

Atelier 2 : Étude du travail idoine, le cas de la simulation en probabilité

Blandine Masselin¹ et Macarena Flores González²

¹IREM de Rouen, Université de Rouen, LDAR (EA 4434), France

²Université de Paris, LDAR (EA 4434), France

L'objectif de cet atelier est de montrer la manière dont nous étudions le travail mathématique en classe à l'aide de la théorie des Espaces de Travail Mathématique (Kuzniak, 2011 ; Kuzniak et al., 2016), à travers un exemple concret d'une tâche emblématique pour le collège dans le domaine des probabilités. Nous nous centrons sur l'étude du travail développé par l'enseignant et son influence sur le travail mathématique des élèves en classe.

Ce compte-rendu d'atelier présente successivement le contexte de la recherche, un extrait du corpus contenant un extrait vidéo, des productions écrites du travail en groupe d'élèves, l'analyse de ces données, et une mise en commun des réflexions scientifiques émanant des analyses faites au cours de l'atelier.

Éléments de contexte

Les données sont issues du corpus de la thèse de Blandine Masselin (Masselin, 2019). Le travail de thèse porte sur la simulation en probabilité en cherchant à caractériser le travail mathématique de l'enseignant. Les questions de recherche interrogent les liens entre expérience aléatoire et simulation, simulation et modèle, et simulation et preuve.

Ici, nous nous intéressons à l'exemple du cas de l'enseignante Lucie. Reconnue comme enseignante experte, Lucie est, depuis 2014, membre du groupe « Activités » de l'IREM de Rouen. Elle anime, entre autres, des formations continues dans son académie. En décembre 2015 le chercheur (Masselin) s'est entretenu avec l'enseignante au sujet d'une ressource composée de trois versions différentes du jeu du lièvre et la tortue (MENRES-SEC, 2009, pp. 27-29). En mai 2016, l'enseignante teste le jeu dans sa classe de troisième en proposant sa propre version (voir figure 1). Après la séance de classe de cette enseignante, elle a préparé avec les autres membres du groupe IREM une formation continue courte pour des enseignants du second degré dans le domaine des probabilités en utilisant le jeu du lièvre et de la tortue.

L'extrait du corpus proposé dans cet atelier provient de deux séances d'une classe de troisième d'un collège rural dont Lucie est l'enseignante. Ces deux séances sont d'une durée d'une heure, entrecoupées par la pause méridienne. Il est demandé aux élèves consiste à résoudre la tâche par groupes de trois ou quatre élèves. Pour la suite de l'atelier nous nous concentrons sur un des huit groupes d'élèves, le groupe 6, noté Gr6.

Outils théoriques d'analyse

Un ETM_{idoin} permet de caractériser comment le savoir est enseigné dans une institution avec ses propres visées. Il dépend du travail des élèves mais surtout de celui de l'enseignant (car c'est lui qui est en charge de la planification), et de la mise en œuvre de la situation étudiée.

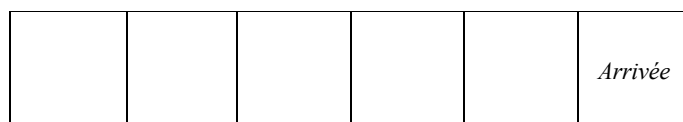
Masselin a ainsi utilisé en particulier le concept d'ETM_{idoine effectif}¹ (Masselin, 2019, p.51), concept utilisé afin d'analyser le travail effectif dans la classe de l'enseignante.

Lors de l'atelier, nous avons rappelé les trois dimensions ainsi que les plans verticaux définis par Kuzniak et Richard (2014) dans le diagramme de l'ETM car notre analyse consiste à décrire la circulation du travail mathématique effectué à travers les trois plans [Sem-Ins], [Sem-Dis] et [Ins-Dis] (Vivier, ce cahier, p. 55-70). Ce choix d'analyse permet de caractériser le travail de l'enseignant par le biais de l'étude des échanges entre l'enseignante et un groupe d'élèves, ou entre les élèves de ce groupe lors de la résolution de la tâche en classe. Nous rechercherons en quoi certains plans ne seraient pas activés ou évités, et à qui cela incomberait, l'élève ou l'enseignant.

La tâche

Nous avons présenté l'énoncé choisi par l'enseignante pour sa classe comme suit :

Une course du lièvre et de la tortue s'effectue avec un dé à 6 faces sur un parcours à 6 cases.



Cette course se déroule de la manière suivante :

- *A chaque manche de la course, on lance le dé :*
 - ❖ *Si le dé tombe sur 6, le lièvre atteint directement l'arrivée*
 - ❖ *Sinon, la tortue avance d'une case.*
- *Le premier à atteindre la case « Arrivée » gagne.*
- *On réalise autant de manche que nécessaire pour avoir un gagnant.*

Qui a le plus de chances de gagner cette course ?

Figure 1 : Énoncé de Lucie (Masselin, 2019, p. 98).

Kuzniak et Nechache (2016) définissent une tâche emblématique avec les trois critères définis ci-dessous :

- Être disponible dans les ETM de référence : bénéficier d'une reconnaissance qui témoigne de leur adéquation au travail mathématique visé par l'institution scolaire pour les élèves ;
- Être vivante dans les ETM idoines : faire partie des tâches qui sont effectivement proposées d'abord dans les ETM idoines potentiels définis par les manuels mais aussi et surtout dans les classes ordinaires ;

¹ L'ETM_{idoine effectif} correspond à la mise en œuvre effective dans une classe de ce qui était prévu par l'enseignant.

- Être potentiellement porteuse d'un travail mathématique complet : ces tâches doivent permettre une circulation entre les pôles et les plans verticaux des ETM, assurant ainsi un travail mathématique complet (Kuzniak, Nechache et Drouhard, 2016). (Kuzniak et Nechache, 2016, pp.145-147).

