

LES CROQUIS ET LES REPRESENTATIONS GEOMETRIQUES DONNENT-ILS DU SENS ?

Chantal MENINI

Université de Bordeaux

chantal.menini@u-bordeaux.fr

Pascale SENECHAUD

Université de Limoges

pascale.senechaud@unilim.fr

Résumé

Les croquis que l'on fait dans un coin du tableau se veulent témoigner de l'idée que l'on veut transmettre : l'essentiel à un moment donné, en quelques coups de crayons. Il s'agit alors de représentation codée. Nous en proposons ici une première classification en fonction de leur usage. Nous l'illustrons avec des exemples, en tâchant de montrer la limite de ces représentations ou la difficulté que peuvent avoir les étudiants à les utiliser eux-mêmes.

Mots clés

Cercle trigonométrique, croquis, dessin, ensembles, équation, espace vectoriel, représentation graphique, valeur absolue

I. INTRODUCTION

Ce document présente un travail en cours au sein de la Commission Inter IREM Université [CIU]. Il s'agit d'analyser et d'essayer de comprendre l'impact des représentations que l'on utilise, quasiment inconsciemment parfois, pour transmettre une idée aux étudiants, plus particulièrement aux étudiants de premier cycle.

À partir d'exemples, nous avons entamé un travail d'analyse de la portée de tels croquis. Nous les avons classés selon l'usage que nous en faisons : croquis comme support d'une activité, croquis comme porteur d'une généralisation possible, ou encore favorisant l'émergence d'une image mentale.

Certains croquis peuvent appartenir à plusieurs classes. Les premiers croquis sur la notion de distance, par exemple, peuvent être abordés comme porteur de l'activité en cours, puis devenir une étape de généralisation de cette notion en topologie. Quant aux images mentales, nous associons plutôt cette dénomination aux croquis qui peuvent correspondre à une définition ou une propriété.

Notre travail s'appuie sur nos séances de cours et de travaux dirigés en première année. Il a pour objectif d'essayer d'accompagner l'introduction de notions abstraites tout en tentant de

mesurer le décalage qu'il peut y avoir actuellement entre ce que nous pensons transmettre et l'interprétation qui peut en être faite par les étudiants.

II. CROQUIS - SUPPORT POUR L'ACTIVITE MATHÉMATIQUE

1. Cercle trigonométrique

Le cercle trigonométrique est utilisé comme un outil pour mémoriser des formules trigonométriques. Mais quel est le plus économique, au sens gain de temps immédiat, pour les étudiants concernant des points repérés par θ et $\pi - \theta$ sur le cercle ? Reconnaître une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées et sa traduction sur les coordonnées ou mémoriser directement $\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$, $\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)$?

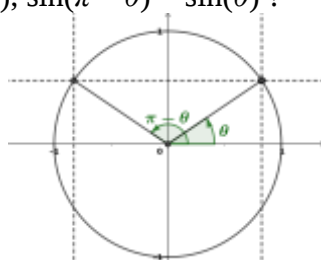


Figure 1 : Le cercle trigonométrique comme outil de mémorisation de formules.

On peut estimer que la symétrie, au moins par rapport aux axes de coordonnées, est naturelle car proche du monde sensible. Cependant viennent s'ajouter les obstacles connus de l'utilisation du cercle trigonométrique pour déterminer les valeurs de fonctions à partir de coordonnées d'un point repéré par une abscisse curviligne. Sans oublier les formules trigonométriques impliquant les angles $\theta + \frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2} - \theta$ pour lesquels les transformations utilisées n'ont jamais été vues.

Au niveau universitaire, en général, les enseignants ne prennent pas le temps de travailler à nouveau l'action des symétries sur les coordonnées et considèrent comme acquis l'enroulement de la droite sur le cercle. Même s'ils ont conscience de cette difficulté nouvelle, ils continuent de représenter le cercle trigonométrique et les symétries afin que les étudiants puissent s'approprier cet outil, qu'il devienne usuel et dans ce sens plus concret.

Le cercle trigonométrique est utilisé ensuite comme support de raisonnement, par exemple quand on cherche le signe de fonctions composées des fonctions trigonométriques. L'exemple suivant illustre, d'après nous, l'incompréhension de ce qu'est l'abscisse curviligne d'un point sur le cercle trigonométrique.

Dans le cours de première année (année 2016-2017) de la licence de mathématiques de Limoges, le chapitre introductif sur les courbes paramétrées a pour objectif de revoir les notions d'analyse vues au lycée. Un extrait d'exercice proposé en devoir surveillé est le suivant :

Soit la courbe C définie par le système d'équations paramétriques : pour $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x(t) = \sin(3t) \\ y(t) = \cos(t) \end{cases},$$

(...)

7) Sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ étudier la courbe le plus précisément possible : justifier en particulier la continuité et la dérivabilité des fonctions x et y , calculer les dérivées des fonctions x et y , dresser le tableau de leurs variations.

Figure 2 : Étude de signes pour une courbe paramétrée.

Ci-après une copie d'étudiant (en classe prépa intégrée au S1).

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	
$x'(t)$	3	+	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0
$x(t)$	0	↗ 1	↘ $\frac{\sqrt{3}}{2}$	↘ -1	
$y'(t)$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	
$y(t)$	1	↘ 0			

$3 \cos(3t) = 0 \quad \cos(3t) = 0 \quad \sin(3t) > 0$
 $3t = \frac{\pi}{2} \quad 3t < \frac{\pi}{2}$
 $t = \frac{\pi}{6} \quad t < \frac{\pi}{6}$

$f(t) = 0 \quad \sin(t) = 0$
 $t = 0$

Figure 3 : Réponse d'un étudiant.

Dans ce rendu, il est clair que l'étude du signe de $\cos(3t)$ n'est pas correctement menée. D'une part la recherche des points où s'annulent l'expression laisse penser que l'annulation d'une expression implique toujours un changement de signe. D'autre part, nous supposons que l'étudiant n'a pas compris que l'abscisse curviligne à prendre en compte est $3t$ et que lorsque t varie entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ alors $3t$ varie entre 0 et $\frac{3\pi}{2}$. À ce stade, il ne nous semble pas indispensable d'avoir recours au cercle trigonométrique comme support visuel. En revanche, l'étude du signe de $\cos(3t)$ et donc, l'étude du signe de l'abscisse d'un point d'abscisse curviligne $3t$, pourrait être correctement menée grâce à la visualisation du cercle trigonométrique.

Afin de faire des révisions sur ce thème nous avons adapté un document de la brochure « le B. A. BA des maths pour Sections de Technicien Supérieur [STS] » de l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques [IREM] de Clermont-Ferrand (Chazal et al., 2010, p. 40-43).

Nous le distribuons sans le travailler en séance, mais en conseillant aux étudiants de le faire chez eux. Cette modalité de travail n'est pas suffisamment efficace pour une partie d'entre eux. Le document pourrait sans doute leur permettre de s'appropriier le cercle

trigonométrique, s'il était travaillé en présentiel, au lieu de laisser les étudiants libres de le travailler ou non.

2. Distance

Il est nécessaire que la valeur absolue ne soit pas seulement vue comme une fonction mais aussi comme un réel permettant d'exprimer une distance. La représentation de la figure 4, doit être une concrétisation de l'inégalité $|x - a| \leq r$, qui prend tout son sens, pour parler de bande autour d'une valeur quand on parle de limite.

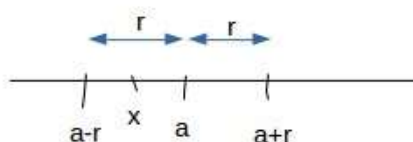


Figure 4 : Inégalité $|x - a| \leq r$.

Ici aussi nous ne pouvons plus nous appuyer sur les programmes de lycée pour cela ; du moins pour le moment puisque les programmes de seconde qui seront en vigueur à la rentrée 2019 réintroduisent la caractérisation de l'intervalle $[a - r, a + r]$ par l'inégalité $|x - a| \leq r$. Contrairement aux transformations sur le cercle trigonométrique, un rapide travail spécifique est fait ici que ce soit à Bordeaux ou à Limoges. Dans les deux exemples suivants (exercices donnés à Bordeaux) nous travaillons le lien entre valeur absolue, distance et intervalles. La représentation graphique est encouragée par un exercice tel que celui de la figure 5, qui va essayer de préparer aux bandes pour les limites.

1- Représenter graphiquement les ensembles E et F définis par

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \leq -3, y \geq 7\} ; F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / |x + 3| \leq 0,5, y \geq 7\}$$

2- Donner la définition des ensembles G et H dont la représentation graphique est

