Les Situations de Recherche par Maths a Modeler
Articuler recherche, formation et diffusion

Virginie **DELOUSTAL-JORRAND**

Laboratoire S2HEP EA 4148

Université de Lyon, Université Claude Bernard

virginie.deloustal-jorrand@univ-lyon1.fr

Simon **MODESTE**

Laboratoire IMAG

Université de Montpellier, CNRS, Montpellier, France

simon.modeste@umontpellier.fr

Résumé

Cet article cherche à montrer comment l'équipe Maths à Modeler articule recherche, formation et diffusion en s'appuyant sur la conception et la mise en œuvre de Situations Recherche pour la Classe (SiRC). L'objectif des SiRC est de travailler la démarche mathématique, les critères de définitions d'une SiRC sont redonnés et illustrés sur un exemple. Quelques recherches liées aux SiRC sont décrites ainsi que les missions de l'équipe Math à Modeler.

Mots clés

Situation Recherche. Démarche mathématique. Argument. Preuve. Mathématiques discrètes. Chasse à la bête

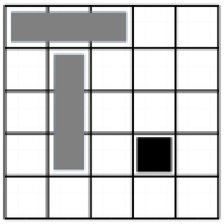
L'équipe Maths à Modeler regroupe des chercheurs en mathématiques discrètes et en didactique des mathématiques. À partir de problèmes issus de la recherche en mathématiques actuelle, elle développe des situations de recherche pour la classe (SiRC ou *Situation Recherche* dans la suite). La mise en œuvre de ces Situations Recherche amène les élèves à se placer en position de « chercheurs » : dans la lignée du *problème ouvert* (Arsac & Mante, 2007) et des *situations didactiques*, ils n'ont pas d'outils directement disponibles et doivent s'en créer pour résoudre le problème. Ainsi, ces situations permettent de travailler la « démarche mathématique » (définition, modélisation, contre-exemples, preuve, condition nécessaire ou suffisante, argumentation, débat…). Du fait qu'elles sont issues de la recherche en mathématiques discrètes et se situent hors des mathématiques traditionnellement enseignées, nos situations sont assez riches et consistantes pour être utilisées du cycle 3 à l'université ainsi qu'en formation des professeurs ou encore dans des situations de diffusion de la sciences (Maison des Maths et de l'Informatique, Fête de la science…). Notre texte s'attache donc, à partir d'une de ces situations Recherche, à montrer l'articulation entre recherche, formation et diffusion. Dans une première partie, nous présentons la Situation Recherche « La chasse à la bête ». À partir de cet exemple, nous décrivons, dans la deuxième partie, quelques caractéristiques d'une SiRC. La troisième partie montre comment les recherches se développent autour de ces situations. Enfin, dans la dernière partie, nous présentons l'équipe Maths à Modeler et ses missions.

I. UNE SITUATION RECHERCHE : LA CHASSE A LA BETE

Dans cette partie, nous souhaitons faire comprendre au lecteur ce que nous entendons par Situation Recherche. Pour cela, nous présentons l'une de nos situations, « La chasse à la bête », et quelques pistes de résolution en les illustrant par des travaux d'élèves de troisième (14-15 ans) du lycée Antoine de Saint-Exupéry (Santiago, Chili). Certains de ces élèves sont de langue maternelle espagnole. Les illustrations sont tirées des cahiers d'élèves (notes de recherche et préparation d'un séminaire inter-classes) remplis lors d'une expérimentation réalisée en 2014.

