

# ELABORATION ET USAGES D'UN MODELE MULTIDIMENSIONNEL D'ANALYSE DES RAISONNEMENTS EN CLASSE DE MATHEMATIQUES

Patrick **GIBEL**

Université de Bordeaux

[Patrick.Gibel@u-bordeaux.fr](mailto:Patrick.Gibel@u-bordeaux.fr)

## Résumé

Dans le cadre de l'apprentissage des mathématiques, les raisonnements occupent une place centrale compte tenu des multiples fonctions qu'ils recouvrent, parmi elles on peut citer : décider de l'utilisation d'une connaissance, conjecturer, contrôler, communiquer, expliquer, argumenter, prouver et démontrer. Pour permettre aux élèves et aux étudiants d'accéder à ces différentes fonctions et de progresser dans la pratique du raisonnement, il est nécessaire que les enseignants leur fassent vivre des dispositifs et des ingénieries didactiques spécifiques visant à produire des raisonnements en réponse aux situations proposées.

Nous montrons l'adéquation des cadres théoriques mobilisés, la Théorie des Situations Didactiques de G. Brousseau et la sémiotique de C.S. Peirce, afin d'élaborer un modèle multidimensionnel d'analyse des raisonnements en classe de mathématiques. Nous justifions que trois axes sont nécessaires en vue d'analyser les raisonnements produits par les élèves et par l'enseignant dans des situations comportant une dimension recherche (situation à dimension adidactique). Le premier axe est attaché au niveau de milieu dans la situation, niveau auquel sont liés la forme et le statut logique des énoncés émis ; le deuxième concerne les fonctions du raisonnement ; le troisième est un axe de nature sémiotique basé sur l'analyse des représentations.

Ce modèle permet d'étudier *a priori* et *a posteriori* les effets de différentes ingénieries et dispositifs didactiques, mis en œuvre dans l'enseignement primaire, secondaire et supérieur, sur le développement de la capacité des élèves et des étudiants à concevoir et à faire usage de raisonnements, dans des conditions qui le justifient.

## Mots clés

Raisonnement, preuve, démonstration, théorie des situations, ingénierie, apprentissage

## I. INTRODUCTION

Le terme raisonnement a plusieurs acceptions : « D'un côté il désigne les activités ou démarches qui consistent à raisonner. De l'autre, il désigne les produits ou les résultats de ces activités. » (Blanché, 1973). Dans notre étude des différentes formes de raisonnements, élaborés au cours d'une séquence en classe de mathématiques, cette distinction est essentielle. En effet, en didactique des mathématiques, les conditions dans lesquelles l'élève est conduit à élaborer un raisonnement doivent être prises en compte dans l'analyse des raisonnements produits.

Dans le cadre de l'apprentissage des mathématiques, le raisonnement produit est généré par le raisonnement activité ; de même il est adéquat de modéliser le raisonnement activité, en Théorie des Situations Didactiques, comme résultant du fonctionnement des connaissances du sujet, confronté à une situation mathématique. Pour étudier les raisonnements en classe de mathématiques, nous tiendrons compte d'une part des conditions dans lesquelles ils ont été élaborés et d'autre part des raisons pour lesquelles ils ont été produits. Nous proposerons dans la première partie de cet écrit une modélisation de l'activité raisonnement, en lien avec le fonctionnement du « répertoire didactique » de l'élève qui en est l'auteur.

Notre étude se limite au cadre de la didactique des mathématiques, dans le sens où nous nous intéresserons essentiellement aux connaissances et aux savoirs mobilisés ou susceptibles d'être mobilisés par les acteurs de la relation didactique, élèves et enseignant, dans le but d'étudier les différentes formes de raisonnements, valides ou erronés, apparaissant en situation didactique ; nous prendrons soin de définir précisément les conditions dans lesquelles les raisonnements ont été produits.

Par ailleurs le raisonnement produit est ce qui permet d'établir, dans des conditions particulières, des démonstrations correspondant à des raisonnements « officiels » c'est-à-dire officiellement reconnus par la communauté des mathématiciens comme raisonnements mathématiques.

Lorsqu'on souhaite étudier les raisonnements en classe de mathématiques, la première question est : pourquoi l'étude des raisonnements en didactique des mathématiques ne peut-elle pas se limiter à l'étude des raisonnements logiques et mathématiques formels « stricto sensu » ?

L'enseignement du raisonnement a pu se concevoir précédemment comme l'exposé et la reproduction de démonstration(s), cependant pour la majorité des enseignants le plus souvent c'est la production « naturelle » de raisonnements qui est recherchée, principalement par la confrontation de l'élève à l'activité de résolution de problèmes.

De plus, pour éviter le phénomène de conditionnement, les professeurs ont fréquemment recours à des situations plus « ouvertes ». Dans le cadre de cet écrit, nous nous intéresserons plus particulièrement aux situations adidactiques et aux situations à dimension adidactique (Bloch, 1999 ; Mercier, 1995), c'est-à-dire comportant une dimension recherche. Cependant leur mise en œuvre présente, pour les différents acteurs de la relation didactique, un certain nombre d'inconvénients et de difficultés : l'élève, confronté à ce type de situation, est soumis à de nombreuses incertitudes, il est donc amené à prendre de multiples décisions ; l'enseignant, quant à lui, doit d'une part analyser et gérer les décisions des élèves, interpréter les différentes formes de raisonnements produits et d'autre part évaluer la réalité de leurs acquis, du point de vue des connaissances et des savoirs mobilisés.

Dans la première partie, nous définirons en didactique des mathématiques ce que nous entendons par « raisonnement », en précisant les caractères qui permettent d'identifier les différentes formes de raisonnements produits, en regard de leurs fonctions en classe de mathématiques.

Dans la seconde partie, nous présenterons le modèle d'analyse des raisonnements en décrivant précisément ses différentes dimensions et ensuite nous expliciterons ses principales fonctions.

## II. LES RAISONNEMENTS EN CLASSE DE MATHÉMATIQUE

Cette première partie a pour finalité d'identifier et de caractériser les raisonnements en classe de mathématiques. La méthodologie mise en œuvre repose principalement sur l'analyse des raisonnements dans le cadre de la Théorie des situations didactiques, cependant compte-tenu de la diversité des formes de raisonnements et de la complexité du formalisme mathématique il apparaît nécessaire d'avoir recours à la mise en œuvre d'une analyse sémiotique. Pour cela nous justifierons la pertinence de la sémiotique de C.S. Pierce afin d'analyser les formes de raisonnements élaborés par les élèves et par l'enseignant.

### 1. Identification et caractérisations des raisonnements

Notre étude s'inscrit dans une recherche visant à déterminer les principaux caractères de la situation ainsi que leurs rapports avec les différentes formes de raisonnements apparaissant dans le déroulement d'une séquence dont la situation centrale est à dimension adidactique. Ces raisonnements se traduisent par des éléments langagiers, calculatoires, scripturaux, graphiques, qui sont habituellement interprétés comme des signes appartenant à un registre de représentation, ou comme des éléments d'une phase de preuve ou de démonstration. Par conséquent en classe de mathématiques, le terme « raisonnement » tend à couvrir un champ beaucoup plus vaste que celui des raisonnements formels, logiques ou mathématiques. C'est pour cette raison que nous avons choisi comme définition initiale, celle proposée par Oléron (1977) :

*Un raisonnement est un enchaînement, une combinaison ou une confrontation d'énoncés ou de représentations respectant des contraintes susceptibles d'être explicitées, et conduits en fonction d'un but. (p.10)*

Dans le cadre de notre étude en didactique des mathématiques, pour que nous puissions affirmer que tel observable est l'indice d'un raisonnement, dont certains éléments sont parfois en partie implicites, il a été nécessaire de dépasser la définition formelle, pour examiner les conditions dans lesquelles le « raisonnement supposé » peut être considéré, par le chercheur, comme un « raisonnement effectif ». C'est sur ce principe que nous allons nous appuyer pour mettre en place une méthodologie visant à identifier précisément les différentes formes de raisonnements, valides ou erronés, que les acteurs, enseignant et élèves, mettent en œuvre lors du déroulement d'une séquence de classe.

#### *Identification des raisonnements en classe de mathématiques*

Une précédente recherche sur l'usage et le traitement des raisonnements des élèves par les professeurs lors de la mise en œuvre de situations problèmes en classe ordinaire (Brousseau & Gibel, 2005), nous a permis d'établir que souvent en situation didactique, le professeur relève, dans les formulations des élèves, des indices et les interprète davantage en fonction de leur utilité pour le déroulement de la séquence, que du point de vue du projet initial de l'élève qui en est l'auteur. Par conséquent pour pouvoir déterminer et analyser objectivement les raisonnements produits par les élèves et l'enseignant, le chercheur doit donc suivre une autre voie. Ce dernier doit adopter une méthodologie particulière que nous allons nous attacher à caractériser. Le chercheur doit assez fréquemment montrer que tel raisonnement complet, dont il ne perçoit parfois qu'une partie ou que des indices, est bien celui qu'il convient d'attribuer à son auteur.

Le chercheur doit établir que la production du raisonnement, prêté au sujet, est motivée par une intention de la part de ce dernier, qu'elle répond (ou tente de répondre) à un but, qu'elle lui apporte un avantage dans les conditions qu'il perçoit, et avec les connaissances dont il dispose.

### ***La détermination d'un raisonnement produit par un sujet : notion de situation***

Ainsi, comme nous l'avons explicité (Brousseau & Gibel, 2005), parmi toutes les conditions qui accompagnent la production d'un supposé raisonnement, quelques-unes seulement - le moins possibles - peuvent servir à le déterminer et à le justifier. Ces conditions ne sont pas quelconques. Elles forment un ensemble cohérent qui est appelé « situation » en Théorie des Situations Didactiques.

*La situation est une partie seulement du contexte, ou de l'environnement de l'action de l'élève ou du professeur et elle comprend, mais pas seulement, une sorte de question à laquelle le raisonnement de l'élève est une réponse. Elle n'est réduite ni à l'action du sujet, ni à la connaissance qui la motive mais elle les met en relation rationnelle. Une situation peut expliquer pourquoi un raisonnement faux a été produit par d'autres causes qu'une erreur ou une insuffisance du sujet. (p.16)*

Ce point de vue est différent de celui qui prévaut légitimement chez les professeurs où les seuls raisonnements vraiment utilisables sont les raisonnements entièrement corrects. Un raisonnement faux n'est qu'assez exceptionnellement un objet d'étude. La Théorie des Situations Didactiques a pour objet l'étude et la modélisation des situations ainsi définies. Elle est un instrument pour rechercher les explications minimales des faits observés, qui sont compatibles avec les faits connus.

