

COMPLÉTITUDE ET STRUCTURE ALGÈBRE DE $\mathbf{R}$ AU NIVEAU SECONDAIRE¹

Macarena FLORES-GONZALEZ

prof.macarena.flores@gmail.com

Université Paris 7

Résumé

On propose une approche des nombres réels à partir de deux notions mathématiques principales de $\mathbf{R}$ que sont la complétude et la structure de corps. Celles-ci sont peu travaillées au niveau secondaire et comportent des difficultés à différents niveaux d'enseignement. On présente alors une situation s'appuyant sur des suites adjacentes d'approximation décimale et des sommes et produits de ces dernières. Comme résultat, on trouve que les élèves de niveau secondaire ont pu effectivement s'initier à ces deux notions essentielles de $\mathbf{R}$.

Mots clés

Nombres réels, complétude, structure de corps, travail mathématique, analyse

PROBLÉMATIQUE

Des études comme Bergé (2010), ont déjà mis en évidence que la plupart des étudiants en classes d'analyse à l'université n'arrivent pas à une compréhension suffisante de la complétude de $\mathbf{R}$. La visualisation des propriétés fondamentales des nombres réels comme sa complétude, n'est pas facile et elle n'est pas travaillée au lycée, alors qu'elle pose problème à l'université. D'autre part, au niveau secondaire on n'a pas défini les caractéristiques algébriques de $\mathbf{R}$ (sa structure de corps) et on effectue des opérations sans se préoccuper du sens et de la définition de celles-ci. Ainsi, est-il difficile de dire que $\mathbf{R}$ soit un système numérique au sens de Chevallard (1989). Finalement quand on fait le passage de $\mathbf{Q}$ à $\mathbf{R}$ on n'est plus dans une vision uniquement algébrique mais surtout topologique et dans une perspective principalement locale (Vandebrouck, 2011 ; Montoya-Delgadillo et al., 2018). Ainsi on se demande, quelle situation d'apprentissage pourrait permettre d'introduire, d'articuler et de travailler conjointement les caractéristiques algébriques et topologiques de $\mathbf{R}$ (notamment sa structure de corps et sa complétude) ?

¹ Synthèse du travail de mémoire de master sous la direction de Laurent Vivier.

CADRE THEORIQUE

Les éléments cruciaux liés à notre problématique, se trouvent dans les difficultés d'apprentissage des nombres réels, en voulant aborder des aspects cognitifs (comme la visualisation) mais aussi épistémologiques. Ces deux aspects sont considérés dans le cadre des Espaces de Travail Mathématique (ETM) comme exposé par exemple dans Kuzniak, Tanguay & Elia (2016). Ici on s'intéresse au travail mathématique de l'élève, où on prendra en compte les plans verticaux des ETM personnels qui ont été activés dans le travail effectué : sémiotique-instrumental [Sem-Ins], instrumental-discursif [Ins-Dis] et sémiotique-discursive [Sem-Dis] ; ainsi que les paradigmes de l'analyse (Montoya-Delgadillo et Vivier, 2016) : *analyse arithmetico-géométrique* (AG), *analyse calculatoire* (AC) et *analyse réelle* (AR). En complément du cadre des ETM, on utilisera les perspectives de localité de Vandebrouck (2011) : perspective ponctuelle (PP), la perspective globale (PG), et la perspective locale (PL) adaptées à l'étude des nombres réels pour préciser les déconstructions avec perspectives de localité dans le domaine de l'analyse (Kuzniak et al., 2016 ; Montoya-Delgadillo et al., 2018). Ces outils nous permettent, d'une part, de construire la situation d'apprentissage souhaitée et, d'autre part, de rendre compte de ce que l'on trouve dans les productions écrites et orales des élèves.