1. Présentation de la chasse à la bête

Voici la situation telle que nous la présentons en général :



« Ceci est mon jardin : il est représenté par un carré de 5 cases sur 5 cases. Malheureusement, dans mon jardin, il y a des bêtes représentées par les rectangles gris de 3 cases. Ces bêtes peuvent se poser horizontalement ou verticalement, comme ci-contre, mais jamais en diagonale. Elles ne se chevauchent jamais et recouvrent chacune trois cases.
Pour les empêcher de venir, je pose des pièges, représentés par un carré noir. Les bêtes ne peuvent pas se poser sur ces pièges. Comme ces pièges coûtent très cher, je veux en mettre le moins possible. Combien dois-je mettre au minimum de pièges pour empêcher les bêtes de venir dans mon jardin ? »

2. Résultats pour des bêtes en triminos droits

Rapidement, des essais permettent de trouver des premières solutions qui conviennent, c'est-à-dire pour lesquelles aucune bête ne peut rentrer dans mon jardin. Ci-dessous (figure 1) une solution à 9 pièges et deux solutions à 8 pièges.

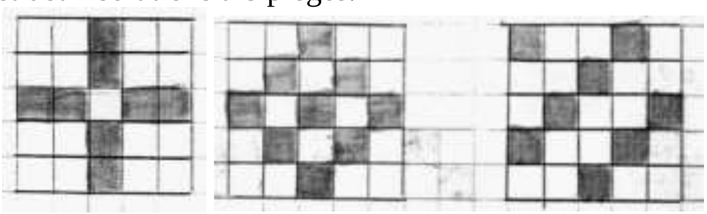
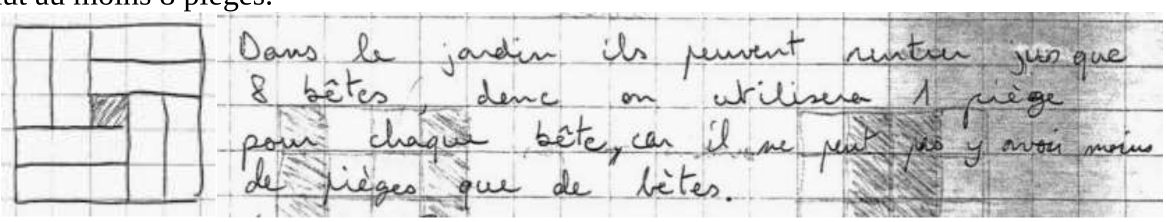


Figure 1 : Des solutions à 8 et 9 pièges.

Après plusieurs essais infructueux pour trouver une meilleure solution, la conjecture est que la solution à 8 pièges est la solution minimale. Pour le prouver, il faut changer de point de vue et s'intéresser au nombre maximal de bêtes pouvant entrer simultanément dans le jardin. La figure 2 ci-dessous montre qu'il peut y avoir 8 bêtes en même temps dans le jardin. Or, un piège ne peut pas piéger deux bêtes à la fois, il faut donc au moins un piège par bête, c'est-à-dire qu'il faut au moins 8 pièges.



> *« Dans le jardin, ils peuvent rentrer jusque 8 bêtes, donc on utilisera 1 piège pour chaque bête, car il ne peut pas y avoir moins de pièges que de bêtes. »*

Figure 2 : Argument pour nombre minimum de pièges.

Comme on ne peut pas utiliser moins de 8 pièges et qu'on a trouvé une solution à 8 pièges, le problème est résolu. Le schéma de la figure 3 ci-dessous rend compte de ce résultat. En effet, la condition suffisante y est représentée par la solution à huit pièges en croix (carrés noirs) et l'expression qui lui est liée « $n \leqslant 8$ » tandis que la condition nécessaire y est représentée par les huit bêtes (torsades) et l'expression qui lui est liée « $n \geqslant 8$ ». La conclusion est n=8.

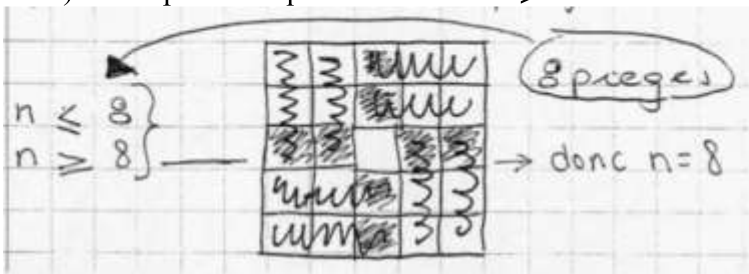


Figure 3 : Schéma représentant les pièges et les bêtes.

