

Une méthode d'analyse du travail personnel des élèves en géométrie¹

Alain Kuzniak¹, Blandine Masselin², Assia Nechache³ et Laurent Vivier¹

¹Université de Paris, LDAR (EA 4434), France

²IREM de Rouen, Université de Rouen, LDAR (EA 4434), France

³CY Cergy Paris Université, LDAR (EA 4434), France

Introduction

Dans ce texte, nous proposons une méthodologie pour l'étude de l'ETM personnel mis en œuvre lors de la réalisation d'une tâche en géométrie. Son exposition a fait l'objet d'un travail dans un atelier à l'Ecole d'Eté de didactique, en deux sessions. Dans la suite, nous ne revenons pas sur le cadre théorique que l'on trouvera dans le texte de Vivier (ce cahier, p. 55-70) – où la tâche et la production analysée ci-dessous y sont exposées pour illustrer les paradigmes géométriques et les genèses de l'ETM.

Dans un premier temps (session 1 de l'atelier), la méthode s'appuie sur une *analyse descendante* permettant de reconstituer le travail d'un étudiant. Puis, dans un deuxième temps (session 2 de l'atelier), une *analyse ascendante* permet de caractériser le travail mathématique de cet étudiant.

La tâche est issue d'un projet ECOS-Sud avec le Chili (2001-2003, Castela et al., 2006). Elle est à l'origine de l'idée d'Espaces de Travail Mathématique car son étude a mis en évidence des différences de travail dans les deux pays, Chili et France, qui vont au-delà des différences de paradigme. Voici la tâche géométrique d'Alphonse :

Alphonse vient juste de revenir d'un voyage dans le Périgord où il a vu un terrain en forme de quadrilatère qui a intéressé sa famille. Il aimerait estimer son aire. Pour cela, durant son voyage, il a mesuré, successivement, les quatre côtés du champ et il a trouvé, approximativement, 300m 900m, 610m, 440m. Il a beaucoup de mal à trouver son aire.

Pouvez-vous l'aider en lui indiquant la méthode à suivre ?

Figure 1 : La tâche d'Alphonse.

On note qu'une donnée manque pour pouvoir calculer l'aire du quadrilatère. Les trois dimensions de la théorie des ETM peuvent faire émerger la nécessité d'une donnée complémentaire pour résoudre la tâche d'Alphonse : la dimension instrumentale avec l'usage d'un logiciel comme Geogebra ou des idées mécaniques (artefacts, instruments) ; la dimension discursive avec des connaissances sur les quadrilatères mobilisés ; la dimension sémiotique, en réalisant différentes figures.

¹ Ce texte est extrait d'un atelier présenté à l'Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques organisée par l'ARDM en octobre 2019.

Il y a une rupture avec le contrat didactique usuel mais, pour une population de futurs enseignants dont est issue le corpus, on s'attend a priori à une prise de conscience de cette impossibilité d'autant plus que la formation initiale des enseignants de l'étude avait insisté sur l'intérêt des problèmes à données manquantes. Après cette prise de conscience, pour poursuivre le travail géométrique pour l'obtention de l'aire, on peut par exemple donner la mesure d'une diagonale :

Une information complémentaire :

Alphonse a demandé à une amie périgourdine de l'aider et celle-ci ne lui a renvoyé que la longueur d'une des diagonales : 630m.

Figure 2 : Information complémentaire pour poursuivre le travail.

La tâche d'Alphonse a fait l'objet d'une étude sur deux ans concernant des étudiants de Master 1, professorat du premier degré, en France et en Colombie. Les éléments exposés sont extraits du corpus de Kuzniak & Nechache (2018, 2020). Les étudiants ont réalisé une production écrite individuelle suivi d'une mise en commun (années 1 et 2) et d'un écrit réflexif (année 2 seulement). Les étudiants ayant reçu l'énoncé incomplet (Figure 1) n'ont majoritairement pas demandé de donnée complémentaire (2/85 étudiants français ont dit qu'il manquait une donnée et 3 sur une petite vingtaine d'étudiants colombiens). L'année 2 de l'expérimentation, les chercheurs ont modifié leur méthodologie de recueil en demandant un écrit réflexif car, l'année 1, lors de la mise en commun des étudiants, certains ne se sont pas exprimés d'où l'apparition d'une demande d'écrit réflexif. Ce changement de méthodologie permet de repérer les blocages et d'éclairer plus précisément le travail effectué.

