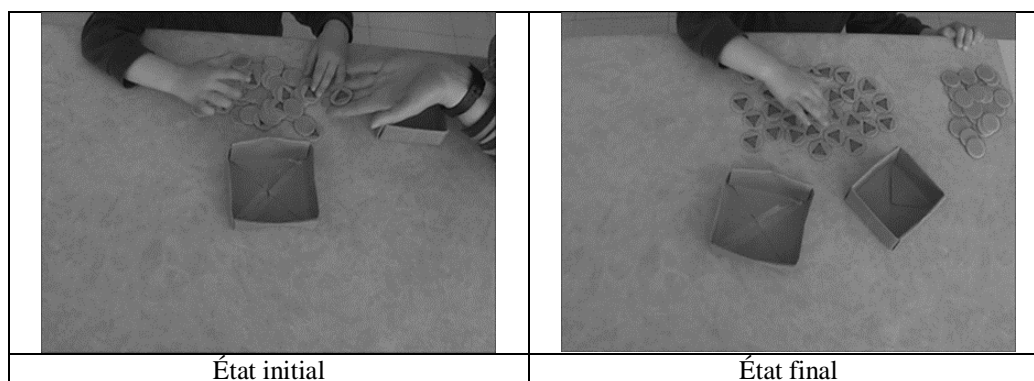


Figure 13: Situation des jetons marqués - description en termes d'états.

L'étude des données (Riviere, 2017) a permis d'exhiber plusieurs stratégies mises en œuvre par les sujets :

- La stratégie de tri systématique : cette stratégie consiste à saisir et examiner un à un chacun des jetons marqués et à les placer dans un des deux tas constitués : le tas des jetons marqués et le tas des jetons non marqués.



Figure 14 : Situation des jetons marqués - sujet 1 (PS).

- La stratégie de tri par extraction : cette stratégie consiste à extraire du tas de jetons placés devant le sujet ceux qui ont une gommette sur la face visible (et donc à laisser là où ils se trouvent les jetons sans gommette sur la face visible). Le tas des jetons marqués est ainsi constitué et il se remplit par des extractions successives du tas principal. Dans cette situation, cette stratégie est rarement gagnante.



Figure 15 : Situation des jetons marqués - sujet 3 (PS).

Dans le cadre de la mise en œuvre d'un tri systématique, chaque jeton est saisi et examiné une fois et une seule. L'ordre de multiplicité de chaque élément de l'ensemble est 1. Les conditions C1 et C2 sont alors toutes les deux respectées.

Dans le cadre de la mise en œuvre d'un tri par extraction, nous avons montré que certains jetons pouvaient être examinés plusieurs fois : une fois extraits tous les jetons qui avaient une gommette sur la face visible du jeton, le sujet est conduit à saisir les jetons qui restent, examiner la face non visible et reposer le jeton dans le tas dans lequel il a été saisi s'il est sans gommette. Ce sont ces jetons que le sujet est susceptible de saisir plusieurs fois. Dans ce cas, la condition C2 n'est pas vérifiée. Par ailleurs, le sujet peut être conduit à ne pas extraire de ce tas tous les jetons ayant une gommette (puisque'il ne sait pas quels sont dans ce cas les jetons qu'il a déjà examinés et ceux qu'il n'a pas encore examinés). Dans ce cas, la condition C1 peut donc ne pas être vérifiée.

4. Nouvelle définition de l'énumération

Au-delà du fait qu'une action matérielle doit être réalisée dans la situation des boîtes d'allumettes ou des sucres, les difficultés rencontrées et les stratégies mises en œuvre dans chacune des situations que nous venons d'évoquer se ressemblent. Certains éléments sont traités plusieurs fois alors d'autres ne sont pas traités.

La volonté d'unifier la description de ces difficultés fait émerger la nécessité d'une nouvelle définition de l'énumération, qui permette d'unifier conceptuellement des situations proches.

Pour réussir, dans la situation des sucres ou dans la situation des allumettes, le sujet doit réaliser simultanément les deux conditions de l'énumération pour chaque élément. Nous dirons dans ces cas que l'énumération réalisée est forte.

Dans les situations de tri, il n'est pas nécessaire de mettre en œuvre une énumération forte pour réussir. Nous avons observé qu'en réalisant des extractions successives, des sujets finissent par examiner et éventuellement traiter tous les éléments de la collection. Ils n'ont alors oublié aucun des éléments de celle-ci. La condition C1 de l'énumération est vérifiée. Pour autant, certains éléments sont pu être saisis et traités plus d'une fois (un jeton sans gommelette reposé dans le tas de départ). La condition C2 de l'énumération n'est alors pas vérifiée. Nous sommes dans une forme affaiblie d'énumération. Nous dirons qu'une énumération faible a été réalisée.

Nous introduisons donc des variations dans la notion d'énumération en dissociant la réalisation effective de chacune des conditions de l'énumération.

Revenons sur la notion d'énumération faible. Nous la définissons comme la réalisation d'une seule des deux conditions de l'énumération.

Dans l'exemple que nous avons choisi pour illustrer cette forme d'énumération, seule la condition C1 était vérifiée. Considérant un traitement, l'ordre de multiplicité par rapport à ce traitement de certains éléments pouvait donc être supérieure à 1. Nous choisissons de qualifier cette énumération de faible +.

De la même manière, des énumérations faibles pourraient être réalisées en ne vérifiant que C2. Du point de vue d'un traitement, l'ordre de multiplicité des éléments serait alors au plus égal à 1. Nous choisissons de qualifier cette énumération de faible -.

5. Analyse des situations en appui sur cette nouvelle définition

La nouvelle définition de l'énumération nous permet de porter un nouveau regard sur les situations sur lesquelles nous nous sommes appuyés.

Dans le jeu des sucres, pour gagner, le sujet doit mettre en œuvre une énumération forte de la collection des points. Dans ce jeu, le soulèvement du chapeau et le ramassage du sucre sont des gestes qui peuvent être considérés de manière solidaire. En effet, le ramassage d'un sucre est nécessairement accompagné d'un soulèvement de chapeau et tout soulèvement de chapeau sans ramassage de sucre interrompt la partie.

Quand un sujet gagne la partie, il a énuméré fortement la collection de points, la collection de chapeau ou la collection de sucres.

Dans le jeu des allumettes, pour gagner, le sujet doit mettre en œuvre une énumération forte de la collection des boîtes. Cette énumération forte porte ici sur l'insertion d'une allumette. Le traitement élémentaire considéré (l'insertion d'une allumette dans la boîte) est toujours accompagné de la saisie d'une boîte (dans le cas déplaçable). Par contre, la réciproque est fautive. Briand montre que, dans son second essai, Romain saisit parfois des boîtes sans pour autant insérer d'allumettes dans celles-ci. Les deux gestes (saisie d'une boîte et insertion d'une allumette) ne peuvent pas être considérés de manière solidaire.

Lors de son second essai, Romain réalise une énumération forte si le traitement considéré est l'insertion d'une allumette dans une boîte ; il réalise une énumération faible + si le traitement considéré est la saisie d'une boîte. C'est ce que Briand décrit dans l'étude du secouage (1999). Les situations de tri ne sont pas des situations d'énumération. Pour autant les sujets mettent en œuvre des énumérations fortes ou faibles pour trier les éléments d'une collection. Ces situations de tri permettent le traitement d'un élément sans sa saisie. En effet, quand un jeton a une gommelette apparente sur sa face visible, il n'est pas nécessaire de le soulever pour savoir qu'il est marqué. Il n'est donc pas toujours possible pour l'observateur de se prononcer sur la réalisation de la condition C1.

La réalisation d'une action matérielle sur chaque élément de la collection est donc la garantie de l'observabilité de l'énumération effective.

VI. CONCLUSION

A ce stade de notre travail, nous disposons d'une définition de l'énumération qui permet de rendre compte des difficultés et des stratégies mises en œuvre par les sujets dans des situations beaucoup plus variées et nombreuses que les seules situations d'énumération forte, objet initial de notre étude.

Les variations que nous avons introduites en étendant la définition de l'énumération nous permettent de mieux comprendre la continuité des connaissances d'énumération.

Des connaissances d'énumération faible sont en jeu dans de nombreuses situations. Ces situations ne relèvent pas toutes de contexte mathématique. Nous en avons exhibé quelques-unes dans ce texte. Par ailleurs, le travail d'indentification de situations d'énumération faible – reste à conduire.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- BROUSSEAU, G. (1990). Le contrat didactique : le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(2/3), 309–336.
- BRIAND, J. (1993). L'énumération dans le mesurage des collections. Thèse de Doctorat, *Université de Bordeaux I, Didactique des mathématiques, Bordeaux*.
- BRIAND, J. (1999). Contribution à la réorganisation des savoirs prénumériques et numériques. Étude et réalisation d'une situation d'enseignement de l'énumération dans le domaine prénumérique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(1), 41-76.
- BRIAND, J., LOUBET, M. & SALIN, M.-H. (2004). Apprentissages mathématiques en maternelle. *Paris : Hatier*.
- BROUSSEAU, G. (1984). L'enseignement de l'énumération. *Congrès C.I.A.E.M., Adélaïde*.
- BROUSSEAU, G. (1997). La théorie des situations didactiques. *Cours donné lors de l'attribution du titre de docteur honoris causa de l'Université de Montréal*, <http://guy-brousseau.com/1694/la-theorie-des-situations-didactiques-le-cours-de-montreal-1997/>
- RIVIERE, O. (2017). Continuité des connaissances d'énumération et conséquences sur les savoirs : mieux comprendre les difficultés des élèves confrontés à des problèmes d'énumération. Thèse de doctorat, *Université Clermont Auvergne, Clermont-Ferrand*, <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01754817>

QUELS USAGES DU CONCEPT DE MODELE EPISTEMOLOGIQUE DE REFERENCE POUR LA RECHERCHE ? ET POUR LA FORMATION ?

Maggy **SCHNEIDER**

Université de Liège

mschneider@uliege.be

Résumé

Deux usages contrastés du concept de Modèle Epistémologique de Référence (MER) permettent de mettre en évidence certaines caractéristiques qui font du MER une phénoménotechnique, en particulier pour permettre de dénaturiser un Modèle Epistémologique Dominant. Cette phénoménotechnique, déjà en germe dans la méthodologie des ingénieries, est nécessaire pour relativiser les résultats d'une recherche et doit se traduire par l'explicitation du MER envisagé par le chercheur, en ce compris son choix de valeurs. Cette démarche est difficile en raison des institutions « cachées » dont l'influence est d'autant plus prégnante qu'elle est souterraine, comme l'institution « mathématique » et l'institution « idéologies pédagogiques ». La question des ingrédients du MER en lien avec ses fonctions est abordée ici, entre autres, à travers deux MER génériques supposés prendre en compte ces deux exemples d'institutions cachées : un double niveau praxéologique : « modélisation » et « déduction » et un « transfert sous contrat » en matière de résolution de problèmes envisagée à travers une catégorisation de ceux-ci et d'entraînement à des méthodes spécifiques. Enfin, le rôle du MER est évoqué en tant qu'outil de formation des enseignants dans une perspective de dénaturalisation, entreprise délicate s'il en est.

Mots clés

Modèle Epistémologique de Référence, Modèle Epistémologique Dominant, Institutions cachées, Institution « mathématique », Institution « idéologies pédagogiques », Praxéologies « modélisation » et « déduction », « transfert sous contrat »

I. DE DEUX USAGES CONTRASTES DU CONCEPT DE MER A LA SYNERGIE MER-MED

A l'occasion du 4^{ème} colloque de 2013 sur la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD), je me suis interrogée sur le concept de Modèle Epistémologique de Référence (MER) à partir de deux usages contrastés de ce concept. En guise d'introduction, je repartirai ici de ces deux exemples analysés dans Schneider (2017) pour mieux faire apparaître l'intérêt d'une synergie entre le MER et ce qu'on appelle le Modèle Epistémologique Dominant (MED).

Le premier exemple d'usage du concept de MER concerne le théorème de Lagrange tel qu'enseigné dans certaines universités belges, dans une filière mathématique et une filière économique (Xhonneux, 2011 ; Xhonneux, S. & Henry, 2012). Ce MER est globalement

constitué de cinq familles de tâches autour desquelles sont définies cinq Organisations Mathématiques (OM) locales, trois qualifiées de « procédurales » en référence à la théorie de Sfard, (1991), par exemple « Chercher des candidats à être extremum d'un problème d'optimisation sous contraintes d'égalité » et deux autres familles de tâches appelées « structurales » telles que « Construire les éléments théoriques relatifs au théorème de Lagrange ».

Parmi plusieurs caractéristiques de ce travail reprises dans mon analyse (Schneider, 2017), je retiens les deux suivantes :

- Ce MER est construit autour d'un théorème plutôt que d'être pensé au niveau d'un domaine, ici celui de l'optimisation sous contraintes. Par exemple, le chercheur en exclut la méthode des multiplicateurs de Carathéodory, pourtant utilisée dans un cours observé, parce qu'il la situe en dehors du thème « théorème de Lagrange ». En outre, le choix du théorème utilisé pour démontrer le théorème de Lagrange, par exemple le théorème des fonctions implicites, n'y est pas analysé à la lumière d'une économie mathématique plus globale.
- Ce MER se construit comme une compilation progressive des diverses observations de terrain réalisées et est ainsi « fabriqué empiriquement à partir des praxéologies à enseigner et des textes “savants” comme les articles de mathématiques, les manuels ou les supports de cours universitaires » (Xhonneux, 2011). Ce modèle n'est donc confronté à aucun autre.

Le second usage du concept MER que j'évoquerai ici concerne l'algèbre élémentaire et s'est constitué progressivement sur base de travaux français et espagnols structurés par la TAD ou la théorie de la transposition didactique qui la préfigure (Chevallard, 1985 ; Gascon, 1993). Ce MER est en rupture avec le modèle implicite qui prévalait dans l'enseignement de l'algèbre (et qui prévaut toujours en Belgique francophone du moins). Ce dernier, appelé le « modèle de l'arithmétique généralisée », se caractérise, d'une part, par la « désarticulation » du corpus de problèmes en résolution d'équations ou d'inéquations, de manipulation d'identités et de fonctions élémentaires, d'application de formules et de résolution de problèmes « concrets » et, d'autre part, conduit à une interprétation des difficultés d'acquisition du langage algébrique trop exclusivement référée au cadre arithmétique, comme la modification du sens des signes $+$, $=$, $-$, x , ... d'un langage à l'autre.

Dès les premiers écrits du début des années 80, l'idée de l'algèbre comme outil de modélisation fut mise en avant et cela, de manière récurrente. Gascon (1993) l'a développée à partir d'une analyse épistémologique de l'algèbre basée, non pas comme ce qui se fait d'habitude sur la genèse de l'algèbre dans l'école d'Alexandrie où des « valeurs indéterminées » sont représentées par des lettres à la place des nombres, mais sur la « nouvelle algèbre » de Viète ainsi que sur la « méthode » de Descartes qui permettent de rendre « analytique » le patron A/S propre aux problèmes classiques de la géométrie élémentaire. Ainsi, les paramètres permettent de faire apparaître la structure des problèmes et de produire de nouvelles connaissances sur le système modélisé, relatives par exemple aux conditions d'existence des solutions.

De ces analyses a résulté un modèle épistémologique de référence relatif à l'algèbre et qui s'est précisé peu à peu vers la formulation donnée par Bosch & Gascon (2002) : « A la question *Qu'est-ce que l'algèbre élémentaire ?*, nous ne répondons pas en termes d'OM (Organisations Mathématiques), mais en termes de processus de modélisation d'OM par d'autres OM » (p. 36). Comme ces chercheurs le développent, les OM à modéliser algébriquement sont premières et diversifiées : par exemple, les problèmes de constructions géométriques, les problèmes de « dénombrement simple », ... En outre, c'est le processus de modélisation lui-même qui est central, avant de laisser place à des OM « totalement algébrisées » où l'outil algébrique est étudié en tant qu'objet. » (p.36).

On voit, dans ce deuxième exemple, se constituer un MER à rebours d'un autre modèle épistémologique en vigueur dans les pratiques enseignantes et que l'on va nommer le modèle épistémologique dominant (MED). Contrastant avec le premier usage du concept de MER à propos du théorème de Lagrange, le MER et le MED relatifs à l'algèbre élémentaire évoqués ci-dessus se situent à une échelle curriculaire très vaste. Qui plus est, si ce MED rend compte de l'empirie, ce MER relève, lui, d'un pas de côté épistémologique qui permet de faire voir et d'analyser le MED. En effet, ce modèle épistémologique de référence relatif à l'algèbre a servi à mieux comprendre les pratiques empiriques liées à l'arithmétique généralisée. En particulier il a fait apparaître que la séparation excessive entre différents secteurs de l'algèbre: équations, formules, fonctions, ... est due à l'abandon des paramètres dans l'algèbre enseignée.

C'est la posture de dénaturalisation typique de la TAD qui est à l'origine du concept de MER. Voici en effet en quels termes Gascon (1993) caractérise l'ouverture de la didactique sur le savoir mathématique : « On peut considérer qu'il existe, dans toute institution didactique où l'on enseigne des mathématiques, des modèles implicites des différents domaines du savoir mathématique enseigné, d'où émerge par extension un modèle implicite de la nature même du savoir mathématique » (p.43). Ce modèle agit comme un système de conditions et de contraintes sur les pratiques, en « permettant l'existence de certaines d'entre elles et en empêchant que d'autres puissent apparaître » (p.44). Et Gascon poursuit en soulignant la nécessité que le chercheur dispose d'un « modèle alternatif du domaine d'activité mathématique enseigné qui lui serve de cadre de référence pour interpréter le modèle dominant dans l'institution qu'il étudie » (p.44) et, ajouterais-je volontiers, pour prendre conscience de son propre MER qui lui inspire son analyse didactique et ses propositions.

C'est donc, j'insiste, parce qu'il découle d'un pas de côté épistémologique fait par rapport aux pratiques empiriques qu'un MER permet de dénaturaliser des modèles implicites devenus transparents. Dans ces conditions, il peut fonctionner comme une véritable phénoménotechnique pour la recherche.

II. UNE PHENOMENOTECHNIQUE POUR LA RECHERCHE DEJA DANS LES INGENIERIES DIDACTIQUES

Je m'attarde ici sur le terme « phénoménotechnique », utilisé dès les origines de ce qu'on a appelé la "didactique fondamentale" au sein de l'école française, en particulier par référence aux ingénieries didactiques à propos desquelles a été fait un parallèle avec la phénoménotechnique de Bachelard. En 1982, Chevillard posait effectivement ainsi la question des rapports entre la recherche en didactique et l'action subséquente sur le système d'enseignement : non pas en termes d'innovation ou de recherche-action mais en termes de mise à l'épreuve de constructions théoriques élaborées par les chercheurs dans des réalisations didactiques qui constituent surtout, en tant que méthodologies de recherche, « le lieu de cette étape cruciale de l'activité scientifique à laquelle Bachelard a donné le nom parodique de *phénoménotechnique* » (p.55).

Le substantif « phénoménotechnique » a été introduit par Bachelard (1949) pour exprimer, en le disant plus que brièvement, que les « phénomènes » proprement scientifiques ne peuvent être de simples « faits » venant de l'observation mais des « effets » d'une théorie outillée de techniques permettant de la mettre à l'épreuve.

l'ingénierie didactique est une phénoménotechnique. C'est en effet une méthodologie de recherche susceptible de mettre à jour des « phénomènes » didactiques. Comme telle, elle est composée de différentes phases parmi lesquelles les analyses dites préalables dont une « analyse épistémologique des contenus visés par l'enseignement », une « analyse de l'enseignement usuel et de ses effets » et celle « du champ de contraintes dans lequel va se situer la réalisation didactique effective » (Artigue, 1990). On voit donc, déjà dans ce contexte des ingénieries, la nécessité d'explicitier tout autant le modèle épistémologique visé que celui en vigueur dans l'institution où se déroulera l'ingénierie ainsi que les contraintes que ce dernier induit. Il y va en effet d'une identification et de la formulation des hypothèses que la recherche met effectivement à l'épreuve, ce qui conditionne la qualité des analyses a priori et a posteriori propres à la méthode d'ingénierie pour distinguer ce qui relève du nécessaire et du contingent, surtout lorsque des distorsions ont été observées entre ce qui était prévu et ce qui s'est passé dans les classes.

Mais c'est une réelle difficulté que d'arriver à VOIR vraiment ce qu'un sentiment de naturalité nous a rendu transparent à telle enseigne que les analyses qualifiées de préalables dans la méthode d'ingénierie ne peuvent être aussi préalables qu'on le souhaiterait. C'est ainsi que, comme l'a précisé Gascon (2016) : « [...] dans la pratique effective de la recherche en didactique, la construction du MER et la formulation progressive du problème de la recherche, ainsi que la description du *modèle épistémologique dominant* (MED) dans l'institution, avancent de façon simultanée, en parallèle [...]. » (p.94).

Mais, au-delà des recherches dont la méthodologie majeure est l'ingénierie didactique, la formulation de ces modèles reste essentielle dans toute recherche car, je cite toujours Gascon, « La formulation d'un problème didactique suppose toujours de la part du didacticien une interprétation (plus ou moins explicite), c'est-à-dire un modèle épistémologique, qui peut être très imprécis, du domaine mathématique en jeu. Dans la TAD nous postulons que rendre explicite ce modèle, que nous nommerons *modèle épistémologique de référence* (MER), est nécessaire pour pouvoir formuler les problèmes didactiques avec précision et pour analyser et interpréter la raison d'être officielle du domaine mathématique en question. » (p.94).

J'illustrerai ce propos à partir d'une recherche concernant les obstacles épistémologiques, en l'occurrence ceux liés au concept de fonction. A propos de ce concept, Sierpinska (1992) répertorie en effet un ensemble d'obstacles épistémologiques qu'elle considère comme des schémas de pensée inconscients. Parmi ceux-ci, l'obstacle qui consiste à « penser en termes d'équations et d'inconnues » plutôt que de « penser en termes de quantités variables et constantes », le franchissement de l'obstacle supposant de distinguer ces deux modes de pensée. L'auteure s'en explique en rapprochant les difficultés éprouvées par des élèves de 16 ans à passer d'un mode à l'autre et l'histoire des mathématiques dans laquelle, au 18^e siècle, la différence entre ces deux modes de pensée était considérée comme une ligne de démarcation entre deux domaines distincts des mathématiques : Algèbre et Analyse.

Il me semble éclairant de questionner ici le caractère épistémologique de cet obstacle à la lumière d'un certain MER car, avec Krysinska, nous avons montré qu'il est possible de traiter simultanément les deux modes de pensée en question tout en les différenciant, sur de mêmes objets que sont les suites de nombres figurés, avec des élèves beaucoup plus jeunes (Krysinska & Schneider, 2010). Mais le MER à l'œuvre, subordonnant les acquisitions algébriques à la modélisation fonctionnelle, est alors tout à fait différent de celui sous-jacent au cursus des élèves observés par Sierpinska qui précise, elle-même d'ailleurs, que les élèves observés avaient l'expérience scolaire d'un univers où prime la distinction entre quantités connues et inconnues avant d'apprendre les fonctions.

Cet exemple montre l'intérêt de considérer l'influence inéluctable qu'un MER ou un autre - fût-il implicite - peut avoir entre autres sur l'analyse didactique des obstacles d'apprentissage et, si je me suis permise de relire une recherche ancienne à la lumière de développements

théoriques plus récents, c'est qu'il m'est arrivé de voir par la suite bien d'autres exemples de recherches où l'expression « obstacle épistémologique » est utilisée pour qualifier des erreurs récurrentes au sein d'une transposition didactique sans que l'on ne s'interroge sur l'impact du MER qui lui est sous-jacent ni que l'on ait contrôlé qu'il existe des manifestations du même obstacle dans un enseignement, « usuel » par exemple, étranger au dispositif de recherche mis en place.

De manière globale, il me semble que tout résultat de recherche doit être situé à la lumière à la fois du MED qui aurait pu jouer un rôle dans la récolte des observables et leur analyse par le chercheur mais aussi du MER que ce dernier a, lui, en tête en raison de son vécu, de sa formation et même de ses valeurs ainsi que des circonstances dans lesquelles il mène sa recherche. En particulier et dans cet esprit, j'avais insisté à propos des ingénieries (Schneider, 2011) sur la mise à plat des présupposés du chercheur sur ce que sont les mathématiques, leur apprentissage et leur enseignement. C'est en effet au prix d'une explicitation la plus complète possible du couple MER-MED que le chercheur et ses interlocuteurs peuvent contextualiser et relativiser les résultats d'une recherche quel que soit son objet. Cela en acceptant des modalités variées de description du MER et je pense, en particulier, aux Espaces de Travail Mathématique (ETM) et paradigmes associés de l'équipe parisienne (voir e.a. Kuzniak, 2011).

III. LA DENATURALISATION ET LES INSTITUTIONS « CACHEES »

La difficulté, bien réelle de décrire le MED et le MER, est aussi celle d'identifier la marge de liberté dans un espace de contraintes fortement imprégné par ce que nous avons appelé avec Job, les institutions « cachées » (Job & Schneider, 2017) dont l'influence est bien réelle sur les institutions didactiques mais trop souterraine que pour être facilement débusquée et décodée.

Parmi elles, il y a d'abord l'institution « mathématique » (Job & Schneider, 2010). On peut observer son influence explicite dans la réforme dite des mathématiques modernes. J'y reviendrai plus loin pour m'attarder d'abord sur les discours heuristiques au sens de Lakatos qui peinent à trouver leur place dans l'enseignement secondaire, aujourd'hui encore, en raison d'une influence souterraine mais très prégnante de cette même institution. Pour le comprendre, il convient de retourner aux sources mêmes de la théorie de la transposition didactique de Chevallard (1991) et à certains processus que Verret situe au principe même d'une « transmission scolaire bureaucratique » : en particulier, la dépersonnalisation du savoir et sa désyncrétisation en « savoirs partiels pouvant s'exprimer dans un langage autonome » (p. 59), laquelle s'accompagne de ce que Chevallard (1999) appelle une « déconnexion franche du cœur théorico-technologique de l'œuvre d'avec ses applications » (p.243). Et ces phénomènes sont incompatibles avec les discours heuristiques qui ont le plus souvent une nature syncrétique juxtaposant notamment des raisonnements hybrides, l'autonomie des savoirs dont il est question ci-dessus ne pouvant voir le jour qu'au terme de tels discours.

Ceci n'est pas sans lien avec certaines positions épistémologiques des mathématiciens professionnels dont le « platonisme mathématique » qui attribue aux objets mathématiques une existence indépendante de nos activités de pensée, ainsi que l'ont développé Job (2011) à propos du concept de limite et Dunia Mwati (2013) pour certains concepts d'algèbre linéaire, rendant ainsi très fragile, d'un point de vue écologique, tout discours de type heuristique.

J'ai pu observer cette influence de l'institution « mathématique » à partir de réactions de mathématiciens qui effectuent des « visites de stages » dans le cadre de la formation initiale

de futurs professeurs du secondaire. En particulier, l'insistance est portée, dans leurs remarques, sur le choix de la « bonne » définition des concepts mathématiques enseignés, laquelle se doit d'être introduite le plus tôt possible. On peut aussi prêter à cette institution « mathématique » le phénomène des praxéologies « à trous » observé par Rouy (2007) dans l'enseignement secondaire en analyse : les praxéologies sont inspirées fortement des discours mathématiques souvent désyncrétisés de l'université dont on gomme les aspects jugés plus délicats pour les élèves du secondaire, en particulier, dans le cas de l'analyse mathématique, tout ce qui concerne la structure topologique des réels.

On peut rapprocher de cette analyse les travaux de Barquero et Florensa (2019) à propos des contraintes qui pèsent sur le cours de mathématiques dans certaines filières universitaires en Espagne et qui proviennent d'une épistémologie et d'une pédagogie dominantes à l'université. L'épistémologie en question, qualifiée d'« applicationnisme », se caractérise, entre autres, par la purification épistémologique qui tend à enseigner les modèles mathématiques indépendamment des systèmes extra-mathématiques auxquels ils pourraient s'appliquer, en organisant les contenus de la même manière pour toutes les filières dans la logique des modèles et en reléguant les applications spécifiques en fin de parcours.

Une autre institution « cachée » est celle des idéologies pédagogiques. Celles-ci ne sont pas un mal en soi et certaines sont étayées de véritables recherches. Mais, sur le terrain, elles sont formulées sans nuances et de manière très apologétique. Il ne se passe pas de jours sans que les media nous interpellent sur de nouvelles méthodes pédagogiques dont on vante l'efficacité « prouvée » alors que, comme l'ont souligné Bosch & Gascon (2002), plusieurs d'entre elles se caractérisent, entre autres, « par le fait d'attribuer une grande importance à quelques-uns des moments de l'étude au détriment de tous les autres - qui sont alors généralement sous la seule responsabilité de l'élève ou de l'étudiant » (p.33). Et c'est de manière assez significative que ces chercheurs utilisent le suffixe « iste », porteur de l'idée d'assujettissement à une institution, pour désigner les organisations didactiques (OD, p.31) de leur typologie : ils parlent ainsi, par exemple, d'OD théoriciens, empiristes ou constructivistes.

Plusieurs réformes pédagogiques fonctionnent sur ce mode idéologique, à commencer par la réforme dite des compétences porteuse de finalités généreuses et ambitieuses formulées par des slogans tels que « apprendre à apprendre tout au long de la vie » ou « devenir citoyen responsable » mais porteuse aussi de certains leurres. Si l'on ne peut que souscrire à ces intentions, il faut malgré tout se prémunir des illusions dont elles sont porteuses et le danger est d'autant plus grand qu'une certaine culture mathématique s'est perdue en cours de route depuis la réforme des mathématiques modernes et que peu d'enseignants de mathématiques, en Belgique francophone du moins, sont aguerris aujourd'hui à la résolution de problèmes mathématiques. On peut supposer là l'effet d'un curriculum qui peine à se reconstruire en évitant le monumentalisme après la réforme des mathématiques modernes et donc craindre un renforcement des influences exercées par les deux institutions cachées mentionnées précédemment : l'institution mathématique et celle des idéologies pédagogiques.

IV. DES FONCTIONS ET INGRÉDIENTS D'UN MER À L'ARTICULATION DE DEUX MER GÉNÉRIQUES

On peut s'interroger sur le choix des ingrédients au principe de la formulation d'un MER en lien avec l'une de ses fonctions sachant que, comme le précise et l'illustre Gascon (2016), la fonction d'un MER n'est pas uniquement de « redéfinir un domaine mathématique » et de

décrire le MED. Un MER est une hypothèse scientifique (une conjecture) et, en tant que telle, représente une tentative de réponse à une question mathématique-didactique sur la structure et la dynamique du domaine et sur ses rapports avec les autres domaines » (p.94).

Ce type de conjecture peut s'inscrire dans le projet d'installation du nouveau paradigme de *questionnement du monde* (Chevallard, 2009b) où ce sont les questions qui dictent les savoirs à construire a contrario du paradigme de visite des œuvres, ainsi que l'ont développé Barquero et Florensa (2019) lors de ce séminaire en novembre dernier. Il s'agit alors d'étudier les contraintes empêchant la mise en œuvre de ce paradigme en montrant la nécessité de nouvelles infrastructures épistémologico-didactiques pour briser, par exemple, la rigidité de la structure classique dans l'enseignement universitaire « théorie - problèmes - examen ». Mais il s'agit aussi de créer les conditions qui favorisent ce paradigme au moyen de Parcours d'Etude et de Recherche (Chevallard, 2009a), notés PER.

Plusieurs de ces PER concernent les cours de mathématiques dits « de service » dans l'enseignement universitaire, c'est-à-dire destinés à des étudiants pour lesquels cette discipline sert surtout à les outiller pour résoudre des problèmes issus d'autres disciplines. Le choix est alors de construire des PER basés sur des couples (Q, R) où des savoirs mathématiques participent aux réponses R de questions Q identifiées comme objets dignes d'étude par les institutions représentatives de la spécialité choisie et qui sont des *Questions à Fort Pouvoir Générateur d'Etude* (QFPGE). Le MER repose donc en partie du moins, dans ces exemples, sur des raisons d'être qui proviennent de systèmes extra-mathématiques supposant une modélisation mathématique. Les dispositifs se situent alors au carrefour de plusieurs institutions didactiques mais aussi professionnelles. Un autre cas de figure se présente, notent Barquero et Florensa (Ib.), lorsque l'objectif est de reconstruire des praxéologies du cursus scolaire à partir de « vraies » questions, si possible des QFPGE. Par exemple, afin de corriger une déconnexion entre la proportionnalité, l'algèbre et les autres relations fonctionnelles dans l'enseignement secondaire, García et al. (2006) construisent un PER autour de la question *Quel plan d'épargne est le meilleur pour le voyage de fin d'études?* Parmi les contraintes qui pèsent sur ce PER, les chercheurs soulignent, en substance, l'impossibilité de développer une activité véritable de modélisation parce que la résolution des problèmes proposés est toujours subordonnée à la construction des notions qui structurent le curriculum.

C'est pourtant dans ce dernier cas de figure que se situent les recherches que j'ai menées et dirigées pour des raisons tout simplement contextuelles. En effet j'ai essentiellement travaillé sur des questions didactiques concernant l'enseignement secondaire avec des élèves qui, pour la plupart, n'avaient aucune idée d'une quelconque orientation future. Ces circonstances n'empêchent pas de faire vivre les mathématiques du programme en jouant sur des QFPGE mais il faut sans doute alors :

- miser aussi sur la modélisation intra-mathématique ;
- panacher les systèmes extra-mathématiques convoqués pour mettre en évidence la polyvalence des modèles mathématiques, même si l'un de ces systèmes peut jouer un rôle privilégié, comme la cinématique à propos de l'analyse ;
- travailler à une échelle curriculaire en articulant deux types de MER génériques supposés prendre en compte les institutions « cachées » que j'ai évoquées précédemment et qui me semblent avoir été à l'origine de lames de fond sur l'évolution de l'enseignement des mathématiques. Je vais m'en expliquer sur deux exemples en commençant par un MER générique destiné à corriger les illusions en matière de résolution de problèmes qu'a véhiculée l'idéologie des compétences.

1. Un MER générique pour gérer les idéologies liées à la résolution de problèmes

Un premier exemple, qui date un peu, concerne un enseignement des transformations du plan sur lesquelles j'avais travaillé, de 1985 à 1995, avec une dizaine d'enseignants du secondaire (Cojerem, 1995a, 1995b). A cette époque, l'enseignement de la géométrie au collège et au début du Lycée était dans un entre-deux : d'un côté, la réforme des mathématiques modernes faisait la part belle aux groupes de transformations supposés offrir un cadre plus rigoureux pour l'enseignement de la géométrie, en particulier par des preuves basées sur les invariants ; de l'autre côté, une contre-réforme dans laquelle on avait renoncé à ces preuves jugées trop difficiles tout en maintenant les transformations enseignées de manière très monumentaliste et en se cantonnant, la plupart du temps, à des activités de dessin. Avec ce groupe, nous avons alors travaillé non seulement à redorer le blason des cas d'égalité de triangles encore perçus comme « ringards » mais surtout à donner des raisons d'être aux transformations dans le contexte des constructions géométriques. Pour les résoudre, les élèves étaient formés à une méthode spécifique dite des deux lieux telle qu'explicitée et illustrée par Pedersen et Polya. Ils y étaient entraînés régulièrement au fur et à mesure de l'enseignement des diverses transformations.

L'apprentissage débute alors par la construction d'un triangle ABC dont on connaît les longueurs des côtés et cela avec une méthode qui dépasse le tâtonnement : on place deux sommets A et B et on obtient le 3^e C à l'intersection de deux cercles de centres respectifs A et B et dont les rayons égalent deux côtés du triangle. La méthode s'énonce ainsi : « *D'abord ramener le problème à la construction d'un seul point. Puis diviser la condition en deux parties telles que chacune d'elles fournit un lieu géométrique pour le point inconnu; chaque lieu étant soit une droite, soit un cercle* » (Polya, 1967).

Mais, la plupart du temps, de telles constructions requièrent l'usage d'une transformation et de ses invariants, un des lieux du point-clé étant souvent déterminé comme l'image du lieu d'un autre point par une transformation. Toutes les isométries et similitudes peuvent être mobilisées dans un tel parcours sur un temps long. Il s'agit donc, à mes yeux, d'une QFPGE à laquelle l'expression « questionnement du monde » ne convient sans doute pas en dépit du fait que la méthode des lieux soit une démarche de pensée qui concerne toute construction d'objet mathématique devant satisfaire plusieurs contraintes. Par exemple, la recherche d'une fonction de \mathbf{R} dans \mathbf{R} qui respecte une équation différentielle et des conditions aux limites : on prend le modèle fonctionnel paramétré correspondant à l'équation, en somme un lieu de fonctions avec les degrés de liberté qu'offrent les paramètres, puis on détermine la valeur de ceux-ci pour satisfaire les autres conditions.

Si je me suis attardée sur ce travail qui trouverait peu sa place dans les programmes belges actuels, c'est parce qu'il me permet d'illustrer, au-delà de la volonté de donner des raisons d'être aux transformations, celle de fournir un outil méthodologique permettant de faciliter la résolution d'une classe spécifique de problèmes géométriques dans une perspective proche de celle défendue, à la même époque, par Robert & Tenaud (1988) en faveur d'un « enseignement méta », sur base d'un exemple de construction tronquée.

Un tel exemple illustre, en fait, un MER plus générique supposé apporter une réponse aux illusions de la réforme pédagogique dite des compétences qui, en Belgique, prône une méthodologie globale de résolution de problèmes explicitée seulement par ses phases telles que la lecture de l'énoncé, l'interprétation des résultats, ... C'est en tout cas le MED que les enseignants adoptent d'autant plus facilement qu'ils sont peu rompus eux-mêmes à la résolution de problèmes mathématiques. Il s'agit ici, au contraire, de catégoriser les problèmes mathématiques en classes définies par des savoirs particuliers et les techniques qu'ils autorisent. Avec une gestion de la variabilité des problèmes de cette classe faisant

l'objet d'un moment d'étude consistant et cadré, de même que la gestion de l'adaptation éventuelle de ces techniques à d'autres classes de problèmes. Le transfert est alors « sous contrat » (Schneider, 2006a, 2006b), les clauses du contrat étant l'investissement des élèves dans l'apprentissage (voire la construction) de savoirs, techniques et technologies associés à une classe de problèmes bien identifiée et explorée, la rentabilité de cet investissement étant la résolution des problèmes facilitée par les apports mathématiques. Car c'est là une finalité majeure de l'enseignement des mathématiques délibérément retenue ici, à savoir faire comprendre aux élèves un certain fonctionnement des mathématiques à travers l'économie de pensée qu'elles autorisent.

2. Un MER générique pour gérer l'influence de l'institution « mathématique »

L'autre MER générique dont je voudrais parler concerne l'institution « mathématique » et son influence sur l'enseignement de cette discipline au niveau secondaire, en particulier à travers les effets encore actuels de la réforme des mathématiques modernes, en dépit de contre-réformes successives. Des effets qu'on aurait tort de minimiser si l'on pense déjà, en lien avec la section IV.1., à la mobilisation de méthodes spécifiques nécessaires à la résolution de problèmes dont il semble que des générations successives de professeurs aient perdu la trace (et pas toujours retrouvé depuis) au moment de cette réforme.

Cette réforme des mathématiques modernes, inspirée par la restructuration bourbakiste des mathématiques, relève, à une large échelle, d'une « inversion didactique » au sens de Freudenthal (1973), en bref, un parcours didactique à contre-courant de l'évolution historique. Ce n'est pas un mal en soi, si l'on en juge par un enseignement plus précoce que jadis du concept de fonction, un des concepts FUG (Formalisateur, Unificateur, Généralisateur) qui ont joué un rôle important mais assez tardif dans l'histoire. Mais, ce que l'on a largement sous-évalué, me semble-t-il, ce sont les difficultés d'apprentissage soulevées par la désynchronisation du savoir, en l'absence de dispositifs favorisant, chez les élèves, l'évolution de leurs préconstruits vers les objets mathématiques qui les modélisent. Les travaux que j'ai menés et dirigés sur les obstacles épistémologiques et didactiques et sur certaines transpositions didactiques en analyse et en géométrie m'ont permis de comprendre à quel point de tels dispositifs sont nécessaires (Schneider, 1991a, 1991b, 1992). En témoignent, par exemple, une épistémologie essentiellement empiriste partagée par plusieurs élèves estimant qu'un calcul de limite ne peut pas donner la valeur exacte d'une vitesse instantanée car celle-ci échappe aux sens et mesures ou encore leur interprétation abusive, dans l'espace, de l'équation $ax + by + c = 0$ comme celle d'une droite et non d'un plan par souci de garder, du plan à l'espace, de mêmes ostensifs algébriques pour modéliser de mêmes objets géométriques.

C'est à partir de là que j'ai formulé un MER assez générique, situé au niveau « discipline » de l'échelle de co-détermination didactique, pour traiter de tels phénomènes entre l'enseignement secondaire et la transition vers l'enseignement supérieur. Il est composé de deux strates que j'ai qualifiées de *praxéologies modélisation* et *praxéologies déduction* (Schneider, 2007 et 2008). Sur les secondes, je ne dirai que peu de choses hormis que les mathématiciens peuvent y retrouver leurs théories mais au terme du processus seulement s'ils acceptent la dimension heuristique de la construction qui y mène. Ce qui ne va pas toujours de soi, ainsi que dit plus haut.

Je me suis déjà beaucoup exprimée sur les praxéologies « modélisation » concernant le calcul infinitésimal et la géométrie analytique. J'ai choisi ici de m'attarder sur un exemple plus restreint afin de dissiper certains malentendus observés à propos des praxéologies « modélisation ». Pour moi, une praxéologie « modélisation » est une praxéologie à part entière qui ne se réduit pas à des tâches introductives supposant une modélisation de la part

des élèves ou cherchant à nourrir leur intuition. C'est un type de praxéologie qui pourrait se suffire à elle-même, du moins à un certain niveau de scolarité ou pour un certain public d'élève : les tâches y sont identifiées et institutionnalisées en types de tâches ou classes de problèmes. Et ses technologies sont particulières en ce sens qu'elles sont axées sur la pertinence des modèles en regard des préconstruits et sur l'adéquation entre les techniques retenues et ces types de tâches. On ne s'y interdit pas l'une ou l'autre argumentation relevant de théories déductives comme l'usage de contre-exemples mais ces technologies comportent aussi des arguments inhérents aux systèmes modélisés et, en cela, elles ne s'apparentent pas aux justifications auxquelles on pourrait penser en référence à une théorie mathématique déjà axiomatisée.

L'exemple des nombres relatifs me permet d'illustrer ceci.

L'ingénierie à laquelle je fais référence (Schneider et al., 2015) a pour enjeu la modélisation de MRU (Mouvements Rectilignes Uniformes) et est proposée à des élèves au début du collège lesquels ont déjà rencontré la droite graduée dans plusieurs cours au travers d'exemples tels que la ligne du temps ou une échelle d'altitudes. On cherche ici à introduire les nombres relatifs et leurs opérations sur base d'une succession de situations où il est question de voitures qui se font flasher sur une route rectiligne au moment où elles roulent à vitesse constante. Les élèves doivent faire un tableau numérique et établir une formule qui le modélise et qui donne la position p de la voiture à l'instant t lorsqu'elle roule à la vitesse v . Plusieurs phases sont prévues au cours desquelles les élèves doivent prendre en compte ce qui se passe après le flash mais aussi avant, des voitures qui roulent à des vitesses distinctes et/ou aussi en sens inverse ainsi que des voitures qui roulent dans le même sens mais en gardant un même écart entre elles.

