QUELS OUTILS POUR ANALYSER L'ACTIVITE DE PREUVE EN MATHEMATIQUES A L'ECOLE ELEMENTAIRE ? PROPOSITIONS A PARTIR D'UNE SITUATION DE RECHERCHE EN CM1/CM2 (9-10 ANS)

Cécile **OUVRIER-BUFFET**

Université Paris-Est Créteil – Laboratoire de Didactique André Revuz

cecile.ouvrier-buffet@u-pec.fr

Résumé

Cette présentation reviendra rapidement sur différents outils de la littérature en didactique des mathématiques permettant de concevoir et d'analyser des situations plaçant des élèves d'élémentaire en activité de preuve. Certains d'entre eux seront mis à l'épreuve sur une Situation de Recherche pour la Classe (SiRC), « la Chasse à la bête ». Les productions d'élèves de cycle 3 (9-10 ans) seront ainsi analysées et la portée des outils mis en œuvre discutée. L'activité de preuve, envisageable à l'école élémentaire, pourra, de cette façon, être davantage circonscrite.

Mots clés

Activité mathématique, école élémentaire, situation de recherche, preuve

I. CONTEXTE ET QUESTIONNEMENTS

Les programmes actuels de l'école en France insistent sur la résolution de problèmes : au cycle 1 (3-5 ans) où il est question d'« apprendre en réfléchissant et en résolvant des problèmes », aux cycles 2 & 3 où les compétences « chercher, modéliser, représenter, raisonner, calculer, communiquer » sont transversales et continuent à être travaillées dans le secondaire. Plus précisément, le cycle 2 (6-8 ans) met en avant : « (...) la résolution de problèmes est au centre de l'activité mathématique des élèves, développant leurs capacités à chercher, raisonner et communiquer. Les problèmes permettent d'aborder de nouvelles notions, de consolider des acquisitions, de provoquer des questionnements » et le cycle 3 (9-11 ans) : « (…) On veille aussi à proposer aux élèves des problèmes pour apprendre à chercher qui ne soient pas directement reliés à la notion en cours d'étude, qui ne comportent pas forcément une seule solution, qui ne se résolvent pas uniquement avec une ou plusieurs opérations mais par un raisonnement et des recherches par tâtonnements » (programmes en vigueur et socle commun).
La question ici est de définir ce qui est attendu par l'expression « activité mathématique » et d'envisager les liens avec la preuve du fait des termes « raisonnement » et « recherches ».
En didactique des mathématiques, on peut noter un intérêt pour la preuve depuis longtemps, à tous les niveaux de la scolarité. Il existe cependant relativement peu d'articles spécifiques à la preuve à l'école (6-10 ans).
La volonté de travailler la preuve en élémentaire rejoint diverses préoccupations, dont certaines sont dans le discours public, d'autres dans le discours institutionnel, et d'autres enfin dans la

formation et dans la recherche. Il s'agit d'appréhender d'une certaine façon : les mathématiques du citoyen, la représentation de la discipline « mathématiques », mais aussi la compréhension de ses concepts, la construction et la mise en œuvre d'expériences mathématiques (cela rejoint au niveau international le courant de l'*Inquiry-Based Education*), le passage de l'argumentation à la démonstration, etc.
Nous avançons ici l'idée que l'enseignement d'une activité mathématique centrée sur la preuve est fondamentale dès l'école élémentaire dans une perspective globale de construction de connaissances :

> *"... proof deserves a prominent place in the curriculum because it continues to be a central feature of mathematics itself, as the preferred method of verification, and because it is a valuable tool for promoting mathematical understanding." (Hanna, 1996, p.22).*

Cet article propose d'aborder deux grandes catégories de questions, après un préambule qui consistera à définir « preuve » :
Q1 : quels cadres théoriques existent dans la littérature en didactique des mathématiques au niveau international pour étudier l'activité de preuve à l'école (6-10 ans) ?
Q2 : que permettent ces cadres lors de l'analyse de Situations de Recherche pour la Classe (SiRC) en classe ordinaire ?

II. LA PREUVE EN DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES : QUELQUES ECLAIRAGES ET DEFINITIONS

1. Quand on étudie la preuve en DDM à l'école, qu'est-ce qui est fondamental ?

Dans la littérature, de très nombreux processus, variés, sont étudiés aux niveaux épistémologiques et didactiques, en lien direct avec la preuve :
Explorations d'un problème (induction) ; Etude de cas particuliers, d'exemples ; Formulation d'un énoncé mathématique ; Formulation de conjectures ; Réfutations, contre-exemples – exploration du domaine de validité de la conjecture ; Modélisation (intra- ou extra-mathématique) ; Production de définitions, de théories locales ; Recherche de 'patterns' ; Généralisations ; Raisonnement par analogie ; Utilisation de différentes représentations, cadres, registres etc.
Dans ces travaux, le rôle fondamental de l'enseignant est toujours mis en avant (e.g. Hanna, 1995) : il a en effet une gestion de classe particulièrement complexe lors de situations plutôt ouvertes mettant en jeu des processus de preuve. Il doit alors valider ce qui est acceptable, analyser les arguments des élèves (les élèves se préoccupent davantage de convaincre les autres, ils ne sont pas forcément sur la validité mathématique), identifier la structure de la preuve, inciter, modérer, institutionnaliser etc. (voir par exemple Yackel & Cobb, 1996). Pour cela, l'enseignant doit aussi prendre de la distance par rapport à sa propre conception des mathématiques et à l'image de la rigueur en mathématiques. Pour les élèves, le « pourquoi » n'est pas forcément fondamental comme pour le mathématicien et la question de la vérité et de la validité peut être éloignée de ce que l'enseignant attend.

A l'école, en France, plusieurs travaux se sont penchés sur l'argumentation et la preuve à l'école élémentaire (à titre d'exemples, on peut noter les travaux d'ERMEL : « Vrai ? Faux ? … On en débat ! De l'argumentation à la preuve (cycle 3) », les travaux de Gibel et Bloch sur les fonctions des raisonnements, les niveaux de milieu, la sémiotique peircienne, les recherches de

Georget sur les Situations de recherche et de preuves entre pairs et les communautés de pratiques, les travaux de Hersant sur les problèmes ouverts et l'émancipation des élèves, etc.). On voit ici que les cadres théoriques s'avèrent très variés tout comme les objets d'étude.