Ainsi, la tâche choisie est emblématique car d'une part elle figure dans des documents institutionnels (document ressource pour l'algorithmique) sous cette forme ou dans le contexte d'une *politique des naissances* (MENRES-LYC-DGESCO, 2012, p.17). D'autre part, cette tâche est vivante dans les ETM idoines car elle est proposée dans les manuels, dans les formations des enseignants. Le troisième critère qui correspond au travail mathématique complet sera précisé ensuite.

Nous avons livré quelques éléments d'analyse *a priori*, faisant ressortir deux modèles possibles pour la simulation numérique. Une course est ici considérée comme étant une partie du jeu qui s'arrête dès que l'un des deux animaux a gagné. La loi géométrique tronquée est un premier modèle où l'expérience aléatoire consiste à répéter dans des conditions identiques une épreuve de Bernoulli, ici de paramètre $1/6$, avec un nombre maximum de répétitions, ce maximum est ici de six. Dans ce modèle, le jeu s'arrête au premier succès (obtention d'un six) car le lièvre a alors gagné ; dans le cas où le nombre maximum de répétitions est dépassé (six), c'est la tortue qui gagne. Un deuxième modèle peut être considéré avec la loi binomiale. L'expérience aléatoire consiste dans ce cas à répéter autant de fois que de cases du jeu (six) des lancers de dé successivement, et de ne pas tenir compte du fait qu'un six soit apparu ou non au lancer précédent. Ainsi, même si le lièvre a potentiellement gagné, les lancers de dé se poursuivent. Intervient dans ce cas une épreuve de Bernoulli qui consiste à lancer six fois un dé de façon identique et indépendante. Si Y est la variable aléatoire qui compte le nombre de six en lançant six fois un dé, Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = 1/6$. La probabilité que le lièvre gagne $P(L)$ est égale à $P(Y \geq 1) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6$. Les deux modèles sont équivalents du point de vue mathématique.

Dans le contexte de notre étude, pour la simulation, deux artefacts numériques étaient envisageables *a priori* par l'enseignante : le tableur et le logiciel de programmation Scratch² introduit par les nouveaux programmes au collège (MENCOL, 2015).

Avec le tableur, le choix du modèle de la loi géométrique tronquée nécessite de réaliser des lancers conditionnés à l'obtention d'un six avec des tests SI (par exemple, en cellule C3 : =SI(B3<6 ; ALEA.ENTRE.BORNES(1 ; 6) ; " ")). L'emploi de la loi binomiale avec six lancers systématiques pour une course fait appel à six fois la saisie de =ALEA.ENTRE.BORNES(1 ; 6) puis un décompte du nombre de six obtenus (avec =NB.SI() et un test SI permettant de dénombrer si au moins un six est sorti lors des six lancers) comme indiqué en Tableau 1. Les deux modèles finissent par un test pour déclarer le gagnant.

² <http://scratch.mit.edu/>

Avec le
tableur

1^{er} choix de modèle (loi géométrique tronquée)

A	B	C	D	E	F	G	H	I
course	1er lancer	2e éventuel	3e éventuel	4e éventuel	5e éventuel	6e éventuel	gagnant	fréquence L
1	4	1	6				lièvre	1
2	3	5	6				lièvre	1
3	1	3	4	2	1	6	lièvre	1
4	6						lièvre	1
5	1	4	2	5	5	5	tortue	0,8
6	1	3	6				lièvre	0,83333333

La cellule C3 contient le test conditionnel suivant :

=SI(B3<6 ; ALEA.ENTRE.BORNES(1 ; 6) ; " ")

2^e choix de modèle (loi binomiale)

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Lancer	Lancer 1	Lancer 2	Lancer 3	Lancer 4	Lancer 5	Lancer 6	Nombre de 6	Gagnant	Fréquence lièvre
Course 1	4	1	5	2	5	2	0	tortue	0,73333333
Course 2	6	2	2	3	6	2	2	lièvre	
Course 3	5	5	2	2	5	2	0	tortue	
Course 4	6	4	6	5	6	3	3	lièvre	
Course 5	1	4	4	5	3	4	0	tortue	

Les cellules H2 et I2 ont les formules suivantes :

H	I
Nombre de 6 =NB.SI(B2;G2;6)	Gagnant =SI(H2>=1;"lièvre";"tortue")

Tableau 1 : Captures d'écran de simulation avec le tableur et Scratch.

Avec le logiciel Scratch	Modèle (loi géométrique tronquée)	

Tableau 2 : Captures d'écran de simulation avec le tableur et Scratch.

Le logiciel Scratch, avec ses fonctionnalités, permet une simulation avec un modèle congruent sémantiquement³ aux règles du jeu telles qu'elles figurent dans l'énoncé (Tableau 2).

Nous avons mentionné les arbres comme ayant un statut spécial dans les pratiques de l'enseignante car elle mentionne dans l'entretien : « *Les arbres, pour les élèves, c'est, je n'ai pas les moyens de justifier les règles de calcul en troisième donc je ne les utilise pas* ». Elle exclut leur emploi dans sa propre classe.

Concernant l'analyse *a priori* du point de vu des ETM, au moment de l'élaboration de la simulation, l'approche fréquentiste nécessite, selon le design de l'implémentation, une entrée par l'activation de la dimension instrumentale (notamment un travail dans le plan [Sem-Ins]) avec l'élaboration de courses jouées en lançant des dés par exemple au tableur ou avec Scratch qui produisent des données (signes) à interpréter. Cette étape est suivie d'un travail dans le plan [Sem-Dis]. En effet, les résultats numériques obtenus à partir du lancer de dés numériques et traités à l'aide du tableur, demandent à l'élève d'organiser et d'interpréter ces données. Ceci l'amène à convoquer des définitions, théorèmes et propriétés, telles que la fréquence ou la loi faible des grands nombres du référentiel théorique, et ainsi finissant le travail dans le plan [Ins-Dis]. De cette façon, cette analyse *a priori* nous conforte dans l'idée que cette tâche revêt bien un caractère emblématique car elle permet d'activer les trois plans verticaux de l'ETM c'est-à-dire qu'elle permet un travail mathématique complet.