Les enjeux sont multiples et concernent tout autant la modélisation fonctionnelle que l'introduction des nombres relatifs sans compter un travail de modélisation d'un contexte cinématique. Voici, parmi d'autres, quelques éléments institutionnalisés que nos observables du travail avec les élèves rendent crédibles :

- La formulation d'un modèle fonctionnel paramétré avec des lettres « objets » (p pour position, t pour temps, v pour vitesse), espèce de calcul littéral que les élèves ont rencontré dès l'école élémentaire, soit la formule $p = vt + p_0$ où p_0 est la position du mobile au temps $t = 0$. Cette standardisation se justifie alors en contrastant ces mouvements uniformes avec un mouvement accéléré.
- Le choix, négocié avec les élèves et présenté en tant que tel, d'un modèle unique pour rendre compte de tous les MRU et qui se paie au prix du signe potentiellement négatif de la vitesse (avec l'avantage d'indiquer le sens du parcours) et de décisions liées aux règles d'addition et de multiplication des nombres négatifs. Ainsi un mouvement correspondant à la formule $p = -2t$ donne $p = 6$ pour $t = -3$, ce qui suppose que $(-2) \times (-3) = 6$.

Cette fameuse règle des signes de la multiplication des relatifs découle ainsi d'un système que l'on souhaite modéliser, le modèle pouvant être ultérieurement exporté à d'autres systèmes. C'est en ce sens que la praxéologie sous-jacente est de type « modélisation ». Evidemment, il ne peut être envisagé une praxéologie de type « déduction » à ce niveau de scolarité mais on peut identifier que le MED est, pour ce contenu mathématique, plutôt inspiré de telles praxéologies dans lesquelles priment les aspects structurels. Ainsi, on a souvent tendance à justifier cette règle des signes en arguant d'une volonté de symétrisation de \mathbf{N} avec un principe de permanence des propriétés des opérations dans \mathbf{N} comme la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition alors qu'ici, c'est la recherche d'un modèle algébrique unique pour rendre compte de tous les mouvements rectilignes uniformes qui fournit une première raison d'être des relatifs et des propriétés de leurs opérations.

L'idée de ce feuilletage praxéologique en deux niveaux : modélisation et déduction m'est venue à l'occasion d'une analyse didactique (Schneider, 2001) d'un projet d'enseignement de

l'analyse dont j'avais été partenaire et qui se caractérisait, d'une part, par des références constructivistes et, d'autre part, par des organisations mathématiques assez particulières « plus proches d'un traitement d'exemples que d'une théorie ». Cette analyse m'avait permis de poser une question à l'articulation d'une OD et d'une OM particulières : « *Quel poids accorder au constructivisme ? Le prix peut-il en être des praxéologies mathématiques non canoniques [...] ?* » (p.53) et d'espérer de plus amples développements de la TAD sur les OD. Je peux aujourd'hui, suite aux travaux de Bosch & Gascon (2002), situer les praxéologies modélisation comme des produits envisageables sur lesquels pourraient déboucher des OD constructivistes.

Je pourrais aussi situer les niveaux praxéologiques « modélisation » et « déduction » par rapport à la dialectique outil/objet de Douady, au double niveau d'étude de Winslow (2007) ou encore aux ETM de l'équipe parisienne (Kuzniak, 2011), en tout cas pour exprimer le basculement d'un type de praxéologie à l'autre mais je n'y trouve pas une description praxéologique de ce que j'entends par praxéologie « modélisation » avec la dynamique décrite entre tâches, techniques et technologies ni le sens que je donne à ce dernier pôle.

3. L'articulation de ces MER génériques et leur fragilité écologique

Les deux MER génériques qui viennent d'être développés doivent être articulés : rappelons que le premier concerne la résolution de problèmes pensée en termes de catégorisation de ceux-ci et de méthodes de résolution spécifiques et, l'autre, des apprentissages mathématiques programmés en deux niveaux praxéologiques, modélisation et déduction. Je pense, en effet, que c'est cette articulation qui fournit des réponses crédibles, à travers des MER plus étroits, aux injonctions des institutions « cachées » mentionnées plus haut : l'institution mathématique et celle des idéologies pédagogiques, en particulier celle des compétences. Plusieurs ingrédients de tels MER relèvent de l'épistémologie des mathématiques bien sûr, mais ils concernent tout autant la didactique que des théories d'apprentissage et les idéologies auxquelles elles peuvent conduire. J'ajouterai que le respect d'une chronologie historique n'est en rien un incontournable, les raisons d'être initiales des savoirs pouvant différer de celles des institutions, professionnelles ou autres pour lesquelles ces savoirs sont essentiels (comme illustré par l'équipe espagnole). Et, si Brousseau avait bien souligné l'importance des situations fondamentales en lien avec l'origine des savoirs, il avait aussi insisté sur la nécessité de ne pas perdre les élèves dans les méandres de l'histoire.

Bien que nos recherches ont montré la viabilité dans les classes de PER inspirés de nos MER génériques ou non, ceux-ci posent de sérieuses questions d'écologie ! Mes expériences de formations initiales et continues me l'ont fait largement comprendre. Quant aux expérimentations menées dans le cadre de recherches, elles l'ont été avec des enseignants qui prenaient la peine de comprendre les enjeux des dispositifs. Je ne sais pas si l'on peut parler ici de recherches collaboratives et nos collaborations n'ont jamais été analysées dans cette perspective mais, dans les faits, il s'agit un peu de cela avec des apports consistants du chercheur en termes d'idées pour enseigner mais aussi des adaptations pensées dans la durée à la lumière des expérimentations successives (une dizaine d'années avec le groupe qui a planché sur l'enseignement de la géométrie pour les quatre premières années du secondaire).

V. LE RÔLE D'UN MER ET SES VICISSITUDES DANS LA FORMATION DES ENSEIGNANTS

L'enjeu majeur du MER dans les collaborations évoquées plus haut autant que dans les formations d'enseignants est alors, pour moi, un enjeu de formation à la fois mathématique et didactique. Il faut en effet un partage des référents à l'origine des dispositifs et celui d'outils théoriques qui en permettent des analyses a priori et a posteriori s'il on veut éviter le risque de plaider. Les MER et les MED font partie de ces référents à partager et, a minima, leur explicitation a une fonction de dénaturalisation.

Pour illustrer cela, je prends un exemple lié à la formation initiale de futurs professeurs de Lycée. Il concerne l'enseignement des vecteurs. Le point de départ est une observation, maintes fois répétées durant une vingtaine d'années, dans le cadre de stages de ces élèves-professeurs qui, la plupart du temps, obéissent aux injonctions de l'enseignant qui les encadre. Elle reflète donc la réalité de terrain et ce, d'autant que cette observation est corroborée par une analyse de manuels (Nguyen Ngan, 2017). Cette observation peut se résumer ainsi :

- La plupart du temps, le concept de « vecteur » est introduit soit par référence à son usage en physique à propos des forces ou, plus rarement, des vitesses, avec les trois caractéristiques : direction, sens et longueur, soit par des « activités » inspirées des jeux d'orientation pour scouts où il s'agit d'aller d'un endroit à un autre sur base de renseignements liés à la distance à parcourir, à la direction et au sens du parcours, précisés comme en géographie. Parfois, quelques propriétés géométriques sont prouvées à l'aide du formalisme vectoriel mais ceci reste essentiellement dans le topos du professeur.
- Quant à la rubrique « transférer » du référentiel de compétences qui correspond, en gros, à ce que l'on attend des élèves en matière de « résolution de problèmes », les problèmes de physique ont disparu, les jeux d'orientation aussi au profit d'exercices assez techniques dont plusieurs portent sur le passage des vecteurs à leurs composantes dans un repère et aux coordonnées de points.

Ces leçons ont l'agrément des maîtres de stage car plusieurs injonctions institutionnelles sont respectées dans ces préparations de cours, dont la référence, fût-elle allusive, aux usages des savoirs enseignés dans les autres disciplines, ainsi que les renvois à la vie courante à travers la question de l'orientation, ceux-ci inspirant des situations qui permettent de rendre les élèves « actifs » avant l'enseignement.

Ce fonctionnement est assez monumentaliste et la formation a alors pour objectif de le faire comprendre aux professeurs stagiaires. J'en reprends ici quelques éléments seulement au risque d'une fort grande simplification :

- Les enjeux sociaux et mathématiques de la réforme des mathématiques modernes et les retombées encore actuelles sur l'enseignement de la géométrie subordonnée à l'algèbre linéaire, les objets géométriques tels que la droite et le plan étant définis comme des variétés linéaires ou affines. Les obstacles d'apprentissage soulevés par un passage non géré du vectoriel à l'analytique et que j'ai déjà évoqués (Lebeau & Schneider, 2010).
- Une intention initiale de la réforme des mathématiques modernes : « dépolvériser » l'enseignement de la géométrie dont les défauts étaient ceux de la géométrie euclidienne en particulier tout ce qui y relève de l'empirisme. Dans cette perspective, le formalisme vectoriel devait permettre de prouver des propriétés de figures géométriques de manière calculatoire, tout en étant moins laborieux que le formalisme analytique et surtout, contrairement à ce dernier, « intrinsèque » soit indépendant du choix d'un repère. On parlait en ce sens de « l'outil vectoriel ».

- Un abandon progressif des preuves de propriétés de figures géométriques, qu'elles soient analytiques ou vectorielles, faute de maîtrise par les enseignants, et leur repli sur la présentation du vecteur comme un « segment orienté » par le biais des trois caractéristiques de longueur, direction et sens, avec les difficultés identifiées par Le Thi Hoai Ch. (2001). Mais surtout une incohérence majeure de cette présentation avec la propriété du calcul vectoriel d'être indépendant du choix d'un repère.

En bref, tout ce qui explique une monumentalisation assez marquée que ne corrigent pas les allusions faites aux usages des vecteurs dans d'autres disciplines.

Ce genre de discours, qui vise une certaine dénaturalisation, peut être entendu par plusieurs enseignants, ceux qui ont une posture intellectuelle au-delà de premières réactions épidermiques. Les choses se corsent davantage lorsqu'on explique aux enseignants les enjeux d'un PER (Nguyen Ngan & Schneider, 2017) axé sur un MER qui tranche sur le MED, conçu à titre de solution hypothétique d'un tel état de fait. Il s'agit de créer un formalisme intrinsèque pour modéliser des configurations géométriques de base, en l'occurrence des configurations particulières de trois points alignés et des parallélogrammes convexes éventuellement aplatis. Ce formalisme est le calcul bipoint dont Pressiat (1999) étudie l'écologie dans les pays anglo-saxons. Il est étayé, dans notre PER, par des propriétés de géométrie synthétique dans le plan et dans l'espace et il y est le substrat du formalisme vectoriel. Nous en illustrons largement la grande instrumentalité pour prouver des propriétés de figures planes ou de solides. Au total, le PER respecte les programmes scolaires et le timing prévu. Mais les formés ne sont pas prêts à investir une telle approche en raison principalement du caractère non standard du formalisme proposé, hormis quelques-uns qui ont fait leurs études disciplinaires non dans un département de mathématiques mais dans une faculté d'ingénieurs.

Cette observation et bien d'autres faites dans le contexte de formation initiale suggèrent l'existence de racines profondes au malaise des enseignants entre, d'une part, les injonctions institutionnelles à faire de leurs élèves de bons solveurs de problèmes et, d'autre part, leur difficulté à entrevoir, à un certain niveau d'étude, des OM crédibles, faute d'une formation mathématique adaptée.

VI. EN GUISE DE CONCLUSION

Sans prétendre *questionner le monde* et travailler à des curricula où les savoirs sont choisis en fonction de questions cruciales, mais sans exclure bien sûr ce paradigme ni nier son grand intérêt, je pense qu'on peut œuvrer à l'amélioration de l'enseignement actuel par une lecture des programmes scolaires propre à lutter contre le monumentalisme dont souffre l'enseignement des mathématiques.

Je pense en effet qu'il subsiste toujours une marge de liberté permettant de faire fonctionner les mathématiques imposées à l'école comme économie de pensée au regard de certains types de tâches. L'enjeu est alors de favoriser, chez les élèves, un certain recul sur la spécificité des mathématiques en tant qu'activité humaine mais aussi un regard critique sur ce que l'institution impose.

Mais, pour l'enseignant comme pour le chercheur, cela suppose un pas de côté par rapport aux habitudes institutionnelles, nourri de MER qui permettent une vision relativement globale du curriculum existant. Il s'agit alors de dénaturaliser celui-ci afin d'en mieux percevoir les travers, les manques et les excès mais aussi les points d'appui pour construire des cours qui

respectent les prescrits tout en évitant le monumentalisme. C'est ce que j'ai essayé d'illustrer au moyen des deux MER génériques décrits ici et des PER associés.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- ARTIGUE, M. (1990). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(3), 281-308.
- BACHELARD, G. (1949). *Le rationalisme appliqué*. Paris : Presses universitaires de France.
- BARQUERO, B. & FLORENSA, I. (2019). Méthodologie pour le design et l'analyse de Parcours d'Etude et de Recherche. Dans J. Pilet et C. Vendeira (Eds) *Actes du séminaire de didactique des mathématiques 2018* (pp. 333-341). Paris: IREM de Paris, Université Paris-Diderot. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02421410>
- BOSCH, M. & GASCON, J. (2002). Les praxéologies didactiques : Organiser l'étude, Théories et empiries. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (Eds). *Actes de la 11e Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques* (pp. 23-40). Grenoble, France : La Pensée Sauvage.
- BOSCH, M. (2011). "Plans d'épargne" et modélisation algébrique. Vers une ingénierie didactique des PER. In C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, F. Vandebrouck & F. Wozniak F. (Eds). *En amont et en aval des ingénieries didactiques. Actes de la 15e Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques* (pp. 349-366). Cédérom. Grenoble, France : La Pensée Sauvage.
- CHEVALLARD, Y. (1982). *Sur l'ingénierie didactique*. Texte préparé pour la 2e Ecole de Didactique des Mathématiques, Orléans, Juillet 1982.
- CHEVALLARD, Y. (1985). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au Collège, Première partie, L'évolution de la transposition didactique. *Petit x*, 5, 51-94.
- CHEVALLARD, Y. (1991). *La transposition didactique – du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble, France : La Pensée Sauvage.
- CHEVALLARD, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(1), 73-112.
- CHEVALLARD, Y. (1999). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-265.
- CHEVALLARD, Y. (2009a). *La notion de PER : problèmes et avancées*. Texte d'un exposé présenté à l'IUFM de Toulouse le 28 avril 2009. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=161
- CHEVALLARD, Y. (2009b). *La TAD face au professeur de mathématiques*. Texte d'un exposé présenté à l'IUFM de Toulouse le 29 avril 2009. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/La_TAD_face_au_professeur_de_mathematiques.pdf
- COJEREM (1995a). *Des situations pour enseigner la géométrie, (guide méthodologique)*. Bruxelles : De Boeck-Wesmael.
- COJEREM (1995b). *Géométrie en situations (notions pour l'élève)*. Bruxelles : De Boeck-Wesmael.
- DUNIA MWATI, A. (2013). *De l'écologie d'un discours heuristique d'acculturation à l'algèbre linéaire*. Thèse de doctorat. Université de Liège.
- FREUDENTHAL, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht : D. Reidel.
- GARCIA, F. J., GASCON, J., RUIZ HIGUERAS, L. & BOSCH, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(3), 226-246.
- GASCON, J. (1993). Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'« arithmétique généralisée ». *Petit x*, 37, 43-63.
- GASCON, J. (2016). Une possible raison d'être du calcul différentiel élémentaire dans le domaine de la modélisation fonctionnelle. In Y. Matheron, G. Gueudet et al. (Eds). *Enjeux et débats en didactique des mathématiques* (pp. 93-108). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- JOB, P. (2011). *Étude du rapport à la notion de définition comme obstacle à l'acquisition du caractère lakatosien de la notion de limite par la méthodologie des situations fondamentales/adidactiques*. Thèse de doctorat. Université de Liège.
- JOB, P. & SCHNEIDER, M. (2010). Une situation fondamentale pour le concept de limite ? Question de langage, de culture ? Comment la TAD permet- elle de problématiser cette question ? In A. Bronner et al. *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* (pp. 615-632). IUFM de l'académie de Montpellier.
- JOB, P. & SCHNEIDER, M. (2017). A propos de l'écologie du discours heuristique. In G. Cirade et al. (Eds), *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société*, (pp. 407-420). Toulouse : dépôt sur le site citad4.sciencesconf.org.
- KLEIN, F. (2004). *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint. Volume 1 : Arithmetic, Algebra, Analysis*. Dover, 2004. (Publication originale : Macmillan, 1932.)
- KRYSINSKA, M. & SCHNEIDER, M. (2010). *Emergence de modèles fonctionnels*. Liège : Presses universitaires de Liège.
- KUZNIAK, A. (2011). L'Espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 16, 9-24.
- LEBEAU, C. & SCHNEIDER, M. (2010). Equations incomplètes de plans et obstacles à la nécessité épistémique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 30(1), 11-46.
- LE THI HOAI, CH. (2001). Difficultés d'apprentissage de la notion de vecteur pour des élèves de première année de lycée en France et au Vietnam. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 21(1.2), 157-188.
- NGUYEN NGAN, G. (2017). *Ecologie du formalisme "bipoint" dans l'enseignement de la géométrie au niveau secondaire*. Thèse de doctorat. Université de Liège.

- NGUYEN NGAN, G. & SCHNEIDER, M. (2017). *Une approche heuristique d'une géométrie calculatoire*. Liège : Presses universitaires de Liège.
- POLYA, G. (1967). *La découverte des mathématiques*. Paris : Dunod.
- PRESSIAT, A. (1999). *Aspects épistémologiques et didactiques de la liaisons "points- vecteurs"*. Thèse de Doctorat. Université de Paris VII.
- ROBERT, A. & TENAUD, I. (1988). Une expérience d'enseignement de la géométrie en Terminale C. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9 (1), 31-70.
- ROUY, E. (2007). *Formation initiale des professeurs et changements de posture vis-à-vis de la rationalité mathématique*. Thèse de doctorat. Université de Liège.
- SCHNEIDER, M. (1991a). Un obstacle épistémologique soulevé par des "découpages infinis" des surfaces et des solides. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 11(2.3), 241-294.
- SCHNEIDER, M. (1991b). Quelques difficultés d'apprentissage du concept de tangente. *Repères IREM*, 5, 65-82.
- SCHNEIDER, M. (1992). A propos de l'apprentissage du taux de variation instantané. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 317-350.
- SCHNEIDER, M. (2001). Praxéologies didactiques et praxéologies mathématiques, A propos d'un enseignement des limites au secondaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 21(1.2), 7-56.
- SCHNEIDER, M. (2006a). Quand le courant pédagogique "des compétences" empêche une structuration des enseignements autour de l'étude et de la classification de questions parentes. *Revue Française de Pédagogie*, 154, 85-96.
- SCHNEIDER, M. (2006b). Comment des théories didactiques permettent-elles de penser le transfert en mathématiques ou dans d'autres disciplines ? *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 26, (1), 9-38.
- SCHNEIDER, M. (2007). *Entre recherche et développement : quel choix de valeurs pour l'ingénierie curriculaire?* <http://ife.ens-lyon.fr/publications/edition-electronique/documents-travaux-recherche-education/BR062.pdf>.
- SCHNEIDER, M. (2008). *Traité de Didactique des Mathématiques*. Liège : Presses universitaires de Liège.
- SCHNEIDER, M. (2011). Ingénieries didactiques et situations fondamentales. Quel niveau praxéologique ? In C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, F. Vandebrouck & F. Wozniak F. (Eds), *En amont et en aval des ingénieries didactiques. Actes de la 15e Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques* (pp. 175-206). Cédérom. Grenoble, France : La Pensée Sauvage.
- SCHNEIDER, M. (2017). Utiliser les potentialités phénoménotechniques de la TAD : quel prix payer ? In G. Cirade et al. (éds), *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société* (pp. 157-184). Toulouse : Dépôt sur le site citad4.sciencesconf.org.
- SCHNEIDER, M., JOB, P., MATHERON Y. & MERCIER A. (2015). Extensions praxémiques liées aux ensembles de nombres. Université de Strasbourg : *Annales de Didactique et des Sciences Cognitives*, 20, 9-46.
- SFARD, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 1-36.
- SIERPINSKA, A. (1992). On understanding the notion of fonction. In H. Guershon H. & E. Dubinsky. *The concept of Function*, Mathematical Association of America, MAA Notes, Volume 256.
- WINSLOW, C. (2007). Les problèmes de transition dans l'enseignement de l'analyse et la complémentarité des approches diverses de la didactique. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 12, 189-204.
- XHONNEUX, S. (2011). *Regard institutionnel sur la transposition didactique du Théorème de Lagrange en mathématiques et en économie*. Thèse défendue à l'Université de Namur.
- XHONNEUX, S. & HENRY, V. (2012). Le théorème de Lagrange en mathématiques et en économie : une étude didactique du savoir enseigné. In J.-L. Dorier & S. Coutat (Eds), *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF 2012* (pp. 760-771). Genève : Unige. <http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012>

LES MODELES PRAXEOLOGIQUES DE REFERENCE : REFLEXIONS METHODOLOGIQUES EN TAD

Marianna **BOSCH**

IQS School of Management, Universitat Ramon Llull

marianna.bosch@iqs.edu

Résumé

Les recherches récentes en TAD sur les parcours d'étude et de recherche (PER) introduisent de nouveaux outils d'analyse didactique à partir des éléments du schéma herbartien. Ces outils mettent en avant la « dynamique » des processus didactiques et s'articulent avec des analyses plus « statiques » élaborées en termes de praxéologies. L'articulation soulève des questions méthodologiques nouvelles sur le type de modèles de référence que l'on construit pour distinguer les dimensions des processus didactiques que l'on questionne et celles que l'on prend comme un donné. Nous illustrerons ces questions à partir des recherches menées par notre équipe sur l'écologie des PER qui ont mis en évidence d'importants déficits épistémologiques et pédagogiques dans les systèmes d'enseignement actuels.

Mots clés

Théorie anthropologique du didactique, parcours d'étude et de recherche, praxéologies, méthodologie de recherche, transposition didactique, échelle de codétermination didactique, paradigme pédagogique

I. CHRONIQUE DES MODELES EPISTEMOLOGIQUES DE REFERENCE

1. Modèles épistémologiques implicites en didactique

La notion de modèle épistémologique de référence est apparue lors d'un séminaire de recherche avec Josep Gascón et des collègues de l'Université Autonome de Barcelone en 1990 où nous étudions des articles sur les niveaux de Van Hiele en géométrie. Ces niveaux correspondent au développement de ce qui est considéré comme la « pensée géométrique » et ils sont au nombre de cinq (Braconne-Michoux, 2014; Burger & Shayghnessy, 1986) :

Niveau 0. Visualisation

Niveau 1. Analyse

Niveau 2. Abstraction ou déduction informelle

Niveau 3. Déduction formelle

Niveau 4. Rigueur

Dans ce modèle, on part d'une reconnaissance visuelle des figures d'après leur apparence (niveau 0), puis les figures deviennent porteuses de propriétés, mais celles-ci ne sont pas

ordonnées (niveau 1). Dans le niveau 2, les propriétés sont ordonnées à l'intérieur d'une figure ou entre figures, mais elles ne sont pas organisées en démonstrations. On atteint le niveau 3 lorsque certaines propriétés sont déduites à partir d'autres, organisées en théorèmes ou axiome, et que les déductions sont explicitées sous forme de démonstrations. Le niveau 4 correspond finalement à la possibilité de comparer des systèmes basés sur différents axiomes et étudier diverses géométries sans l'appui de modèles concrets.

L'étude de ce modèle sur l'apprentissage de la géométrie nous révéla deux faits importants. En premier lieu, que les niveaux de Van Hiele s'appuyaient sur une conception particulière de la géométrie selon laquelle le cœur du travail consisterait à identifier des propriétés des figures, les organiser et utiliser pour en déduire d'autres, puis exposer le tout dans des systèmes axiomatiques qui peuvent se comparer. Il s'agit là un modèle épistémologique qui définit ce qu'est la géométrie sans le questionner. Le problème du chercheur n'est pas de se demander qu'est-ce que la géométrie, mais d'assumer cette conception de *la* géométrie et de se demander comment les élèves l'apprennent, comment ils acquièrent *la* « pensée géométrique » qui apparaît comme la seule possible. Cette problématique reste assez proche de la problématique de l'enseignant qui part aussi d'une certaine conception de la géométrie – celle définie par le curriculum – et se demande comment l'enseigner. Le fait que l'enseignant travaille traditionnellement à séquencer les contenus à enseigner, à les linéariser, peut se rapprocher de ce modèle en niveaux, où les premiers seraient nécessaires pour atteindre les suivants.

Cet exemple, que nous ne développerons pas plus ici, nous a fait prendre conscience des modèles épistémologiques, souvent implicites, qui sont assumées par un grand nombre de recherches en didactique. Ces modèles sont souvent proches de – ou en tout cas compatibles avec – ceux que propose l'institution scolaire, ce qui empêche de les questionner et contribue à les naturaliser. Nous avons déjà dit que cette naturalisation rapproche la problématique de la recherche de celle de l'enseignement : on ne questionne pas ce qui est à enseigner, on se limite à chercher de bonnes voies pour le faire. Finalement, le fait que ce modèle implicite soit peu questionné et débattu, empêche de le développer à partir des travaux de recherche, ce qui se traduit par un manque de réinvestissement des résultats et de leur développement en outils de recherche. On peut dire que souvent les modèles épistémologiques relatifs au savoir à enseigner sont cachés sous le modèle didactique : on ne se demande pas qu'est-ce que la géométrie et pourquoi il faut l'enseigner – et l'apprendre –, on se demande uniquement comment on peut mieux l'enseigner et l'apprendre.

La prise en compte de ce type de questionnement est justement ce qui est au cœur de l'analyse des phénomènes de transposition didactique et ses assomptions à propos de la diversité et relativité institutionnelle des savoirs. Il n'y a pas *une* pensée géométrique, mais des activités et des productions institutionnelles qui s'identifient ou se déclarent comme étant géométriques, dans un processus non dépourvu de polémiques, tensions, indéfinitions et désaccords, comme pour le reste d'activités sociales.

2. Modèles épistémologiques dans la théorie des situations didactiques

La théorie des situations didactiques (TSD) nous apportait un clair contre-exemple à ce propos. Et cela, non seulement pas la portée qu'elle attribuait aux processus de théorisation en didactique, beaucoup plus ambitieux que les approches locales comme celle des niveaux de Van Hiele, mais par le fait de proposer un modèle général pour décrire les activités ou connaissances mathématiques, qui permettait de rendre explicite – et donc de discuter, questionner, mettre à l'épreuve expérimentale et développer – les modèles épistémologiques dont a besoin la recherche en didactique. Ce modèle général est bien connu, en termes de situations fondamentales définies comme des jeux contre un milieu, avec les différentes dialectiques ou phases. Guy Brousseau est très clair à ce propos :

Une des approches de la didactique des mathématiques consiste à modéliser non seulement les connaissances que l'on veut enseigner ou celles qu'un sujet apprend, mais aussi les conditions dans lesquelles elles se manifestent. Les situations sont des modèles minimaux qui « expliquent » comment telle connaissance intervient dans les rapports particuliers qu'un sujet établit avec un milieu pour y exercer une influence déterminée. (Brousseau, 2000, p. 4)

Il devenait clair pour nous l'importance attribuée par Brousseau à l'épistémologie des professeurs. Ce terme permet de pointer au fait qu'il y a plusieurs épistémologies – celle du professeur, celle de l'élève, celle des parents ou des citoyens, celle aussi du professeur de physique ou de sciences économiques, etc. – et qu'il faut que la recherche en didactique élabore ses propres modèles épistémologiques pour rendre compte de tous les autres. Cette prise de distance vis-à-vis des institutions scolaires et aussi des institutions savantes est nécessaire pour éviter d'assumer sans le vouloir les modèles dominants dans les institutions que nous prenons comme objet d'étude.

La diffusion internationale de la théorie des situations didactiques a souvent été limitée par la confusion entre modèle épistémologique et modèle didactique. Il est vrai que le modèle des situations joue un double rôle à ce propos, car il définit des connaissances non par ce qu'elles sont mais par les processus qui permettent de les construire. C'est bien cette fusion entre le didactique et l'épistémologique – ou entre le didactique et le mathématique – qui est au cœur de la théorie des situations didactiques et qui explique que l'expression « épistémologie expérimentale » ait pu en un moment donné concourir avec celle de « didactique des mathématiques ». Comme le dit Guy Brousseau lui-même : « La "Didactique des Mathématiques" serait pour les professeurs ce qu'est la "Science Médicale" pour les médecins, et l'*épistémologie expérimentale* des mathématiques serait sa Biologie »¹.

Lorsque l'on regarde les types de modèles épistémologiques que propose la TSD, on peut distinguer un modèle général en termes de situations ou jeux contre un milieu – qui serait en un sens le modèle théorique – et des modèles spécifiques en termes de situations fondamentales ou de séquences de situations. Sans entrer dans le détail ici, il est bon de remarquer que dans la plupart de travaux développés dans la TSD, le découpage des connaissances modélisées ne reprend pas la cartographie scolaire classique des savoirs et qu'il correspond à des domaines assez vastes des mathématiques à enseigner. Les travaux sur la numération, sur la mesure, sur les nombres décimaux (qui vont bien au-delà de ce que leur nom désigne) en sont de bons exemples. Ces modèles permettent aussi d'identifier des éléments qui n'existent pas dans les modèles épistémologiques scolaires dominants, l'exemple le plus connu étant celui de l'énumération.

¹ Guy Brousseau, «1975 : épistémologie expérimentale vs Didactique 2016». <https://guy-brousseau.com/3297/1975-epistemologie-experimentale-vs-didactique-2016/>

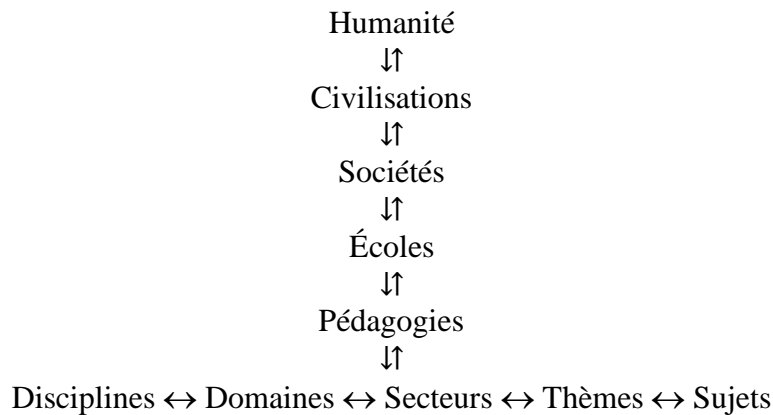


Figure 1 : Échelle de codétermination didactique.

Si l'on prend comme point de repère l'échelle des niveaux de codétermination didactique (Figure 1), on peut dire que les modèles épistémologiques proposés par la TSD vont bien au-delà du sujet et du thème : ils abordent toujours des champs de connaissances au niveau du secteur ou domaine – ces termes étant bien sûr relatifs à l'institution considérée. En tout cas, le niveau de questionnement est celui de la discipline toute entière, dont aucun des découpages institutionnels existants n'est assumé sans un questionnement premier. L'expression si chère à Guy Brousseau à propos de la spécificité de la didactique tient à mes yeux à cette dimension de la TSD. Une théorie didactique se distingue des approches plus générales en éducation par le fait qu'elle ne prend pas la construction institutionnelle des connaissances et des savoirs comme des données mais comme des objets d'étude, et donc de questionnement et modélisation. L'exigence de scientificité de la didactique nous porte à considérer les modèles épistémologiques élaborés comme des entités régulièrement soumises à l'épreuve des faits et des développements théoriques.

3. Modèles praxéologiques de référence en TAD

La Théorie anthropologique du didactique (TAD) propose un modèle général des activités humaines en termes de *praxéologies* ; un modèle pour la dynamique de la (re)construction de praxéologies en termes de *moments didactiques*, ainsi qu'un modèle pour la dynamique de l'étude et de la recherche de questions problématiques en termes du *schéma herbartien et ses dialectiques* (Bosch & Chevallard, 1999; Bosch, Chevallard, García, Monhagan, 2020 ; Chevallard, 1999, 2007). Nous avons initialement appelé ces modèles des modèles *épistémologiques de référence* (Bosch et Gascón, 2005 ; Lucas, Fonseca, Gascón et Schneider, 2020) pour marquer le besoin, pour la recherche en didactique, d'élaborer des descriptions propres sur les savoirs à enseigner qui sont au cœur des processus didactiques étudiés. Le terme « épistémologique » renvoie ici à « savoir ». Étant donné que la TAD conçoit tout savoir comme une organisation praxéologique, on peut tout aussi bien les appeler *modèles praxéologiques de référence*. Cette dernière expression permet plus de généralité lorsque l'on aborde des systèmes didactiques autour de « savoirs » qui ne sont pas considérés comme tels, comme par exemple apprendre à faire les nœuds des chaussures, à organiser une excursion à la montagne ou à changer les cordes d'une guitare électrique.

Il est important de rappeler qu'un modèle praxéologique de référence (MPR) se construit comme outil d'étude d'une question de recherche. En ce sens, il n'est jamais « le » modèle de tel ou tel objet de savoir, mais « un » modèle (possible) parmi bien d'autres. Comme tout modèle scientifique, il est provisoire, soumis à l'épreuve empirique des faits et en révision permanente. Son explicitation est essentielle pour contrôler les présupposés qu'il incorpore et pour pouvoir le comparer ou contraster avec d'autres modèles possibles (par exemple, ceux

élaborés à partir d'autres approches ou outils théoriques). Finalement, c'est en le décrivant qu'on peut le modifier de forme convenable à partir des résultats obtenus lors de l'analyse des processus transpositifs ou la mise en place d'ingénieries didactiques.

Un aspect important des MPR est leur « taille », c'est-à-dire la délimitation qu'ils proposent de l'univers de savoirs ou objets de connaissances qui existent dans les institutions sociales. Par exemple, un MPR sur les limites de fonctions comme celui proposé par (Bosch, Espinoza, & Gascón, 2005) assume implicitement le découpage des mathématiques dans l'enseignement scolaire espagnol et ne questionne – ou modélise – que le niveau du thème. Par contraste, les travaux sur l'algèbre initiés par Yves Chevallard dans les années 1980 proposent une reconstruction de tout un domaine des mathématiques enseignées, qui peut se développer en amont et en aval du travail avec des équations pour intégrer depuis l'arithmétique élémentaire jusqu'au calcul différentiel (Ruiz-Munzón, 2010 ; Cid, 2015 ; Lucas, 2015 ; voir aussi Cid, Muñoz-Escolano et Ruiz-Munzón, 2020 ; Lucas et al., 2020).

Il est difficile de présenter un répertoire complet des MPR élaborés dans les recherches en TAD, mais il est intéressant d'en pointer quelques un pour avoir des exemples des différentes « tailles » des objets de savoir considérés. On peut ainsi rencontrer de « petits » objets, comme l'enseignement des fractions au collège (Chevallard & Jullien, 1989), la racine carrée (Assude, 1993) ou la proportionnalité (Bosch, 1994 ; García, 2005). À l'autre extrême, on trouve un premier développement de MPR sur les mathématiques en économie (Artaud, 1993), sur le domaine de la statistique (Wozniak, 2005), voire sur les besoins mathématiques des non-mathématiciens, qui aborde la discipline toute entière (Kim, 2015).

Un autre exemple particulier serait le travail de Tomás Sierra (2006) sur la mesure des grandeurs qui s'appuie sur le modèle élaboré par Guy Brousseau (2000) où les processus de mesure sont associés à trois domaines interconnectés : les objets concrets mesurables, les procédures pour définir une application de mesure ; la structure numérique qui résulte de cette application. Sierra propose une interprétation de ces domaines en termes d'une suite de praxéologies dont l'origine est une praxéologie de manipulation et comparaison d'objets concrets (Bolea et al. 2005). Mabel Licera (2017) reprend cette suite de praxéologies pour y inclure le travail avec les nombres réels qui y sont définis comme la somme d'un nombre décimal et d'une erreur de mesure. Ce MPR étendu permet alors d'aborder certains phénomènes didactiques associés au statut incertain des nombres réels dans l'enseignement secondaire.

Il est important de souligner que, dans la plupart des MPR élaborés, le découpage scolaire du savoir à enseigner en domaines, secteurs et thèmes est transformé. C'est d'ailleurs une condition méthodologique presque nécessaire pour pouvoir étudier les processus de transposition didactique qui ont donné lieu à ce découpage institutionnel et les contraintes qui en résultent. Il est difficile d'étudier l'origine et les effets d'une certaine organisation des savoirs à enseigner lorsque l'on adopte le point de vue de l'institution qui propose cette organisation comme étant la seule possible. Le travail d'Eva Cid (2015) sur les nombres entiers nous permettra d'illustrer ce point. Dans ce cas, en plus, et de même qu'avec Sierra, le MPR qu'elle propose s'est initialement construit dans le cadre de la TSD et sous la direction de Guy Brousseau. Ce que ce modèle questionne de l'organisation traditionnelle des savoirs est l'inclusion des nombres entiers dans le domaine du numérique et leur construction à partir d'une problématique de mesure de grandeurs. Cette construction est un héritage de la réforme des mathématiques modernes – où les systèmes de nombres étaient construits comme des structures algébriques – qui a été ultérieurement transformée en une problématique de mesure de grandeurs – considérée comme plus « concrète ». Le MPR proposé par Eva Cid situe les nombres entiers dans une problématique algébrique et, donc, modifie grandement l'organisation actuelle en domaines et secteurs de l'enseignement secondaire espagnol, où les entiers sont enseignés *avant* l'introduction de l'algèbre et dans une problématique toute autre.

Le fait de considérer les niveaux spécifiques de l'échelle de codétermination comme le fruit des processus de transposition didactique, permet à la recherche en didactique de se détacher des constructions actuelles pour les considérer comme des objets d'étude à modéliser, questionner, interpréter et, le cas échéant, à en proposer des modifications. Ce travail de modélisation prend comme point de départ la question du « contenu » de l'enseignement : non seulement pourquoi devons-nous enseigner et apprendre les nombres entiers, mais surtout que sont les nombres entiers, de quoi sont-ils fait, à quoi servent-ils, en quoi peuvent-ils nous permettre de vivre mieux. Où trouver les réponses à ces questions est l'une des questions méthodologiques que l'on se pose le plus souvent et à laquelle il est difficile de répondre en termes génériques.

II. LES MODELES EPISTEMOLOGIQUES DANS LE CHANGEMENT DE PARADIGME

1. Modèles de référence et paradigmes pédagogiques

Les modèles que nous avons décrits jusqu'ici s'inscrivent dans ce qu'Yves Chevallard (2010) a appelé le *paradigme de la visite des œuvres*. Dans ce paradigme, les processus didactiques – et les systèmes didactiques qui les composent – s'organisent à partir d'un projet centré sur l'apprentissage d'un objet de savoir déterminé à l'avance. C'est cet objet que l'on va décrire en termes de praxéologies ou d'organisations praxéologiques. On note alors $S(X, Y)$ le système didactique où un groupe d'élèves X étudie une praxéologie sous la direction d'un professeur ou d'un groupe de professeurs Y . Le curriculum ou programme d'études est ainsi constitué par un ensemble de praxéologies, lui-même structuré en sujets, thèmes, secteurs, domaines et disciplines. Cette structuration et les termes qui désignent ses éléments (sujets, thèmes, secteurs, domaines, disciplines) dépendent de l'institution didactique considérée et évoluent avec le temps. Par exemple, au début du XX^{ème} siècle, dans un grand nombre de systèmes d'enseignement, on n'enseignait pas « les mathématiques » mais l'« arithmétiques », la « géométrie » et l'« algèbre ». Aujourd'hui, on va parler de « matières », de « bloc de contenus », etc.

Le fait de proposer des modèles praxéologiques de référence d'objets ou d'organisations praxéologiques déterminées revient à assumer le paradigme de la visite des œuvres et, donc, nous empêche de le questionner. D'une certaine manière, on part du fait que les systèmes didactiques scolaires se situent au niveau le plus bas de l'échelle de codétermination, puisqu'ils se créent autour de praxéologies ou d'éléments praxéologiques reliés à des sujets, thèmes, domaines et secteurs (Figure 2).

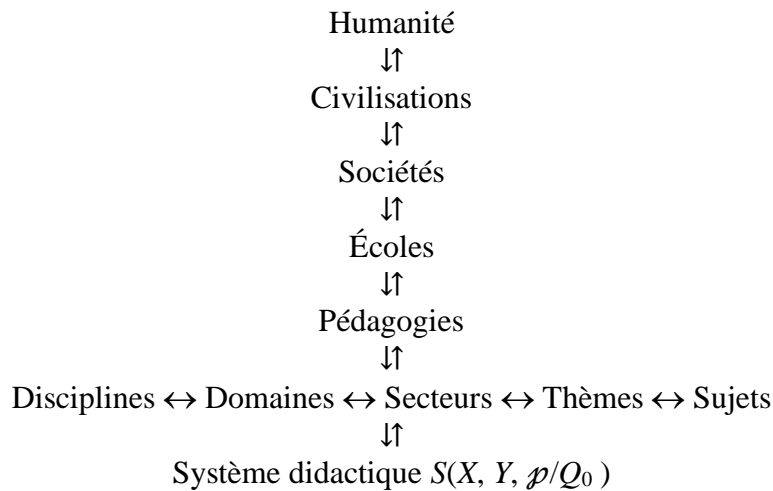


Figure 2 : Systèmes didactiques dans l'échelle de codétermination.

Nous avons dit que la construction de MPR doit questionner la forme concrète dont les processus de transposition didactiques en viennent à proposer une certaine structuration des objets de savoir que l'on prend comme enjeux des processus didactiques. Mais ils ne questionnent pas le fait même que ces processus s'établissent justement autour d'organisations praxéologiques déterminées à l'avance.

Pour éviter d'assumer le paradigme de la visite des œuvres comme le seul paradigme pédagogique possible, Chevallard propose de partir d'un « contre-paradigme » (Chevallard, 2015, 2019). Malgré cette appellation, le paradigme du questionnement du monde ne contredit pas mais plutôt englobe celui de la visite des œuvres en lui donnant une place particulière dans un projet plus large *d'étude d'une question Q*. Dans le paradigme du questionnement du monde, la détermination des outils praxéologiques nécessaires pour élaborer des réponses à *Q fait partie du processus d'étude*. En conséquence, le niveau du système didactique doit se situer en amont du niveau des disciplines (Figure 3).

