

RECURRENCE ET RECURSIVITE : DES CONCEPTS INDISSOCIABLES A L'INTERFACE DES MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE¹

Nicolás LEÓN

nicolas.leon@umontpellier.fr

IMAG, Université de Montpellier, CNRS

Résumé

L'introduction de contenus d'informatique dans les programmes de mathématiques de l'enseignement secondaire français offre une bonne occasion de réfléchir à des questions, relevant d'un point de vue épistémologique et didactique, sur les interactions entre ces deux disciplines. En particulier, les notions de récurrence et de récursivité revêtent un intérêt majeur en raison : de leur ubiquité tant en mathématiques qu'en informatique, des nombreuses difficultés qu'elles suscitent chez les étudiants qui tentent de les apprendre, mais également de la relation dialectique qui les relie. Nous présentons les résultats d'une étude d'épistémologie contemporaine à visée didactique, incluant des analyses d'ouvrages et des entretiens auprès de chercheurs. Nous soulignons l'importance du concept d'induction structurelle qui permet, en un certain sens, de combler l'écart entre la récursivité – entendue comme une méthode de construction de structures – et les schémas inductifs de preuve permettant de démontrer les propriétés de ces structures.

Mots clés

Récurrence, récursivité, informatique, didactique et épistémologie

INTRODUCTION

L'inclusion récente de contenus d'informatique dans les programmes de mathématiques de l'enseignement secondaire français soulève plusieurs questions sur les moyens et les objectifs d'une telle modification : quels concepts sont pertinents pour les mathématiques et l'informatique ? Ces concepts sont-ils vus de la même manière par les deux disciplines ? Quelles sont les conséquences didactiques des éventuels points communs et différences ? Ces questions sont étudiées dans le cadre du projet de recherche ANR DEMaIn (Didactique et épistémologie des interactions entre mathématiques et informatique) à l'Université de Montpellier.

Dans notre thèse, faisant partie de ce projet, nous nous concentrons sur les notions de récurrence et récursivité. Nous les choisissons car (i) elles semblent omniprésentes en mathématiques et en informatique, (ii) elles intègrent généralement les programmes du secondaire ou de première année d'une licence scientifique, et (iii) elles sont problématiques d'un point de vue didactique, comme le montrent les articles de revue de Michaelson (2008) et Rinderknecht (2014).

Nous faisons l'hypothèse que la récurrence et la récursivité sont étroitement liées et que leur étude conjointe pourrait aider à résoudre certains de ces problèmes, une idée étayée par la littérature (voir,

¹ Réalisé avec le soutien financier de l'ANR, projet DEMaIn <ANR-16-CE38-0006-01>.

par exemple Drysdale, 2011). Du point de vue méthodologique, nous adoptons l'approche de l'ingénierie didactique (Artigue, 2014), qui nous mène à effectuer une analyse épistémologique préalable des deux notions. En particulier, nous voulons identifier les différentes conceptions de la récurrence et la récursivité des mathématiciens et des informaticiens. Nous posons donc les questions de recherche suivantes:

1. Quelles significations peut-on trouver pour la récurrence et la récursivité en mathématiques et en informatique?
2. Quelles relations se tissent entre ces deux notions?

METHODOLOGIE

Pour répondre à ces questions, nous procédons en trois étapes:

1. Nous consultons divers ouvrages académiques, exemplifiant les points de vue des mathématiciens, de l'informatique ou encore de la logique sur la récurrence et la récursivité. Nous voulons identifier les contextes dans lesquels les mots « récurrence » et « récursivité » sont utilisés, ainsi que les liens que les auteurs établissent entre eux.
2. Nous interviewons des mathématiciens et des informaticiens, afin de mieux comprendre les pratiques en rapport avec la récurrence et la récursivité qui sont parfois moins manifestes dans les livres.
3. Nous développons une caractérisation de la récurrence et la récursivité qui se veut conforme à la littérature académique et à l'usage expert, et adéquate pour une analyse didactique ultérieure.