Analyse descendante : découpage du travail mathématique en épisodes et actions

Un épisode est une sous-tâche que l'étudiant se donne pour résoudre la tâche. Un épisode est constitué des actions que l'étudiant effectue pour réaliser la sous-tâche. Dans la session 1 de l'atelier de l'école d'été, les participants ont été invités à repérer dans la production de Francis (annexe 1) les épisodes planifiés par l'étudiant pour effectuer la tâche et à décrire les actions du sujet dans chaque épisode.

La mise en commun de la description des épisodes et des actions est une interprétation de la réalité du travail mathématique. Elle nécessite de préciser le grain d'analyse. En particulier, il est important d'avoir un découpage permettant au mieux de décrire le travail compte tenu du public étudié. Par exemple, pour un étudiant-professeur du premier degré, il est suffisant de repérer l'action « tracé d'un cercle de centre A et passant par B » alors qu'il pourrait être utile pour un élève de cycle 3 de préciser cette action avec d'autres actions plus fines comme « placer la pointe du compas sur le point A ».

Kuzniak et Nechache (2018) proposent un découpage en trois épisodes de cette production. Selon eux, le premier épisode est la construction d'une figure à l'échelle et contient deux actions :

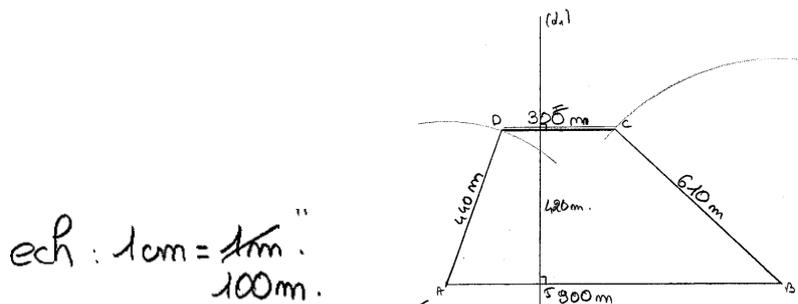


Figure 3. – Extrait 1 de la production de Francis (actions 1 et 2).

Episode 1 : **Action 1** : choix d'une échelle pour réaliser la figure

Action 2 : construction de la figure par ajustement avec une règle et un compas

L'épisode 2 est la justification de la nature du quadrilatère et comporte deux actions :

Action 3 : Explication orale (différée) de la construction du quadrilatère par Francis : « J'ai pris la grande base 900m ensuite à partir des deux extrémités des 900m avec le compas, j'ai fait 410 d'un côté et 610 de chaque côté et après avec la règle j'ai essayé de retrouver les 300 avec les deux arcs de cercle. »

Action 4 : Justification orale (différée) de la nature du quadrilatère par Francis : « J'ai tracé une perpendiculaire à la grande base et cette droite perpendiculaire à la grande base était aussi perpendiculaire à la petite de 300m du coup comme les deux droites sont perpendiculaires à la même droite, elles sont parallèles entre elles, donc cela a fait un trapèze. » qui est soutenu par son écrit (figure 4).

$[AB] \perp (d_1)$ et $[DC] \perp (d_1)$
 or si deux droites sont perpendiculaires à une même droite alors
 les deux droites sont parallèles entre elle. $[AB] \parallel [DC]$

Figure 4. – Extrait 2 de la production de Francis (action 4).

Notons que ces actions ont été explicitées de manière différée, donc des écarts sont possibles avec la réalité du travail mathématique effectué par l'étudiant. Cela pose la question méthodologique des données nécessaires pour identifier le travail mathématique ainsi que le fait que, quoique l'on fasse, il existera toujours des zones d'ombre².

L'épisode 3 est celui du calcul de l'aire du quadrilatère (figure 5) et se décompose en deux actions :

Action 5 : Mesure de la hauteur du trapèze.

Action 6 : Calcul de l'aire du trapèze

² Cette question n'est évidemment pas particulière à la didactique des mathématiques.

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{300 + 300}{2} \times 420 \\ \mathcal{A} &= \frac{1200}{2} \times 420 \\ \mathcal{A} &= 600 \times 420 \\ \text{mesure} \{I J\} &= 420 \text{ m} \end{aligned}$$

Figure 5. – Extrait 3 de la production de Francis (actions 5 et 6).