Lors du travail en groupe des élèves, en général, le travail de l'enseignant consiste à enrichir le travail mathématique, notamment du point de vue des dimensions sémiotique et discursive. Concernant la dimension sémiotique, on attend que l'enseignant soutienne la compréhension des règles du jeu (entre le registre langagier et un registre figural lié au parcours) et des procédures de résolution convoquant des arbres ou d'autres représentations du problème.

D'autre part, le rôle de l'enseignant devrait permettre de rapprocher deux types d'approches sur cette tâche, notamment l'approche laplacienne (par calcul des probabilités) et celle fréquentiste.

Le corpus analysé lors de l'atelier

Comme nous l'avons dit, nous nous intéressons aux données relatives à l'un des huit groupes (Gr6). Nous comptons ainsi avec les données suivantes :

- L'écrit 1 correspondant à la feuille de synthèse du groupe 6 (Gr6) produite en fin de 1^{ère} heure (Annexe 1).
- Un extrait vidéo et son script (Annexe 2) qui montre le moment que nous analysons.
- L'écrit 2 (Annexe 3) qui est la production écrite par Gr6 en fin de deuxième heure.

En outre, des éléments de solution sont précisés en Annexe 4.

³ Notons toutefois un premier *lancer* avant la boucle. Est-ce pour une difficulté de programmation ? On pourrait aussi affecter la variable « de » à 0 et ne pas compter le premier passage dans la boucle conditionnelle ou encore utiliser une autre boucle conditionnelle « faire... jusque... ».

Durant l'atelier, d'une durée d'environ une heure, la consigne donnée aux participants est la suivante :

À partir de ces données :

- *Repérer la circulation du travail dans l'ETM_{idoine}. Situer le travail mathématique (du groupe d'élèves/de l'enseignant) dans des plans verticaux.*
- *Si possible, identifier des moments clés dans le développement du travail mathématique dans l'ETM_{idoine} effectif.*

Apports théoriques et méthodologique pour les analyses

Un élément fort de cette analyse avec les ETM est de pouvoir repérer des effets de contaminations par l'enseignant dans le déroulement du travail des groupes d'élèves. Le travail initialement entrepris par les groupes d'élèves est orienté de manière intentionnelle dans le plan [Sem-Ins]. Petit à petit le travail de tous les groupes d'élèves converge vers le plan vertical [Sem-Ins]. En quelque sorte, le travail de preuve par approche laplacienne (avec des calculs de probabilité sans simulation) est écarté par l'enseignante.

En effet, si la modélisation permettait d'emprunter deux modèles probabilistes, la loi géométrique tronquée ou la loi binomiale, l'enseignante a, petit à petit, imposé le deuxième modèle au dépend du premier : la plupart des groupes d'élèves a abandonné une procédure impliquant la loi géométrique initialement choisie. L'énoncé choisi par l'enseignante comporte des jeux de registres (registre langagier pour décrire le jeu et ses règles mais aussi un parcours dessiné). Concernant les artefacts pour la simulation, elle a seulement envisagé que ses élèves puissent utiliser un tableur à partir d'une feuille vierge. L'élaboration de la simulation est entièrement renvoyée à l'élève. Les artefacts matériels (des dés) sont présents dans un pot sur le bureau de l'enseignante : elle n'impose pas d'expériences manuelles *a priori*.

De nouveaux apports pour la théorie des ETM

Le groupe Gr6 (mais aussi les autres) a révélé des moments critiques dans la circulation du travail, il nous a incité à étudier finement la circulation du travail dans l'ETM_{idoine} effectif quand des élèves travaillent en groupe. Nous avons défini les concepts de blocage et rebond (Masselin, 2019, p.95).

- Un **blocage** est la manifestation d'un arrêt de la circulation du travail sur une tâche par l'élève empêché de le poursuivre.
- Un **rebond** est le développement nouveau du travail d'un individu ou d'un collectif après un arrêt momentané. En cela, il permet d'éviter que l'arrêt ne se transforme en blocage.

Ces notions ont été illustrées par la reconstitution du diagramme de circulation du groupe en lien avec l'écrit 1, l'extrait vidéo du groupe Gr6 et l'écrit 2.

