

Regards croisés sur le travail mathématique en contexte éducatif

Alain Kuzniak¹ et Assia Nechache²

¹Université de Paris, LDAR (EA 4434), France

²CY Cergy Paris Université, LDAR (EA 4434), France

L'analyse et le développement du travail mathématique en contexte éducatif sont au centre des préoccupations des chercheurs en didactique des mathématiques proches de la théorie des ETM. Ces études supposent nécessairement une réflexion sur la notion même de travail mathématique dans le cadre des ETM mais il est également intéressant de savoir si cet objet d'étude a un sens dans d'autres cadres théoriques. Par ailleurs, la définition du travail mathématique nécessite une prise en compte d'autres notions renvoyant à l'idée de travail et qui sont couramment utilisées en didactique des mathématiques comme action, activité, pratique, praxis, etc.

L'objet de cette thématique est de profiter d'éclairages croisés et complémentaires sur la notion de travail mathématique en didactique des mathématiques à partir de trois théories qui ont certainement des parentés profondes au-delà de leur présence dans le même laboratoire de recherche ou d'affinités personnelles. Luis Radford et Fabrice Vandebrouck présentent des éléments clés de leurs approches théoriques respectives, la théorie de l'objectivation (TO) et la théorie de l'activité en didactique des mathématiques (TA-DM). Ils proposent aussi leur propre interprétation du travail en général et de la place des mathématiques dans le cadre de leurs approches théoriques respectives. De son côté, Laurent Vivier développe la portée et l'usage du travail mathématique dans le cadre de la théorie des ETM.

Trois questions pour introduire le débat

En guise d'introduction aux trois conférences, nous avons proposé les trois questions suivantes relatives au Travail Mathématique dans l'institution scolaire.

En adoptant une perspective didactique, quel sens attribuer au travail mathématique dans l'institution scolaire ?

Quel sens retenir dans une perspective didactique pour des termes comme action, activité... ?

Comment les notions de travail mathématique, d'activité et d'action interviennent elles dans nos recherches ?

Dans la suite, nous précisons ces questions et abordons un dernier point, en relation avec la troisième question, qui a fait l'objet de discussion pendant les journées à savoir :

Quelles proximités et complémentarités entre les trois approches théoriques peut-on envisager ?

Introduction sur le travail et les mathématiques.

La notion de travail mathématique est centrale dans la théorie des ETM et naturellement rien ne garantit a priori cette même prééminence dans la TO et la TA. D'ailleurs, nous verrons que Luis Radford et Fabrice Vandebrouck préfèrent commencer par préciser leur définition et leur usage de la notion d'activité plutôt que de partir de l'idée de travail mathématique. C'est seulement dans un second temps qu'ils s'intéressent à la notion de travail d'ailleurs pas forcément connecté aux mathématiques. Comme le signale Vandebrouck, cela vient peut-être du fait que la théorie des ETM est une théorie prioritairement inscrite dans la didactique des mathématiques alors que la TA comme la TO ont une vocation plus générale : la TA n'est pas a priori une théorie didactique et il s'agit pour ses tenants de voir comment elle peut s'appliquer à une activité particulière comme celle de faire des mathématiques dans le cadre d'un apprentissage de cette discipline. De son côté, comme le précise Radford, la TO intègre pleinement la question de l'enseignement et de l'apprentissage, il est par contre moins net de voir la spécificité mathématique qui la guide.

Une fois ces préliminaires énoncés, engageons-nous dans un effort de clarification terminologique autour de l'idée de travail mathématique en étant conscient que cette question préoccupe, a priori, davantage la théorie des ETM et que l'approche que nous allons proposer privilégie notre regard sur cette notion.

Sur les mathématiques

La notion de travail mathématique doit être prise dans sa globalité syntaxique qui relie étroitement travail et mathématiques. Nous commençons notre discussion par la partie sans doute la plus facile, et en tout cas la moins politique, celle en relation avec l'épistémologie des mathématiques.

Comme dans nos présentations antérieures¹, nous nous référerons à l'approche de Thurston dans son article « On proof and progress in mathematics » (1994) qui sert d'appui à de nombreux travaux contemporains sur la nature et la fonction des mathématiques (Hacking 2014).

