Penser et organiser les articulations entre abstrait et concret dans l'apprentissage des mathematiques, de la maternelle a l'universite

Viviane **DURAND-GUERRIER**

IMAG univ Montpellier, CNRS, Montpellier, France
viviane.durand-guerrier@umontpellier.fr

Résumé

Dans ce texte, je soutiens la thèse de nature épistémologique selon laquelle la prise en compte explicite des articulations entre abstrait et concret est une nécessité pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques tout au long du curriculum, depuis la maternelle jusqu'à l'université. Je montrerai sur quelques exemples comment la Théorie des Situations Didactiques développée par Guy Brousseau et la Théorie des champs conceptuels développée par Gérard Vergnaud prennent en compte ces articulations et proposent des concepts et des méthodes sur lesquels on peut s'appuyer pour les faire vivre en classe. L'articulation entre la syntaxe, la sémantique et la pragmatique, au sens de Charles Morris, constitue un fil conducteur des analyses.

Mots clés

Enseignement et apprentissage des mathématiques – articulation entre abstrait et concret – syntaxe, sémantique et pragmatique

> Le concret, c'est de l'abstrait rendu familier par l'usage (Langevin, 1950)

I. Introduction

Ce texte est la version écrite de l'exposé présenté dans le cadre du Colloquium co-organisé par l'ARDM et la CFEM en novembre 2018. Dans cet exposé, je me suis proposée de donner des arguments pour soutenir la thèse de nature épistémologique selon laquelle la prise en compte explicite des articulations entre abstrait et concret est une nécessité pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques tout au long du curriculum de la maternelle à l'université. Ceci va de pair avec la thèse didactique selon laquelle le travail sur les objets, leurs propriétés et des relations qu'ils entretiennent entre eux jouent un rôle central dans l'apprentissage des mathématiques (Dias & Durand-Guerrier, 2005), ce qui revient à mettre au cœur du questionnement didactique la sémantique au sens logique du terme et ses articulations avec la syntaxe et la pragmatique, au sens de Morris (1938) ou Eco (1980) :

- La sémantique concerne les relations entre les signes et les objets auxquels ils réfèrent.
- La syntaxe concerne les règles d'intégration des signes dans un système donné.
- La pragmatique concerne les relations entre les sujets et les signes : les signes perçus en fonction de leur origine, des effets qu'ils produisent, et de leurs usages.

Ce texte est structuré en quatre parties. Dans la première partie, je montre sur l'exemple classique de l'agrandissement du puzzle que la Théorie des Situations Didactiques (Brousseau 1998) offre un levier pour penser le rapport au monde des connaissances mathématiques. Dans la deuxième partie, je soutiendrai la thèse épistémologique et didactique selon laquelle la géométrie de l'école est un élaboration conceptuelle stable permettant d'agir dans et sur le monde. Dans la troisième partie, je montrerai que la construction du nombre à l'école primaire met en jeu une dialectique subtile entre objets concrets et objets abstraits. Dans la dernière partie, je reviendrai sur la construction des nombres réels par Dedekind (1872), mettant en valeur la définition théorique du continu comme formalisation du contenu intuitif de ce concept porté par la droite.

II. LA THEORIE DES SITUATIONS DIDACTIQUES COMME LEVIER POUR PENSER LES RAPPORTS AU MONDE DES CONNAISSANCES MATHEMATIQUES

La Théorie des Situations Didactiques offre une méthodologie de recherche qui permet d'insérer les situations didactiques singulières dans un réseau plus vaste de significations, par la confrontation aux objets (situation d'action), au discours sur les objets (situation de formulation), et à l'insertion dans un réseau de connaissances dans un processus d'argumentation et de preuve (situations de validation et d'institutionnalisation). Nous allons illustrer ceci par l'exemple de l'agrandissement du puzzle dont nous rappelons ci-dessous les consignes dans la version donnée dans Brousseau (1998).

Voici des puzzles. Vous allez en fabriquer de semblables, plus grands que les modèles, en respectant la règle suivante : le segment qui mesure quatre centimètres sur le modèle devra mesurer sept centimètres sur votre reproduction.

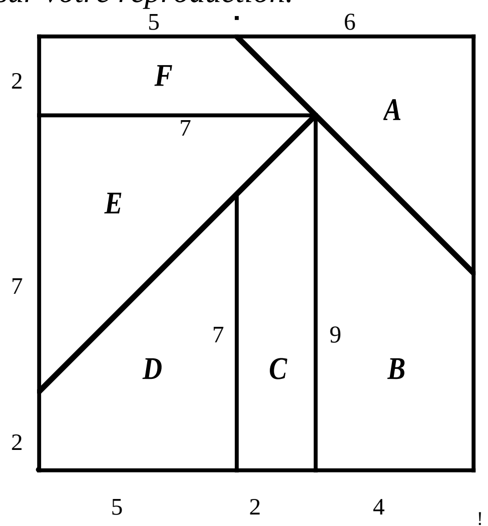

Figure 1 : le puzzle distribué aux élèves (Brousseau, 1998)