De nombreux enseignants ont coutume de faire dévolution aux élèves de situations de recherche, basées sur des ingénieries préalablement expérimentées, ayant fait l'objet de publications à destination des enseignants. Ils justifient le choix de ce type de situation par le fait qu'elles permettent aux élèves d'élaborer une ou plusieurs procédures, basées sur leurs connaissances et leurs savoirs, d'éprouver leur(s) procédure(s) mais aussi de prendre conscience des décisions qui sous-tendent leur raisonnement.

### ***Le raisonnement de l'élève dans la résolution d'un problème classique***

Le raisonnement effectivement utilisé par l'élève est le résultat d'une activité mentale différente de la solution standard, et il répond à une situation dont l'énoncé du problème n'est qu'une composante. Il agit pour trouver la solution demandée mais n'a pas à rendre compte de ses tentatives.

*Donc l'observateur tout comme le professeur, doit interpréter ce que les élèves ont produit dans un système plus large et plus complexe, s'il veut avoir une chance d'interroger ou d'expliquer pourquoi ils ont produit tel ou tel raisonnement, qu'il soit correct et adéquat ou non. Aussi, pour analyser avec eux leurs productions, le professeur doit considérer, au moins implicitement, qu'ils sont confrontés à des conditions réelles plus ouvertes que le texte du problème (i. e. une situation d'action dont le milieu est la situation objective). C'est à ce niveau qu'appartiennent les justifications tactiques, stratégiques, ou ergonomiques à propos du bien-fondé, de l'adéquation, du choix des inférences ou de leur enchaînement qui ne figurent pas dans la solution standard. (Ibid., p.19)*

### ***Les raisonnements effectifs***

Les raisonnements que nous étudierons dans le cadre de l'apprentissage des mathématiques sont essentiellement modélisables par des inférences, plus précisément par une suite finie d'inférences (associées aux différents pas de raisonnement i.e. aux différentes étapes du

raisonnement) dont l'articulation est en adéquation avec les règles de la logique mathématique. Mais cette caractérisation doit nécessairement être complétée car nous voulons pouvoir distinguer les raisonnements effectifs des citations et intégrer des raisonnements qui se manifestent par des activités non verbales aussi bien que par des assertions, ce qui nous amène à formuler la définition suivante :

Un raisonnement est donc une relation R entre deux éléments A et B telle que :

- A désigne une condition ou un fait observé, contingent ;
- B est une conséquence ou une décision ou un fait prévu ;
- R est une relation, une règle, plus généralement une connaissance empruntée à un répertoire considéré comme connu, accepté. La relation R conduit l'actant, dans la circonstance A, à prendre la décision B ou à prévoir le fait B ou à énoncer que le fait B est vrai.

Un raisonnement effectif comprend de plus un agent E, élève ou professeur, qui utilise la relation R ainsi qu'un projet déterminé par une situation S dont la réalisation exige l'usage de cette relation.

On peut dire que pour réaliser le projet déterminé par la situation, le sujet utilise la relation R qui permet d'inférer B de la condition A. Ce projet peut être convenu et explicité par l'agent ou il peut lui être prêté par le chercheur à partir d'indices.

Afin de pouvoir étudier les moyens utilisés par l'enseignant pour gérer les raisonnements apparaissant dans les productions des élèves, il convient de définir ce qui, pour le chercheur, est assimilable à un « raisonnement », pour cela il faut :

- Identifier des observables (textes, gestes, paroles, dessins, etc.) produits par un élève, par plusieurs élèves en interaction ou par l'enseignant.

- Relier ces observables par une relation « rationnelle » telle que cette relation s'exprime dans le langage du chercheur, différent a priori de celui des protagonistes. De plus cette dernière attribue à ces observables un rôle dans la réalisation du projet proposé par la situation convenue ou dans celle de l'un de ses modèles qui ont la charge de représenter les intentions possibles des protagonistes. Cette relation peut être hypothétique ou formelle.

- Identifier un actant : professeur, élève ou groupe d'élèves à qui est attribué l'établissement de la relation dans le cadre d'un projet qui lui est prêté.

- S'il s'agit d'une hypothèse, établir qu'elle est valide, en montrant, éventuellement à l'aide d'autres indices, qu'elle est la moins improbable des explications.

Il est à noter que parmi les raisonnements détectés par le chercheur, certains d'entre eux peuvent être attribués à un ou à plusieurs des protagonistes bien que ces derniers ne les aient pas nécessairement identifiés comme tel.

### ***Classification des raisonnements d'après leur fonction et le type de situation associée***

En conclusion du paragraphe précédent, un raisonnement est identifié par sa fonction dans une situation, autrement dit par le rôle qu'il y joue. Cependant un raisonnement peut avoir des fonctions différentes, par exemple décider d'une action à effectuer, informer, communiquer, expliquer, prouver. Elles sont différenciées, en Théorie des Situations Didactiques, par des modèles de situations mathématiques (situation d'action, situation de formulation, situation de validation) généraux mais différents. Pour une présentation plus détaillée nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage de Brousseau (1998).

De plus, à un moment donné du déroulement d'une leçon, on peut identifier, suivant les intentions des participants, un très grand nombre de situations plus ou moins « emboîtées ». Dans la deuxième partie de cet écrit, nous expliciterons et illustrerons cette notion de « situations emboîtées », dont la définition repose sur le concept de schéma de la structuration du milieu créé initialement par Brousseau et très fréquemment utilisé dans le cadre des recherches en Théorie des Situations Didactiques. Les raisonnements qui apparaissent dans les

situations didactiques se rapportent à leurs différentes composantes, telles que décrites dans la Théorie des Situations Didactiques (Brousseau, 1998).

Afin d'analyser les raisonnements produits par les élèves et par l'enseignant, il convient d'étudier les connaissances et les savoirs, valides ou erronés, mobilisés afin de les produire. Aussi nous avons été conduits à modéliser le fonctionnement des connaissances du sujet, ce que nous allons à présent développer dans le paragraphe suivant.

## **2. Modélisation du fonctionnement des connaissances du sujet en Théorie des Situations Didactiques**

### *Définition de la notion de répertoire didactique*

L'ensemble des moyens que le professeur pense pouvoir attendre des élèves, par suite de son enseignement, constitue ce que nous appelons le répertoire didactique de la classe (Gibel, 2004). Par conséquent l'enseignant identifie un répertoire qu'il juge légitime d'utiliser dans la relation didactique compte tenu des institutionnalisations antérieures, afin de produire la solution ou la réponse attendue.

*La prise « officielle » par l'élève de l'objet de la connaissance et par le maître de l'apprentissage de l'élève est un phénomène social très important et une phase essentielle du processus didactique : cette double reconnaissance est l'objet de l'INSTITUTIONNALISATION.*

*L'institutionnalisation porte aussi bien sur une situation d'action –on reconnaît la valeur d'une procédure qui va devenir un moyen de référence– que sur la formulation. Il y a des formulations que l'on va conserver (« ça se dit comme ça », « celles-là valent la peine d'être retenues »). Et pour les preuves, de la même façon, il faut identifier ce qu'on retient des propriétés des objets qu'on a rencontrés. (Brousseau, 1988, p.311)*

Le répertoire didactique de la classe ne se limite pas à l'ensemble des connaissances et des savoirs, c'est aussi l'ensemble des moyens qui vont permettre à l'élève de générer de nouvelles connaissances, de nouvelles formules.

Le répertoire didactique de la classe doit être élaboré de manière à permettre à l'élève d'organiser la collection des formules dont il dispose. Ainsi il permet à l'élève de faire l'inventaire de l'ensemble des formules, en lui offrant ainsi la possibilité de retrouver des tâches, des actions, des méthodes, des formulations et des justifications. Sa fonction est d'en faciliter l'usage en donnant à l'élève les moyens de produire ou de retrouver et donc de mettre en œuvre, au moment voulu, c'est-à-dire lorsque les conditions didactiques le rendent nécessaires, une action, une suite d'actions, une formulation ou une justification, parfois déjà rencontrée, déjà apprise c'est-à-dire ayant donc fait l'objet d'une institutionnalisation.

### *Utilisation du répertoire didactique du sujet dans la production de décisions*

Le répertoire didactique d'un élève, autrement dit le répertoire utilisé par un élève lorsqu'il est confronté à une situation, peut bien évidemment différer du répertoire didactique de la classe. Comme Comiti, Grenier et Margolinas (1995) nous considérons que le répertoire didactique d'un élève peut être différent du répertoire didactique de la classe ; ceci est d'autant plus flagrant lorsqu'il y a dédoublement de situation.

Considérons une situation et l'ensemble des moyens de résolution que le sujet est susceptible d'utiliser compte-tenu du répertoire didactique de la classe ; dans cet ensemble on peut distinguer deux catégories de moyens (Gibel, 2004) :

- Un moyen direct c'est-à-dire la connaissance elle-même qui permet de résoudre directement la situation.

- Des moyens indirects qui correspondent à l'établissement de cette connaissance par le sujet. La connaissance résulte alors du fonctionnement du système organisateur.

Nous distinguons trois niveaux dans le répertoire didactique :

- le système produit i.e. le registre des formules ;
  - le système organisateur utilisé afin de générer de nouvelles connaissances ou de réactiver des connaissances anciennes ;
  - le répertoire de décision qui est assimilable à un répertoire de savoirs en relation avec un ensemble de situations. Ce répertoire de décision commande le répertoire d'action de l'élève.
- Nous précisons, par la présentation d'une modélisation, le lien entre répertoire de décision et répertoire d'action dans la section suivante (I.4).