Au niveau international, il est possible de dresser un rapide panorama des thématiques traitées au niveau de l'école élémentaire. Deux grandes catégories de travaux se dessinent : **la formation des enseignants de l'élémentaire**, et **l'étude de situations particulières**.
En ce qui concerne la formation des enseignants, les résultats de différents travaux pointent les difficultés maintenant bien connues des enseignants de l'école pour comprendre et produire des preuves (e.g. Barkai, Tsamir, Tirosh, & Dreyfus, 2002 ; Martin & Harel, 1989[1] ; Simon & Blume, 1996). Par ailleurs, le rôle de l'enseignant, devant encourager les élèves à justifier leurs solutions, à généraliser (Maher & Martino, 1999), à faire changer les élèves de représentations/de points de vue, à encourager la classe à être une **communauté mathématique** est repris dans différents travaux à différents niveaux de classe, par exemple :

- En CE1 (7 ans) : Yackel et Cobb (1996) parlent d'élaboration conjointe élèves-enseignant de normes sociomathématiques régulant l'argumentation ;
- En CE2, CM1 (8-9 ans), Stylianides (2007, 2016) souligne l'importance de la dimension sociale et du discours :
- En CM2 (10 ans), Lampert (1990) travaille sur l'observations inductives de 'patterns' et le processus de généralisation et fait un focus sur les interactions sociales, tout comme Zack (1997) qui s'intéresse plus particulièrement aux conjectures, réfutations, éléments de preuves en faisant un focus sur le discours (en lien avec les travaux de Reid, dans la lignée de l'épistémologie de Lakatos[2]).

Les études de situations particulières dans la littérature concernent par exemple des situations « discrètes » (combinatoire, arithmétique,...) et également en géométrie (avec utilisation des TICE). Des études de manuels existent également. L'un des points communs à ces situations réside dans le fait qu'elles sont conduites dans des conditions « favorables » :

> *"One has to keep in mind, though, that the elementary school children were observed in classes carefully planned and taught so as to support mathematical reasoning, argument and justification. Therefore, the studies only show that the transition to deductive reasoning is possible, not that it normally happens. And the studies at the high school and college level show that it often does not happen." (Dreyfus, 1999, p. 96)*

On peut citer à titre d'exemples la classe de Deborah Ball et de formateurs (Stylianides (2007-2016) – CE2-CM1 (8-9 ans)), la classe de Zack (Reid (2002) – CM2 (10 ans)), l'étude longitudinale CP-CM2 (de 6 à 10 ans) avec une formation des enseignants en amont (Maher, Powell & Uptegrove (2010)) qui montre bien les aptitudes des élèves à conduire des preuves dès le CM1 (9 ans) sur des situations de combinatoire.

Il est bien évident que la question qui se pose alors est : et en classe ordinaire ? avec un enseignant « ordinaire » ? Que peut-on mettre en œuvre « efficacement » et comment ?
Ces questions rejoignent bien évidemment la formation initiale et continue des enseignants de l'école.
Il faut reconnaître qu'aujourd'hui la preuve occupe une place marginale à l'école élémentaire, et ce qui est réellement en jeu du point de vue de la recherche et de la formation concerne : les connaissances des enseignants (non spécialistes de la discipline) et l'image qu'ils ont sur la

[1] Pour des enseignants de l'école, la moitié accepte des preuves fausses (Martin & Harel 1989).
[2] Si on se base sur les travaux de Lakatos (1961, 1984), on est bien sur le principe de la découverte avec interactions sociales (convaincre dans un système de personnes, avec des règles, des présupposés connus etc.).

preuve[3] (comme des mathématiques très avancées), le déficit de ressources sur cette question, et le fait qu'il y a encore moins de ressources qui expliquent comment on gère les situations qui mobilisent les preuves. On n'est pas seulement sur les mathématiques du citoyen évoquées plus haut, mais aussi sur la prise de conscience de ce qu'est la discipline et le « faire des mathématiques ».
Mais revenons sur la question des définitions, puisque nous n'avons toujours pas défini le mot « preuve ».

2. Choix de définitions

Pour se mettre d'accord sur l'objet de ce propos, nous proposons de reprendre les définitions établies par Balacheff (1987, p.148s) du fait de leur teneur épistémologique et de la reprise de celles-ci dans de nombreux travaux ultérieurs (par exemple ceux de Stylianides (2007, 2016) sur lesquels nous reviendrons plus loin).
On peut alors considérer la preuve comme *une explication acceptée par une communauté donnée à un moment donné* (un débat est possible pour déterminer un système de validation commun aux interlocuteurs). La démonstration est une forme particulière de restitution de la preuve. Et le raisonnement une *activité intellectuelle explicite ou implicite de manipulations d'informations pour, à partir de données, produire de nouvelles informations*.
Par ailleurs, Balacheff (1987, p.155s) propose trois types de situations avec des frontières non étanches et des contrats spécifiques qui appellent des processus de validation, voire la production de preuves : les preuves pour décider (plutôt du côté de l'action), les preuves pour convaincre (plutôt du côté de la théorie), et les preuves pour savoir. Les preuves pour décider seraient plus particulièrement adaptée à l'école. On peut aussi évoquer les preuves pour expliquer (Hanna, 1995) qui seraient elles plus du côté de l'action et pas de la théorie. Cela nécessite alors de bien faire la distinction entre explications, arguments, preuves en tant que didacticiens, mais aussi, ce qui nous intéresse, de faire les liens entre explications, preuves et compréhension. En effet, preuve et explication sont liées dans le processus de compréhension : il est possible que l'explication aille au-delà de la preuve en justifiant des faits mathématiques au-delà de la seule preuve considérée. Avec la preuve, on augmente la valeur épistémique, mais pas forcément avec l'explication (cf. Sierpinska, 1994). Duval propose trois types de justifications en mettant en avant cette valeur épistémique : explications (descriptives), arguments, preuves[4].
Les fonctions de la preuve sont nombreuses : justifier ou réfuter ; expliquer ; découvrir (inventer de nouveaux résultats) ; systématiser (cela se rapproche de créer des théories locales) ; illustrer de nouvelles méthodes de déduction ; défendre une définition ; défendre une axiomatique ; et aussi communiquer. Ce qui amène la discussion sur les caractéristiques langagières des preuves.
Balacheff (1987) propose deux grands types de preuve : les preuves pragmatiques (dans l'action) véhiculant des règles d'action et des théorèmes-en-acte non prouvés (validité de l'action interrogée, discours non forcément présent) et les preuves intellectuelles, nécessitant un changement de posture (passer à une posture théorique, être capable de décontextualiser, dépersonnaliser, détemporaliser). A l'interface, le caractère générique est étudié. Cela conduit Balacheff (1987, p. 163s) a proposé différents types de preuves : empirisme naïf, expérience cruciale / exemple générique / expérience mentale, calcul sur les énoncés, avec les définitions suivantes :
- Empirisme naïf : « tirer de l'observation d'un petit nombre de cas la certitude de la vérité d'une assertion » (p.163) ;

[3] Une question importante serait à étudier : quelles sont les conceptions des enseignants en élémentaire sur la preuve et son intérêt dans l'enseignement ?
[4] Nous ne rentrerons pas ici dans la distinction entre argumentation et démonstration. Voir Duval & Egret (1993).

