Portée et usage du travail mathématique dans le cadre de la théorie des ETM

Laurent Vivier

Université de Paris, LDAR (4434), France

Ce texte s'intéresse au travail mathématique comme objet d'étude didactique. Sa caractérisation nécessite l'identification d'éléments qui vont mener à la théorie des ETM dont certains principes sont rapidement exposés. Les liens entre ETM, travail mathématique et apprentissage sont également explorés car une des ambitions de la théorie est de comprendre comment un sujet fait des mathématiques et comment il est possible d'influer sur son travail grâce à l'enseignement.

Introduction

La théorie des ETM a pris son essor[1], depuis plus de vingt ans, à partir des travaux de Houdement et Kuzniak (1999) en géométrie. La manière de caractériser le travail mathématique s'est d'abord appuyée sur la notion de paradigme, reformulée à partir des travaux de Kuhn. Mais les paradigmes seuls se sont vite avérés insuffisants et une première version de la notion d'Espace de Travail Géométrique (ETG) est apparue au début des années 2000. Quelques années plus tard, une deuxième version, en appui sur les processus cognitifs en géométrie de Duval (2005), a été développée et, ensuite, étendue aux autres domaines mathématiques avec la notion d'Espace de Travail Mathématique (Kuzniak, 2011). Plusieurs éléments ont joué des rôles importants dans la genèse de la théorie. On peut notamment citer les deux projets ECOS-Sud avec le Chili. Le premier de 2003 à 2005 (Guzman et Kuzniak, 2006) a permis de développer la notion d'ETG et le deuxième (2014-2016) a permis de préciser l'ETM de l'analyse. Les divers symposiums ETM[2] ont également été importants pour le développement de la théorie, au sein d'une communauté de chercheurs, avec notamment le deuxième symposium à Paris en 2010 où la notion d'ETM a été avancée. Et bien entendu, il faut tenir compte de tous les doctorats, passés ou en cours, dont les auteurs participent au dynamisme et à la créativité de la théorie.

Le travail mathématique

Cette section s'intéresse au travail mathématique en tant qu'objet d'étude didactique. Sa caractérisation nécessite l'identification d'éléments qui vont mener à la théorie des ETM. Le travail est considéré dans une double signification : à la fois comme un ensemble d'activités humaines organisées pour atteindre des buts et en même temps comme le produit de ces activités.

---

[1] Pour plus de détails sur l'histoire de la théorie des ETM, voir Kuzniak (2019).

[2] Symposium d'Étude sur le Travail Mathématique. Six symposiums, avec actes, ont déjà eu lieu.

Bien entendu, le travail mathématique est perçu différemment selon les sujets, enseignants et élèves. Pour l'élève, le plus important est le produit du travail mathématique avec la réponse qu'il doit donner à son professeur, alors que pour l'enseignant l'essence du travail mathématique qu'il attend de ses élèves est plutôt associée aux processus de ce travail. Pour l'enseignant, il est important que l'élève puisse réutiliser, dans d'autres circonstances, un processus qu'il aura appris.

Des observables aux actions

Afin d'identifier le travail mathématique, on s'intéresse aux traces tangibles qui se manifestent, à la fois durant le processus et dans le produit. Ce sont les observables du travail mathématique qui constituent les données expérimentales que l'on peut recueillir, puis analyser. Mais dans une perspective mathématique, tous les observables ne sont pas à considérer – cela serait d'ailleurs impossible. En effet, « prendre un stylo » est un observable mais n'est pas signifiant du point de vue mathématique et il est inutile de considérer ce type d'observable – à moins que le stylo ne soit utilisé pour reporter une longueur ou vérifier un alignement. On se limite ainsi aux observables ayant une signification mathématique, que l'on appelle des actions (cf. partie III, EEDM2019), effectuées par le sujet au cours d'un travail mathématique. Ces actions entraînent des traces tangibles, durables ou non, qui sont externes au sujet. L'hypothèse est que les actions mathématiques réalisées par un sujet permettent de reconstituer de manière rationnelle le travail mathématique effectué par le sujet. Dans cette perspective, les actions mathématiques sont des sortes de briques élémentaires du travail mathématique. Ainsi, à partir des traces laissées par le travail mathématique, on infère des actions mathématiques qui permettent une (voire plusieurs) reconstruction du travail mathématique. Et naturellement, une seule de ces actions ne suffit pas à rendre compte du travail mathématique global d'un individu.

Toutefois, dans cette interprétation des actions mathématiques, il est nécessaire de prendre en compte le contexte, dans une acceptation très générale. On peut par exemple penser au niveau scolaire de l'étude. En effet, si pour un étudiant-professeur il est possible de se contenter d'un « il trace un cercle de centre A passant par B », en revanche, pour un élève de primaire en début d'apprentissage il est très certainement utile de décomposer les actions pour préciser qu'il « place la pointe du compas sur le centre A » et « ajuste l'écartement du compas à la longueur AB ».

Ainsi, on pourra faire une différenciation selon les sujets, selon l'institution dont le sujet fait partie (avec les programmes d'enseignement), on pourra prendre en compte la situation, le contrat didactique, le milieu, les aspects affectifs, les interactions entre pairs et avec l'enseignant. En particulier, il est important d'identifier le travail mathématique proposé et à effectuer dans l'institution.