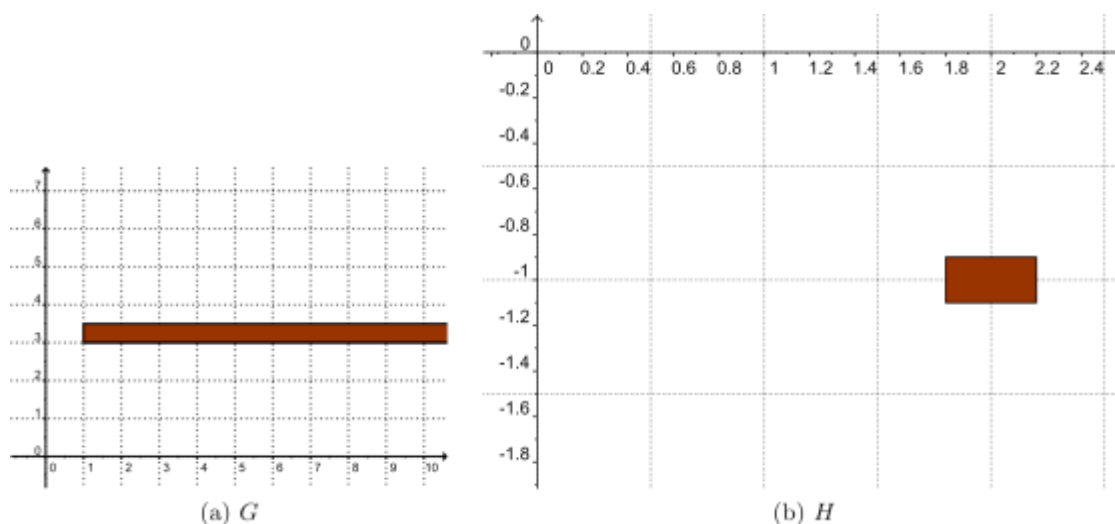


Figure 5 : Exercice préparatoire aux « bandes ».

Le dessin paraît en revanche avoir été oublié dans l'exercice de la figure 6 pour lequel on aurait envie d'ajouter une cinquième colonne ayant pour titre « croquis ».

Compléter le tableau suivant				
	valeur absolue	distance	intervalle	encadrement
	$ x - 3 \leq 1$			
		$d(x; -4) \leq 2$		
				$-2 \leq x \leq 2$
			$x \in]6, 10[$	

Figure 6 : Exercice sur distance et valeur absolue.

Soulignons que le problème n'est pas nouveau et nous proposons des exercices produits par l'IREM de Poitiers en 1976 (Barra, Pensec, Gouin & Burgaud, 1976) en travail préparatoire à la continuité et qui pourraient être exploités. Ils sont accompagnés du « discours méta » :

Pour montrer la continuité d'une fonction f en un point a , il est fréquent (lors de l'étude de la classe de fonctions usuelles) d'écrire

$$|f(x) - f(a)| = |(x - a)g(x)| = |x - a||g(x)|$$

où g est une fonction explicitée. Le problème est alors de borner $g(x)$ dans un bon voisinage de a . (...) Géométriquement borner g sur un intervalle ouvert revient à déterminer un papillon dans lequel se trouve le graphe de f « autour de a », en fait c'est déterminer des papillons d'ouverture constante (la borne de g) et d'envergure arbitraire (si ça marche sur un intervalle, ça marche sur un intervalle plus petit). (p. 18-19)

Ils sont présentés comme suit.

Exercice 1 Montrer en utilisant l'identité $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$ que si $|x| < 1$, et $|y| < 1$, alors $|x^3 - y^3| < 6$.

Montrer que cette majoration n'est pas très utile (pas très bonne) car sans connaître l'identité on aurait pu écrire

$$|x^3 - y^3| < \dots \text{ (à compléter)}$$

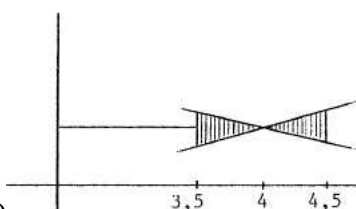
qui donne un renseignement meilleur que le précédent sur l'écart entre x^3 et y^3 .

Montrer que l'on peut écrire, toujours sous les mêmes hypothèses que $|x^3 - y^3| < 3|x - y|$.

Quels renseignements donne cette majoration ? Peut-on avoir y^3 proche de x^3 ? Comment choisir y et x ?

Exemple : $x = 0,5$, comment suffit-il de choisir y , distinct de x , pour être assuré d'avoir $|x^3 - y^3| < 10^{-3}$.

Exercice 2 Montrer que dans l'intervalle $]3,5; 4,5[$ on a $\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{4} \right| < \frac{1}{14}|x - 4|$. Conséquences sur le graphe de f autour du point 4.



(Barra et al., 1976, p. 17-19)

III. CROQUIS - PORTEUR DE LA GENERALISATION

1. Espaces vectoriels

Les dessins faits dans le cadre des espaces vectoriels sont une étape pour passer de ce que nous qualifions de concret (droites, plans) à l'abstrait (espace vectoriel, sous-espace vectoriel, famille libre, génératrice ...). Pointons ici un certain nombre d'obstacles à l'apprentissage de l'algèbre linéaire :

- Le changement de registre est depuis longtemps une difficulté à travailler. Par exemple, comment représenter les vecteurs $1, x, (x - 1)^2$? (Rogalski, 1991)
- Plus récemment, apparaissent des difficultés internes à la géométrie. Une droite n'est pas vue comme l'intersection de deux plans, la notion de dimension est rarement mobilisée et des expressions du type « *le vecteur directeur du plan* » sont souvent entendues.
- La signification des équations dans les définitions n'est pas comprise. Les droites ou les plans ne sont pas perçus comme des ensembles de points (x,y,z) vérifiant une ou plusieurs équations algébriques.
- La difficulté de passage entre affine et vectoriel est bien présente, mais nous avons choisi de ne pas l'aborder dans ce texte.