- Expérience cruciale : « est un procédé de validation d'une assertion dans lequel l'individu pose explicitement le problème de la généralisation et le résout en pariant sur la réalisation d'un cas qu'il reconnaisse pour aussi peu particulier que possible » (p. 163) ;
- Exemple générique : « consiste en l'explicitation des raisons de la validité d'une assertion par la réalisation d'opérations ou de transformations sur un objet présent non pour lui-même, mais en tant que représentant caractéristique d'une classe d'individus » (p.164-165) ;
- Expérience mentale : "invoque l'action en l'intériorisant et en la détachant de sa réalisation sur un représentant particulier » (p.165).

1. Spécificités du cadre de Stylianides (2007-2016) : continuités ou ruptures ?

Nous choisissons ici de parler plus spécifiquement du cadre théorique construit par Stylianides car ses travaux, conduits sur plusieurs années, se sont centrés sur la preuve à l'école et font l'objet d'un ouvrage de synthèse paru en 2016.
Dans son cadre, Stylianides (2016) fait la différence entre les exemples génériques (au sens de Balacheff, 1987) et les démonstrations (qui sont en fait des expériences mentales au sens de Balacheff, 1987). Pour situer un peu mieux ce que Stylianides (2016) entend par « démonstration », il faut savoir qu'il place les contre-exemples, l'induction, la contraposée, l'exhaustion des cas du côté de la démonstration.
L'objectif premier de ses travaux et de fournir un cadre permettant l'analyse de manuels et le développement professionnel des enseignants. Pour cela, Stylianides (2016) fait des choix de définitions et de typologie de situations qui sont les suivants.

La définition retenue par Stylianides (2016) a pour but d'être compréhensible par les enseignants, d'être suffisamment malléable pour s'adapter à plusieurs contextes scolaires (dont l'élémentaire) et aussi à l'analyse des pratiques enseignantes de l'école (du côté du développement professionnel). Stylianides (2016) souhaite aussi qu'elle intègre l'idée de communauté dans la classe (comme soulignée précédemment). Sa définition est la suivante[5] :
"*Proof* is a ***mathematical argument***, a connected sequence of **assertions** for or against a mathematical claim, with the following characteristics:

1. It uses statements accepted by the classroom community (***set of accepted statements***) that are true and available without further justification
2. It employs **forms of reasoning** (***modes of argumentation***) that are valid and known to, or within the conceptual reach of, the classroom community; and
3. It is communicated with **forms of expression** ***(modes of argument representation)*** that are appropriate (...)". (Stylianides, 2007, p. 291)

Cette définition est reprise dans Stylianides (2016).
Nous reproduisons en annexe (Tableau 1) l'illustration de la définition de preuve proposée par Stylianides (ce qui est en caractères gras ici).

Dans cette définition, et dans la méthodologie d'utilisation de cette définition, on a donc une analyse : des **fondements** (définitions, axiomes, énoncés, théorèmes, règles de calcul établies...), de la **formulation (modes d'argumentation)** (généralisation, déduction de cas particuliers, contre-exemples, par l'absurde...), de la **représentation** (langage ordinaire, algébrique, diagrammes, etc.) et de la **dimension sociale**. Stylianides (2007) déclare que cela est en conformité avec l'activité mathématique.

[5] Il nous semble important, pour situer la définition qui suit, d'indiquer que Stylianides définit également le *reasoning-and-proving* (RP) comme un processus englobant quatre activités : identifier des « patterns », faire des conjectures, fournir des arguments de non-preuve (empiriques (en fait, empirisme naïf) ou rationnels), fournir des preuves.

Par ailleurs, Stylianides (2016) propose deux éléments pour catégoriser les tâches de preuve :

- → Le nombre de cas à traiter (un seul, nombre fini, nombre infini)
- → La fonction de la preuve (justifier ou réfuter)

Il parle également de "The ambiguity of the task'' (on est en fait là proche du problème ouvert!).

Lorsqu'il est question de gestion en classe par l'enseignant, différents points sont évoqués par Stylianides (2016) qui s'appuie sur les résultats de plusieurs travaux internationaux portant sur l'école cités précédemment dans le présent texte. Nous les reprenons et les complétons ici au regard des spécificités des travaux français. La gestion de classe par l'enseignant de situation mettant en jeu des preuves nécessite ainsi :

- Faire la dévolution de l'activité de preuve
- Inciter les élèves à explorer le problème
- Fermer progressivement un problème ouvert (cela peut se traduire par demander aux élèves de faire des choix)
- Laisser vivre des énoncés produits par les élèves (basés sur des hypothèses ou définitions différentes)
- Inciter les élèves à (re)formuler
- Inciter les élèves à changer de cadre
- Inciter les élèves à changer d'argumentation
- Montrer l'insuffisance de l'empirisme naïf
- Organiser les débats, les relances, les expériences (filtrer et recentrer)
- Gérer les connaissances erronées des élèves
- Anticiper les difficultés des élèves et les remédiations nécessaires (notons que ce point serait à explorer davantage en l'état actuel des recherches en didactique)
- Identifier les points importants dans les procédures (mise en commun) et construire ce qui suit (institutionnalisations locales ou globales)
- *Scaffolding* (au sens de Bruner[6])
- Acceptation de la preuve dans la communauté de la classe (notons que ce point serait à explorer davantage en l'état actuel des recherches en didactique)
- Etc.