La situation s'adresse à des élèves de 9-10 ans. Les élèves travaillent en équipes de 5.
Ils doivent se mettent d'accord sur une méthode commune d'agrandissement, puis ils se séparent, chacun allant agrandir sa pièce suivant la méthode commune retenue. Ceci fait, le groupe se reforme et les élèves essayent de reconstituer le puzzle agrandi avec les pièces réalisées individuellement. Parmi les méthodes susceptibles d'apparaître à ce niveau, il y a une méthode erronée attendue qu'il s'agira de remettre en cause : ajouter 3 cm à chacune des dimensions. Compte tenu de la découpe choisie pour le puzzle, cette méthode ne permet pas de reconstituer le puzzle agrandi. Ceci apparaît assez clairement visuellement ; en effet, outre le fait que les pièces ne s'ajustent pas, avec cette méthode, on ajoute trois fois 3 cm aux côtés verticaux et deux fois 3 cm aux côté horizontaux, si bien que la figure reconstituée n'est plus un carré, contrairement au puzzle initial. Après accord sur ce point, les élèves sont invités à chercher une autre méthode.
Dans cette première partie de la situation, les élèves sont confrontés au fait que la procédure additive ne permet pas de reconstituer le puzzle ; on observe un non-respect des formes, des angles, du parallélisme. Autrement dit, la réalité résiste ; elle disqualifie le modèle additif et permet de se mettre d'accord sur ce que signifie « conserver la forme ». Ceci met en évidence le fait que les mathématiques « ont des comptes à rendre au réel ». La suite de la situation va permettre progressivement d'établir que pour pouvoir reconstituer le puzzle conformément au modèle affiché par le professeur au tableau, la méthode pour agrandir les pièces consiste à multiplier les longueurs de tous les côtés par un même nombre. Ceci se justifie par trois aspects interdépendants : la conservation de la forme qui relève de l'aspect perceptif ; la conservation des angles et du parallélisme qui relève de l'aspect géométrique ; la proportionnalité des mesures de longueurs, qui relève de l'aspect numérique. Ceci est en lien avec des résultats et notions qui seront étudiés plus tard dans le curriculum : le théorème de Thalès, l'homothétie, les similitudes.

III. LA GEOMETRIE COMME ELABORATION CONCEPTUELLE STABLE PERMETTANT D'AGIR DANS ET SUR LE MONDE.

Les questions épistémologiques soulevées par les rapports entre la Géométrie comme théorie et les objets et situations du monde ont fait l'objet d'une abondante littérature. Je me réfère ici à quelques auteurs qui, du fait de mon expérience de chercheuse et de formatrice, sont de nature à éclairer les questions didactiques posées par l'enseignement de la géométrie.
Sinaceur (1991) se référant à Gonseth écrit :

> *« Le sens d'un concept lui vient de la pratique dans laquelle il a été forgé pour des besoins précis. (...). Ainsi la géométrie des Grecs est une dialectique de l'espace physique à travers l'espace sensible » (p. 195)*

Elle ajoute

> *« Cette interpénétration remarquable entre intuition et schématisation, formel et non formel, abstrait et concret était déjà présente dans Les mathématiques et la réalité[1], où Gonseth remarquait (p.300) que les éléments du domaine d'un modèle peuvent être pris dans le « monde des choses » ou « dans le monde des abstraits » (op. cit. p. 200)*

[1] Gonseth (1936)

Giusti (2000) commentant la définition de la sphère donnée par Euclide va dans le même sens :

> *« La sphère est une figure enclose par une demi circonférence qui tourne autour du diamètre jusqu'à revenir au lieu d'où elle était partie » (Euclide Livre X1) « qui évoque plus le tour de l'ouvrier que le compas du géomètre » (op. cit. p. 22)*

Cette relation entre géométrie et monde sensible est l'objet de l'ouvrage de Nicod (1924), intitulé *La géométrie dans le monde sensible*. Au chapitre 4, *Points et volumes*, il écrit :

> *« La géométrie pourrait de même s'accommoder de l'absence d'une valeur simple du point dans la nature, si quelque conception physique complexe se trouvait en jouer le rôle. Mais la géométrie elle-même nous met sur la voie d'une telle conception. Car il n'est pas vrai qu'elle considère nécessairement le point comme un terme simple. On peut concevoir des systèmes qui posent le point comme composé, et composé de termes plus faciles à interpréter dans la nature. » (op. cit. p. 24-26)*

Longo (1997) commentant l'ouvrage d'Alain Berthoz (1997), *Le sens du mouvement,* fait l'hypothèse du rôle crucial de nos expériences spatiales :

> *« Le triangle, le carré, le cercle mathématiques ne sont peut-être pas des « généralisations » (...) de la vision des pierres rondes ou carrées comme nous le proposent les empiristes, mais ils sont des reconstructions à l'aide de la mémoire d'une pluralité d'actes d'expériences spatiales. » (op. cit. p. 207)*

Ces quelques citations font écho aux questions posées par les travaux de Berthelot et Salin (1992) que nous n'avons pas abordés dans cet exposé. Ces réflexions épistémologiques étaient au cœur des travaux que nous avons conduits avec Thierry Dias dans le cadre de ses travaux de DEA et de Doctorat (Dias & Durand-Guerrier, 2005 ; Dias, 2008) autour d'un problème classique en géométrie des solides qui permet de poser en classe la question des relations entre l'Espace et le Plan. La situation est construite autour du problème consistant à déterminer tous les polyèdres réguliers. La définition d'un polyèdre régulier est donnée sous la forme suivante : un polyèdre régulier est un polyèdre convexe, dont les faces sont des polygones réguliers deux à deux superposables (identiques), et tel que à chaque sommet correspond le même nombre de faces. Des pièces en plastique permettant de réaliser des polyèdres sont mises librement à disposition des participants. Ce problème peut être proposé sous cette forme à différents publics – école primaire, collège, lycée, université, formation des enseignants du primaire ou du secondaire, animations mathématiques.
Le point nodal de la situation réside dans l'impossibilité de réaliser un polyèdre avec des faces hexagonales régulières. Ceci en lien avec le fait que l'on peut paver le plan avec des hexagones réguliers. Cette situation pose donc de manière « naturelle » la question des relations entre Espace et Plan. Au cours des nombreuses mises en œuvre que nous avons faites, trois grandes catégories de démarches ont été observées :

- exploration directe avec le matériel,
- allers et retours entre recherche papier/crayon et exploration avec le matériel,
- recherche papier/crayon avant toute exploration avec le matériel, voire refus d'une telle exploration.