### 3. L'analyse sémiotique de Pierce et la notion de répertoire de représentation

Précédemment nous avons mis en évidence que les raisonnements apparaissant en situation de classe peuvent se traduire sous des formes très diverses : éléments langagiers, calculatoires, scripturaux, graphiques que nous nous devons d'interpréter en référence à différents registres de représentation (Duval, 1996). Par conséquent l'analyse sémiotique constitue l'une des dimensions de notre modèle, complétant naturellement celles précédemment exposées : d'une part la fonction des raisonnements, d'autre part le niveau de milieu correspondant autrement dit les conditions dans lesquelles le raisonnement a été élaboré. Les représentations sémiotiques ne sont mobilisées et développées que dans la mesure où elles peuvent être transformées en d'autres représentations sémiotiques comme le souligne Duval (2006) :

*Ce sont ces transformations sémiotiques qui sont importantes et non les relations fondamentales explicitées dans les différentes théories sémiotiques. (p.49)*

De plus l'auteur met en lumière cette nécessité inhérente aux pratiques mathématiques en ce qui concerne les signes : les possibilités de transformation des représentations.

*Cette exigence a commandé le développement d'un symbolisme spécifique aux mathématiques, avec la représentation des nombres, avec l'Algèbre, avec l'Analyse. Elle traduit le fait que la fonction primordiale des signes et des représentations en mathématiques, n'est ni la communication, ni l'évocation d'objets absents mais le traitement d'informations, c'est-à-dire la transformation intrinsèque de leurs représentations en d'autres représentations pour produire de nouvelles informations ou de nouvelles connaissances. (p.57)*

Ce qui va nous intéresser c'est effectivement la transformation de la représentation des objets tant du point de vue des signes utilisés que du point de vue de leur(s) statut(s) dans la relation didactique. La sémiotique de Pierce est particulièrement appropriée à notre projet. En effet elle nous permettra d'étudier précisément l'évolution et les transformations des signes, utilisés par les différents acteurs, en lien avec les différentes situations d'action, de formulation et de validation.

Selon Pierce (1978), trois catégories sont en effet nécessaires pour rendre compte de l'expérience humaine. Elles sont désignées comme « priméité », « secondéité » et « tiercéité ». La priméité est de l'ordre du possible : les signes peuvent être vus comme des icônes. La secondéité peut être assimilée à la catégorie de l'expérience, du fait, de l'action-réaction, les signes en sont des indices. La tiercéité est le régime de la règle et de la loi, de la médiation et les signes apparaissent avec un statut de symbole-argument.

Dans notre usage de la sémiotique Peircienne nous utiliserons les trois désignations : icône, indice et symbole-argument. Par exemple dans l'analyse de séquence « Le nombre le plus grand » publiée dans Gibel, (2015), un calcul arithmétique rédigé sous la forme d'une opération

posée ou d'un calcul « en ligne » peut être assimilé à une icône. Cette dernière traduit et manifeste une action du sujet confronté à la situation de jeu ; un indice est de l'ordre d'une proposition, par exemple la formulation d'une méthode générale, même si celle-ci est incomplète ; un symbole-argument est de l'ordre d'une preuve mathématique qu'il s'agisse d'une preuve de nature pragmatique, sémantique ou syntaxique.

Comme le souligne Evraert-Desmedt (1990), l'interprétation d'un signe par un interprétant est étroitement liée à l'expérience, formée par d'autres signes toujours antécédents. Par conséquent l'analyse sémiotique nécessite de prendre en compte les signes en lien avec les connaissances et les savoirs antérieurs, c'est la raison pour laquelle nous allons à présent définir la notion de « répertoire de représentation ».

### ***Le répertoire de représentation***

Le répertoire de représentation, de la classe et de chaque élève, est une composante du répertoire didactique. Il est constitué de signes, schémas, symboles, figures ; nous y incluons également les outils et leur(s) usage(s). Il convient également d'y adjoindre les éléments langagiers (énoncés oraux et/ou écrits), permettant de nommer les objets rencontrés, de formuler les propriétés et les résultats.

Le répertoire de représentation comporte deux composantes liées à la chronogenèse pour la première et au milieu de la situation pour la seconde :

- la composante liée au répertoire antérieur c'est-à-dire les différentes formules énoncées et les différents usages liés aux connaissances antérieures ;
- une composante qui apparaît lorsque l'enseignant dévolue aux élèves une situation d'apprentissage : l'élève mobilise, par confrontation aux différents milieux, des connaissances de son répertoire didactique. Cette utilisation des connaissances lui permet de manifester et de construire de nouvelles représentations, liées à la situation, à partir des éléments de représentation dont il dispose.

Nous allons à présent nous centrer sur l'utilisation du répertoire de représentation.

## **4. Utilisation du répertoire de représentation du sujet dans la production de décisions**

Rappelons que selon Brun (1994) les représentations sont "l'interface entre connaissances et situation", ce qui est en adéquation avec la notion de répertoire de représentation tel que nous l'avons précédemment défini.

De plus il précise :

*Si l'on suit le fonctionnement des schèmes au fur et à mesure du développement de l'enfant, l'apparition de la fonction sémiotique à un moment de ce développement fournit les éléments nouveaux à ce fonctionnement, ce sont les représentations de type sémiotique. Les sujets peuvent s'appuyer sur des signifiants qu'ils peuvent distinguer des signifiés. Les représentations sémiotiques jouent donc un rôle éminemment fonctionnel, même si elles restent subordonnées aux opérations.*

*Dans le processus de formation des connaissances en situation, la représentation est instrumentale et consiste à désigner les objets, à réfléchir les buts et les moyens, à planifier, à répondre aux problèmes de communication et de validation qui peuvent se poser en situation. (p.74)*

Il nous importe alors de nous demander si les représentations sont différenciées, relativement aux connaissances, ou amalgamées ; notre but est aussi d'éclairer la façon dont elles se constituent en répertoires – répertoire initial, puis répertoire final à l'issue de la situation. Une façon de répondre à cette question est de s'appuyer sur la définition de répertoire didactique en

distinguant deux types d'objets : d'une part la collection de formules que nous appelons registre de formules, et d'autre part ce qui permet de l'organiser et de l'utiliser que nous désignons par système organisateur. Le système organisateur est ce qui permet à l'élève de retrouver ou de réactiver des formules déjà rencontrées dans des situations antérieures, mais aussi de générer de nouvelles formules en articulant entre eux certains énoncés, ou en les combinant entre eux afin de répondre à la situation.

Une composante essentielle de l'usage des raisonnements en situation concerne les décisions que prend l'élève ou qu'il est susceptible de prendre lorsqu'il est en situation d'apprentissage. Dans la modélisation du fonctionnement des connaissances, en théorie des situations (Gibel, *ibidem*; Conne, 1992), celles-ci apparaissent comme les moyens hypothétiques, pour le sujet, de prendre des décisions.

Il convient alors de distinguer:

1- Les connaissances mobilisables ou disponibles, ainsi que les nomme Robert (1998) : ce sont les moyens de résoudre la situation que l'actant est susceptible de mobiliser pour produire le résultat attendu. Ces moyens sont déduits du répertoire didactique de la classe et contribuent à l'élaboration de l'analyse a priori de la situation, d'où leur nom.

2- Les connaissances effectives de l'actant : elles se manifestent, se traduisent par les actions effectives du sujet confronté à la situation (ce que Robert appelle des adaptations).

Le répertoire de représentation, tel que nous l'avons défini précédemment, réfère à la capacité du sujet à utiliser son système organisateur pour répondre à une situation afin de :

1) Percevoir et s'appropriier les relations entre les différents objets qui définissent le milieu objectif (l'élève doit se représenter la situation objective).

2) Faire le lien entre la situation dévolue et les situations rencontrées précédemment.

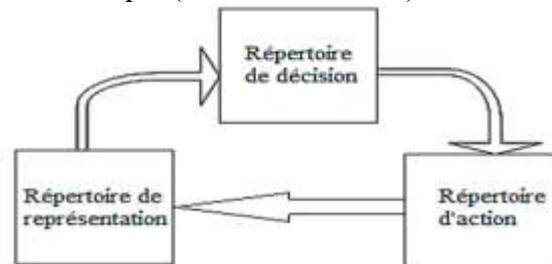
3) Décider des formules qu'il convient de mobiliser, de réactiver ou de combiner afin d'agir sur la situation. Les actions du sujet résultent alors du fonctionnement du système générateur de son répertoire de représentation.

Dans la relation didactique, le statut de raisonnement attribué à une production dépend de l'état de connaissances du sujet qui en est l'auteur. Tout raisonnement, étudié d'un point de vue didactique, est basé sur une pratique sociale de référence qui indique quel répertoire le sujet a le droit d'utiliser. L'établissement d'un résultat, quelle que soit sa nature, peut relever pour certains sujets de l'utilisation directe d'un savoir de leur répertoire didactique et cependant, nécessiter pour d'autres sujets l'élaboration d'un raisonnement basé sur une combinaison de savoirs, une confrontation d'énoncés ou de représentations et respectant certaines contraintes. Cependant dans l'hypothèse où le savoir convoqué appartient au répertoire didactique de la classe, l'enseignant ne reconnaîtra pas l'établissement du résultat comme résultant d'un raisonnement. En effet la production du raisonnement n'apparaît pas, dans ce cas, comme une performance « originale », puisque les élèves sont censés être en mesure de l'utiliser. De même si l'élève produit à la demande explicite de l'enseignant un raisonnement, déjà formulé précédemment à de multiples reprises, l'enseignant ne lui accordera pas le statut de raisonnement, il aura le statut de justification idoine.

Par conséquent l'étude des raisonnements en didactique des mathématiques, nécessite pour le chercheur la prise en compte des conditions, qui définissent la situation, dans lesquelles le supposé raisonnement est produit mais également du répertoire didactique de la classe dont les élèves sont censés disposer.

Les ingénieries didactiques étudiées (Bloch & Gibel, 2011), (Gibel, 2015), (Gibel & Henry, 2017), (Gibel, 2017), (Lalaude-Labayle, 2016) dans le cadre de ma note de synthèse (Gibel, 2018), reposent sur la dévolution aux élèves d'une situation de nature adidactique ou à dimension adidactique. Leurs résolutions nécessitent, l'usage de leur répertoire de représentation. En effet les élèves ou les étudiants, pour répondre à la situation, devront se référer à des situations rencontrées précédemment. Ainsi, par l'usage de leur répertoire de

représentation, ils décideront de la mise en œuvre d'une suite d'actions sur le milieu matériel. Cette suite d'actions, valides ou erronées, relève de l'usage de leur répertoire d'action. Le résultat obtenu conduit les élèves ou les étudiants à modifier leur répertoire de représentation. Le schéma ci-après permet de modéliser le fonctionnement du répertoire didactique de l'élève confronté à une situation adidactique (situation d'action) ou à dimension adidactique.