Pour Thurston, la difficulté à définir les mathématiques tient au caractère essentiellement récursif de l'activité mathématique et il propose ainsi de les considérer comme le plus petit sujet satisfaisant aux conditions suivantes :

- Les mathématiques incluent les nombres entiers et la géométrie du plan et des solides ;
- Les mathématiques sont ce que les mathématiciens étudient ;
- Les mathématiciens sont ces êtres humains qui font avancer la compréhension humaine des mathématiques.

L'intérêt premier de cette approche est de présenter les mathématiques comme le résultat d'une action humaine en constante évolution. Il ne sera possible d'accéder à ce travail qu'en le faisant et en y ajoutant sans cesse de nouvelles notions. Le parcours de l'élève ou de l'étudiant devra suivre cette

¹ Kuzniak, Tanguay et Elia (2016).

incertaine genèse d'une pensée qui se nourrit de chacune de ses expériences antérieures. Par chance, son chemin sera doublement balisé d'une part par le travail antérieur de tous les mathématiciens qui l'ont rendu praticable et compréhensible mais aussi par celui de ses enseignants qui vont en aménager les accès et l'aider à constituer son propre travail mathématique.

Sur le travail

Le philosophe Fuchs² (2016) attire notre attention sur la question du sens du mot travail dans différentes langues indo-européennes en soulignant la distinction qui existe en anglais entre *work* et *labor* et en allemand entre *Arbeit* et *Werk*. Il souligne le fait que tandis que la racine étymologique de termes tels que *work* ou *werken* est créer, agir, faire, celle des mots tels que *labor* et *Arbeit* est esclavage, peine et misère (Fuchs, 2016 p. 17). Cette distinction étymologique se retrouve également en français entre d'une part la noblesse du terme *ouvrier* associé à l'idée d'*oeuvre* (l'opus latin) et d'autre part le dur et pénible *labeur*. En français, l'origine du mot travail avec son sens actuel est controversée et ne renvoie pas aux mêmes racines indo-européennes. Le terme est plus récent et il s'est répandu à la fin du Moyen-Age en relation avec le christianisme, il est même pour certains lié aux premières formes du capitalisme naissant. Le mot travail semble posséder en français les deux significations recouvertes par *work* et *labor* et, par ailleurs, le mot *labeur* est aujourd'hui rarement utilisé en français, par exemple, l'équivalent du Labor Day est la fête du travail.

Fuchs, qui suit ici Marcuse, considère que le travail est une activité sociale qui transforme la nature humaine et sociale (la culture) de telle sorte que de nouvelles valeurs émergent pour satisfaire les besoins humains. Ces besoins ne sont pas uniquement basiques comme la nourriture mais ils concernent aussi la reproduction sociale par la communication, l'apprentissage et l'éducation. Il propose aussi de considérer trois dimensions du travail : le travail comme processus inscrit dans la durée, l'effort et une certaine permanence ; le résultat du travail qui pourra être vu comme une œuvre ; la finalité et les enjeux du travail qui seront précisément, dans notre cas, mathématiques.

Dans la suite, il nous semble essentiel de considérer dans le travail la différence entre aspect processus et aspect résultat. L'aspect processus est en relation avec la conformité avec des règles, des manières de faire et des manières de penser. L'aspect résultat renvoie à la correction de ce travail d'un point de vue plus mathématique.

Articuler travail et mathématique

Dans son ouvrage sur une philosophie du style, Granger (1963) est, à notre connaissance, un des premiers auteurs qui ait précisé une notion générale de travail scientifique et mathématique. Ce dernier est introduit de manière très abstraite comme la mise en correspondance d'une forme à un contenu. Les mathématiques sont au cœur de cette transformation qui passe par une mise en forme basée sur des règles et la communication entre pairs. Granger relie les résultats produits par le travail mathématique aux contenus et les processus aux structures et formes engendrées par ce travail.

² Philosophe marxiste anglais d'origine allemande.