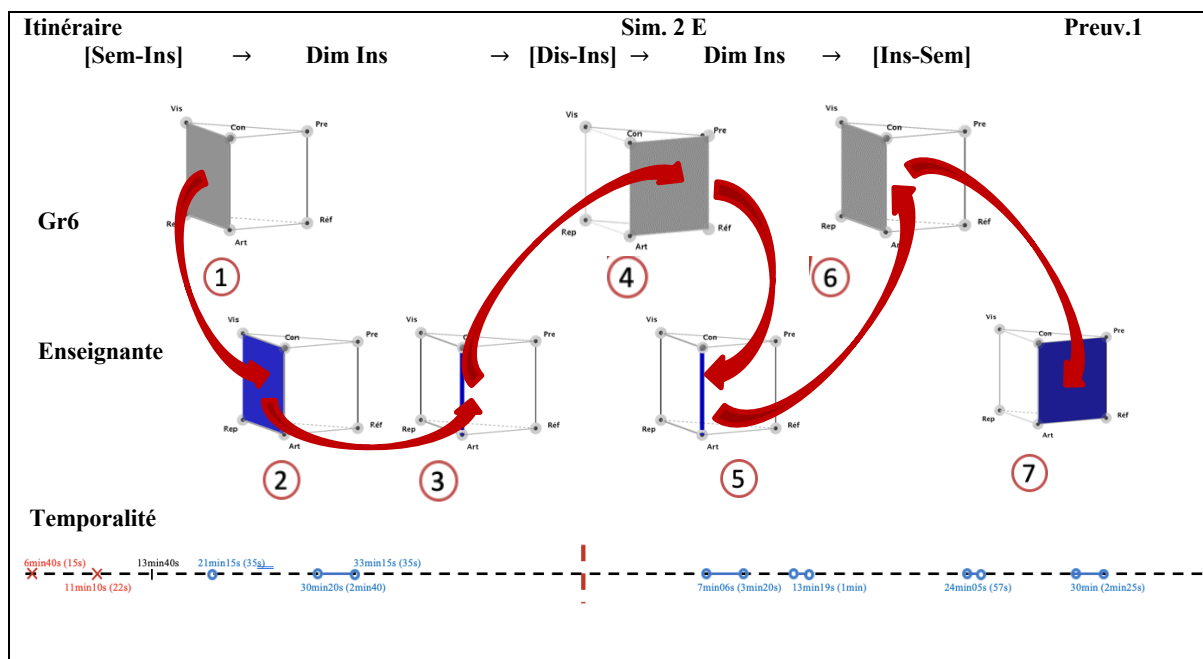


Figure 2 : Diagramme de la circulation du groupe Gr6, (Masselin, 2019, p.119).

Dans la figure 2, nous pouvons observer (en lisant de gauche à droite et en suivant ainsi la ligne de « temporalité » indiquée au niveau inférieur) que le groupe tente au départ d'élaborer une simulation au tableur : leur travail est initié dans le plan [Sem-Ins] (1^{ère} vignette). Après un premier lancer de dé au tableur, il se retrouve bloqué pour relancer de manière conditionnelle un deuxième dé. L'enseignante impose alors le modèle de la loi binomiale en faisant structurer le fichier tableur avec six colonnes, insistant sur la dimension instrumentale (2^{ème} et 3^{ème} vignettes). Comme indiqué en figure 2 (4^{ème} vignette), cela crée une résistance de la part d'une élève du groupe. L'élève en question, qui anticipe sur les résultats de la preuve expérimentale en se situant dans le plan [Ins-Dis], émet comme frein que cette modification changera les valeurs des probabilités. Nous identifions à ce moment précis un *blocage* du travail mathématique. L'enseignante n'avait *a priori* pas imaginé une telle simulation avec la loi géométrique tronquée au tableur avant la séance. Elle contraint le groupe à emprunter un modèle probabiliste lors de la simulation et intervient sur leur fichier tableur pour aider à automatiser l'obtention du vainqueur (5^{ème} vignette de la figure 2) en indiquant d'utiliser la fonctionnalité NB.SI du tableur et provoque ainsi un *rebond* tout en activant principalement la dimension instrumentale (6^{ème} vignette). Au final, l'enseignante incite à une validation dans le plan [Ins-Dis] (7^{ème} vignette).

Outils méthodologiques pour analyser l'ETM_{idoine}

Nous avons réalisé un chronogramme pour pouvoir considérer le travail « dans son ensemble » et pas uniquement celui pour un unique groupe d'élèves. Le chronogramme est ainsi un outil qui permet un repérage chronologique des interventions de l'enseignant, et de l'évolution de celles-ci dans leur contenu mathématique, et ce au fil du temps. Par conséquent, il permet un travail fin d'analyse didactique quand un travail en groupe est décidé par l'enseignant dans sa classe. Il permet de repérer les natures successives des interventions de l'enseignant et leur impact dans le travail mathématique développé dans chaque groupe. Il est un indicateur de

l'actualisation des connaissances de l'enseignant durant la séance de classe après son passage dans chaque groupe d'élèves en train de résoudre une tâche.

Ce chronogramme nous permet, d'une part, de mieux comprendre le travail de l'enseignante sur la simulation et ses ajustements de modèles entrepris dans l'ETM_{idoine} (durant les deux heures) ; et d'autre part, il permet aussi de relever la distribution du temps des interventions de l'enseignant dans chaque groupe et d'en préciser la répartition entre chaque groupe.

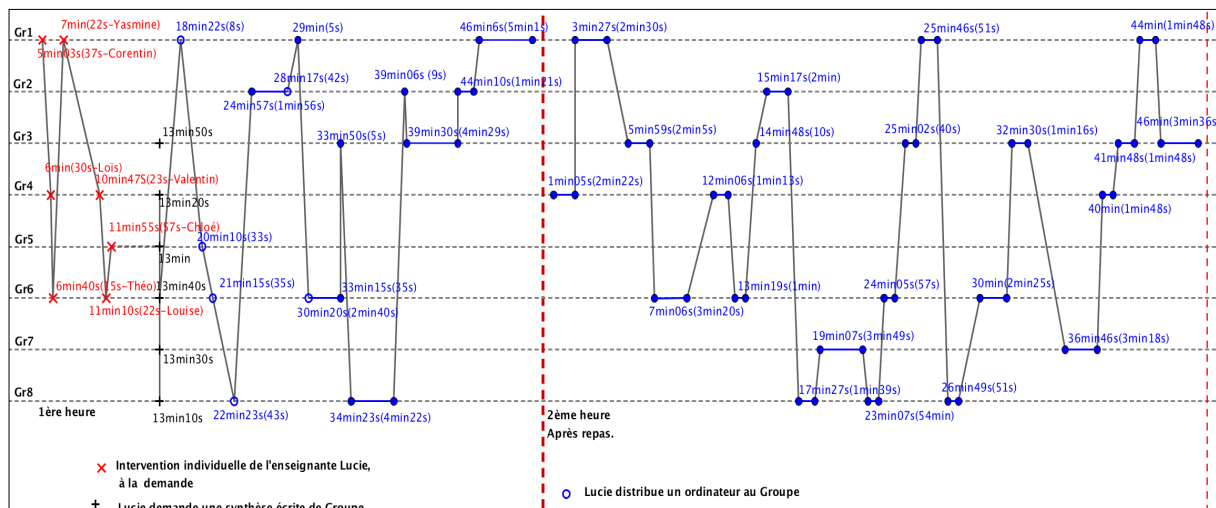


Figure 3 : Chronogramme de Lucie (Masselin, 2019, Figure 3.5, p. 107).