On voit ici les nombreuses compétences et connaissances nécessaires à l'enseignant en termes d'activité de preuves (faire la distinction entre expliquer, argumenter, prouver par exemple) et de gestions de situations (au sens de Brousseau). Par ailleurs, on peut s'interroger sur les aspects mathématiques importants pour l'enseignant (mais seront-ce les mêmes pour les élèves ?). Cela conduit à la question suivante : jusqu'à quel point l'explication, la justification, la preuve doit-elle être donnée ? Les redondances sont-elles « autorisées » ? Comment dénoncer les arguments non acceptables et ainsi gérer la validité et la vérité ? Ce ne sont que des exemples mais cela montre bien l'étendu du travail que la recherche doit conduire, en collaboration avec les enseignants.

En pensant que le type de situations est important à définir aussi pour préciser ce que l'on entend par « activité de preuve », nous allons maintenant faire le choix de nous situer dans les Situations Recherche pour la classe (SiRC) et donner une illustration de l'utilisation des modèles précédemment présentés.

[6] "the process that enables a child or novice to solve a problem, carry out a task, or achieve a goal which would be beyond his [or her] unassisted efforts." (Wood, Bruner & Ross, 1976, p. 90).

II. EXEMPLE DE LA CHASSE A LA BETE

1. Une Situation de Recherche pour la Classe (SiRC)

Les objectifs d'une SiRC sont de placer les étudiants dans le rôle d'un chercheur en mathématiques et d'identifier, d'analyser les raisonnements et preuves des étudiants. Cela permet ainsi de montrer *a posteriori* les potentialités des situations (qui sont bien sûr également étudiées *a priori*). Nous reprenons ici la définition d'une SiRC (dérivée de Grenier & Payan, 2003 et Ouvrier-Buffet, 2009). Une SiRC vérifie les propriétés suivantes :

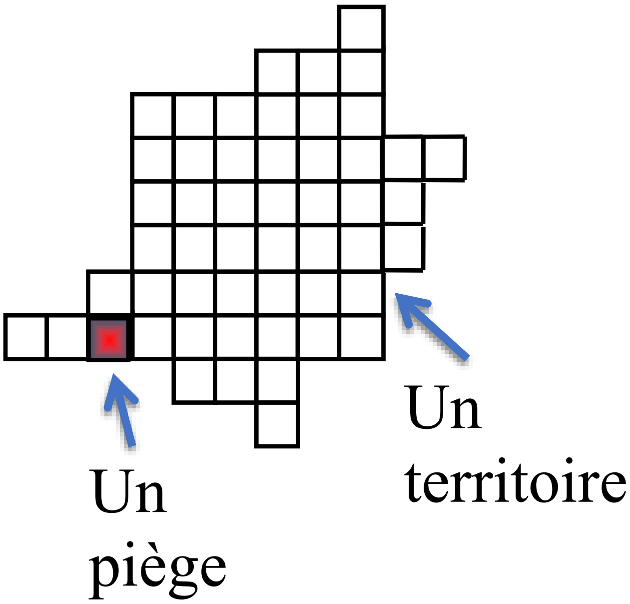
- Inscription dans une problématique professionnelle (proximité avec des questions non résolues)
- Problème/Question initiaux faciles d'accès
- Existence de stratégies initiales (pas de prérequis)
- Plusieurs stratégies d'avancée dans le problème et plusieurs développements possibles
- Critères de fin locaux (une question résolue renvoie à une autre question)

De plus, la gestion de la recherche est effectuée par les élèves et un dispositif de communication de leurs résultats est mis en place.

2. Présentation de la SiRC « La Chasse à la Bête »

Cette SiRC est une variation sur le problème du *Pentamino Exclusion* de Golomb (1994) où le territoire est une grille rectangulaire k × n et l'objectif est de minimiser le nombre de pièges à placer de telle façon à ce qu'aucun pentamino (bêtes de « taille » 5) ne puisse être placé.
Ce problème mathématique est NP-complet[7] mais pour certains cas, des résultats existent.
L'adaptation du problème du *Pentamino Exclusion* sous forme de « La Chasse à la Bête » proposée par l'équipe de Maths à Modeler, a fait l'objet de nombreuses expérimentations, essentiellement en collège, au lycée, à l'université (au sein de Maths à Modeler et de l'IREM de Grenoble – voir la fiche élève de la brochure de l'IREM de Grenoble en Annexe 2). Ces expérimentations ont montré la robustesse de la situation, et la stabilité des procédures. On peut alors s'interroger sur sa pertinence à l'école élémentaire. Cette situation est présentée et développée dans Ouvrier-Buffet (2017) à l'école élémentaire et dans la brochure de l'IREM de Grenoble (2016) pour le secondaire.

[7] Un problème NP-complet, en théorie de la complexité, est un problème de décision, vérifiant deux propriétés (vérifier une solution en temps polynomial et tous les problèmes de la classe NP se ramènent à ce problème par réduction polynomiale).



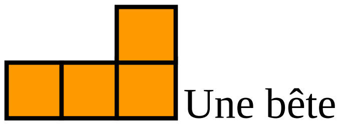


Image 1 : Présentation de La Chasse à la bête : Problème d'optimisation (NP complet) « Quel est le plus petit nombre de pièges (aussi appelés obstacles) pour qu'aucune bête ne puisse se placer sur le territoire ? ».

En termes de variables didactiques, pour la mise en œuvre en classe, des choix ont été faits quant aux bêtes (polyminos « petits »), à leur forme (domino, trimino long, trimino en L), au nombre de bêtes chassées simultanément (seulement un type de bête à la fois), et à la taille et à la topologie du terrain (un carré 5 x 5). Un contrat de recherche spécifique à la classe a été établi, personne n'est détenteur du savoir (ni l'enseignant, ni le chercheur présent dans la classe, ni les élèves).

Plusieurs types de preuves sont envisageables et un travail mathématique sur les conditions nécessaires et suffisantes et sur l'optimisation (au moins/au plus, supérieur ou égal/inférieur ou égal, encadrement) est à conduire (pour plus de détails, voir Ouvrier-Buffet (2017) et brochure IREM (2016)) :

- Déterminer expérimentalement une solution provisoire puis l'améliorer (est-elle optimale ?)
- Techniques de pavages
- Arguments sur les lignes et les colonnes

La mise en œuvre dans une classe double niveau de CM1/CM2 (9-10 ans) a été la suivante, avec un format de 5 séances (45 min) :
Séance 1 – Dévolution du problème et recherche avec les dominos
Séance 2 – Synthèse au tableau et recherche avec les triminos longs
Séance 3 – Mise en commun et confrontation des résultats – institutionnalisations locales (comment prouver que les solutions trouvées sont optimales pour les dominos et triminos longs ? Demande d'arguments et de justifications)
Séance 4 – Recherche avec les triminos en L. Confrontation des résultats : les preuves d'optimalité sont-elles identiques pour les dominos, triminos longs et triminos en L ? (Retrait du matériel et début de la rédaction des solutions par les élèves)
Séance 5 – Ecriture des résultats des élèves (chaque groupe a une responsabilité pour l'écriture d'un article : présentation du problème, présentation des solutions, preuves des résultats obtenus).
Des adaptations ont été réalisées au fil des séances afin de s'adapter aux procédures des élèves.