L'abstraction du travail mathématique peut alors conduire à regarder ces formes et structures comme l'essence de ce travail. Le travail mathématique est ainsi une forme de travail intellectuel particulièrement marquée par la rationalité inhérente aux mathématiques.

Le travail mathématique que nous souhaitons définir et étudier se développe en contexte scolaire d'apprentissage. Ce développement s'appuie sur les interactions, plus ou moins riches, entre un professeur et des élèves et on peut le considérer de différentes façons dépendantes de choix théoriques et idéologiques sur l'apprentissage. Cependant, en nous plaçant dans ce que Brousseau (1997) désigne comme des contrats didactiques forts, nous pouvons supposer que le but des enseignants est de conduire leurs élèves vers un travail mathématique personnel le plus en adéquation possible avec le travail mathématique attendu par l'institution. Ce chemin progressif vers l'adéquation la plus grande possible est ce qui correspond dans la théorie des ETM à l'ETM *idoine* qui est mis en place par le professeur en synergie avec ses élèves.

Quel sens retenir dans une perspective didactique pour des termes comme action, activité... ?

Dans cette partie, la difficulté particulière que nous rencontrons est cette fois liée au fait que la notion d'activité est au cœur de la TO et de la TA-DM en symétrie avec l'importance du travail dans la ThETM. L'emploi du terme « activité » en ThETM n'est pas spécifique et il renvoie au sens commun du terme sur le fait d'agir. Son seul emploi particulier relève de l'enseignement où une *activité* désigne ce que le professeur peut proposer à ses élèves pour leur permettre d'agir. Pour être plus précis et, dans la lignée de la TSD, ce type d'activité pourra être conçue comme une situation didactique avec toutes les conséquences théoriques et pratiques que cela implique. Dans le cadre théorique des ETM, les questions portent plutôt sur le lien entre travail et activité. Pour la TO et la TA-DM, il en va différemment puisque cette fois la nécessité d'être le plus précis dans l'emploi du terme activité est cruciale pour un développement cohérent des deux théories. Dans la suite de cette présentation, il faudra garder à l'esprit cette différence initiale entre les trois théories.

Action et activité

Indépendamment de ce que nous venons de dire, une approche complète de tous les termes précédents avec leur fonction renvoie à des champs disciplinaires fort variés comme la philosophie, la psychologie, la sociologie et bien sûr la didactique en relation avec l'éducation. Dans un petit ouvrage publié en 2005, Bronckart propose une vision synthétique et relativement complète de tous ces aspects en relation avec notre questionnement. Tout d'abord, il introduit l'*agir* pour désigner (id. p. 81) « toute forme d'intervention orientée d'un ou plusieurs humains dans le monde ». L'*agir* peut constituer un travail dont la structure peut être décomposée en tâches, et temporellement, en une chaîne d'actes ou de gestes. Il conclut son ouvrage en proposant (p. 82) une articulation entre action et activité originale. Pour lui, l'activité désigne « une lecture de l'agir impliquant les dimensions motivationnelles et intentionnelles mobilisées au niveau collectif », et l'action correspond à « une lecture de l'agir impliquant les mêmes dimensions mobilisées au niveau des personnes singulières ».

Ainsi, pour Bronckart, l'activité renvoie au collectif, au social et l'action à l'individuel, les deux aspects étant articulés.

La proposition de Bronckart est intéressante mais elle ne résout pas un des problèmes majeurs que pose le terme « activité » dans le domaine de la didactique qui est son caractère général, polysémique et son emploi dans les contextes les plus variés. Luis Radford et Fabrice Vandebrouck proposent tous les deux une clarification terminologique sur « activité » en revenant à l'origine de l'emploi de ce terme dans les théories russes de l'activité, théories qui prennent elle-mêmes appui sur l'emploi par Marx et Engels du terme *activité* en relation avec le travail humain dans la société capitaliste. En allemand comme en russe, il existe deux mots pour rendre compte de la différence entre l'activité comme simple agir et occupation et l'activité comme source profonde d'enrichissement intellectuel et esthétique. Radford nous indique que le terme pour désigner le premier type d'activité est Aktivität (en allemand) et aktivnost' [активность] (en russe). Pour désigner le deuxième type d'activité, il existe Tätigkeit (en allemand) et deyatelnost' [деятельность] (en russe)³. Ces termes (Radford) font référence à l'activité conçue comme un système dynamique axé sur la satisfaction des besoins collectifs. Ces deux sens sont recouverts en français (mais aussi en anglais et espagnol entre autres) par le seul terme activité qui tend à confondre les deux aspects.