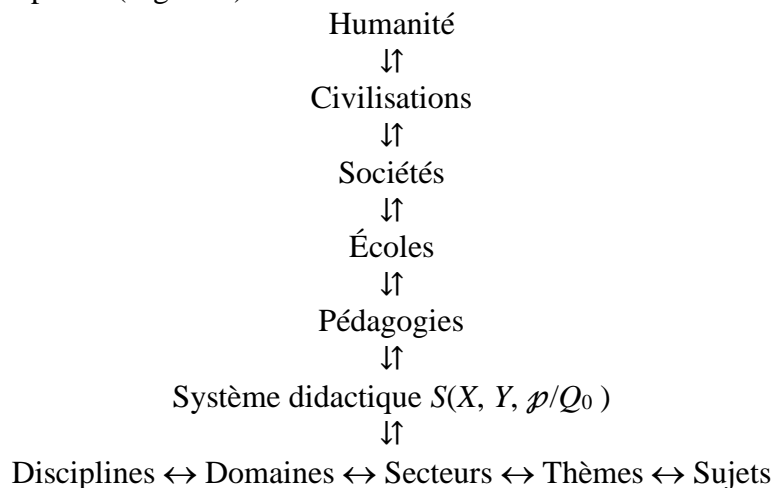


Figure 3 : Échelle de codétermination didactique dans le paradigme du questionnement du monde.

Que deviennent alors les modèles de référence dans ce nouveau paradigme ? La réponse se trouve dans le schéma herbartien et les dialectiques de l'enquête. Rappelons ici les éléments du schéma qui permettent de décrire les parcours d'étude et de recherche auxquels donne lieu l'étude d'une question *Q* jusqu'à l'élaboration d'une réponse finale R^\heartsuit :

$$[S(X; Y; Q) \rightsquigarrow M] \rightsquigarrow R^\heartsuit$$

$$[S(X; Y; Q) \rightsquigarrow \{O_i, Q_j, R_k^\diamond, D_r\}] \rightsquigarrow R^\heartsuit$$

Ce schéma inclut un milieu M qui évolue tout au long du processus et qui intègre des questions Q_j dérivées de Q , des œuvres ou réponses étiquetées R_k^\diamond qui ont été élaborées dans des processus d'étude et de recherche antérieurs auxquelles on peut accéder à travers divers types de média (manuels, articles, Internet, experts, etc.), des données empiriques D_r et d'autres objets de savoir ou matériels O_i qui sont disponibles d'emblée pour la communauté d'étude (X, Y).

2. De la visite des œuvres au questionnement du monde

Il existe de nombreux travaux en TAD qui explorent les conditions nécessaires pour l'implémentation de processus didactiques proches du paradigme du questionnement du monde (Bosch, 2018). Ces travaux prennent comme point d'appui des ingénieries didactiques organisées en forme de *parcours d'étude et de recherche* (PER) et analysent les dispositifs didactiques qui permettent de les implémenter sous des conditions institutionnelles relativement ordinaires, ainsi que les contraintes qui en limitent le développement. Nous présentons dans le Tableau 1 une liste – sans doute incomplète – de ces travaux, en décrivant rapidement la question de départ ainsi que les domaines de savoir impliqués dans le parcours.

AUTEURS	QUESTION DE DÉPART	DOMAINE ET ÉTUDES
García (2005)	Comment élaborer un plan d'épargne ?	Modèles fonctionnels et proportionnalité (secondaire)
Sierra (2006)	Pourquoi avons-nous différents alphabets mais un même système de numération ?	Systèmes de numération (formation d'enseignants)
Rodríguez (2006)	Quel tarif téléphonique est le plus adéquat à mon profil d'utilisateur ?	Inégalités et fonctions (lycée)
Ruiz-Munzón (2010)	Peut-on gagner de l'argent à travers la vente de T-shirts dans une foire de quartier ?	Algèbre et fonctions (secondaire)
Lucas (2015)	Comment prédire l'évolution d'une épidémie ?	Calcul différentiel (Sciences Bio-Médicales)
Gomes (2015)	Comment construire un édicule ? (Petite maison de jardin au Brésil)	Aire et périmètre (secondaire et formation professionnelle)
Ignácio (2018)	Quels sont les meilleurs endroits pour situer des arrêts de métro à Recife ?	Géométrie plane (primaire)
Nicasso (2018)	Comment fonctionnent les fours solaires ? Sont-ils efficaces ?	Formes quadratiques (formation d'enseignants)
Barquero (2009)	Comment prédire l'évolution d'une population ?	Mathématiques (Génie Chimique)
Serrano (2013)	Comment prévoir les usagers de Facebook ? L'évolution d'un réseau social ?	Mathématiques (Commerce)
Bezerra (2017)	Comment élaborer des plans d'investissements pour différents projets ?	Math. Financières (Commerce)
Bartolomé et al (2019)	Comment fabriquer un sommier, un kart ?	Élasticité Générale (Génie mécanique)
Florensa et al (2018)	Comment choisir les matériaux pour fabriquer des pièces d'un vélo, d'un appareil orthopédique, d'une voiture de F1 ?	Résistance matériaux (G. mécanique)

Tableau 1 : Exemples de parcours d'étude et de recherche.

Il n'est pas possible de rendre compte de ces travaux dans le cadre de cet article. Mais il est intéressant de noter les aspects suivants. Tout d'abord, il est évident que les PER présentés

continuent à être liés à un domaine ou secteur des savoirs scolaires ou universitaires. Ils continuent donc de participer au paradigme de la visite des œuvres. Cette limitation tient au fait que les ingénieries ont toutes été expérimentées dans des institutions didactiques qui participent de ce paradigme, où les cours sont liés à des disciplines ou des matières, avec des programmes à suivre plus ou moins rigides. Ces PER doivent donc être considérés comme des propositions intermédiaires, qui pousseraient le paradigme de la visite des œuvres à ses frontières, pour y découvrir les brèches qui permettent d'initier son évolution vers le paradigme du questionnement du monde.

Cette limitation apparaît à deux niveaux. En premier lieu, le choix de la question initiale Q est lié à un certain domaine de savoir, voire à un certain modèle praxéologique de référence de ce domaine. On pourrait parler d'une certaine solidarité entre MPR et PER, au sens où les seconds seraient une version didactique expérimentale des premiers. En deuxième lieu, le fait que la question Q soit, quelque soit peu liée à un certain domaine ou discipline – cette situation est presque inévitable dans les systèmes d'enseignement actuels –, implique un certain manque d'ouverture du processus d'étude. En particulier, il empêche que le contrat d'étude et de recherche puisse considérer la question Q comme le principal enjeu du processus. Même si Q est toujours choisie par son intérêt indépendamment du domaine où se situe son étude, on ne peut éviter que la communauté d'étude la considère comme un moyen pour une fin, qui serait l'étude de ce savoir. De toute manière, par analogie avec les situations didactiques, on peut considérer cette situation comme une solution de compromis : le fait que les étudiants ne sont pas dupes que Q n'est pas l'alpha et l'oméga du processus d'étude et de recherche n'empêche pas qu'ils puissent la considérer comme ayant un intérêt suffisamment grand pour que la solution à y apporter importe. Il reste encore comme une condition didactique importante que la communauté d'étude soit capable de construire un certain destin ou utilité à la réponse apportée, en la convertissant en une nouvelle R^\diamond disponible pour une prochaine enquête.

La seconde remarque tient à la « taille » des organisations praxéologiques impliquées. À la différence de certains travaux sur la modélisation mathématique ou les démarches d'investigation, les PER sont des processus didactiques longs qui, de ce fait, activent ou sont susceptibles d'activer un ensemble assez vaste d'outils de savoir. Dans ce cadre, la notion de praxéologie et les dynamiques en termes de suites d'organisations praxéologiques s'avère parfois trop détaillée pour être utilisée comme modèle de référence. Le choix que les chercheurs sont en train de faire est de se centrer dans certaines des dialectiques de l'étude, comme celle entre questions et réponses, pour apporter une première description des PER en termes de cartes de questions et réponses (Barquero et Florensa, 2019; Florensa, 2018). Il n'est pas étonnant que ces modèles en formes de diagrammes de questions et réponses se soient avérés très productifs en formation des enseignants, comme outils de description d'organisations praxéologiques allant au-delà du sujet ou du thème (Barquero, Bosch et Romo, 2018). En même temps, le fait de mettre en avant la question initiale et les questions dérivées qui, en un sens, soutiennent le parcours d'étude et de recherche, contribue à « démonumentaliser » les organisations praxéologiques curriculaires : celles-ci apparaissent toujours comme utiles pour apporter des réponses à des questions, jamais comme intéressantes par elles-mêmes.

Finalement, même si ces cartes de questions-réponses apparaissent comme des modèles relativement simples – c'est-à-dire, qui ne rendent pas compte de nombre d'éléments importants du processus d'étude et de recherche –, elles ont l'avantage d'aider à rompre assez facilement avec l'organisation traditionnelle des savoirs, qui a tendance à s'appuyer beaucoup plus sur les liens « anatomiques » des praxéologies (liés à leur construction théorique) que sur leurs liens « organiques » (liés à leur utilisation pour étudier des questions). On peut dire alors qu'ils sont de très bons outils de détachement aussi bien de l'épistémologie scolaire dominante que de l'épistémologie savante.

III. CONCLUSIONS ET QUESTIONS OUVERTES

La recherche sur les parcours d'étude et de recherche, avec leurs descriptions en termes d'éléments du schéma herbartien et de dialectiques de l'enquête, permettent d'élaborer des modèles épistémologiques ou praxéologiques de référence présentant des formes très diverses. En particulier, ils permettent de mettre en avant l'aspect dynamique et fonctionnel des organisations de savoir. Ils sont facilement articulables avec les modèles en termes de praxéologies qui, eux, semblent plus appropriés pour des descriptions plus détaillées d'objets de savoir relativement limités. L'articulation entre les deux types de modèles de référence est relativement directe étant donné que, dans le schéma herbartien, les réponses élaborées ou accessibles peuvent se décrire en termes d'organisations praxéologiques. C'est là le point de contact entre les deux paradigmes : le questionnement du monde inclut des moments d'étude de réponses étiquetées R^\diamond , qui deviennent par là des œuvres à visiter.

Les recherches présentées posent un grand nombre de questions méthodologiques qui devraient nous guider dans nos travaux futurs. Par exemple, les expérimentations de PER et l'analyse de leur écologie mettent en évidence d'importants besoins praxéologiques dans la gestion des processus d'étude et de recherche. En particulier, un manque de mots officiellement reconnus pour désigner les nouveaux gestes et objets qui apparaissent lors des enquêtes, ainsi que pour les différents rapports à ces nouveaux objets : comment parler des questions intermédiaires, des réponses provisoires, des media, etc. qui n'ont pas de désignation officielle dans les savoirs savants ? Comment gérer la chronogénèse et la topogénèse sans terminologie ou avec une terminologie trop privée et pas assez légitime ? Que peut-on et doit-on institutionnaliser ?

Dans le cas de la TSD, il est évident que les modèles épistémologiques de référence élaborés en termes de situations fondamentales sont des outils clé pour l'ingénierie didactique – et pas seulement pour l'analyse. Il en est de même avec les MPR présentés plus haut : nombres entiers, algèbre, modélisation fonctionnelle, calcul différentiel, etc. Dans ce cadre, les éléments des MPR apparaissent comme des outils didactiques efficaces pour la gestion des processus didactiques, aussi bien pour les professeurs que pour les élèves. Dans le cas du schéma herbartien, les cartes de questions et réponses ont été aussi utilisés de manière productive pour la création et gestion de PER et en formation des enseignants. Qu'en est-il des autres éléments du schéma et des dialectiques de l'enquête ? Va-t-on se mettre à parler avec les élèves des média et des milieux ? Va-t-on distinguer les œuvres « étiquetées » des élaborations propres, de la même manière qu'on peut distinguer les questions dérivées et les réponses provisoires ? Comment, dans un processus d'étude et de recherche, séparer les « contenus de l'étude » des « outils de l'étude » ? Parlera-t-on à ce propos de glissement métacognitif ?

Finalement, se situer dans le paradigme du questionnement du monde revient à inclure la construction d'un MPR associé à une œuvre R^\diamond comme un élément de déconstruction et reconstruction de ce qui doit avoir lieu *pendant* le processus d'enquête. En effet, la question de la nature et fonction des réponses identifiées dans les média R^\diamond est un élément essentiel de l'enquête. En sommes-nous à dire que la construction de MPR de ces R^\diamond doit s'inclure comme l'une des gestes de l'enquête, dans la dialectique des média et des milieux articulée à celle des boîtes noires et boîtes grises ou à celle du parachutiste et du truffier ?

L'étude de l'écologie des PER dans les systèmes d'enseignement actuels et l'exploration du champ de possibilités qu'offre le paradigme de la visite des œuvres pour évoluer vers celui de du questionnement du monde requiert un travail d'ingénierie didactique et d'analyse remarquable. En particulier, elle demande un grand effort d'émancipation de beaucoup d'assujettissements institutionnels, aussi bien des institutions scolaires que savantes. Il n'est

pas étonnant qu'elle soulève aussi un grand nombre d'interrogations méthodologiques et théoriques.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- ARTAUD, M. (1993). *La mathématisation en économie comme problème didactique : une étude exploratoire*. Thèse de doctorat. Université d'Aix-Marseille.
- ASSUDE, T. (1993). Écologie de l'objet « racine carrée » et analyse du curriculum. *Petit x*, 35, 43-58
- BARQUERO, B. (2009). *Ecología de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las matemáticas*. Thèse de doctorat. Universitat Autònoma de Barcelona, Espagne.
- BARQUERO, B., BOSCH & M. ROMO, A. (2018). Mathematical modelling in teacher education: dealing with institutional constraints. *ZDM Mathematics Education*, 50(1-2), 31-43.
- BARQUERO, B. & FLORENSA, I. (2019). Méthodologie pour le design et l'analyse de Parcours d'Etude et de Recherche. In J. Pilet et C. Vendaiera (Eds) *Actes du séminaire de didactique des mathématiques 2018* (pp.333-341). Paris : IREM de Paris, Université Paris-Diderot. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02421410>
- BARTOLOMÉ, E., FLORENSA, I., BOSCH, M. & GASCÓN, J. (2019). A 'study and research path' enriching the learning of mechanical engineering. *European Journal of Engineering Education*, 44(3), 330-346.
- BEZERRA dos Santos JUNIOR, V. (2017). Juros simples e compostos: análise ecológica, praxeológica e um percurso de estudo e pesquisa. Thèse de doctorat. Universidade Anhanguera de São Paulo, Brésil.
- BOLEA, P., BOSCH, M., GARCÍA, J., GASCÓN, J., RUIZ-HIGUERAS, L. & SIERRA, T. A. (2005). Analyse de « La mesure en CMI » d'après la TAD. In M. H. SALIN, P. CLANCHE & B. SARRAZY (Eds.) *Sur la Théorie des Situations Didactiques* (pp.153-166). Grenoble : La Pensée sauvage.
- BOSCH, M. (1994). La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad. Thèse de doctorat. Universitat Autònoma de Barcelona, Espagne.
- BOSCH, M. (2018). Study and research paths. A model for inquiry. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians – 2018 Rio de Janeiro*, Vol. 3 (4001-4022). <https://eta.impa.br/dl/121.pdf>
- BOSCH, M. & CHEVALLARD, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(1), 77-124.
- BOSCH, M., CHEVALLARD, Y., GARCIA, F. J. & MONAGHAN, J. (2019). *Working with the Anthropological Theory of the Didactic in Mathematics Education: A Comprehensive Casebook*. Routledge.
- BOSCH, M., ESPINOZA, L. & GASCÓN, J. (2003). El profesor como director de procesos de estudio: análisis de organizaciones didácticas espontáneas. *Recherches en didactique des mathématiques*, 23(1), 79-135.
- BOSCH, M. & GASCON, J. (2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. In A. Mercier & C. Margolinas (Coord.), *Balises en Didactique des Mathématiques* (pp.107-122). Grenoble : La Pensée sauvage.
- BRACONNE-MICHOUX, A. (2014). Les niveaux de pensée en géométrie de van Hiele : de la théorie à l'épreuve de la classe. *Bulletin AMQ*, 54(1), 24-51.
- BROUSSEAU, G. (2000). Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire ; l'étude de l'espace et de la géométrie, *Actes du 2e colloque de didactique des mathématiques* (p.67-83). Crète, Grèce : Université de Crète. (hal-00515110)
- BROUSSEAU, G. (2000). Les différents univers de la mesure et leurs situations fondamentales. Un exemple d'utilisation de la théorie des situations pour l'ingénierie. *Quaderni di Ricerca in Didattica*, 9, 125-133.
- BURGER, W. F. & SHAUGHNESSY, J. M. (1986). Characterizing the van Hiele levels of development in geometry. *Journal for research in mathematics education*, 31-48.
- CHEVALLARD, Y. (2007). Un concept en émergence : la dialectique des médias et des milieux. In G. Guedet & Y. Matheron (Eds) *Actes du Séminaire National de Didactique des Mathématiques, Année 2007* (pp.344-366). Paris : IREM de Paris.
- CHEVALLARD, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(2), 221-266.
- CHEVALLARD, Y. (2010). La didactique, dites-vous ? *Éducation et didactique*, 4(1), 139-148.
- CHEVALLARD, Y. (2015). Teaching Mathematics in tomorrow's society: a case for an oncoming counter paradigm. In The proceedings of the 12th international congress on mathematical education (pp. 173-187). Springer, Cham.
- CHEVALLARD, Y. (2019). Introducing the anthropological theory of the didactic: an attempt at a principled approach. *Hiroshima Journal of Mathematics Education* 12, 1-44.
- CHEVALLARD, Y. & JULLIEN, M. (1989). Sur l'enseignement des fractions au collège : ingénierie, recherche, société. *Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques*, Marseille.
- CID, E. (2015). *Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos*. Thèse de doctorat Universidad de Zaragoza, Espagne.
- CID, E., MUÑOZ-ESCOLANO, J. M., RUIZ-MUNZÓN, N. (2019). Research on negative numbers in school algebra. Dans M. Bosch, Y. Chevallard, F. J. García & J. Monaghan (éds.), *Working with the anthropological theory of the didactic in mathematics education* (pp. 61-76). Routledge.
- IGNACIO, R. d. S. (2018). *Percurso de estudo e pesquisa na educação básica: limites e possibilidades*. Thèse de doctorat. Universidade Anhanguera de São Paulo, Brésil.
- FLORENSA, I. (2018). *Contributions of the epistemological and didactic analysis: question-answer maps in engineering and in teacher education*. Thèse de doctorat. Universitat Ramon Llull, Barcelone, Espagne.
- FLORENSA, I., BOSCH, M., GASCÓN, J. & WINSLOW, C. (2018). Study and Research Paths: A New tool for Design and Management of Project Based Learning in Engineering. *International Journal of Engineering Education*, 34(6):1848-1862.

- GARCÍA, F. J. (2005). *La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales*. Thèse de doctorat. Universidad de Jaén.
- GÓMES SILVA, J. V. (2016). *Grandezas e medidas: um percurso de estudo e pesquisa para a prática profissional*. Thèse de doctorat. Universidade Anhanguera de São Paulo, Brésil.
- KIM, S. (2015). *Les besoins mathématiques des non-mathématiciens : quel destin institutionnel et social ? Études d'écologie et d'économie didactiques des connaissances mathématiques*. Thèse de doctorat. Aix-Marseille Université.
- LICERA, R. M. (2017). *Economía y ecología de los números reales en la Enseñanza Secundaria y la Formación del profesorado*. Thèse de doctorat. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chili
- LUCAS, C. (2015). *Una posible razón de ser del cálculo diferencial elemental en el ámbito de la modelización funcional*. Thèse de doctorat. Universidad de Vigo, Espagne
- LUCAS, C., FONSECA, C., GASCÓN, J. & SCHNEIDER, M. (2019). The phenomenotechnical potential of reference epistemological models. In M. Bosch, Y. Chevallard, F. J. García, & J. Monaghan (éds.), *Working with the anthropological theory of the didactic in mathematics education* (pp. 77-97). Routledge.
- NICASSO, R. (2019). *Construção de um percurso de estudo e pesquisa para formação de professores: o ensino de cônicas*. Thèse de doctorat. Pontificia Universidade São Paulo, Brésil.
- RODRÍGUEZ, E. (2005). *Metacognición, resolución de problemas y enseñanza de las matemáticas. Una propuesta integradora desde el enfoque antropológico*. Thèse de doctorat. Universidad Complutense de Madrid, Espagne.
- RUIZ-MUNZÓN, N. (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional*. Thèse de doctorat. Universitat Autònoma de Barcelona, Espagne.
- SERRANO, L. (2013). *La modelización matemática en los estudios universitarios de economía y empresa: análisis ecológico y propuesta didáctica*. Thèse de doctorat. Universitat Ramon Llull, Barcelona, Espagne.
- SIERRA, T. (2006). *Lo matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas. Los sistemas de numeración y la medida de magnitudes continuas*. Thèse de doctorat. Universidad Complutense de Madrid, Espagne.
- WOZNIAK, F. (2005) *Conditions et contraintes de l'enseignement de la statistique en classe de seconde générale. Un repérage didactique*. Thèse de doctorat. Université de Provence.

L'INTRODUCTION DU CONCEPT DE LIMITE DE FONCTION AU BRÉSIL ET EN FRANCE

Sonia Maria **MONTEIRO DA SILVA BURIGATO***

Université Federal de Mato Grosso do Sul/Brésil
soniaburigato@gmail.com

José Luiz **MAGALHÃES DE FREITAS****

Université Federal de Mato Grosso do Sul/Brésil
joseluizufms2@gmail.com

Cécile **OUVRIER-BUFFET*****

Université Paris Est Créteil, Laboratoire de Didactique André Revuz
cecile.ouvrier-buffet@u-pec.fr

Résumé

Dans ce travail, nous présentons une partie de notre recherche doctorale dont l'objet est l'introduction de la notion de limite pour les étudiants au Brésil et en France. Notre question générale est comment les étudiants construisent-ils une première approche du concept de limite ? Dans ce texte, nous présentons quelques lignes directrices de cette recherche que nous avons déjà réalisées au Brésil et en France. Au Brésil, nous avons élaboré et expérimenté des activités, avec des types de situations liées à la présentation du concept de limite, basées en particulier sur la théorie des champs conceptuels. En France, nous suivons l'introduction du concept dans une classe de lycée afin d'étudier les *schèmes* mobilisés par les élèves. Les premières analyses des productions du Brésil face aux situations proposées indiquent qu'ils mobilisent des dispositifs qui ne sont pas encore stables pour des situations qu'ils ont pourtant déjà vues dans l'éducation de base.

Mots clés

Limite de fonction, Licence en mathématiques, Invariants opératoires, Didactique des mathématiques

L'objectif principal est d'étudier l'introduction du concept de limite dans les cours de calcul différentiel, analyse mathématique, à l'université au Brésil et de la comparer avec le modèle français¹. Ainsi, nous voulons présenter certaines différences observées dans ces deux pays et également un bref résumé de nos choix méthodologiques.

Une différence que nous observons entre ces deux pays, est la suivante. En France, le concept de limite est présenté à différents moments au cours de la scolarité, à partir du lycée. Au

*Professeur de l'Université Federal de Mato Grosso do Sul/Brésil

**Professeur du PPGEduMat de l'Université Federal de Mato Grosso do Sul/Brésil

*** Professeure de l'Université Paris Est Créteil, Laboratoire de Didactique André Revuz

¹ Cette recherche est financée par le PDSE/CAPES.

Brésil, ce concept est introduit à l'université, en général dans la première année des cours. De plus, les introductions du concept sont réalisées de différentes façons dans ces deux pays.

Nous avons choisi de travailler sur la présentation de la notion de limite et sur les situations qui permettent de travailler sur les difficultés rencontrées habituellement par les élèves, par exemple l'approximation d'un point, ainsi que l'idée de nombre arbitrairement petit.

En considérant ces différences dans l'enseignement de ce concept, nous avons comme questionnement général : comment les étudiants construisent-ils une première approche, une première connaissance du concept de limite ?

Notre étude vise à étudier le processus d'apprentissage des étudiants lorsqu'ils sont confrontés à des situations d'introduction d'un concept mathématique.

Notre cadre théorique est principalement basé sur les champs conceptuels. Pour Vergnaud (1990), il est nécessaire de prendre en compte les situations ainsi que les concepts liés à ces situations. Nous avons donc cerné le champ conceptuel de la notion de limite de fonction, et des concepts qu'elle implique comme ceux d'inégalité, d'intervalle, de nombre réel et de fonction. En effet, d'après Artigue (1995), ces concepts sont encore en construction lorsque les étudiants rencontrent celui de limite.

Nous considérons également la notion de *schème* au sens de Vergnaud (1990) et nous nous intéressons en particulier aux types de problèmes et aux invariants opératoires, ainsi qu'aux représentations.

Notre cadre théorique a ainsi pour fonction de caractériser les différentes actions organisationnelles qui guident les étudiants dans les situations des activités proposées. En particulier, nous nous concentrons sur les erreurs, les difficultés et les connaissances des étudiants tout au long du processus de résolution.

Notre méthodologie s'organise de la façon suivante :

- ✓ Caractériser certains concepts de base et définir le champ conceptuel ;
- ✓ Identifier des invariants opératoires mobilisés par les élèves pour résoudre des activités ;
- ✓ Chercher comment l'étudiant organise ses *schèmes* de raisonnement ;
- ✓ Identifier quels sont les concepts mathématiques utilisés dans ces *schèmes*.

En premier lieu, nous avons caractérisé les différents concepts impliqués dans l'enseignement de la notion de limite au Brésil et en France, à travers l'analyse de documents officiels et de manuels. Nous avons aussi élaboré et expérimenté trois ensembles d'activités, pour chercher des points de comparaison entre les situations d'introduction du concept de limite dans ces deux pays. Ceci a été mis en œuvre pour engager une comparaison des schèmes des étudiants français et brésiliens. Nous avons en particulier pris appui sur la notion de « définition intuitive » dans le sens mobilisé dans un livre très utilisé au Brésil (Guidorizzi, 2001).

Nous conduisons actuellement les analyses de notre expérimentation réalisée au Brésil. Dans une première analyse, nous avons observé que les étudiants mobilisaient des invariants opératoires généralement en dehors de leur domaine de validité face à ce nouveau concept de « limite ». Une grande variété de situations est alors nécessaire pour que l'apprentissage puisse avoir lieu et nous le discutons dans nos analyses.

En France, nous cherchons à identifier certains chemins intellectuels parcourus par les étudiants pour faire face aux situations et pour appréhender le concept de limite. Ce travail est actuellement en cours.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- ARTIGUE, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. In *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 97-140). Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.
- GUIDORIZZI, H. L. (2001). *Um Curso de Cálculo: volume 1*, 5ª edição. Rio de Janeiro: Editora LTC.
- VERGNAUD, G. (1990). La théorie de champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10 (2-3), 133-170.

PERTINENCE DE LA PRISE EN COMPTE DU FORMALISME LOGIQUE POUR UNE ETUDE DIDACTIQUE DE L'ACTIVITE MATHEMATIQUE

Faïza **CHELLOUGUI**

Faculté des Sciences de Bizerte

Université de Carthage, Tunisie

chellouguifaiza@yahoo.fr

Résumé

Dans cette communication, nous rendons compte d'un travail méthodologique, incluant principalement la logique des prédicats pour l'analyse des difficultés liées à la syntaxe, au langage formel et à l'usage des connecteurs logiques en général (Chellougui, 2018).

Nous présenterons dans une première partie les principaux résultats de l'enquête épistémologique sur l'émergence du formalisme logique, qui ont nourri notre questionnement didactique. Nous montrerons que la formalisation des énoncés mathématiques dans le langage du calcul des prédicats révèle des quantifications implicites et permet d'étudier la complexité de la structure des énoncés. Dans une deuxième partie, nous présenterons la méthodologie que nous avons développée en appui sur la déduction naturelle de Copi pour conduire les analyses a priori et a posteriori des preuves mathématiques. Nous illustrerons cette méthodologie en présentant une étude expérimentale réalisée auprès d'étudiants de première année de licence mathématiques ayant suivi un enseignement de logique sur le système de déduction naturelle de Copi.

Mots clés

Formalisme logique, formalisme mathématique, analyse logique de preuves, calcul des prédicats, quantificateurs universel et existentiel, déduction naturelle de Copi, syntaxe, sémantique

I. INTRODUCTION

Poser la question du formalisme du point de vue épistémologique et de point de vue cognitif dans une perspective didactique n'est pas aussi simple qu'il y paraît à première lecture.

Du côté de la philosophie, de la logique et du langage, les études didactiques invitent à reconsidérer une représentation assez classique des mathématiques comme le lieu de la rigueur par excellence. La question qui s'impose est celle du traitement du paradoxe apparent, auquel sont confrontés les mathématiciens dans leur enseignement : alors que la formalisation devrait être la pierre de touche de la clarté conceptuelle (Quine, 1950) elle se pose le plus souvent en véritable obstacle à l'appropriation des contenus en jeu (Durand-Guerrier, 2008 ; Chellougui, 2009, 2018 ; Njomgang-Ngansop, 2013).

Pratiquement peu présente aujourd'hui dans les curricula de l'enseignement secondaire de plusieurs pays, la logique à l'œuvre dans l'activité mathématique est le plus souvent absente du discours de l'enseignant (Durand-Guerrier & Arzac, 2003 ; Durand-Guerrier, 2005 ; Chellougui, 2017) ; elle est utilisée le plus souvent de manière naturalisée, non problématisée et sans théorie de référence (Mesnil, 2014).

Du côté de la didactique des mathématiques, il s'agit de pouvoir développer des méthodes et des outils conceptuels performants et adaptés pour étudier certaines questions de l'enseignement et de l'apprentissage des disciplines logico-mathématiques. L'apprentissage des disciplines logico-mathématiques induit des difficultés très résistantes chez de nombreux élèves et étudiants alors que les mathématiques sont des outils essentiels de l'activité humaine dans de très nombreux domaines. Un des obstacles principaux réside dans l'appropriation des formalismes et leur mise en relation avec les contenus, empiriques ou théoriques, qu'ils permettent de modéliser. Cette question est au cœur de nombreux travaux en didactique des mathématiques (Durand-Guerrier & Arzac, 2005 ; Durand-Guerrier, 2008 ; Chellougui, 2009). L'étude de la pertinence et de la fécondité des écritures et des preuves formelles pour l'étude de la validité des raisonnements est au cœur des travaux des logiciens contemporains depuis la fin du XIXe siècle, en particulier ceux de Quine qui considère la logique comme étant une théorie de l'inférence valide (Quine 1950). Cette dimension de la logique s'applique dans de nombreux domaines comme les sciences informatiques, la philosophie de la logique et du langage, bien qu'elle entretienne des relations privilégiées avec les mathématiques (Cori & Lascar, 1993).

A l'entrée à l'université, on observe que le langage mathématique formalisé se pose en obstacle presque insurmontable pour un grand nombre d'étudiants (Selden & Selden, 1995 ; Dubinsky & Yiparaki, 2000 ; Gueudet, 2008 ; Njomgang-Ngansop, 2013 ; Mesnil, 2014 ; Hache & Mesnil, 2015 ; Chellougui 2017, 2018). L'étude didactique de ces difficultés met en évidence une perte de sens dans la manipulation des écritures formelles, qui annihile leurs potentialités en termes d'apprentissage de notions mathématiques (Chellougui, 2009, 2018). Selon Durand-Guerrier (2005), pour contrôler la validité d'un raisonnement, il faut non seulement s'assurer que la loi logique est valide, mais également contrôler la vérité des prémisses. De la sorte, il est tout à fait clair que la logique ne peut, à elle seule, permettre d'établir la vérité dans des disciplines scientifiques données. L'articulation entre syntaxe et sémantique, apparaît nettement comme un enjeu fondamental pour l'apprentissage de ces disciplines à tous les niveaux d'enseignement, ceci en opposition avec l'idée couramment répandue que la maîtrise de la syntaxe est l'objectif prioritaire, en particulier en ce qui concerne les mathématiques.

L'intérêt de notre travail porte particulièrement sur le formalisme logique, c'est-à-dire tout processus impliquant la construction d'un langage formel, de l'amorce de la résolution d'un problème à la construction formelle de théories. L'hypothèse étant que le formalisme logique joue un rôle important dans tout raisonnement soutenu par un langage mathématique largement utilisé dans une activité mathématique. Le fait de s'approprier un langage formel, langage mixte ou langage naturel pour définir un concept, mène à des questionnements sur les objets et les structures qui le composent et sur l'apport cognitif des étudiants (Chellougui, 2016). Cet élargissement du formalisme va donc conduire à mettre à l'épreuve l'usage des éléments de logique et mathématiques dans une approche didactique.

Dans notre recherche, il s'agit d'identifier quelques concepts d'analyse propices au formalisme et à la dialectique entre le processus de formalisme et le processus de preuve, en utilisant la déduction naturelle développée par Copi comme outil de modélisation des raisonnements mathématiques (Chellougui, 2018).

II. ENQUETE EPISTEMOLOGIQUE SUR L'EMERGENCE DU FORMALISME LOGIQUE

1. Un bref parcours historique de la logique

La logique est fondamentale autant à la philosophie qu'aux mathématiques, son histoire remonte à Aristote. Les commentateurs d'Aristote ont regroupé plusieurs de ses œuvres sous le titre Organon (*instrument*), comprenant les *Catégories*, où il expose les fondements métaphysiques de sa théorie des phrases, *De l'Interpretation*, où il distingue les différentes parties d'une phrase, les *Premiers* et *Deuxièmes Analytiques*, où il expose les règles et les formes des inférences (*sylogismes*) et, en particulier, des syllogismes nécessaires, et *Les Topiques* et *Les Réfutations Sophistiques*.

Un bref regard sur l'histoire de la logique peut élucider au moins l'évolution de la notion du langage et du formalisme vers le sens qui leur est attribué aujourd'hui. La théorie du syllogisme d'Aristote est une analyse du raisonnement, il met les bases d'un programme logique étendu où la pensée, le raisonnement et le langage sont ensemble sans faire entre eux une distinction nette. Ce programme sera repris par ses successeurs sous différentes formes aboutissant au XX^e siècle à la logique formelle. Celle-ci a eu une influence considérable dans l'histoire de la philosophie et de la pensée scientifique en général. Plus de deux mille ans après, cette situation a fondamentalement changé avec l'avènement de la logique moderne, découverte en grande partie par le mathématicien et philosophe allemand Frege, puis développée par Russell, Whitehead, Wittgenstein, Quine et d'autres. En parallèle avec les développements des systèmes formels par Peano, de Morgan, Russell, etc., la logique est devenue une pierre angulaire de la philosophie et des mathématiques, et plus récemment elle l'est aussi devenue pour la linguistique et l'informatique (Keller, 2007). Cette époque a mis en place deux tendances qui se définissent dans la logique autour du rapport entre la logique et les mathématiques. Elles ont été appelées par certains logiciens, comme Frege, Russell et Hilbert, le logicisme et le formalisme. Le logicisme se propose de ramener les mathématiques à la logique. Le formalisme, dont le représentant est Hilbert, se demande quels éléments mathématiques interviennent dans la logique. Ces deux tendances ont donné actuellement, les deux formes d'existence de la logique classique : la théorie des modèles et la déduction naturelle.

2. Enquête épistémologique sur le concept de quantification

L'enquête épistémologique sur le concept de la quantification (Chellougui & Kouki, 2012) conduite dans nos travaux antérieurs, avait pour objectif de questionner la pertinence de la logique des prédicats comme outil d'analyse de la nature des difficultés de raisonnement des étudiants de premier cycle universitaire dans l'activité mathématique, en limitant notre étude aux quantificateurs universel et existentiel. Le retour à quelques textes fondateurs, d'Aristote à Quine en passant par Frege et Russell et Leibniz, nous a permis de voir la logique émerger comme une tentative d'élucidation et d'éclaircissement de deux concepts fondamentaux : le formalisme et le langage mathématique.

L'enquête épistémologique que nous avons menée, ne prétend en aucune manière à l'exhaustivité, puisque d'autres philosophes, logiciens et mathématiciens, comme Boole, Curry, Gödel, Peano, Tarski, Wittgenstein et Whitehead ont aussi contribué au développement des

concepts logiques. Nos choix ont été guidés par les besoins que nous avons identifiés pour être en mesure de conduire les études didactiques qui sont au cœur de nos recherches.

La logique chez Leibniz

La logique de Leibniz a marqué une coupure entre la logique classique aristotélicienne et la logique moderne. Toutefois, son rapport à la logique mathématique contemporaine est davantage une anticipation qu'une réelle influence. C'est le nouveau développement de la logique dans une perspective mathématique, au XIX^e siècle, qui a attiré l'attention sur l'œuvre de Leibniz et non l'inverse. Son œuvre était de développer un langage symbolique artificiel afin d'introduire des principes et des méthodes propres aux sciences mathématiques dans un domaine de connaissance en utilisant principalement les acquis des mathématiques. Il compare pour cela la logique aux mathématiques : pour lui, il n'y a de démonstrations qu'en mathématiques et il doit y en avoir en logique aussi. Donc, la logique doit suivre le modèle des mathématiques (Pascu, 2006). Les liens entre la logique et les mathématiques, posés par Leibniz et tissés tout au long du XIX^e siècle et du XX^e siècle ont un double aspect : d'une part, la construction de la logique s'inspire du langage des mathématiques, la logique *se mathématise*, d'autre part, elle sert à *justifier* les mathématiques, elle veut être une étude des fondements des mathématiques (Pascu, 2006). Les efforts de Leibniz n'ont pas manqué pour construire une langue universelle, celle-ci est tiraillée entre deux exigences difficilement conciliables, celle de la perfection logique et celle de la commodité pratique. Pour lui, il s'agit d'un fondement pour toute la connaissance.

Le projet de Leibniz (1703) de langue universelle permet de construire une écriture qui opère sur des caractères de manière calculatoire et combinatoire. Ces caractères sont ordonnés de manière à ce qu'ils correspondent exactement à la manière dont les pensées s'enchaînent. Bien que ce projet soit resté à l'état d'ébauche dans l'œuvre de Leibniz, il est révélateur d'une attitude philosophique assez commune à l'égard du langage ordinaire : repérer les abus dont il fait l'objet, sans le condamner en tant que tel, pour lui substituer une langue ou une écriture qui puisse représenter adéquatement et univoquement les pensées. Ceci a été repris par Frege, au XIX^e siècle, qui se réclame d'une tradition leibnizienne dans ses travaux consacrés à l'idéographie et, en particulier dans son opuscule (Frege, 1879) intitulé justement *Begriffsschrift*¹. Leibniz utilise notamment l'expression de langue caractéristique, et ce bien que l'idéographie de Frege apparaisse comme un projet beaucoup plus modeste que la caractéristique universelle leibnizienne. Nous développerons dans le paragraphe suivant le projet de formalisation opéré par Frege.

Le projet de formalisation de Frege

Un tournant dans la logique se produit avec Frege dans la deuxième moitié du XIX^e siècle. Le système logique du mathématicien allemand Frege était censé être *le fondement* de son programme. Il s'agissait de donner une construction exclusivement logique aux mathématiques, particulièrement à l'arithmétique et à l'analyse. Frege voulait prouver que le contenu exprimé par les propositions vraies n'a pas un caractère exclusivement mathématique, mais qu'il représente une vérité purement logique. En outre, il considère, que l'on ne peut pas toujours se fier à l'intuition pour trancher entre le vrai et le faux et il assigne à la logique l'étude du passage du vrai au vrai (Durand-Guerrier, 2005).

La logique contemporaine est née en 1879 avec la parution du *Begriffsschrift* dans lequel Frege a essayé de développer un langage formel et symbolique pour la formalisation des

¹ Idéographie : écriture de concept.

mathématiques : il n'est pas question de fonder une écriture qui s'appliquerait en théorie à tous les domaines, il s'agit davantage de faire ressortir certaines normes logiques en termes de quantification et de connexion entre les propositions. Avec cet objectif, il a inventé le premier calcul d'une logique de prédicats.

L'idéographie repose sur un système de signes dont l'objectif est de représenter adéquatement toutes les propositions de l'arithmétique et qui, donc, ne sont ni vides ni arbitraires. En cela, elle pallie les défauts du langage naturel qui, pour Frege, sont de deux ordres : d'un côté, loin de corriger les fautes de pensée, il les favorise ; de l'autre, dans la langue ordinaire un même mot peut avoir le statut de concept général et d'objet particulier sans faire de distinction.

Par ailleurs, il y a quelques caractéristiques de la logique frégréenne qui se proposent de modéliser le langage. C'est ainsi que Frege (1879) a appelé son système logique l'*Idéographie*. Ses caractéristiques qui le distinguent d'autres formalismes logiques portent sur le type de formalisme et sur son contenu. D'une part, la présentation du calcul propositionnel dans l'Idéographie est faite dans une manière assez proche de la déduction naturelle (Durand-Guerrier, 2005 ; Chellougui, 2016). D'autre part, sa théorie de la quantification est présentée dans l'Idéographie d'une telle manière qu'on voit explicitement que les quantificateurs sont des opérateurs. Ce fonctionnement est considéré comme un grand acquis de la logique moderne tel qu'il est défini par Frege, afin d'articuler la syntaxe et la sémantique.

Basée sur les travaux de Frege en philosophie du langage, l'analyse des descriptions définies de Russell (1905) représente l'exemple paradigmatique de la philosophie du langage du début du XX^e siècle.

Russell fondateur de la logique mathématique moderne

Par son œuvre de base *Les Principes des mathématiques* (The Principles of Mathematics), Russell est considéré comme le fondateur de la logique mathématique moderne. Il était un grand admirateur de l'œuvre de Frege, et s'accordait avec lui sur l'idée d'une réductibilité de la mathématique à la logique. Toutefois, dans l'article *Sur la dénotation* (1905), Russell attaqua le cadre conceptuel frégréen de *Sens et dénotation*, en lui opposant une analyse du langage qui se dispensait du concept de sens : la seule propriété sémantique d'une expression linguistique qui soit de quelque importance pour la valeur de vérité des énoncés dans lesquels elle apparaît, c'est sa dénotation. En mettant une identité entre la logique et les mathématiques, au sens qu'il note dans l'introduction de son œuvre qu'il reste un défenseur du logicisme.

Les contributions de Russell (1905) comprennent essentiellement le développement du calcul du premier ordre, en tant que fonction propositionnelle, le formalisme en tant que théorie des descriptions définies. La description définie, selon lui, contient une affirmation d'existence et une affirmation d'unicité et elles peuvent être considérées séparément de la prédication contenue par la proposition entière. Ces descriptions représentent la principale contribution de Russell à l'analyse du langage. La fonction propositionnelle pour Russell est la forme logique d'une proposition de la langue naturelle.

Un point de vue sémantique sur la vérité : Wittgenstein et Tarski

A partir du calcul propositionnel, Wittgenstein (1921) donne une place centrale aux fonctions de vérité en introduisant dans le système formel deux valeurs de vérité le *Vrai* et le *Faux*. En accord avec Durand-Guerrier, les connecteurs logiques sont définis dans le système de manière combinatoire, sans référence *a priori* à leur signification dans l'usage courant, par leur table de vérité, qui devient un outil pour étudier les possibilités de vérité des énoncés complexes. Ceci conduit Wittgenstein à distinguer deux catégories extrêmes de propositions complexes : celles

qui sont vraies pour toutes les distributions de valeurs de vérité des propositions élémentaires, qu'il appelle *tautologies*, et celles qui sont fausses pour toutes les distributions de valeurs de vérité des propositions élémentaires, qu'il appelle *contradictions* (Durand-Guerrier, 2005). Il écrit alors que la valeur de vérité d'une proposition est *possible*, celle d'une tautologie est *certaine*, celle d'une contradiction est *impossible* (Wittgenstein 1921, p. 63).