*Figure 1 : Modélisation du fonctionnement du répertoire didactique de l'élève en situation d'apprentissage.*

Le schéma ci-dessus a été initialement élaboré dans un contexte particulier d'analyse des raisonnements (Gibel & Ennassef, 2012). Dans le cadre de l'élaboration de ma note de synthèse (Gibel, 2018), en tenant compte des résultats des recherches que nous avons produits dans des contextes d'enseignement variés et à des niveaux d'enseignement différents, ce schéma nous apparaît adéquat pour modéliser plus généralement le fonctionnement des connaissances du sujet confronté à une situation d'action.

L'objet de cet écrit est de présenter notre modèle d'analyse des raisonnements en explicitant les axes d'analyse que nous avons privilégiés afin d'étudier les différentes formes de raisonnements, résultant de la mise en œuvre d'une ingénierie ou d'un dispositif didactique en classe de mathématiques.

Dans cette première partie, nous avons présenté une modélisation du fonctionnement des connaissances du sujet étroitement liée à la mise en œuvre de son répertoire didactique. En effet l'identification d'un raisonnement produit en classe de mathématiques nécessite pour le chercheur la prise en compte du répertoire didactique dont les élèves sont censés disposer mais également des conditions, qui définissent la situation dans laquelle le « supposé raisonnement » a été produit.

## **II LE MODELE D'ANALYSE DES RAISONNEMENTS**

Dans cette deuxième partie, nous justifierons qu'en Théorie des Situations Didactiques l'identification des conditions de production d'un raisonnement est rendue possible par la mise en œuvre du schéma de la structuration du milieu. En effet à un moment donné du déroulement d'une leçon, comme l'indique Margolinas (1998) ainsi que Brousseau et Gibel (2005) on peut identifier un grand nombre de situations plus ou moins emboîtées ; le schéma de la structuration du milieu nous permet de caractériser chacune d'elles. Il donne ainsi la possibilité de décrire chacune des situations emboîtées, nous pouvons ainsi expliciter les conditions dans lesquelles un raisonnement est susceptible d'être produit. De plus, comme indiqué précédemment les fonctions du raisonnement jouent un rôle déterminant dans l'analyse de ces derniers, elles sont

---

<sup>1</sup> Incluant une situation adidactique ou à dimension adidactique.

étroitement liées aux conditions de sa production. Nous justifierons pourquoi la fonction d'un raisonnement constitue l'une des dimensions de notre modèle d'analyse.

Dans la première partie, nous avons établi que l'analyse sémiotique permet de rendre compte des connaissances et des savoirs mobilisés au regard du répertoire de représentation mobilisé par l'élève par confrontation au(x) milieu(x). Cette dernière dimension joue un rôle déterminant dans l'analyse des raisonnements. De plus nous avons mis en lumière, l'importance accordée à l'évolution et à la transformation des signes (Duval, 2006) au cours d'une leçon, nous justifierons ainsi l'intérêt de cette dimension.

Pour clore cette deuxième partie, nous expliciterons la validité et l'intérêt du modèle en mettant en évidence ses différentes fonctions du point de vue de la recherche en didactique.

## **1. La Théorie des Situations Didactiques comme fondement de notre modèle**

### *L'analyse des raisonnements en situation de validation*

L'analyse fine des raisonnements produits en situation de validation ne peut se restreindre à une analyse en termes de calcul propositionnel basée sur la logique dialogique de Lorenzen (1967), comme l'indique Durand-Guerrier (2007). Cette dernière met en évidence que le modèle de Lorenzen ne suffit pas pour comprendre et analyser l'activité mathématique en situation de validation et elle fait l'hypothèse que ce modèle

*contribue à donner de l'activité mathématique une image déformée, en exacerbant le travail sur les énoncés au détriment du travail sur les objets, leurs propriétés et les relations mutuelles qu'ils entretiennent. (p.23)*

Barrier (2008), s'appuyant sur cette précédente recherche, met à son tour en évidence la limite du modèle de Lorenzen pour l'analyse de situation de validation explicite et justifie ainsi la nécessité de proposer un modèle qui tienne compte de la dimension sémantique des raisonnements produits par les élèves. Il insiste sur le fait qu'il n'est pas possible, lors de l'analyse fine des dialogues en situation de validation, de séparer le travail sur les objets, qui constituent le milieu, du travail sur les énoncés produits par les élèves. Afin d'intégrer cette dimension sémantique, Barrier fait le choix d'analyser les interactions entre élèves en utilisant la sémantique de Hintikka et Sandu (1997) permettant ainsi de conjuguer l'analyse syntaxique et l'analyse sémantique des raisonnements.

Cette nécessité de tenir compte, lors de l'analyse des raisonnements, de la dimension sémantique, a contribué à conforter et justifier notre décision de prendre la TSD comme fondement de notre modèle. En effet cette dernière offre la possibilité d'analyser les actions du sujet sur les différents milieux, permettant ainsi de prendre en compte la dimension sémantique des raisonnements.

## **2. Catégorisation des raisonnements selon les niveaux de milieu**

Une fréquente justification de la construction de situations d'enseignement issues de situations fondamentales d'un savoir dans la TSD a été donnée par le bénéfice de ce type de situations sur les possibilités d'amener les élèves à entrer dans une démarche de preuve (Legrand, 1997). L'élaboration et l'analyse *a priori* de ces situations se basent sur l'étude des niveaux de milieux organisés ; l'analyse *a posteriori* permet au chercheur de déterminer s'il y a ou non une concordance du déroulement effectif avec la situation anticipée.

Il est nécessaire de distinguer dans l'analyse didactique d'une leçon : la situation proprement mathématique (la situation objective), de la situation d'action du sujet (situation à laquelle est confrontée l'élève), de la situation d'apprentissage autonome (sur quoi elle porte, en terme

d'enjeux didactiques) et de la situation didactique (manière dont l'enseignant conduit la leçon : ses interventions, les arguments qu'il utilise).

Les professeurs pensent qu'il est important de provoquer des apprentissages dans des situations d'action autonomes plutôt que de les obtenir de façon formelle pour ensuite les associer artificiellement à des descriptions de circonstances d'utilisation. Ils essaient ainsi de simuler les processus « naturels » de production et d'usage des connaissances. Mais nous savons que la méthode constructiviste radicale présente elle aussi de graves insuffisances. Théoriquement il n'y a aucune possibilité qu'une connaissance développée en situation autonome ait les mêmes propriétés qu'un savoir culturel. Son apprentissage doit nécessairement être complété par des activités didactiques spécifiques.

Le modèle de structuration du milieu utilisé est celui de Bloch (2006), issu précédemment du modèle de Margolinas (1998), modifié afin de tenir compte du rôle du professeur dans les niveaux didactiques de milieux. Dans ce travail nous nous intéressons à l'analyse des fonctionnalités des différents niveaux de milieux et aux résultats de la mise en œuvre dans la contingence (Bloch, 2006).

Le tableau résume les niveaux de milieu – de M+3 à M-3. Les niveaux de milieu de M-1 à M-3 correspondent à la situation *expérimentale*. Les niveaux associés aux indices strictement négatifs sont ceux qui nous intéressent tout particulièrement dans la configuration que nous étudions i.e. l'apparition d'un processus de preuve dans la mise en œuvre d'une situation à dimension didactique. En effet c'est au niveau de l'articulation entre le milieu objectif (qu'il vaudrait peut-être mieux appeler *milieu heuristique*) et le milieu de référence que nous nous attendons à voir apparaître et se développer les raisonnements attendus.

M+3:M-Construction		P+3:P-Noosphérien	S+3: <i>Situation noosphérienne</i>
M+2: M-Projet		P+3:P-Constructeur	S+2: <i>Situation de construction</i>
M+1:M-Didactique	E+1:E-Réflexif	P1: P-Projeteur	S+1: <i>Situation de projet</i>
<b>M0:M-Apprentissage</b>	<b>E0: Elève</b>	<b>P0: Professeur</b>	<b>S0: <i>Situation didactique</i></b>
M-1:M-Référence	E-1:E-Apprenant	P-1: P-Observateur	S-1: <i>Situation d'apprentissage</i>
➤ M-2: M- Objectif	E-2: E-Agissant	P-2 : P Dévolueur observateur	S-2: <i>Situation de référence</i>
➤ M-3: M- Matériel	E-3: E-Objectif		S-3: <i>Situation objective</i>

Tableau 1 : Tableau de la structuration du milieu (Bloch, 2006).

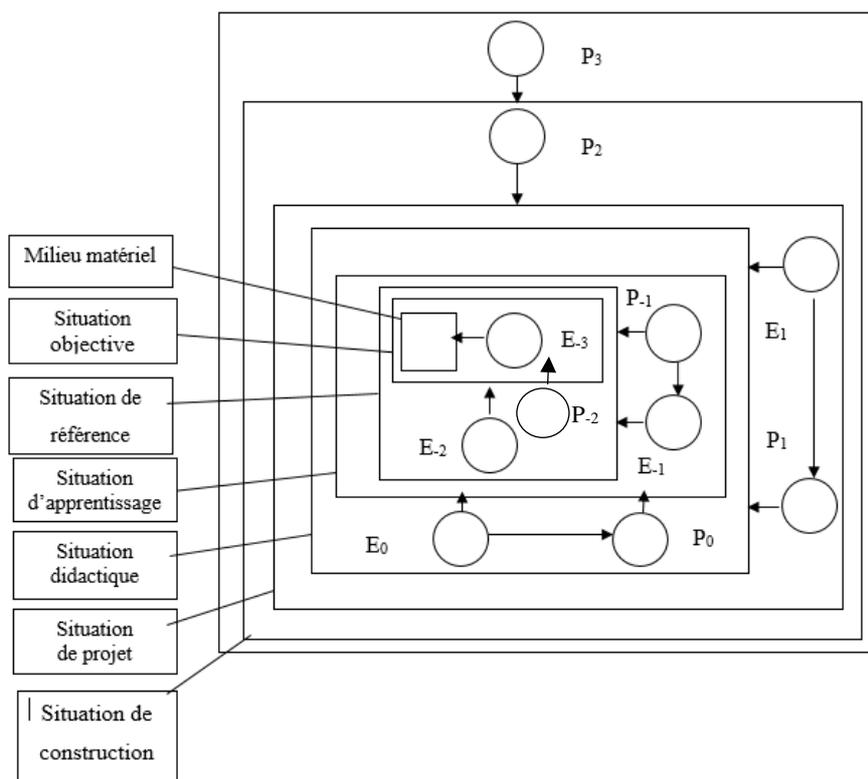


Schéma de la structuration du milieu

Figure 2 : Schéma de la structuration du milieu.