Après repérage des épisodes et actions, il convient de compléter l'analyse descendante en cours en indiquant, pour chaque action, son interprétation en termes d'ETM (notamment les dimensions convoquées ou genèses activées). L'exemple de l'action 2 du premier épisode soulève la non unicité d'une dimension convoquée lors du travail puisque les dimensions, ou genèses, instrumentale et sémiotique interviennent toutes deux simultanément. De même pour l'action 6 où l'on peut interpréter l'usage de la formule donnant l'aire d'un triangle comme un artefact symbolique (dimension instrumentale) ou comme un travail dans la dimension discursive. L'annexe 2 présente les diapositives de la mise en commun de l'analyse descendante présentée aux participants de l'atelier. Il est à noter que le découpage en épisodes déterminé par ces derniers étaient quasiment identiques à celui de Kuzniak et Nechache (2018). On peut synthétiser cette analyse descendante de la manière suivante :

Francis construit à l'échelle une figure en ayant *a priori* l'idée de la nature de la figure à obtenir (i.e. le trapèze). Pour cela, il utilise les outils technologiques (compas, règle, équerre) de la dimension instrumentale (épisode 1). Puis il propose une justification de la nature de la figure (épisode 2) et calcule l'aire de cette figure (épisode 3) basée encore une fois sur les outils technologiques de la dimension instrumentale.

Le niveau des actions permet de rentrer dans l'interprétation du travail mathématique effectué par l'étudiant. Les six actions peuvent être regroupées en trois épisodes. La méthodologie permet d'identifier les éléments des ETM du travail mathématique d'un sujet et notamment les genèses et les plans verticaux.

Analyse ascendante : caractérisation du travail mathématique

L'analyse ascendante a pour objectif, en reprenant chaque épisode, de caractériser le travail mathématique d'un étudiant. Nous nous appuyons toujours sur le travail de Francis.

Dans l'épisode 1 (construction d'une figure à l'échelle), le référentiel théorique est un activateur d'un travail simultané et dynamique entre les deux dimensions sémiotique et instrumentale.

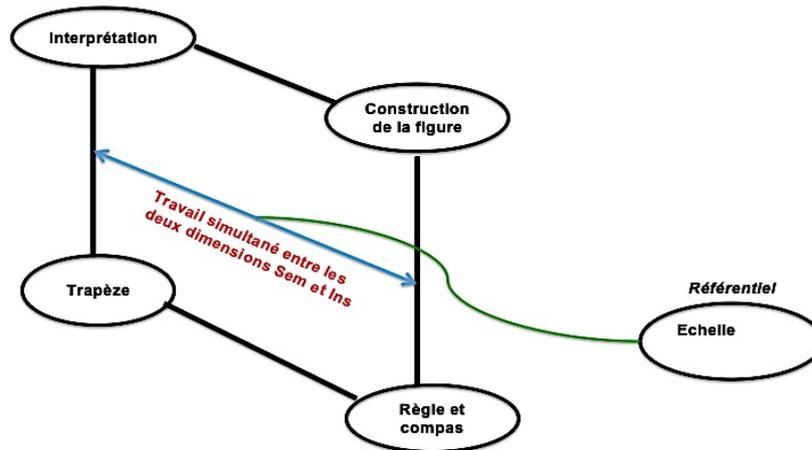


Figure 6. – Une synthèse du travail géométrique de Francis (Kuzniak & Nechache, 2020), épisode 1.

Dans l'épisode 2 (justification de la nature de la figure), il y a production d'un discours dans le plan [Sem-Ins] qui explicite la construction permettant d'obtenir un trapèze (action 3), puis production d'un deuxième discours dans le plan [Dis-Ins] qui justifie la construction du trapèze (action 4).

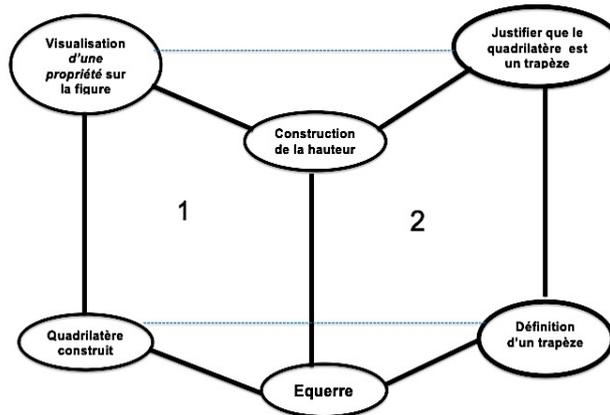


Figure 7. – Une synthèse du travail géométrique de Francis, Kuzniak & Nechache (2020), épisode 2.