Pour rendre compte de ces différences, Fabrice Vandebrouck propose un jeu subtil, et difficile à tenir avec constance⁴, entre activité (avec un a minuscule) pour le premier sens et Activité (avec un A majuscule) pour le second. En se référant à Léontiev (1984), il reprend la distinction entre l'activité avec un motif et l'action avec un but de façon à distinguer activité et action. Il précise aussi que la théorie de l'activité dans la tradition de l'école française est une théorie du sujet agissant dans un but précis, éprouvant un besoin (motif ou mobile de l'activité). Il donne aussi un caractère individuel à l'action qui correspond alors aux actes extériorisés observables du sujet individualisé.

Retenir les termes allemands ou russe pour le seul second sens aurait une certaine logique mais Radford ouvre une autre voie pour permettre une traduction et à la suite d'un raisonnement, il peut conclure :

Dans la TO, c'est donc « travail » le terme qui traduit en français le sens dialectique-matérialiste de la Tätigkeit pour désigner l'activité d'apprentissage. Il constitue la catégorie centrale de la TO et affirme le rôle ontologique et épistémologique fondamental de la matière, du corps, du mouvement, de l'action, du rythme, de la passion et de la sensation dans ce que c'est d'être humain.

Cependant, un des risques de l'usage du terme « travail » est qu'il peut induire une dépendance à l'idée d'aliénation. Or ce que souhaite Radford, c'est au contraire promouvoir dans la classe une

³ Il faut noter que Tätigkeit et deyatelnost' sont plus fréquents au singulier que Aktivität et aktivnost' alors que c'est le contraire au pluriel.

⁴ Il ne s'agit pas ici d'une critique de l'approche proposée mais un simple constat de notre difficulté à entrer dans ce jeu.

forme de travail qui s'éloigne de l'enseignement classique avec un rapport professeur élève justement non aliénant, pour aller au-delà de cette forme il développe l'idée de *travail conjoint*.

Travail : tâche et activité

Pour Leplat (2004) qui cite Leontiev, d'un point de vue psychologique, « le travail est une activité », « une activité essentiellement humaine, originellement sociale, fondée sur la coopération d'individus laquelle suppose une division technique (...) des fonctions du travail ». Il ajoute ensuite que l'analyse du travail nécessite de distinguer mais aussi d'articuler : tâche et activité. Il précise que la tâche c'est le but à atteindre et les conditions dans lesquelles elle doit être réalisée tandis que l'activité c'est ce qui est mis en œuvre par le sujet pour exécuter la tâche. D'une certaine manière, la tâche pourra être reliée aux résultats du travail avec un but, qui « peut être défini par un ou plusieurs critères, qui permettront de définir la performance » (Leplat, p. 102). L'activité relève davantage des modalités et des processus mis en œuvre par un sujet pour réaliser le travail.

Dans la théorie des ETM, un lien similaire entre le travail et l'activité d'un sujet confronté à une tâche est établi et le travail est considéré comme un ensemble d'actions organisées et finalisées ce qui permet de retrouver la dualité du travail entre processus de travail et résultats ou produits du travail.

En TA-DM, l'activité permet le fonctionnement des connaissances et elle sera également en appui sur des tâches. Citant Rogalski (2008), Vandebrouck précise que la tâche est du côté de la situation et que l'activité est du côté du sujet.

Comment les notions de travail, d'activité et d'action interviennent elles dans nos recherches ?

Les théories mises en regard lors de cette journée sont toutes des théories à vocation didactique mais, comme le fait remarquer Vandebrouck à la fin de sa contribution, toutes n'entretiennent pas le même lien avec la didactique et avec les mathématiques. Du fait que nos recherches relèvent de la didactique des mathématiques, il convient de considérer l'usage des termes comme travail et activité en les mettant en regard de l'idée d'apprentissage et d'enseignement d'une discipline particulière qui a pour nom les mathématiques.