La confrontation avec la réalité s'avère le plus souvent cruciale. En effet, une conjecture fréquente émerge au début du travail : *il y a une infinité de polyèdres réguliers, un exactement pour chaque type de polygone régulier.*
Compte tenu du matériel disponible, les tentatives de réaliser un polyèdre régulier à faces hexagonales peuvent permettre de remettre en cause cette conjecture, mais cela prend parfois beaucoup de temps, en raison en particulier de la souplesse relative du matériel, et ce quel que soit le niveau considéré. Il n'est pas rare que certains participants soient convaincus qu'à condition de mettre suffisamment d'hexagones réguliers, on pourra obtenir une courbure

(Dias & Durand-Guerrier, 2005, p. 73). Pour se convaincre de l'impossibilité, certains participants font parfois référence au fait que l'on peut paver le sol avec des hexagones réguliers, ceci en lien avec le fait que la somme des angles au sommet pour trois hexagones réguliers est égale à la somme de quatre angles droits, et donc que l'on ne peut pas sortir du plan (ibid, p. 73-74). Une fois cette impossibilité actée, l'émergence de la condition sur les angles pour pouvoir réaliser un polyèdre convexe apparaît en général. Elle permet de prédire que le nombre maximum de polyèdres réguliers est 5. Le fait de pouvoir les construire garantit leur existence empirique. Cette situation met en jeu une dialectique entre abstrait et concret bien identifiée par Gonseth :

> *« La dialectique en général et celle de l'espace en particulier résolvent le problème fondamental posé dans Les mathématiques et la réalité, celui de la « connexion » entre subjectif et objectif, pensé et donné, rationnel et réel, théorique et expérimental, abstrait et concret » (Sinaceur, 1991, p. 192, à propos de Gonseth)*

Elle illustre le propos de Longo :

> *« La cohérence et l'objectivité de la construction conceptuelle que […] nous proposons, dans ce cas la géométrie, se fonde sur l'efficacité de notre action dans le monde car le monde ses symétries, sa connexion, ses régularités s'imposent à nous ou font résistance quand nous agissons ainsi que quand nous proposons une théorie (...). » (Longo , 1997, p. 207)*

La fin de cette citation attire notre attention sur le fait qu'une théorie géométrique qui ne prendrait pas en compte cette dialectique entre Plan et Espace ne serait pas adaptée pour rendre compte des propriétés de ces objets du micro ou du méso espace que sont les polyèdres, et partant pour les activités associées de nature spatio-géométrique, au sens de Berthelot & Salin (1992). Faire vivre en classe la dialectique entre objets sensibles et objets théoriques de la géométrie est un enjeu essentiel de la scolarité obligatoire si l'on veut préparer les élèves à la diversité des besoins qu'ils sont susceptibles de rencontrer dans la suite de leurs études et dans leur vie professionnelle.

IV. La construction du nombre a l'ecole primaire : une dialectique subtile entre objets concrets et objets abstraits

Alors que j'étais en poste à l'IUFM de Lyon au début des années 2000, j'ai été chargée de faire des formations sur les relations entre grandeurs et mesures à l'école primaire. Au fil des lectures conduites pour préparer cette formation, j'ai été interpellée par une remarque du Guy Brousseau dans son cours pour la XIème école d'été de didactique des Mathématiques, intitulé *Les grandeurs dans la scolarité obligatoire* :

> *« Les entiers naturels vont apparaître dans la mesure de la grandeur probablement la plus primitive : le cardinal des collections finies. »* (Brousseau, 2001, p. 342)

Il m'est apparu alors que ce point de vue sur les entiers naturels pouvait non seulement éclairer la distinction entre grandeurs et mesures souvent identifiées l'une à l'autre par les professeurs d'école, mais aussi éclairer le processus de construction du nombre à l'école primaire, en mettant en lumière une dialectique entre objets concrets et objets abstraits, que je me propose d'expliciter dans ce qui suit.

Nous sommes à l'école maternelle, dans un atelier autour du nombre ; des objets matériels sont posés sur une table. Notez que des objets posés sur une table ne forment pas en soi une collection. On peut fabriquer une collection en les rassemblant, en les embrassant du regard, en les entourant de fil, en décidant de les comparer à une collection existante, etc. On obtient alors une réalisation concrète de l'objet abstrait « collection ». Construire en acte ce concept est une première étape pour s'engager dans l'étape suivante qui va consister à comparer la taille de deux collections : étant donné deux collections, on peut s'intéresser à la question de savoir si elles contiennent autant d'objets l'une que l'autre ou si une des deux collections contient plus d'objets que l'autre. Pour répondre à cette question, on peut réaliser une mise en correspondance terme à terme, en déplaçant les objets concrets constituant les deux collections pour les mettre en vis à vis. C'est une réalisation concrète qui permet de répondre à une question posée sur des objets abstraits (les collections). Ce protocole est associé à un nouvel objet abstrait (une grandeur) : « taille d'une collection discrète finie », et aux trois relations binaires : « avoir la même taille que » ; « être de plus grande taille que » ; « être de plus petite taille que ».