Dans l'épisode 3 est produit le calcul de l'aire du quadrilatère (actions 5 et 6), Francis fait usage d'une formule de calcul d'aire associée à l'objet trapèze et prend des mesures sur le représentant (ici le dessin du trapèze construit dans l'épisode 1) à l'aide des outils technologiques de la dimension instrumentale.

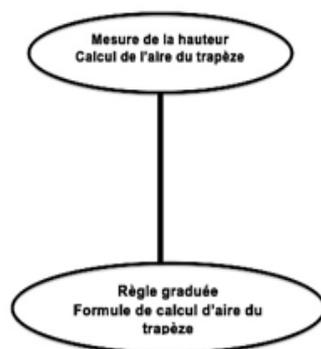


Figure 8. – Une synthèse du travail géométrique de Francis, Kuzniak & Nechache (2020), épisode 3.

Conclusion sur le travail de Francis

La méthodologie d'analyse de la production de Francis est ici double :

- en partant de l'étudiant, l'identification des épisodes et actions permet un travail sur les trois dimensions et constitue l'analyse descendante ;
- l'analyse ascendante permet de repérer que le travail de Francis est relativement complet car il est situé dans les trois plans de l'ETM.

Le processus suivi par Francis est *conforme* au travail mathématique attendu dans le paradigme géométrique GI. En revanche, le résultat n'est pas *correct* car Francis raisonne sur une figure particulière et obtient une valeur de l'aire. De plus, le résultat n'est pas correct car il manque de contrôles théorique et instrumental (les conditions de construction d'un quadrilatère et la précision de la construction auxquels on peut ajouter l'usage non conforme des instruments géométriques). Il y a donc nécessité de prendre en compte des paradigmes pour l'étude du travail en contexte et l'on remarque en particulier que l'épisode 1 est plutôt lié au paradigme GI. L'épisode 2 peut paraître plutôt lié au paradigme GII, mais de fait de nombreux éléments de preuve s'appuie sur des éléments pris visuellement ou instrumentalement sur la figure.

Enfin, on peut se poser la question du rôle de l'objet trapèze dans le travail effectué par Francis. S'agit-il d'un objet central autour duquel l'ensemble des épisodes est organisé comme le laisse supposer son discours ? ou bien a-t-il pris progressivement conscience de cet objet trapèze au cours de son travail puis, avec cette prise de conscience, il a reconstruit un discours ? Il est difficile de trancher sur ce point. Il n'est même pas sûr qu'une vidéo du travail mathématique de Francis aurait pu aider à répondre à cette question. En revanche, des écrits réflexifs produits immédiatement après la construction montrent que certains étudiants ont produit leur travail en supposant explicitement que la figure devait être particulière.

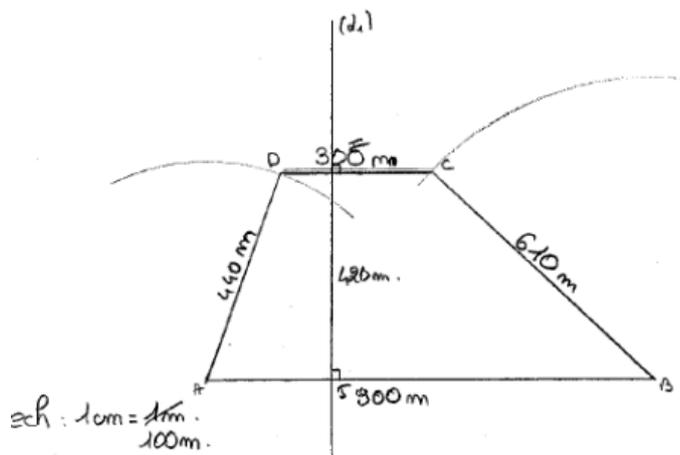
Références

- Castela, C., Consigliere, L., Guzman, I., Houdement, C., Kuzniak, A. & Rauscher J.-C. (2006). Paradigmes géométriques et géométrie enseignée en France et au Chili. Cahier DIDIREM spécial n°6. IREM de Paris 7.