Cela passe par une réflexion sur la relation entre savoir et apprentissage et, ici, nous ne pouvons mieux faire que renvoyer à la présentation par Radford de cette question (ce cahier, p. 24 et 25). Après avoir identifié le savoir à un système de systèmes de pensée et d'action constitués culturellement et historiquement (ce cahier p. 25), il définit ce qu'il appelle l'*objectivation* comme une rencontre avec ces systèmes de pensée, les mathématiques étant l'un d'entre eux. Pour rendre cette idée plus opératoire, il ajoute :

(...) l'objectivation est un processus social, corporel, matériel et symbolique de prise de conscience du savoir, c'est-à-dire, des formes historiquement et culturellement constituées d'action, d'expression et de pensée.

Cette prise de conscience qui, dans la TO, sert à rendre compte de l'apprentissage n'est pas le résultat d'un processus propre à un individu ; c'est le résultat d'un processus *collectif* culturellement et historiquement situé qui, loin d'être contemplatif ou passif, demande l'*activation* des individus. À la place d'être un processus purement intellectuel, le processus d'objectivation est soutenu par le corps, l'affect, les émotions et le monde matériel.

Le *travail conjoint* permet alors à Radford de développer une approche éthique de l'apprentissage qui va bien au-delà des préoccupations usuelles de la didactique des mathématiques pour atteindre un idéal de développement humain et social.

Le travail conjoint. C'est un travail où les uns et les autres s'affirment dans leur production et se réalisent comme humains dans ce qu'ils font. Il ne s'agit pas de l'éthique de l'obéissance. Il ne s'agit pas non plus de l'éthique constructiviste de la liberté et de l'autonomie de l'élève, mais de ce que nous avons appelé une *éthique communautaire*, définie par la responsabilité, la solidarité et le soin de l'autre. (Radford, ce cahier, p. 36)

Cette conception de l'apprentissage nous évoque une certaine éthique du *care* et de la *sollicitude* que l'on peut aussi entrevoir dans la TA-DM qui s'intéresse particulièrement à la relation en situation de classe avec un rôle déterminant donné à l'enseignant. Celui-ci accompagne le développement de l'élève et il doit prendre idéalement *soin* des élèves à travers des remédiations, des proximités et un balisage des tâches (entre activités a minima et activités a maxima).

Redescendons par degré à des considérations sans doute plus prosaïques et moins ambitieuses sur l'enseignement et l'apprentissage en les reliant de manière plus contingente aux mathématiques.

Dans le cadre de la didactique des mathématiques, Vandebrouck juge nécessaire de repenser l'idée de la conceptualisation dans l'action (Vergnaud, 1996) pour spécifier son adaptation de la théorie de l'activité au contexte scolaire à l'apprentissage des mathématiques. Il lui apparaît aussi indispensable de spécifier les activités mathématiques aux situations scolaires car cette spécification n'est pas présente dans le cadre général de la théorie de l'activité. Pour cela il indique :

Nous avons donc choisi de retravailler cette notion d'activités mathématiques des élèves (ou plus rapidement leurs activités) afin de développer une méthodologie d'identification des activités à partir des analyses contextualisées des tâches et des déroulements dans la classe.

A nouveau, à titre personnel, je préfère donc l'idée que les activités mathématiques – des élèves - sont « ce qui pilote, et est piloté par, le niveau des actions des élèves et du professeur dans la classe », à partir des tâches mathématiques prescrites et des déroulements organisés (Robert, 1998 ; Vandebrouck, 2008).

Cela le conduit à préciser ses méthodes d'étude des activités mathématiques dans un cadre didactique qui s'intéresse à la fois aux actions des élèves et à celles des professeurs :

Les activités mathématiques des élèves sont donc étudiées en relation avec les actions (et donc les activités) du professeur – discours, gestes... - et plus généralement tout le contexte de la situation (toutes les « médiations », interactions/rétroactions dans la classe). On utilise souvent du matériel

de vidéos tournées dans les classes (ordinaires). Sont mobilisés également dans la mesure du possible des entretiens des acteurs pour avoir accès à la composante personnelle de leur activité (élèves et professeurs), mais aussi pour avoir les éléments de contexte (place de la séance étudiée dans un scénario notamment...)