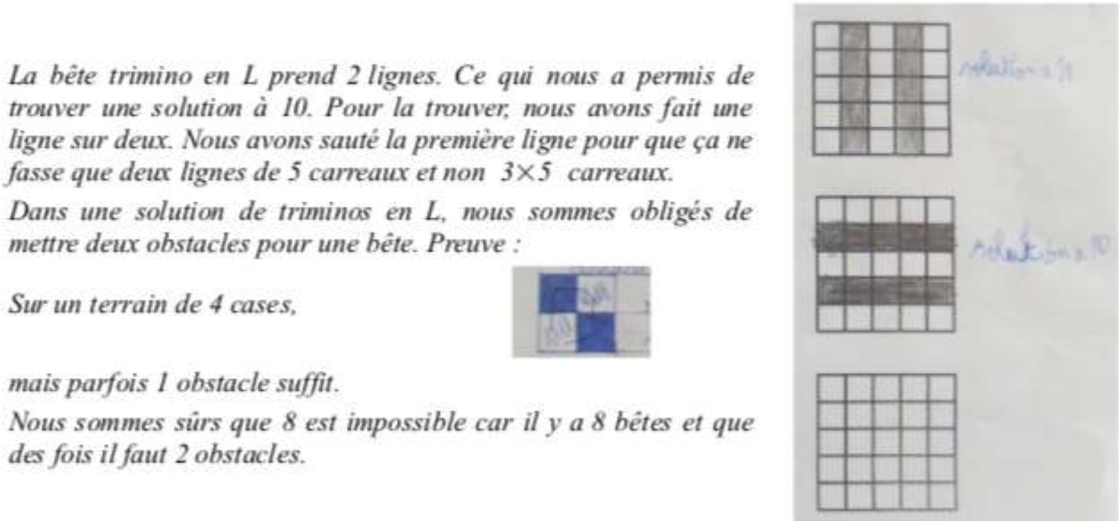
Les actions des élèves se sont concentrées sur la manipulation des pièges en priorité ce qui a apporté peu d'arguments de pavage. Les élèves ont identifié qu'un domino recouvre 2 carrés "Nous avons mis un piège sur deux car la bête occupe 2 cases". La principale difficulté ici réside dans le problème d'optimisation, sa compréhension et sa reformulation : l'importance de "au moins" a émergé (explicitement durant la confrontation des arguments pour les dominos et triminos) et a été institutionnalisée avec l'aide du chercheur.

Nous reproduisons en Annexe 3 quelques productions d'élèves (issues de Ouvrier-Buffet, 2017).

Nous souhaitons ici aborder la question suivante : peut-on parler de preuves à l'école en CM1/CM2 (9-10 ans) ?
Dans la SiRC de la chasse à la bête, nous avons par exemple obtenu les productions suivantes :
En CM1, les élèves rédigent lors de la demande par le chercheur présent en classe d'explicitation de ce qu'ils ont trouvé :

> *« Que peut-on conclure lorsque l'on recouvre le terrain avec les bêtes ? Quand on chasse les bêtes domino on trouve une solution à 12, c'est la meilleure solution pour l'instant. Les bêtes domino on peut en poser 12 maximum, il faut au moins 1 obstacle par bête, du coup 12 dominos, il faut au moins 12 obstacles. Avec les triminos, 1 obstacle par bête ne marche pas, il faut 2 obstacles par bête. »*

En CM2, nous trouvons aussi des arguments qui ne prennent pas en compte toutes les spécificités de la situation (forme des polyminos étudiés et du territoire) : « On a 25÷2=12,5 avec la bête domino. Cela nous apprend qu'on doit au moins avoir 12 obstacles. »
Pour la bête trimino en L, nous avons, dans un groupe d'élèves, un début de preuve, basé sur la recherche d'un résultat sur un plus petit cas (territoire 2x2), qui est tout à fait intéressant mais qui, faute de temps, n'a pas pu aboutir à une preuve complète.


La bête trimino en L prend 2 lignes. Ce qui nous a permis de trouver une solution à 10. Pour la trouver, nous avons fait une ligne sur deux. Nous avons sauté la première ligne pour que ça ne fasse que deux lignes de 5 carreaux et non 3×5 carreaux.

Dans une solution de triminos en L, nous sommes obligés de mettre deux obstacles pour une bête. Preuve :

Sur un terrain de 4 cases,

mais parfois 1 obstacle suffit.

Nous sommes sûrs que 8 est impossible car il y a 8 bêtes et que des fois il faut 2 obstacles.

Image 2 : Productions d'élèves de CM1/CM2 pour la bête « trimino en L ».

Si nous repensons aux éléments théoriques présentés plus haut, nous pouvons déjà rechercher quelle serait la fonction de la preuve ici pour les élèves. Nous sommes davantage sur la preuve pour justifier mais pas pour (se) convaincre, sauf pour le trimino en L lorsque les élèves s'interrogent : « Ce qui est bizarre c'est qu'on a 8 bêtes et 10 obstacles ».
Le changement de statut de la « preuve », qui n'est à ce stade qu'un processus en germe pour des élèves de cet âge, peut venir de l'évolution de la situation, avec un jeu sur la variable « territoire » (passer par exemple du carré 5 x 5 au rectangle) : ici, la généralisation est à

construire et on est du côté de l'expérience cruciale. Soulignons que les élèves n'étaient pas du tout sur ce genre de questionnement et qu'effectivement aucune expérience cruciale n'a été relevée.
Par ailleurs, on peut noter le caractère générique de certains arguments : c'est le cas par exemple avec les règles d'action et théorèmes-en-acte suivants :
« On a 25/2=12,5 donc il faut 12 obstacles »
« Pour le trimino en L, il faut 2 obstacles par bête ».