Les travaux sur l'introduction de l'algèbre linéaire à l'université sont nombreux. Nous nous sommes limitées à celui de Dorier (1998) et de Gueudet (2004). L'introduction de l'algèbre linéaire peut être faite de différentes façons. Soit en débutant par une approche structurale qui est ensuite illustrée par la géométrie ou les systèmes ; soit en prenant la géométrie ou les systèmes comme supports à l'introduction. Notre but n'est pas ici d'analyser ou de préconiser une approche plutôt qu'une autre. Nous pensons que dans tous les cas les représentations peuvent être utilisées même si elles le sont beaucoup moins dans le cas d'une approche structurale comme l'a étudié Gueudet.

Nous distinguons ici deux parties. La première met l'accent sur l'utilisation de la notion de dimension lors de la mise en œuvre de représentations et la deuxième propose des exercices dont l'objectif est de travailler la représentation des objets, droites et plans en lien avec leurs équations.

Représentations et notion de dimension

Nous pouvons utiliser des croquis pour aider à appréhender la notion de dimension. Nous allons nous appuyer sur une ingénierie développée à Lille, à la fin des années 80 et au début des années 90. Nous n'en reprenons que quelques éléments, pour une vision plus complète des motivations et mises en œuvre consulter Rogalski (1991). Le thème des dessins symboliques avait pour but de faire travailler des propriétés diverses sur dimensions, rangs, sous-espaces, etc. en insistant sur la recommandation « méta » suivante : « *Avant de se lancer dans une question sur des sous-espaces (intersection, espaces engendrés ...), il faut prédire et calculer toutes les dimensions a priori* ». Il tentait aussi de répondre à la question : « *Faut-il, et si oui comment, apprendre à utiliser des dessins symboliques en algèbre linéaire ?* »

Les extraits de l'ingénierie de Lille (Rogalski, 1991) choisis ci-après, le sont car ils nous semblent intéressants à tester avec des étudiants actuels ; ils pourraient s'insérer parmi les exercices dans une progression choisie par l'enseignant.

Ils sont à la fois utiles, porteurs de confusion et se heurtent parfois à la contrainte physique du dessin.

a) Utiles :

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

- i) *Si deux vecteurs u et v n'appartiennent pas à un sous-espace F d'un espace E , alors $\text{Vect}(u,v) \cap F = \{0\}$.*
- ii) *Soit E de dimension n , $F \subset E$, avec $\dim(F) = p$. S'il existe des vecteurs $v_1, v_2, \dots, v_k$ linéairement indépendants de E , qui n'appartiennent pas à F alors $n \geq p + k$.*

(Rogalski, 1991, p. 61)

En dessinant la situation suivante dans un espace E de dimension 2 avec deux vecteurs u et v linéairement indépendants et en prenant pour F le sous-espace engendré par $u + v$, on trouve un contre-exemple aux deux affirmations.

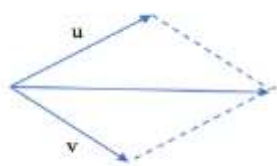


Figure 7 : Un contre-exemple.

b) Difficile voire impossible à dessiner :

Dans le cas des dimensions 2 ou 3 des situations nécessitent déjà des changements de registres pour être représentées. A cela s'ajoute un obstacle lié à la limitation physique du dessin.

Dans l'exercice qui suit l'utilisation de la notion de dimension est de nouveau nécessaire pour tenter une représentation. La question 5, elle, pointe une difficulté technique liée à la perspective.

- 1) *Dessinez un plan vectoriel P et une droite vectorielle D de $\mathbb{R}^3$, D n'étant pas incluse dans P .*
- 2) *Dessinez dans $\mathbb{R}^3$, un plan vectoriel P et deux vecteurs u et v non colinéaires, n'appartenant pas à P ; dessiner $P \cap \text{Vect}(u,v)$.*
- 3) *Dessinez deux plans dans $\mathbb{R}^3$ non confondus, et dessinez une base de chacun d'eux de telle sorte que la réunion des deux bases forme une base de $\mathbb{R}^3$.*
- 4) *Dessinez deux plans vectoriels P et Q dans $\mathbb{R}^3$, non confondus et une droite vectorielle D distincte de leur intersection ; faire des dessins différents selon les dimensions de $D + P$ et de $D + Q$.*
- 5) *Dessinez dans $\mathbb{R}^3$ quatre sous-espaces vectoriels ne se coupant 3 à 3 qu'en 0 et deux à deux selon une droite.*