Les éléments caractéristiques nécessaires

La spécification du travail aux mathématiques entraîne que l'organisation ainsi que l'orientation productive du travail sont supportées par les mathématiques. Il en est de même de la finalité générale de ce travail. Ainsi, le travail comme processus et comme produit est supporté par l'épistémologie des mathématiques. Mais, lorsqu'il est effectué par un sujet, le travail mathématique est également supporté par ses connaissances, en évolution du fait de ses apprentissages, par la manière dont il pense les mathématiques. Ainsi, l'étude du travail mathématique effectué par un sujet doit également prendre en compte des aspects cognitifs.

En plus de ces deux aspects essentiels du travail mathématique, épistémologique et cognitif, trois dimensions sont considérées comme étant constitutives du travail mathématique et elles servent à caractériser les actions mathématiques :

- La dimension sémiotique s'impose d'emblée car, comme l'écrit Duval (1996), les objets mathématiques ont une caractéristique qui fait que, en très grande majorité, on ne peut y avoir accès qu'à travers des signes qui les représentent. Il y a bien entendu les représentations écrites, mais il ne faut pas non plus écarter les représentations plus éphémères comme les gestes et les sons.
- La plupart des signes écrits sont produits par l'usage d'un instrument par un sujet, qu'il soit matériel, digital ou symbolique. Ces instruments peuvent être associé à un outil[3] matériel spécifiquement créé pour effectuer un type de représentation, comme le compas pour tracer un cercle. Ils peuvent aussi provenir d'un usage détourné d'un objet existant, comme un stylo utilisé comme une règle pour vérifier un alignement. On parle ainsi plus généralement d'artefact, dont un sujet s'empare pour s'en servir comme un instrument.
- Enfin, au moins depuis les Éléments d'Euclide, les définitions et les propriétés des objets mathématiques ainsi que leurs mises en fonctionnement dans l'argumentation, voire les démonstrations, constituent une dimension essentielle du travail mathématique que l'on nomme discursive. Cette dimension discursive est associée à la preuve.

Remarquons que d'autres dimensions peuvent intervenir dans le travail mathématique. On peut par exemple citer les aspects affectifs, collectifs, esthétiques, etc. qui pourront être considérés dans certaines études.

La théorie des ETM

Dans notre recherche d'un outil pour étudier le travail mathématique, nous ne retenons que les aspects épistémologique et cognitif ainsi que les trois dimensions exposées à la section précédente. Ce choix est motivé par la recherche d'une théorie opérationnelle prenant en compte le « cœur » de l'activité mathématique avec un ensemble d'éléments constitutifs de base. D'autres éléments pourront y être ponctuellement adjoint selon les besoins d'une étude spécifique.

Le diagramme et le prisme

La théorie prend donc en considération les aspects épistémologiques et cognitifs que l'on croise avec les trois dimensions, sémiotique, instrumentale et discursive. Cela détermine six composantes de

[3] Dans la théorie des ETM, les instruments seront associés au plan cognitif et les outils au plan épistémologique (Kuzniak, Drouhard et Nechache, 2016).

l'Espace de Travail Mathématique : trois processus cognitifs et trois composantes épistémologiques qui sont donnés dans la table 1.

	Sémiotique	Instrumentale	Discursive
Cognitif	Visualisation	Construction	Preuve
Épistémologique	Representamen (Signes)	Artefacts	Référentiel Théorique

Table 1 : les éléments de l'ETM.

Le processus de visualisation est le processus par lequel un sujet interprète des signes mathématiques (idéalement avec des connaissances mathématiques) ; le processus de preuve est le processus par lequel un sujet argumente, justifie, explique, démontre en s'appuyant sur les éléments du référentiel théorique (définitions, propriétés, théorèmes,…) ; le processus de construction est le processus par lequel un sujet s'empare d'un artefact pour effectuer une action mathématique.

Cet outil pour l'analyse du travail mathématique est organisé et structuré en un espace abstrait représenté par le diagramme de la figure 1.

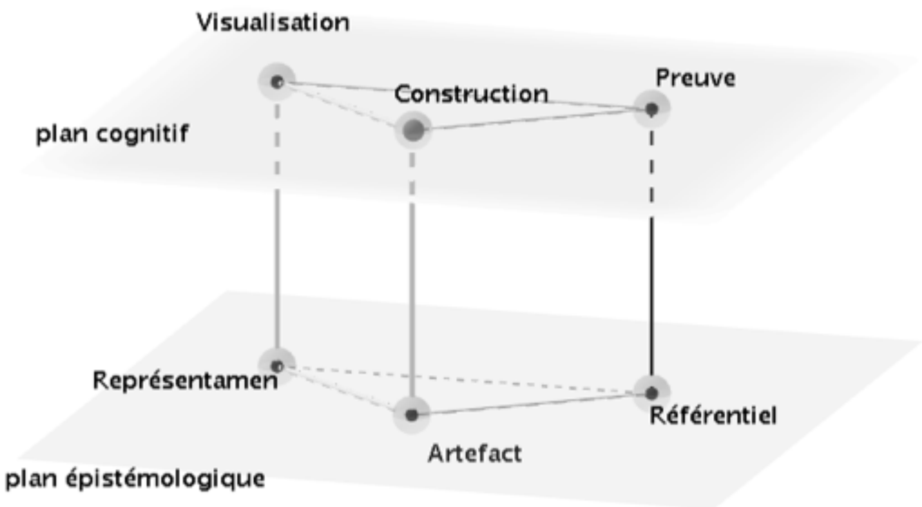


Figure 1 : le diagramme de l'ETM.