On voit ici que les outils théoriques permettent d'identifier des régularités dans les groupes d'élèves et d'envisager des prolongements de la situation voire des caractéristiques pour concevoir et choisir d'autres situations de preuve.
Dans ce type d'expérimentation que peut apporter le cadre de Stylianides ? En fait, il propose une structuration de l'analyse permettant d'identifier l'activité de preuve et d'importer d'autres cadres théoriques (tels ceux de Balacheff (1987), Vergnaud (1991), Gibel (2015), etc. en fonction des objets mathématiques manipulés).
En reprenant les grands items de Stylianides (2017), nous avons ainsi :

- *Foundations* : il s'agit là de techniques de pavage, de procédures de calcul locales, de caractérisation locale d'un couple (nombre de cases du polymino ; nombre de pièges) proposées par les élèves.
- *Formulation (modes of argumentation)* : on peut noter lors de l'expérimentation une difficulté dans l'expression de l'optimisation, un recours au mode déductif, des essais nombreux du fait du matériel présent. Par ailleurs, la question de la généralisation n'a pas été abordée (comme vu précédemment), et il est possible de faire état de règles d'action et théorèmes-en-acte.
- *Representations* : les objets sont donnés via leurs noms mathématiques et des objets tangibles manipulables, le langage ordinaire est utilisé, des dessins sont demandés pour représenter les solutions puis le matériel est enlevé pour inciter les élèves à la rédaction de leurs résultats de recherche.
- *Social dimension* : il s'agit là de la communauté mathématique instaurée en classe. La finalité de la recherche, pour les élèves, doit être réelle et « hors classe » : séminaire auprès d'autres classes ou auprès de chercheurs, animation d'ateliers lors de la fête de la science ou la fête de l'école (défi aux parents), etc. (cf. Maths à Modeler). Comment développer la connaissance mathématique de la communauté « classe » sur un temps court ? Cela ne va pas de soi et pointe de nouveau la nécessité de pouvoir amener les élèves à travailler régulièrement sur des situations consistantes de recherche.

III. CONCLUSIONS ET SUITES A DONNER POUR L'ECOLE

L'exemple abordé dans ce texte montre tout le travail, complexe, à conduire au niveau de l'école à la fois pour caractériser l'activité de preuve, concevoir des outils pour analyser et explorer des situations, construire des formations pour les enseignants. Il est important d'identifier finement des ensembles de situations et des progressions, et peut-être pourrait-on parler de zéro-compétences sur la preuve (à l'image de Lakatos et des zéro-definitions, 1961, 1984) mais cette problématique reste entière.
Par ailleurs, les conceptions des enseignants de l'école élémentaire sur la preuve seraient à déterminer, et là aussi, une étude à grande échelle serait nécessaire, de telle façon non seulement

à identifier leurs conceptions sur la preuve mais aussi à déterminer les marges de manœuvres possibles pour amener les enseignants à faire vivre l'activité mathématique en classe.
On a ainsi plusieurs éléments à travailler au niveau de la recherche, en interaction avec les enseignants, dans un but de formation initiale et continue : les conceptions des enseignants sur la preuve, la construction de problèmes, le format des ressources à destination des enseignants intégrant différentes possibilités pour le rôle de l'enseignant. Ceci en faisant l'hypothèse que les programmes actuels et futurs ont et auront bien comme objectif central une initiation et un approfondissement à l'activité mathématique dans l'enseignement des mathématiques …

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BALACHEFF, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, *18*(2), 147-176.

BARKAIN, R., TSAMIR, P., TIROSH, D. & DREYFUS, T. (2002). Proving or refuting arithmetic claims: The case of elementary school teachers. In A. D. Cockburn, E., Nardi, (Eds), *Proceeding of the 26th International Conference PME* (Vol. 2, pp.57-64). Norwich, UK.

DREYFUS, T. (1999). Why Johnny can't prove (with apologies to Morris Kline). *Educational Studies in Mathematics, 38*, 85-109.

DUVAL, R. & EGRET, M.A. (1993) Introduction à la démonstration et apprentissage du raisonnement déductif. *Repères IREM*, *12*, 114-140.

GIBEL, P. (2015). Mise en œuvre d'un modèle d'analyse des raisonnements en classe de mathématiques à l'école primaire. *Education et didactique*, *9*(2), 51-72.

GRENIER, D & PAYAN, C. (2003). Situations de recherche en "classe", essai de caractérisation et proposition de modélisation. In V. Durand-Guerrier & C. Tisseron (Eds), *Actes du Séminaire National de didactique des mathématiques*, pp. 189-205. IREM de Paris 7, ARDM. Paris.

GOLOMB, S.-W. (1994). *Polyominoes - Puzzles, Patterns, Problems and Packings*. Princeton Science Library, Princeton, NJ.

HANNA, G. (1996). The Ongoing Value of Proof. In L. Puig and A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th International Conference for the Psychology of Mathematical Education* (vol.1, pp. 21-34). Valencia.

HANNA, G. (1995). Challenges to the importance of proof. *For the Learning of Mathematics*, *15*(3), 42–49.

IREM DE GRENOBLE (2016). *Situations de recherche pour la classe, pour le college et le lycée …et au-delà*. Grenoble : IREM de Grenoble. Disponible en ligne : https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/recherche-action/themes/raisonnement-logique-situations-de-recherche-pour-la-classe/situations-de-recherche-pour-la-classe-498450.kjsp?RH=413148517470877

LAKATOS, I. (1961). *Essays in the Logic of Mathematical Discovery*. Thesis. Cambridge University Library.

LAKATOS, I. (1984). *Preuves et réfutations*. Traduction de N. Balacheff et J.-M. Laborde. Hermann.

LAMPERT, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal*, *27*(1), 29–63.

MAHER, C. A., POWELL, A. B. & UPTEGROVE, E. B. (Eds.) (2010). *Combinatorics and reasoning: Representing, justifying and building isomorphisms.* New York, NY: Springer.

MARTIN, W.G. & HAREL, G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*, 41-51.

MARTINO, A. M. & MAHER, C. A. (1999). Teacher questioning to promote justification and generalization in mathematics: What research practice has taught us. *Journal of Mathematical Behavior*, *18*(1), 53–78.