(Rogalski, 1991, p. 60)

Pour la question 1), aucun prérequis particulier pour tenter un dessin :

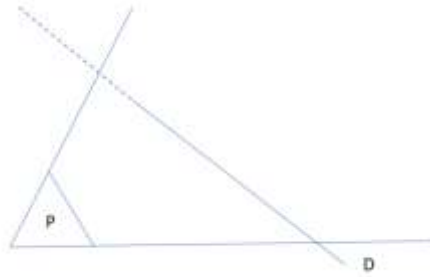


Figure 8 : Réponse à la question 1).

Pour la question 2), pour dessiner deux vecteurs n'appartenant pas à P , il s'agit d'utiliser le fait qu'ils engendrent un espace de dimension 2 et que l'intersection de deux plans non confondus est une droite.

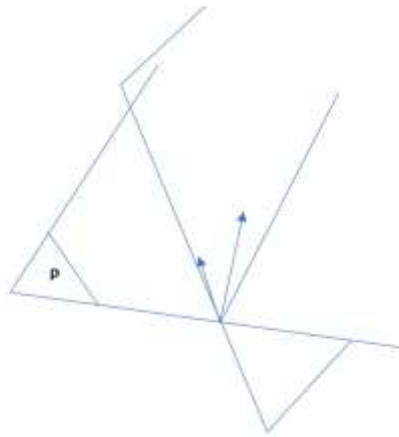


Figure 9 : Réponse à la question 2).

Pour la question 3), l'analyse *a priori* repose sur le fait que les deux plans sont sécants et que pour obtenir une base de $\mathbb{R}^3$, les bases respectives des deux plans contiennent un vecteur directeur de la droite vectorielle intersection.

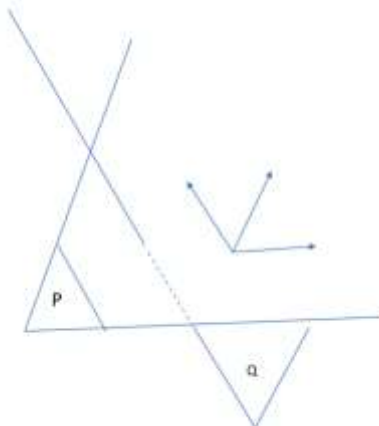


Figure 10 : Réponse à la question 3).

Pour la question 4), la distinction à faire porte sur l'inclusion de la droite D dans le plan P ou dans le plan Q : la dimension de $D + P$ peut être 2 ou 3.

La question 5) correspond à une situation possible mais très difficile à dessiner.

c) Porteurs de confusions :

C'est le cas des images pour les dimensions 3 ou 4, qui peuvent aboutir à une perte d'information dans le cas de dimensions supérieures ou égales à 4, surtout dues à l'augmentation des dimensions.

Dans $\mathbb{R}^4$, on appelle hyperplan un sous-espace de dimension 3, plan un sous-espace de dimension 2 et droite un sous-espace de dimension 1.

- 1) *Quelle est l'intersection de deux hyperplans ?*
- 2) *Si H est un hyperplan et D une droite, quelle est la dimension de $H + D$?*
- 3) *Quelle est l'intersection d'un plan P et d'un hyperplan H ? Faire un dessin dans $\mathbb{R}^3$ qui symbolise la position relative de P et de H . Que perd-on comme information sur les dimensions dans cette représentation ?*

(Rogalski, 1991, p. 60)

Pour la question 1) on utilise

$$\dim(H_1 + H_2) = \dim(H_1) + \dim(H_2) - \dim(H_1 \cap H_2).$$

Comme $\dim(H_1 + H_2) \leq 4$ et $\dim(H_1) = \dim(H_2) = 3$ on obtient que l'intersection de deux hyperplans de $\mathbb{R}^4$ est un espace de dimension supérieur ou égal à 2 et donc c'est soit un plan, soit un hyperplan.