C'est à Tarski (1936) qu'il reviendra de développer une théorie permettant d'étendre les avancées de Wittgenstein à tous les systèmes formels. Dans son article « *Le concept de vérité dans les langages formalisés* » publié en 1936, Tarski énonce son projet dès les premières lignes de son article en ces termes :

« Le présent travail est presque exclusivement consacré à un seul problème, au problème de la définition de la vérité. Il s'agit en effet – compte tenu de tel ou tel langage – de construire une définition de l'expression « proposition vraie », définition qui soit matériellement adéquate et formellement correcte ! » (Tarski, 1936, p.159, in Durand-Guerrier, 2005, p. 16)

Pour Tarski, la logique déductive est une branche des mathématiques. Selon Durand-Guerrier (2005), la *théorie des modèles* est le nouveau nom donné par Tarski à ce qu'il appelle *Méthodologie des sciences déductives* ou *Méthodologie des mathématiques*.

Tarski (1936) choisit de présenter sa méthode de construction d'une théorie de la vérité pour un langage donné sur l'exemple de l'algèbre des classes, ceci afin « d'initier le lecteur à cette méthode ». Il considère en effet :

« [...] qu'une définition générale abstraite de cette méthode et des langages auxquels elle s'applique serait obscure et pénible. » (Durand-Guerrier, 2005, p. 18)

Selon Durand-Guerrier, Tarski introduit le concept fondamental de *satisfaction d'une fonction propositionnelle par tels ou tels objets*. Il introduit également la notion de satisfaction d'une phrase ouverte par un élément :

« Tarski illustre ensuite cette définition dans le cas le plus simple d'une fonction propositionnelle ne contenant qu'une variable libre de la manière suivante : Pour tout a, a satisfait la fonction propositionnelle « x est blanc » si et seulement si a est blanc.

De cela, on peut inférer que la neige satisfait la fonction propositionnelle « x est blanc ». Tarski met cette définition de la satisfaction en rapport avec les constructions mathématiques dans l'algèbre scolaire concernant « les fonctions propositionnelles d'un type particulier dites équations et où l'on appelle racines des équations les nombres qui satisfont ces fonctions. » (Tarski, 1936, p. 193) » (in Durand-Guerrier, 2005, p. 19)

Le concept de satisfaction proposé par Tarski fournit une méthode efficace pour établir la vérité de propositions obtenues à partir de fonctions propositionnelles, soit comme instance d'une telle fonction propositionnelle, soit en liant toutes les variables libres par des quantificateurs (Durand-Guerrier, 2005).

La notion de conséquence logique chez Quine

Dans le formalisme logico-mathématique, on trouve chez Quine une présentation assez claire de la notion de conséquence logique. Il propose le nom d'implication à cette notion et montre que les règles classiques d'inférence entre propositions sont associées à de telles conséquences logiques. Quine (1950) présente ainsi, son extension au calcul des prédicats, en s'inscrivant dans la théorie sémantique de la vérité de Tarski pour le calcul des prédicats avec les notions centrales de phrase ouverte et de satisfaction d'une phrase ouverte par une suite d'objets (Durand-Guerrier, 2005). Il introduit pour un énoncé du calcul des prédicats, la notion d'énoncé universellement valide : *un énoncé est universellement valide s'il donne lieu à un énoncé vrai*

pour toute interprétation de ses lettres dans tout univers non vide. (Quine, 1950, p. 141). Durand-Guerrier explique cette introduction en disant :

« On reconnaît ici une autre façon d'exprimer le fait qu'un énoncé est universellement valide si et seulement si toute structure interprétative adéquate de cet énoncé en est un modèle. Les énoncés universellement valides proviennent pour partie des tautologies du calcul des propositions dans lesquelles on substitue aux lettres de variables propositionnelles des formules atomiques obtenues à partir de fonctions propositionnelles saturées par des lettres de variables ; il en est ainsi de l'énoncé :

$$((P(x) \wedge (P(x) \Rightarrow Q(x))) \Rightarrow Q(x))$$

Mais, bien évidemment, de nombreux énoncés faisant intervenir des quantificateurs sont irréductibles aux énoncés propositionnels. C'est le cas, par exemple, des énoncés " $\forall x(P(x)) \Rightarrow P(y)$ " et " $P(x) \Rightarrow \exists y P(y)$ ". » (Durand-Guerrier, 2005, pp.23-24)

D'une manière générale, les énoncés implicatifs jouent un rôle central dans la mesure où ils sont associés à la plupart des modes de raisonnements valides, en accord avec le fait qu'un raisonnement est valide s'il préserve la vérité : autrement dit, dès que les prémisses sont vraies, la condition l'est *nécessairement* et non pas *accidentellement* (Durand-Guerrier, 2005).

Cependant, d'après ce qui a été définie ci-dessus, et contrairement à ce qui est le cas dans le calcul propositionnel, la notion de validité universelle dans la logique des prédicats n'est pas effective. En effet, on ne peut directement s'assurer de la validité d'une formule en passant en revue tous les domaines, toutes les interprétations des prédicats et toutes les interprétations des fonctions et des lettres variables, puisqu'il y en a une infinité. C'est pourquoi autres méthodes ont été élaborées pour accomplir ces preuves. Parmi lesquelles, la méthode de la mise en forme *prénexe* qui consiste à transformer une formule en une formule équivalente pour laquelle tous les quantificateurs sont en tête de formule, moyennant des équivalences syntaxiques telles que :

$$(\forall x F \Rightarrow \exists x G) \equiv \exists x (F \Rightarrow G) \text{ et } (\forall x F \vee \forall x G) \Rightarrow \forall x (F \vee G)$$

L'inconvénient de cette méthode, pour les questions didactiques qui nous intéressent, est de s'éloigner considérablement de la signification des énoncés manipulés, empêchant d'une certaine manière le contrôle du sens par celui qui établit la preuve. D'autres méthodes ont été développées, dans le but de rester au plus près de la rationalité discursive naturelle, telles que les méthodes de déduction par coupure et par simplification : ces déductions s'effectuent sur des clauses². En faisant encore le détour, il y a d'autres méthodes plus effectives pour s'assurer de la validité d'une formule : les méthodes de contre-exemple comme la méthode dite des *arbres* ou des *tableaux sémantiques réduits*, et le système de *déduction naturelle* de Copi³, en raison de son intérêt pour analyser le raisonnement mathématique dans une perspective didactique.

3. Conclusion

Tout au long de cette partie, nous avons cherché à mettre en évidence l'interdépendance entre logique et mathématique forgée par le formalisme logique à travers une étude épistémologique. Les travaux conduits ont montré la pertinence d'un point de vue articulant les aspects syntaxique et sémantique dans une perspective ouverte par Frege, Leibniz, Russell et poursuivi par Wittgenstein, Tarski et Quine. Les analyses qui précèdent offrent des outils d'analyses efficaces pour traiter des raisonnements mathématiques dans une perspective didactique.

²Dans la logique des propositions, une clause est une disjonction de littéraux (un littéral est une variable propositionnelle ou la négation d'une variable propositionnelle).

³ Nous présenterons le système de déduction naturelle de Copi dans la section IV.

Par ailleurs, bien que les apports d'une clarification sémantique s'inscrivent dans des perspectives différentes, l'étude épistémologique a montré que les approches des logiciens présentent de grandes similitudes en fournissant des projets de construction d'un langage formalisé : *Langue universelle* de Leibniz, *Idéographie* de Frege, etc... Ces approches rentrent en résonance avec les questions que se pose le mathématicien lorsqu'il veut définir un nouveau concept, questions qui deviennent particulièrement sensibles dans la perspective de l'élaboration d'un cours à destination d'élèves ou d'étudiants. En effet, l'histoire de la philosophie et des autres disciplines scientifiques montre que les mathématiques ont été souvent considérées comme une discipline de référence, où la rigueur et la précision passeraient par la formalisation logique, le symbolisme et la systématisation.

III. FORMALISME ET LANGAGE MATHÉMATIQUE ENTRE SYNTAXE ET SEMANTIQUE

1. Introduction

Cette partie rend compte d'une étude du formalisme et du langage mathématique entre syntaxe et sémantique à travers une interprétation du discours mathématique. Nous étudions dans un premier temps le langage formalisé versus discours mathématique. Dans un deuxième temps, nous présentons les effets didactiques des pratiques de la quantification bornée et celles de la quantification implicite dans l'activité mathématique en prenant comme étude de cas le concept de la borne supérieure. Nous explorons dans un troisième temps, les effets des choix de formalisation sur leurs interprétations en prenant comme exemple le concept de la continuité. Nous examinons ces choix suivant les points de vue logique et mathématique en prenant en compte leurs articulations.

2. Langage formalisé versus discours mathématique

A partir des réflexions de Wittgenstein dans le *Tractatus*, la philosophie du langage a évolué. L'idée clé étant que les mots n'ont pas une signification qui serait figée et fixée, mais que la signification du mot c'est plutôt l'usage qu'on en fait. La conception du langage, comme description de ce qui est, évolue vers une théorie des jeux de langages, dans laquelle les points de vue syntaxique et sémantique ne suffisent plus. Une pragmatique linguistique permet d'expliquer désormais le fonctionnement du langage et de la communication. Nous faisons l'hypothèse que ceci vaut aussi pour les mathématiques. Le point de vue adopté ici est que les mathématiques ne sont pas seulement un langage, et que donc le langage mathématique parle d'objets (Gardies, 2004). En outre, la possibilité de l'application des mathématiques dans des domaines très variés nécessite que l'on s'interroge sur le statut de ces objets.

La question de l'interprétation du discours mathématique est une question vive des recherches en didactique des mathématiques ; en effet, les contextes d'enseignement et d'apprentissage sont un lieu intense d'échanges langagiers, oraux et écrits (Barrier et Mathé, 2014). L'originalité des travaux que nous conduisons vient de ce que nous abordons ces questions dans le cadre de la sémantique logique (Durand-Guerrier, 2005, 2008). Ceci a porté notre intérêt aux travaux développés en sémantique formelle.

Les travaux de recherches dans ce champ complètent et interrogent les analyses didactiques, en particulier en ce qui concerne d'une part le rôle des indéfinis (*un, deux, plusieurs, quelques*) et d'autre part le fonctionnement dans la langue des connecteurs logiques : *négation, implication,*

équivalence, disjonction. Le rôle des indéfinis est essentiellement lié à la question de la quantification, sans lui être subordonné, et porteur de multiples interprétations possibles changeant fondamentalement leur contribution à la dynamique du discours.

3. La pratique de la quantification implicite dans l'activité mathématique

Dans l'enseignement des mathématiques au lycée, diverses conventions de langage, essentiellement la quantification implicite des énoncés sont une source de certaines difficultés dans l'usage des quantificateurs même traduits en langue naturelle (Chellougui, 2004).

Dans nos travaux, nous avons montré que la pratique de la quantification implicite des énoncés conditionnels universels par les enseignants peut conduire à des positions peu pertinentes au regard des objectifs de l'enseignement des mathématiques (Chellougui, 2009).

« [L'étude expérimentale] a montré que la présence des deux quantificateurs engendre des difficultés de construction d'un objet mathématique d'une part et d'articulation entre logique et mathématique d'autre part. Ces difficultés sont liées à une pratique du quantificateur universel qui est soit implicite soit absente et à la nécessité de produire deux instanciations existentielles successives d'un même énoncé formel. » (Chellougui, 2009, p.137)

La pratique du quantificateur universel implicite est généralement liée aux énoncés conditionnels, celle du quantificateur existentiel se rencontre dans le cas des définitions des parties majorées d'un ensemble ordonné ou des parties admettant un plus grand élément. Ces pratiques engendrent une instabilité des statuts logiques des lettres dans les preuves (Chellougui, 2009).

4. La quantification bornée : une pratique courante en mathématique

Dans la classe mathématique, le mathématicien utilise la quantification bornée le plus souvent comme une technique, lorsqu'il veut écrire un énoncé en langage formalisé, sans référence explicite à une théorie logique. Cette pratique, se transpose tout naturellement dans la classe, elle consiste à réduire l'univers du discours :

- en éliminant l'implication lorsque cet univers est porté par un quantificateur universel,
- en éliminant la conjonction lorsque cet univers est porté par un quantificateur existentiel.

Jeu de l'apparition / disparition de l'implication.

Dans une étude des manuels réalisée dans nos travaux de recherche concernant le langage logico-mathématique utilisé, un des phénomènes dégagé est celui de l'*implication versus quantification bornée* (Chellougui & Kouki, 2013). Nous illustrons ce phénomène par la définition de limite d'une fonction numérique f en un point x_0 , proposée dans un manuel de cours de mathématiques (Chambadal & Ovaert, 1966) :

« -Si x_0 est fini, pour que f tende vers l lorsque x tend vers x_0 , il faut et il suffit que :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \exists \eta \in \mathbb{R} : \forall x \in A \cap ([x_0 - \eta, x_0 + \eta] - \{x_0\}), |f(x) - l| \leq \varepsilon \quad (i)$$

ce qu'on écrit encore :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \exists \eta \in \mathbb{R} : \forall x \in A, |x - x_0| \leq \eta \text{ et } x \neq x_0 \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon. \quad (ii) \text{ » (ibid. pp.395-396)}$$

On voit clairement un jeu d'apparition/disparition de l'implication. Un lecteur débutant pourrait se demander d'où vient l'implication qui apparaît en (i). D'une manière générale, ce jeu est constitutif de l'implication logique et fondamental pour comprendre son utilisation dans l'activité mathématique (Durand-Guerrier, 2005).

Cet exemple permet de mettre en évidence plusieurs points cruciaux de l'articulation entre logique et raisonnement mathématique dans la perspective didactique. En effet la pratique de la quantification bornée tend à occulter la structure logique profonde des énoncés que l'on manipule ; on peut faire l'hypothèse que, dans ce cas, une explicitation de cette structure logique profonde contribue à la clarification conceptuelle dans la mesure où elle permet de travailler sur le concept logique d'implication. D'un autre côté, cette pratique produit des écritures non conformes à la syntaxe logique et qui génèrent de l'ambiguïté, alors que le passage au formalisme est censé lever les ambiguïtés du langage ordinaire (Chellougui & Kouki, 2013). Par ailleurs, l'utilisation des règles syntaxiques automatisées, non problématisées, pour construire de manière récursive la négation d'une phrase laisse dans l'ombre de nombreuses questions fondamentales pour un usage opératoire du formalisme.

5. Le formalisme mathématique entre syntaxe et sémantique

Effet des choix de formalisation des définitions sur leur interprétation : le cas de la continuité

Dans cette partie, nous nous intéressons à l'usage explicite des éléments de logique en particulier les quantificateurs universel et existentiel dans la première année d'université.

A partir de la recherche bibliographique du côté des ouvrages mathématiques de première année d'université section scientifique disponibles aussi bien pour les enseignants que pour les étudiants, nous avons soulevé quelques énoncés mathématiques soulignant des ambiguïtés essentiellement syntaxiques et des équivalences sémantiques erronées (Chellougui & Kouki, 2013).

L'exemple que nous proposons ci-dessous a déjà été analysé dans notre thèse (Chellougui, 2004), mais sans faire appel explicitement au formalisme logique pour une analyse *a posteriori*. Il s'agit de l'exemple classique de la définition de la continuité en un point a d'une fonction numérique f . L'expérience montre que lorsque nous présentons cette analyse aux étudiants de la dernière année de maîtrise ou de licence fondamentale, il est difficile d'expliquer clairement ce qui est en jeu : quantification implicite, quantification bornée, statut logique des lettres, etc. C'est pour cette raison que nous proposons une analyse fine de cette définition.

Par exemple, Monier (1994) présente dans la page 29 de son manuel intitulé *Cours de mathématique, Analyse I maths sup*, les définitions respectives de la continuité d'une fonction numérique f en un point et de la continuité en tout point, sous la forme suivante :

f est continue en a , signifie $(\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 / \forall x \in \mathbb{R} \mid x - a \mid \leq \eta \Rightarrow \mid f(x) - f(a) \mid \leq \varepsilon)$. (I₁)⁴

Un peu plus loin, nous trouvons :

f est continue en tout point a de \mathbb{R} , signifie

$(\forall a \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 / \forall x \in \mathbb{R} \mid x - a \mid \leq \eta \Rightarrow \mid f(x) - f(a) \mid \leq \varepsilon)$. (II₁)

Ces définitions sont exprimées formellement, sans prendre en considération les prémisses qui les composent et sans prendre en compte les parenthèses qui sont totalement absentes. On peut réécrire les définitions (I₁) et (II₁) suivant des formules bien formées en respectant la syntaxe de la logique des prédicats :

$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \eta > 0) (\forall x \in \mathbb{R}) [\mid x - a \mid \leq \eta \Rightarrow \mid f(x) - f(a) \mid \leq \varepsilon]$. (I₂)

$(\forall a \in \mathbb{R}) (\forall \varepsilon > 0) (\exists \eta > 0) (\forall x \in \mathbb{R}) [\mid x - a \mid \leq \eta \Rightarrow \mid f(x) - f(a) \mid \leq \varepsilon]$. (II₂)

Les deux formules (I₂) et (II₂) exprimées dans la logique des prédicats sont sous formes *préfixes* (tous les quantificateurs sont en tête de la formule). Cette formalisation semble plus

⁴ Chaque énoncé est référé avec un numéro écrit en chiffre romain, l'indice correspond au nombre d'apparition de cet énoncé.

claire, de point de vue logique, elle nous permet de distinguer les différentes variables liées, d'une part, et les propositions qui déterminent le conditionnel, d'autre part.

Le formalisme mathématique et ses « significations »

Dans le cadre de la 17^{ème} Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques, nous avons proposé des séances de travaux dirigés TD dont l'objectif est de mettre en place une méthode d'investigation permettant de s'engager dans une démarche de repérage et de traitement de difficultés d'apprenants, dans des contextes *ordinaires* (Chellougui, Ghedamsi & Kouki, 2015). Le contenu mathématique abordé concerne l'algèbre et l'analyse réelle en fin du lycée et à l'entrée à l'université. Dans tous les cas, la nature du savoir mathématique visé met au cœur de ce TD un travail sur les difficultés qu'engendre le formalisme mathématique chez certains élèves et étudiants face à ses *significations*. Parmi les difficultés les plus récurrentes, nous soulignons celles relatives à l'usage du formalisme, à la mise en œuvre d'une preuve formelle, à la production d'exemples, de contre-exemples et de figures pour supporter leur démarche de validation. Par conséquent, une sorte de désinvestissement s'installe empêchant les étudiants de développer une activité de *signification* visant les savoirs en jeu. Or, le choix d'isoler le formel de ses *significations* plonge les étudiants dans des activités de standardisation, les amenant à manipuler des connaissances inefficaces : l'exemple de l'égalité en analyse réelle est de ce point de vue très révélateur.

A l'aide des outils théoriques que nous avons retenus, ce travail s'est scindé en trois étapes sur la base d'un corpus extrait de nos travaux (questionnaires aux élèves, transcriptions de séances et d'entretiens) : analyse *a priori* de situations proposées aux élèves/étudiants en mettant l'accent sur la dimension sémiotique pour l'identification de difficultés potentielles ; analyse de productions axée sur l'étude du processus interprétatifs pour diagnostiquer et expliquer les difficultés ; mise en place d'une phase de post-diagnostic.

L'étude des divers aspects du travail des élèves/étudiants dans des situations faisant intervenir le formalisme mathématique, nous a permis de retenir plusieurs points :

Premièrement la maîtrise du formalisme par les élèves/étudiants ne peut s'appuyer exclusivement sur la représentation syntaxique. Par exemple à la question suivante d'un étudiant c'est quoi la négation de la définition de Cauchy, on trouve des réponses des enseignants du type : *la négation...le « quel que soit » devient « il existe » et la négation de « il existe » devient « quel que soit »*. Les échanges de ce type posent la question des interprétations possibles d'un discours complètement séparé du travail sur le contenu mathématique en jeu, notamment lorsque la règle énoncée devient non fonctionnelle dès que l'énoncé contient une formule conditionnelle quantifiée. C'est le cas par exemple de la négation de la propriété de l'égalité des réels :

L'énoncé qui fournit une condition suffisante pour que deux réels soient égaux dans le langage naturel est :

Si la distance de deux nombres réels peut être rendue inférieure à tout nombre strictement positif, alors ces deux nombres sont égaux.

Sa représentation dans le langage formel est :

$$\forall x \forall y (\forall \varepsilon > 0 d(x,y) < \varepsilon \Rightarrow x=y)$$

dont la négation est :

$$\exists x \exists y (\forall \varepsilon > 0 d(x,y) < \varepsilon \wedge x \neq y)$$

Deuxièmement, exercer un contrôle sémantique sur les objets spécifiques est l'un des paramètres permettant l'accès des étudiants au formalisme mathématique. Mamona-Downs (2001) a par exemple montré comment une illustration graphique de la définition formelle de la convergence de suites permet de décrire d'une manière plus ou moins exhaustive le rôle de

chaque symbole et expression figurant dans la définition et de discuter la question « *why the official definition has the form it has ?* ».

Troisièmement, le va et vient entre formel et pragmatique devrait être considéré comme un indicateur dialogique de la relation didactique. Or, comme souligné par Bloch (2005), les biais d'interprétations des symboles mathématiques deviennent nettement problématiques quand les élèves/étudiants sont confrontés au formalisme mathématique. C'est pourquoi :

"Eclaircir les distorsions entre l'interprétation attendue et celle qui est à l'œuvre dans le travail des élèves nécessite d'analyser la nature des objets en jeu dans l'activité mathématique, la relation entre ces objets et les signes qui les représentent, la nature même de ces signes, et les sémoses en jeu, c'est-à-dire les processus de production et d'interprétation des signes dans les situations didactiques qui visent l'enseignement d'une notion mathématique." (Bloch, 2005, p.99)

Dans cet ordre d'idée, il apparaît essentiel de donner une place à la dimension sémiotique dans la relation didactique. Selon Bloch (2005), le système dialogique de Pierce propose une interprétation dynamique du lien entre signe et objet, et permet de penser les changements de statuts des symboles et des énoncés (icône, indice, symbole/argument), ceci sans dissocier les signes langagiers et formels. Les questions qui sous-tendent ce point de vue sont les suivantes :

Comment des élèves/étudiants confrontés au formalisme mathématique, sont-ils susceptibles d'interpréter les signes en jeu ? Réajustent-ils leurs connaissances en fonction de la complexité des signes manipulés, et si oui comment ? Ont-ils des "déficits" d'interprétation ?

Nous avons choisi de travailler sur un corpus diversifié de situations proposées aux élèves/étudiants aussi bien dans un contexte de recherche que dans le contexte de classe ordinaire. Par conséquent, deux situations de recherche ont été retenues concernant respectivement l'algèbre de fin de lycée et celle de l'entrée à l'université, nécessitant de surcroît la manipulation de connaissance issue de la logique mathématique, non abordée au lycée. La troisième situation que nous avons traitée est issue d'une séance de classe ordinaire (travaux dirigés) sur les suites réelles à l'entrée à l'université. L'idée était de prendre en considération la gestion du professeur et son impact sur les interprétations possibles des étudiants dans la transition vers l'analyse formelle.

L'étude faite a permis d'aborder la question de la dimension sémiotique dans l'étude de phénomènes liés à l'apprentissage. Elle a notamment montré que la démarche de formalisation devrait être accompagnée d'un travail sémantique sur les différents aspects de la notion en jeu. Elle ne peut être intégrée dans le travail des élèves/étudiants que lorsqu'elle est considérée comme jouant un rôle simplificateur et, si l'aspect généralisateur peut en être déduit. Dans ces conditions, les choix faits ne peuvent se limiter à déterminer la *dose de formel* dans les premiers apprentissages : il est essentiel de penser les situations adéquates qui permettent à l'étudiant d'appréhender les gains méthodologiques ainsi conquis.

6. Conclusion

Le travail présenté dans cette partie a permis de montrer sur plusieurs exemples que la formalisation des énoncés mathématiques dans le langage du calcul des prédicats permettait de faire apparaître des quantifications cachées et, par la même, de mettre à jour la complexité de la structure de certains énoncés. Par ailleurs, comme il a été confirmé dans ce chapitre, les concepts mathématiques s'accompagnent de la création de langages spécifiques, qu'il est nécessaire de s'approprier pour avoir accès aux objets mathématiques, à leurs propriétés et aux

relations qu'ils entretiennent les uns avec les autres et pour pouvoir s'engager dans des processus de preuves répondant aux critères de validité logico-mathématiques.

Dans la partie suivante, nous présentons et analysons une ingénierie de recherche visant à étudier l'impact sur la construction des preuves mathématiques d'un travail structuré de logique dans la perspective sémantique adoptée en intégrant, en particulier, les systèmes de déduction naturelle de Copi (1954).

IV. LA DEDUCTION NATURELLE DE COPI COMME OUTIL DIDACTIQUE POUR L'ANALYSE DE PREUVES MATHÉMATIQUES

1. Le système de déduction naturelle de Copi

Nous présentons ci-dessous (Tableau 1) les règles d'introduction et d'élimination des quantificateurs universel et existentiel. L'illustration de ces règles est inspirée de l'ouvrage de Hottois (1989, pp. 101-102).

Règles d'introduction et d'élimination des quantificateurs universel et existentiel													
<div style="text-align: center; margin-bottom: 10px;"> \forall-élimination <i>Instanciation Universelle – IU</i> </div> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 20px; text-align: center;">1</td> <td style="width: 100px;">$\forall xF(x)$</td> <td style="width: 100px;">Hypothèse</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">2</td> <td>$F(a)$</td> <td>IU sur 1</td> </tr> </table> <p>Si on a une formule universelle du type $\forall xF(x)$, alors on a F pour un objet quelconque a substitué à x.</p>	1	$\forall xF(x)$	Hypothèse	2	$F(a)$	IU sur 1	<div style="text-align: center; margin-bottom: 10px;"> \forall-introduction <i>Généralisation Universelle – GU</i> </div> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 20px; text-align: center;">1</td> <td style="width: 100px;">$F(a)$</td> <td style="width: 100px;">Hypothèse</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">2</td> <td>$\forall xF(x)$</td> <td>GU sur 1</td> </tr> </table> <p>où a est un objet absolument quelconque choisi dans le domaine (de x).</p>	1	$F(a)$	Hypothèse	2	$\forall xF(x)$	GU sur 1
1	$\forall xF(x)$	Hypothèse											
2	$F(a)$	IU sur 1											
1	$F(a)$	Hypothèse											
2	$\forall xF(x)$	GU sur 1											
<div style="text-align: center; margin-bottom: 10px;"> \exists-élimination <i>Instanciation Existentielle – IE</i> </div> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 20px; text-align: center;">1</td> <td style="width: 100px;">$\exists xF(x)$</td> <td style="width: 100px;">Hypothèses</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">2</td> <td>$F(w)$</td> <td>IE sur 1</td> </tr> </table> <p>La vérité d'une formule existentielle assure l'existence d'au moins un objet w vérifiant F.</p>	1	$\exists xF(x)$	Hypothèses	2	$F(w)$	IE sur 1	<div style="text-align: center; margin-bottom: 10px;"> \exists-introduction <i>Généralisation existentielle – GE</i> </div> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 20px; text-align: center;">1</td> <td style="width: 100px;">$F(a)$</td> <td style="width: 100px;">Hypothèse</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">2</td> <td>$\exists xF(x)$</td> <td>GE sur 1</td> </tr> </table> <p>Si une formule F est vérifiée pour un objet quelconque a, alors la formule $\exists xF(x)$ est montrée.</p>	1	$F(a)$	Hypothèse	2	$\exists xF(x)$	GE sur 1
1	$\exists xF(x)$	Hypothèses											
2	$F(w)$	IE sur 1											
1	$F(a)$	Hypothèse											
2	$\exists xF(x)$	GE sur 1											

Tableau 1 : Règles d'introduction et d'élimination des quantificateurs universel et existentiel

2. Étude des effets d'un enseignement de la déduction naturelle sur les compétences liées à la preuve

Suivant Durand-Guerrier et Arzac (2005), il y a un potentiel de l'enseignement de la déduction naturelle de Copi permettant d'aider les étudiants à s'investir dans les productions et à mieux contrôler la validité des preuves. Afin de tester cette hypothèse de recherche, nous avons conduit au premier semestre de l'année universitaire 2017/2018 un enseignement sur la déduction naturelle de Copi dans le cadre d'un cours de logique à l'université. Cet enseignement vise à donner aux étudiants des moyens de contrôle dans une production classique de preuve mathématique. Il ne s'agit pas d'envisager que ces moyens se transfèrent à l'ensemble des preuves produites par les étudiants, mais d'investiguer les suites immédiates d'un tel

enseignement. Pour étudier les effets produits par l'enseignement du système de Copi, nous avons mis en place une expérimentation autour d'une preuve mathématique avec des étudiants volontaires ayant suivi cet enseignement.

A l'issue de cet enseignement, nous avons proposé aux étudiants, dont le nombre est 20, une expérimentation autour d'une preuve mathématique. Le type de tâche proposé aux étudiants consiste à produire une preuve de l'antisymétrie de la relation binaire \mathfrak{R} définie par :

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \forall q \in \mathbb{N}^* (p \mathfrak{R} q \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* p^n = q).$$

Cette expérimentation est subdivisée en deux parties. La première, composée de trois phases, a pour objectif de produire une preuve que la relation binaire \mathfrak{R} est antisymétrique et de contrôler sa validité. Dans cette partie les étudiants, dont le nombre est 20, travaillent sur des formulations habituelles de preuves sans recevoir de consignes particulières. La deuxième partie, composée de deux phases, a pour objectif de produire et de contrôler la validité d'une preuve du même énoncé en utilisant le système de Copi. Dans cette partie, les étudiants travaillent sur la preuve formelle, comme outil de mise en forme et de contrôle (Chellougui, 2018).

Dans la suite, nous présentons les analyses *a priori* des deux parties de l'expérimentation et nous analysons les réponses produites par un seul groupe d'étudiants que nous noterons *Groupe*.

3. Analyse *a priori*

Notons, tout d'abord, que notre intérêt porte sur les effets de l'enseignement du système de la déduction naturelle centré sur l'aide que peut apporter cet enseignement aux étudiants pour améliorer la rédaction d'une preuve et pour en faciliter le contrôle logique (élimination des quantificateurs, introduction des lettres, introduction de l'implication...).

Analyse a priori de la première partie de l'expérimentation

Dans la première partie de l'expérimentation, les étudiants ont produit une preuve de l'antisymétrie sans avoir la consigne d'utiliser le système développé par Copi.

Nous présentons dans la suite une proposition de preuve d'une manière classique par élément générique de l'antisymétrie de la relation binaire \mathfrak{R} . Il s'agit de montrer l'énoncé :

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \forall q \in \mathbb{N}^* (p \mathfrak{R} q \wedge q \mathfrak{R} p \Rightarrow p = q).$$

Cet énoncé conditionnel universellement quantifié qui se démontre en considérant deux éléments qui vérifient l'antécédent.

- L1 La relation binaire \mathfrak{R} est définie par :
 $\forall p \in \mathbb{N}^* \forall q \in \mathbb{N}^* (p \mathfrak{R} q \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* p^n = q)$
- L2 Soient p et q deux entiers naturels non nuls, on suppose :
 $p \mathfrak{R} q$ et $q \mathfrak{R} p$
- L3 $p \mathfrak{R} q$ donc $\exists n \in \mathbb{N}^* p^n = q$, notons a un tel entier vérifiant $p^a = q$ (1)
- L4 $q \mathfrak{R} p$ donc $\exists k \in \mathbb{N}^* q^k = p$, notons b un tel entier vérifiant $q^b = p$ (2)
- L5 De (1) et (2) on déduit : $p^{ab} = q^b$ et $q^b = p$ ainsi $p^{ab} = p$
- L6 donc $p=1$ ou $ab=1$
- L7 si $p=1$ alors d'après (1) $q=1$ ainsi : $p=q$
- L8 et, si $ab=1$, avec $a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}^*$, alors $a=b=1$. D'après (1) : $p=q$
- L9 Donc, en considérant ces deux possibilités, on aura : $p=q$.
- L10 Ainsi, pour deux entiers quelconques p et q on a l'implication :
 $(p \mathfrak{R} q \wedge q \mathfrak{R} p \Rightarrow p = q)$
- L11 Donc : $\forall p \in \mathbb{N}^* \forall q \in \mathbb{N}^* (p \mathfrak{R} q \wedge q \mathfrak{R} p \Rightarrow p = q)$

L12 D'où \mathcal{R} est antisymétrique.

Tableau 2 : Une preuve classique de l'antisymétrie de la relation \mathcal{R}

La ligne L1 est une prémisse qui rappelle la définition de la relation binaire \mathcal{R} qui va être utilisée explicitement dans la suite de la preuve. Cette définition est nécessaire, comme il apparaît dans les lignes L3 et L4.

La ligne L2 est l'initialisation de la preuve par élément générique : il est important de rappeler la définition de l'antisymétrie qui montre qu'il s'agit de prouver une implication universellement quantifiée sur deux variables. Nous pouvons faire l'hypothèse qu'un certain nombre d'étudiants ne rappellera ni la définition de l'antisymétrie ni la définition de la relation binaire \mathcal{R} .

Nous faisons aussi l'hypothèse qu'un nombre significatif d'étudiants n'explicitera pas l'introduction des éléments génériques qui apparaissent dans les lignes : L2, L3 et L4. Ceci étant lié à des pratiques habituelles qu'on peut rencontrer dans certains manuels (Chellougui, 2009).

A partir de L5, le travail se fait avec des formules atomiques. Pour la disjonction des cas dans L7, nous faisons l'hypothèse que la majorité des étudiants ne prennent pas en considération le cas " $p=1$ " et distinguent uniquement le cas " $ab=1$ ".

De la même manière nous faisons l'hypothèse que les étudiants n'introduiront pas explicitement l'implication (L10).

La réintroduction de l'implication (L11) vise à clarifier ce qui est effectivement prouvé. Nous pouvons faire l'hypothèse que cette réintroduction sera peu présente dans les preuves produites par les étudiants puisqu'elle est aussi peu présente dans les pratiques usuelles des enseignants. De même, nous faisons l'hypothèse que la plupart des étudiants, voir la totalité d'entre eux, n'utilisera pas une généralisation universelle en fin de preuve (L11). Cette généralisation est pratiquement absente dans les formulations habituelles des preuves.

Un indicateur de ce que les étudiants se sont approprié les enjeux de l'enseignement de la déduction naturelle de Copi sera le fait d'attirer leur attention sur l'erreur classique potentielle qui consiste à instancier avec une même lettre deux énoncés existentiels (Durand-Guerrier & Arsac, 2005 ; Chellougui 2004).

Analyse a priori de la deuxième partie de l'expérimentation

Pour conduire l'analyse *a priori* de cette deuxième partie, nous proposons ci-dessous (Tableau 3) une preuve complète à la manière de Copi de l'énoncé : *La relation \mathcal{R} est antisymétrique.*

(1) $\forall p \forall q (p \mathcal{R} q \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* p^n = q)$	Hypothèse
(2) $[a \mathcal{R} b \wedge b \mathcal{R} a$	Hypothèse auxiliaire
(3) $a \mathcal{R} b$	Elimination de \wedge sur (2)
(4) $a \mathcal{R} b \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* a^n = b$	IU sur (1)
(5) $\exists n \in \mathbb{N}^* a^n = b$	MP sur (3) et (4)
(6) $b \mathcal{R} a$	Elimination de \wedge sur (2)
(7) $b \mathcal{R} a \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* b^n = a$	IU sur (1)
(8) $\exists n \in \mathbb{N}^* b^n = a$	MP sur (6) et (7)
(9) $a^m = b$	IE sur (5)
(10) $b^k = a$	IE sur (8)
(11) $a^{mk} = b^k$	Propriété de la puissance
(12) $a^{mk} = a$	Transitivité de l'égalité sur (10) et (11)
(13) $a=1 \vee m=k=1$	Propriétés mathématiques

(14) $a=1$	Elimination de \vee sur (13) (supposons $a=1$)
(15) $b=1$	Transitivité de l'égalité sur (9) et (14)
(16) $a=b$	Conséquence de (14) et (15)
(17) $m=k=1$	Elimination de \vee sur (13) (supposons $m=k=1$)
(18) $a=b$	Conséquence de (9) et (17)
(19) $a=b \]$	Conclusion de l'élimination de \vee sur (13)
(20) $(a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}a) \Rightarrow a=b$	Introduction de \Rightarrow sur (4) et (19)
(21) $\forall p\forall q (p\mathcal{R}q \wedge q\mathcal{R}p \Rightarrow p=q)$	GU sur (20)

Tableau 3 : Preuve à la manière de Copi de l'énoncé « La relation \mathcal{R} est antisymétrique »

Ce qui nous intéresse c'est de regarder ce que la demande de fournir une preuve à la manière de Copi va faire émerger. En particulier ce que cette demande donne comme indicateur sur la manière dont les étudiants articulent les règles en jeu avec la sémantique de la preuve (argument mathématique et utilisation de la définition). Sachant que cette articulation n'a pas été travaillée dans le cours enseigné. Pour le contrôle de la validité des preuves produites dans les différents groupes, nous voulons savoir s'il y a une mobilisation explicite des règles de la déduction naturelle de Copi.

4. Analyse a posteriori : Preuves produites par Groupe

Analyse a posteriori de la première partie de l'expérimentation

Groupe a proposé la preuve suivante :

$$\begin{aligned} &\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall q \in \mathbb{N}^* \\ &\mathcal{R} \leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* \mathcal{R} \leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}^* \\ &(p^n)^m = q^m = p \\ &p^{nm} = p \Leftrightarrow nm=1 \\ &\text{or } n \in \mathbb{N}^* \text{ et } m \in \mathbb{N}^* \text{ donc } nm \in \mathbb{N}^* \\ &n=m=1 \Rightarrow p=q \text{ d'où l'antisymétrie} \end{aligned}$$

Nous considérons que cette preuve est valide selon les deux points de vue logique et mathématique. Parmi les indicateurs que nous avons identifiés sur un impact sur l'enseignement de la déduction naturelle de Copi, seule la règle syntaxique qui nécessite la prise en compte de deux lettres différentes est reconnue et identifiée.

Analyse a posteriori de la deuxième partie de l'expérimentation

Dans cette partie, la demande explicite est de produire une preuve à la manière de Copi. Nous reproduisons dans la suite la réponse de Groupe :

$$p\mathcal{R}q \wedge q\mathcal{R}p \Rightarrow p=q$$

(1)	$p\mathcal{R}q \wedge q\mathcal{R}p$	Hypothèse
(2)	$p\mathcal{R}q$	$E \wedge$ sur (1)
(3)	$p\mathcal{R}q \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* p^n=q$	$I \Rightarrow$ sur (2)
(4)	$\exists n \in \mathbb{N}^* p^n=q$	MP sur (2) et (3)
(5)	$q\mathcal{R}p$	$E \wedge$ sur (1)
(6)	$q\mathcal{R}p \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* q^n=p$	MP sur (5) et (6)

(7)	$p^a=q$	IE sur (4)
(8)	$q^b=p$	IE sur (7)
(9)	$p^a=q \wedge q^b=p$	$I \wedge$ sur (8) et (9)
(10)	$\exists n \in \mathbb{N}^* (p^n=q \wedge q^n=p)$	GE sur (10)
(11)	$p \mathfrak{R} q \wedge q \mathfrak{R} p \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* (p^n=q \wedge q^n=p)$	$I \Rightarrow$ sur (1) et (11)
(12)	$p \mathfrak{R} q \wedge q \mathfrak{R} p \Rightarrow p=q$	$I \Rightarrow$

Tableau 4 : Preuve produite par Groupe dans la deuxième partie de l'expérimentation

Ce groupe a bien mis l'accent sur les aspects syntaxique et sémantique dans l'usage des lettres existentiellement quantifiées et les *IE* correspondantes : en effet, dans (3) et (6), il y a usage de la même lettre dans le champ du quantificateur existentiel. Ensuite il y a deuxinstanciations existentielles *IE* utilisant deux lettres différentes respectivement *a* et *b* en (7) et (8). Par contre ce groupe ne reconnaît pas ce que permet d'écrire la ligne (3) conformément à la définition de la relation binaire \mathfrak{R} qui n'est pas rappelée. En effet, la ligne (3) ne correspond pas à une introduction de l'implication mais elle devrait correspondre à une instantiation universelle *IU* sur la définition de la relation \mathfrak{R} . Ceci montre que la démonstration explicite à la manière de Copi peut rendre visible la non-reconnaissance par les étudiants de ce qui justifie certains pas de la preuve qu'ils produisent. De même, les étudiants de ce groupe ne reconnaissent pas les formes atomiques en (7) et (8) qui permettent de conduire le travail mathématique. Ceci les conduit à poursuivre la preuve à partir de la ligne (9) en explicitant les règles utilisées (conjonction, introduction du quantificateur existentiel, introduction de l'implication) pour aboutir à la ligne (11) qui n'est pas la conclusion attendue. Dans la phase précédente, les étudiants de ce groupe avaient pourtant produit un argument mathématique « correct ». Nous faisons l'hypothèse que l'accent mis sur les aspects syntaxiques de la preuve les ont détournés des aspects sémantiques. Ce groupe termine la preuve en écrivant la conclusion qui aurait dû être obtenue (12). Dans la colonne de droite, ils indiquent une introduction de l'implication ($I \Rightarrow$) sans indiquer sur quels éléments elle porte. On peut faire l'hypothèse que les étudiants à ce stade identifient qu'ils n'ont pas le moyen d'obtenir cette conclusion avec ce qu'ils ont fait.

L'analyse de la preuve de ce groupe met en lumière les apports potentiels de la demande de formalisation des preuves à la manière de Copi pour mettre à jour des difficultés dans la construction des preuves qui peuvent être cachées dans des rédactions moins formelles. Dans ce cas, elle nous permet aussi d'identifier l'importance de travailler dans le cours lui-même les usages de la déduction naturelle pour les preuves mathématiques et non seulement pour les preuves en logique comme nous l'avons fait. Comme le dit Wittgenstein (1993), une preuve en logique et la preuve logique d'un énoncé mathématiques sont deux choses différentes.

5. Conclusion

Nous dégageons de ce travail deux points principaux. D'une part, il ressort des résultats des expérimentations que l'enseignement proposé n'a pas permis d'atteindre les objets visés. En effet, même les étudiants s'étant approprié les règles du système de Copi ne semblent pas faire de liens explicites avec la manière classique de produire des preuves mathématiques. Nous faisons l'hypothèse que ceci est dû au fait que l'enseignement s'est centré sur les règles logiques modélisant le raisonnement mathématique, sans faire de travail explicite sur l'analyse de preuves mathématiques. Ceci devra être corrigé dans le futur. D'autre part, l'analyse de la preuve à la manière de Copi du *Groupe* nous a permis d'identifier le fait que la rédaction d'une preuve classique apparemment correcte peut cacher la non-reconnaissance du rôle de la définition dans la preuve.

La formalisation à la manière de Copi des preuves par ces groupes ouvre ainsi la possibilité

d'un travail avec les étudiants sur les implicites inhérents à la rédaction des preuves sous la forme classique. C'est une piste que nous nous proposons d'explorer dans la poursuite de cette première recherche exploratoire.