Ce modèle, associé au schéma de la structuration du milieu, permet ainsi de :

- représenter des déroulements effectifs de leçons ;
- concevoir des situations effectivement réalisables ;
- rendre compte des transformations du savoir observables au cours d'un apprentissage local ou d'une genèse historique;
- étudier les conditions théoriques du fonctionnement d'un savoir.

Il faut remarquer que pour chacune des situations emboîtées (situation objective, situation de référence, situation d'apprentissage, situation didactique, situation de projet, situation de construction), les savoirs et les connaissances de l'enseignant et de l'enseigné sont différents, même lorsqu'il s'agit de la même notion mathématique.

En ce qui concerne l'analyse des fonctions didactiques du raisonnement et de ses éléments, la combinatoire s'articule autour des trois types de situations que sont : l'action, la formulation et la validation.

La modélisation du fonctionnement des connaissances du sujet par l'usage de son répertoire didactique conduit à spécifier les conditions de son utilisation en définissant trois composantes du répertoire didactique : le répertoire d'action, le répertoire de formulation et le répertoire de validation.

Nous allons à présent énoncer les principes fondamentaux du schéma :

- L'objet et les moyens d'une activité sont différents.
- Une action porte sur un objet ; elle est déterminée par un *répertoire d'actions* du sujet et par une situation, elle-même étant définie par des conditions et un but à atteindre.
- Une formulation conduit à représenter les objets, les actions et les conditions de la situation d'action dans l'optique où cette dernière sert d'objet à la communication à l'aide du répertoire didactique dans lequel il y a des objets, des actions, des procédures et des déclarations.

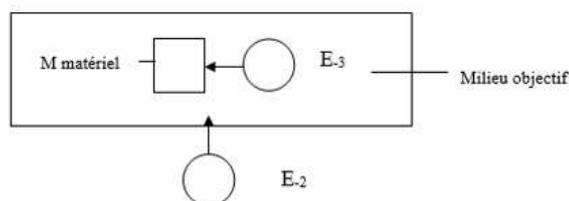
Ce schéma devrait nous permettre de distinguer une action et une modification de cette action dans la mesure où elle peut être justifiée par le sujet, en effet elles vont apparaître sur le schéma à des niveaux différents.

Nous distinguerons la performance de l'élève qu'il s'agisse d'une action, d'un message ou d'un énoncé, du répertoire didactique à l'aide duquel elle est produite.

Ce qui était considéré comme un moyen au niveau N est alors considéré comme un objet au niveau N+1 : la structure du schéma transforme en objet ce qui était le moyen au niveau précédent.

➤ **Le sujet agissant et le milieu objectif**

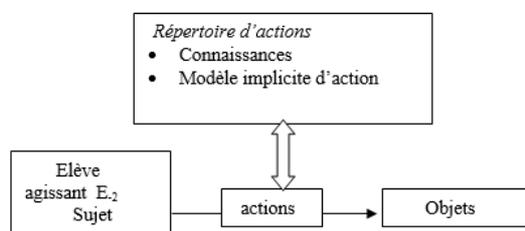
Ci-dessous, E<sub>3</sub> désigne l'élève objectif et E<sub>2</sub>, l'élève agissant. (M<sub>3</sub>, E<sub>3</sub>) définissent le milieu objectif pour E<sub>2</sub>.



*Sujet agissant et milieu objectif*

*Figure 3 : Sujet agissant et milieu objectif.*

Dans le cadre des règles, l'élève va, à l'aide de son *répertoire* de connaissances, établir une action, en général une action sur les objets. Ce qui motive l'action sur les objets c'est le répertoire didactique dont dispose l'élève.



*Modélisation de l'action du sujet sur le milieu objectif*

*Figure 4 : Modélisation de l'action du sujet sur le milieu objectif.*

Certaines actions du sujet sont entièrement déterminées par la situation : l'élève n'a pas réellement de choix à effectuer. Pour que l'élève ait le choix, il faut qu'il y ait plusieurs possibilités effectives, c'est-à-dire il faut pouvoir observer que, dans des conditions similaires, certains élèves font différemment. Il y a un choix s'il y a plusieurs possibilités effectives.

On peut envisager à ce niveau (M-2) que le sujet effectue à la demande de l'enseignant une communication inhérente à ses actions c'est-à-dire aux actions sur les objets eux-mêmes.

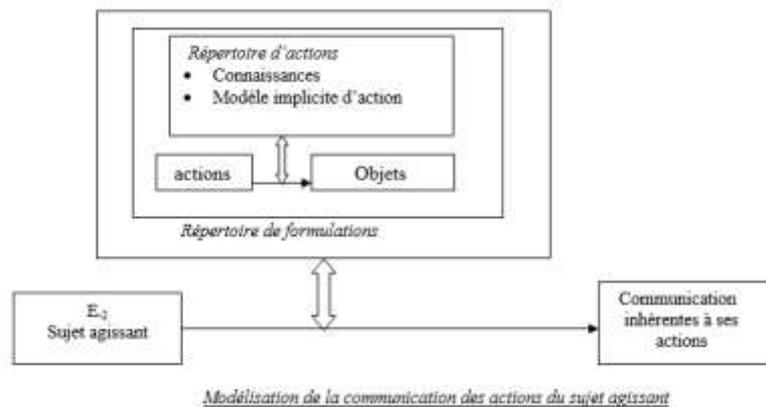


Figure 5 : Modélisation de la communication des actions du sujet agissant.

Comme indiqué dans (Gibel, 2008, p.23) une communication inhérente aux actions des élèves vise à amener les élèves à prendre position relativement aux différentes procédures proposées. Cette prise de position nécessite de la part des élèves une capacité à analyser les productions en fonction de différents critères :

- la pertinence : ce dont l'élève parle est réalisé dans la situation qui lui a été dévolue.
- l'adéquation : la procédure mise en œuvre permet d'obtenir la solution ;
- la complexité : le nombre de pas du raisonnement produit ;
- la consistance : ce n'est pas contradictoire avec ce qui a été institutionnalisé précédemment, c'est-à-dire avec le répertoire de connaissances de la classe ;
- la validité : consistance et adéquation. L'élève utilise ses connaissances conformément aux règles d'usage du répertoire didactique pour réaliser l'attendu.

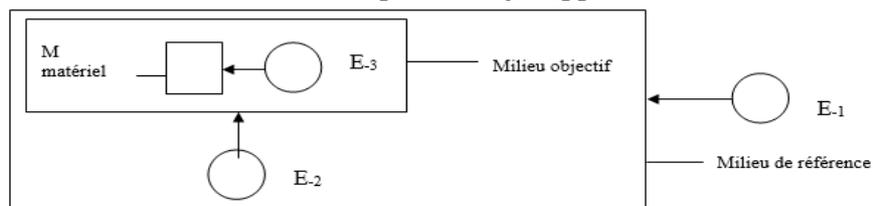
➤ **Le sujet apprenant et le milieu de référence**

Niveau (M-1) : Le sujet apprenant et le milieu de référence.

E<sub>3</sub> désigne l'élève objectif, E<sub>2</sub> l'élève agissant ;

(M<sub>3</sub>, E<sub>3</sub>) définit le milieu objectif ;

(M<sub>2</sub>, E<sub>2</sub>) constitue le milieu de référence pour le sujet apprenant E<sub>1</sub>.



*Le sujet apprenant et le milieu de référence*

Figure 6 : Le sujet agissant et le milieu de référence.

La situation vise à permettre au sujet apprenant, E<sub>1</sub> d'analyser sa suite de décisions. Pour lui, les conditions font partie de son objet d'étude. Il a un *répertoire* de règles d'apprentissage, de connaissances, de savoirs. Il va prendre en compte les objets, les règles mais également les conditions de son travail. Cette prise en considération par le sujet apprenant, de ses actions sur les objets en regard des conditions se situe à un deuxième niveau par rapport à l'analyse de ses actions sur les objets. Elle est déterminante en ce qui concerne le rapport du sujet à la situation. Nous allons à présent modéliser les différentes formes d'actions du sujet apprenant, en proposant le schéma suivant :

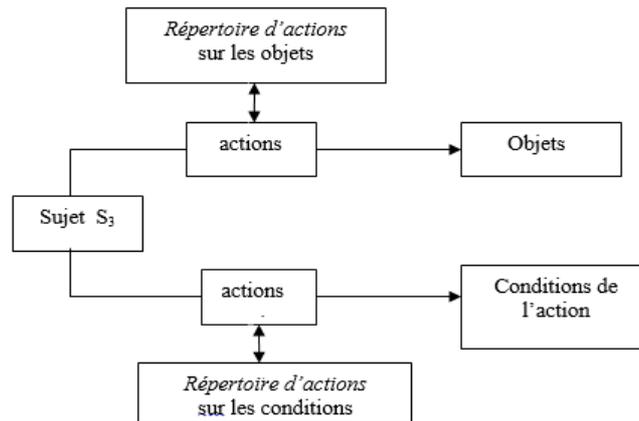


Figure 7 : Modélisation des actions du sujet apprenant.

Le sujet apprenant est amené à produire deux types d'actions qu'il convient de distinguer : d'une part une action sur les objets, d'autre part une action sur les conditions de l'action, autrement dit l'élève est conduit à envisager une modification des conditions dans lesquelles il va utiliser les objets. Ce qui fait fonctionner cet outil d'analyse, c'est le fait que l'on traduise les situations en terme de conditions.