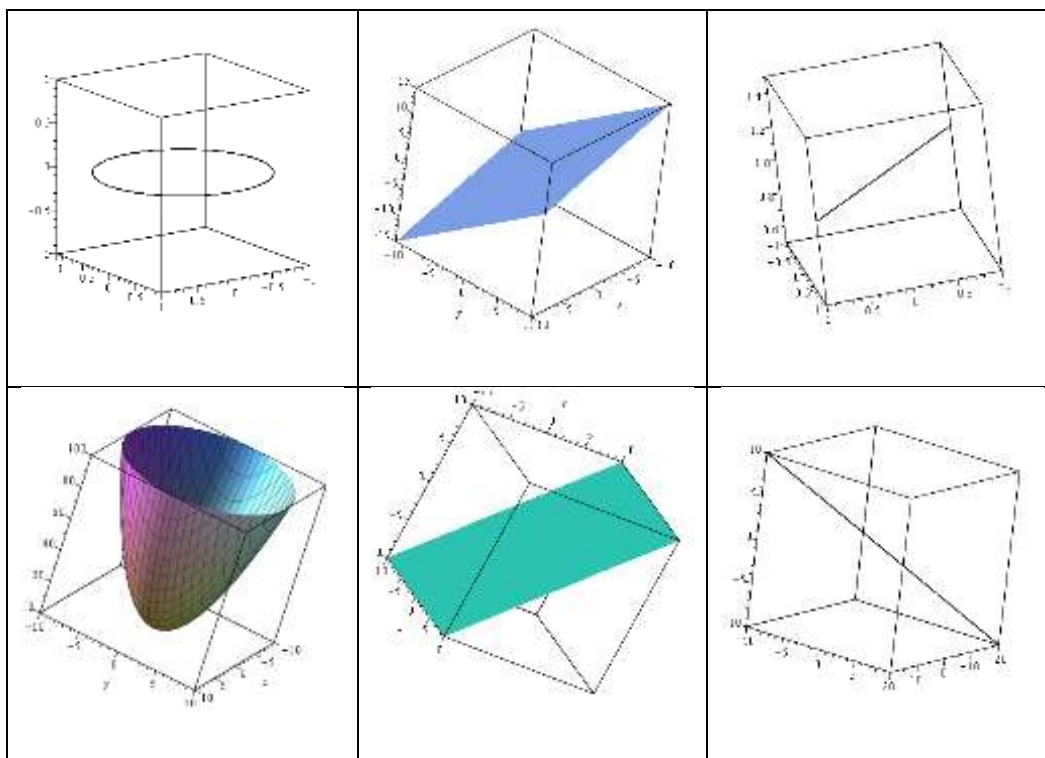
Pour la question 2) avec la même formule, tout dépend de l'intersection de H et D . La dimension sera 3 si $D \subset H$ et 4 dans le cas contraire.

Pour la question 3) sur le dessin on ne pourra pas représenter les différents cas possibles. En effet, on a $\dim(P + H) = 5 - \dim(P \cap H)$ et donc $\dim(P \cap H) \geq 1$, l'intersection peut-être une droite ou un plan. Il est demandé une représentation dans $\mathbb{R}^3$. En conséquence, on peut alors choisir de privilégier pour la représentation de l'hyperplan le fait que sa co-dimension est 1, on le représentera donc par un plan. Pour le plan si on privilégie l'écart de dimension avec l'hyperplan, on le représentera alors par une droite. Avec ce type de dessin on visualise le cas d'inclusion du plan dans l'hyperplan mais on ne peut pas visualiser le cas où leur somme est l'espace en entier sans qu'ils soient pour autant supplémentaires (cas de l'intersection égale à une droite vectorielle).

Représentations et équations

Nous pouvons, aussi travailler les représentations en lien avec les équations. Signalons ici, des exercices de Pariès & Robinet (2009) qui, à partir de groupes d'équations, demandent de reconnaître ceux qui correspondent à deux plans (respectivement droites, ou droites et plans) parallèles ou perpendiculaires et de préciser, le cas échéant, s'il y a coplanarité. Dans le même esprit, l'exercice suivant fait travailler les équations cartésiennes et paramétriques :

Apparier les dessins et les formules ci-dessous. Classer les couples dessin/formule, en expliquant les critères utilisés.



1) $x - 2y + 2z = 0$	2) $z = x^2 + y^2$	3) $\begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1 \end{cases}$	4) $y + z = 0$
5) $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = 0 \end{cases}$	6) $\begin{cases} 2x - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$	7) $\begin{cases} x = 2t \\ y = -t \\ z = t \end{cases}$	

Figure 11 : D'après Rogalski, 1991, p. 46-49.

Nous espérons faire émerger des représentations des plans vectoriels et droites vectorielles, grâce au classement demandé. Dans ce but la question, « *Lesquels sont des espaces vectoriels ?* », pourrait être rajoutée. Par ailleurs l'utilisation de logiciels de tracé peut contribuer à lever des difficultés dues aux représentations en deux dimensions d'un objet en trois dimensions en permettant par exemple de faire tourner les figures.

2. Distance

Une fois que la valeur absolue est comprise comme permettant d'exprimer une distance et que la traduction de $|x - a| \leq r$ se fait naturellement par un croquis, on généralise la notion de distance à celle de distance dans un espace métrique. On prend alors comme support le dessin de disques (ou encore les boules carrées), considéré comme concret. Mais est-il vraiment concret pour des étudiants qui peinent à donner la définition d'un cercle de centre O et rayon r comme l'ensemble des points à la distance r de O ?