OUVRIER-BUFFET, C. (2009). Maths à Modeler: Research-Situations for Teaching Mathematics. In E. Barbeau, & P. Taylor, (Eds.), *ICMI Study 16, Challenging Mathematics in and beyond the Classroom* (pp. 23-29). Springer.

OUVRIER-BUFFET, C. (2017). La chasse à la bête – Une situation recherche pour la classe. *Grand N, 100*, 5-32.

REID, D. (2002). Conjectures and refutations in grade 5 mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(1), 5–29.

SIERPINSKA, A. (1994). *Understanding in Mathematics*. Falmer Press, London: UK.

SIMON, M. A. & BLUME, G.W. (1996). Justification in the mathematics classroom: A study of prospective elementary teachers. *Journal of Mathematical Behavior, 15*, 3-31.

STYLIANIDES, A. J. (2007). The notion of proof in the context of elementary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 65*(1), 1–20.

STYLIANIDES, A.J. (2016). *Proving in the Elementary Mathematics Classroom*. Oxford: Oxford University Press.

VERGNAUD, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques, 10*(2/3), 133-169.

WOOD, D., BRUNER, J. S. & ROSS, G. (1976). The role of tutoring in problem solving. *Journal of Child Psychology and Psychiatry, 17*, 89–100.

YACKEL, E. & COBB, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*, 458–477.

ZACK, V. (1997). You have to prove us wrong: Proof at the elementary school level. In E. Pehkonen (Ed.). *Proceedings of the twenty-first International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 291–298).Lahti, Finland.

ANNEXE 1

Table 2.1 Examples and non-examples of the three components of a mathematical argument mentioned in the definition of proof.

Components of an argument	**Examples**	**Non-examples**[a]
Set of accepted statements	• Definitions • Axioms or "local axioms"[b] • Assumptions • Theorems • Established procedures or rules (e.g., calculation methods)	• Conjectures
Modes of argumentation	• Correct application of valid logical rules of inference such as *modus ponens* and *modus tollens* (cf. *proof by contraposition*) • Correct use of definitions to derive a statement • Systematic consideration of all the cases (finitely many) involved in a situation (cf. *proof by exhaustion*) • Construction of an example that satisfies the conditions of a statement but violates its conclusion (cf. *proof by counterexample*) • Development of a reasoning that shows that acceptance of a statement leads to a contradiction (cf. *reductio ad absurdum* or *proof by contradiction*[c])	• Application of invalid rules of inference such as the inverse and converse "rules" • Acceptance of a statement based on the confirming but inconclusive evidence that is offered by the examination of some cases in the domain of the statement (cf. *empirical arguments*)
Modes of argument representation[d]	• Linguistic (e.g., verbal language) • Physical (e.g., concrete apparatus) • Diagrammatic/pictorial • Tabular (e.g., two-column format) • Symbolic (e.g., algebraic)	

[a] By a "non-example" I mean an instantiation of a component of an argument that would not normally be part of a proof.
[b] In school mathematics, students may take as axioms some statements that a mathematician would treat as theorems; these are often referred to as *local axioms* following Freudenthal's (1973) notion of "local organization." For example, a local axiom may be "the sum of the interior angles of a triangle (on the Euclidean plane) is 180°," which elementary students may use as a starting point to explore and prove different statements (theorems), such as statements about the interior angles of other polygons (Stylianides, 2007b). At a later stage when students develop their mathematical knowledge they can revisit a local axiom and try to prove it (by using, e.g., the same set of axioms as mathematicians), thus turning it into a theorem (de Villiers, 1986).
[c] By *reductio ad absurdum* I mean the method of proof that demonstrates a statement is *false* by showing that its acceptance leads to a contradiction. By *proof by contradiction* I mean the method of proof that demonstrates a statement is *true* by showing that acceptance of its *negation* leads to a contradiction.
[d] Depending on its use—appropriate versus inappropriate—each of these modes of argument representation can be an example or a non-example.

Tableau 0 : Composantes de la définition illustrées par Stylianides (2016, p. 14).

ANNEXE 2

Fiche-élève

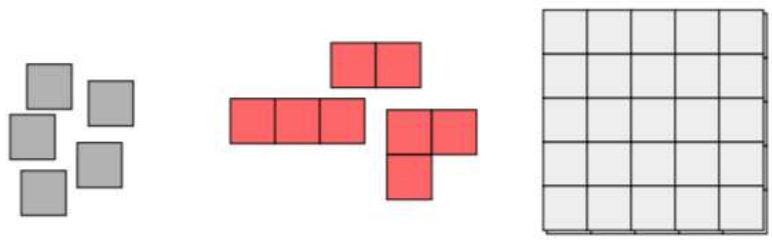
La « Chasse à la bête »

On veut protéger un territoire quadrillé (5×5) d'un nuage de bêtes qui veulent se poser. On dispose pour cela d'un grand nombre de pièges. Les bêtes comme les pièges se posent exactement sur les cases (et non en travers). Si une case est occupée par un piège, aucune bête ne peut se poser en couvrant la case.

Question. Quel est le plus petit nombre de pièges qui protégera le territoire ?

Il y a **trois problèmes distincts**, correspondant à trois sortes de bêtes (elles ne se mélangent pas !), à étudier dans l'ordre ci-après.

problème 1 : avec les dominos
problème 2 : avec les triminos longs
problème 3 : avec les triminos coudés



Pièges Les trois types de bêtes

Matériel : un plateau 5×5, des pièges (petits carrés), des dominos et des triminos. Commencer par les dominos, puis les triminos longs, enfin les triminos coudés

Image 3 : Fiche-élève (IREM de Grenoble, 2016).