A l'école maternelle (moyenne et grande section, 4-5 ans), les élèves rencontrent de nombreuses collections, qui deviennent progressivement des objets concrets, au sens où dans de très nombreuses situations, les objets matériels sont appréhendés comme étant organisés en collections, certaines jouant le rôle de collections témoins pour la construction de la mesure associée.

Pour comparer des collections d'objets matériels qui ne sont pas dans le même espace (par exemple dans deux pièces différentes) et que l'on ne peut pas déplacer, on peut utiliser une collection de référence (par exemple des jetons neutres, ou des barres sur une bande de papier) que l'on peut transporter dans l'autre pièce. On a ainsi une collection de référence concrète, qui permet de travailler en acte la transitivité de la relation « avoir la même taille que ». On peut alors s'intéresser à fabriquer des collections ayant la même taille qu'une collection donnée, ou ayant une plus grande/plus petite taille qu'une collection donnée.

Ceci permet plus généralement de travailler, avec des objets concrets, la grandeur « taille d'une collection discrète finie », et d'en faire un objet familier. L'étape suivante (grande section, 5-6 ans) consiste à fabriquer une famille de collections de référence à partir de la suite ordonnée des nombres entiers naturels énoncée oralement (réalisation concrète d'une section commençante de N). La mise en correspondance terme à terme de différentes collections avec des sections commençantes de N permet d'identifier que pour certaines paires de collections, le dernier mot nombre énoncé est le même, ce qui permet de définir des classes de collections. Finalement, il s'agit de comprendre que ce dernier mot nombre énoncé permet de répondre à la question « combien y-a-t-il d'objets dans la collection considérée ? ».

Ce parcours va permettre la mise en place du schème du dénombrement (Vergnaud, 1991) à la fin de l'école maternelle :

- coordination des mouvements des yeux et des gestes du doigt et de la main par rapport à la position des objets,
- énoncé coordonné de la suite numérique,
- cardinalisation de l'ensemble dénombré par un soulignement tonique ou par répétition du dernier mot-nombre prononcé.

Pour Vergnaud, un schème est « l'organisation invariante de la conduite pour une classe de situations donnée ». C'est dans les schèmes qu'il faut chercher les connaissances-en-acte du sujet, qui permettent à l'action d'être opératoire. Comme il le souligne, l'automatisation est l'une des manifestations les plus visibles du caractère invariant de l'organisation de l'action, ce qui n'exclut pas un contrôle conscient (Vergnaud 1990, p. 135-136).

Pour Vergnaud, un schème est composé de règles d'action et d'anticipation, d'invariants opératoires (concepts-en-acte et théorèmes-en-acte, inférences-en–acte) indispensables à la mise en œuvre du schème (op. cit. p. 142). On peut ainsi identifier des inférences-en-acte dans la mise en œuvre du schème du dénombrement, par exemple :

- si chaque objet a été pointé une fois et une seule, le dernier mot-nombre énoncé permet de répondre à la question « combien ? » (règle d'action, théorème-en-acte) ;
- chaque objet a été pointé une fois et une seule (prémisse) ; ceci suppose la mise en œuvre correcte des deux premières étapes du schème ;
- le dernier mot-nombre énoncé est la réponse à la question « combien ? » (conclusion).

La stabilisation de ce schème à la fin de l'école maternelle va permettre de disposer d'un concept-en-acte de nombre entier naturel et partant de s'engager dans la construction des opérations sur les entiers dans une dialectique entre syntaxe et sémantique.

Dans la construction des entiers naturels à l'école primaire, on peut identifier les trois dimensions, sémantique, syntaxe et pragmatique, mentionnées au début de ce texte. Les collections ; les quantités auxquelles renvoient les écritures ou les collections témoins ou d'autres signes utilisés en lieu et place des nombres ; la comparaison par correspondance terme à terme renvoient à la sémantique. La liste ordonnée des nombres, les règles d'écritures dans un système de numération donné renvoient à la syntaxe. L'utilisation ou non du schème du dénombrement ; la reconnaissance ou non des collections témoins ; la manière d'organiser une collection pour pouvoir la dénombrer ; la manière d'utiliser les nombres entiers ; la mise en relation ou non entre écriture et quantité renvoient à la dimension pragmatique. On retrouve ces trois dimensions dans l'apprentissage des opérations sur les entiers naturels, par exemple, dans le cas de l'addition.

Sémantique : L'addition des entiers est définie comme le cardinal de la réunion de deux collections discrètes finies disjointes. Le résultat est indépendant de la nature des objets en jeu sous réserve que mélanger les objets préserve leur intégrité.

Syntaxe : L'addition est définie comme l'itération du successeur ; cela ne nécessite pas la référence aux quantités. Cette définition permet de fonder les algorithmes dans un système donné de numération.

Pragmatique : L'articulation entre les deux aspects se construit par un va-et-vient entre calculs (syntaxe) et comptage effectif des collections d'objets, incluant les groupements (sémantique). Le comptage effectif permet de valider la commutativité de l'addition d'un point de vue sémantique.