Dans la théorie des ETM, la centration sur le travail mathématique induit de fait une approche qui est liée à la typologie des tâches données (ou effectuées) en relation avec une typologie du travailleur sujet. Celui-ci pouvant être confronté à un rôle de tâcheron, de technicien ou d'ingénieur (voire de mathématicien) (Nechache, 2017) en fonction de ce qu'il rencontre. Là encore tâche et activité sont essentielles pour observer, développer voire transformer le travail mathématique. Ce travail dépend finalement des enseignants ou de la société qui déterminent un type de fonctionnement didactique particulier (constructiviste, transmissif, imitatif, conditionné, etc.). La relation entre les processus et les résultats du travail dépend fondamentalement de choix socio-économiques et aussi éthiques qui peuvent conduire à privilégier des formes de travail mathématique radicalement différentes.

La particularité du travail mathématique est d'être principalement un type de travail intellectuel qui suppose une activité cognitive importante et comme le souligne Leplat (2004), les activités cognitives étant inobservables, elles doivent être induites à partir d'actions observables. C'est pour cela que dans les ETM, l'observation des activités et actions en relation avec la tâche donnée aux élèves va également être essentielle. Comme le résumait Kuzniak et Nechache (2020) pour préciser leur méthodologie :

Dans notre recherche, l'analyse cognitive utilisée a pour objectif de reconstituer les principaux épisodes planifiés par l'étudiant pour réaliser la tâche qui lui a été prescrite. Chaque épisode correspond à une sous-tâche auto-prescrite par l'étudiant dans sa planification de la réalisation de la tâche. Le repérage des actions mathématiques qui constituent chaque épisode permet de les décrire.

Comme l'indique Vivier, les actions sont au centre des deux théories (ETM et TA-DM) et permettent d'identifier soit l'activité mathématique, soit le travail mathématique.

La relation entre les trois théories : Comment se complètent-elles ?

Du fait de l'organisation de ces journées par le groupe des ETM, les réflexions autour des échanges possibles entre les théories ont été concentrées sur la double relation TO-ThETM et ThETM-TDAM. Cependant, on peut souligner, comme le fait Radford, qu'il y a une convergence générale dans l'idée que la production des mathématiques et leur apprentissage reposent sur un agir, sur une activation des individus.

Des liens entre la TO et la ThETM

Radford s'interroge sur la place du contenu mathématiques derrière l'idée de travail conjoint. De manière plus précise, il estime que :

Les deux théories (la TO et la ThETM) se tournent du côté du travail, l'une « in order to identify precisely the meaning of mathematics when it is considered through the idea of work » (Kuzniak et Vivier, 2019, p. 3073), l'autre pour comprendre l'apprentissage des mathématiques.

Il relie alors les deux théories en se posant la question du contenu spécifique (en l'occurrence, le contenu mathématique) dans le concept d'apprentissage et le concept de travail conjoint de la TO.

S'il est vrai qu'il y a une analyse épistémologique derrière les tâches mathématiques proposées aux élèves dans la TO, l'analyse épistémologique menée à l'intérieur de la Théorie des Espaces de Travail Mathématique apporte une profondeur et des nuances qui ne peuvent que jeter un éclairage important sur ce qu'un certain contenu culturel implique par rapport à son apprentissage.

Réciproquement, il estime que la TO permettrait d'ouvrir des pistes de recherches pour comprendre la communication et l'interaction qui entourent l'apprentissage des mathématiques dans la Théorie des Espaces de Travail Mathématique. La TO apporte un éclairage particulier par rapport à l'apprentissage et à sa nature culturelle, sociale et collective.