Ce diagramme a en particulier l'intérêt de montrer des liens entre les plans cognitif et épistémologique[4]. Ces liens, ou articulations, entre les deux plans sont spécifiés selon les trois dimensions, nommées également genèses pour rendre compte du caractère génétique et dynamique, de l'Espace de Travail Mathématique. En effet, un ETM n'est pas figé, il évolue et se développe dans le temps, idéalement en s'enrichissant, notamment par le travail mathématique déjà effectué.

Toutefois, contrairement à ce que pourrait laisser penser le squelette de la figure 1, il ne faut pas penser les genèses de manière isolée. Le travail mathématique est en général complexe et ne peut se

[4] Dans la tradition des ETM, on parle plutôt de plans que d'aspects.

contenter d'une seule dimension (même s'il peut y avoir une prépondérance d'une dimension sur une autre). Le travail mathématique requière très souvent de mettre en œuvre de manière imbriquée deux ou trois dimensions (ou genèses). Pour cela, on utilise également une autre représentation de l'ETM mettant en avant la nécessaire activation de deux genèses. C'est ce que présente le prisme de la figure 2 où l'on définit trois plans verticaux selon les couples de genèses.

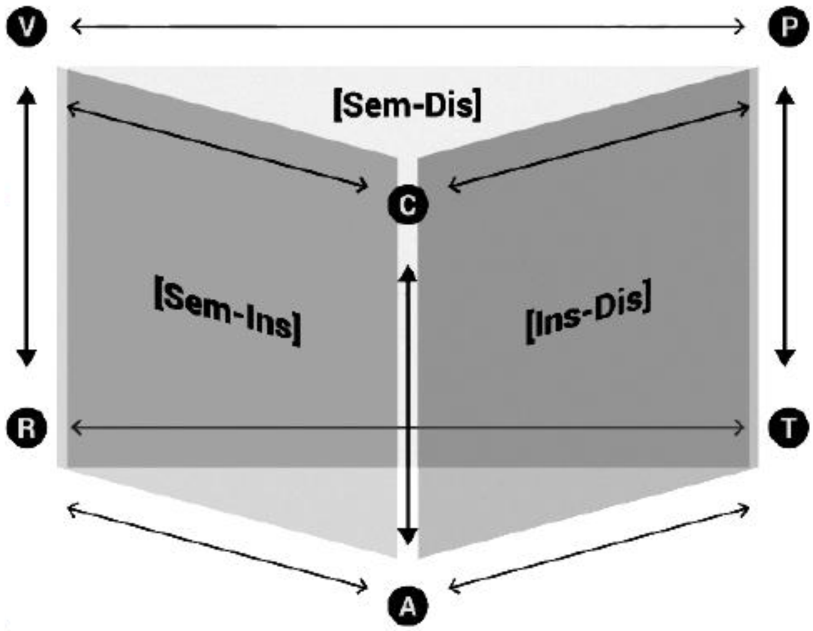


Figure 2 : le prisme des ETM et les plans verticaux.

Le diagramme et le prisme sont des outils pour les analyses qu'ils permettent de synthétiser. Mais il faut se garder de penser que la théorie se réduit à ces deux représentations. Avant de parler de la notion de paradigme à la section suivante, signalons que, pour rendre compte du travail mathématique dans une institution scolaire, il est nécessaire de considérer plusieurs niveaux :

- Le niveau des différentes institutions qui se préoccupent de l'enseignement des mathématiques (ETM de référence) ;
- Le niveau de la classe avec le travail proposé par un enseignant et mis en œuvre avec ses élèves (ETM idoine) ;
- Le niveau du sujet (ETM personnel) où l'on cherche à caractériser le travail mathématique d'un individu.

A chaque niveau correspondent des ETM qu'il s'agit d'identifier tout en prenant en considération les relations entre les différents ETM.

La notion de paradigme

La notion de paradigme est un élément clé de la théorie afin de comprendre le travail effectué, son orientation et les choix effectués. Et tout ceci est à penser pour un domaine mathématique, car il faut prendre en compte la spécificité du travail mathématique de chaque domaine.

Par exemple, pour la géométrie, Houdement et Kuzniak (1999) ont proposé les trois paradigmes suivants :

- La Géométrie I ou Géométrie Naturelle : la géométrie sur les objets réels, confusion entre mathématique et réalité, elle est technique et pratique ;
- La Géométrie II ou Géométrie axiomatique naturelle : la géométrie comme schéma de la réalité, le système d'axiomes provenant de la réalité peut être incomplet, elle est axiomatique et modélisante ;
- La Géométrie III ou Géométrie axiomatique formelle : il y a une indépendance de la géométrie avec de la réalité, ce paradigme pose le problème d'une axiomatique cohérente et complète, elle est logique et formelle.

Pour l'analyse, Montoya Delgadillo et Vivier (2016) ont proposé les trois paradigmes suivants.

- Analyse Arithmetico-Géométrique (AG ou A1) : qui permet des interprétations, provenant de la géométrie, du calcul arithmétique mais aussi du monde réel ;
- Analyse Calculatoire (AC ou A2) : dans ce calcul algébrique généralisé, les règles de calcul sont définies, plus ou moins explicitement, et elles sont appliquées indépendamment d'une réflexion sur l'existence et la nature des objets introduits ;
- Analyse Réelle (AR ou A3)) : elle est caractérisée par un travail spécifique formel sur l'approximation et la localité : bornes, inégalités, travail sur des voisinages, négligeabilité.