ANNEXE 3 – EXEMPLES DE PRODUCTIONS D’ÉLÈVES DE CM1/CM2
SUR LA SITUATION DE LA CHASSE À LA BÊTE

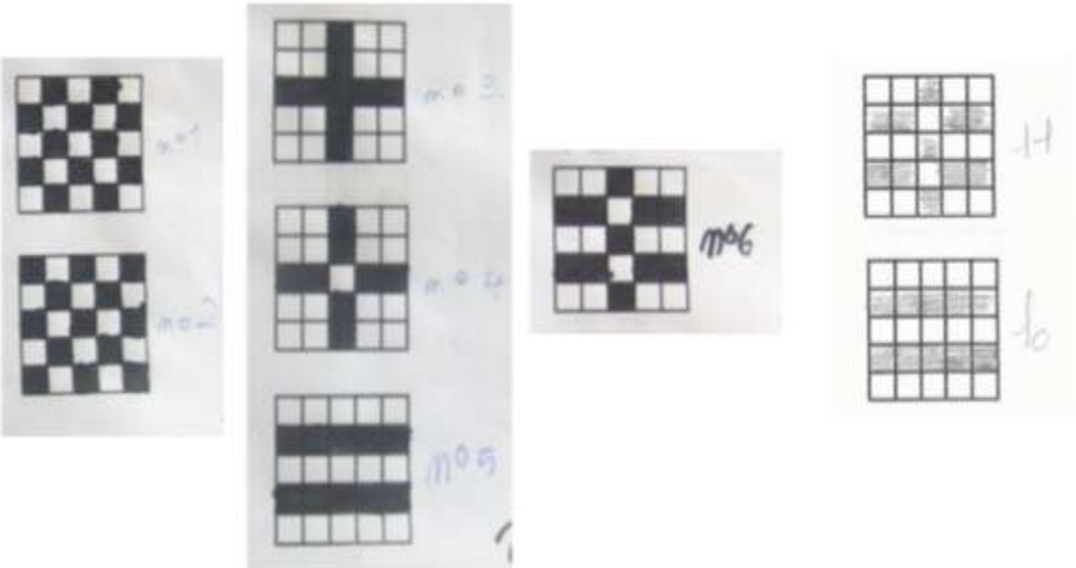


Image 4 : Solutions identifiées par les élèves pour les trois polyominos étudiés.

Affiche CM1	Affiche CM1/CM2
2 solutions : 12 et 13 obstacles. 11 est impossible.	
Idée 1 : les échecs pour colorier les cases en diagonale.	Idée 1 : 11 c'est impossible.
Idée 2 : pour une bête, il faut 1 piège.	Idée 2 : on essaie de mettre le moins possible d'obstacles sur les bords.
Idée 3 : si on recouvre le terrain, on a 12 bêtes.	Idée 3 : $24 \div 2 = 12$ donc 12 obstacles (à discuter).
Idée 4 : pour chasser une bête, il faut AU MOINS[9] 1 piège.	Idée 4 : dans la solution à 13, on a 12 cases blanches, en changeant la coloration on trouve une solution à 12.
Idée 5 : placer les pièges sur chaque ligne.	Idée 5 : on recouvre le terrain avec 12 bêtes et on les chasse une à une et on met 12 obstacles. Quand je veux chasser une bête, combien dois-je mettre d'obstacles ?
Idée 6 : on place 1 piège une case sur deux.	Idée 6 : on place un obstacle 1 case sur 2.
Idée 7 : nombre pair ou nombre impair sur les diagonales[10] $\Rightarrow$ 11 est impossible.	Idée 7 : $25 \div 2 = 12{,}5$ donc 12 obstacles car la bête occupe 2 cases.

Tableau 1 : Affiches réalisées avec les élèves lors de la mise en commun des « idées » sur la bête « domino ».

(Ouvrier-Buffet, 2017, p. 19).

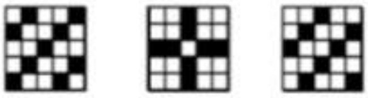
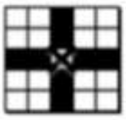
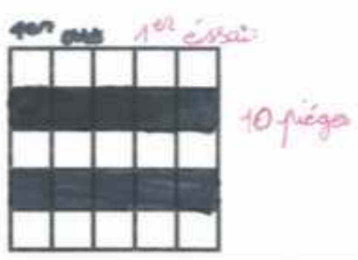
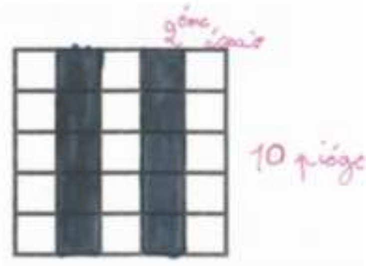
Affiche CM1	Affiche CM1/CM2
Solutions à 8 : sur les diagonales, en croix. Solutions à 9 : sur les diagonales, en croix. Solution à 7 impossible.	1 solution à 9 obstacles et 2 solutions à 8 obstacles :  7 est impossible.
Idée 1 : cela donne une solution à 8 en diagonales.	Idée 5[11] : on peut placer (au plus) 8 bêtes → 8 obstacles (1 obstacle par bête).
Idée 3 : ici on peut placer 8 bêtes.	Idée 6 : on place un obstacle une case sur 3.
Idée 4 : au moins un obstacle pour chasser une bête. Quand on a 8 bêtes, il faut au moins 8 pièges.	Idée 7 : $25 \div 3 \approx 8{,}333\ldots$ 8 obstacles.
Idée 8 : (un peu la même que l'idée 5) Pour empêcher les bêtes de se poser en position horizontale, on place une colonne d'obstacles, et pour les empêcher de se poser en position verticale, on place une ligne d'obstacles (au milieu). On enlève ensuite la case du milieu (qui ne sert à rien). 	Idée 3 : $24 \div 3 = 8$.

Tableau 2 : Affiches réalisées avec les élèves lors de la mise en commun des « idées » sur la bête « trimino long ».

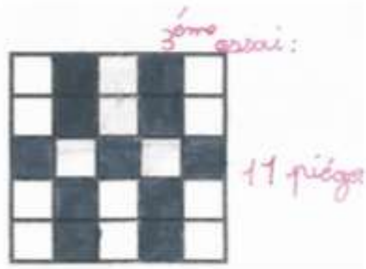
(Ouvrier-Buffet, 2017, p. 21).



1er essai : nous avons mis les pièges horizontalement (10 pièges).



2ème essai : nous avons mis les pièges verticalement (10 pièges).
Sachant que pour chasser une bête trimino en « L » il faut au moins « 1 » (un) piège voire parfois « 2 » ce qui empêcherait la bête de ne pas du tout pénétrer sur la surface.



3ème essai : nous avons aussi essayé de mettre des obstacles une fois sur deux mais ce serait moins bien car il faut 12 ou 13 obstacles (comme la bête domino). Ce qui est bizarre, c'est qu'on a 8 bêtes et 10 obstacles.
On a fait une autre solution, la voici (3ème carreau[12]).

4ème essai : pour chasser 8 bêtes il faut au moins 8 obstacles. »

Image 5 : Productions d'élèves – rédaction de « preuves » (Ouvrier-Buffet, 2017, p. 22).