V. CONCLUSION

Notre travail nous a permis d'éclairer certains obstacles qui apparaissent dans le passage du langage naturel au langage formel, qui peuvent se traduire d'une part par des énoncés difficilement lisibles dans certains manuels d'autre part par des ambiguïtés d'ordre syntaxiques qui peuvent engendrer des interprétations erronées pouvant être problématique en contexte d'apprentissage. Nos travaux de recherche contribuent ainsi à la compréhension des difficultés des étudiants, en particulier celles qui sont inhérentes aux usages du formalisme logique dans les définitions et les preuves, enrichissant ainsi les analyses *a priori* et *a posteriori*.

Une originalité de notre travail est de ne pas se contenter de faire le constat que le formalisme logique se constitue en obstacle pour les apprentissages, mais d'envisager ce que l'on pourrait proposer aux étudiants pour qu'ils puissent identifier le rôle et la fécondité potentielle du langage formel dans le processus de conceptualisation des notions mathématiques.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- ARISTOTE. *L'Organon : De l'interprétation, Topiques, Premiers Analytiques, Seconds Analytiques*, Traduction et notes J. Tricot, (1989, 1990, 1983, 1987), Paris : Librairie philosophique J. Vrin.
- BARRIER, T. & MATHE, A-C. (2014). Présentation *Spirale* N°54 *Langage, apprentissage et enseignement des mathématiques*, pp. 3-7. <https://spirale-edu-revue.fr/spip.php?article1187>
- BLOCH, I. (2005). La sémiotique de C.S. Pierce et la didactique des mathématiques–Vers une analyse des processus de production et d'interprétation des signes mathématiques dans les situations d'apprentissage, *Actes du colloque SFIDA*.
- CHAMBADAL, L. & OVAERT, J-L. (1966). *Cours de mathématiques*, Tome1 : notions fondamentales d'algèbre et d'analyse, Paris, Gauthier-Villars.
- CHELLOUGUI, F. (2004). *L'utilisation des quantificateurs universel et existentiel en première année d'université, entre l'explicite et l'implicite*. Thèse en cotutelle de l'Université de Tunis et de l'Université Claude Bernard Lyon 1.
- CHELLOUGUI, F. (2009). L'utilisation des quantificateurs universel et existentiel, entre l'explicite et l'implicite. *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol.29, n°2, pp. 123-154. La Pensée Sauvage Editions.
- CHELLOUGUI, F. (2016). Approfondissement du questionnement didactique autour du concept de borne supérieure, TWG : Logic, Numbers and algebra, In E. Nardi, C. Winslow & T. Hausberger (Eds.), *Proceedings of the first International Network for Didactic Research in University Mathematics*, pp. 266-275. ISSN 2496-1027. INDRUM2016, Montpellier-France 2016.
- CHELLOUGUI, F. (2017). Proof and formalism: The role of letters' logical status. TWG: University mathematics education. In T. Dooley, & G. Gueudet, (Eds.). (2017). *Proceedings of CERME10* (Dublin-Ireland 2017), pp. 2017-2024.
- CHELLOUGUI, F. (2018). *Pertinence de la prise en compte du formalisme logique pour une étude didactique de l'activité mathématique*. Habilitation Universitaire. Université de Carthage, Tunisie.
- CHELLOUGUI, F. GHEDAMSI, I. & KOUKI, R. (2015). Entre le formalisme mathématique et ses "significations" : l'acte interprétatif, un maillon faible de la relation didactique ? Une étude dans le contexte de l'enseignement secondaire / supérieur, Travaux Dirigés associé au thème : Les élèves en difficulté dans l'enseignement ordinaire. In D. Butlen, & al. (Eds.). *Rôles et places de la didactique et des didacticiens des mathématiques dans la société et le système éducatif. Actes de la 17^e école d'été de didactique des mathématiques*, pp. 465-474. La Pensée Sauvage. ISBN 9-782859-193058. EEDM17, Nantes 2013.
- CHELLOUGUI, F. & KOUKI, R. (2013). Use of formalism in mathematical activity. Case study : the concept of continuity in higher education, Work Group 1: Argumentation and proof, In B. Ubuz, C. Haser & M.A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the 8th Conference of European Research in Mathematics Education*, pp. 96-105. CERME8, Antalya-Turquie 2013.
- COPI, I. M. (1954). *Symbolic Logic*. Hardcover, NewYork.
- CORI, R. & LASCAR, D. (1993). *Logique mathématique*, Cours et exercice, Tome1, Masson.
- DUBINSKY, E & YIPARAKI, O. (2000). On student understanding of AE and EA quantification, *Research in Collegiate Mathematics Education IV, CBMS Issues in Mathematics Education*, 8, pp. 239-289. American Mathematical Society: Providence.

- DURAND-GUERRIER, V. (2005). *Recherches sur l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique. Un cas exemplaire de l'interaction entre analyses épistémologique et didactique. Apports de la théorie élémentaire des modèles pour une analyse didactique du raisonnement mathématique*. Habilitation à Diriger des Recherches. Université Claude Bernard Lyon1.
- DURAND-GUERRIER, V. (2008). Truth versus validity in mathematical proof. *ZDM The International Journal on Mathematics Education* 40/3, 373-384.
- DURAND-GUERRIER, V. & ARSAC, G. (2003). Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques : Spécificité de l'analyse. Quelles implications didactiques ? *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol.23, n°3, pp.295-342. La Pensée Sauvage Editions.
- DURAND-GUERRIER, V. & ARSAC, G. (2005). An epistemological and didactic study of a specific calculus reasoning rule, *Educational Studies in Mathematics*, 60/2, 149-172.
- FREGE, G. (1879). *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*. Halle. Version française par Corinne Besson, *l'Idéographie*, Vrin, Paris, 1999. Postface de Jonathan Barnes.
- GARDIES, J.-L. (2004). *Du mode d'existence des objets de la mathématique*, Paris, Librairie Philosophique J. Vrin.
- GUEUDET, G. (2008). Investigating the secondary–tertiary transition. *Educational Studies in Mathematics*. 67, pp. 237–254.
- HACHE C. & MESNIL, Z. (2015). Pratiques Langagières et preuves. *Actes du 22e colloque de la CORFEM*, Nîmes, 11-12 juin 2015. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01285116/document>
- HOTTOIS, G. (1989). *Penser la logique, Une introduction technique, théorique et philosophique à la logique formelle*, De Boeck Université, Bruxelles.
- KELLER, P. (2007). *Introduction à la logique. La logique classique des propositions et des prédicats*, Département de Philosophie, Université de Genève, 2007.
- LEIBNIZ, G.W. (1703). *Nouveaux essais sur l'entendement humain*. Presses Universitaires de France, Paris, 1703. Textes choisis par L. Guillermit, 1961.
- MAMONA-DOWNS, J. (2001). Letting the intuitive bear on the formal; a didactical approach for the understanding of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics* 48, 259-288.
- MESNIL, Z. (2014). *La logique : d'un outil pour le langage et le raisonnement mathématique vers un objet d'enseignement*, Thèse de l'Université de Paris.
- MONIER, J.M. (1994), *Cours de mathématiques : maths sup Analyse I*, Dunod.
- NJOMGANG-NGANSOP, J. (2013). *Enseigner les concepts de logique dans l'espace mathématique francophone : aspect épistémologique, didactique et langagier. Une étude de cas au Cameroun*, Thèse en cotutelle de l'Université de Yaoundé 1 et de l'Université Claude Bernard Lyon1.
- PASCU, A. (2006). *Les objets dans la représentation des connaissances. Application aux processus de catégorisation en informatique et dans les sciences humaines*, Habilitation à Diriger des Recherches, Université Paris-Sorbonne, Paris IV.
- QUINE, W.V.O. (1950). *Methods of logic*, Holt, Rinehart & Winston, Traduction française Armand Colin, 1972.
- RUSSELL, B. (1905). Sur la dénotation, in *Logical and Philosophical Papers*, 1901-1913, The Collected Papers of Bertrand Russell, Vol.3, London and New York : Routledge, 1992
- SELDEN, J. & SELDEN, A. (1995). Unpacking the logic of mathematical statements, in *Educational Studies in Mathematics*, 29, 123-151.
- TARSKI, A. (1936). Le concept de vérité dans les langages formalisés in *Logique, sémantique et métamathématique*, Volume 1, pp. 157-269. Armand Colin, 1972.
- WITTGENSTEIN, L. (1921). *Tractatus logico-philosophicus*. Annalen der naturphilosophie, Leipzig; traduction française, Gallimard, 1961.

OUTILS LOGIQUES POUR ANALYSER LES FORMULATIONS DES PREUVES DANS DES MANUELS DE LYCEE

Christophe **HACHE**

LDAR Université Paris Diderot, IREM de Paris

christophe.hache@u-paris.fr

Zoé **MESNIL**

LDAR Université Paris Diderot, IREM de Paris

zoe.mesnil@u-paris.fr

Résumé

Notre recherche en cours se place dans une réflexion plus globale concernant l'enseignement et l'apprentissage de la démonstration en mathématiques. Nous abordons ici ces questions à partir des problématiques langagières. La rédaction d'une preuve relève de choix personnels de l'auteur·e, celui-ci ou celle-ci étant influencé·e par des pratiques usuelles dans la communauté, tant dans les arguments choisis, la sélection des inférences mises en avant, que dans les formulations de ces arguments et de ces inférences. Nous présenterons l'usage d'un référent formel construit à partir de la déduction naturelle de Gentzen pour étudier les pratiques langagières des mathématiciens dans le cadre de la formulation de preuves. Nous montrons à quel point les preuves rédigées ne sont pas des textes formels. Ce constat nous paraît intéressant à l'heure où l'importance de la preuve est à nouveau soulignée dans les instructions officielles. Pour les élèves, l'apprentissage de la démonstration consiste entre autres à apprendre à rédiger. Dans cet apprentissage, les preuves écrites auxquelles sont confronté·e·s les élèves (par exemple celles de leur manuel) ont une place importante. Nous présenterons des analyses de preuves présentes dans des manuels de lycée.

Mots clés

Didactique des mathématiques, pratiques langagières, logique, manuels scolaires, preuves

La recherche en didactique des mathématiques sur l'enseignement et l'apprentissage de la preuve est riche de nombreuses entrées pour traiter de ces questions, comme en témoigne par exemple les recensements bibliographiques de *La lettre de la preuve*¹. Au sein de cette communauté de recherche, différentes positions existent quant au rôle de la logique mathématique pour cet enseignement / apprentissage de la preuve (voir par exemple dans Durand-Guerrier, Boero, Douek, Epp et Tanguay, 2012). En ce qui nous concerne, la logique mathématique, à laquelle nous avons été formé·e·s lors de nos études de mathématiques, est un outil d'analyse, de formation, et un objet d'étude. Influencé·e·s par l'approche de Daniel Lacombe, suite à la ré-introduction de notions de logique dans les programmes de lycée, étudiée dans la thèse de Zoé Mesnil (Mesnil, 2014), nous proposons dès 2009, avec le groupe Logique de l'IREM de Paris, des formations à la logique à partir d'une étude naïve du langage mathématique (Hache et Mesnil, 2012). Nous nous inspirons pour cela de la notion de *langage* en logique mathématique : un langage (par exemple le langage des prédicats) est un ensemble de symboles à partir duquel sont construites des expressions (des termes, c'est-à-dire des noms d'objets, des formules, c'est-à-dire des propositions). Ce langage formel de la logique

1 <http://lettredelapreuve.org/>

mathématique nous sert à interpréter et commenter les formulations courantes utilisées dans notre activité mathématique. Nous distinguons alors *discours mathématique* et *langage mathématique* :

J'appelle discours mathématique l'ensemble des phrases (...) [prononcées] (...) dans un contexte où une ou des personnes font des mathématiques. Parmi elles, certaines sont des phrases qui disent des faits sur les objets mathématiques. Ce sont ces phrases, et certains de leurs éléments, qui constituent le langage mathématique. (Mesnil, 2014, p.110)

Dans cette définition, le langage, ou le discours, est regardé essentiellement comme un produit fini, indépendamment de la personne qui le produit, et indépendamment du contexte dans lequel il est produit. D'autres influences, notamment les conférences de Jean-Paul Bronckart et de Maryse Rebière lors de l'école d'été de 2011 (Bronckart 2013, Rebière 2013), ou encore les travaux du groupe LEMME² qui débutent cette même année, nous permettent d'enrichir cette vision, en considérant le langage comme résultant d'une activité, à la fois individuelle et sociale. De l'étude du langage mathématique, nous passons alors à l'étude des pratiques langagières des mathématicien·e·s, et nous revenons à l'étude de l'enseignement et de l'apprentissage de la preuve en prenant comme hypothèse de travail qu'une partie de cet enseignement / apprentissage passe par l'acculturation à ces pratiques langagières.

Dans un premier temps, nous précisons notre entrée langagière, puis nous présenterons notre utilisation de la déduction naturelle de Gentzen comme outil d'analyse des pratiques langagières des mathématicien·e·s en matière de formulation de preuve. Nous présenterons ensuite un travail en cours sur l'utilisation de cet outil pour l'analyse des preuves présentes dans des manuels de seconde.

I. LANGAGE, PRATIQUES LANGAGIERES, FORMULATIONS

1. Langage et pratiques langagières en mathématiques

Précisons donc notre approche du langage (développée dans Hache 2019). Nous commençons, comme le fait Maryse Rebière (Rebière 2013), par distinguer langue et langage. La langue est un réservoir de signes, de mots et de règles d'usage, y compris une grammaire par exemple. La langue est stable, en lente évolution. Le langage est la capacité humaine de s'exprimer à l'aide d'une langue. Nous soulignons deux dimensions du langage : une dimension individuelle subjective, et une dimension sociale.

Le langage n'est pas un simple média d'une pensée qui serait constituée par ailleurs, un simple tuyau, de simples bruits que l'on fait avec sa bouche. Le langage est constitutif de la pensée et de l'activité. Le langage est un outil de construction et de modification des représentations individuelles, et sociales. Le langage est ainsi un objet central comme levier dans l'enseignement et l'apprentissage.

Tout groupe social développe des pratiques qui lui sont propres. Par exemple, quand nous commençons par remercier les organisatrices de nous avoir invité, le public attend que la conférence débute, quand Faïza Chellougui (conférence précédente) remercie le public de son attention, le public applaudit la conférencière, et quand nous faisons un hommage au travail de Laetitia Gourmand en début de conférence, le public applaudit Laetitia. C'est ainsi que cela fonctionne, si une personne applaudissait quand nous remercions Julia Pilet et Céline Vendeira tout le monde la regarderait, étonné·e. Ce sont des pratiques que l'on acquiert sans enseignement (on peut imaginer un ou une étudiant·e qui assiste à une première conférence et qui constate que les personnes présentant les conférences sont applaudi·e·s). Les groupes

2 <https://www.ldar.website/lemme>

sociaux développent des pratiques de ce type, y compris des pratiques langagières. On parlera ainsi des pratiques langagières des mathématicien·ne·s.

Rapidement, dans les recherches qui ont analysé et décrit ces pratiques langagières des mathématicien·ne·s, on dépasse l'idée d'une rigueur formelle dans l'usage des mots, pour aller vers la description de la complexité des pratiques. Colette Laborde (Laborde, 1982) étudie l'articulation entre l'usage de la langue naturelle et l'usage des symboles mathématiques dans l'écriture des mathématiques, et montre que l'usage simultané de ces deux codes, très courant, amène à des adaptations de la syntaxe de l'un ou de l'autre. Par exemple, nous écririons sans réserve « $n^2 = k^2$ est un nombre pair », au lieu de « n^2 , qui est égal à $4k^2$, est un nombre pair », sans être gêné·e·s par le fait que cette contraction rend difficile l'identification du sujet de « est ». Nous jouons en fait avec ces adaptations, car dans notre exemple, c'est bien à la fois n^2 et $4k^2$ qui sont pairs. Et même plus précisément, c'est parce que $4k^2$ est pair (comme multiple de 4), et parce que n^2 est égal à $4k^2$, que n^2 est pair. Il y a donc un raisonnement implicite qui est porté par cet usage de la langue, familier à qui maîtrise les pratiques langagières de la communauté, sans doute moins à qui les découvre. D'autres travaux ont étudié les implicites dans les expressions utilisées en mathématiques (Adda, 1975, Durand Guerrier, 1999, Hache & Forgeoux, 2018). Par exemple quand on dit « Si un nombre est premier, alors il est impair », de même que pour les usages des applaudissements évoqués ci-dessus, chacun·e va se dire dans la salle « Mais c'est faux ! », car il ou elle perçoit que cette phrase est implicitement quantifiée universellement (on parle de tous les nombres... y compris 2 donc).

2. Premier exemple d'analyse : formulation de proposition mathématique

Notre première unité d'analyse de ces pratiques langagières est la proposition mathématique. Voici quelques exemples de propositions et la façon dont nous les analysons.

« n est un nombre qui s'écrit sous la forme $2k$ avec k entier »

C'est une formulation dans laquelle il n'y a pas un quantificateur explicite. La présence du quantificateur, existentiel, est marquée par le « avec ». Dans la formulation suivante la quantification est plus claire :

« Il existe un nombre k tel que $n = 2k$ »

Voici un exemple extrait de la thèse de Rakatovoavy (1983) qui avait travaillé avec Daniel Lacombe. Elle donne comme exemple

« Il existe un plan contenant un point donné et parallèle à un plan donné »

Elle travaille sur la présence des mots tels que « donné ». La formalisation logique de cette proposition est la suivante : $\forall P \forall M \exists Q (P // Q) \wedge (M \in Q)$. Les quantifications universelles sur le plan P et le point M viennent avant la quantification existentielle sur le plan Q (d'un point de vue logique la quantification de Q est incluse dans le champ des quantifications universelles), alors que, dans l'énoncé, la quantification existentielle vient d'abord. Le mot « donné » sert à préciser des indications de lecture, de façon à rapprocher la formulation « en mots » à la structure logique de la proposition qui est sous-jacente. Il n'y a bien sûr aucune raison que cette fonction soit claire pour quelqu'un qui découvre cet usage.

Notre exemple suivant concerne une ambiguïté, il est emprunté à l'équipe du CREM³ de Nivelles. Considérons ces deux propositions :

« Les multiples de 3 et de 4 sont des multiples de 12 »

« Les multiples de 6 et de 9 sont des multiples de 3 »

Les deux propositions sont vraies. Elles ont la même structure syntaxique, elles sont identiques (aux valeurs numériques près). On ne les lit pourtant pas de la même façon. La formalisation logique nous sert à mettre en lumière, à souligner ces différences :

$$\forall n \in \mathbb{N} [(3|n \text{ ET } 4|n) \Rightarrow 12|n]$$

$$\forall n \in \mathbb{N} [(6|n \Rightarrow 3|n) \text{ ET } (9|n \Rightarrow 3|n)]$$

Ce sont les connaissances mathématiques du lecteur ou de la lectrice qui lui permettent de comprendre d'une façon ou d'une autre chacune de ces phrases.

Nous terminons cette partie par deux derniers exemples montrant un autre type de complexité. Dans les textes mathématiques il n'y a pas seulement des propositions énoncées simplement, de façon isolée comme ci-dessus. Souvent leur formulation est mêlée avec des mots qui ne relèvent pas de la proposition mathématique elle-même, mais qui témoignent d'une intention de l'auteur·e qui l'a énoncée. Par exemple :

« 2 est premier, mais pair »

Cette phrase pourrait être prononcée par une personne qui voudrait montrer que l'implication « Si un nombre est premier, alors il est impair » est fausse. Le « mais » porte une intention. La personne ne dit pas simplement « 2 est premier et pair », il énonce cette propriété et veut souligner le fait qu'elle invalide la proposition « Si un nombre est premier, alors il est impair ». Dans cet autre exemple :

Remarque : Deux nombres impairs consécutifs peuvent s'écrire aussi $2k+1$ et $2k+3$ avec k entier et $k \geq 0$.

Le mot « aussi » n'a pas de rôle logique, il place la proposition dans un discours plus large. L'auteur·e fait le lien avec une autre proposition.

Après ce type de travail sur les propositions deux élargissements ont été envisagés : tout d'abord un élargissement de la formulation de proposition à la formulation de preuves, mais également un élargissement du contexte pour passer des discours de mathématicien·ne·s aux formulations auxquelles sont confrontées les élèves en classe.

II. ANALYSES DE FORMULATIONS DE PREUVES ECRITES PAR DES MATHEMATICIEN·NE·S, DEDUCTION NATURELLE

Nous présentons tout d'abord nos outils d'analyse de formulation de preuves. Nous allons procéder à partir d'exemples de textes de preuves issus d'une expérimentation menée auprès de collègues mathématiciens auxquels nous avons demandé de rédiger une preuve de

« Un nombre et son carré ont toujours même parité »

Il leur était demandé d'imaginer écrire une preuve pour une personne ayant le niveau d'un étudiant de première année d'Université. Nous avons obtenu une vingtaine de réponses.

1. Méthodologie d'analyse, adaptation de la déduction naturelle de Gentzen

L'objectif est donc d'analyser des formulations de preuves de mathématicien·ne·s, sur le même principe de l'utilisation du calcul des prédicats pour l'analyse des propositions : en ayant une preuve formelle de référence pour pouvoir analyser les formulations en mots au regard de cette référence. Pour ce faire nous utilisons la déduction naturelle de Gentzen (Hache & Mesnil, 2015). C'est un outil logique proche de la déduction naturelle de Copi⁴. D'autres outils sont utilisés en didactique des mathématiques, signalons notamment les travaux de Thomas Barrier autour de la logique dialogique (Barrier, 2016).

La déduction naturelle de Gentzen nous permet : de distinguer clairement ce qui est dit en mots et la preuve formelle (de même que la déduction naturelle de Copi), de différencier chaque pas de déduction, et de présenter la preuve sous forme d'un arbre (à la différence de la présentation de Copi). Dans le cadre de ces analyses de formulations nous avons adapté les notations de Gentzen, nous le préciserons le cas échéant.

4 Utilisée par Faïza Chellougui, voir Chellougui 2020 dans ces actes.

Nous présentons le principe de notation sur deux pas de déduction très simples. Chaque pas de déduction est un nœud de l'arbre. Le pas suivant

$$\frac{P, Q}{P \wedge Q} / \wedge$$

exprime le fait que si je sais démontrer P et Q , alors je sais démontrer la propriété $P \wedge Q$. Pour avoir une preuve de $P \wedge Q$, il suffit d'avoir une preuve de P et une preuve de Q . Ce pas de déduction s'appelle l'introduction du connecteur \wedge (connecteur ET). On utilise également un pas de déduction élémentaire pour l'élimination du connecteur \wedge (l'utilisation dans une preuve d'une propriété de la forme $P \wedge Q$) :

$$\frac{P \wedge Q}{P} \wedge /$$

Ce pas traduit le fait que si je sais prouver la conjonction $P \wedge Q$ alors je sais prouver P ⁵. Il y a ainsi deux (ou trois) pas de déduction pour chaque connecteur ($\wedge, \vee, \Rightarrow, \neg$) ou quantificateur (\forall, \exists). Le nombre de pas de déduction élémentaires est ainsi relativement réduit (une dizaine). Avant de poursuivre, soulignons ici la polysémie du mot *preuve* dans nos propos. Il désigne à la fois

- Une formulation particulière, un texte de preuve, mais aussi l'idée générale. On pourrait par exemple dire « la preuve de untel est très courte ».
- L'idée générale, la structure de la preuve. On pourrait dire par exemple « c'est la preuve par disjonction des cas de la propriété ».
- L'objet formel formulé ici à l'aide de la déduction naturelle.

2. Présentation sur un exemple

Pour préciser ces différents pas, nous allons nous appuyer sur le texte de preuve suivant :

—Auteur 2—

On va établir successivement les propriétés suivantes :

- (1) Si un nombre entier est pair, son carré l'est aussi.
- (2) Si un nombre entier est impair, son carré l'est aussi.

Preuve de (1). Soit n un entier pair. Alors il existe un entier p tel que $n = 2p$. Il vient alors $n^2 = 4p^2 = 2 \times 2p^2$. Ainsi n^2 est pair.

Preuve de (2). Soit n un entier impair. Alors il existe un entier p tel que $n = 2p+1$.

Il vient alors $n^2 = (2p+1)^2 = 4p^2 + 4p + 1 = 2(2p^2 + 2p) + 1$. Ainsi n^2 est impair.

Cette preuve est basée sur une interprétation de « a et b ont même parité » comme « a pair $\Leftrightarrow b$ pair », et l'équivalence est démontrée par la démonstration de deux implications. Pour analyser différentes formulations de cette preuve, nous avons construit effectivement l'arbre de la preuve formelle. Pour analyser un texte isolé nous ne le faisons qu'en cas de soucis, localement (sur un pas de déduction par exemple).

Nous allons tout d'abord nous intéresser à ce que l'auteur·e appelle « Preuve de (1) ». Nous représentons cette preuve de la façon suivante :

\mathcal{A} (preuve du fait que pour tout entier n , si n pair, alors n^2 pair) :

$$\begin{array}{c} \textcircled{n} \\ \left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} \textcircled{p} \\ n = 2p \\ n^2 = 2(2p^2) \quad [2p^2/q] \\ \exists q n^2 = 2q \end{array} \right] / \exists \\ \exists k n = 2k \end{array} \right] / \exists \\ \exists q n^2 = 2q \\ (\exists k n = 2k) \Rightarrow (\exists q n^2 = 2q) \\ \forall x [(\exists k x = 2k) \Rightarrow (\exists q x^2 = 2q)] \end{array} \right] / \Rightarrow \end{array}$$

5 Il existe en fait deux éliminations de \wedge : ce pas-ci, et celui qui permet de déduire Q de $P \wedge Q$.

L'arbre se lit de haut en bas et de l'extérieur vers l'intérieur. C'est en tout cas de cette façon que nous allons le présenter.

Introduction d'un quantificateur universel

La dernière étape (non explicite) est une introduction d'un quantificateur universel. L'auteur·e a prouvé pour un certain n que $(\exists k n = 2k) \Rightarrow (\exists q n^2 = 2q)$, il ou elle en déduit $\forall x [(\exists k x = 2k) \Rightarrow (\exists q x^2 = 2q)]$. Ceci correspond à la dernière étape de l'arbre. Cette étape est préparée par l'introduction d'une variable « fraîche » ou « propre » (non utilisée jusque-là) à un moment opportun.

Dans le texte, la seule trace de ce pas de déduction est l'introduction de la variable n en début de preuve. On peut souligner que, très classiquement, l'auteur·e n'explique pas la conclusion de son raisonnement (le fait que (1) a été prouvé). C'est à la charge du lecteur ou de la lectrice de compléter.

—Auteur 2—
On va établir successivement les propriétés suivantes :
(1) Si un nombre entier est pair, son carré l'est aussi.
(2) Si un nombre entier est impair, son carré l'est aussi.

Preuve de (1). Soit n un entier pair. Alors il existe un entier p tel que $n = 2p$. Il vient alors $n^2 = 4p^2 = 2 \times 2p^2$. Ainsi n^2 est pair.
Preuve de (2). Soit n un entier impair. Alors il existe un entier p tel que $n = 2p+1$. Il vient alors $n^2 = (2p+1)^2 = 4p^2 + 4p + 1 = 2(2p^2 + 2p) + 1$. Ainsi n^2 est impair.

A (preuve du fait que pour tout entier n , si n pair, alors n^2 pair) :

L'introduction d'un quantificateur universel se structure en effet ainsi :

Introduction du quantificateur \forall :

$$\frac{\begin{array}{c} \textcircled{b} \\ \vdots \\ P(b) \end{array}}{\forall x P(x)} \quad \forall$$

\textcircled{b} symbolise l'introduction d'une variable « propre » (ici b) en vue de l'introduction d'un quantificateur universel. Dans une preuve rédigée cela correspond à une présentation de variable. Pendant toute la durée du pointillé la variable b est libre.

Introduction d'une implication

Si on entre davantage dans la preuve, il a donc fallu prouver l'implication $(\exists k n = 2k) \Rightarrow (\exists q n^2 = 2q)$. Pour prouver une implication $P \Rightarrow Q$, on suppose P et on prouve Q . En faisant cela on ne dit pas que P est vraie, on le suppose temporairement.

Introduction du connecteur \Rightarrow :

$$\frac{\left[\begin{array}{c} P \\ \vdots \\ Q \end{array} \right]}{P \Rightarrow Q} \quad \Rightarrow$$

Les crochets symbolisent le même type de double niveau de condition : si [si j'ai une démonstration de P alors j'ai une démonstration de Q], alors j'ai une démonstration de $P \Rightarrow Q$.

NB : je n'ai pas nécessairement de démonstration de P , ni de Q .

Ici on retrouve les traces suivantes de ce pas de déduction. La proposition P est « n est pair », la proposition Q est « n^2 est pair ».

—Auteur 2—
On va établir successivement les propriétés suivantes :
(1) Si un nombre entier est pair, son carré l'est aussi.
(2) Si un nombre entier est impair, son carré l'est aussi.

Preuve de (1). Soit n un entier pair. Alors il existe un entier p tel que $n = 2p$. Il vient alors $n^2 = 4p^2 = 2 \times 2p^2$. Ainsi n^2 est pair. \textcircled{Q}
Preuve de (2). Soit n un entier impair. Alors il existe un entier p tel que $n = 2p+1$. Il vient alors $n^2 = (2p+1)^2 = 4p^2 + 4p + 1 = 2(2p^2 + 2p) + 1$. Ainsi n^2 est impair.

A (preuve du fait que pour tout entier n , si n pair, alors n^2 pair) :

On peut souligner ici que l'auteur·e écrit « Soit n un entier pair » : il ou elle fait en même temps l'introduction de la variable n (début du pas de déduction correspondant à l'introduction de la proposition universellement quantifiée) et l'introduction de l'hypothèse temporaire P (pour la preuve de l'implication). L'auteur·e aurait pu formuler en séparant les deux étapes (« Soit n un entier, supposons que n est pair »), la formulation est moins rapide, mais pourrait être utilisée, par exemple dans une situation où on veut être sûr·e que le lecteur ou la lectrice saisit bien les étapes du raisonnement. C'est ce type d'usage que l'on essaye de décrire.

Comme pour le pas précédent, l'auteur·e n'explique pas la conclusion du pas : il ou elle ne conclut pas « J'ai prouvé $P \Rightarrow Q$ », il ou elle dit juste qu'il ou elle a prouvé Q (en supposant P). Là aussi c'est au lecteur ou à la lectrice de compléter.

Élimination du quantificateur existentiel

Utiliser la propriété « n est pair » ($\exists k \ n = 2k$) dans une preuve, c'est éliminer un quantificateur universel. Le pas de déduction correspondant est le suivant :

Élimination du quantificateur \exists :

$$\frac{\exists x P(x) \quad \left[\begin{array}{c} \odot a \quad P(a) \\ \vdots \\ M \end{array} \right]}{M} \quad \exists/$$

\odot symbolise l'introduction d'une variable « propre » (ici a) en vue d'éliminer un quantificateur existentiel. Dans une preuve rédigée cela correspond à une présentation de variable. Pendant toute la durée du pointillé la variable a est libre.

Les crochets ont la même signification que ci-dessus (à l'intérieur du crochet les déductions peuvent utiliser le fait que la proposition $P(a)$ est vraie).

Je sais ici que $\exists x P(x)$ est vraie. J'introduis une variable fraîche a et je suppose temporairement que $P(a)$ est vraie. Sous cette hypothèse je prouve M . Dans ce contexte j'ai une preuve de M (à partir de $\exists x P(x)$).

Dans notre preuve :

—Auteur 2—

On va établir successivement les propriétés suivantes :

- (1) Si un nombre entier est pair, son carré l'est aussi.
- (2) Si un nombre entier est impair, son carré l'est aussi.

Preuve de (1). Soit n un entier pair. Alors il existe un entier p tel que $n = 2p$. Il vient alors $n^2 = 4p^2 = 2 \times 2p^2$. Ainsi n^2 est pair. M

Preuve de (2). Soit n un entier impair. Alors il existe un entier p tel que $n = 2p+1$. Il vient alors $n^2 = (2p+1)^2 = 4p^2 + 4p + 1 = 2(2p^2 + 2p) + 1$. Ainsi n^2 est impair.

\mathcal{A} (preuve du fait que pour tout entier n , si n pair, alors n^2 pair) :

$$\frac{\left[\begin{array}{c} \odot n \\ \left[\begin{array}{c} n = 2p \\ n^2 = 2(2p^2) \quad [2p^2/q] \\ \exists q \ n^2 = 2q \quad M \end{array} \right] \\ \exists k \ n = 2k \end{array} \right]}{\exists q \ n^2 = 2q \quad M} \quad \exists/ \\ \frac{(\exists k \ n = 2k) \Rightarrow (\exists q \ n^2 = 2q)}{\forall x [(\exists k \ x = 2k) \Rightarrow (\exists q \ x^2 = 2q)]} \quad \forall/$$

À cette étape de la preuve l'auteur·e sait que n est pair (il ou elle l'a supposé temporairement à l'étape précédente), il ou elle introduit une variable fraîche p , et va supposer que $n = 2p$. Il ou elle prouve ensuite M : « n^2 est pair ». Lorsque l'auteur·e écrit « alors il existe un entier p tel que $n = 2p$ », d'une part il ou elle reformule le fait que n est pair, et, d'autre part, il ou elle introduit une variable p et il ou elle affirme que $n = 2p$. L'affirmation de l'existence d'un entier p tel que $n = 2p$ sert également à introduire une variable. Condenser ces deux actions au sein d'une même formulation peut poser problème au moins dans un cas : si nous avons par exemple deux entiers pairs a et b et que nous voulions éliminer les quantifications existentielles correspondantes, il faut introduire deux variables fraîches différentes, soit en les nommant différemment dès l'affirmation de leur existence ($\exists k \ a = 2k$ et $\exists k' \ b = 2k'$), ce qui est la pratique la plus courante, à laquelle les mathématicien·ne·s sont habitué·e·s, mais pas forcément les étudiant·e·s (Chellougui, 2006), soit en séparant le rappel de la formulation sous forme de propriété quantifiée existentiellement ($\exists k \ a = 2k$ et $\exists k \ b = 2k$) de l'introduction des variables (considérons alors k tel que $a = 2k$, et k' tel que $b = 2k'$).

Introduction du quantificateur existentiel

La proposition M qu'il faut prouver dans le pas précédent est, elle-même, une propriété quantifiée existentiellement. La preuve d'une telle propriété est simple à présenter.

Introduction du quantificateur \exists :

$$\frac{P(t) \text{ [t/x]}}{\exists x P(x)} / \exists$$

t est un terme ou une variable libre quelconque dans le contexte (la variable x est ici muette).

La notation $[t/x]$ explicite la substitution en jeu. Il n'est en effet pas toujours

évident de « voir » le terme t . Un exemple simple : $\frac{n = 2 \cdot (2h^2) \text{ [2h^2/x]}}{\exists x n = 2x} / \exists$.

Pour prouver qu'il existe x tel que $P(x)$ il suffit de prouver $P(t)$, pour t un terme quelconque (ici par exemple $2h^2$).

—Auteur 2—

On va établir successivement les propriétés suivantes :

(1) Si un nombre entier est pair, son carré l'est aussi.

(2) Si un nombre entier est impair, son carré l'est aussi.

Preuve de (1). Soit n un entier pair. Alors il existe un entier p tel que $n = 2p$. Il vient alors $n^2 = 4p^2 = 2 \times 2p^2$. Ainsi n^2 est pair.

Preuve de (2). Soit n un entier impair. Alors il existe un entier p tel que $n = 2p+1$. Il vient alors $n^2 = (2p+1)^2 = 4p^2 + 4p + 1 = 2(2p^2 + 2p) + 1$. Ainsi n^2 est impair.

\mathcal{A} (preuve du fait que pour tout entier n , si n pair, alors n^2 pair) :

$$\frac{\left[\frac{\left[\frac{n = 2p}{n^2 = 2(2p^2) \text{ [2p^2/q]}}{\exists q n^2 = 2q} / \exists \right]}{\exists k n = 2k} / \exists \right]}{(\exists k n = 2k) \Rightarrow (\exists q n^2 = 2q)} / \Rightarrow} \frac{}{\forall x [(\exists k x = 2k) \Rightarrow (\exists q x^2 = 2q)]} / \forall$$

Dans le texte le pas de déduction est peu visible. L'auteur écrit simplement « $n = 2 \times 2p^2$, ainsi n^2 est pair » (la formulation avec la quantification existentielle n'est pas donnée, l'auteur pourrait également préciser la substitution « $n = 2 \times 2p^2$, on a donc prouvé que n^2 s'écrit sous la forme $2n'$ avec $n' = 2p^2$, ainsi n^2 est pair »).

Preuve de (2)

La structure de la « preuve de (2) » est identique à la « preuve de (1) » :

\mathcal{B} (preuve du fait que pour tout entier n , si n impair, alors n^2 impair) :

$$\frac{\left[\frac{\left[\frac{n = 2p + 1}{n^2 = 2(2p^2 + 2) + 1 \text{ [2p^2+2/q]}}{\exists q n^2 = 2q + 1} / \exists \right]}{\exists k n = 2k + 1} / \exists \right]}{(\exists k n = 2k + 1) \Rightarrow (\exists q n^2 = 2q + 1)} / \Rightarrow} \frac{}{\forall x [(\exists k x = 2k + 1) \Rightarrow (\exists q x^2 = 2q + 1)]} / \forall$$

Nous soulignons la forme exactement identique du texte pour les deux preuves. Cela peut être un choix de l'auteur·e pour souligner cette proximité, ou un effet d'un copié-collé utilisé pour une rédaction plus rapide...

Remarques

Nous ne détaillons pas ici l'utilisation des marqueurs d'inférence : l'auteur utilise « alors » (utilisation de la définition d'un nombre pair, utilisation de règles de calculs algébrique) et « ainsi » (pour introduire sa conclusion).

Nous n'avons pas non plus détaillé la justification des calculs algébriques (qui correspondent aussi à l'utilisation de théorèmes universellement quantifiés).

La fin de la démonstration (une fois les propriétés (1) et (2) prouvées) se modéliserait de la façon suivante. Toute cette partie de la preuve (utilisation d'une contraposée notamment) n'apparaît pas dans le texte, si ce n'est sous la forme de « on va établir successivement les propriétés suivantes » (qui devrait guider le lecteur ou la lectrice vers le fait qu'établir ces deux propriétés permet de conclure la propriété voulue, que ce n'est pas un oubli de l'auteur·e).

Les variables prennent leurs valeurs dans \mathbb{N} .

$$\frac{\begin{array}{c} \mathbf{A} \quad \mathbf{B} \\ \hline (\forall x (x \text{ pair} \Rightarrow x^2 \text{ pair})) \wedge (\forall x (x \text{ impair} \Rightarrow x^2 \text{ impair})) \\ \forall x [(x \text{ pair} \Rightarrow x^2 \text{ pair}) \wedge (x \text{ impair} \Rightarrow x^2 \text{ impair})] \quad (*) \\ \forall x [(x \text{ pair} \Rightarrow x^2 \text{ pair}) \wedge (x^2 \text{ pair} \Rightarrow x \text{ pair})] \quad (**) \\ \forall x [x \text{ pair} \Leftrightarrow x^2 \text{ pair}] \quad (*) \end{array}}{\quad} \wedge/\wedge$$

Les quatre lignes correspondent à des équivalences logiques ou des réécritures.

(*) : utilisation de règles de transformation des formules logiques (calcul des prédicats).

(**) idem (contraposée) + utilisation de « pair \Leftrightarrow non impair ».

Soulignons qu'il n'est pas spécifique à cet auteur de ne pas indiquer les conclusions de ses pas de déductions. Il est assez remarquable ici que dans la structure globale de la preuve, une partie importante n'est pas dite (partie encadrée dans l'arbre ci-dessous) :

Comparaison avec un autre texte

Regardons maintenant cet autre texte, et comparons avec le texte précédent :

—Auteur 8—

Soit n un nombre entier. Il s'agit de démontrer l'équivalence suivante :

$$n \text{ est pair} \iff n^2 \text{ est pair.}$$

Démontrons ces deux implications.

\Rightarrow Si n est pair, il existe un nombre entier k tel que $n = 2k$. Alors

$$n^2 = (2k)^2 = 2(2k^2)$$

est un nombre pair.

\Leftarrow Montrons cette implication par contraposée. Supposons n impair, il existe alors un nombre entier k tel que $n = 2k + 1$. Alors

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

est un nombre impair.

On a donc montré que n est pair si et seulement si n^2 l'est, et donc aussi que n est impair si et seulement si n^2 est impair.

La structure de la preuve est la même : preuve de deux implications. Mais les deux auteurs ont fait des choix différents. L'auteur 8 est plus explicite sur certains points passés sous silence par l'auteur 2 (explicitation de l'équivalence, explicitation du fait qu'une des deux implications est montrée par contraposée). On peut noter également que l'auteur 8 n'a pas choisi de garder la même syntaxe pour les deux parties (pair / impair), ce qu'avait fait l'auteur 2.

3. Conclusion

La rédaction d'une preuve relève de choix personnels de la personne qui la rédige, qui a ainsi un rôle d'auteur, influencé par des pratiques classiques dans la communauté. Ces choix concernent les arguments mathématiques, la structure de la preuve, la sélection des inférences mises en avant, mais également les formulations de ces arguments et de ces inférences, dans l'ordre d'apparition des arguments dans le texte, etc.

Avec une habitude des pratiques langagières des mathématicien·ne·s, chacun·e comprend ces preuves (l'explicitation de la preuve formelle n'est pas nécessaire). Et au-delà des différences, nous savons en général reconnaître la structure commune de la preuve. Le recours à une preuve formelle, ici dans le cadre de la déduction naturelle de Gentzen, nous permet de donner à voir ces choix en ayant un vocabulaire précis pour les décrire : nous dirons par exemple « ici, X et Y utilisent des formulations différentes pour introduire une variable fraîche en vue de l'introduction d'un quantificateur universel ».

III. ANALYSES DE FORMULATIONS DE PREUVES DANS DES MANUELS

1. Pratiques langagières et apprentissages

Nous avons présenté notre utilisation de la déduction naturelle de Gentzen pour décrire les pratiques langagières des mathématicien·e·s quand ils et elles rédigent une preuve. Nous allons maintenant revenir sur notre hypothèse de travail quand nous nous intéressons non plus à la communauté des mathématiciens et mathématiciennes, mais aux classes, c'est-à-dire aux enseignant·e·s et aux élèves : apprendre les mathématiques, apprendre à prouver, c'est notamment s'approprier ces pratiques langagières. Cette position rejoint celle des didacticien·ne·s de Bordeaux qui s'attachent à décrire les processus de secondarisation, c'est-à-dire les évolutions du langage qui accompagnent l'évolution cognitive :

La question [est de savoir] si, dans les ébauches d'appropriation des outils culturels et sémiotiques, un nouveau comportement cognitif et langagier s'élabore, avec recours à des formes sémiotiques plus conventionnelles et peu à peu stabilisées, propres au champ disciplinaire et aux principes qui régissent sa fonction énonciative. (Rebière, 2013, p.230)

Nous ne regardons pas seulement le langage comme témoin des connaissances, mais comme élément constitutif des connaissances. Les élèves s'acculturent aux pratiques langagières de mathématicien·ne·s, ou du moins à leur transposition dans le cadre de la communauté discursive que constitue la classe, entre autres « formes culturelles d'action et de réflexion » (nous retrouvons là les termes de Luis Radford, et de la théorie de l'objectivation, voir Radford, 2013). Les preuves que nous avons recueillies et qui nous ont servi dans la partie précédente étaient produites par des collègues enseignant à l'université. Les pratiques langagières décrites sont celles de la communauté des mathématiciens et mathématiciennes, mises en œuvre notamment dans leurs productions à destination de leurs collègues. Nous retrouvons ces pratiques quasiment à l'identique dans les productions à destination des étudiant·e·s de l'enseignement supérieur (affirmation qui s'appuie sur notre fréquentation de ces documents et non pas sur une analyse méthodologiquement cadrée qui reste à mener). Les enseignant·e·s de mathématiques du secondaire ont baigné dans ces pratiques pendant leurs études au moins. Ils et elles ont également été évalué·e·s sur des productions écrites ou orales pour lesquelles ils devaient se conformer, dans une certaine mesure, aux usages langagiers attendus par la communauté. Qu'en est-il alors dans les documents ou discours à destination de leurs élèves ? Les objets mathématiques étudiés sont soumis à un processus de transposition didactique, qu'en est-il des pratiques langagières ?