Les livres consultés pour la première étape ont été sélectionnés en jugeant qu'ils sont représentatifs d'un regard particulier sur la récurrence et la récursivité, que l'étude de ces concepts se déroule tout au long de plusieurs chapitres du livre, et qu'il est souhaitable qu'ils soient cités à plusieurs reprises dans la littérature.

Le choix des experts pour la seconde étape est effectué en fonction de critères de disponibilité et en essayant également de couvrir un large éventail de domaines de recherche. Le format de l'entretien est semi-dirigé, basé sur un questionnaire flexible, afin de pouvoir approfondir les aspects spécifiques de l'utilisation des concepts pouvant apparaître spontanément au cours des conversations avec les chercheurs.

RESULTATS

Nous consignons d'abord que, malgré son omniprésence dans les programmes de l'enseignement secondaire et du début d'université, et son importance pour la preuve des théorèmes de l'arithmétique élémentaire, le raisonnement par récurrence (entendu comme celui que l'on applique sur l'ensemble \mathbb{N}) n'est pas souvent utilisé par les chercheurs que nous avons interviewés. Plutôt, ce qu'ils utilisent le plus fréquemment est l'induction dite « structurelle » sur des structures définies récursivement, telles que les graphes, les arbres et les listes, parmi d'autres. Nos observations coïncident avec celles de Drysdale (2011) et nous permettent de nous interroger sur l'efficacité de ce choix curriculaire.

Ensuite, nous constatons que le lien entre le raisonnement par récurrence et la récursivité est subtil et dynamique, ce qui est attesté, par exemple, par le fait que plusieurs auteurs et chercheurs utilisent les mots « récurrence » et « récursivité », ou « récurrent » et « récursif », comme des synonymes dans

certaines situations, tandis que d'autres fixent des limites entre les deux, tout en affirmant qu'ils sont étroitement liés. Il se trouve que la récurrence apparaît de manière plus habituelle dans le contexte de la preuve et la démonstration, alors que la récursivité est associée plutôt à la construction de structures ou au développement d'algorithmes. Dans ce contexte, le concept d'induction structurelle semble éclaircir le rapport entre les structures qui peuvent être définies inductivement ou récursivement, et les schémas inductifs de preuve associés à de telles structures.

Enfin, nous remarquons que les chercheurs qui enseignent à l'université ont tendance à affirmer que leurs élèves rencontrent des difficultés au moment de faire face à la récurrence et à la récursivité, et que ces difficultés semblent intrinsèques aux deux notions. Cependant, leur avis sur la cause de ces difficultés, ainsi que sur la manière la plus idoine d'y faire face, reste très variable.

CONCLUSION

Cette étude épistémologique nous a permis de mieux cerner les relations entre récurrence et récursivité, notamment à l'aide du concept d'induction structurelle, qui permet d'établir la correspondance entre les structures définies récursivement et les schémas inductifs de preuve qui leur sont propres. En outre, nos résultats nous font penser que, si la dialectique entre récurrence et récursivité est mise au cœur de l'apprentissage, cela pourrait favoriser la compréhension des étudiants, une idée que nous développerons dans les étapes suivantes de notre travail de thèse.

Dans les perspectives de l'étude, l'analyse du schéma d'induction bien fondée (un schéma inductif plus général que l'induction structurelle) peut encore apporter un éclairage épistémologique profitable.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- ARTIGUE, M. (2014). Didactic engineering in mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 159–162). Dordrecht, Netherlands: Springer.
- DRYSDALE, R. L. S. (2011). Mathematical induction is a recursive technique. In T. J. Cortina, E. L. Walker, L. S. King, D. R. Musicant & L. I. McCann (Eds.), *Proceedings of the 42nd ACM technical symposium on Computer science education* (pp. 269–274). Dallas, USA: ACM.
- MICHAELSON, M. T. (2008). A literature review of pedagogical research on mathematical induction. *Australian Senior Mathematics Journal*, 22(2), 57–62.
- RINDERKNECHT, C. (2014). A Survey on Teaching and Learning Recursive Programming. *Informatics in Education*, 13(1), 87–119.