Dans la suite de cette contribution, nous présentons un exemple en géométrie et un en analyse.

Un exemple en géométrie

Dans l'exemple qui suit (Kuzniak et Nechache, 2018), nous montrons une mise en œuvre de la théorie des ETM puis nous finissons par un questionnement sur les analyses provenant des données.

Il s'agit d'un exercice en géométrie proposé à des futurs enseignants du primaire en France. On ne s'intéresse qu'à la première partie où les étudiants devaient remarquer qu'il y avait une donnée manquante (ce que très peu ont vu).

> Alphonse vient juste de revenir d'un voyage dans le Périgord où il a vu un terrain en forme de quadrilatère qui a intéressé sa famille. Il aimerait estimer son aire. Pour cela, durant son voyage, il a mesuré, successivement, les quatre côtés du champ et il a trouvé, approximativement, 300 m, 900 m, 610 m, 440 m. Il a beaucoup de mal à trouver l'aire. Pouvez-vous l'aider en lui indiquant la méthode à suivre ?

Et voici une production d'un étudiant (extrait du corpus de Kuzniak et Nechache, dont nous donnons à la suite une analyse rapide[5].

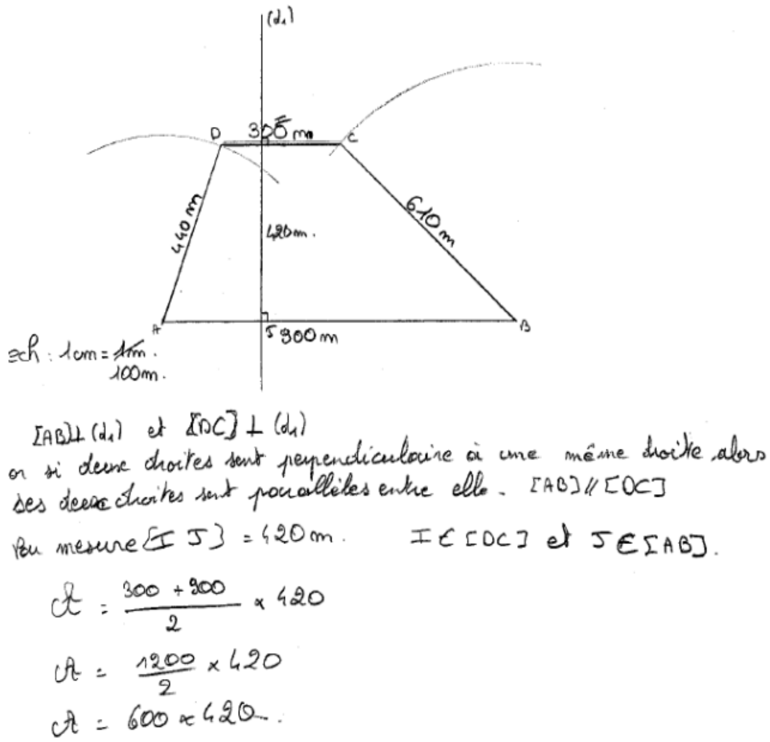


Figure 3 : réponse de Francis.

Pour la construction de la figure, après le choix d'une échelle (genèses discursive et sémiotique avec une visualisation des nombres), on relève d'abord un travail instrumental mais qui s'appuie en même temps sur les signes produits au fur et à mesure. Il s'agit d'une construction dans le paradigme GI de la géométrie.

Puis, l'étudiant justifie avec ses connaissances (genèse discursive) le fait qu'on a deux droites parallèles (peut-être dans la perspective d'avoir un trapèze), mais en prenant des informations sur la figure (genèses sémiotique et instrumentale). Il y a ici une coexistence des paradigmes GI et GII.

Enfin, il calcule l'aire en mesurant sur la figure (genèses sémiotique et instrumentale, paradigme GI) en appliquant la formule de l'aire d'un trapèze.

Toutefois, on ne peut pas savoir avec certitude à quel moment il trace la droite d1 : est-ce pour faire la justification comme on semble le comprendre dans son écrit ou bien a-t-il tracé cette droite pour avoir la mesure de la hauteur ?

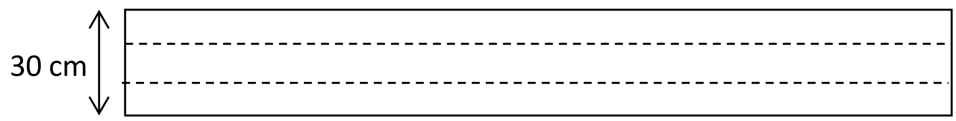
[5] Pour une analyse détaillée et des considérations sur la méthodologie utilisée en théorie des ETM pour rendre compte de l'ETM personnel voir la section « Une méthode d'analyse du travail personnel des élèves en géométrie » de ce cahier, page 103.