A la fin de l'école primaire, on peut faire l'hypothèse que la fréquentation des nombres entiers naturels et des opérations sur ces nombres a permis de développer une familiarité qui va leur permettre de jouer le rôle d'objets concrets (au sens de Paul Langevin) qui pourront être engagés dans de nouveaux apprentissages. Ceci suppose que les actions mises en œuvre sur ces objets fournissent au sujet des informations suffisamment fiables pour soutenir des conjectures d'une part, permettre leur mise à l'épreuve d'autre part.

A l'école primaire, on l'a vu, ce sont les collections finies qui jouent le rôle de sémantique pour la construction du nombre et des opérations.

A partir du collège et au lycée, comme le souligne Y. Chevallard, c'est le domaine des nombres entiers naturels qui va servir de sémantique pour la construction du calcul littéral et de l'algèbre.

> *« Lorsqu'en classe de seconde, l'enseignant passe de l'observation que 2+3 = 5 et 3+2 = 5 à l'écriture de la relation générale a+b = b+a, il passe alors d'un calcul sur les nombres (entier naturel) à un calcul algébrique (à coefficients entiers naturels). En d'autres termes, un calcul algébrique que nous ne définirons pas plus précisément ici, rend manifeste une syntaxe à laquelle le domaine de calcul associé fournit une sémantique. » (Chevallard, 1989, p. 50)*

C'est ce que l'on peut observer dans la mise en œuvre d'une situation d'introduction au calcul littéral que je présente ci-dessous.

V. UNE SITUATION D'INTRODUCTION AU CALCUL LITTERAL

Cette situation a été développé dans la thèse de G. Barallobres. Elle est présentée et discutée dans Barallobres & Giroux (2008). Il s'agit de trouver le plus rapidement possible la somme de dix nombres consécutifs (entiers naturels). L'organisation de la situation comporte des phases d'action, de formulation et de validation au sens de la théorie des situations didactiques. Les élèves (12-13 ans) sont par équipe de 4 ou 5. Le jeu comporte trois étapes.

- *Étape 1* : celui qui trouve la somme a gagné.
  - Série 1 : 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28
  - Série 2 : 783, 784, 785, 786, 787 788 789 790,791, 792
- *Étape 2* : Temps de réflexion.
  Trouver une méthode pour trouver la somme le plus vite possible quels que soient les nombres proposés par le professeur. Reprise du jeu avec des nombres de plus en plus grands.
- *Étape 3* : Recherche des raisons qui permettent d'expliquer pourquoi la méthode marche pour toute série de dix nombres entiers naturels consécutifs.
- Bilan des méthodes et présentation du travail de chaque équipe.

Lors d'une expérimentation en classe, les chercheurs notent deux méthodes reconnues comme les plus efficaces par les élèves.
La première consiste à multiplier le premier nombre par 10 et à ajouter 45, ce qui peut se traduire par la formule 10n+45, acceptée par la majorité de la classe ; elle s'appuie soit sur la décomposition 19, 19 +1, 19 +2, 19 + 3, …. 19+ 9, soit sur la décomposition additive en dizaine et unité 10 + 9, 20, 20 + 1 etc.. Dans ce dernier cas, l'origine de 45 ne va pas de soi.
La deuxième méthode consiste à ajouter 5 au cinquième nombre de la liste. Pour la série 1 qui commence par 19, on obtient 235 ; le groupe qui l'a produite déclare avoir observé les différentes séries proposées et les résultats obtenus.
Selon le point de vue des auteurs, le milieu construit au cours du travail en équipe par les élèves ayant adopté une stratégie conduisant à la première méthode devrait *a priori* être plus riche pour la validation que celui construit par les élèves ayant produit la deuxième méthode. Cependant, un élève de ce dernier groupe est capable très rapidement de faire le lien entre sa méthode (ajouter 5 à droite du 5ème nombre) et la première méthode sur la série qui commence par 15 (résultat 195) :

> *« E2 : Oui, parce que le cinquième nombre a déjà le « 4 » ajouté, parce que la première méthode est « fois 10 » et après plus 45.*
>
> *Professeur : j'écris l'autre méthode pour vous faire rappeler : le premier nombre $\times$ 10 + 45, dans notre exemple : 15$\times$10+45*
>
> *E2 : le 19 est le cinquième nombre, et il a déjà le 4 ajouté (19 = 15 + 4). Alors il reste juste le 5, mais comme on multiplie par 10, on met juste le 5 en arrière et c'est fini ».*

Pour interpréter ce phénomène, on peut :

- se pencher sur les actions possibles que les élèves peuvent mettre en œuvre pour obtenir le résultat dans la première étape (action sur des objets familiers avec des techniques disponibles)
- faire des hypothèses sur les méthodes auxquelles ces diverses actions sont susceptibles de conduire.

En d'autres mots, il s'agit de tenter de spécifier les différents milieux potentiels pour la validation.

Une méthode pouvant conduire à l'identification de l'invariant consiste à poser l'addition en colonne. En effet, si on le fait plusieurs fois, avec des nombres de deux chiffres, par exemple, le calcul montre que :

- le résultat se termine toujours par 5,
- on a toujours une retenue de 4,
- la somme des « chiffres » des dizaines est égale au premier nombre de la liste,
- le dernier nombre écrit est égal au cinquième nombre de la liste, il est obtenu par l'ajout de 4 à ce premier nombre,
- le résultat final s'écrit donc en concaténant le 5ème nombre de la liste et le chiffre 5 écrit au début.