Nous avons donc poursuivi nos analyses à partir des questions suivantes : quelles sont les pratiques langagières caractéristiques des textes de preuve que lisent les élèves du secondaire ? Retrouve-t-on les pratiques langagières de la communauté des mathématicien·ne·s ?

Les textes de preuves fréquentés par les élèves les plus faciles d'accès pour nous sont ceux des manuels, nous avons donc dans un premier temps cherché à les analyser de la même façon que les précédents. Nous testons ainsi également la robustesse de notre méthodologie d'analyse.

2. Exemples d'analyses de formulations de preuves dans les manuels

Une même preuve dans différents manuels

Regardons d'abord une même preuve dans différents manuels de Seconde. Le programme de mathématiques pour la classe de Seconde de 2019 réaffirme l'importance de la démonstration dans l'activité mathématique et liste treize démonstrations désignées comme « exemplaires » :

Démontrer est une composante fondamentale de l'activité mathématique. Le programme identifie quelques démonstrations exemplaires, que les élèves découvrent selon des modalités variées : présentation par le professeur, élaboration par les élèves sous la direction du professeur, devoirs à la maison, etc. (BOEN 2019, p. 5)

Parmi elles, nous trouvons « variations des fonctions carré, inverse, racine carrée ». Nous allons regarder plus précisément les démonstrations concernant les variations de la fonction carré. Signalons tout d'abord que la tâche « démontrer que la fonction carré est croissante sur \mathbb{R}_+ et décroissante sur \mathbb{R}_- » n'est pas exactement la même que « étudier les variations de la fonction carré ». Dans le premier cas, il s'agit explicitement de produire une démonstration d'une propriété qui est donnée, dans le deuxième cas, il s'agit aussi de déterminer la propriété à démontrer, et le fait qu'il soit attendu une preuve de cette propriété relève d'un contrat qui n'est pas forcément clair pour les élèves.

Dans les différents manuels de 2019 que nous avons consultés⁶ (les sept manuels disponibles à la bibliothèque de l'IREM de Paris), un encadré intitulé « propriété » ou « théorème » donne les variations de la fonction carré, et la démonstration est disposée juste après l'encadré dans quatre des manuels, et est renvoyée à un exercice dans les trois autres manuels. Regardons plus précisément les quatre textes de preuve ci-après.

Propriété

La fonction carré est **strictement décroissante** sur $]-\infty ; 0]$
et **strictement croissante** sur $[0 ; +\infty[$.

Démonstration
À connaître

- **Sur $]-\infty ; 0]$.** u et v sont deux réels quelconques de $]-\infty ; 0]$ avec $u < v \leq 0$.
On étudie le signe de $v^2 - u^2 = (v - u)(v + u)$. Or, $u < v \leq 0$, d'où $v - u > 0$ et $v + u < 0$.
Donc $v^2 - u^2 < 0$, soit $v^2 < u^2$. D'où $f(u) > f(v)$.
La fonction carré est donc strictement décroissante sur $]-\infty ; 0]$.
- **Sur $[0 ; +\infty[$.** u et v sont deux réels quelconques de $[0 ; +\infty[$ avec $0 \leq u < v$.
On étudie le signe de $v^2 - u^2 = (v - u)(v + u)$. Or, $0 \leq u < v$, d'où $v - u > 0$ et $v + u > 0$.
Donc $v^2 - u^2 > 0$, soit $v^2 > u^2$. D'où $f(u) < f(v)$.
La fonction carré est donc strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

voir Exemple 2

Extrait 1 : preuve des variations de la fonction carré dans le manuel *Métamaths*⁷

- 6 Lors de la préparation de notre intervention au Séminaire National, les nouveaux manuels n'étaient pas encore sortis, et nous avons donc utilisé pour la présentation des anciens manuels. Nous avons actualisé l'analyse pour le présent texte.
- 7 Nous appelons ainsi par le nom de la collection les quatre manuels utilisés. Ils sont référencés à la fin du texte dans la rubrique « Manuels scolaires cités ».

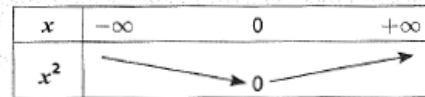
A Sens de variation de la fonction carré

Propriété

La fonction carré $f : x \mapsto x^2$ est :

(1) **décroissante** sur l'intervalle $]-\infty ; 0]$;

(2) **croissante** sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.



Démonstration

Pour tous nombres réels u et v , $u^2 - v^2 = (u - v)(u + v)$.

(1) **Cas où $u \leq v \leq 0$**

De $u \leq v$, on déduit que $u - v \leq 0$.

De $u \leq 0$ et $v \leq 0$, on déduit que $u + v \leq 0$.

Donc $(u - v)(u + v) \geq 0$, c'est-à-dire $u^2 - v^2 \geq 0$, soit $u^2 \geq v^2$.

Donc f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty ; 0]$.

(2) **Cas où $0 \leq u \leq v$**

De $u \leq v$, on déduit que $u - v \leq 0$.

De $u \geq 0$ et $v \geq 0$, on déduit que $u + v \geq 0$.

Donc $(u - v)(u + v) \leq 0$, c'est-à-dire $u^2 - v^2 \leq 0$, soit $u^2 \leq v^2$.

Donc f est croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

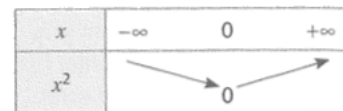
Extrait 2 : preuve des variations de la fonction carré dans le manuel Hyperbole

a Fonction carré

Propriété

La fonction carré est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty ; 0]$ et strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

Elle admet 0 comme minimum, atteint en 0.



Démonstration

Soient deux réels a et b tels que $a < b$. On doit comparer a^2 et b^2 .

On a $b^2 - a^2 = (b - a)(a + b)$.

On sait que $a < b$ donc le facteur $(b - a)$ est strictement positif.

• Si a et b appartiennent à $]-\infty ; 0]$, alors le facteur $(a + b)$, somme de deux réels négatifs, est négatif et non nul. Par la règle des signes d'un produit, on obtient que $b^2 - a^2 < 0$, c'est-à-dire que $a^2 > b^2$.

• Si a et b appartiennent à $[0 ; +\infty[$, alors le facteur $(a + b)$, somme de deux réels positifs, est positif et non nul. Par la règle des signes d'un produit, on obtient que $b^2 - a^2 > 0$, c'est-à-dire que $a^2 < b^2$.

Conséquences

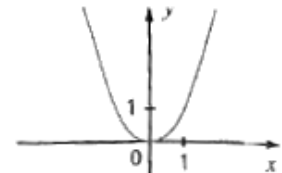
- Deux nombres positifs et leurs carrés sont rangés dans le même ordre.
- Deux nombres négatifs et leurs carrés sont rangés dans l'ordre contraire.

Voir Je m'exerce à démontrer
Voir exercice Démo n° 40

Extrait 3 : preuve des variations de la fonction carré dans le manuel Déclic

Propriété

La fonction carré, définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$, est décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et croissante sur $[0 ; +\infty[$.



DEMONSTRATION AU PROGRAMME Soit a et b deux réels tels que $a \leq b$.

Pour comparer $f(a)$ et $f(b)$, c'est-à-dire a^2 et b^2 , on étudie le signe de $a^2 - b^2$.

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Comme $a \leq b$, $a - b \leq 0$. On distingue deux cas :

• Si $a \leq 0$ et $b \leq 0$, alors $a + b \leq 0$ (comme somme de deux nombres négatifs).

Donc le produit $(a - b)(a + b)$ est positif. Par conséquent, $a^2 - b^2 \geq 0$ et par suite $a^2 \geq b^2$.

Ainsi sur $]-\infty ; 0]$, si $a \leq b$, alors $f(a) \geq f(b)$: la fonction carré est décroissante sur $]-\infty ; 0]$.

• Si $a \geq 0$ et $b \geq 0$, alors $a + b \geq 0$ (comme somme de deux nombres positifs).

Donc le produit $(a - b)(a + b)$ est négatif. Par conséquent, $a^2 - b^2 \leq 0$ et par suite $a^2 \leq b^2$.

Ainsi sur $[0 ; +\infty[$, si $a \leq b$, alors $f(a) \leq f(b)$: la fonction carré est croissante sur $[0 ; +\infty[$.

Extrait 4 : preuve des variations de la fonction carré dans le manuel Indice

Il n'est pas utile ici de construire l'arbre de la preuve en déduction naturelle. Notons juste que la propriété caractéristique définissant une fonction croissante ou décroissante est une implication universellement quantifiée, et regardons comment sont présentées les variables en vue de l'introduction d'une quantification universelle (voir page 125), et comment est présentée l'hypothèse temporaire en vue de l'introduction d'une implication (voir page 125).

Dans les textes des manuels *Indice* et *Déclic*, variables et hypothèse sont introduites de façon très classique : « soit... tel que... ». Les variables a et b désignent des réels, la restriction à \mathbb{R}_+

ou à \mathbf{R} . vient après la présentation de l'hypothèse $a \leq b$. Formellement, la proposition qui est donc démontrée est

$$\forall a \forall b \left(\text{si } a \leq b \text{ alors } \left[\left(\text{si } (0 \leq a \leq b) \text{ alors } a^2 \leq b^2 \right) \text{ et } \left(\text{si } (a \leq b \leq 0) \text{ alors } a^2 \geq b^2 \right) \right] \right)$$

Nous nous convaincrions facilement que cette proposition est bien équivalente à

$$\left[\forall a \geq 0 \forall b \geq 0 \left(\text{si } a \leq b \text{ alors } a^2 \leq b^2 \right) \right] \text{ et } \left[\forall a \leq 0 \forall b \leq 0 \left(\text{si } a \leq b \text{ alors } a^2 \geq b^2 \right) \right]$$

qui est la reformulation stricte de « la fonction carré est croissante sur \mathbf{R}_+ et décroissante sur \mathbf{R} ». Il est d'ailleurs possible de le démontrer par du « calcul des prédicats » (par exemple en utilisant l'équivalence entre $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$ et $B \Rightarrow (A \Rightarrow C)$, ou encore entre « $\forall x P[x]$ et $\forall x Q[x]$ » et « $\forall x (P[x] \text{ et } Q[x])$ »).

Dans les textes des manuels *Métamaths* et *Hyperbole*, nous retrouvons bien d'une part la démonstration de la croissance sur \mathbf{R}_+ avec introduction de deux variables désignant des réels positifs, d'autre part la démonstration de la décroissance sur \mathbf{R} avec introduction de deux variables désignant des réels négatifs. Dans le manuel *Métamaths*, la formulation utilisée pour présenter les variables et l'hypothèse temporaire est inhabituelle : elle consiste en une simple utilisation du présent et du qualificatif « quelconques » (plus habituel) pour présenter les variables, et du mot « avec » pour présenter l'hypothèse temporaire (mot également utilisé pour marquer une quantification, voir Hache 2015). Dans le manuel *Hyperbole*, les variables ne sont pas introduites, et l'hypothèse temporaire est introduite par « cas où », ce qui là aussi une formulation inhabituelle.

De façon classique, la quantification universelle n'est pas introduite en fin de démonstration, on passe directement de l'inégalité $a^2 \leq b^2$ à « la fonction carré est donc croissante sur \mathbf{R}_+ » dans les manuels *Métamaths* et *Hyperbole*, le texte s'arrête sur l'inégalité dans le manuel *Déclic*. Seul le manuel *Indice* introduit l'implication, et de façon implicite la quantification universelle (c'est le sens que nous donnons à l'expression « sur $[0, +\infty[$ »), avant de conclure de la même façon. Regardons maintenant les textes d'un point de vue plus global :

- On y retrouve les mots classiquement utilisés pour marquer les inférences (donc, par conséquent, de... on déduit que...)
- On y trouve des commentaires méta, « on étudie le signe de $a^2 - b^2$ », « on doit comparer a^2 et b^2 »
- Dans les quatre manuels, la démonstration est rédigée en deux parties dont les mots autour du travail mathématique sont rigoureusement les mêmes.

Finalement, ces textes, qui s'appellent « démonstration », ressemblent aux textes précédemment étudiés, même si nous pouvons noter l'usage de formulations qui ne font pas partie des pratiques langagières des mathématicien·ne·s. Nous avons pu les décrire grâce à notre référence à la déduction naturelle, sans qu'il soit nécessaire ici de construire tout l'arbre de la preuve. Nous retrouvons également, d'un texte à l'autre, le même type de différences dans les choix de formulations. La recherche pourrait se poursuivre en interrogeant des enseignant·e·s pour comprendre ce qui guide ces choix de formulation et de structuration de la preuve.

L'expression « démonstration exemplaire » utilisée dans le programme peut s'entendre de deux façons : d'une part simplement comme une démonstration que les élèves doivent avoir vue, d'une façon ou d'une autre, d'autre part comme une démonstration qui peut jouer un rôle de modèle. Dans ce deuxième cas, le modèle peut se situer à un premier niveau de généralité, un modèle de démonstration du sens de variation d'une fonction, ou à un deuxième niveau, une démonstration d'une implication universellement quantifiée. Les commentaires méta des textes étudiés concernent une technique pour étudier une inégalité, et non pas une technique pour démontrer, ce qui nous amène à penser que l'objectif pour les auteur·e·s est plutôt de faire de cette démonstration un modèle de démonstration de variation d'une fonction, tâche qui est d'ailleurs proposée dans d'autres exercices du même chapitre. Là encore, des observations et des entretiens avec des enseignant·e·s nous renseigneraient sur la façon dont ils investissent ce caractère d'exemplarité.

D'autres textes de preuve ?

Nous l'avons déjà dit précédemment (voir page 130), la tâche proposée aux élèves peut être formulée explicitement sous la forme « prouver/démontrer que... », ou elle peut sous-entendre la production d'une preuve sans que cela soit explicitement demandé.

Par exemple, regardons une tâche courante au collège : « ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 3$ cm et $AC = 4$ cm. Déterminer BC ». Elle n'est jamais formulée de la façon suivante : « Soit ABC un triangle rectangle tel que $AB = 3$ cm et $AC = 4$ cm. Démontrer que $BC = 5$ cm. » La façon de résoudre l'une ou l'autre tâche ne serait pas très différente, si ce n'est qu'il y a assurance du résultat dans le deuxième cas.

Ainsi, il y a dans les manuels, notamment dans les encarts avec des exercices résolus qui accompagnent les pages de cours, des textes qui ne sont pas identifiés « démonstration », mais qui y ressemblent. Nous avons alors regardé l'ensemble des exercices résolus du manuel *Math 'x*. Nous y avons cherché systématiquement les pas de déduction exprimés ou implicites, et les usages de marqueurs classiques de pas de déduction. Les choses semblent plus relâchées. Nous prenons ici deux exemples d'usage d'un « donc » qui semble plus souligner une utilisation implicite d'une palette d'outils, de savoir-faire, qu'un pas de déduction au sens vu précédemment.

2 Lire images et antécédents sur un tableau de valeurs

Énoncé

La fonction f définie sur \mathbb{R} admet le tableau de valeurs ci-contre.

Donner : a. l'image de 4 par f b. $f(-2)$ c. des antécédents de 3

x	4	1	-2	-4
$f(x)$	3	-2	3	13

Solution

- a. L'image de 4 par f est 3. b. $f(-2)$ est l'image de -2 par f , donc $f(-2) = 3$.
c. 4 et -2 sont des antécédents de 3 (il peut y en avoir d'autres ne figurant pas dans le tableau !).

Extrait 5 : exercice résolu p.33 dans le manuel Math 'x

Le raisonnement sous-entendu ici peut être décrit de la façon suivante : « $f(-2)$ est une écriture qui signifie l'image de -2 par f . Le tableau en haut à droite donne les images par f de différents entiers en associant à un entier donné dans la première ligne, son image donnée dans la même colonne de la deuxième ligne. Le nombre en dessous de -2 est 3. Cela signifie que l'image de -2 est 3 ». Ce raisonnement n'est pas de la même nature que ceux décrits précédemment avec la déduction naturelle, et nous serions bien en peine de le faire, car il ne s'agit pas d'une démonstration, quand bien même un « donc » est utilisé.

Regardons un autre exemple :

5 Déterminer la nature d'un quadrilatère avec des coordonnées

Énoncé

Soit $A(-5 ; -1)$, $B(1 ; -3)$, $C(3 ; 3)$ et $D(-3 ; 5)$ dans un repère orthonormé.

Démontrer que $ABCD$ est un carré.

Solution

- On commence par faire une figure : $ABCD$ semble être un carré.
- On démontre que **$ABCD$ est un parallélogramme** en montrant que ses diagonales ont même milieu $K(-1 ; 1)$ (comme dans l'exercice résolu 2 page 247).
- $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = (1+5)^2 + (-3+1)^2 = 40$
 $BC^2 = (3-1)^2 + (3+3)^2 = 40$. On constate que $AB = BC = \sqrt{40}$.
- Par suite le parallélogramme **$ABCD$ est un losange**.
- $AC^2 = (3+5)^2 + (3+1)^2 = 80$. Or $AB^2 + BC^2 = 40 + 40 = 80$.
- On constate donc que $AB^2 + BC^2 = AC^2$.
- On en déduit que ABC est rectangle en B (réciproque du théorème de Pythagore).
- Le parallélogramme $ABCD$ a donc un angle droit, **c'est un rectangle**.
- $ABCD$ est à la fois losange et rectangle donc **$ABCD$ est un carré**.

Méthode

- Un parallélogramme qui a 2 côtés consécutifs de même longueur est un losange.
- Un parallélogramme qui a un angle droit est un rectangle.
- Un quadrilatère qui est à la fois un losange et un rectangle est un carré.

➤ Voir exercices 74 à 77

Extrait 6 : exercice résolu p. 248 dans le manuel Math 'x

Il s'agit d'un exercice résolu dans lequel la tâche est explicitement une demande de démonstration, pourtant le texte produit comporte des éléments potentiellement perturbateurs :

- Quel est le statut de la première phrase, « on commence par faire une figure : $ABCD$ semble être un carré » ? Elle est mise au même niveau que la suite : une puce, et pourtant, il n'est pas attendu qu'elle figure dans le texte accompagnant la résolution de la tâche.
- Ensuite, le texte est un texte de preuve, mais les théorèmes servant à justifier certains pas de déduction sont donnés hors du texte, dans un encart. De tels encarts sont fréquents, sans doute pour pallier l'absence de discours oral d'accompagnement, peut-être pour alléger, pour ne pas inquiéter le lecteur ou la lectrice, ou peut-être est-ce une contrainte éditoriale, la nécessité de gagner de la place. Ici, l'encart sert à dégager de cette tâche particulière une méthode (nous dirions également une technique, même si sa formulation ne comporte pas d'indication d'actions) qui pourra être réinvestie dans la résolution d'autres tâches, Cela signifie-t-il qu'il n'est pas attendu des élèves que ces théorèmes figurent dans le texte accompagnant la résolution de la tâche ?

IV. CONCLUSION

Nous avons présenté un outil d'analyse des pratiques langagières des mathématicien·ne·s dans le cadre de la rédaction de preuves : en les comparant à un référent formel élaboré à partir de la déduction naturelle de Gentzen, nous donnons à voir les différences entre les textes produits, différences qui sont interprétées comme autant de choix non seulement d'arguments mathématiques mais également de mise en forme. Ces choix sont influencés à la fois par les pratiques de la communauté, et à la fois par des prises de position personnelles (conscientes ou non) sur ce qui est le plus favorable à la clarté de la preuve exposée, voire à son élégance.

Nous avons ensuite testé cet outil d'analyse sur des textes de preuves dans des manuels de Seconde : nos premières explorations montrent que l'on retrouve à la fois les formulations usuelles dans la communauté mathématique, mais également des formulations spécifiques. Il faudrait une étude plus systématique et plus large pour voir s'il s'agit de formulations spécifiques à telle ou telle équipe d'auteur·e·s de manuel, ou plus largement aux enseignant·e·s de lycée. Par ailleurs, nous avons vu que les textes de preuves auxquels sont confronté·e·s les élèves ne sont pas seulement les démonstrations des propriétés du cours, mais aussi des bouts de preuves par exemple dans le cadre de corrections d'exercices résolus. Mais dans ces cas-là particulièrement, ce qui relève strictement de la preuve est mêlé à d'autres éléments que nous pourrions, dans une première approche à gros grain qui mérite d'être affinée, qualifier de commentaires méta sur la preuve (commentaires sur le caractère général de cette preuve-là, sur la façon de penser à tel ou tel argument ou étape de raisonnement, sur des liens avec d'autres contextes déjà étudiés, sur l'importance de certaines notations ou formulations, etc.).

Les textes des manuels ne sont qu'une entrée (facilement accessible !) dans l'étude des pratiques langagières des enseignant·e·s. Pour une étude plus complète de celles-ci, plusieurs pistes méthodologiques sont à explorer : analyser la production de preuves « en situation d'enseignement », c'est-à-dire non pas un texte écrit produit par un·e enseignant·e, mais bien toute l'activité de production / présentation de cette preuve en classe (travail de master de Chrystel Noléo, Noléo, 2019), intégrant le discours oral, les différents ostensifs graphiques, voire les gestes ; interroger les enseignant·e·s sur ce qui motive leurs choix de telle ou telle formulation, de telle ou telle organisation d'une preuve.

Une autre perspective de recherche est centrée sur les élèves et étudiant·e·s. Rappelons notre hypothèse de travail : apprendre à prouver c'est notamment apprendre à formuler des preuves, apprentissage qui se fait par acculturation aux pratiques langagières usuelles. Peut-on évaluer cette acculturation ? Partager des critères d'évaluation avec les élèves ? Quelles activités, quel

discours, peuvent la favoriser ou au contraire faire obstacle à cette acculturation ? Pour répondre à ces questions, il est nécessaire de pouvoir analyser les productions des élèves : quels outils d'analyse sont alors pertinents ? L'utilisation de la déduction naturelle permet-elle d'analyser des preuves qui ne sont pas forcément complètes, ou même valides ? Là encore, nous commençons à explorer ces questions, notamment dans des travaux de master (travail de master de Caroline Dequize-Lamour, Dequize-Lamour, 2019, travail de master de Simon Gentil, Gentil, à paraître).

REFERENCE BIBLIOGRAPHIQUES

- ADDA J. (1975). L'incompréhension en mathématiques et les malentendus. *Educational Studies in Mathematics*, 6 (3), 311-326.
- BARRIER, T. (2016). Les exemples dans l'élaboration des démonstrations mathématiques : une approche sémantique et dialogique. *Recherches en éducation*, 27, 94-117. <http://www.recherches-en-education.net/IMG/pdf/REE-No27.pdf>
- BOEN (2019). Arrêtés du 17 janvier 2019 publiés au *Bulletin officiel du ministère de l'éducation nationale* spécial n°1 du 22 janvier 2019. https://cache.media.education.gouv.fr/file/SP1-MEN-22-1-2019/95/7/spe631_annexe_1062957.pdf
- BRONCKART, JP. (2013). Des interactions complexes entre langage verbal, opérations et raisonnements. In A. Bronner et al. *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage* (pp.181-195). La Pensée sauvage. <https://archive-ouverte.unige.ch/unige:81365>
- CHELLOUGUI, F. (2006). L'utilisation des quantificateurs universel et existentiel en première année d'université, entre l'explicite et l'implicite. In G. Geudet et Y. Matheron (éds), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques* (pp.101-122). Paris : IREM de Paris <http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/publications/AAR07001.pdf>
- CHELLOUGUI, F. (2020). Pertinence de la prise en compte du formalisme logique pour une étude didactique de l'activité mathématique. In J. Pilet et C. Vendeira-Maréchal, *Actes 2019 du séminaire de l'ARDM*, (pp.101-119). IREM de Paris.
- DEQUIREZ-LAMOUR, C. (2019). *Formulation de preuve au cycle 4. Analyses de travaux d'élèves et de pratiques enseignantes autour de la formulation de preuves. Étude d'un cas : formulation d'un raisonnement par l'absurde*. Mémoire du master « Didactique » de l'Université Paris Diderot.
- DURAND-GUERRIER, V. (1999). L'élève, le professeur et le labyrinthe, *Petit x*, 50, 57-79. <https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/petit-x/consultation/>
- DURAND-GUERRIER, V., BOERO, P., DOUEK, N., EPP, S. & TANGUAY, D. (2012). *Examining the Role of Logic in Teaching Proof*. In G. Hanna et M. de Villiers (éds), *ICMI Study 19 Book: Proof and Proving in Mathematics Education*, chap. 16, (pp. 369-389). Springer, New-York.
- GENTIL, S. (à paraître). *Analyse de formulation de preuves par des élèves en terminale*. Mémoire du master « Didactique » de l'Université de Paris.
- HACHE, C. (2015). Pratiques langagières des mathématiciens. Une étude de cas avec « avec », *Petit x*, 97, 27-43. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01397401>
- HACHE, C. (2019). *Questions langagières dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques*, Note de synthèse HDR, Université Paris Diderot. <https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-02420979/document>
- HACHE C. & FORGEUX, E. (2018). Vrai ou faux ? Parlons-en ! *Au fil des mathématiques*, APMEP, 528, 49-54. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02292639>
- HACHE, C. & MESNIL, Z. (2012). Élaboration d'une formation à la logique pour les professeurs de mathématiques. In M. Gandit et B. Grugeon-Allys (éds), *Actes des XVIII^e et XIX^e colloques de la CORFEM* (pp. 201-224). Besançon : Université et IUFM de Franche-Comté. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00874279/document>
- HACHE, C. & MESNIL, Z. (2015). Pratiques langagières et preuves. *Actes du XXII^e colloque de la CORFEM*. Nîmes. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01285116/document>
- LABORDE, C. (1982). *Langue naturelle et écriture symbolique, deux codes en interaction dans l'enseignement mathématique*. Thèse, Université de Grenoble.
- MESNIL, Z. (2014). *La logique : d'un outil pour le langage et le raisonnement mathématique vers un objet d'enseignement*. Thèse de doctorat. Université Paris Diderot. <https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01114281/file/TheseMesnilVersionPubliee.pdf>
- NOLEO, C. (2019). *Pratiques et problématiques langagières au lycée : formuler une démonstration*. Mémoire du master « Didactique » de l'Université Paris Diderot.
- RADFORD, L. (2013). On Semiotics and Education. *Éducation et didactique*, 7(1), 185-204. <https://journals.openedition.org/educationdidactique/1668>
- RAKATOVAVY, F. (1983). *Les difficultés linguistiques et pédagogiques soulevées par l'emploi dans les textes mathématiques de certains adjectifs marqueurs de variance (exemples principalement empruntés dans des manuels du second degré)*, Thèse Université Paris 7, IREM de Paris, Paris. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-02193780>
- REBIERE, M. (2013). S'intéresser au langage dans l'enseignement des mathématiques, pour quoi faire ? In A. Bronner et al. *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage* (pp. 119-232). La Pensée Sauvage éditions.

MANUELS SCOLAIRES CITES

DECLIC. Édition 2019 du manuel *Déclic 2^{de} Maths*, Hachette Éducation

HYPERBOLE. Édition 2019 du manuel *2^{de} Mathématiques Hyperbole*, Nathan.
INDICE. Édition 2019 du manuel *Collection Indice Maths 2de*, Bordas
MATH'X. Édition 2010 du manuel *Collection Math'x 2^{de}*, Didier
METAMATHS. Édition 2019 du manuel *2^{de} maths, collection Métamaths*, Belin Éducation.

UN POINT DE VUE DE DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES SUR LES INEGALITES SCOLAIRES ET LE ROLE DU LANGAGE DANS L'APPRENTISSAGE ET L'ENSEIGNEMENT

Aurélie **CHESNAIS**

LIRDEF, Université de Montpellier

aurelie.chesnais@umontpellier.fr

La première partie de la note présente la synthèse de travaux menés à propos de la construction des inégalités scolaires dans la classe de mathématiques. Cette synthèse m'amène à questionner la distinction faite entre différenciation passive et active dans les travaux du réseau RESEIDA. La deuxième partie porte sur les spécificités et le potentiel de l'approche théorique de l'étude du fonctionnement du processus d'enseignement-apprentissage des mathématiques dans le cadre scolaire ordinaire, ancrée en théorie de l'activité, qui sous-tend mes recherches. L'ancrage en théorie de l'activité induit des analyses des contenus mathématiques et des séances de classes avec des outils méthodologiques spécifiques. Les exemples portent sur la mesure dans une approche interdidactique mathématiques-physique et sur la symétrie orthogonale. Il s'agit ainsi de montrer comment ce cadre théorique permet de prendre en considération certains aspects liés aux dimensions psychologiques (cognitives) et socio-culturelles du processus, ce qui apparaît comme nécessaire pour l'étude de certaines questions, comme les deux questions centrales abordées dans la note : la construction des inégalités scolaires dans la classe de mathématiques et le rôle du langage dans le processus d'enseignement et apprentissage des mathématiques. Enfin, la troisième partie permet de problématiser cette dernière question, liée au langage, au sein du cadre théorique développé dans la deuxième partie, en la situant dans le paysage international des recherches en *mathematics education*. En appui sur une synthèse de quelques études exploratoires, je problématise cette question selon quatre entrées : les pratiques langagières mathématiques comme objets d'apprentissage, le langage comme moyen d'apprentissage, le langage comme moyen d'enseignement et le langage comme outil méthodologique du chercheur.

Chesnais, A. (2018). *Un point de vue de didactique des mathématiques sur les inégalités scolaires et le rôle du langage dans l'apprentissage et l'enseignement*. Note de synthèse en vue de l'obtention de l'HDR. Université de Montpellier.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- BROUSSEAU, G. (2002). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.
- NIKOLANTONAKIS, K. & VIVIER, L. (2016). El ETM de Futuros Profesores de Primaria en un Trabajo sobre los Números Naturales en Cualquier Base. *Boletim de Educação Matemática – BOLEMA*, 30(54), 23-44.
- TEMPIER, F. (2013). *La numération décimale à l'école primaire. Une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource*. Thèse de Doctorat, Université Paris Diderot, Paris.

APPORT D'UN JEU TANGIBLE ET NUMERIQUE POUR L'EVOLUTION DES CONCEPTIONS DES ELEVES EN NUMERATION DECIMALE DE POSITION

Sophie **SOURY-LAVERGNE**

Institut Français de l'Education ENS de Lyon, S2HEP et Université Grenoble Alpes

Sophie.Soury-Lavergne@ens-lyon.fr

Un des objectifs du jeu Chiffroscope, basé sur un dispositif hybride de matériel tangible et numérique, dont un robot, est de proposer des situations d'apprentissage de la numération qui travaillent le principe décimal tout autant que le principe de position (Houdement et Tempier, 2018). Nous avons modélisé les différentes conceptions des élèves (au sens de Balacheff & Margolinas 2005), en décrivant les invariants opératoires rattachés à chacun des deux principes et les principales stratégies, dont celle qui consiste à convertir systématiquement les unités de numération en unités simples. L'expérimentation conduite en cycle 2 et cycle 3, selon deux modalités, l'une dans un LéA avec une démarche de recherche orientée par la conception, l'autre, avec un essai randomisé avec groupe contrôle, permet de mesurer l'évolution des conceptions des élèves liée à l'utilisation du jeu. Les premiers résultats montrent les difficultés résistantes des élèves en numération, notamment relatives à la maîtrise du principe décimal, et des apprentissages liés à l'utilisation du jeu plus manifestes en cycle 2 qu'en cycle 3.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- BALACHEFF, N. & MARGOLINAS, C. (2005). $\text{cK}\phi$ Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. In C. Margolinas & A. Mercier (Éd.), *actes de l'EEDDM* pp. 1-32. Corps, France : La pensée Sauvage Grenoble, France.
- HOUEMENT, C. & TEMPIER, F. (2018). Understanding place value with numeration units. *ZDM Mathematics Education*, 1-13.

USAGES ET FORCE DES REPRESENTATIONS DANS L'INGENIERIE DIDACTIQUE COOPERATIVE ACE-ARITHMECOLE

Mireille MORELLATO

Education Nationale - CREAD

mireille.morellato@ac-aix-marseille.fr

Résumé

Nous présentons, à partir de notre travail de thèse, comment la collaboration à long terme avec des professeurs de l'enseignement élémentaire a conduit un groupe de chercheurs et de professeurs, mettant en œuvre l'ingénierie didactique coopérative « Arithmétique et compréhension à l'école élémentaire » (ACE), à installer collectivement des directions de travail partagées. Nous montrerons l'intérêt de s'attacher à l'effort du travail réalisé par le collectif sur les « systèmes sémiotiques » permettant au professeur et aux élèves de "technologiser" leurs usages de ces systèmes. Nous proposerons ensuite quelques hypothèses de recherche spécifiques aux conditions de diffusion de l'ingénierie ACE.

Mots clés

Coopération professeurs-chercheurs, ingénierie didactique, école élémentaire, représentations, diffusion ingénierie

I. INTRODUCTION

Nous revenons dans ce texte sur notre mémoire doctoral (Morellato, 2017)¹, plus de deux ans après sa soutenance. Nous nous sommes intéressée au travail coopératif entre des professeurs des écoles et des chercheurs pour la conception et la mise en œuvre d'une ingénierie didactique en mathématiques. Cette ingénierie, nommée ACE pour « Arithmétique et Compréhension à l'Ecole élémentaire », porte sur la construction des nombres pour des élèves de cycle 2 (élèves de 6 à 8 ans).

Nous choisissons ici de traiter une des questions de recherche laissée en suspens à l'issue de notre travail de thèse. Nous convoquerons à la fois la mémoire collective de la coopération qui nous permet de documenter la mise en œuvre d'ACE sous un jour historique, et les conditions institutionnelles de diffusion d'une progression produite dans ce cadre spécifique. Nous allons ainsi tenter d'observer et de comprendre les conditions de réalisation des choix ingénieriques initiaux confrontés à une logique de diffusion.

Comprendre la mise en œuvre d'une ingénierie du point de vue des chercheurs et des professeurs était un des enjeux principaux de notre recherche. Des travaux antérieurs (Vigot, 2014 ; Joffredo-Lebrun, 2016) se sont concentrés sur le travail conjoint du professeur et de ses élèves mettant en place l'ingénierie ACE. Nous montrerons en quoi notre point de vue apporte

¹ Cette thèse a été dirigée par Gérard Sensevy (université UBO - Cread) et Serge Quilio (Université Côte d'Azur - Line).

un regard productif pour la recherche en didactique des mathématiques. Pour cela, nous nous pencherons sur la manière dont les professeurs et les chercheurs envisagent ensemble les choix ingénieriques suite aux mises en œuvre et comment ils justifient collectivement ces choix.

Nous commencerons par situer des premiers éléments de contexte de notre recherche. Puis pour présenter concrètement notre objet de recherche, nous nous plongerons dans des échanges entre professeurs et chercheurs en décrivant leur travail collectif. Dans le cadre de cet article, nous nous focaliserons sur les représentations (Brousseau, 2004a) permettant au professeur et aux élèves de « technologiser » (Chevallard, 2002) leurs usages. Nous montrerons deux aspects de notre travail, lié à deux échelles différentes d'observation et d'analyse. Nous proposerons d'abord un exemple d'un dialogue d'ingénierie, court et emblématique, à une échelle micro. Cet exemple nous permettra de préciser nos cadres théoriques et méthodologiques. Nous présenterons ensuite un dialogue d'ingénierie sur une durée plus longue. Cette analyse à une échelle macro nous permettra d'appréhender les échanges selon une perspective diachronique. Ce travail de description nous permettra enfin d'exposer les résultats principaux de notre travail de thèse.

Cette thèse a été soutenue en mai 2017. Depuis le dispositif ingénierique se poursuit et se développe. Dans la partie conclusive, nous tenterons d'émettre quelques hypothèses sur les conditions d'une diffusion de l'ingénierie, suite aux observations sur la mise en place de la progression issue de l'ingénierie dans l'académie Aix-Marseille. Notre fonction de conseillère départementale pour la mission maths-sciences, chargée de la mise en place de l'ingénierie ACE-Arithmécologie, nous offre une position charnière, au contact de tous les acteurs de cette institution.

II. ELEMENTS DE CONTEXTE

1. Contexte, aspect historique et aspect local

A partir des années 2000 des chercheurs ont repris des ingénieries de Guy Brousseau qui avaient été développées au Centre pour l'observation et la recherche sur l'enseignement des mathématiques (COREM) dans les années 80. Ces ingénieries ont été rejouées dans un contexte actuel afin de répondre à des questions relatives à leur mise en œuvre dans des classes ordinaires. Par exemple, l'ingénierie du « Jeu du trésor » qui porte sur la construction d'un code commun de désignation en maternelle (Leutenegger et al., 2013) a été mise en place dans des écoles genevoise, rennaise et marseillaise. Une ingénierie sur l'introduction des nombres au cours préparatoire (CP) a également été reprise. L'accent y était mis sur l'intérêt de décomposer les nombres en des quantités connues.

Dans ce contexte, un programme de recherche sous la direction d'Alain Mercier a été initié à Marseille au sein de l'Institut national de recherche pédagogique (INRP) puis de l'Institut français de l'éducation (IFé). Il s'agissait de montrer la pertinence des ingénieries traitant du calcul posé développées au COREM dans le contexte d'enseignement des programmes français de 2008 où la question du calcul était fortement relancée. Mais c'était un travail délicat à mener avec professeurs de l'enseignement ordinaire, non acculturés au travail avec des didacticiens. Des hypothèses de travail collectif ont alors été éprouvées dans une école (l'école publique Saint-Charles à Marseille, école située en réseau d'éducation prioritaire). Tous les professeurs de l'école, enseignant en cycles 2 et 3, se sont ainsi engagés dans l'étude de la mise en œuvre aux côtés de ces chercheurs. Ce n'était pas à proprement parlé une recherche d'ingénierie

didactique (au sens de Artigues, 1990) mais le travail d'un collectif regroupant professeurs et chercheurs (Matheron & Quilio, 2014).

Suite à ces mises en place d'ingénieries sur les calculs posés, un Lieu d'éducation associé à la recherche (LéA), en partenariat avec l'IFé, a été constitué en 2011, le « LéA Saint-Charles » sous la coordination d'Alain Mercier et Serge Quilio. Des modalités de travail du collectif ont été constituées à partir de faits didactiques observés ou rapportés. Elles permettaient l'interprétation de gestes d'enseignement et de leurs effets pour interroger les choix des actions. Les analyses collectives des mises en œuvre ont montré que des connaissances adaptées pour s'engager dans les situations didactiques proposées par Guy Brousseau (Brousseau, 2004b) manquaient aux élèves du cours élémentaire première année (CE1) de l'école : le travail sur les petites quantités était à densifier ainsi qu'un travail sur les raisons d'être des groupements pour construire la numération décimale. Certains membres ont ainsi participé, dès 2011, au projet ACE qui s'intéressait à la construction des nombres au CP et à la question d'une pratique écrite des mathématiques, avec une place majeure consacrée aux représentations. L'expérience accumulée dans le LéA Saint-Charles a ainsi nourri les perspectives de travail pour l'ingénierie ACE elle-même et pour les niveaux de classe supérieurs. L'ouvrage de Alain Mercier et Serge Quilio (Mercier & Quilio, 2018), issu des visio-conférences Marseille-Bretagne en 2013, en a construit l'arrière-plan didactique et mathématique.

2. Quelques éléments généraux du dispositif de recherche ACE-Arithmécole

Les échanges que nous avons étudiés sont issus d'une coopération entre des professeurs de l'enseignement primaire et des chercheurs en didactique au cours de la mise en place du dispositif ACE. Cette recherche visait à développer une proposition d'enseignement pour les premiers niveaux du cycle 2 ainsi qu'à répondre à des questions de recherche plus fondamentales. De 2011 à 2017, le dispositif de recherche associant des laboratoires en didactique et sciences cognitives a bénéficié de financements publics. Une proposition d'enseignement a été élaborée collectivement et a pris la forme d'une progression de séquences d'enseignement-apprentissage. Cette progression s'est construite dans un processus itératif : mises en œuvre, analyses collectives des mises en œuvre, modifications de la progression. Des pré et post-tests ont validé les orientations choisies (Fischer et al., 2019 ; Vilette et al., 2017). Cette proposition d'enseignement s'est mise en place avec un parti-pris fort : ce qui figure dans la progression doit d'abord être travaillé et analysé avec des professeurs.

3. ACE-Arithmécole, une ingénierie didactique coopérative

La définition d'une *ingénierie didactique coopérative* (annoncée dans Sensevy, 2011) et son inscription dans le cadre théorique de la Théorie de l'action conjointe en didactique (TACD) se sont ainsi peu à peu précisées et affinées (Sensevy et al., 2013 ; Morales et al., 2017 ; Joffredo-Le Brun et al., 2018). D'autres ingénieries coopératives se sont également mises en place. Des travaux de thèse les ont documentées au fur et à mesure².

Une ingénierie didactique coopérative organise les conditions de l'enquête collective, celle de la mise en œuvre des savoirs dans une classe. Elle produit ainsi des savoirs pour l'ingénierie car elle est fondée sur le partage de connaissances entre chercheurs et professeurs autour de finalités communes. La responsabilité de la mise en œuvre y est partagée : elle repose sur un jeu de places temporaires et distribuées en fonction du problème soulevé.

²Thèses de Sophie Joffredo-Le Brun, 2016 ; Mireille Morellato, 2017 ; Caroline Perraud, 2018 ; Loïs Lefevre, 2018.

Après 2017, la réflexion sur l'ingénierie ACE s'est poursuivie au sein du LéA « Réseau ACE écoles Bretagne-Provence ». Une convention pour les années 2019 à 2021 a été signée avec la Direction générale de l'enseignement scolaire pour une poursuite de l'expérimentation.

Nous nous sommes intéressée plus précisément à la circulation de ces savoirs pour l'ingénierie dans un collectif. Notre façon de travailler repose sur des exemples qui sont exemplaires dans leur force à expliciter, à questionner, à "dire" comment se déroule le travail collectif du point de vue de la question à traiter. Ils montrent également en arrière-plan le travail des élèves (sur quoi ils travaillent et comment ils travaillent). Ces exemples sont significatifs aussi de la manière dont nous avons travaillé, théoriquement et méthodologiquement.

Nous prenons donc le parti de concrétiser maintenant notre travail.

III. UN EXEMPLE DE DIALOGUE D'INGENIERIE POUR DONNER A VOIR NOTRE TRAVAIL

Nous précisons que le dialogue d'ingénierie est caractérisé par les échanges entre des membres du collectif ACE à propos de l'ingénierie. Il se déroule en grande partie durant les réunions de régulation de l'ingénierie mais aussi par la voie des courriels au travers de messages ou d'annotations de documents.