Comme on le constate, les dimensions ne sont effectivement pas isolées. On constate également la difficulté de savoir à quel moment il a pensé au trapèze avec ces données. Il ne le dit pas, mais on peut raisonnablement affirmer qu'au moment où il applique la formule de l'aire il pensait déjà au trapèze. Peut-être même lors de sa petite démonstration, car il justifie la propriété du trapèze. Est-ce dès le départ ? Jusqu'à quel point la configuration du trapèze a-t-il guidé son travail ? On ne peut en être certain, même s'il le déclare dans la phase collective qui a suivi[6], car il est possible qu'il ait reconstruit son travail. Quoiqu'il en soit, on peut en conclure que cet étudiant a appris, et est capable de réutiliser en contexte, des connaissances sur le trapèze, mais qu'il manque certainement de connaissances plus générales sur les quadrilatères et les aires. On pourra même considérer que son travail est conforme aux attentes du paradigme de la Géométrie I. Nous allons préciser cette idée de conformité dans la suite.

Conformité et diversité du travail mathématique : un exemple en analyse

Prenons l'exemple suivant, dit de la Canaleta[7] :

> On dispose de plaques rectangulaires en métal de largeur 30 cm et de grande longueur. On replie perpendiculairement les bords de chaque côté pour fabriquer une gouttière (selon les pointillés sur la figure ci-dessous). Pour des raisons évidentes, les deux rebords latéraux de la gouttière ont la même dimension.



Trouver comment replier la plaque pour obtenir une gouttière qui a un débit maximum.

Cet énoncé a été proposé à trois groupes de futurs enseignants de mathématiques en Argentine (Córdoba) :

- Le groupe 1PC de 1ère année d'université, N = 24 ;
- Le groupe 2PC de 2ème année d'université, N = 15 ;
- Le groupe 4PF de 4ème année d'université, N = 12.

Ainsi qu'à un groupe L3 de futurs enseignants du primaire en France (Paris), de 3ème année d'université, N = 16 (étudiants non scientifiques pour la plupart).

Seul le groupe 4PF a eu un enseignement d'analyse sur les fonctions et les dérivées (ainsi que quelques étudiants du groupe L3). Ces étudiants proposent tous une fonction quadratique avec soit un calcul de dérivée (proche de l'étudiant de la figure 4) soit un calcul du sommet de la parabole en

[6] Les données associées aux productions comportent généralement une vidéo de la mise en commun et un écrit réflexif de l'étudiant sur sa production.

[7] Une analyse de la situation de la Canaleta est présentée dans (Montoya Delgadillo, Viola & Vivier, 2017).

utilisant la formule du cours (figure 5). Ces étudiants effectuent un travail standardisé, dans le paradigme A2 de l'analyse (Montoya Delgadillo et Vivier, 2016), avec peu de choix à faire. C'est un travail conforme à ce qui a été enseigné, essentiellement dans le paradigme A2, avec très peu de diversité dans les productions.

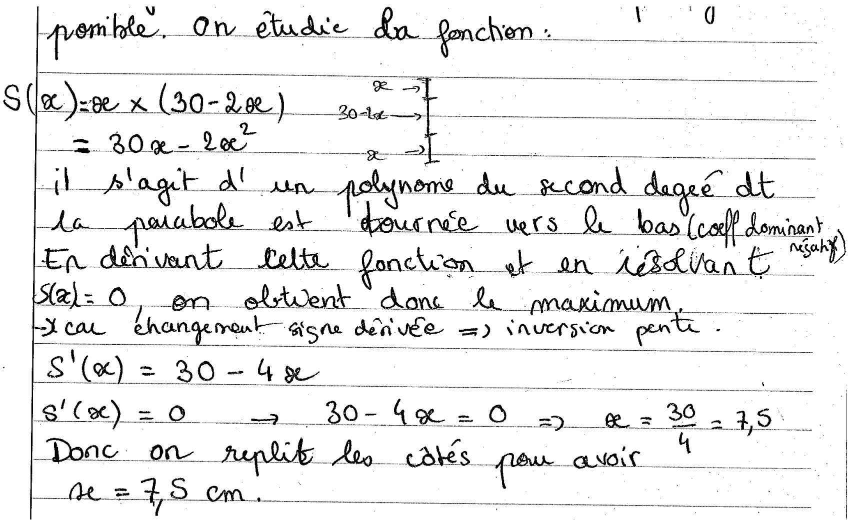


Figure 4 : Une fonction, calcul de la dérivée, recherche des points critiques.