Dans la figure 3, les huit groupes différents dans la classe sont chacun représentés par une ligne du temps horizontale (droite en pointillé). Les premières interventions de l'enseignante sont repérées par des croix rouges quand il s'agit d'interventions très ponctuelles lors d'une phase de travail individuel (les 13 premières minutes). Les points bleus ou segments représentent les moments plus longs d'intervention de l'enseignant dans un groupe. Nous pouvons ainsi reconstituer les différents temps de passage de l'enseignant d'un groupe à l'autre et repérer les enchainements d'interventions.

Nous précisons l'étude du Gr6 en figure 4 avec un zoom du chronogramme général.

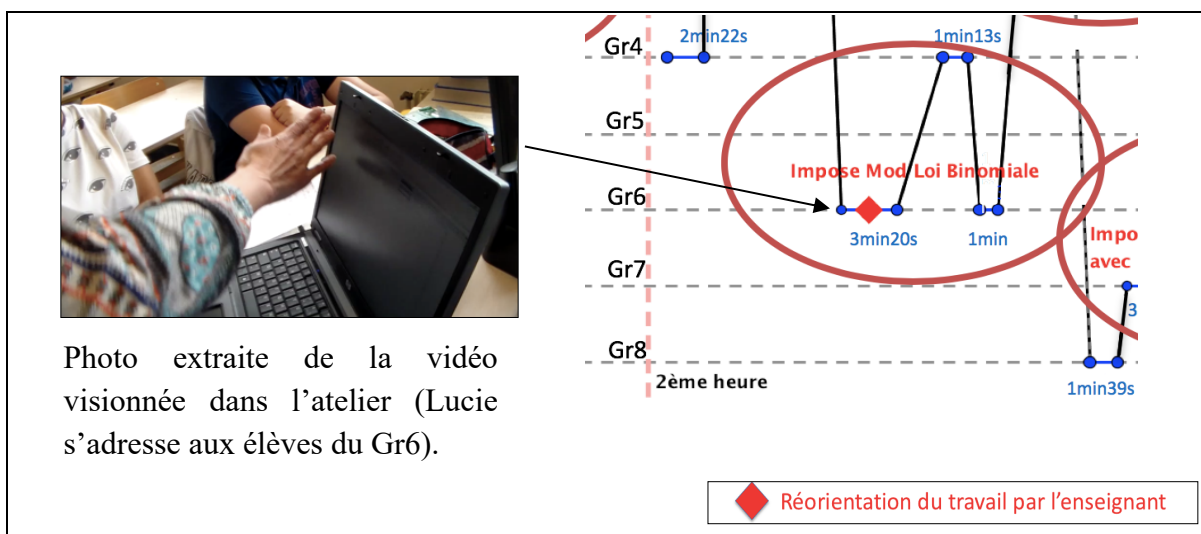


Figure 4 : Zoom sur la circulation du travail dans le groupe Gr6.

Dans l'extrait du chronogramme (figure 4), après 7min 06s, l'enseignante est intervenue dans le groupe Gr6 durant 3min20s et a alors imposé la loi binomiale lors de la tentative de simulation au tableur par les élèves à partir d'un fichier vierge. Cette intervention de 3min20s correspond à l'extrait-vidéo visionné en atelier. L'enseignante quitte le groupe, puis se rend dans le groupe Gr4 durant 1min13s avant de revenir pour un temps d'échange plus court dans le Gr6.

Plus globalement, l'élaboration du chronogramme a permis de mettre en lumière le fait que l'enseignante a réalisé des ajustements de modèles, et ce, de manière répétée dans plusieurs groupes. Ainsi cet outil méthodologique a montré un effet de contamination par l'enseignante du travail des groupes.

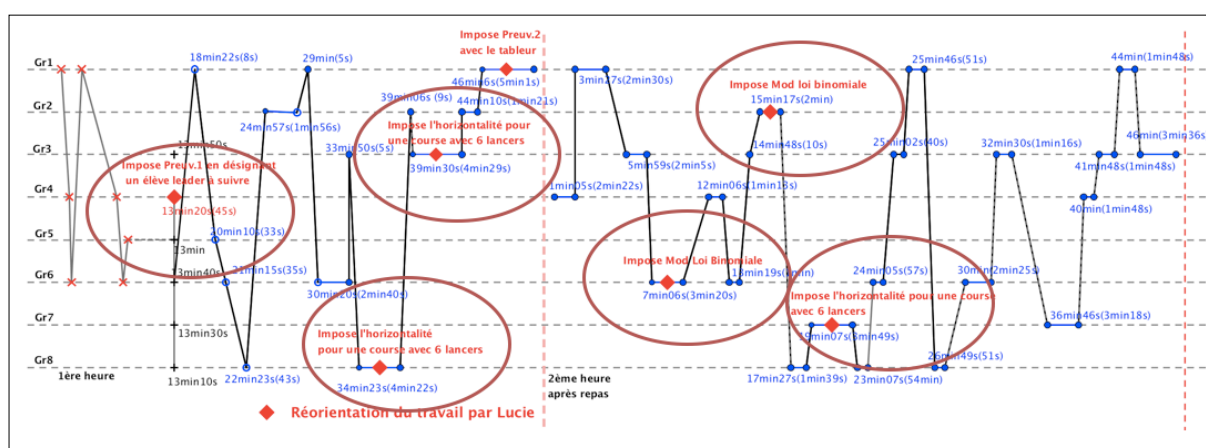


Figure 5 : Rebonds, Chronogramme, 1ère et 2e heure de classe (Masselin, 2019, p. 129).