LA TACHE CONSTRUITE ET EXPERIMENTATION

L'expérimentation est menée avec 3 binômes de Seconde et 3 binômes de Terminale ES (on présente uniquement cette dernière dans l'annexe 1), d'un lycée général et technologique publique francilien en 2018. En ce qui concerne la situation construite, on s'appuie sur la définition des opérations somme et produit de $\mathbf{R}$ qui sont basées sur la complétude de cet ensemble, et plus spécifiquement sur des approximations décimales. On s'intéresse à la recherche d'approximations des trois racines x_1 , x_2 et x_3 du polynôme $P(x) = x^3 - 60x^2 + 980x - 4700$, pour ensuite se focaliser sur des approximations de $x_1 + x_2 + x_3$, $x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3$ et $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$. Puis, avec la relation algébrique entre les coefficients du polynôme et ses racines on a : $x_1 + x_2 + x_3 = 60$, $x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3 = 980$ et $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 4700$. Ainsi, on peut visualiser les valeurs exactes dont on n'a, a priori, que des valeurs approchées : à l'aide de l'utilisation des suites adjacentes d'approximation décimale (par excès et par défaut des racines du polynôme), et en regardant les intervalles emboîtés qu'elles impliquent, on cherche à promouvoir la visualisation des limites de ces suites. De cette manière, les élèves ne peuvent pas calculer les solutions de façon directe mais peuvent avoir des candidats pour la limite des opérations algébriques que sont les valeurs des trois polynômes symétriques cherchés. On attend que les *artefacts* mis à disposition (un grapheur, une calculatrice scientifique et une calculatrice formelle) déclenchent des ETM personnels différents. On espère ainsi bloquer le paradigme AC, car ils ne peuvent pas calculer les valeurs exactes des racines, de façon à ce que, en s'appuyant sur le paradigme AG, la visualisation et la PL, il y ait un changement de paradigme pour le paradigme AR de façon informelle.

RESULTATS PRINCIPAUX

On présente dans la figure 1 un extrait du tableau des résultats qui permet d'identifier, pour chaque item de la situation, les *déconstructions de perspectives de localité* (DPL), les *plans verticaux* activés dans les ETM personnels des binômes (PV ETM), les *paradigmes de l'analyse* utilisés (PA), l'objectif général attendu pour chaque question, et le nombre des binômes impliqués.

Item	DPL	PV ETM	PA	Objectif général attendu de la question	Effectif
I.1.	PP- PG	[Sem-Ins]	AG (AC)	Contextualisation du problème pour que l'élève puisse vérifier l'existence de solutions réelles, mais sans que la valeur exacte de la solution soit nécessairement trouvée.	5
III	PL	[Sem-Dis]	AR	Dans un intervalle aussi petit qu'on veut, visualiser que les opérations des nombres réels convergent et identifier sa limite. Donner une preuve si possible.	3*
IV	PL	[Sem-Dis]	AR	Visualiser les intervalles emboîtés du nombre auquel les suites des opérations convergent. Visualiser la complétude dans une PL et produire des signes qui permettent d'analyser ce qui se passe au niveau PL.	5*
* Les résultats de la question III et IV n'ont pas été complètement réussis					$n = 6$

Figure 1 : Tableau des résultats.

On observe que la plus grande difficulté pour les élèves c'est de visualiser le lien entre les racines et les coefficients du polynôme dans la partie III (point clé pour travailler la structure du corps $\mathbf{R}$). En revanche, les élèves arrivent mieux à visualiser la question liée à la complétude à partir des intervalles emboîtés (partie IV).

Du point de vue du cadre théorique, le paradigme *arithmetico-geométrique* (AG) est indispensable pour approcher la complétude de $\mathbf{R}$ au niveau secondaire, car il permet de déclencher un travail dans les trois perspectives de localité (ce que ne permet pas AC). En effet, les liens entre les paradigmes de l'analyse et les perspectives de localité seraient les suivants :

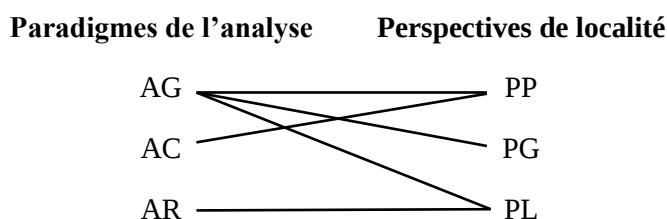


Figure 2 : Liens entre les paradigmes de l'analyse et les perspectives de localité.

CONCLUSIONS

Grâce aux résultats, on constate que la visualisation attendue n'a pas eu lieu, ce qui n'a pas empêché de faire apparaître de façon spontanée quelques éléments liés à la complétude, comme la convergence, les intervalles emboîtés ou la confrontation à l'obstacle épistémologique de l'infini actuel (les élèves en restent à un infini potentiel).