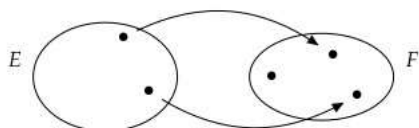
IV. CROQUIS - VERS UNE IMAGE MENTALE

1. Applications

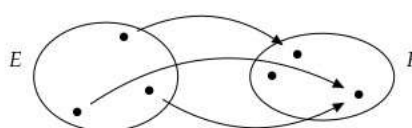
On trouve fréquemment des diagrammes pour visualiser et ainsi se familiariser avec des définitions abstraites telles que injection et surjection.

Exemples :

Une application injective :

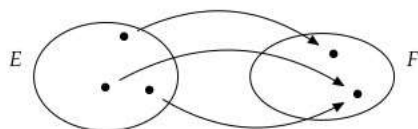


Une application non injective :



Exemples :

Une application surjective :



Une application non surjective :

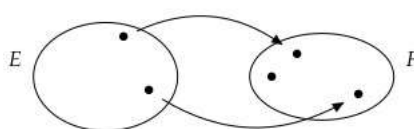


Figure 12 : Diagrammes illustrant les définitions d'injection et de surjection.

Il nous semble que ces croquis n'ont qu'une utilité : ils sont la visualisation de la définition dans le cas particulier d'ensembles finis. Ils ne sont pas une aide à la résolution d'exercices, sauf à aider à mémoriser ces définitions. En effet, les premiers exercices sur le thème injection-surjection demandent souvent de revenir à la définition ce qui est une source de difficulté pour les étudiants comme souligné par Madec (2018) lors d'une journée consacrée à la transition entre enseignement secondaire et supérieur de la Commission Française pour l'Enseignement des Mathématiques [CFEM].

Ces définitions sont le plus souvent appliquées aux fonctions numériques d'une variable réelle. Leur transposition graphique est dans ce cas tout autre que les diagrammes proposés ci-dessus.

Un exercice courant consiste à trouver un intervalle de départ afin que la restriction d'une fonction numérique donnée soit injective, puis un intervalle d'arrivée afin qu'elle soit surjective. Il s'agit plutôt dans ce cadre de souligner que, lorsqu'une fonction est injective, toute droite parallèle à l'axe des abscisses coupe au plus une fois sa représentation graphique et, que, lorsqu'elle est surjective, toute droite parallèle à l'axe des abscisses coupe au moins une fois sa représentation graphique. Le support graphique pour la fonction de la variable réelle x donnée par $f(x) = (x-1)^2 - 4$ est alors le suivant :

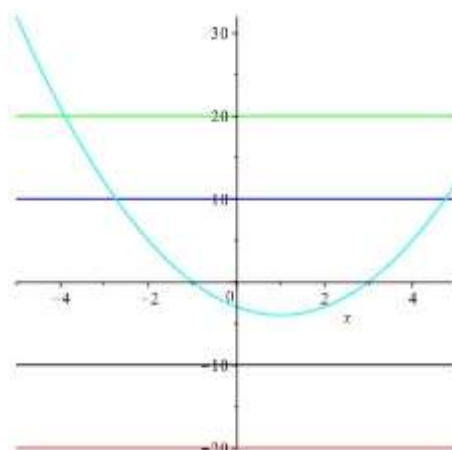


Figure 13 : Injectivité et surjectivité pour une fonction définie sur un intervalle.

2. Ensembles

Les diagrammes de Venn sont utilisés pour illustrer des définitions telles que $A \cap B$ ou $C_E(A)$, ou deviner une autre expression de $C_E(A \cup B)$. Là encore, la démonstration de l'égalité devinée nécessite de revenir aux définitions. Le diagramme peut même être un obstacle à la démonstration puisque « ça se voit ». En revanche il peut servir dans des démarches du type conjecturer puis démontrer et permet de mettre en avant le fait que les outils de mise en place d'une conjecture ne suffisent en général pas pour démontrer.

Le dessin peut dans ce cas, aider à s'engager dans des disjonctions de cas, s'il y a lieu. Par exemple pour un exercice tel que : « On suppose que l'on a les inclusions $A \cup B \subset A \cup C$ et $A \cap B \subset A \cap C$. Montrer que l'on a l'inclusion $B \subset C$ ». Si on veut faire un diagramme de Venn représentant la situation on est assez facilement amené à distinguer les points de B qui sont aussi dans A de ceux qui ne le sont pas.

Un autre exemple est l'illustration ci-dessous de la distributivité de l'intersection par rapport à l'union.