1. Ce qu'il faut savoir pour comprendre les échanges entre professeurs et chercheurs : une partie du Jeu des annonces

Le Jeu des annonces est une *situation de désignation et de comparaison de mesures*. Elle est proposée aux élèves au début de la progression de CP. Les élèves ont à comparer deux mesures : celle du nombre de doigts qu'ils « annoncent » avec leurs deux mains et celle du nombre de points d'un lancer d'un dé. Est déclarée gagnante l'annonce qui a la même mesure que celle obtenue par le lancer du dé. Le dé étant lancé *après* l'annonce, pour donner du jeu.

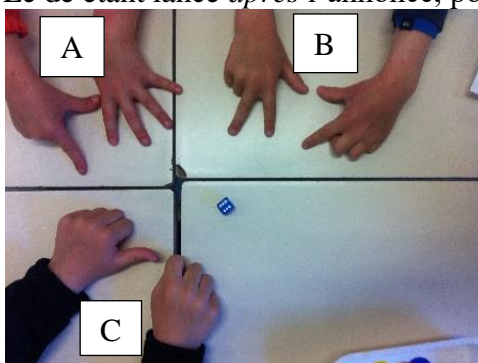


Figure 1 - Une partie du jeu des annonces entre trois joueurs

Les représentations de la partie sont des compte-rendu de l'expérience vécue lors du jeu. Le joueur A (cf. figure 1) pourra écrire : « $4+2 = 6$ » ; le joueur B « $2+3 \neq 6$ » et le joueur C « $1+0 \neq 6$ ».

Le signe « = » prend ainsi un sens d'équivalence entre deux mesures. Toutes les annonces gagnantes appartiennent à une même classe d'équivalence. L'équivalence est étudiée par les élèves dans le jeu en même temps que la non-équivalence. Les signes « = ; \neq » puis « < ou > » étant enseignés de manière paradigmatique, les uns par rapport aux autres. Le système

sémiotique constitué par l'écriture mathématique décrit la situation de la partie gagnante ou perdante.

2. Niveaux de description des échanges à propos d'une production d'élève

L'échange présenté ci-dessous est extrait d'une réunion qui est la deuxième de l'année, le 27 novembre 2013, au cours de la deuxième année de la mise en place du dispositif.

Un professeur débutant dans l'ingénierie (PE1), un chercheur et un professeur mettant en place la progression pour la deuxième année (PE2) en sont les protagonistes. PE1 relate un *fait didactique* suite à une incitation donnée dans le « Journal du nombre » qui est un espace consacré à l'expression libre à partir d'une incitation. Nous décrivons cet échange selon trois niveaux de description. Le premier est la transcription de l'échange capturé par une vidéo et sa description réalisée dans le langage de la situation didactique présentée dans la section précédente. Le second niveau permet d'accéder à ce qui se joue entre les protagonistes de l'action. Le troisième apporte une première approche de la nature d'un dialogue d'ingénierie au sein d'une ingénierie didactique coopérative. Il s'agit donc de produire des descriptions successives de plus en plus fines, en appui sur des concepts.

Transcription de l'échange et premier niveau de description

Transcription de l'échange	1 ^e niveau de description
<p>PE1 : <i>la semaine dernière dans le journal du nombre / il y a un élève qui a anticipé sur le module 6 / et du coup j'ai pas su s'il fallait que je l'exploite / j'ai laissé faire et j'en ai pas reparlé à tous</i></p> <p>Chercheur : <i>mais comment il a anticipé</i>↑</p> <p>PE1 : <i>c'était « écris des annonces mathématiques gagnantes avec le + et le = » /</i></p>	<p>Le professeur PE1 a proposé à ces élèves de CP d'écrire des annonces gagnantes en utilisant les signes « + » et « = ».</p> <p>PE1 remarque une production d'élève mais sur l'instant ne perçoit pas qu'elle devance ce qui est proposé au module d'enseignement suivant.</p>
<p><i>donc il m'appelle et il me dit maîtresse il faut que tu viennes m'aider / je veux mettre ça / 2 + 2 / je lui dis mais tu es coincé à 2 + 2↑ / il me dit oui / je dis comment ça tu es coincé à 2 + 2 enfin tu vois je... / mais il me dit non parce que je veux pas écrire 4 / je veux l'écrire d'une autre manière / ça y est j'ai trouvé je vais écrire 3 + 1 / tu vois de lui-même il a anticipé comme ça</i></p>	<p>PE1, débutant dans l'expérimentation de l'ingénierie, s'attend à ce que son élève écrive « 2 + 2 = 4 » ou « 3 + 1 = 4 » en utilisant le signe « = » pour présenter un résultat.</p> <p>Mais celui-ci écrit « 2 + 2 = 3 + 1 » en utilisant le signe « = » pour désigner une équivalence.</p>
<p>Chercheur : <i>et tu l'as laissé comme ça</i> ↑</p> <p>PE1 : <i>j'ai dit très bien et je suis partie (rires) c'était pas / et il a rempli la page de ça</i></p>	<p>PE1 ne sait pas comment rebondir sur la production de l'élève.</p>
<p>PE2 : <i>mais tu peux t'en servir / c'est super pour la classe / toi tu as écrit ça et vous est-ce que vous êtes capable d'écrire comme lui / c'est le début d'une grande aventure</i></p>	<p>PE2, mettant en place l'ingénierie pour la deuxième fois, perçoit le sens profond de l'action de l'élève et propose à PE1 une piste d'exploitation.</p>

Deuxième niveau de description

La trouvaille de l'élève dans son journal du nombre montre qu'il a saisi le sens du signe « = » tel que 4 (désignation usuelle) est équivalent à 2 + 2 (désignation possible dans le jeu et manière de l'écrire) est équivalent à 3 + 1 (autre désignation possible). PE1 relève ce fait didactique et

le perçoit comme suffisamment remarquable pour être rapporté au collectif mais n'en perçoit pas le potentiel didactique. PE2 prend une position forte dans l'avancée du dialogue d'ingénierie en envisageant le milieu dans une dynamique fonctionnelle, c'est-à-dire ce avec quoi il y a à faire pour avancer dans le problème soulevé par PE1. Autrement dit, « $2 + 2 = 3 + 1$ » n'est pas seulement l'expression d'une équivalence, c'est aussi un *jeu d'imitation* potentiel (Sensevy, 2016).

Dans ce court dialogue d'ingénierie, PE1 et PE2 participent à l'enquête sur l'ingénierie (au sens de Dewey, 1938) : ils donnent à voir leur conception et leur pratique. PE1 en rapportant un fait didactique qui lui pose problème (comment traiter la question posée par l'élève). PE2 en apportant un point de vue expérimenté de la chose.

Troisième niveau de description

La production de l'élève fait signification pour PE2 par rapport à sa pratique et à sa connaissance de l'ingénierie. PE2 manifeste un pouvoir d'explicitation du fait didactique rapporté en exprimant une proposition qui en concrétise l'idée dans une mise en œuvre possible. Le chercheur a choisi à ce moment-là d'être réticent. Il aurait tout aussi bien pu décrire la production de l'élève de son point de vue en exprimant, par exemple, l'intérêt de telles équivalences dans le travail à venir sur les diverses représentations d'un même nombre.

Une telle posture face à l'enquête n'est donc pas liée au fait que l'on soit chercheur ou professeur. Les diverses positions sont assumées en fonction des connaissances des uns et des autres. Mais cela nécessite une même compréhension de l'action didactique qui s'est jouée entre le professeur, l'élève et le savoir (ici l'équivalence entre des désignations différentes d'un même nombre). Nous voyons ici que PE1 et PE2 n'ont pas cette même compréhension de l'action car PE1 n'a pas encore une grande expérience de l'ingénierie et de sa progression. Il y a aussi un enjeu de formation dans la mise en place du dispositif : il s'agit de rendre le professeur connaisseur de l'ingénierie, d'un point de vue tout à la fois de la pratique et de la théorie. Il s'agit aussi de le rendre averti, en tant que porteur d'attention aux productions des élèves.

3. Montrer une pratique de recherche : premiers éléments et cadre théorique

Nous avons montré ci-dessus des éléments d'une pratique de recherche telle que nous l'avons menée et restituée dans notre mémoire. L'enquête collective des professeurs et des chercheurs repose sur des faits relatifs à des expériences partagées. Ludwick Fleck (1934) les a nommés « faits d'expérience » et les a décrits comme des faits qui relèvent de l'expérience vécue et qui sont susceptibles d'apporter un enseignement pour un collectif. Nous avons supposé que, dans une ingénierie didactique coopérative, de tels faits pourront devenir des savoirs d'ingénierie au cours du dialogue d'ingénierie.

Un tel dialogue est considéré comme le procès de l'enquête du collectif sur l'ingénierie. Une analyse dans le cadre de la Théorie de l'action conjointe en didactique (TACD) nous permet de considérer les échanges comme des transactions entre les membres du collectif. Ces transactions se réalisent lors d'une enquête sur le savoir et dans un milieu sur lequel ils agissent. Cette enquête se réalise à partir de connaissances « déjà-là », sans cesse réactualisées par le travail dans le milieu (CDpE, 2019 ; Sensevy & Mercier, 2007 ; Sensevy, 2011).

Notre démarche est clinique dans la mesure où l'accent est mis sur l'étude du fonctionnement du groupe en situation (Leuteneger, 2000). Elle revêt deux approches entremêlées :

- Une approche ingénierique du système didactique. Cet aspect de la démarche permet de construire des observables en termes de problèmes didactiques potentiels.

- Une approche anthropologique de ce système. Cet aspect nous positionne en tant que membre « connaisseur de la chose » au sens de Bazin (1998) qui considère en priorité la situation, les actes de langage et le point de vue des acteurs.

Nous avons cherché à repérer de tels faits dans les échanges car ils participent à l'enquête du collectif sur l'ingénierie. Les descriptions ont permis d'en approfondir la compréhension.

IV. REPERER DES FAITS D'EXPERIENCE

Nous brosons maintenant quelques grands traits de cette constitution des faits en décrivant l'instrument qui nous a permis de montrer les transactions à différentes échelles : le logiciel « Transana » (Fassnacht & Woods, 2001), logiciel d'aide à la gestion des données filmiques et d'aide à l'analyse quantitative ou qualitative des contenus. En voici ci-dessous l'organisation en quatre fenêtres.

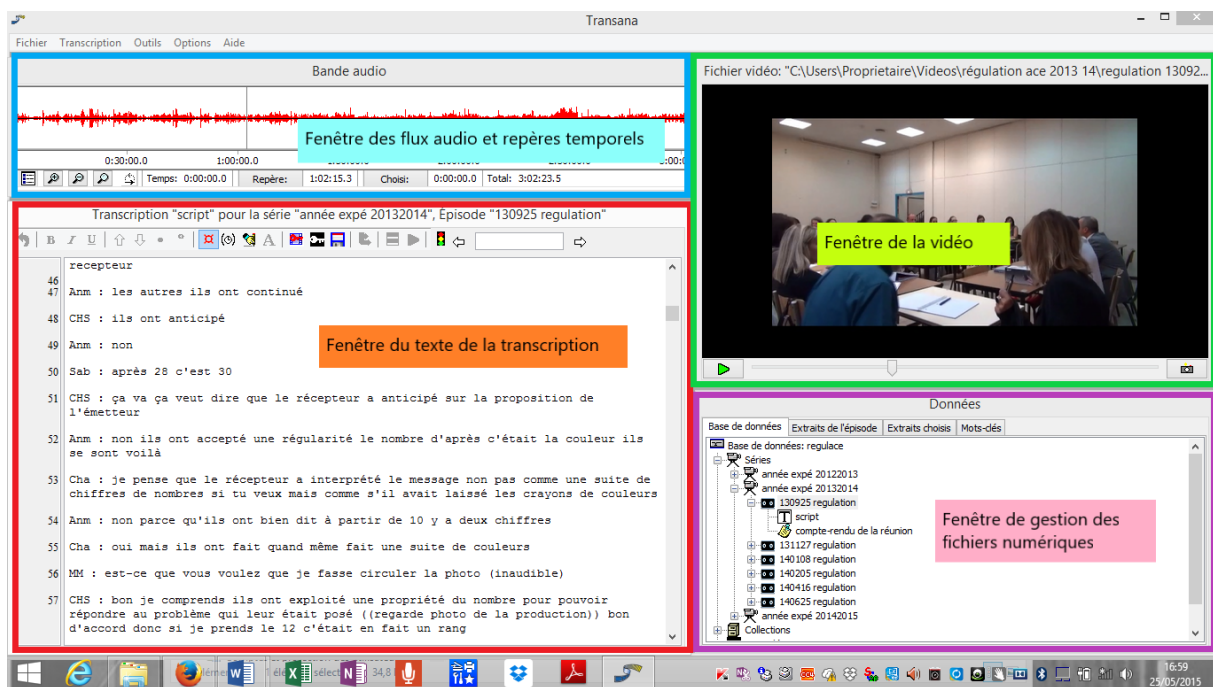


Figure 2 - Capture d'écran du logiciel « Transana ». Les différentes fenêtres du logiciel

1. Méthodologie : une démarche instrumentée

Les réunions du collectif ont été filmées. Un travail d'annotation des données vidéo ainsi recueillies a été mené à l'aide du logiciel : transcriptions des échanges, réduction à différents niveaux par découpage en épisodes (figure 3) puis regroupements d'épisodes, appelés « collections » (figure 4), à l'aide d'une indexation des épisodes selon des mots-clés.

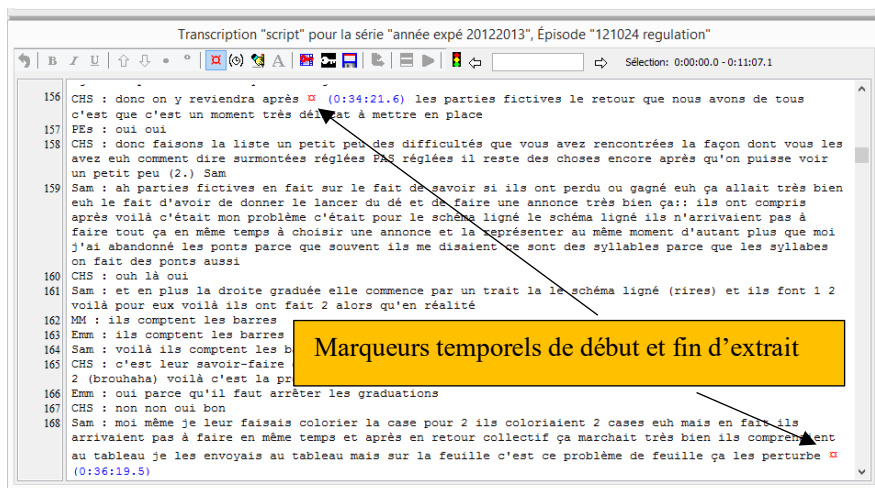


Figure 3 - Capture d'écran du logiciel « Transana ». Repérage d'un épisode dans la fenêtre du texte de la transcription

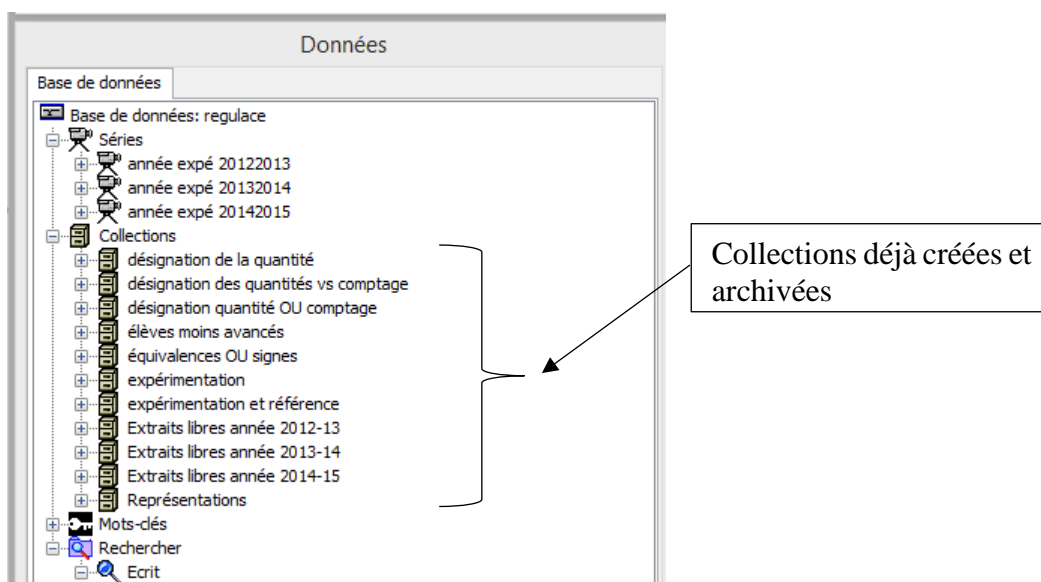


Figure 4 - Capture d'écran du logiciel « Transana ». Fenêtre de gestion des fichiers

Nous avons ainsi conçu un dispositif d'analyse qui appréhende ensemble différentes granularités et temporalités des échanges entre professeurs et chercheurs afin de mettre au jour des faits d'expérience.

Organiser des épisodes grâce à leur indexation nous a permis d'interroger le corpus des réunions par croisement selon les contenus et les problématiques abordées et de susciter des hypothèses ou des liens possibles qui ne seraient pas apparus sur des épisodes traités isolément. Le travail peut alors se réaliser à une échelle temporelle plus importante : la collection thématique peut regrouper des épisodes qui se sont déroulés sur une réunion, sur une année d'expérimentation ou sur l'ensemble des années d'expérimentation. Cependant ce qui caractérise cette approche est qu'elle échappe à une continuité temporelle.

En effet, ces collections d'épisodes sont présentées en « moments », en rapport à la question posée. Nous décrivons dans la section suivante ceux liés à une question précise, posée au collectif par des faits portant sur les représentations de la situation de comparaison de quantités. Pour compléter notre analyse il a été nécessaire d'effectuer une mise en relation entre les trois composantes des données : celle des échanges (que nous avons présentée rapidement dans les paragraphes ci-dessus) mais aussi celle des ressources produites pour la progression et celle des traces des mises en œuvre en classe que nous avons recueillies.

2. Transactions à une échelle macro pour mettre au jour des faits d'expérience

Un des principes mathématiques sur lesquels repose la démarche d'enseignement-apprentissage des nombres dans ACE-Arithmécole est le développement d'un rapport pré-algébrique aux mathématiques (Artigue, 2011; Carraher & Schliemann, 2014).

Nous nous pencherons sur la question du passage à l'équation dans les représentations en usage dans ACE et de la prégnance du calcul dans le travail didactique. Par exemple, dans la situation didactique proposée au CP, pour comparer une annonce à trois termes ($1 + 5 + 3$) et une autre à quatre termes ($2 + 3 + 6 + 3$), il est possible de procéder :

- par le calcul du total de chaque mesure : $1 + 5 + 3 = 9$ et $2 + 3 + 6 + 3 = 14$; donc $9 < 14$
- par l'enseignement de techniques de compositions /décompositions pour « rendre les termes identiques » (diverses stratégies sont possibles). Par exemple :

$$\begin{array}{ccc}
 1 + 5 + 3 \dots 2 + 3 + 6 + 3 & & 1 + 5 + 3 \dots 2 + 3 + 6 + 3 \\
 \swarrow & & \searrow \\
 \underline{6} + \underline{3} < 2 + 3 + \underline{6} + \underline{3} & \text{ou} & \underline{1} + \underline{5} + \underline{3} < 2 + \underline{3} + \underline{5} + \underline{1} + 3
 \end{array}$$

Résoudre le problème de comparaison d'écritures additives selon des techniques de composition / décomposition est un choix didactique assumé par le collectif. Une telle procédure permet de travailler dans et avec les différentes désignations des nombres. De plus, cela permet de mettre en évidence l'écart entre les deux mesures et d'engager chez les élèves une pratique écrite de la recherche de cet écart en mathématiques.

Les transactions posent cependant une question à étudier : comment vont vivre ces techniques quand la situation didactique va évoluer ? En effet, dans la progression, il ne s'agit plus seulement de comparer des annonces mais de *désigner une différence* entre deux annonces. Désigner la différence entre deux annonces enrichit la description de leur comparaison. Ainsi l'ensemble des situations didactiques proposées se caractérise par un principe de continuité et de rupture défini comme un *temps de situation* (Quilio, 2012 ; Sensevy, 2011). Une situation ancienne est ré-instanciée dans une situation nouvelle. Le travail sur le *principe inverse* (Verschaffel, Bryant, & Torbeyns, 2012) y tient une place centrale. Les élèves apprendront ensuite à associer écritures additive et soustractive. Par exemple, $14 - 9 = 5$ définit la différence « 5 » entre les deux mesures 14 et 9 car $14 = 9 + 5$.

Nous cherchons à montrer l'intérêt de s'attacher à l'effort du travail réalisé par le collectif sur les représentations permettant aux professeurs et à leurs élèves de « technologiser » (Chevallard, 2002) leurs usages de ces systèmes. Nous rapportons ci-après des « moments » obtenus au sujet d'un concept spécifique entrant en jeu dans la désignation de la différence : le nombre « contenu dans » un autre. Dans le cadre de cet article, nous nous en tiendrons à résumer de tels moments avant d'en produire une courte analyse.

Moment 1 – A la recherche de la désignation de la différence : un nombre « contenu dans » un autre

Une comparaison de quantités est mise en œuvre par un professeur qui expose ainsi sa pratique :

PEa : « Hier on a comparé 8 et 9 et on a pris le terme de différence au sens premier du terme. C'est-à-dire qu'on avait 4 et 4 et on avait 5 et 4 donc on a vu qu'il y avait 4 effectivement de chaque côté et on est allé chercher le 4 dans le 5. A la fin, on avait écrit d'un côté $4 + 4$ et de l'autre côté $4 + 4 + 1$: ce que tu disais un petit peu. Là, la différence, elle apparaissait comme justement ce qui n'était pas pareil. »

Le professeur rend compte ainsi d'une pratique utilisant la décomposition de nombres (8 est comme $4 + 4$ et 9 est comme $4 + 5$, ce qui donne par décomposition du 5 : $4 + 4 + 1$) pour mettre en évidence la différence de 1 entre les deux mesures 8 et 9. PEa le formule par l'expression

« On est allé chercher le 4 dans le 5 ». Le chercheur rebondit sur cette mise en œuvre en utilisant l'expression « contenu dans » (« On a appris à gagner petit à petit que si on écrivait 9, on pouvait écrire $5 + 4$; 4 est contenu dans 5 ») mais précise que la différence n'est pas encore ici définie.

Les professeurs font alors remarquer que l'emploi de « contenu dans » n'est pas explicité dans le document de la progression sur lequel ils s'appuient pour diriger l'étude de leurs élèves. Cependant si la notion de différence peut ainsi commencer à être appréhendée de manière concrète dans le jeu de comparaison, son arrière-plan épistémologique n'est pas suffisamment éclairci. Le chercheur, Ch1, annonce le travail collectif à venir :

Ch1 : « Effectivement là [dans le document], on n'a pas toutes les explicitations. Il va falloir qu'on fasse ce travail et c'est pour ça qu'on travaille collectivement. On fait 12 en faisant $8 + 4$ et on écrit $12 = 8 + 4$. Mais maintenant on dit 4 « est contenu dans » 12 avec la même écriture. Pourquoi ? Parce que la situation nous amène à construire la grammaire de ça, l'arrière-plan qui donne sens à cette situation-là. »

Ce premier moment témoigne d'une évolution de la référence aux annonces qui émerge ainsi des transactions. Une telle évolution réactualise le déjà-là partagé, celui de la décomposition d'un nombre (12 c'est comme $8 + 4$) qui devra être considérée dorénavant aussi comme un nombre « contenu dans » un autre (8 dans 12 ou 4 dans 12). Cette évolution engage à travailler ce déjà-là dans le milieu, en interrogeant la mise en œuvre de la notion de « contenu dans ».

Mais professeurs et chercheurs rencontrent un problème de la pratique. L'usage de « contenu dans » ne semble pas facile à appréhender par les élèves. Par exemple, un professeur signale : « Beaucoup d'élèves étaient dans le contrat, il y a un 9 au tableau, je sais que $5 + 4 = 9$ donc j'écris $9 = 5 + 4$ alors qu'on comparait le 7 et le 9 ». Il signale ainsi que les élèves n'ont pas forcément accès à la connaissance adéquate pour trouver une différence suivant la notion de « contenu dans ». En effet, il aurait fallu que ces élèves décomposent 9 en $7 + 2$ pour rechercher une mesure commune.

Ainsi commence à se dessiner une synergie entre une conception phénoménologique de l'écart (avec des situations de référence pour visualiser la différence), une conception pragmatique (comment peut être désignée la différence) et une conception algébrique (avec l'utilisation de la décomposition). Cette synergie constituera un fait d'expérience pour le collectif : elle crée un rapport de modélisation permis par l'écriture additive pour désigner la différence. Le signe « = », pris dans le sens d'équivalence, engage les élèves à une pensée algébrique. L'écriture $12 = 8 + 4$ en est le modèle (c'est-à-dire une représentation qui vise la compréhension des relations entre objets). D'autres représentations utilisées comme le schéma-ligne expriment aussi le modèle mais la connaissance et la convocation opportune des différentes décompositions d'un nombre à deux termes reste nécessaire.

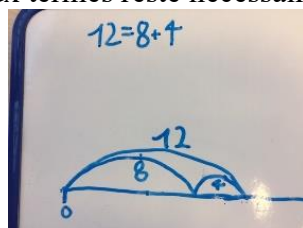


Figure 5 – Schéma-ligne représentant 12 et les nombres 8 et 4 « contenus dans »

Moment 2 – Mises en œuvre du jeu du nombre inconnu : différentes stratégies utilisées

Un des modules d'enseignement suivant introduit une situation didactique de recherche d'un complément. Il permet le réinvestissement de savoirs anciens et approfondit le travail amorcé précédemment sur l'usage de « type algébrique » des structures additives. Deux mesures,

données dans la ressource, sont à rendre équivalentes : $5 + 7 + 1 = 9 + 2 + ?$ Il s'agit de trouver quelle valeur aurait le troisième terme. Deux professeurs (PEc et PEd) envoient sur la liste de diffusion du collectif un compte-rendu de la mise en œuvre effectuée dans leur classe :

- Dans la classe de PEc, les élèves passent par le calcul du total $5 + 7 + 1 = 13$ et s'appuient sur des schémas lignés sans graduation représentant la situation de comparaison pour estimer le nombre inconnu. Des élèves proposent « 2 » comme nombre inconnu, d'autres « 3 ». La validation se réalise par le calcul du total : est-ce que $9 + 2 + 2$ font 13 ? est-ce que $9 + 2 + 3$ font 13 ?
- Dans la classe de PEd, seuls les élèves bons calculateurs trouvent le nombre inconnu. La plupart n'y parvient pas. PEd rapporte le discours tenu à ses élèves :

PEd : « *On n'est pas tous capables de calculer aussi bien que P. et N. mais hier on a trouvé une autre méthode qui nous permettait de trouver avec moins d'erreurs : il fallait faire apparaître les mêmes nombres dans chacune des annonces, comme ça après on voit la différence.* »

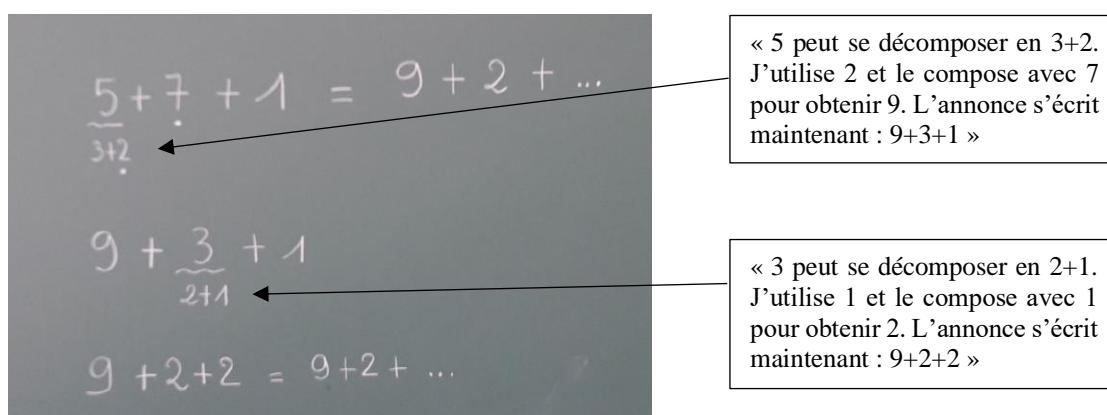


Figure 6 - Captures photo et texte du compte-rendu envoyé par PEd

PEc fait procéder par estimation de la différence entre les deux annonces représentées sur le schéma-ligne puis par validation des propositions de la différence entre ces deux mesures par essais. PEd procède en rendant identique le plus possible les deux écritures additives (techniques de décomposition) et en exprimant un savoir : le nombre inconnu correspond à la différence entre les deux annonces.

Les professeurs agissent et font agir en développant des stratégies permises par le modèle additif. Les stratégies mises en œuvre dans les deux classes diffèrent. Le contrôle sur le nombre à trouver n'est pas de même nature. Il passe par une estimation puis une vérification par le calcul d'une part ou par un travail de décomposition sur les désignations écrites d'autre part. La mise en place de ces procédures ne font pas partie des pratiques d'enseignement habituelles. Les professeurs éprouvent ici des pratiques et en rendent compte pour en permettre l'analyse collective puis la constitution éventuelle de faits d'expérience.

Moment 3 – Transactions autour du jeu du nombre inconnu : pistes pour une mise en œuvre du « contenu dans »

Les professeurs rendent compte de la mise en œuvre du jeu du nombre inconnu : le jeu n'a pas permis à tous les élèves d'avoir un usage de la décomposition des nombres au service de la constitution d'un rapport adéquat à la différence : « *Ils sont arrivés à comprendre l'écart mais pas le contenu dans* ». Un professeur évoque un échange didactique :

PEf : « *C'est mes élèves qui ont sorti ça à travers des situations de résolutions de problèmes avec la monnaie : il a 15 euros, est-ce qu'il peut acheter une veste à 12 euros ? et en fait je l'ai repris avec mes élèves parce qu'il y en a qui m'ont dit « non il peut pas parce qu'il a 15*

et pas 12 ». Donc on a repris ce genre de chose parce que je me suis dit que quand même ils savent que dans 15 y a 12. Et là vraiment ils s'en sont servis : il en a un qui m'a dit « mais dans 15 y a 12 parce qu'il y a 10 dans 15 et dans 12 et dans 5 il y a 2 et 3 ; il va lui rester 3 euros et là il m'a carrément dit « dans 15 il y a 12. »

Un chercheur engage les professeurs à travailler à produire des gestes d'enseignement portant sur les écrits mathématiques :

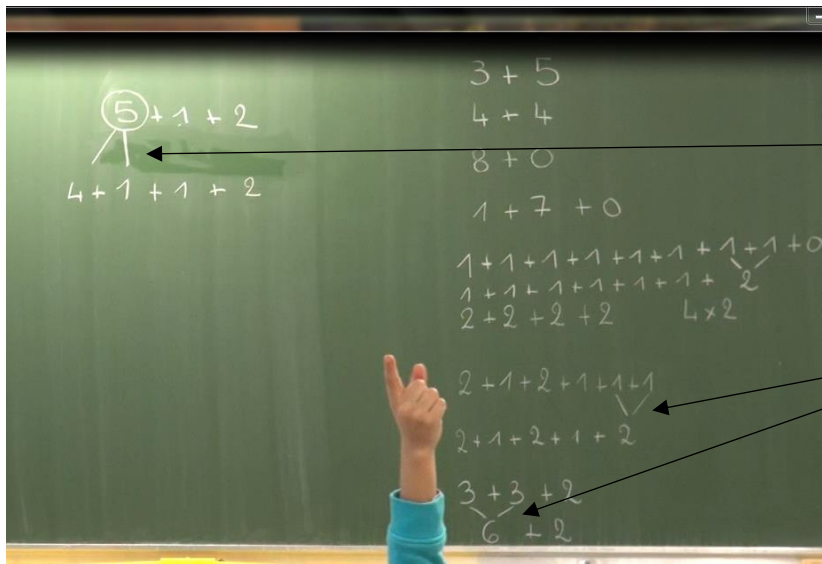
Ch1 : « Il va bien falloir produire un geste d'enseignement, enfin enseigner quelque chose à ce sujet-là pour que la découverte individuelle devienne un enjeu partagé. Alors comment on fait ? En fait les élèves arrivent à dire c'est contenu et en écrivant ça on arrive par l'écriture à poser un problème nouveau qui est d'identifier la différence. Et ça passe par ce que permet l'écriture mais pour que l'écriture puisse permettre ça il faut qu'elle soit produite cette écriture ! La notion de différence c'est par la notion d'écriture qu'on arrive à l'identifier. L'enjeu d'apprentissage doit être l'écriture qui le permet voilà et c'est peut-être ce qui n'est pas tellement dit dans le module assez clairement. »

Le chercheur avait émis une piste de réflexion pratique : quelle mise en œuvre pour travailler mathématiquement le sens de la différence ? L'hypothèse que souhaite mettre en place concrètement le chercheur porte sur ce travail, avec et dans les nombres : ne plus se situer seulement dans l'expression d'une situation visualisée mais au sein même du domaine numérique. Cette hypothèse a pu être concrétisée par les professeurs qui ont partagé leurs expériences de mises en place en classe. Celles-ci permettent de commencer à « donner chair » à la différence *mathématique* en la mettant en évidence par la décomposition. La décomposition est la connaissance, à la fois pratique et théorique, issue du jeu des annonces et reprise ici dans un nouvel usage.

L'analyse des interactions permet de connaître certains éléments de la mise en œuvre effective : sur quels éléments les élèves butent ? Quelles pratiques mettent en place les professeurs ? Le document de la progression propose des pistes d'actions, mais explicite insuffisamment ces pistes au niveau des savoirs d'ingénierie nécessaires à la mise en œuvre.

Moment 4 – Travail technologique de la décomposition dans la classe : « faire voir » un nombre dans un autre

Nous montrons maintenant que l'enquête se poursuit pour une de ces professeurs (PEe) sur le point discuté lors du dialogue précédent. Nous présentons un moment d'échanges entre cette professeure et ses élèves. La séance a lieu pendant l'année scolaire d'expérimentation suivante. PEe va produire des actions qu'elle considère comme nécessaires pour mettre en place la notion de « contenu dans ». PEe a mis en place un rituel : régulièrement, un nombre est proposé aux élèves et doit être décomposé de manières différentes (dans l'exemple ci-dessous, « 8 »). Chaque élève a la possibilité d'écrire ce qu'il sait. Quelques-unes des productions sont ensuite recensées au tableau, donnant ainsi à voir aux autres élèves des décompositions possibles. Des liens sont établis par les élèves entre les écritures ; PEe les montre par un système de signes. En voici une capture vidéo :



Système de signes montrant un « dégroupement »

Système de signes montrant un « groupement »

Figure 7 - Tableau de la mise en œuvre de « contenu dans »

Les écritures proposées par les élèves ont été reportées au tableau ; il n’y a aucune recherche d’exhaustivité. Quand un élève remarque un lien entre des écritures, PEe le note. Par exemple, au bas du tableau, 3 et 3 font 6 donc « 3 + 3 + 2 » est équivalent à « 6 + 2 ». Ensuite, PEe introduit un nouvel usage de la décomposition (en haut, à gauche sur le tableau) :

PEe : *ce nombre-là (montre 5 + 1 + 2) c’est 8. Si je vous demande de l’écrire avec un 4.*

Elève A : 4 + 4

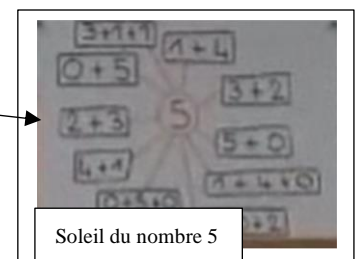
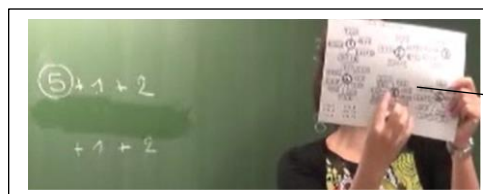
PEe : *on peut l’écrire 4 + 4. Mais je veux garder le 1, et le 2. Donc je vais garder le 1 et le 2 (recopie 1 et 2) et je veux voir un 4. On peut regarder ici, dans le soleil de quoi [photo ci-dessous] ?*

Elève B : 4 + 1.

PEe : *(entoure le 5) je dois dégroupé le 5. Je vais voir dans le soleil du 5 et je cherche les 4.*

Elève A : 4 + 1

Elève C : ou 2 + 3



PEe : *est-ce qu’il y a 4 dans 2 + 3 ? On a dit qu’on voulait le 4.*

Le 5 on le dégroupé et on peut écrire 4 + 1 à la place (écrit 4 + 1).

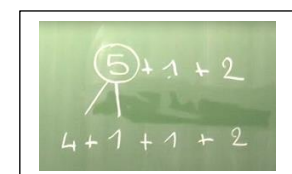
Elève B : ou 1 + 4

PEe : *vous voyez à quoi il peut servir le soleil ?*

Elève D : *et même 4 + 1 + 1 + 2 c’est égal à 8.*

PEe : *c’est exactement ça. On écrit les différentes écritures de 8.*

(Extrait séance CP du 12 décembre 2013)



Pour justifier le « contenu dans » par leur connaissance, les élèves ont besoin d’un travail préalable de mises en relation entre les nombres et les désignations équivalentes de ces nombres. La proposition d’enseignement de la ressource ne l’avait pas prévu. PEe a de plus produit un geste d’enseignement en assumant l’analyse des écritures tout en s’appuyant sur les connaissances des élèves. Le « soleil des nombres » n’est pas un simple répertoire additif. C’est

un instrument qui participe à la découverte (« Vous voyez à quoi il peut servir le soleil ? »), par des moyens expérimentaux, des écritures additives équivalentes. C'est un travail dans l'écrit qui demande une organisation : les écritures équivalentes sont écrites les unes sous les autres et des signes montrent le groupement ou le dégroupement.

L'enquête pour une mise en œuvre de la notion de différence, et sur la recherche d'une commune mesure entre deux grandeurs, n'est pas encore conclue à ce stade mais une concrétisation avec des gestes d'enseignement possibles a été éprouvée. La production d'écritures désignant un nombre, avec utilisation du soleil des nombres et de ses gestes afférents, sera l'objet de transactions au sein du collectif et se constituera en fait d'expérience (Morellato & Quilio, 2019).

Moment 5 – Transactions sur les mises en œuvre du jeu du nombre inconnu : un phénomène à prendre en compte

Suite à la présentation de productions d'élèves sur la recherche du nombre inconnu, un des chercheurs, Ch2, oriente les transactions vers un fait didactique qui l'interpelle. Il remarque que les élèves savent écrire autrement des nombres en les décomposant ou en écrivant un nombre sous une forme additive. Le signe « = » signifiant l'équivalence car le travail proposé dans la progression est un travail de type algébrique. Mais il signale le phénomène suivant :

Ch2 : « La plupart du temps ou plutôt quand ça fonctionne comme un signe d'équivalence on ne le dit pas et quand ça fonctionne comme un signe qui demande un résultat là on le dit. C'est-à-dire que les élèves ne rencontrent finalement de demande précise ou d'exigence précise vis-à-vis du signe « = » que quand on leur demande. Alors je prends un exemple. Il y a un mail qui est passé récemment dans le groupe de travail : $19 = 12 + 5 +$ quelque chose était devenu $12 +$ quelque chose $= 19$. Les équations à trous, $12 + x = 19$ dans ce cas-là, c'est une équation où il faut trouver quel est le nombre à rajouter à 12 pour trouver 19. Le signe « = » n'apparaît pas comme un signe d'équivalence. Si vous l'écrivez comme ça : "quel nombre faut-il ajouter à $12 + 15$ pour obtenir $17 + 12 + 19$ " vous voyez bien que vous êtes obligés de COMPARER les deux écritures. Si vous le comparez avec un signe « = » c'est un signe d'équivalence, ce n'est plus un signe de calcul, il n'y a plus de doutes. Seulement il faut écrire l'énoncé en entier. Évidemment écrire l'énoncé en entier c'est un sacré boulot. Résultat tout le monde l'a écrit avec un point d'interrogation. Est-ce que ça a été débattu ça ? »

Exprimer quand on a affaire à un résultat du calcul qui est attendu et exprimer quand c'est l'équivalence qui entre en jeu relève d'un savoir d'ingénierie déclaré ici lors des transactions. Un tel savoir participe à la mise en place de gestes d'enseignement à réaliser au moment opportun et à partir d'éléments identifiés au cours de l'action didactique. Il s'agit ici d'exprimer clairement l'action à réaliser : « quel nombre faut-il ajouter à $12 + 15$ pour obtenir $17 + 12 + 19$ » pour orienter l'enquête des élèves dans un travail mettant en jeu l'équivalence. Ce savoir d'ingénierie relève d'un aspect pratique et théorique à la fois. En général, le travail des hypothèses d'ingénierie et la responsabilité de leur validation se réalisent dans le « territoire » des professeurs. Cependant ce moment montre un chercheur prenant également une position d'ingénieur.

Synthèse : quelle avancée dans la réflexion collective ?

Cette série de moments obtenus dévoile en partie le contenu de transactions concernant les techniques de composition / décomposition, les raisons d'être que leur attribuent les membres du collectif dans la situation didactique de comparaison. Un effort de travail a été réalisé par ce collectif pour installer un rapport écrit à la différence entre deux mesures, pour permettre aux professeurs et à leurs élèves d'être capables de justifier leurs usages des systèmes de

représentation, en référence à la situation didactique. Dans un contexte mathématique mettant en jeu l'équivalence, la décomposition d'un nombre y est peu à peu travaillée comme une mise en évidence d'un nombre plus petit « contenu dans » un autre plus grand. Le « faire voir » un nombre plus petit dans un autre plus grand sera considéré comme un geste d'enseignement nécessaire pour appréhender ce concept de « contenu dans ».

Ce travail conjoint de justification des techniques est décisif dans le développement de stratégies d'enseignement des professeurs sur le travail de leurs élèves. Pour technologiser les techniques mises en œuvre et qui ont permis de développer diverses stratégies, une formulation comme serait la production d'un énoncé dense en savoir (Quilio, 2008) est nécessaire. Elle relève d'un savoir d'ingénierie partagé par tous et qui peut se transmettre rapidement. Ainsi les expressions « contenu dans », « faire voir » un nombre dans un autre prennent un sens à la fois théorique et pratique dans l'action de comparaison d'écritures additives.

Les moments décrits dans les sections précédentes ne résultent pas d'un enchaînement de causes à effets. Il n'y a pas non plus de linéarité dans la progression de l'enquête qui se développe par avancées et retours en arrière, par ancrages à partir d'éléments productifs ou par abandon d'autres. Mais tous participent à la constitution pour le collectif de faits d'expérience, de faits nés de l'expérience vécue. Certains de ces faits se constituant en savoirs d'ingénierie pour la mise en œuvre. Leur observation nécessite un empan large, soutenue par une approche thématique instrumentée. De tels moments apparaissent dans des contextes variés, sous des transactions toujours singulières car issues des différents faits rapportés au collectif et qui gardent leurs spécificités. Cela reste donc toujours une difficulté de rendre compte de telles observations à un niveau d'échelle choisi pour décrire la construction collective de savoirs d'ingénierie.