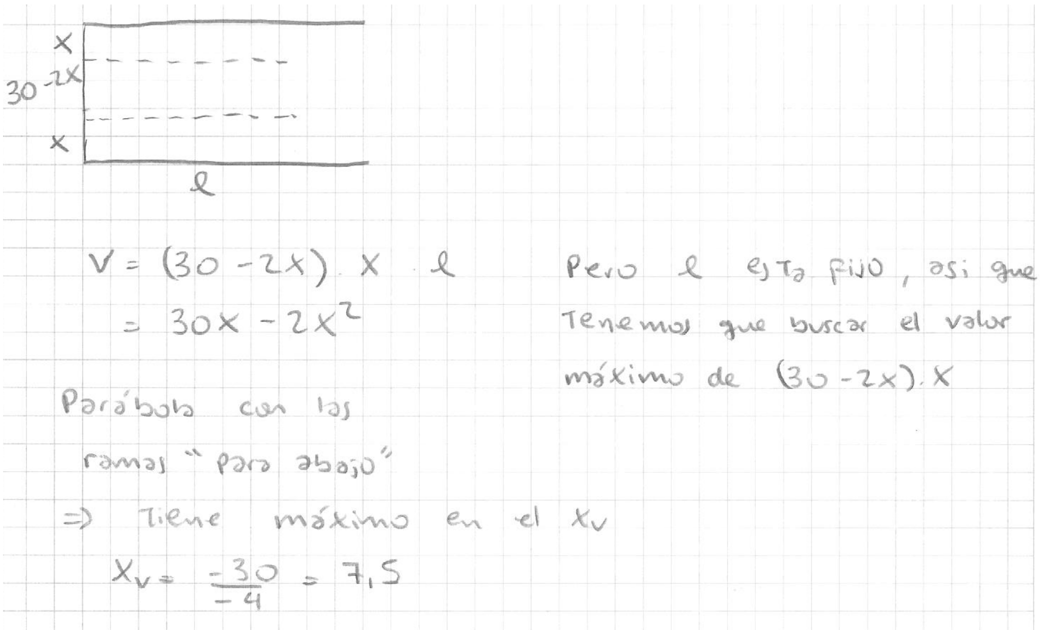


Figure 5 : une fonction quadratique, recherche du sommet.

Mais, dans les autres groupes, où l'enseignement n'a pas (encore) été standardisé, le travail sur ce type d'énoncés, les réponses sont très diverses. Tout d'abord il y a eu des réponses éloignées des attentes :

- Longueurs équitables des trois côtés, 10 cm chacun : 5 étudiants ;
- Il n'y a aucune variation, tout est constant : 4 étudiants ;

- Un pliage extrême, le plus petit (voire plus grand) côté latéral possible, mais avec la contrainte d'avoir des côtés latéraux de longueurs non nulles pour que l'eau restent dans la gouttière : 5 étudiants ;
- Un étudiant, L27, propose une pyramide sans comprendre la géométrie de l'énoncé (pour avoir un tuyau ?) ;
- Un étudiant, 1PC24, dessine le toit en expliquant la force de l'eau qui coule.

La plupart des autres étudiants (surtout de 1PC et 2PC) ont dessiné des sections de la gouttière en calculant des valeurs et en s'approchant par essais-erreurs de la solution. Ils en restent essentiellement à la géométrie et au calcul de grandeurs. Mais quelques autres (tous de L3) ont eu un travail intéressant, efficace, correct et divers (voir annexe). On peut alors, à partir du travail mathématique effectué, faire des inférences sur les apprentissages en lien avec certains objets mathématiques puisque certains utilisent des fonctions, d'autres non, certains s'appuient sur des tables de valeurs ou des graphiques, avec un possible usage de la calculatrice.

Ainsi, selon l'institution où l'on se place, on peut avoir soit une diversité du travail mathématique, qui est donc à prendre en compte, soit une conformité à un travail standard, sans doute inévitable, dans une certaine mesure, pour une institution.

En conséquence la question de savoir comment choisir et comment faire vivre un travail mathématique se pose. Un travail mathématique qui soit utile, faisable, consistant, permettant les apprentissages. La théorie des ETM donne des pistes et, surtout, des moyens d'action pour enrichir, affiner, améliorer l'enseignement et, on l'espère, l'apprentissage.

Discussions et questions ouvertes[8]

Pour étudier le travail mathématique, on élabore une théorie qui permet d'identifier le travail mathématique à l'aide des Espaces de Travail Mathématique. Des choix sont faits, guidés par les observables produits au cours du travail mathématique. L'ETM est ainsi un nouvel objet, produit de la didactique, qui a pour ambition l'étude du travail mathématique.

Mais une question cruciale se pose : L'ETM est-il fidèle au projet initial de comprendre le travail mathématique ?

On peut commencer par se poser la question de la qualité des données. Dans notre premier exemple, la chronologie pourrait-être mieux cernée par des données vidéos. Ainsi, pour le tracé de la droite d1, avec une vidéo on pourrait vraisemblablement identifier si ce tracé était motivé pour la justification ou pour la mesure. Des interviews permettent également d'avoir des éléments supplémentaires. Mais ce discours est différé, comme le discours de Francis pendant la mise en commun (cf. ci-dessus et la section sur « une méthode d'analyse du travail personnel des élèves en géométrie » en page 103 de ce

[8] Dans cette section, j'expose des idées et des questions que je me pose personnellement, j'utilise donc la première personne.

cahier), et, de plus, cela ne peut pas être suffisant de manière systématique. Il y aura toujours des limitations, des zones d'ombre[9].

D'un autre côté, le choix des éléments considérés dans les ETM entraîne inévitablement des limites à la théorie. Mais d'une part, ces éléments constitutifs de la théorie sont suffisants pour de nombreuses études, la théorie est suffisamment complète et opérationnelle pour rendre intelligible le travail mathématique. Et d'autre part, dans le cas où un élément supplémentaire serait à considérer, rien n'empêche de l'intégrer dans l'étude, la théorie des ETM est suffisamment souple pour cela.

La question de l'apprentissage est, évidemment, importante. Dans les deux exemples précédents, l'analyse systématique du travail mathématique par la théorie des ETM permet de dégager des résultats en termes d'apprentissage. Mais il s'agit de résultats généraux, provenant de ce qu'un étudiant montre de son ETM personnel à un moment donné, sur une tâche donnée. Il est possible de dépasser ce caractère statique en étudiant l'évolution de l'ETM avec le temps et en diversifiant les tâches.