Dans la figure 5, nous avons ainsi mis en évidence un **monitoring didactique indirect**⁴ (Masselin, 2019, p.340) du modèle exercé par l'enseignante qui modifie le travail de six groupes d'élèves sur les huit groupes. Si elle ne semble *a priori* pas imposer initialement un modèle probabiliste, ce fait est visible dans le chronogramme présenté. Ce contrôle du modèle par l'enseignante prend sa source dans la préparation de sa séance, d'où la qualification de monitoring indirect dans ce cas.

Notre étude n'a pas uniquement mis en avant des blocages et rebonds dans l'ETM_{idoine} : elle a révélé l'existence de **confinements** (Masselin, 2019, p.95) sachant qu'un confinement dans l'ETM est défini comme la manifestation d'une restriction du travail de l'élève dans un plan, sur une unique dimension ou encore sur un modèle donné.

⁴ Le monitoring didactique (Masselin, 2019, p.340) est une action de contrôle par l'enseignant du travail en classe, qui consiste à surveiller, en continu ou à intervalles rapprochés, par mesure d'indices, des procédures d'élèves ou des observations de phénomènes divers.

Commentaires des participants de l'atelier : liens entre la TO et la TA-DM

Lors du travail en groupe après la prise de connaissance du corpus, nous constatons que la tâche est rapprochée du « problème des partis » (Parzysz, 2009), problème datant de 1654, où une correspondance entre Pascal et Fermat concerne la répartition des mises lors d'un jeu de hasard interrompu.

Lors de l'interrogation sur les connaissances anciennes des élèves et sur l'objectif qui était visé par l'enseignante de la part des participants de l'atelier, nous avons constaté nous constatons que ces deux aspects sont importants pour préciser le contexte et ainsi pouvoir approfondir les analyses (ces données ne sont pas disponibles pour l'atelier).

Après l'analyse du corpus, plusieurs idées ont émergé. D'abord, à partir de l'extrait vidéo du groupe d'élèves effectuant une simulation au tableur, il est évoqué un manque de maîtrise de l'enseignante de la fluctuation. En effet, elle a créé une perturbation avec des lancers « pour rien », alors que les élèves ont tenté une simulation au plus près des règles du jeu dans leur premier fichier tableur. Les élèves faisaient un premier lancer 1000 fois, puis un deuxième conditionné à l'obtention d'un six au lancer précédent. Cela a amené les participants à mentionner que cette situation aurait été une bonne occasion d'aborder le concept de fluctuation, mais qu'au lieu de cela, l'enseignante a, de fait, imposé un autre modèle dans le fichier de simulation. Il a alors été souligné que le travail des élèves semblait contraint. L'extrait vidéo illustre ce moment clé de la séance en classe où l'enseignant fait opérer un changement de modèle aux élèves.

D'autre part, l'absence d'arbre est remarquée. Ce fait semble provenir d'une certaine interprétation de l'ETM de référence par l'enseignante influence l'ETM_{idoine} ou d'une conception que l'enseignante a de l'enseignement des probabilités.

Dans l'atelier il est relevé, dans la vidéo, des gestes et des expressions d'un scepticisme d'une des élèves du groupe après l'intervention de l'enseignante. La donnée de l'enregistrement vidéo est plus précis qu'un simple enregistrement audio, et ceci est rapproché de la Théorie de l'Objectivation (Radford, ce cahier, p. 19-41) qui prend en considération en particulier les gestes.

L'atelier a permis des analyses croisées et des tentatives de rapprochements entre le cadre des ETM et de la Théorie de l'Activité en Didactique des Mathématiques (Vandebrouck, ce cahier, p. 43-54) autour des données travaillées. Ainsi une possibilité de liens entre TA-DM et ETM semble possible afin d'enrichir l'étude dans l'ETM_{idoine} (plus que dans l'ETM personnel) à travers les interactions de classe. La TA-DM s'intéressait notamment à l'analyse des déroulements et aux moments d'exposition des connaissances. Des ponts possibles ont été mentionnés lors des échanges dans l'atelier. Une analyse des connaissances anciennes dans une perspective d'introduction de connaissances nouvelles permettrait d'étudier plus en profondeur la ZPD des élèves (Robert et Vandebrouck, 2014).

Le corpus de Masselin semble offrir beaucoup de perspectives d'études tant en enseignement qu'en recherche et il serait intéressant d'en faire une nouvelle analyse avec la TA-DM.

Conclusion : perspectives et limites

Dans ce texte, nous avons présenté une méthodologie pour étudier l'ETM_{idoine} en réponse à la nécessité d'une analyse de la mise en œuvre d'une tâche à destination d'une classe divisée en groupe d'élèves. Notamment l'outil d'analyse chronologique de la séance, permet de rendre compte non seulement de l'emploi du temps de l'enseignant avec ses élèves, mais aussi, du travail mathématique que les élèves développent lors des interventions de l'enseignant.

Nous avons montré aussi, à travers cette méthodologie d'analyse, que nous repérerons des nouveaux éléments pour caractériser le travail produit d'un sujet, à savoir : *blocages*, *rebonds* et *confinements*. Ainsi, la tâche choisie n'a pas été exploitée du point de vue de sa caractéristique emblématique car le troisième critère concernant la complétude du travail (activation des trois plans verticaux de l'ETM) ne s'est pas produit.

Une des limites de cet atelier vient du fait que nous avons considéré une seule enseignante, d'où le besoin d'étudier d'autres types d'ETM_{idoine} avec plusieurs enseignants, en particulier un ETM_{idoine potentiel} élaboré par un collectif⁵ (Masselin, 2019, p. 329). Cela permettrait d'étudier des possibles stabilités ou régularités dans les pratiques des enseignants.