Des liens entre TA-DM et ThETM

Comme le souligne Vandebrouck, les ressemblances et les parentés entre les deux théories sont nombreuses et assurent cette sensibilité épistémologique dont parle Kidron (2016) et qui semble un préalable à tout échange réellement fructueux. Il pointe trois directions :

- Le centrage sur le fonctionnement d'une classe ordinaire en essayant d'être au plus près des conditions réelles d'enseignement et d'apprentissage.
- L'importance accordée aux aspects épistémologiques dans la tradition française de la didactique des mathématiques.
- La place tout aussi importante accordée à la dimension cognitive dans les processus d'apprentissage des mathématiques.

A chaque fois la structuration de ces points dans les deux théories diffère et passe par une organisation différente. Par exemple pour lui :

Les activités mathématiques sont des processus cognitifs, intermédiaires entre les actions de élèves et l'apprentissage mathématique. Tandis que dans la modélisation proposée de l'ETM, le plan cognitif est en relation avec le plan épistémologique selon les trois dimensions sémiotique, instrumentale et discursive.

Les deux théories se retrouvent dans l'importance accordée aux tâches et aux actions nécessaires pour les mener à bien. Comme le signale Vivier :

Les actions sont au centre des deux théories et permettent d'identifier soit l'activité mathématique, soit le travail mathématique.

Et Vandebrouck affirme que :

Si le travail est décrit dans un ETM en termes d'activations, de genèses, de circulation, on ne peut statuer sur ces éléments qu'en analysant les activités des élèves comme intermédiaires entre les actions et les activations, les genèses, les circulations. Les genèses et les circulations sont des mises en relations entre le plan épistémologique et le plan cognitif. Elles embarquent donc non seulement des actions mais aussi des non actions, des choix.

Vivier reprend cette idée de l'importance des genèses pour comprendre la question de l'apprentissage :

Mais je pense que les ETM permettent d'aborder plus finement la question de l'apprentissage. Il est en premier lieu assez naturel de penser aux genèses, puisque c'est à travers les genèses que la théorie prend en compte d'évolution des ETM personnels. Plus généralement, il me semble que les interactions entre les éléments de l'ETM jouent un rôle dans l'apprentissage.

Et si l'on en revient aux genèses, il me semble qu'il y a un manque de compréhension de ce qu'elles sont. On les utilise dans les analyses, mais qu'est-ce qu'une genèse ? Je pense qu'un rapprochement entre la théorie des ETM et la TA-DM permettrait de mieux comprendre la nature des genèses, de mieux les définir.

Enfin, il reste la question de l'articulation entre les actions du professeur et l'évolution du travail mathématique (des activités mathématiques) de l'élève. Vandebrouck pose la question de l'intégration dans la ThETM des actions de l'enseignant qui peuvent influencer sur les activités mathématiques (et donc le travail) des élèves. Et il pose cette question :

N'est-ce pas au niveau de l'étude de l'ETM idoine (ou « partagé ») que les deux théories ont le plus à communiquer au final ?

En effet, la qualité et la finalité du travail sont fonctions des tâches qui vont dépendre des enseignants pour leur conception et aussi des élèves pour leur réalisation avec *in fine* des formes de travail différentes. Mais, dans un contexte scolaire d'apprentissage, les tâches ne vivent pas seules et nécessitent un intermédiaire, c'est le professeur qui pourra piloter non seulement l'autonomie mais aussi d'initiative laissée à l'élève dans un ETM idoine

C'est cette fois la place de l'« enseignement » et de la qualité du travail qui sont questionnées dans les deux théories et Laurent Vivier fait remarquer que « les deux théories s'intéressent à la richesse: des activités provoquées par l'enseignant et du travail mathématique ».

Pour conclure : une interrogation sur *mathematics education* vs didactique des mathématiques.

Donner une place essentielle à la notion de travail sous différentes formes – travail conjoint ou travail mathématique – force à réinterroger la finalité et les conditions d'exercice de ce travail. La forte dimension éthique que donne la TO ou la dimension identitaire que proposent les ETM avec l'idée du travailleur-sujet renvoient toutes les deux à des choix sociétaux. De ce point de vue, et pour

dépasser l'opposition un peu simpliste de la didactique comme focalisée sur le seul contenu et une *mathematics education* tournée uniquement vers l'éducation, on peut reprendre la suggestion de Luis Radford⁵ d'une sorte d'expérience aux limites qui ne serait pas seulement une expérience de pensée et où nos équipes de recherche pourraient s'engager. Cette expérience pourrait être selon lui :

l'étude conjointe de situations d'apprentissage des mathématiques dans un contexte culturel assez différent de ceux sur lesquelles nos recherches respectives se sont penchées jusqu'à maintenant. On serait obligé de sortir de notre quotidienneté et de travailler conjointement et s'appuyer l'un sur l'autre et vice-versa pour produire du sens et essayer d'aller plus loin.