Mais je pense que les ETM permettent d'aborder plus finement la question de l'apprentissage. Il est en premier lieu assez naturel de penser aux genèses, puisque c'est à travers les genèses que la théorie prend en compte l'évolution des ETM personnels. Plus généralement, il me semble que les interactions entre les éléments de l'ETM jouent un rôle dans l'apprentissage. Il faudrait étudier l'influence de ces interactions dans l'apprentissage. Il s'agit d'une question difficile que l'on pourrait aborder par le travail mathématique et l'élaboration de tâches spécifiques. On pourrait alors tenter de provoquer certaines interactions entre les composants de l'ETM afin de favoriser un certain type de travail. Il reste la question des liens entre travail mathématique et apprentissage.

Et si l'on en revient aux genèses, il me semble qu'il y a un manque de compréhension de ce qu'elles sont. On les utilise dans les analyses, mais qu'est-ce qu'une genèse ? Je pense qu'un rapprochement entre la théorie des ETM et la TA-DM (Théorie l'Activité en Didactique des Mathématiques, voir le texte de Vandebrouck de ce cahier) permettrait de mieux comprendre la nature des genèses, de mieux les définir.

On peut en effet penser qu'un tel rapprochement serait possible, et c'est un souhait personnel, en particulier pour les indices suivants :

- En TA-DM, on ne s'intéresse pas seulement à la production finale mais aussi aux activités mathématiques autour de cette production, pour ensuite inférer des apprentissages possibles. Ainsi, dans les deux théories, on considère, avec une centration sur les tâches (Flores González, 2019), la dualité processus/but à atteindre. Mais il est à noter que la visée de la TA-DM est d'atteindre les apprentissages, la théorie des ETM pourrait s'enrichir de cette visée (cf. ci-dessus les questions sur l'apprentissage).

---

[9] Ces restrictions ne sont pas propres à la théorie des ETM et sont des limitations qui sont prises en compte dans l'analyse cognitive de tâches.

- Les deux théories s'intéressent à la richesse : des activités provoquées par l'enseignant et du travail mathématique.
- Les actions sont au centre des deux théories (récemment dans les ETM avec le travail de Kuzniak et Nechache) et permettent d'identifier soit l'activité mathématique, soit le travail mathématique.
- La notion d'activité peut-elle permettre d'expliquer le fonctionnement du diagramme dans les analyses du travail mathématique d'un sujet ? et plus spécifiquement la nature des genèses ?
- La notion d'ETM peut-elle aider à mieux structurer les analyses en TA-DM ? comme par exemple la notion de relief, avec la prise en compte des dimensions de l'ETM, en système (par exemple, en TA-DM, pourquoi la dimension instrumentale n'apparaît-elle pas explicitement dans le relief ?).
- Les itinéraires cognitifs, la conversion en activités mathématiques des scénarios d'enseignement, sont en général hors d'atteinte, car trop complexe à expliciter. Mais l'idée est proche de la notion d'ETM idoine. Cette notion d'ETM idoine constitue-t-elle un intermédiaire possible, atteignable de manière raisonnable et progressive.
- Peut-on voir un lien entre la conceptualisation visée et l'ETM de référence ?

Références

Duval, R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques ?, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 16.3, 349–382.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 10, 5 -53.

Flores González, M. (2019). L'activité et le travail mathématique dans une tâche géométrique, In Vivier, L., Montoya Delgadillo, E., Richard, P. R., Gómez-Chacón, I., Kuzniak, A., Maschietto, M. & Tanguay, D. (Eds). (2019), *Actas del Sexto Simposio sobre el Trabajo Matemático* (ETM6, 13-18 de diciembre 2018). Valparaíso, Chile: Pontificia Universidad Católica de Valparaíso 533-543.

Gómez-Chacón, I., Kuzniak, A. & Vivier, L. (2016). El rol del profesor desde la perspectiva de los Espacios de Trabajo Matemático, *Boletim de Educação Matemática – BOLEMA*, volume 30, número 54, 1-22.

Guzman, I. & Kuzniak, A. (Eds) (2006). Paradigmes géométriques et géométrie enseignée au Chili et en France. Une étude comparative de l'enseignement de la géométrie dans les systèmes scolaires chilien et français. Cahier de Didirem Spécial n°6, IREM Paris 7

Houdement, C. & Kuzniak, A. (1999). Un exemple de cadre conceptuel pour l'étude de l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres. *Educational Studies in Mathematics*, 40(3), 283–312.

Kuzniak, A., Tanguay, D. & Elia, I. (2016). Mathematical working spaces in schooling: an introduction. *ZDM*, 48(6), 721-737.

Kuzniak A., Montoya Delgadillo E., Vandebrouck F. & Vivier, L (2016). Le travail mathématique en analyse de la fin du secondaire au début du supérieur : identification et construction, In Y. Matheron, G. Gueudet & al. (Eds.), *Enjeux et débats en didactique des mathématiques. Actes de la 18e école d'été de didactique des mathématiques*, Brest, août 2015, 47-66, La Pensée Sauvage.

Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail Mathématique et ses genèses, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 16, 9-24.

Kuzniak, A. & Nechache, A. (2018). Le terrain d'Alphonse ou les infortunes de la mesure. 45e colloque de COPIRELEM, Blois, juin 2018

Montoya Delgadillo, E., Viola, F. & Vivier, L. (2017). Choosing a Mathematic Working Space in a modelling task: the influence of teaching. Dooley, T. & Gueudet, G.. (Eds.) (2017). *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME 10, February 1 – 5, 2017). Dublin, Ireland: DCU Institute of Education and ERME, 956-963.