Notre étude de cas, telle qu'elle a été présentée dans l'atelier, nous a conduites à considérer notre première analyse *a priori* de la tâche comme insuffisante et nécessiterait d'être approfondie, possiblement avec l'emploi d'autres théories. De manière complémentaire, une perspective de cette étude serait de prendre en compte les interactions dans l'ETM entre individus (élèves/enseignants) pour préciser le développement du travail mathématique autour de la tâche présentée. Cette piste a été développée par Masselin (2019) avec le concept d'ETM_{idoine} attendu qui correspond à un ensemble de phases. Les rôles respectifs des enseignants et des élèves y sont décrits dans la circulation du travail dans l'ETM.

Nous envisageons aussi de possibles perspectives d'analyse des données de l'extrait du corpus présenté dans cet atelier, en particulier avec la Théorie de l'Activité en Didactique des Mathématiques (TA-DM), qui pourrait permettre d'analyser l'influence de l'ETM_{idoine} sur différentes activités mathématiques que les élèves développent, nous y reviendrons dans la section suivante.

⁵ Dans ce travail, un ETM_{idoine potentiel} est un ETM_{idoine} négocié entre plusieurs enseignants, où sont réalisés des compromis entre les individus et où émergent des choix qui conduisent à son façonnage. Il revêt un caractère collectif. L'ETM_{idoine potentiel} peut aussi être influencé par les manuels d'enseignement ou les documents d'accompagnements pour les classes.

Références

- Kuzniak, A. Nechache, A. (2016). Tâches emblématiques dans l'étude des ETM idoine et personnels : existences et usages. In *Gómez-Chacón et al. (Eds). Actes du cinquième symposium ETM5, 18-22 juillet, Florina, Grèce*, 145-155.
- Kuzniak, A. Nechache, A., & Drouhard, J.P. (2016). Understanding the development of mathematical work in the context of the classroom. *ZDM – Mathematics Education*, 48(6), 861-874.
- Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). Mathematical working spaces in schooling: an introduction. *ZDM – Mathematics Education*, 48(6), 721-737.
- Masselin, B. (2019). *Étude du travail de l'enseignant sur la simulation en classe de troisième et seconde : métamorphose d'un problème au fil d'une formation en probabilité*. Thèse de doctorat, Université Paris Diderot. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-02507438>
- MENRES-LYC-MEN-DGESCO. (07-2009). Mathématiques, Ressources pour la classe de Seconde, 27-29.
http://mathematiques.ac-bordeaux.fr/txtoff/prog/lycee/2de_09/doc_ress_algo_v25.pdf
- MENRES-LYC-DGESCO (02-2012). Statistiques et probabilités, Ressources pour la classe de Première générale et technologique, 17-19.
https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/59/6/Ressource_Statistiques_Probabilites_1eres_208596.pdf
- MENCOL- DGESCO. (11-2015). Programmes d'enseignement du cycle des apprentissages fondamentaux (cycle 2), du cycle de consolidation (cycle 3) et du cycle des approfondissements (cycle 4).
<https://www.education.gouv.fr/bo/15/Hebdo48/MENE1530367A.htm>
- Parzysz, B. (2009). De l'expérience aléatoire au modèle, via la simulation. *Repères-IREM*, 74, 91-103.
- Robert A., & Vandebrouck F. (2014). Proximités en acte mises en jeu en classe par les enseignants du secondaire et ZPD des élèves : analyses de séances sur des tâches complexes. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 34(2/3), 239–285.

Annexe 1 : Écrit 1 Groupe 6 (état en fin de 1^{ère} heure)

on fait cette expérience un grand nombre de fois, ⁵⁶ (1)
alors on utilise la méthode fréquentiste.

on effectue 1000 fois le 1^{er} lancé.
Puis on soustrait au nombre de lancé total (1000)
le nombre de parties gagnées par le lièvre.

$$\text{soit } 1000 - 181 = 819$$

on effectue 819 fois le 2^{ème} lancé, étant
donné que 181 parties ont déjà été gagnées.

on répète cette expérience 6 fois.

$$819 - 136 = 683$$

$$683 - 130 = 553$$

$$553 - 92 = 461$$

$$461 - \quad =$$

on effectue des soustractions
successives.

Annexe 2 Script Vidéo Groupe 6

Échange entre l'enseignante Lucie et le groupe 6 (E1, E2 et E3)

Lucie : Pour savoir vous avez mis un nombre Si, d'accord et ensuite pour savoir qu'est ce que vous avez fait ?

E1 : Ici sur la feuille on a fait le nombre de parties total puis on a fait « moins » par exemple, là 160 vu que ce nombre de parties a déjà été gagné et on a pris le nombre de parties qu'il restait au total et on a refait exactement la même chose.

Lucie : D'accord donc là, vous avez fait une 2eme manche mais seulement pour les parties qui n'ont pas été gagnées par le lièvre. Donc au premier vous en aviez 820 qui n'avaient pas été gagnées par le lièvre donc vous en avez rejoué 820, enfin 819 quoi.

E1 : Oui

Lucie : D'accord et après pour toutes les parties qui n'ont pas été gagnées ni sur la première manche ni sur la deuxième manche, vous avez inventé une troisième manche.

E1 : C'est ça.

Lucie : Alors là vous êtes embêtés car du coup tout a bougé. Comment on va s'y prendre alors pour que justement j'ai un fichier qui résiste ?