Cette approche nous semble de plus en plus nécessaire et essentielle dans le monde profondément inégalitaire, fracturé et fragile que la crise sanitaire mondiale a contribué à révéler.

Références

- Bronckart, J-P. (2005). *Une introduction aux théories de l'action*. Genève : Université de Genève.
- Brousseau, G. (1997). La théorie des situations didactiques. Cours donné lors de l'attribution à Guy Brousseau du titre de Docteur Honoris Causa de l'Université de Montréal.
- Fuchs, C. (2016). *Critical theory of communication: New Readings of Lukács, Adorno, Marcuse, Honneth and Habermas in the Age of the Internet*. London: University Press of Westminster.
- Granger, G. G. (1963). *Essai d'une philosophie du style*. Paris : Armand Colin, (rééd. Odile Jacob 1987).
- Hacking, I. (2014). *Why Is There Philosophy of Mathematics at All?* Cambridge: Cambridge University Press
- Kidron, I. (2016). Epistemology and networking theories. *Educational Studies in Mathematics*, 91(2), 149–163.
- Kuzniak, A. & Nechache, A. (2020). Développer un travail mathématique complet et conforme chez les étudiants de première année des master enseignement en France. *Revue de Mathématique pour l'école. (à paraître)*
- Kuzniak, A., Tanguay, D. & Elia, I. (2016). Mathematical working spaces in schooling: an introduction. *ZDM*, 48(6), 721-737.
- Kuzniak, A., & Vivier, L. (2019). An epistemological and philosophical perspective on the question of mathematical work in the mathematical working space theory. In U. Jankvist, M. van den

⁵ Luis Radford se démarque du courant dominant des « *Mathematics Education qui se sont développées autour des perspectives empiristes centrées sur l'élève ; ce sont les courants comme le constructivisme américain et le constructionisme anglais qui ont développé la Mathematics Education. Il a fallu que j'explique qu'en fait la TO émerge contre ces courants empiristes individualistes* ». Communication personnelle.

- Heuvel-Panhuizen, & M. Veldhuis (Eds.), Proceedings of the eleventh congress of the European society for research in mathematics education (pp. 3070-3077). Utrecht: ERME.
- Leplat, J. (2004). L'analyse psychologique du travail. *Revue européenne de psychologie appliquée*, 54, 101-108.
- Leontiev, A. (1984). *Activité Conscience Personnalité Moscou* : Editions du Progrès (1ère édition, 1975, en russe).
- Nechache, A. (2017). La catégorisation des tâches et du travailleur-sujet : un outil méthodologique pour l'étude du travail mathématique dans le domaine des probabilités. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* (22), 67-90.
- Robert, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18(2), 139-190.
- Rogalski, J. (2008). Le cadre général de la théorie de l'activité. Une perspective de psychologie ergonomique. Des compléments sur les théories de l'activité et du développement, pour l'analyse des pratiques des enseignants et des apprentissages des élèves. In F. Vandebrouck (Éd.) *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp 23-30 & pp 429-459). Toulouse : Octarès.
- Thurston, W. P. (1994). On proof and progress in mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 30(2), 161–177.
- Vandebrouck, F., & Robert, A. (2017). *Activité mathématique des élèves avec les technologies numériques : vers une théorie didactique de l'activité (TDA)*. Cahiers du Laboratoire de Didactique André Revuz (n°17), IREM de Paris : Paris.
- Vergnaud, G. (1996). Au fond de l'action la conceptualisation La théorie des champs conceptuels. In J-M. Barbier (Ed). *Savoirs théoriques et savoirs d'action*. Paris, Presses Universitaires de France