V. RESULTATS PRINCIPAUX DE NOTRE TRAVAIL DOCTORAL

Comme nous l'avons aperçu au travers de ce texte, le travail coopératif entre professeurs et chercheurs fournit un milieu favorable à l'étude de l'ingénierie.

Une documentation des pratiques mises en place dans le dispositif ACE et des éléments d'enquête sur les pratiques a ainsi été produite. Nous avons relevé les objets retenus et discutés qui ont fait expérience pour le collectif. Autrement dit, nous avons pu recenser ce qui intéressait les membres du collectif dans leur enquête sur la mise en œuvre de l'ingénierie. Par exemple, l'usage du signe « = » et la gestion des écrits dans les représentations, la différence considérée et travaillée comme un écart, le rôle des répertoires additifs, ... Nous avons également mis au jour des éléments d'enquête sur les pratiques qui participent à établir l'histoire de la genèse de l'ingénierie. Par exemple, comment le concept de « contenu dans » s'est constitué comme énoncé dense en savoir, significatif d'une théorie de la pratique. Nous avons exposé les savoirs d'ingénierie qui se sont construits au cours des années. Par exemple, la nécessité de travailler les décompositions et de le montrer dans l'action qu'elles permettent. Nous avons pu ainsi déclarer que la relation entre professeurs et chercheurs au sein d'une ingénierie didactique coopérative était de nature épistémique.

Nous avons pu également participer, dans le cadre de la TACD, à la discussion d'une question comparatiste en didactique. L'action conjointe en didactique s'intéresse dorénavant aussi au système {Professeur ; Chercheur ; Savoir d'ingénierie} qui n'est pas didactique mais qui comprend *du* didactique, au sein d'ingénieries didactiques coopératives. Cette question est actuellement travaillée au sein du séminaire action du CREAD. Notre travail de thèse et d'autres travaux sur les ingénieries coopératives ont participé à développer cette question dans ce cadre

théorique au niveau des concepts de contrat-milieu (cf. CDpE, 2019). Ainsi nous considérons que le contrat est constitué par ce qui est partagé entre les membres d'un collectif. Ce contrat est constamment actualisé par des problèmes suscités par les mises en œuvre et qui forment le milieu de l'action coopérative. Ainsi se constituent des faits d'expérience qui font progression pour le collectif et qui parfois se cristallisent en savoirs d'ingénierie.

La question de la transmission de ces savoirs et faits, nés de l'expérience collective, se pose donc dès lors que la démarche et la progression ACE ne font plus partie du dispositif de recherche.

VI. PENSER UNE DIFFUSION DE L'INGENIERIE ACE

1. Mise en place de l'ingénierie hors du dispositif de recherche

La progression d'enseignement-apprentissage élaborée par le collectif ACE-Arithmécole est mise à disposition, via un site³, pour les professeurs des écoles désirant se lancer dans cette démarche d'enseignement-apprentissage.

Dans l'académie d'Aix-Marseille, la progression est proposée au plan départemental des Bouches-du-Rhône et le suivi confié aux conseillers pédagogiques départementaux de la mission maths-sciences. D'autres types de diffusion se sont mis en place dans d'autres académies mais nous n'en avons pas une connaissance pratique.

Lorsque les professeurs s'engagent dans la démarche ACE au travers du dispositif départemental, des temps de travail collectif sont organisés dans le cadre de la formation continue (soit 9 heures annuelles de formation en mathématiques) ou dans le cadre du stage inscrit au plan académique de formation ou dans le cadre de temps de concertations et maintenant du plan Villani-Torossian⁴. Les ressources et les productions d'élèves ou de classe y sont étudiées collectivement. Les faits d'expérience mis au jour au cours de l'expérimentation ACE y sont transmis et rediscutés en fonction des mises en œuvre et au regard des enjeux d'enseignement-apprentissage, des programmes et des repères de progression mais aussi de la réception des collègues de l'école et des familles.

Nos premières observations montrent que l'enquête des professeurs sur l'ingénierie se poursuit. En effet, nous retrouvons en grande partie les mêmes questionnements des professeurs entrants dans le dispositif. Par exemple sur les questions d'enseignement de l'usage et la force des représentations à traiter la situation, notamment en résolution de problèmes où le concept de nombre « contenu dans » un autre est utilisé à la fois pour raisonner sur la situation et comme technique de résolution en « faisant voir » un nombre dans un autre. Il est en effet à noter que les enseignants s'engagent dans cette démarche après en avoir mis en place d'autres. Il ressort des témoignages que tous participent (et continuent à participer) à la mise en place de la démarche ACE car ils y rencontrent un collectif au travail, en relation avec la recherche et dans lequel ils peuvent trouver des réponses, élaborées collectivement, à leurs questions. Pourtant nous constatons aussi que le travail collectif est plus axé sur le partage d'un déjà-là collectif (exploration des ressources, échanges de pratiques qui fonctionnent, ...) au détriment d'une exploration collective du milieu (problématisation de mises en œuvre).

³ Site consultable à l'adresse : <http://blog.espe-bretagne.fr/ace/>

⁴ « 21 mesures pour l'enseignement des mathématiques ont été promulguées en 2018 ». La mesure 14 visant à favoriser le développement professionnel offre des moyens institutionnels pour la mise en place d'un travail en équipe. Consultable à l'adresse : <https://www.education.gouv.fr/cid126423/21-mesures-pour-l-enseignement-des-mathematiques.html>

Nous nous demandons alors dans quelles conditions peut continuer à vivre l'ingénierie (et le maintien de ses enjeux) alors que s'installe une relation de plus en plus distendue avec la recherche ?

2. Hypothèses sur les conditions de diffusion de l'ingénierie et questionnement

Cette première expérience de diffusion de l'ingénierie ACE nous permet de formuler de premières hypothèses sur les conditions de diffusion de cette ingénierie, et de manière plus générale sur la formation.

Une de ces hypothèses très générale tient au fait qu'enseigner c'est d'abord produire un travail *en soi et pour soi* du savoir à enseigner (Quilio et al., 2020). Et une autre de ces hypothèses, liée à la précédente, qu'un tel travail gagne en pouvoir d'agir s'il se réalise au sein d'un collectif. Cela nécessite un temps et un engagement suffisants au sein d'un collectif qui ne jouerait pas un rôle d'accompagnement, ni un soutien à l'action.

En effet, et c'est là une autre des hypothèses de diffusion de l'ingénierie, le collectif n'a pas pour rôle d'indiquer ou de baliser un chemin à suivre mais de permettre la problématisation de faits didactiques qui peuvent survenir dans les mises en œuvre. Cela nécessite un savoir-faire du formateur-animateur du groupe.

Cependant le maintien des élèves et des professeurs dans l'enquête est-il garant de la non-obsolésence de l'ingénierie ? Ou de sa robustesse ?

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- ARTIGUE, M. (1990). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9 (3), 281-308.
- ARTIGUE, M. (2011). Enseignement et apprentissage de l'algèbre. In A. Mercier & R. Jost (Eds), *Actes des auditions du comité scientifique* (pp. 118-123). Lyon : ENS IFé.
- BAZIN, J. (1998). Questions de sens. *Enquête*, 6, 13-34.
- BROUSSEAU, G. (2004a). Les représentations : étude en théorie des situations didactiques. *Revue Sciences de l'Éducation*, 30 (2), 241-277.
- BROUSSEAU, G. (2004b). *Théories des situations didactiques* (2e éd.). Grenoble : La pensée sauvage.
- CARRAHER, D. & SCHLIEMANN, A. D. (2014). Early Algebra Teaching and Learning. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 193-196). Springer.
- CHEVALLARD, Y. (2002). Organiser l'étude 1. Structures et fonctions. <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/recherche.php3?recherche=organiser+1%27%E9tude>
- COLLECTIF DIDACTIQUE POUR ENSEIGNER (2019). *Didactique pour enseigner*. Rennes : Presses universitaires de Rennes.
- DEWEY, J. (1938). *Logic: The Theory of Enquiry*. Traduction française (1967). *Logique : la théorie de l'enquête*. Deledalle G (Trad.). Paris : Presses universitaires de France.
- FASSNACHT, C. & WOODS, D. (2001, 2013). *Transana (version 2.52) [PC]*. Wisconsin Center for Education Research, University of Madison, USA. Consulté à l'adresse : <http://www.transana.org/>.
- FISCHER, J.-P., VILETTE, B., JOFFREDO-LE BRUN, S., MORELLATO, M., LENORMAND, C., SCHEIBLING-SEVE, C. & RICHARD, J.-F. (2019). Should we continue to teach standard written algorithms for the arithmetical operations? The example of subtraction. *Educational Studies in Mathematics*. <https://doi.org/10.1007/s10649-019-09884-9>
- FLECK, L. (1934). *Entstehung und Entwicklung einer wissenschaftlichen Tatsache*. Suhrkamp Verlag : Frankfurt. Traduction française (2008). *Genèse et développement d'un fait scientifique*. Jas, N. (Trad.). Paris : Flammarion.
- JOFFREDO-LEBRUN, S. (2016). *Continuité de l'expérience des élèves et systèmes de représentation en mathématiques au cours préparatoire. Une étude de cas au sein d'une ingénierie coopérative*. Thèse de doctorat. Université de Bretagne occidentale, Brest, France.
- JOFFREDO-LE BRUN, S., MORELLATO, M., SENSEVY, G. & QUILIO, S. (2018). Cooperative Engineering as a Joint Action. *European Educational Research Journal*, 17(1), 187-208.
- LEUTENEGGER, F. (2000). Construction d'une « clinique » pour le didactique. Une étude des phénomènes temporels de l'enseignement. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 20(2), 209-250.
- LEUTENEGGER, F., FOREST, D., QUILIO, S. & MORALES, G. (2013). Le jeu des trésors. Une situation de mise à l'étude du langage et des représentations. In A. Bronner, C. Bulf, C. Castela, J.-P. Georget, M. Larguier, B.

- Pedemonte, A. Pressiat & E. Roditi (Eds), *Questions vives et didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage, 2*. Grenoble : La pensée sauvage.
- MATHERON, Y. & QUILIO, S. (2014). L'accès au milieu scolaire pour l'élaboration et l'expérimentation d'ingénieries didactiques de recherche : conditions et contraintes. Le dispositif des Léa (Lieux d'éducation associés à l'IFé). In A.-C. Mathé & E. Mounier (Eds), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques* (pp. 80-91). Bordeaux, France.
- MERCIER, A. & QUILIO, S. (2018). *Mathématiques élémentaires. Nombres, mesures et calcul*. Rennes : Presses universitaires de Rennes.
- MORALES, G., SENSEVY, G. & FOREST, D. (2017). About cooperative engineering: theory and emblematic examples. *Educational Action Research*, 25 (1), 128-139.
- MORELLATO, M. (2017). *Travail coopératif entre professeurs et chercheurs dans le cadre d'une ingénierie didactique sur la construction des nombres : conditions de la constitution de l'expérience collective*. Thèse de doctorat. Université de Bretagne occidentale, Brest, France.
- MORELLATO, M. & QUILIO, S. (2019). Travail coopératif professeurs / chercheurs. Comprendre ou « prendre ensemble » un fait didactique. In Collectif Didactique pour enseigner (Ed.), *Didactique pour enseigner* (pp. 269-281). Rennes : Presses Universitaires de Rennes.
- QUILIO, S. (2008). *Contribution à la pragmatique didactique. Une étude de cas dans l'enseignement des nombres rationnels et décimaux à l'école primaire*. Thèse de doctorat. Université de Provence, Aix-Marseille, France.
- QUILIO, S. (2012). Une forme caractéristique de condition de l'étude dans la réalisation d'une ingénierie didactique en mathématiques à l'école primaire. *Education & Didactique*, 6(2), 9-26.
- QUILIO, S., LEFEUVRE, L., LOQUET, M., GOUJOUN, C. & VILAINE, V. (2020). Maîtriser les savoirs suffit pour enseigner. In Collectif Didactique pour enseigner (Ed.), *Enseigner, ça s'apprend* (pp. 85-101). Paris : Retz.
- SENSEVY, G. (2011). *Le sens du savoir : éléments pour une théorie de l'action conjointe en didactique*. Bruxelles : De Boeck.
- SENSEVY, G. (2016). Le collectif en didactique. Quelques remarques. In Y. Matheron, G. Gueudet, V. Celi, C. Derouet, D. Forest, M. Krysinska, S. Quilio, M. Rogalski, T. A. Sierra, L. Trouche, C. Winslow & S. Besnier (Eds), *Enjeux et débats en didactique des mathématiques, 1* (pp. 223-253). Grenoble : La pensée sauvage.
- SENSEVY, G. & MERCIER, A. (2007). *Agir ensemble. L'action didactique conjointe du professeur et des élèves*. Rennes : Presses universitaires de Rennes.
- SENSEVY, G., FOREST, D., QUILIO, S. & MORALES, G. (2013). Cooperative Engineering as a Specific Design-Based Research. *ZDM, The International Journal on Mathematics Education*, 45 (7), 1031-1043.
- VILETTE, B., FISCHER, J-P., SANDER, E., SENSEVY, G., QUILIO, S. & RICHARD, J-F. (2017). Peut-on améliorer l'enseignement et l'apprentissage de l'arithmétique au CP ? Le dispositif ACE. *Revue française de pédagogie*, 201-2, Varia.
- VERSCHAFFEL, L., BRYANT, P. & TORBEYNS, J. (2012). The inverse principle: Psychological, mathematical, and educational considerations. *Educational Studies in Mathematics*, 79(3), 327-334.
- VIGOT, N. (2014). *Temps des pratiques de savoir, dispositifs et stratégies professorales : une étude de cas en mathématique au cours préparatoire : Journal du nombre et Anticipation*. Thèse de doctorat. Université de Bretagne occidentale, Brest, France.

ÉTUDE DU TRAVAIL DE L'ENSEIGNANT PAR LE BIAIS DE LA TRAJECTOIRE D'AVATARS EN TROIS BOUCLES

Blandine MASSELIN

LDAR, Université de Paris, IREM de Rouen

blandine.masselin@wanadoo.fr

Résumé

Ce poster présente notre méthodologie de recherche originale qui s'appuie sur la trajectoire d'avatars structurée en trois boucles, dont l'une est une lesson study adaptée (Masselin & Derouet, 2018). Cette méthodologie (Masselin, 2019) permet d'analyser des effets de formation sur une tâche probabiliste dans le cadre des Espaces de Travail Mathématique.

Mots clés

Trajectoire d'avatars, boucles, Espace de Travail Mathématique, lesson study, itinéraires cognitifs

I. CADRE THEORIQUE

La théorie des Espaces de Travail Mathématique (Kuzniak, 2011) nous permet de caractériser le travail des enseignants pour et dans leur classe et de repérer la circulation du travail dans la mise en œuvre d'un avatar dans une classe. Nous avons ainsi analysé *a priori* le travail qui pourrait être attendu et caractérisé le travail mathématique des enseignants en probabilité par le biais d'une formation sur une tâche propice à de la simulation d'expériences aléatoires.

Nous nous sommes appuyés sur le concept d'avatar défini comme étant l'incarnation d'un problème à un moment donné (son énoncé et ses questions). Nous avons suivi une succession de couples formés d'un avatar et de son ETM idoine associé, en précisant des itinéraires cognitifs (Masselin, à paraître). Ils sont un agencement de phases permettant de traiter une tâche et visant à la résoudre et varient selon des choix par l'enseignant.

II. METHODOLOGIE DE RECHERCHE ET PRECISIONS

Notre méthodologie de recherche, basée sur la trajectoire d'avatars, contient trois boucles. La boucle B1 est la préparation de la formation réalisée entre chercheurs et formateurs qui forment un premier collectif noté par la suite Coll.1. L'élaboration de la formation est suivie par la formation elle-même qui est de type lesson study adaptée (Masselin & Derouet, 2018, Masselin, 2020) : elle constitue la boucle 2 qui contient trois étapes. La boucle 3 est la mise en œuvre d'avatars par les enseignants dans leur propre classe après la formation.

Nous nous baserons sur le recueil des itinéraires cognitifs (Masselin, à paraître) issus de l'observation d'une lesson study adaptée sur la tâche intitulée « le jeu du lièvre et de la tortue » considérée comme emblématique (Kuzniak & al., 2016) car en particulier présente dans des documents officiels (document ressource pour l'algorithmique) ou sous une forme y ressemblant¹ dans le document (MENRES-LYC-DGESCO, 2012, p.17) Nos données proviennent d'enseignants ayant entre 5 et 20 années d'expériences. Le suivi de la trajectoire permet de repérer des modifications dans l'avatar et sa mise en œuvre au fil du temps. L'annexe présente l'évolution des itinéraires cognitifs recueillis au fil de la formation.

III. CONCLUSION

La comparaison des ETM effectif à ce qui est attendu par le chercheur (Masselin, 2019, pp. 62-71) a mis en évidence des métamorphoses par les descriptions des itinéraires cognitifs. Notre étude a mis en évidence que l'expérience aléatoire simulée (Parzys, 2009) est privilégiée par les enseignants. Si l'expérience aléatoire est très peu explicitée dans les classes et jamais distinguée parmi celle réelle, celle modélisée et celle simulée (au sens de Parzys (2009)).

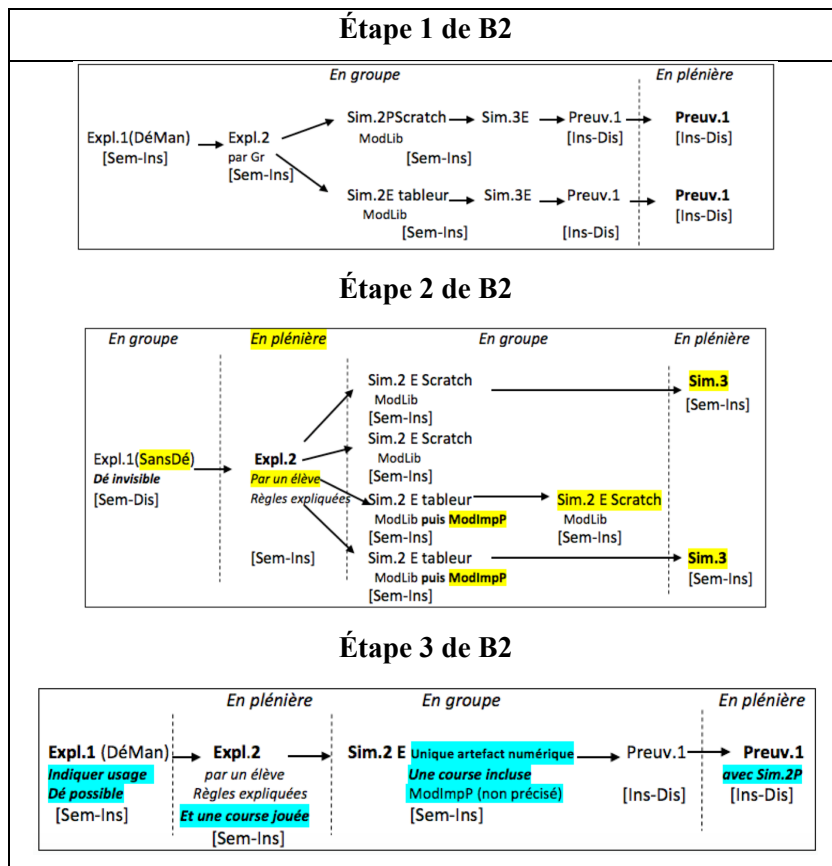
La trajectoire d'avatars livre aussi des premiers indicateurs sur des effets d'une formation. Nous avons identifié des dénaturations simplificatrices (Kuzniak, 1995) sur l'avatar ou sur l'ETM idoine associé ou sur les deux à la fois. Si une limite de notre étude est sa temporalité, nos travaux offrent des perspectives de développement de lesson studies adaptées en France, comme dans les laboratoires de mathématiques (Masselin & Hartmann, accepté).

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- CLIVAZ, S. (2016). Les Lesson Study : Des situations scolaires d'apprentissage professionnel pour les enseignants. *Revue des HEP et institutions assimilées de Suisse romande et du Tessin*, 19, 99-105.
- HOUEMENT, C. & KUZNIAK, A. (1996). Autour des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, 16(3), 289-322.
- KUZNIAK, A. (2011). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 16, 9-24.
- KUZNIAK, A., & NECHACHE, A. (2016). Tâches emblématiques dans l'étude des ETM idoines et personnels : existences et usages. In Gómez-Chacón et al. (Eds). Actes du cinquième symposium ETM5, 18-22 juillet, Florina, Grèce, 145-155.
- MASSELIN, B. (2019). Métamorphose d'un problème au fil d'une formation en probabilité : étude du travail de l'enseignant autour de la simulation en classes de troisième et seconde. Thèse de doctorat, HAL
- MASSELIN, B. (à paraître). Dynamique du travail mathématique en classe entre un enseignant et des groupes d'élèves sur la simulation en probabilité : une étude de cas. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*.
- MASSELIN, B. (2020). Ingénierie de formation en mathématiques de l'école au lycée : des réalisations inspirées des Lesson Studies, Ed. des Presses Universitaires de Rouen et du Havre, Rouen.
- MASSELIN, B. & DEROUET, C. (2019). Sur la mise en évidence des effets d'une formation courte sur les pratiques d'enseignants autour de la simulation en probabilité en classe de troisième, In M. Abboud (éd.), *Mathématiques en scènes, des ponts entre les disciplines* (pp. 198-207). Université de Cergy Pontoise, France.
- MASSELIN, B. & HARTMANN, F. (2020). Un dispositif de formation inspiré des lesson studies dans l'académie de Rouen : un avenir dans les laboratoires de mathématiques? *Repères-IREM*.
- MENRES-LYC-DGESCO (02-2012). Statistiques et probabilités, Ressources pour la classe de Première générale et technologique, 17-19.
- PARZYS, B. (2009). De l'expérience à la modélisation, via la simulation, *Repères-IREM*, 74, 91-103.

¹ Ici dans le contexte de la politique des naissances

ANNEXE



Évolution d'itinéraires dans B2, atelier Souris (Masselin, 2019, p.236)

ANALYSE COGNITIVE D'UNE TÂCHE D'ÉVALUATION DANS LE CADRE DE LA THÉORIE DES ESPACES DE TRAVAIL MATHÉMATIQUE¹

Rosa Elvira **PÁEZ MURILLO**

Universidad Autónoma de la Ciudad de México

rosa.paez@uacm.edu.mx

François **PLUVINAGE**

Cinvestav-IPN

Laurent **VIVIER**

LDAR-Université de Paris

laurent.vivier@univ-paris-diderot.fr

Résumé

Le document présente une analyse cognitive d'une tâche d'évaluation sur le concept d'asymptote appliquée à des étudiants d'ingénierie de première année universitaire à Mexico. Ce travail s'appuie sur la théorie des Espaces de Travail Mathématique (ETM). La tâche est de type non routinier car on donne la représentation graphique de la fonction et on demande des aspects algébriques. La résolution requiert un travail discursif-instrumental exigeant.

Mots-clés

ETM, asymptote, fonction rationnelle, GeoGebra.

Présentation et analyse de la tâche

Le travail présenté dans le poster s'inscrit dans le cadre d'un projet d'enseignement de l'analyse à l'Université Autónoma de la Ciudad de México (UACM), développé depuis 2006, avec des étudiants en première année de formation d'ingénieur.

La tâche a été appliquée à un groupe d'étudiants en calcul différentiel au premier semestre 2019. L'analyse des données est effectuée avec 9 étudiants, qui sont ceux qui ont terminé le cours de calcul différentiel. Voici ci-dessous la tâche donnée aux étudiants.

La figure 1 représente le graphique d'une fonction f , accompagnée de ses trois asymptotes fournies par GeoGebra.

a) Quel domaine a la fonction f ?

¹ Nous remercions l'Université Autónoma de la Ciudad de México pour son soutien au séjour de recherche de Rosa Páez (08/2019-07/2020) et au LDAR - Université de Paris, France pour l'invitation à ce séjour.

- b) Quelle limite m a le quotient $f(x)/x$ quand x tend à ∞ ? Justifiez votre réponse.
- c) Quelle limite a la différence $f(x)-m$ lorsque x tend à $-\infty$? Justifiez votre réponse.
- d) Spécifiez les équations de chacune des asymptotes et expliquez pourquoi elles correspondent à des asymptotes.
- e) Essayez de construire avec GeoGebra la Figure 1. Donnez la fonction introduite à cet effet, avec son expression algébrique, même si vous n'obtenez pas exactement le résultat demandé.

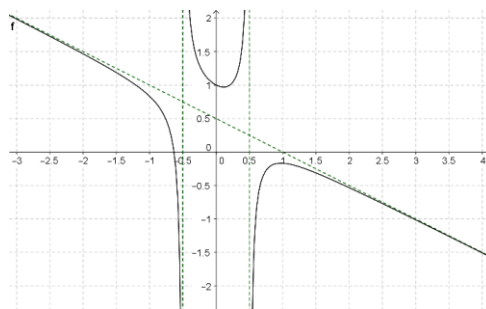


Figure 1 : graphique d'une fonction rationnelle

Le cadre théorique qui régit cette recherche est celui de l'espace de travail mathématique (Kuzniak, Tanguay et Elia, 2016). Aux figures 2a et 2b, nous présentons l'analyse de la tâche dans le cadre de l'ETM, en précisant les éléments et les processus de chaque niveau (épistémologique et cognitif), la genèse activée et les plans qui les articulent.

Pour la question e), il y a un besoin de connaissances (pôle, asymptote, fonction rationnelle) et des informations précédemment obtenues avec les questions b, c et d qui conduisent à la recherche d'une fraction rationnelle de l'une des deux formes :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{(x-0.5)(x+0.5)} \qquad \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{-x}{2} + \frac{1}{2} + \frac{ex + f}{(x-0.5)(x+0.5)}$$

Certains coefficients peuvent être déterminés avec l'équation de l'asymptote oblique ($a=-1/2$) ou par la valeur en 0 ($d=-1/4$ et $f=-1/8$), d'autres coefficients peuvent être déterminés avec l'exploration de l'outil "curseur" de GeoGebra.

La réussite à cette question e) repose sur un travail discursif-instrumental exigeant.

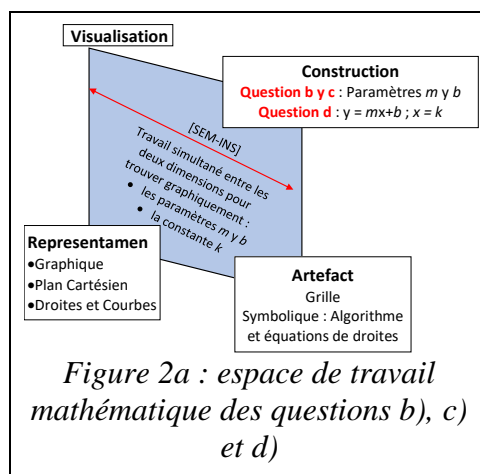


Figure 2a : espace de travail mathématique des questions b), c) et d)

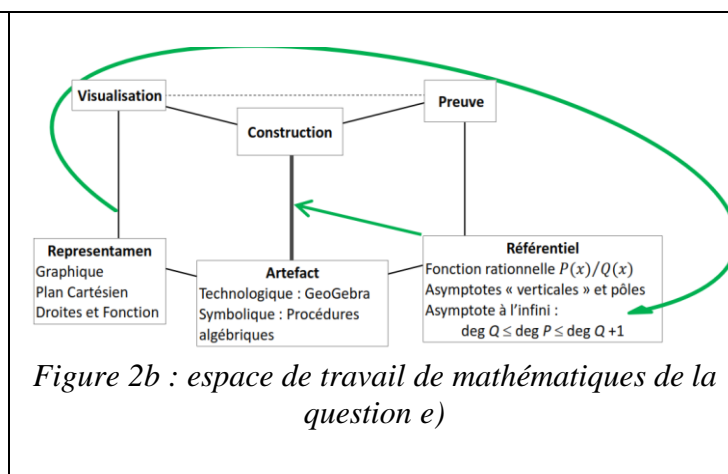


Figure 2b : espace de travail de mathématiques de la question e)

Résultats

Pour les questions b) et c), trois étudiants trouvent les limites demandées correspondant aux deux paramètres m et b . Trois étudiants trouvent la limite correspondant au paramètre m .

A la question d), pour les trois asymptotes, un seul étudiant répond correctement et deux autres étudiants commettent certaines erreurs de signe ou de valeur numérique. Deux étudiants qui n'ont pas réussi avec l'asymptote oblique, réussissent avec les asymptotes verticales.

Un seul élève fournit une expression algébrique (voir Figure 3) donnant une courbe proche de celle demandée (pour la forme, pas pour les valeurs) à la question e). Les autres étudiants tentent

quelques formules dans GeoGebra, sans succès. Ils tentent un travail uniquement instrumental qui ne peut aboutir.

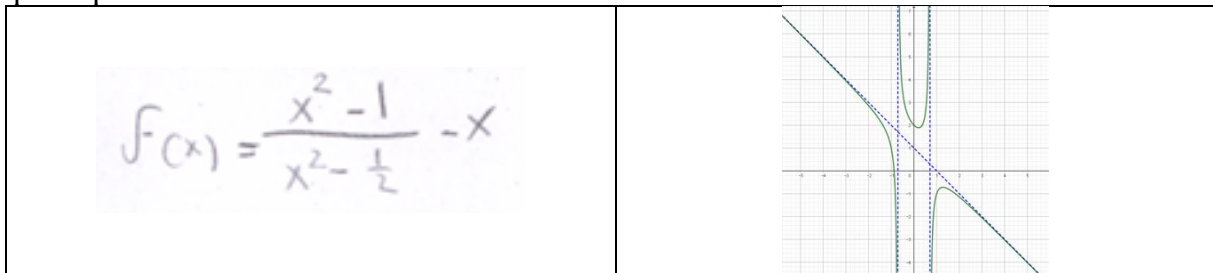


Figure 3 : réponse donnée par un étudiant et sa représentation dans GeoGebra

Quelques conclusions

Pour que les étudiants produisent un travail mathématique correct, il est important d'activer les dimensions sémiotique et -instrumentale sur des routines bien établies (trouver une asymptote ou trouver l'expression algébrique d'une droite) à partir du graphique.

La tâche, à la question e), est d'un très haut degré de complexité et ne peut aboutir si seul l'outil technologique est utilisé. De fait, l'activation de la genèse discursive a été insuffisante.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

KUZNIAK, A., RICHARD, P. & ELIA, I. (2016). Mathematical working spaces in schooling: an introduction. *ZDM, Mathematics Education* 48(6), 721-737.

MESURES DE GRANDEUR DANS LE SYSTEME *SECIMAL* POUR LA FORMATION DES PROFESSEURS DES ECOLES

Florence **PETEERS**

LDAR, Universités de Cergy-Pontoise, d'Artois, Paris-Est Créteil, Rouen, Paris

florence.peteers@u-cergy.fr

Laurent **VIVIER**

LDAR, Universités d'Artois, Cergy-Pontoise, Paris-Est Créteil, Rouen, Paris

laurent.vivier@univ-paris-diderot.fr

Résumé

Nous présentons une séance issue d'une séquence longue sur la base six proposée en formation initiale des professeurs des écoles. Dans cette séance, nous cherchons à aménager un milieu favorisant l'émergence de savoirs mathématiques spécifiques liés aux nombres réels et aux mesures de grandeurs. Une analyse qualitative des productions d'étudiants montre que les objectifs visés sont bien atteints sous certaines conditions d'application.

Mots clés

Formation des enseignants, base six, grandeurs, numération, milieu

I. CONTEXTE ET PROBLEMATIQUE

Nous avons mis en place, en nous appuyant sur Nikolantonakis et Vivier (2016) et Tempier (2013), une séquence de 8 séances de 2h pour de futurs professeurs d'école, 3^{ème} année d'université en France, afin de faire redécouvrir aux étudiants ce qu'ils vont avoir à enseigner (dans une autre base pour éviter les automatismes) sur le système de numération et les implications dans les autres domaines mathématiques. Nous nous focalisons ici sur la séance 4 qui aborde la question de la mesure des grandeurs en géométrie après 3 séances sur le codage des nombres entiers en base six et les quatre opérations. Une feuille de format A3 sur laquelle est tracée un hexagone régulier de 1 mètre de périmètre est donnée aux 6 groupes de 2 ou 3 étudiants. Il leur est demandé de donner la mesure de la longueur d'un côté de cet hexagone pour faire émerger une nouvelle unité ou une écriture à virgule/fractionnaire ($1/6$ m ou $0,1$ m ou encore 1 (m/10)). Ensuite, ils doivent tracer, toujours sur des feuilles A3, un triangle équilatéral et un carré dont le périmètre est toujours 1 mètre et donner la mesure de la longueur des côtés (les figures peuvent être tracées en reportant un certain nombre de fois le côté de l'hexagone mais on espère faire émerger le besoin de construire un outil de mesure, la règle graduée). Le triangle a pour côté $1/3$ m ($0,2$ m ou 2 (m/10)) et le carré a pour côté $1/4$ m ($0,13$ m ou $1,3$ (m/10) ou 13 (m/100)). Enfin, les étudiants doivent calculer la mesure de l'aire des figures (ce qui introduit la question de la valeur approchée de la racine carrée de 3 lors du calcul de la mesure de l'aire du triangle avec le théorème de Pythagore). Le milieu matériel avec les

connaissances anciennes des étudiants en géométrie et sur les nombres rationnels ainsi que les nouvelles connaissances sur le codage des nombres entiers en base six constitue-t-il un milieu (Brousseau, 2002) suffisant pour l'émergence des connaissances visées ?

II. PRODUCTION DES ETUDIANTS

Le besoin d'un nouveau système métrique a émergé dès le début de la séance. De nouvelles unités apparaissent pour les premières sous-unités du mètre : m/10 et m/100 avec, après accord collectif, les dénominations sécimètre et sitimètre, et les abréviations scm et stm (Figure 1). Pour le calcul de la racine carrée de 3 (ou 300 suivant l'unité utilisée) nécessaire à la mesure de l'aire du triangle équilatéral, tous les groupes, à l'exception du groupe VO, se lancent dans des essais pour trouver la valeur approchée (avec des résultats plus ou moins précis, le groupe MHV va jusque 3 décimales, Figure 2). Le groupe VO ne fait pas appel au théorème de Pythagore et commence la construction d'une règle graduée : un sécimètre divisé par deux et encore divisé par deux dans un souci d'avoir plus de précision. Une intervention finale permet de préciser l'intérêt d'avoir un outil pour avoir directement la mesure par dénombrement des graduations (Figure 3).

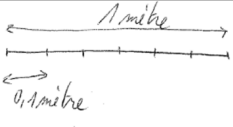
 <p>Groupe PAF</p>	<p>Nouveau système :</p> <p>1m = 10 sitimètre / (scm) 1m = 100 sitimètre (sm) 1m = 1000 sitimètre (lsm) 1m = 0,1 sécimètre (scm) 1m = 0,01 sitomètre (lsm) 1m = 0,001 sitomètre (lsm)</p>						
<p>100 4 - 40 60 - 60 0</p> <p>la mesure de la racine carrée de 3 est de 1,732 sitimètre</p> <p>Groupe AB</p>	<table border="1"> <tr> <td>2cm</td> <td>1cm</td> <td>5mm</td> <td>1mm</td> <td>1mm</td> <td>1mm</td> </tr> </table> <p>Proposition du groupe MHV, avant débat collectif</p>	2cm	1cm	5mm	1mm	1mm	1mm
2cm	1cm	5mm	1mm	1mm	1mm		

Figure 1 – nouveau système métrique

(avec des résultats plus ou moins précis, le groupe MHV va jusque 3 décimales, Figure 2). Le groupe VO ne fait pas appel au théorème de Pythagore et commence la construction d'une règle graduée : un sécimètre divisé par deux et encore divisé par deux dans un souci d'avoir plus de précision. Une intervention finale permet de préciser l'intérêt d'avoir un outil pour avoir directement la mesure par dénombrement des graduations (Figure 3).

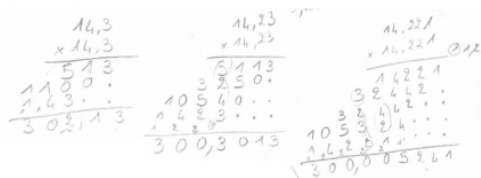


Figure 2 – calcul de valeur approchée



Figure 3 – tentative de règle graduée

III. CONCLUSION

La séance a permis l'introduction de nouveaux nombres pour mesurer des grandeurs, la nécessité de sous-unités du mètre, le calcul de valeur approchée de certaines longueurs ainsi que l'élaboration d'un outil de mesure. Ces objectifs sont atteints à condition d'autoriser des interactions chercheurs-groupes, pour orienter le travail mais sans indiquer les connaissances visées (en particulier pour l'émergence de la règle graduée).

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BROUSSEAU, G. (2002). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.
 NIKOLANTONAKIS, K. & VIVIER, L. (2016). El ETM de Futuros Profesores de Primaria en un Trabajo sobre los Números Naturales en Cualquier Base. *Boletim de Educação Matemática – BOLEMA*, 30(54), 23-44.
 TEMPIER, F. (2013). *La numération décimale à l'école primaire. Une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource*. Thèse de Doctorat, Université Paris Diderot, Paris.

EXERCER L'ESPRIT CRITIQUE EN CLASSE DE MATHÉMATIQUES AU CYCLE 3

Valentin **ROUSSEL**

Université de Lyon – Université Claude Bernard Lyon 1 – S2HEP – EA4148

rousseau.pro@protonmail.com

Résumé

L'école porte désormais une attention particulière à l'éducation aux médias et à l'information. Elle répond à une volonté de former les élèves au décryptage du réel et à la construction, progressive, d'un esprit éclairé, autonome et critique. Or il apparaît, au regard des programmes, que certaines disciplines semblent naturellement propices à l'exercice de cet esprit critique : Histoire, Sciences expérimentales, Education morale et civique... mais qu'en est-il des mathématiques ? Ce travail souhaite apporter un début de réponse à cette question. Notre recherche semble indiquer que des moyens efficaces et ludiques existent pour permettre le travail de l'esprit critique en classe de mathématiques. Elle aboutit à une proposition d'activité, construite en appui sur des concepts didactiques et psychologiques.

Mots clés

Epistémologie, esprit critique, psychologie cognitive, didactique, mathématiques

1. Esprit critique - enquête épistémologique et prescriptions actuelles

Une première enquête épistémologique nous conduit, au travers des textes fondateurs de l'esprit critique (Dewey, 1910 ; Russel, 1926 ; Postman & Weingartner, 1969 ; Norris & Ennis, 1991), à une définition du concept en termes de compétences. Cette définition prend forme au travers d'un modèle (Ennis, 2011) structuré par le couplage de douze compétences qui doivent servir de base à un enseignement de la pensée critique. Nous avons ainsi cherché à concevoir une activité permettant la mobilisation et le travail de telles compétences, au cycle 3, ainsi que la mobilisation des compétences mathématiques connexes majeures : « chercher, modéliser, représenter, calculer, raisonner et communiquer » (MEN, 2018, p.100). De même, notre enquête épistémologique nous a conduits à définir l'esprit critique comme un système de principes fondamentaux invariants issus des différents courants de pensée ; entre autres, nous nous sommes focalisés sur la dualité croyance-illusion, qui postule que les croyances créent des illusions, des mésinterprétations, des réflexions biaisées, ou encore des failles dans des raisonnements *a priori* rationnels.

2. Cadres théoriques : apports de la psychologie cognitive

La théorie des biais cognitifs de Kahneman (2012) nous est apparue fondamentale pour penser le dispositif. Un biais est une forme de pensée systématique, un court-circuit mental qui engendre des distorsions du traitement de l'information, du jugement, de la rationalité et de la logique. Six biais ont en particulier retenu notre intérêt : biais d'ancrage, de confirmation, de cadrage, de conformisme, effet boomerang et effet de faux-consensus (voir (Roussel, 2019) pour plus de détails). Nous expliquons par la suite comment ces biais nous sont apparus comme

des vecteurs pour faire naître des croyances chez les apprenants, et par conséquent, susciter chez eux la nécessité de mobiliser les compétences précédemment citées.

3. Méthodologie

Dans cette étude, les cadres théoriques mobilisés répondent à la nécessité d'enrôlement des apprenants dans une démarche d'introspection individuelle et de réflexion méthodique collective : soulever chez les élèves des croyances et les guider dans un raisonnement critique leur permettant de déconstruire méthodiquement ces croyances. Pour activer ces biais cognitifs chez les apprenants, et ainsi susciter des mésinterprétations, des croyances, nous nous sommes intéressés au puzzle de Lewis Carroll et en avons proposé une variation¹, elle-même déclinée en trois supports : (1) un support *numérique*, (2) un support *tangible souple*, constitué de pièces pliables et superposables et (3) un support *tangible robuste*, constitué de pièces solides et non-superposables. Nous avons évalué l'efficacité des différents dispositifs en analysant : les verbatims des échanges au sein de groupes, le nombre et la pertinence des manipulations collectives, la méthode générale employée par les groupes pour expliquer le paradoxe.

4. Résultats et conclusions

L'activité a été expérimentée dans deux classes d'élèves organisées en trois groupes. Les résultats indiquent que le second dispositif a été le plus à même de produire les effets escomptés. En particulier, les réflexions mobilisées par l'un des groupes travaillant sur le dispositif *tangible souple* révèlent une démarche critique et rationnelle surprenante de la part de jeunes élèves : ceux-ci ont su faire preuve de méthode, de logique, de diplomatie et d'introspection, pour proposer une explication solidement construite au paradoxe. Cette étude nous pousse à penser que le déploiement d'activités propices au travail de l'esprit critique en classe de mathématiques au cycle 3 est donc *a priori* envisageable. Toutefois, les résultats précédemment exposés ne sauraient être suffisamment représentatifs pour tirer des conclusions générales sur l'efficacité du dispositif. En effet, si l'activité expérimentée semble avoir produit des résultats significatifs et permettant la mobilisation des compétences ciblées, elle n'en demeure pas moins une proposition d'ingénierie didactique perfectible. Enfin, concluons qu'au regard de l'étonnante maturité intellectuelle dont ont su faire preuve certains groupes, il conviendrait de s'interroger sur le potentiel rationnel des élèves et les moyens à déployer pour l'évaluer et le perfectionner.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- DEWEY, J. (1910). *How we think*. Boston : D.C. Heath & Co.
- ENNIS, R. (2011). *The nature of critical thinking : an outline of critical thinking dispositions and abilities*. Champaign : University of Illinois.
- MEN (2018). *Mathématiques. Programme du cycle 3*.
- KAHNEMAN, D. (2012). *Système 1 / Système 2 : les deux vitesses de la pensée*. Paris : Flammarion.
- NORRIS, S. & ENNIS, R (1991). Evaluating critical thinking. *Journal of Educational Measurement*, 28(4), 355-357.
- POSTMAN, N. & WEINGARTNER, C. (1969). *Teaching as a subversive activity*. New York : Delacorte Press.
- ROUSSEL, V. (2019). *Ressources didactiques et pédagogiques pour une intégration de l'esprit critique en classe de mathématiques* (Mémoire de master 2). Sur https://valentinroussel.github.io/educ/p_roussel_2019.pdf
- RUSSEL, J. (1926). *On education*. London : D.C. Allend & Unwin.

¹ <https://www.geogebra.org/m/w9jwmm67>