Bien que ce soit une étude préliminaire, on peut déjà dire que l'entrée par le paradigme AG permet une visualisation non iconique et caractéristique de la complétude de $\mathbf{R}$, car elle peut développer un travail mathématique sur les trois perspectives de localité dans l'étude des nombres réels. D'autre part, il existe des pistes claires pour améliorer la situation qui a été construite comme prévoir des interventions précises de l'enseignant pour favoriser la visualisation.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- BERGÉ, A. (2010). Students' perceptions of the completeness property of the set of real numbers, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 41(2), 217–227.
- CHEVALLARD, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège deuxième partie : Perspectives curriculaires : la notion de modélisation, *Petit x*, 19, 43–72.
- KUZNIAK, A., MONTOYA, E., VANDERBROUCK, F. & VIVIER, L. (2016). Le travail mathématique en analyse de la fin du secondaire au début du supérieur : identification et construction. In Y. Matheron, G. Gueudet, et al. (Eds.), *Enjeux et débats en didactique des mathématiques* (pp. 47–66). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- KUZNIAK, A., TANGUAY, D. & ELIA, I. (2016). Mathematical working spaces in schooling: an introduction. *ZDM*, 48(6), 721–737.
- MONTOYA-DELGADILLO, E., PÁEZ-MURILLO, R., VANDEBROUCK, F. & VIVIER, L. (2018). Deconstruction with localisation perspective in the learning of analysis. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 4(1), 139–160.
- MONTOYA-DELGADILLO, E. & VIVIER, L. (2016). Mathematical Working Spaces and Paradigms as an analysis tool for the teaching and learning of analysis, *ZDM*, 48(6), 739–754.
- VANDERBROUCK, F. (2011). Perspectives et domaines de travail pour l'étude des fonctions. *Annales de Didactique et des Sciences Cognitives*, 16, 149–185.

ANNEXE 1 (LA SITUATION DESIGNEE)

PARTIE I

Les dimensions d'un parallélépipède rectangulaire sont établies à partir des solutions de l'équation $x^3 - 60x^2 + 980x - 4700 = 0$ définie sur $\mathbb{R}$.

- 1) **Vérifiez** que l'équation a bien trois solutions. (*Vous pouvez vous appuyer sur le logiciel ou calculatrices*).
- 2) On note x_1 , x_2 et x_3 les trois solutions de l'équation. **Donnez une valeur approchée** à 10^{-1} pour x_1 , x_2 et x_3 .
- 3) À partir des valeurs approchées de x_1 , x_2 et x_3 , **donnez une valeur approchée** de la somme de trois arêtes (S), de la demi aire latérale (A) et du volume (V) du parallélépipède rectangulaire.

PARTIE II

- 1) À l'aide des nombres décimaux, donnez des encadrements ($a < x < b$ par exemple) pour x_1 , x_2 , x_3 , S, A et V, pour une précision de 10^{-1} et 10^{-2} .
- 2) Si on continue en cherchant des encadrements plus précis pour x_1 , x_2 et x_3 , que se passe-t-il pour V ?

PARTIE III

En observant les tableaux répondez :

Précision des solutions	Largeur (x_1)		Profondeur (x_2)		Hauteur (x_3)	
	Min	Max	Min	Max	Min	Max
10^{-2}	9,07	9,08	14,03	14,04	36,88	36,89
10^{-3}	9,078	9,079	14,035	14,036	36,886	36,887
10^{-4}	9,0783	9,0784	14,0355	14,0356	36,8861	36,8862

	Somme trois arêtes (S)		Demi aire latérale (A)		Volume (V)	
	Min	Max	Min	Max	Min	Max
10^{-2}	59,98	60,01	979,1801	980,38	4693,057448	4702,855248
10^{-3}	59,999	60,002	979,955848	980,075849	4699,635301	4700,615317
10^{-4}	59,9999	60,0002	979,9964178	980,0084178	4699,970782	4700,068782

- 1) Peut-on conjecturer la valeur exacte de S, de A, et de V? (Marquez un carré et répondez).

☐ **Oui**, et les valeurs exactes sont : S=..... A=..... et V=..... Car :

☐ **Non**, car :

PARTIE IV

- 1) **En complétant** le tableur pour une précision à 10^{-8} de V, et en considérant la droite numérique, qu'est ce qu'on peut dire des intervalles associées aux encadrements de V? (Vous pouvez faire un design)
- 2) D'après vous, combien de chiffres après la virgule ont **les solutions** de l'équation ? **Justifiez votre réponse**