Cette manière de faire crée un milieu qui favorise a priori le transfert entre les deux méthodes. Cette méthode met en œuvre la dimension sémantique, les nombres entiers et la pratique de l'algorithme de l'addition sur ces nombres fournissant des rétroactions fiables que l'élève peut interpréter.
L'observation des résultats lorsque ceux-ci sont écrits au tableau après chaque jeu peut permettre une identification visuelle de l'invariant sur l'écriture des résultats mis en regard avec les nombres initiaux. Ceci relève de la dimension syntaxique.
Dans les mises en œuvre des adaptations de cette situation que je fais régulièrement en formation des enseignants, ou avec les étudiants de première année de licence, une autre méthode très rapide est fréquemment proposée. Prendre la valeur médiane et la multiplier par 10, comme dans l'exemple ci-dessous :

- 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26
- 17- 18 - 19 - 20 - 21 - 21,5 - 22 - 23 - 24 - 25 - 26
- 21,5 × 10 = 215

Ceci peut se justifier par la compensation des écarts.
On rencontre aussi parfois la méthode dite de « Gauss », consistant à ajouter les nombres en colonnes après renversement de l'ordre des nombres comme ci-dessous :

17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26
26, 25, 24, 23, 22, 21, 20, 19, 18, 17

Ceci conduit à la formule (10 × 43)/2.
D'une manière générale, les élèves et les étudiants disposent de nombreuses méthodes de deux catégories distinctes :

- des méthodes mobilisant la numération décimale de position : poser l'opération en colonne, mise en œuvre de calcul réfléchi ; observation des formes écrites des résultats obtenus ;
- une méthode consistant à décomposer les nombres avec le point de vue successeur.

Les méthodes appartenant à ces deux catégories peuvent faire apparaître la formule générale « 10 fois le premier nombre + 45 ». Il y a une troisième catégorie :

- des méthodes fondées sur la compensation des écarts : médiane, regroupements pouvant faire apparaître la formule : « ajouter le premier et le dernier terme et multiplier par 5 », ou à la manière de Gauss multiplier cette somme par 10 et diviser par 2.

Seules les méthodes de la deuxième et de la troisième catégorie se généralisent à des séries comportant un nombre quelconque de nombres consécutifs (par exemple séries de huit nombres consécutifs).
Choisir de commencer ou non avec des séries de dix nombres consécutifs est ainsi une variable didactique essentielle de cette situation.
Bien qu'elle ait été initialement prévue pour le collège (élèves de 12-13 ans), on peut proposer cette situation à des publics très variés. Au cycle 3 de l'école primaire, soit dans le cadre du calcul réfléchi, soit sous la forme d'un problème de recherche pour dégager des règles

générales, l'objectif n'étant pas d'introduire des lettres. La validation s'appuie sur les résultats de calcul normalement stabilisés à ce niveau. On peut utiliser la calculatrice comme moyen de contrôle ; cela permet de voir que c'est beaucoup moins rapide que le calcul mental.
Dans la mise en œuvre avec les élèves de telles situations de recherche, il faut considérer : des phases d'actions ; de formulation ; de débat et de validation ; avec des allers et retours entre les trois, avant une institutionnalisation. On peut également proposer cette situation au lycée ou en début d'université en relation avec le travail sur les suites arithmétiques pour travailler les relations entre équivalence syntaxique et équivalence sémantique. Elle a aussi été adapté par Nicolas Pelay dans sa thèse pour une utilisation en contexte d'animation scientifique, nourrissant le développement du concept d'ingénierie didactique et ludique (Pelay, 2011).
Le jeu (défi) de la rapidité est ici un moteur de la situation qui permet l'engagement des élèves dans l'action, sous réserve que les valeurs choisies leur permettent de faire des calculs conduisant à des résultats auxquels ils peuvent se fier.
Cette situation peut également être utilisée en formation pour illustrer plusieurs points cruciaux en formation des enseignants, à savoir : l'importance des expériences faites par les sujets pendant la phase de la situation d'action dans l'évolution du milieu pour la validation ; le fait que la situation de formulation ne suffit pas toujours à elle seule à rendre compte des actions des sujets, puisque des actions diverses, mobilisant des connaissances différentes, peuvent conduire à des formulations identiques ; le fait que l'émergence d'une loi générale doit être confrontée à nouveau aux calculs effectifs (résultats de l'action) afin de pouvoir être validée par chacun des sujets.
Cette situation éclaire l'intérêt des notions de variables didactiques et de milieu de la théorie des situations didactiques pour penser et organiser les situations d'apprentissage et met en évidence l'importance des actions effectives sur des objets suffisamment familiers pour que les résultats de ces actions soient fiables pour le sujet et permettent de s'engager dans un débat sur la validation. Sa mise en œuvre en classe est relativement peu coûteuse, ce qui permet d'observer en situation le jeu entre syntaxe, sémantique et pragmatique, mettant en évidence le fait que la multiplication des expériences, en appui sur des objets familiers, des méthodes et des connaissances naturalisées pour le sujet, favorise l'élaboration de nouveaux objets conceptuels et de leurs propriétés, de résultats nouveaux et de leurs preuves.