E1 à E2 : Je ne sais pas

Lucie : Alors je peux vous donner le conseil de reprendre les 1000 parties à chaque fois, vous rejouez pour chacune des manches les 1000 parties. Même pour celles qui sont gagnées, ce n'est pas grave, vous rejouez quand même la deuxième manche même si elle a été gagnée dès la première manche. Ça ne vous coûte rien au niveau de coûts de calculs de l'ordinateur, on est d'accord ? Donc là sur les 136 parties qui vous manques, 136, vous allez combler le manque en rejouant les parties. Et plutôt que de regarder manche par manche pour savoir si la partie est gagnée par le lièvre, vous jouez les six parties et c'est à la fin des six parties que vous allez regarder si le lièvre a gagné ou pas gagné. D'accord, ça va ?

Donc l'avantage c'est que je fais des manches qui ne me servent à rien car si effectivement si le lièvre gagne dès la première manche, toutes les autres, tout l'algorithme de calculs que je fais faire au tableur, je n'en avais pas besoin. Mais comme ça ne lui demande pas de temps, de toute façon ce n'est pas très grave.

E1 : Oui

Une fois que l'enseignante quitte le groupe.

E2 à E1 : Tu fais 1000 fois les six, tu fais six fois, tu fais six colonnes de 1000.

E1 : Donc là tu enlèves

E2 : Elle ne t'a pas dit « fais étape par étape », elle a dit « On regarde à la fin si le ... »

E1 : D'accord

E2 : Et s'il ne gagne pas la première manche, on s'en fiche.

E1 : Pourquoi s'il gagne la première manche, on s'en fiche ? Parce que s'il gagne la première manche, il gagne.

E1 : Oui mais elle a dit que ça ne nous coûte rien.

E1 : Oui mais par rapport aux résultats, ça nous coûte.

E2 : Et bien je ne sais pas. C'est ce qu'on voulait faire au début.

E1 : Pour moi ça ne va pas parce que s'il a gagné au premier, il n'y a plus besoin de faire le reste. Si là il y a six les cinq autres plages, elles sont inutiles. Sauf que là, on ne va pas pouvoir mettre NB.SI(6) parce qu'il aura déjà gagné ici.

E2 : Je ne sais pas, j'ai compris mais.

État initial du tableur quand Lucie arrive dans le groupe 6 (début de la 2^e heure)

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
lancé		parties gagnées par le lièvre	2eme lancé					parties gagnées par le lièvre			3eme lancé		parties ga
6		172			4			124			6		
2					5						5		
1					2						3		
2					6						1		
6					4						3		
2					5						4		
4					3								
3					4								
3					4								
6													
6													
4													
4													
2													
1													
5													
6													
3													
2													
1													

État final du tableur du groupe 6 (en fin de deuxième heure)

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1er lancé	2e lancé	3eme lancé	4eme lancé	5eme lancé	6eme lancé				Parties gagnées par la	Parties gagnées par le lièvre
2	4	3	2	6	4	1			336	664
5	5	5	2	6	1	1				
6	1	6	5	6	6	4				
6	4	6	5	4	3	2				
2	3	3	6	5	2	1				
1	1	6	6	5	3	2				
6	3	4	6	6	1	3				
3	6	2	2	3	4	1				
2	6	3	5	4	2	1			Fréquence	Fréquence
3	3	2	5	2	4	0			0,34	0,66
4	6	3	4	6	6	3				
6	3	6	3	2	4	2				
6	2	5	1	2	6	2				
3	4	5	2	6	3	1				
6	5	3	6	5	5	2				

Annexe 3 : Écrit 2 Groupe 6 (état en fin de 1^{ère} heure)

on utilise le tableur.

on fait 6 colonne dans lesquelles on fait 1000 fois l'expérience.

on entrant la formule : $=\text{alea.entree}(\text{bornes}(1;6))$

Puis on compte le nombre de 6 dans chaque ligne : $=\text{nb.si}(A2:F2;6)$

S'il y a écrit 0 la tortue gagne.

Si le nombre est en 1 et 6, le lièvre gagne.

on compte le nombre de 0.

$=\text{nb.si}(H2:1001;0)$

Il y a environ 300 "0"

on calcule le nombre de parties gagnées par le lièvre : $=1000-52$ ce qui donne environ 700.

on calcule la fréquence de chacun.

tortue : $=52/1000 \approx 0,052$

lièvre : $=700/1000 \approx 0,7$

Donc le lièvre a plus de chance de gagner.

Annexe 4 : Éléments de solution du « jeu du lièvre et de la tortue »

Simulation au tableur : approche fréquentiste

Modèle choisi : la loi géométrique tronquée

A	B	C	D	E	F	G	H	I
course	1er lancer	2e éventuel	3e éventuel	4e éventuel	5e éventuel	6e éventuel	gagnant	fréquence L
1	4	1	6				lièvre	1
2	3	5	6				lièvre	1
3	1	3	4	2	1	6	lièvre	1
4	6						lièvre	1
5	1	4	2	5	5	5	tortue	0,8
6	1	3	6				lièvre	0,83333333

Modèle choisi : la loi binomiale

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Lancer	Lancer 1	Lancer 2	Lancer 3	Lancer 4	Lancer 5	Lancer 6	Nombre de 6	Gagnant	Fréquence lièvre
2	course 1	2	3	3	2	4	1	0	tortue	0,59925
3	course 2	6	1	1	5	1	4	1	lièvre	
4	course 3	5	2	2	6	2	3	1	lièvre	

Simulation avec le logiciel Scratch :

Modèle choisi : la loi géométrique tronquée



Exemple fichier Scratch, Annexe 2.1 (Masselin, 2019, Fig 23 p. 49)

Calcul des probabilités :

Si Y est une variable aléatoire binomiale de paramètre $n=6$ et $p=1/6$:

- $P(\text{Tortue gagne})=P(Y=0)=\left(\frac{5}{6}\right)^6=\frac{15625}{46656}\approx 0,335$
- $P(\text{Lièvre gagne})=P(Y\geq 1)=\frac{31031}{46656}\approx 0,665$