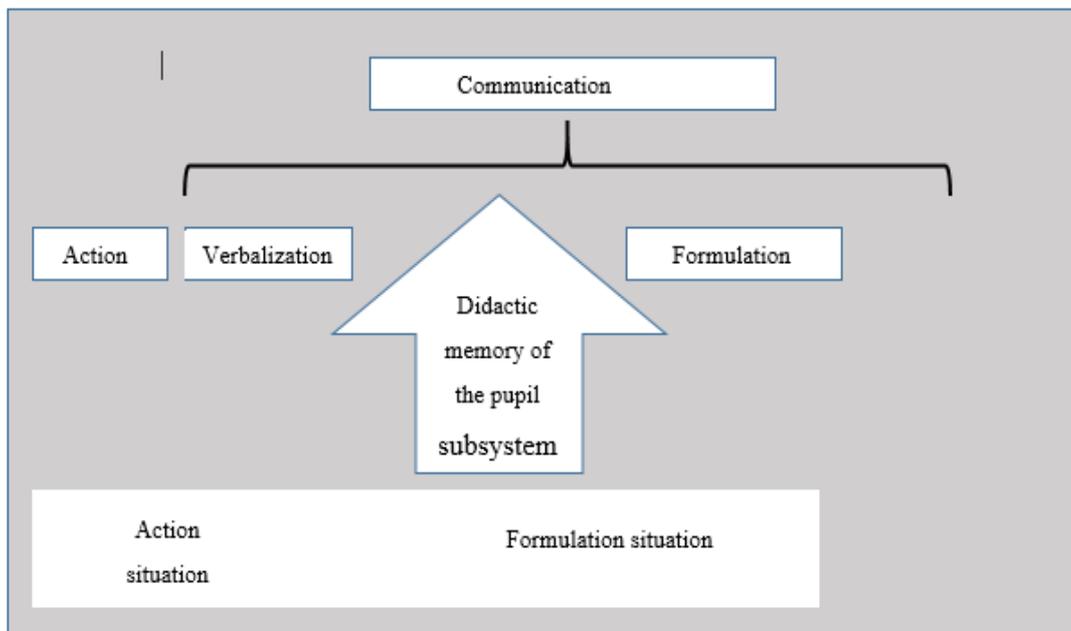


Figure 8: Place de la verbalisation et de la formulation en TSD (Flückiger, 2005).

*Bringing a past didactic event to the foreground and comparing it to the present calls upon memory. Such episodes are pupils-initiated and are hence referred to as the pupil's didactic memory. One of its functionalities is to create the conditions for moving from an action situation to a formulation situation. (Flückiger, 2005, p.71)*

Le schéma ci-dessus proposé par Flückiger (2005) précise le moment où l'élève fait fonctionner sa « mémoire didactique<sup>2</sup> », permettant ainsi la modification de l'usage de la connaissance mobilisée (en situation d'action et de verbalisation des actions), en vue d'une formulation<sup>3</sup> de sa procédure. Cette modélisation est selon nous à rapprocher du fonctionnement du répertoire didactique (plus précisément du système organisateur) de l'élève, lorsque ce dernier procède à

<sup>2</sup> Il s'agit de la mémoire didactique du sous-système « élève » telle que définie par Flückiger (2005).

<sup>3</sup> Qui est assimilable à une justification de sa procédure.

une confrontation d'énoncés ou de représentations, en vue de prendre en compte les conditions d'utilisation des objets dans la formulation d'un raisonnement.

➤ **L'élève et la situation d'apprentissage**

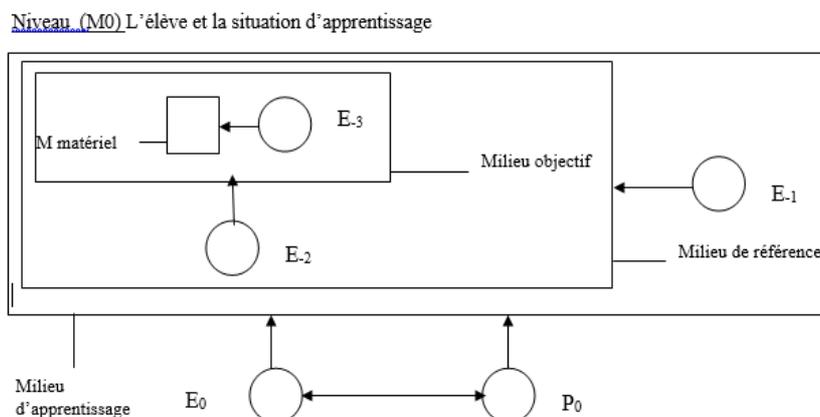


Figure 9 : L'élève en situation d'apprentissage.

Le niveau (M0) est celui des assertions. Au niveau précédent, (M-1), nous étions au niveau des relations mathématiques, la vérité était évidente, la relation était vraie ou fausse mais il n'y avait pas de jugement. Or dans la situation étudiée l'autre arrive avec une culture, avec des exigences qui ne sont pas celles de la situation. Par conséquent à ce niveau, l'action est remplacée par des déclarations sur des variables, il s'agit de déclarations sur les rapports aux connaissances.

D'après l'analyse didactique effectuée dans la section précédente, nous savons que des étapes de la situation peuvent être à l'origine de raisonnements mathématiques (Bloch & Gibel, 2011) : la confrontation à un milieu heuristique (milieu objectif) pour leur élaboration ; le passage à un milieu de référence pour établir la généralité des méthodes et le caractère de nécessité des propriétés trouvées. Les interventions de l'enseignant (P-régulateur), dans la situation d'apprentissage, sont destinées le plus souvent à maintenir le caractère adidactique de la situation en relançant l'activité par un éventuel retour à une situation de jeu (situation d'action) ou par la *formulation* d'une explication nécessaire à la compréhension d'une proposition formulée par un élève. Bloch (1999) dans son article sur l'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève précise le rôle de l'enseignant :

*Dans la mesure où le milieu de la situation n'assure pas de façon suffisamment adidactique la production de connaissances, nous nous tournons vers l'activité du professeur et les connaissances qu'il met en œuvre, pour comprendre le fonctionnement de la situation pour l'élève. (p.4)*

**3. Les dimensions du modèle d'analyse des raisonnements**

Nous allons à présent expliciter les éléments qui structurent le modèle en regard des niveaux de milieu. Compte-tenu des analyses didactiques effectuées précédemment, nous avons été amenés à privilégier trois axes qui orientent et structurent notre analyse des raisonnements dans chacune des situations décrites précédemment. Ces axes réfèrent à des niveaux de modélisation différents des raisonnements en jeu dans le déroulement de la situation : modélisation globale relative aux niveaux de milieu, et modélisation locale au niveau des arguments produits dans le travail et les échanges en classe, ainsi qu'au niveau des signes émergents de ce travail.

- ✓ Le premier axe est lié au milieu de la situation : dans une situation comportant une dimension adidactique<sup>4</sup>, les élèves donnent à voir des raisonnements qui dépendent fortement du niveau de milieu où ils se situent.
- ✓ Le deuxième axe est l'analyse des fonctions du raisonnement, pointée ci-dessus comme nécessaire. Nous nous attacherons à montrer comment les fonctions du raisonnement sont liées à des niveaux de milieux et comment ces fonctions *manifestent* aussi ces niveaux de milieux, de sorte qu'ils peuvent servir au repérage de la position des élèves dans chacun de ces niveaux.
- ✓ Le troisième axe est celui des signes et des représentations observables. Ces observables se donnent à voir dans des formes différentes qui affectent le déroulement de la situation. La nature des signes et le statut logique du raisonnement sont à prendre en compte pour l'efficacité, l'idonéité aux attendus et le rôle dans la situation. L'analyse des signes est réalisée au regard du répertoire de représentation mobilisé par l'auteur du raisonnement. Il s'agit de prendre pour objet d'étude l'usage du répertoire didactique et de son niveau d'actualisation. Ainsi nous pourrions analyser *a priori* les connaissances et les savoirs, valides ou erronées, susceptibles d'être produits et déterminer ceux que l'enseignant pourra institutionnaliser, en regard de chacun des niveaux de milieu.

Ces trois axes apparaissent nécessaires et complémentaires pour effectuer une analyse très précise des différentes formes de raisonnements qui sont susceptibles d'être produits en regard de leur(s) fonctions et des conditions de leur production par les élèves (et/ou par l'enseignant au niveau M0). Ils constituent les dimensions de notre modèle d'analyse des raisonnements.

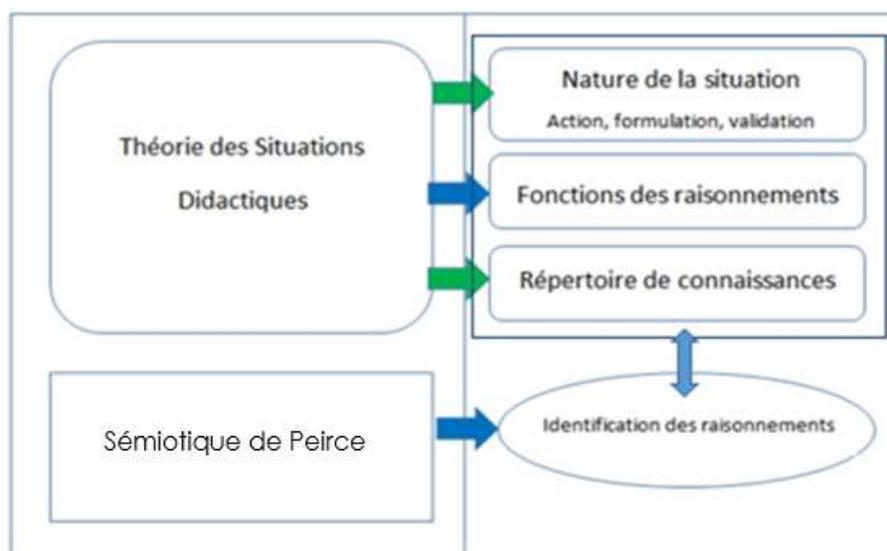


Figure 10 : schéma du modèle d'analyse des raisonnements.

Le schéma présenté ci-dessous permet d'illustrer les principaux axes qui structurent notre modèle d'analyse des raisonnements en lien avec les théories mobilisées : la Théorie des Situations Didactiques et la sémiotique de C.S. Pierce.

Le tableau 2 présente de façon synthétique le modèle utilisé<sup>5</sup> ; il indique les signes et raisonnements attendus dans chaque niveau de milieu, à partir de l'analyse *a priori* réalisée pour la situation prévue<sup>6</sup>.

<sup>4</sup> ou à dimension adidactique.