Kuzniak, A. & Nechache, A. (2020). Développer un travail mathématique complet et conforme chez les étudiants de première année des master enseignement en France. Revue de Mathématique pour l'école, 223.

Kuzniak, A. et Nechache, A. (2018). Le terrain d'Alphonse ou les infortunes de la mesure. 45e colloque de COPIRELEM, Blois, juin 2018

Annexe 1 Production de Francis (tâche d'Alphonse) Extrait du corpus de



$[AB] \perp (d_1)$ et $[DC] \perp (d_1)$
 or si deux droites sont perpendiculaire à une même droite alors
 ces deux droites sont parallèles entre elle. $[AB] \parallel [DC]$
 On mesure $[H] = 420 \text{ m}$. $H \in [DC]$ et $J \in [AB]$.

$$A = \frac{300 + 600}{2} \times 420$$

$$A = \frac{900}{2} \times 420$$

$$A = 600 \times 420$$

Nechache & Kuzniak

Extrait du discours de Francis lors de la mise en commun

Professeur : Est-ce que pensez que vous auriez peut-être besoin d'une information supplémentaire pour pouvoir réussir.

Etudiant 1 : Il faudrait la forme du quadrilatère.

Professeur : La forme du quadrilatère. Est-ce que vous avez une idée de ce que ça pourrait être ? Est-ce que cela peut être un carré ?

Etudiants : Non.

Professeur : Un rectangle, Un losange.

Etudiants : Non.

Professeur : Tout cela vous savez calculer les aires. Ensuite, un trapèze ?

Etudiant 2 : Cela pourrait mais...

Etudiant 3 : Oui mais avec les mesures cela ne coïncide pas.

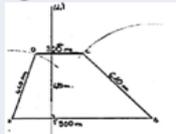
Francis. Si cela fait un trapèze ...

Professeur : Cela fait un trapèze ?

Francis. Oui, j'ai pris la grande base 900 m ensuite à partir des deux extrémités des 900m avec le compas, j'ai fait 410 d'un côté et 610 de chaque côté et après avec la règle j'ai essayé de retrouver les 300 avec les deux arcs de cercle et puis j'ai tracé une perpendiculaire à la grande base et cette droite perpendiculaire à la grande base était aussi perpendiculaire à la petite de 300m du coup comme deux droites sont perpendiculaires à la même droite, elles sont parallèles entre elles donc cela fait un trapèze...

Professeur : Donc Francis ici en faisant un dessin à l'échelle et en mettant les mesures qu'il a trouvées prouve avec ses instruments que c'est un trapèze.

Annexe 2 : Mise en commun lors de l'analyse descendante (session 1)

Episode 1	Actions	Interprétation en termes d'ETM
Construction de la figure à l'échelle	Action 1 : Choix d'une échelle pour réaliser la figure. $1\text{cm} = 100\text{m}$.	
	Action 2 : Construction de la figure par ajustement (règle graduée et compas) 	[Sem ← → Ins] Il exerce un contrôle visuel (Sem) et instrumental avec ses outils technologiques
Justification de la nature du quadrilatère	Action 3 : Explication de la construction du quadrilatère (F « <i>J'ai pris la grande base...</i> »).	[Sem ← → Ins] Usage simultané des outils sémiotiques (Sem) et technologiques (Ins). Contrôles visuels/instrumentaux sur le representamen (trapèze)
	Action 4 : Justification de la nature du trapèze (F « <i>... comme deux droites sont perpendiculaires à la même droite...</i> »).	[Ins ← → Dis] Usage de l'équerre pour vérifier le parallélisme (Ins) Usage de la définition du trapèze (outil théorique)
Calcul de l'aire du quadrilatère	Action 5 : Mesure de la hauteur sur la figure. $\text{mesure } \{ \} = 420\text{m}$	Ref → (Ins) Usage de la règle graduée (outil technologique) pour mesurer une longueur
	Action 6 : Calcul de l'aire d'un trapèze $A = \frac{300 + 900}{2} \times 420$ $A = \frac{1200}{2} \times 420$ $A = 600 \times 420$	(Ins) ou [Ins-Dis] Usage de la formule de calcul de l'aire d'un trapèze (outil technologique)