VI. LE CONTINU. ENTRE INTUITION ET FORMALISATION

La question des relations entre concret et abstrait ne se limite pas aux mathématiques de la scolarité obligatoire. Dans cette dernière partie, je vais aborder la question du continu au sens de l'ensemble des nombres réels. Ce concept est étudié en général à l'université et est source de difficultés résistantes pour de nombreux étudiants (Bergé, 2018, Durand-Guerrier, 2016). Pourtant, comme le rappelle Longo (1999, p.403), nous avons une expérience commune du continu, « celle du tracé d'une ligne sur une feuille de papier, sans lever le crayon. Les points disparaissent dans la trace obtenue ; ils réapparaissent, comme points isolés, lorsque deux lignes se coupent ». Cette intuition du continu sert de référence à Dedekind pour sa construction des nombres réels par les coupures, ce qui en fait une formalisation du contenu intuitif de la droite. Je rappelle ci-dessous brièvement les principaux aspects de la construction des nombres réels par Dedekind par la méthode des coupures.
Dans son essai de 1872, *Stetigkeit und Irrationale Zahlen*, il motive ainsi sa construction :

> *« Mais il est un fait de la plus haute importance : sur la droite L il existe une infinité de points qui ne correspondent à aucun point rationnel. (…) nous pouvons affirmer : la droite L est infiniment plus riche en individus ponctuels que le domaine R des nombres rationnels en individus numériques.*
>
> *(…) il devient alors absolument nécessaire d'affiner substantiellement l'instrument R, construit par la création des nombres rationnels, en créant de nouveaux nombres de telle sorte que le domaine des nombres acquière la même complétude, ou disons le tout de suite la même continuité que la ligne droite. » (Dedekind 1872, 2008, p. 69)*

Il s'appuie ensuite sur le contenu intuitif du continu de la droite pour introduire la notion de coupure.

> *« Je trouve l'essence de la continuité (…) dans le principe suivant :*
>
> *Si tous les points de la droite sont répartis en deux classes telles que tout point de la première classe est situé à gauche de tout point de la seconde classe, alors il existe un et un seul point qui opère cette distribution de tous les points en deux classes, cette découpe de la droite en deux portions. » (p. 72)*

Par analogie avec la droite, Dedekind définit alors des coupures dans l'ensemble des nombres rationnels, qu'il note R : deux classes A_1 et A_2 telles que tout nombre a_1 de la première classe est plus petit que tout nombre a_2 de la seconde classe.
Ceci fait, il énonce les deux résultats essentiels ci-dessous :

1. Tout nombre rationnel opère une coupure de R,
2. Certaines coupures de R ne sont pas opérées par des nombres rationnels.

Il donne comme exemple la coupure définie comme suit : soit A_2 la classe des rationnels positifs dont le carré est supérieur strictement à 2, et A_1 son complémentaire dans l'ensemble R des nombres rationnels. Cette coupure n'est opérée par aucun nombre rationnel, car il n'existe aucun nombre rationnel dont le carré est 2. Il montre que ce résultat vaut pour tous les entiers naturels qui ne sont pas des carrés parfaits, ce qui lui permet d'affirmer qu'il existe une infinité de coupures dans l'ensemble des nombres rationnels non opérées par des nombres rationnels. Ceci caractérise ce que Dedekind appelle l'incomplétude ou la discontinuité du domaine R de tous les nombres rationnels. Pour obtenir un ensemble continu, il décide de créer de nouveaux nombres.

> *« Maintenant, chaque fois que nous sommes en présence d'une coupure (A_1, A_2) non opérée par un nombre rationnel, nous créons un nouveau nombre α, un nombre irrationnel que nous considérons comme complètement défini par cette coupure (…). » (op. cit. p.77)*

Le nouveau système R ainsi construit est un ensemble totalement ordonné unidimensionnel, qui possède la continuité :

> *« IV. Si le système R de tous les nombres réels se subdivise en deux classes R_1, R_2 telles que tout nombre a_1 de la classe R_1 est plus petit que tout nombre a_2 de la classe R_2, alors il existe un nombre et un seul α par lequel est opéré ce partage. » (op. cit. p.81)*

L'ensemble ainsi construit est complet au sens où la réitération du procédé des coupures ne produit pas de nouveaux nombres. Il n'y a plus de « lacunes ».
Des recherches en didactique des mathématiques sont en cours depuis plusieurs années sur le concept de complétude et donnent lieu à des collaborations internationales entre la France, le Canada, le Chili, la Tunisie et l'Italie dans le cadre du réseau INDRUM[2],. Les études conduites donnent lieu à des constats partagés. Les étudiants arrivant à l'université ont des

[2] International Network for Didactic Research in University Mathematics: https://hal.archives-ouvertes.fr/INDRUM

connaissances très peu assurées sur les nombres, en particulier sur les nombres réels. Ils ne sont pas préparés à comprendre ce que signifie le fait d'être un corps ordonné complet pour l'ensemble des nombres réels. A l'issue des premiers cours d'analyse, le concept de borne supérieure est peu maitrisé et sa pertinence pour conduire certaines preuves en analyse n'est pas reconnue par les étudiants (Bergé, 2010). La notion d'expansion décimale illimitée reste vague pour de nombreux étudiants en début d'université, en lien avec la distinction infini potentiel/infini actuel. Il faut noter que ceci reste vrai pour un certain nombre d'étudiants titulaires d'une licence de mathématiques préparant le CAPES de mathématiques.
Dans les travaux que nous conduisons avec nos collègues dans le cadre du réseau INDRUM nous faisons l'hypothèse que comprendre le concept de complétude est nécessaire pour une appropriation adéquate des principaux concepts et théorème de l'analyse. Ceci nécessite d'avoir identifié que l'ensemble Q des nombres rationnels et l'ensemble D des nombres décimaux munis de l'ordre habituel sont des ensembles incomplets du point de vue de l'ordre (autrement dit ne sont pas des ensembles continus). Nous faisons également l'hypothèse que la droite numérique et les pratiques autour des représentations graphiques développées dans le secondaire pourraient permettre de proposer des situations permettant aux étudiants de s'appuyer sur ces objets concrets pour construire en acte des connaissances sur le concept d'incomplétude, comme préliminaire à la construction de l'ensemble des réels et du concept de continuité (au sens de la complétude), en écho aux propos de Weyl (1994) qui écrit :