<sup>5</sup> dans sa dimension prédictive.

<sup>6</sup> La situation mathématique qui a contribué à l'élaboration du tableau 2 est la situation du flocon de Von Koch (Bloch et Gibel, 2011).

Nous avons codé en « SYNT » ou « SEM » les dimensions possibles, syntaxiques ou sémantiques, rencontrées dans les différents niveaux d'argumentation. Remarquons cependant que les dimensions syntaxique et sémantique ne sont pas spécifiques du niveau d'adéquation à la situation : en effet, des élèves peuvent fort bien utiliser leurs connaissances anciennes de façon syntaxique mais ne pas entrer dans les requis de la situation, ce qui rendra ces essais peu opérants ; par ailleurs le travail syntaxique, une fois mis en forme, joue un indéniable rôle sémantique, que tous les mathématiciens (re)connaissent.

Durand-Guerrier (2010) définit précisément les dimensions sémantiques, syntaxiques et pragmatiques :

*semantics concerns the relation between signs and objects they refer to ; syntax concerns the rules of integration of signs in a given system, and pragmatics the relationship between subjects and signs (Morris, 1938 - Eco, 1971). (Durand-Guerrier, 2010)*

	Milieu M <sub>2</sub>	Milieu M <sub>1</sub>	Milieu M <sub>0</sub>
<b>Fonctions des raisonnements</b>	R1.1 SEM - Intuition sur un dessin - Décision de calcul - Moyen heuristique - Exhibition d'un exemple ou d'un contre-exemple	R1.2 SYNT/SEM - Calculs génériques - Formulation de conjectures étayées - Décision sur un objet math.	R1.3 SYNT - Formalisation des preuves dans la théorie mathématique requise (avec aide du P éventuellement)
<b>Niveaux d'utilisation des symboles</b>	R2.1 SEM Icônes ou indices dépendant du contexte (schémas, intuitions...)	R2.2 SYNT/SEM Arguments 'locaux' ou plus génériques : indices, calculs	R2.3 SYNT Arguments formels spécifiques
<b>Niveau d'actualisation du répertoire</b>	R3.1 SYNT/SEM - Utilisation ponctuelle de connaissances anciennes - Enrichissement au niveau heuristique : calculs, conjectures ponctuelles	R3.2 SYNT/SEM Enrichissement au niveau argumentaire : - des énoncés - du système organisateur	R3.3 SYNT - Formalisation des preuves - Introduction d'ostensifs organisés - Intégration des éléments théoriques du domaine math.

Tableau 2 : Le modèle milieux/répertoire/symboles (Bloch et Gibel, 2011).

Ce modèle nous permettra de caractériser précisément les formes et les fonctions des raisonnements qui sont susceptibles d'être produits, en situation, par les élèves et l'enseignant, ainsi ce modèle a une fonction prédictive. Nous effectuerons ensuite grâce à cet outil une analyse *a posteriori* très précise des raisonnements produits, en les analysant en regard de chacune des dimensions qui structurent le modèle.

Dans la section suivante nous allons nous attacher à préciser les différentes fonctions de ce modèle.

#### 4. Les principales fonctions du modèle

##### *La fonction prédictive du modèle*

Le modèle a été construit de façon à mettre en lumière, à partir de l'analyse *a priori* de la situation réalisée dans le cadre de la Théorie des situations didactiques, les différentes formes

et les différentes fonctions des raisonnements susceptibles d'apparaître dans la relation didactique, en lien avec les différents niveaux de milieu correspondants. Ces derniers seront déterminés par la réalisation d'une analyse ascendante des niveaux de milieux détaillée, élaborée de façon à rendre visible les différentes situations emboîtées associées aux différents sujets confrontés aux milieux correspondants.

On en déduit que l'analyse *a priori* détaillée de la séquence et l'analyse des niveaux de milieux constituent des points d'appuis essentiels pour envisager plus précisément les formes de raisonnements que les élèves sont susceptibles de produire. En effet le chercheur pour pouvoir interpréter les différents observables, en lien avec chacune des situations, doit avoir préalablement envisagé précisément les formes de raisonnements. De plus l'observateur, en s'appuyant sur une analyse fine des niveaux de milieu, est en mesure de repérer dans la production des raisonnements des élèves un changement de niveau de milieu ; notamment le retour à une confrontation à la situation objective ou bien le passage de la situation didactique à la situation d'apprentissage. Il nous apparaît essentiel de repérer le raisonnement en lien avec sa fonction, le rôle qu'il joue est étroitement lié à la situation dans laquelle il a été produit. C'est en ce sens que nous pouvons dire que le modèle d'analyse des raisonnements a pour le chercheur une fonction prédictive.

Dans la première ligne du tableau 2, nous explicitons, selon le niveau de milieu où se situent les élèves, les différentes fonctions que recouvrent les raisonnements :

- ✓ au niveau « heuristique »  $M_{-2}$  (milieu objectif), les fonctions sont assimilables à des calculs exploratoires, des conjectures, des initiatives, des dessins,...
- ✓ au niveau  $M_{-1}$ , (milieu de référence), les fonctions des raisonnements peuvent être des déclarations de formules, des propriétés, et des début de justification) ;
- ✓ nous étudierons aussi le niveau  $M_0$ , en effet dans une situation à dimension adidactique, l'institutionnalisation n'est pas l'exclusivité du professeur, en effet celui-ci s'appuie fortement sur les productions des élèves.

La deuxième ligne du tableau met en relation les productions des élèves et la nature des signes associées. La dialectique signes/milieux est relativement prévisible : au niveau  $M_{-2}$  sont associées plutôt des productions de type heuristique, et au niveau  $M_{-1}$  des formules, des assertions générales, conjectures déjà formalisées et au niveau  $M_0$  les signes sont majoritairement des arguments formels spécifiques.

La troisième ligne traduit l'actualisation du répertoire de représentation, en particulier l'abandon de procédures anciennes ou intuitives et l'adoption de preuve assimilables à des preuves mathématiques.

Dans l'hypothèse où le chercheur souhaite communiquer l'ingénierie à un enseignant, dans le but que ce dernier fasse vivre la séquence à ses élèves, le modèle<sup>7</sup> permet alors de mettre en évidence les différentes formes de raisonnements valides ou erronés que les élèves pourraient produire, lors de chacune des phases. Cette connaissance des formes de raisonnements apparaît alors comme un élément particulièrement utile à l'enseignant pour effectuer une gestion didactique pertinente des différentes phases.

Le modèle offre donc la possibilité à l'enseignant de réfléchir préalablement aux formes et aux fonctions des raisonnements que ses élèves seront susceptibles de produire et ainsi de lui permettre d'envisager une gestion plus efficace, c'est-à-dire prenant en compte le plus fidèlement possible le projet initial de l'élève lors des phases de validation et d'institutionnalisation.

Il va aussi d'une certaine façon faciliter la tâche d'analyse didactique du chercheur confronté à l'analyse *a posteriori* de la séquence ; c'est ce que nous allons préciser dans le paragraphe suivant.

---

<sup>7</sup> Le modèle est mis en œuvre par le chercheur.

## ***La fonction explicative du modèle***

Nous avons élaboré ce modèle afin d'analyser les observables qui traduisent la mise en œuvre effective des raisonnements des élèves et des étudiants, ainsi que leur(s) fonction(s) lors de chacune des phases de la séquence. Pour chacune des phases du déroulement de la séquence étudiée, nous voulons grâce au modèle, identifier les situations correspondantes et ainsi déterminer le rôle que joue le raisonnement dans la situation correspondante.

### ➤ *La méthodologie de l'analyse a posteriori*

En didactique, l'objet qui nous intéresse principalement est ciblé : l'action qui fait l'objet principal de l'analyse est centrée sur une connaissance et sur ses répliques, celle que le professeur veut enseigner, celle qu'il met en scène effectivement et celle que les élèves ou les étudiants donnent comme sens au déroulement.

Notre ambition n'est pas de rendre compte lors de l'analyse *a posteriori* de la totalité des événements didactiques qui se sont produits au cours de la séance, ni de montrer en détail comment on peut obtenir un tel compte rendu par des réductions sensibles mais assez respectueuses de la méthode et de la contingence. Nous allons nous centrer sur les raisonnements produits au cours de chacun des épisodes étudiés : les conditions de leur production (autrement dit l'identification au niveau de milieu), leurs fonctions en situation (en lien avec le niveau de milieu) et leurs effets sur l'avancement de la leçon du point de vue de l'actualisation du répertoire didactique. Cette étude des raisonnements repose sur une analyse sémiotique des signes émergents, en lien avec le répertoire de représentation mobilisé par l'élève.

### ➤ *Les axes privilégiés lors de l'analyse a posteriori*

Le modèle permet de déterminer si les enjeux didactiques de chacune des phases de la séquence sont en adéquation avec le projet de l'enseignant, mais également, de préciser en situation de validation, la nature et le rôle des arguments (raisonnements argumentatifs) produits par un ou plusieurs élèves ainsi que leurs effets sur le déroulement de la séquence notamment du point de vue de la conviction des élèves.

Du point de l'identification des connaissances et des savoirs, le modèle offre la possibilité d'identifier, le plus fidèlement possible, les connaissances et les savoirs, valides ou erronés, que les élèves ont mobilisé afin de produire leur raisonnement par confrontation aux différents milieux. Il nous semble important de déterminer l'évolution du répertoire didactique de la classe, au fil la séquence, en repérant les savoirs pour lesquels l'enseignant a choisi d'enclencher un processus d'institutionnalisation.

De plus la fonction explicative du modèle est déterminante car ce dernier permet de percevoir, plus précisément de donner à voir les écarts existant entre le projet de séquence initial et la réalité du déroulement et ce de différents points de vue ayant une même visée : comprendre les raisons pour lesquelles certaines phases n'ont pas produit les effets attendus du point de vue des apprentissages et du point de vue des comportements et les raisons pour lesquelles les phases, plus précisément la confrontation des élèves aux situations emboîtées a permis (ou non) de favoriser la pratique du raisonnement et d'enrichir le répertoire didactique de la classe en permettant aux élèves d'accéder aux véritables raisons de savoir.