Montoya Delgadillo, E. & Vivier, L. (2016). Mathematical Working Spaces and Paradigms as an analysis tool for the teaching and learning of analysis, *ZDM*, 48(6), 739-754.

Annexe : quelques productions d'étudiants pour le problème de la 'canaleta'

On va chercher le debit maximal de la gouttière

$Dmax = L \times l \times h$

$Dmax = (30-2x) \times 10 \times x$.

page 2/6

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Dmax	280	520	720	880	1000	1080	1120	1120	1080	1000	880	720

x	13	14	15
Dmax	520	280	0

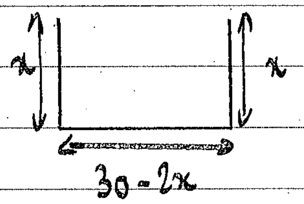
On remarque que le debit maximal est atteint pour un rebord compris entre 7 et 8 cm.

x	7	7,1	7,2	7,3	7,4	7,5	7,6	7,7	7,8	7,9	8
Dmax	1120	1121,8	1123,2	1124,2	1124,8	1125	1124,8	1124,2	1123,2	1121,8	1120

Pour avoir un debit maximal, les bords doivent mesurer 7,5 cm chacun.

Figure 6 : utilisation d'une formule (pas explicitement une fonction), tabulation de 1 en 1 puis de 0,1 en 0,1 entre 7 et 8.

On ne connait pas exactement la longueur de la gouttière. Intéressons-nous alors à l'aire de l'eau lorsqu'on coupe la gouttière transversalement.

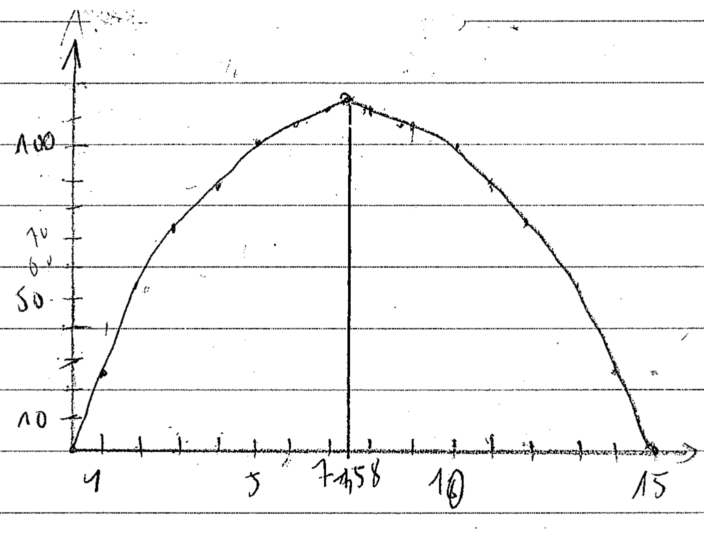


Aire = $(30-2x) \times x$.

$f(x) = (30-2x)x$

On a $x \in]0,15[$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$f(x)$	0	28	52	72	88	100	108	112	112	108	100	88	72	52	28	0



$x = 7,5$. $f(x) = 112,5$

$x = 7,5$ est la longueur du rebord pour avoir un débit maximum.

Figure 7 : utilisation d'une fonction, tabulation de 1 en 1, représentation graphique.

On peut alors poser la fonction f qui à la longueur du repli x va associer la surface de la "tranche" telle que :

$$\forall x \in (0,15) \,,\; f(x) = (30-2x).x$$

On peut approcher la valeur maximale en calculant :

$f(0) = f(15) = 0$ cm²
$f(1) = f(14) = 28$ cm²
$f(2) = f(13) = 52$ cm²
etc...
$f(7) = f(8) = 112$ cm²

On remarque uno symétrie dans les valeurs de $f(x)$ lorsque x varie entre 1 et 15. On en déduit que le maximum est au milieu des valeurs, soit :

$$f_{max}(x) = f(7{,}5) = 112{,}5 \text{ cm}^2$$

Figure 8 : introduction d'une fonction (formalisée), calcul des valeurs de 1 en 1, remarque d'une symétrie pour répondre.

On cherche donc ce volume maximal.
$V(x) = ax(30-2x)$ et on fixe $a = 200$ cm
donc on a $V(x) = 200x(30-2x)$

$$V(x) = 6\,000x - 400x^2 = x(6000-400x)$$

Avec la calculatrice, on trace cette fonction polynômiale de degré 2. Il semblerait que le maximum soit atteint pour $x \simeq 7{,}5$ cm et que le volume maximal vaille $V \simeq 22\,500$ cm³. Essayons de trouver la valeur exacte de x.

$$V(x) - V(7{,}5) = x(6\,000-400x) - (7{,}5(6\,000-400\times 7{,}5))$$
$$= x(6000-400x) - [45\,000 - 22\,500]$$
$$= x(6000-400x) - 22\,500$$
$$= -400x^2 + 6000x - 22\,500$$
$$= -(400x^2 - 6000x + 22\,500)$$
$$= -(20x - 150)^2$$

Figure 9 : utilisation d'une fonction, conjecture à la calculatrice graphique, justification algébrique en appui sur un principe variationnel.