> *"L'axiome de continuité doit se formuler en sorte de dire que par rapport à un segment unité OE, à chaque point P correspond un nombre réel en abscisse et réciproquement."*
> *(op. cit. p. 114).*

Les situations de points fixes sont des candidats possibles pour de telles situations (Durand-Guerrier, 2016). Ceci pourrait être préparé dès le lycée, en proposant par exemple des résolutions d'équations dans des sous-ensemble incomplets de l'ensemble des nombres réels, entre conjectures dans le domaine graphique et preuves dans le domaine numérique.

VII. CONCLUSION

En février 2017, une artiste en résidence à l'université de Montpellier avait déposé dans le département une affiche sur laquelle elle avait écrit : « Faut-il avoir confiance dans le réel pour tenter l'abstraction ? ». Cette question résonne pour moi avec ce que j'ai essayé de montrer dans cet exposé, à savoir l'importance de la prise en compte d'une dialectique entre abstrait et concret tout au long du curriculum pour une appropriation adéquate des concepts mathématiques.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BARALLOBRES G., GIROUX, J. (2008). Carences et régulations des milieux en situation de validation. IN Actes électroniques du colloque EMF 2006, *L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communauté*s, Sherbrooke, 27-31 mai 2006.

BERGÉ, A. (2010). Students' perceptions of the completeness property of the set of real numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 41(2), 217–227.

BERTOZ, A. (1997). *Le Sens du mouvement*, Éd. Odile Jacob.

BROUSSEAU, G. (1998). *La théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage Editions.

BROUSSEAU, G. (2002). Les grandeurs dans la scolarité obligatoire. In Jean-Luc Dorier, Michèle Artaud, Michèle Artigue, René Berthelot, Ruhal Floris (coordonné par), *Actes de la XIe Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*, Corps (Isère) du 21 au 30 août 2001 (pp. 331-348). Grenoble : La pensée sauvage éditions.

CHEVALLARD, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie : perspectives curriculaires : la notion de modélisation *Petit x*, 19, 45-75.

DEDEKIND, R. (1872). *Stetigkeit und Iirrationale Zahlen. Braunschweig: Vieweg*. Traduction Française par H. Benis-Sinaceur, in Richard Dedekind, La création des nombres, Vrin, coll. « Mathesis », 2008.

DIAS, T. (2008). *La dimension expérimentale des mathématiques : un levier pour l'enseignement et l'apprentissage*. (Doctorat). Université Claude Bernard Lyon 1, Lyon, France.

DIAS,T. ET DURAND-GUERRIER, V. (2005). Expérimenter pour apprendre en mathématiques. *Repères IREM*, 60, 61-78.

DURAND-GUERRIER, V. (2016). Conceptualization of the continuumn an educational challenge for undergraduate students. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 2*, 338–361.

ECO, U. (1980). *Segno*. Milan : A. Mondatori. Le signe, 1988 pour la traduction française. Bruxelles : Editions Labor.

GIUSTI, E. (2000). *La naissance des objets mathématiques*. E. Giusti, 1999 trad. par Georges Barthémely. Edition Ellipses coll. L'esprit des sciences.

GONSETH, F. (1936). *Les mathématiques et la réalité – Essai sur la méthode axiomatique*. Alcan, Paris (1936) et Blanchard, Paris (1974).

LONGO, G. (1999). The mathematical continuum: from Intuition to Logic. In J. Petitot et al. (Eds.), *Naturalizing phenomenology* (pp. 401–425). Standford University Press: Stanford.

LONGO, G. (1997). Géométrie, Mouvement, Espace : Cognition et mathématiques. *Intellectica, 1997(2)*, 195-218.

J. NICOD (1924) *La géométrie dans le monde sensible* ? Réédition PUF, 1972.

LANGEVIN, P (1950). *La pensée et l'action*, textes recueillis et présentés par Paul Larenne, préfaces de Frédéric Joliot-Curie et Georges Cogniot. Paris, Les Éditeurs Français Réunis.

MORRIS, C. (1938). *Foundations of the theory of signs*. Chicago: Chicago University Press.

PELAY, N. (2011). Jeu et apprentissages mathématiques : élaboration du concept de contrat didactique et ludique en contexte d'animation scientifique. Thèse de doctorat. Université Claude Bernard Lyon 1.

SINACEUR, H. (1991). La dialectique de l'espace selon Ferdinand Gonseth. In IREM de Lyon (ed.) *La figure et l'Espace*. Actes du 8ème colloque Inter-Irem Histoire et épistémologie des mathématiques (pp. 187-206).

VERGNAUD, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherche en didactique des mathématiques*, *10(2-3)*, 133-169.

WEYL, H. (1994). *Le continu et autres écrits.* Notes introductives et traduction par Jean Largeault, Paris-Vrin, collection Mathesis.