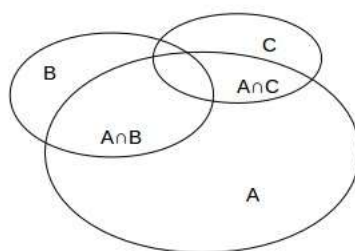


Figure 14 : Diagramme de Venn illustrant la distributivité de l'intersection.

Mais les représentations deviennent vite confuses ou difficiles à faire dans le cas général à partir de quatre ensembles, comme le souligne l'extrait suivant

bles dans le cas de quatre ou cinq ensembles (cf. fig. 3 et 4) en considérant cependant dans ce dernier cas que la petite ellipse centrale est extérieure à C.

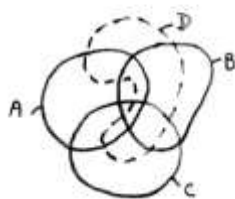


fig. 2

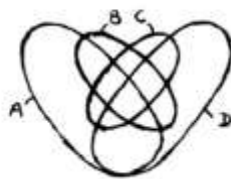


fig. 3

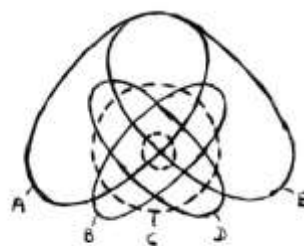


fig. 4

Mais Venn lui-même reconnaît que ce n'est pas très simple et de toute façon on est vite li-

(Lefort, 1974, p.14-18)

3. Composition de fonctions

Le diagramme tel que $x \xrightarrow{f} x^3 \xrightarrow{g} e^{x^3}$ aide à se familiariser avec la composition, en particulier avec l'ordre des calculs. Nous pensons qu'il est compris par les étudiants. Le travail de l'enseignant est de faire en sorte qu'il devienne spontané puis inutile une fois que la composition de fonctions est devenue usuelle. On peut illustrer aussi, à l'aide de tels croquis l'associativité de la composition, voire des égalités fonctionnelles (avec des diagrammes qui commutent).

V. CONCLUSION

Avec ces exemples, nous espérons avoir réussi à montrer des apports possibles, au début de l'enseignement supérieur, des croquis, lors d'une nouvelle étape dans l'abstraction. Nous avons tenté d'illustrer leurs contributions comme support de l'activité mathématique, porteur d'une généralisation ou aide à la construction d'une image mentale.

Ces dessins ont des limitations intrinsèques qui peuvent être porteuses de confusion, c'est particulièrement vrai pour l'algèbre linéaire. Nous les pensons cependant utiles, voire indispensables, à chaque étape d'une nouvelle abstraction. Nous faisons le constat qu'ils sont tout de même peu utilisés, y compris dans notre propre pratique. Une raison possible à cela, est que l'on cherche à amener les étudiants à la démonstration. Nous souhaitons que les étudiants ne se limitent pas à donner des exemples en lieu d'une preuve et qu'ils arrivent à produire une rédaction formelle de cette preuve.

Cependant ces dessins, malgré leurs limites, sont des supports de l'intuition qu'il convient de développer et d'entretenir. Nous devons aider les étudiants à les comprendre, à avoir conscience de leurs portées et de leurs limites ; nous devons contribuer par notre pratique à ce qu'ils les mobilisent régulièrement.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- BARRA, R., PENSEC, J-J., GOUIN, S. & BURGAUD, J. (1976). *Enseignement de l'analyse - n°2 - valeur absolue*. Poitiers : IREM de Poitiers.
- CHAZAL, J., CORPART, A., DURAND, T., LAMARTINE, C., LASSALLE, N., PIALOUX, N. & PROVOST, G. (2010). *Le B.A. BA des maths avant une STS*. Clermont-Ferrand : IREM de Clermont-Ferrand.

- DORIER, J.-L. (1998). État de l'art de la recherche en didactique à propos de l'enseignement de l'algèbre linéaire. *Recherches en didactique des mathématiques*, 18(2/ 2), 191-230.
- GUEUDET, G.(2004). Rôle du géométrique dans l'enseignement de l'algèbre linéaire. *Recherches en didactique des Mathématiques*, 24(1), 81-114.
- LEFORT, J. (1974). Le système binaire réfléchi. *L'Ouvert*, 4, 14-18.
- MADEC, G (2018). *Rupture et continuité à la transition lycée-université. Conférence journée CFEM, mars 2018.*
http://www.cfem.asso.fr/actualites/MADECJournée_TransitionCFEM_mars18.pdf
- PARIES, M., ROBERT, A. (2009). Changements de cadres en géométrie dans l'espace. *Repères IREM*, 5, p. 35-45.
- ROGALSKI, M. (1991). *Un enseignement de l'Algèbre Linéaire en D.E.U.G A, première année*. Paris : Cahier de Didirem, 11.