## **CONCLUSION**

La Théorie des Situations Didactique a joué un rôle déterminant dans l'élaboration de ce modèle. Elle nous a permis de caractériser les raisonnements en intégrant les conditions de leur

élaboration grâce à l'identification des niveaux de milieux et nous a fourni un cadre et un outillage adéquat à la réalisation d'analyse *a priori* détaillée des situations. De plus, elle nous a amené à construire une caractérisation des fonctions des raisonnements en lien avec les situations et elle a également contribué à définir la notion de répertoire de représentation<sup>8</sup>.

La sémiotique de C.S. Peirce a eu un rôle décisif lors de la construction du modèle. En effet elle a permis d'identifier certaines formes de raisonnement nécessitant une analyse très précise des signes ; de plus leur analyse permet de mettre en lumière l'évolution du répertoire de représentation lors du déroulement de la séquence ou du dispositif didactique.

L'originalité et l'intérêt du modèle d'analyse des raisonnements sont essentiellement dus au fait qu'il résulte de la combinaison de ces cadres théoriques permettant ainsi de recouvrir une dimension d'analyse globale et une dimension d'analyse locale. L'analyse globale est liée à l'identification du niveau de milieu qui définit et traduit le statut logique des énoncés en regard de leurs fonctions, l'analyse locale repose sur une identification peircienne des signes donnant ainsi à voir l'usage et l'évolution du répertoire de représentation.

Nous avons expérimenté et éprouvé la pertinence de notre modèle dans différents domaines des mathématiques et à différents niveaux d'enseignement : l'Arithmétique au primaire (Gibel, 2015), la Géométrie à la transition primaire-secondaire (Gibel & Blanquart, 2017), l'Analyse dans le secondaire (Bloch & Gibel, 2011), (Gibel, 2017) ainsi que l'Algèbre linéaire dans l'enseignement supérieur (Lalaude-Labayle, 2016). Le modèle nous a permis d'étudier les nombreuses difficultés auxquelles sont confrontés les élèves dans l'enseignement primaire et secondaire, ainsi que les étudiants en Classes Préparatoires et à l'entrée à l'Université. Il apparaît comme un outil adéquat pour analyser précisément l'origine des erreurs des élèves et des étudiants.

Dans le cadre d'un contexte d'enseignement d'évolution des programmes et des pratiques, les TICE apparaissent comme des outils incontournables dans l'enseignement secondaire et supérieur. D'un point de vue didactique, elles offrent la possibilité de faciliter les changements de cadres et ainsi d'éclairer différemment un même objet mathématique (Gibel, 2017). L'utilisation du modèle, par sa dimension sémiotique, permet d'envisager l'élaboration de séquences et de dispositifs intégrant des changements de cadres et d'éventuels changements de registres pour une compréhension approfondie des concepts mathématiques par le biais d'un usage raisonné en situation. Il nous semble nécessaire de combiner deux dimensions du raisonnement : la dimension sémantique et la dimension syntaxique qui apparaissent indissociables afin de permettre aux élèves et aux étudiants d'accéder au sens des objets mathématiques (Bloch & Gibel, 2016), (Gibel, 2017).

Concernant les projets de recherche en cours, un de nos objectifs est de contribuer à une réflexion, dans le cadre de la lutte contre l'échec en licence, visant à mettre dans une perspective de réussite les étudiants en difficulté dans le domaine de l'Analyse. Notre ambition est d'élaborer avec les enseignants des classes de L1, L2 et L3 scientifiques, des situations d'enseignement/apprentissage consistantes, issues pour certaines d'entre elles d'ingénieries élaborées précédemment, afin de permettre l'acquisition de connaissances et de savoirs signifiants pour les étudiants dans le domaine des équations différentielles, et plus généralement de l'Analyse. Le modèle d'analyse des raisonnements pourra ainsi nous permettre d'évaluer en amont la pertinence et l'adéquation des situations envisagées.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BALACHEFF, N. (1987). Processus de preuve et situation de validation. *Educational Studies in Mathematics*, 18(2), 147-176.

---

<sup>8</sup> à partir de la notion de répertoire didactique.

- BARRIER, T. (2008). Sémantique selon la théorie des jeux et situations de validation en mathématiques. *Education et didactique*, 2, 35-58.
- BLANCHE, R. (1973). *Le raisonnement*. Paris : Presses Universitaires de France.
- Bloch, I. (1999). L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse en Première scientifique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 135-193.
- BLOCH, I. (2005). Dimension adidactique et connaissance nécessaire : un exemple de 'retournement' d'une situation. In M. H. Salin, P. Clanché & B. Sarrazy (Eds.) *Sur la Théorie des Situations Didactiques* (pp.143-152). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- BLOCH, I. (2006). *Quelques apports de la théorie des situations à la didactique des mathématiques dans l'enseignement secondaire et supérieur*. Note de synthèse l'Habilitation à Diriger les Recherches de l'Université Paris 7.
- BLOCH, I. & GIBEL, P. (2011). Un modèle d'analyse des raisonnements dans les situations didactiques : étude des niveaux de preuves dans une situation d'enseignement de la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 31(2), 191-228.
- BLOCH, I. & GIBEL, P. (2016). A model to analyse the complexity of calculus knowledge at the beginning of University course. Two examples: parametric curves and differential equation. In E. Nardi, C. Winsløw & T. Hausberger (Eds.), *Proceedings of the First Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics* (pp. 43-53). France : Montpellier.
- BROUSSEAU G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 33-115.
- BROUSSEAU G. (1988). Les différents rôles du maître. *Bulletin de l'AMQ*, 14-24.
- BROUSSEAU, G. (1998). *La théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- BROUSSEAU, G. & GIBEL, P. (2005). Didactical Handling of Students' Reasoning Processes in Problem Solving Situations. *Educational Studies in Mathematics*, 59(3), 13-58.
- BRUN, J. (1990). La résolution de problèmes arithmétiques : bilan et perspectives. *Maths-école*, 141, 2-15.
- BRUN, J. (1994). Évolution des rapports entre la psychologie du développement cognitif et la didactique des mathématiques. In M. Artigue, R. Gras, C. Laborde & P. Tavnigot (Eds.), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France* (pp. 67-83). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- CONNÉ, F. (1992). Savoirs et connaissances dans la perspective de la transposition didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(2), 221-270.
- DURAND-GUERRIER, V. (2007). Retour sur le schéma de la validation explicite dans la théorie des situations didactiques. In A. Rouchier (Ed.), *Actes du colloque Didactiques : quelles références épistémologiques ? (Cédérom)*. Bordeaux: IUFM d'Aquitaine.
- DURAND-GUERRIER, V. (2008). Truth versus validity in mathematical proof. *ZDM mathematical education*, 40, 373-384.
- DURAND-GUERRIER, V. (2010). Semantic perspective in mathematics education. A model theoretic point of view. In *Proceedings of International Congress of Mathematical Education 11*. Mexique : Mexico.
- DUVAL, R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques ? *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 16(3), 349-382.
- DUVAL, R. (2006). Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques ? *Relime*, Numéro spécial, 45-81.
- ECO, U. (1980). *Signo*. Milan : A. Mandatori. *Le signe*, 1988 pour la traduction française. Bruxelles : Labor.
- EVERAERT-DESMEDET, N. (1990). *Le processus interprétatif : introduction à la sémiotique de C.S. Peirce*. Liège : Pierre Mardaga.
- FLÜCKIGER, A. (2005). Macro-situation and numerical knowledge building: the role of pupils didactic memory in classrooms interactions. *Educational Studies in Mathematics*, 59(3), 13-58.
- GIBEL, P. (2004). *Fonctions et statuts des différentes formes de raisonnement dans la relation didactique en classe de mathématiques*. Thèse de l'Université Bordeaux 2, Bordeaux.

- GIBEL, P. (2008). Analyse en théorie des situations d'une séquence destinée à développer les pratiques du raisonnement en classe de mathématiques. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 13, 5-39.
- GIBEL, P. (2015). Mise en œuvre d'un modèle d'analyse des raisonnements en classe de mathématiques à l'école primaire. *Education et Didactique*, 9-2, 51-72.
- GIBEL, P. (2017). Analyse clinique d'une situation d'apprentissage visant la sensibilisation au concept de limite par les élèves de Première Scientifique. In A. Bessot (Ed.) *Actes du sixième Colloque International de Didactique-Université de pédagogie* (pp. 323-338). Vietnam : Hô Chi Minh ville.
- GIBEL, P. (2018). *Elaboration et usages d'un modèle multidimensionnel d'analyse des raisonnements en classe de mathématiques*. Note de synthèse de l'Habilitation à Diriger les Recherches de l'Université de Pau et des Pays de l'Adour.
- GIBEL, P. & BLANQUART-HENRY, S. (2017). Favoriser l'appropriation des propriétés géométriques des quadrilatères à l'école primaire : Étude d'une situation d'apprentissage dans le méso-espace. *Revue des Sciences de l'Education*, 43(1), 37-84.
- GIBEL, P. & ENNASSEF, M. (2012). Analyse en Théorie des Situations Didactiques d'une séquence visant à évaluer et à renforcer la compréhension du système décimal. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 17, 87-116.
- HINTIKKA, J., SANDU, J. (1997). Game-Theoretical Semantics. In J. Van Benthem, A. Ter Meulen (Eds.) *Handbook of Logic and Language* (pp.361-410). Amsterdam: Elsevier.
- LALAUDE-LABAYLE, M. (2016). *L'enseignement de l'algèbre linéaire au niveau universitaire - Analyse didactique et épistémologique*. Thèse de l'Université de Pau et des Pays de l'Adour.
- LEGRAND, M. (1997). La problématique des situations fondamentales. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 16(2), 221-279.
- LORENZEN, P. (1967). *Métamathématiques*. Paris : Gauthier-Villars.
- MARGOLINAS, C. (1998). Étude de situations didactiques "ordinaires" à l'aide du concept de milieu : détermination d'une situation du professeur. *Actes de la 8ème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*.
- MERCIER, A. (1995). Les effets de l'intervention enseignante dans le milieu des situations didactiques. In C. Margolinas (Ed.) *Les débats de didactique de mathématiques* (pp.157-168). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- MORRIS, C.W. (1938). *Foundations of the theory of signs*. Chicago : Chicago university press.
- PIERCE, C. S. (1978). *Écrits sur le signe (traduction et commentaires de Deledalle, G.)*. Paris : Seuil.
- ROBERT, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18(2), 139-190.