3. Résultats pour des bêtes dominos ou triminos coudés

Cette situation de départ peut facilement déboucher sur des prolongements qui sont souvent proposés aux élèves à la suite. Par exemple, les bêtes peuvent changer de forme.

Des bêtes en dominos 

Le même problème est posé aux élèves mais les bêtes ont des enfants qui sont maintenant représentés par des dominos (deux cases).
Le type de raisonnement mis en œuvre est le même. On trouve une solution à 12 pièges et on montre ensuite qu'on ne peut pas diminuer ce nombre car il peut y avoir 12 bêtes en même temps dans le jardin (cf. figure 4).

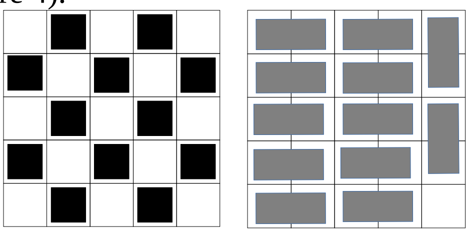
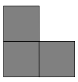
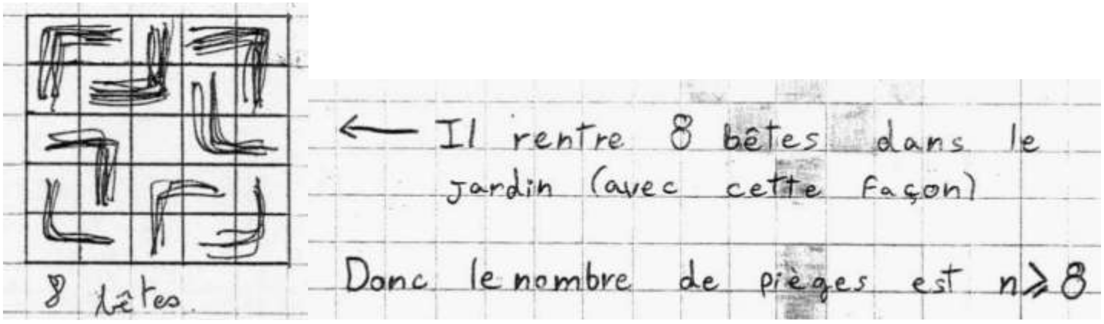


Figure 4 : Solution à 12 pièges et 12 bêtes dans le jardin.

Des bêtes en triminos coudés 

Les bêtes ont encore changé de forme, elles sont maintenant représentées par des triminos coudés (3 cases carrées positionnées en L).
Les élèves essaient alors de mettre en œuvre le même type de raisonnement et commencent en général par s'intéresser au nombre de bêtes pouvant être placées en même temps dans le jardin (figure 5).



« Il rentre 8 bêtes dans le jardin (avec cette façon)
Donc le nombre de pièges est n≥ 8 »

Figure 5 : Argument pour le nombre minimal de pièges.

Reste alors à trouver une solution à 8 pièges pour résoudre le problème. Malheureusement, les élèves n'arrivent pas à faire mieux qu'une solution à 10 pièges (figure 6).

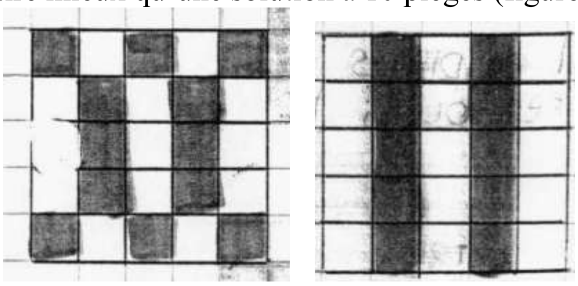
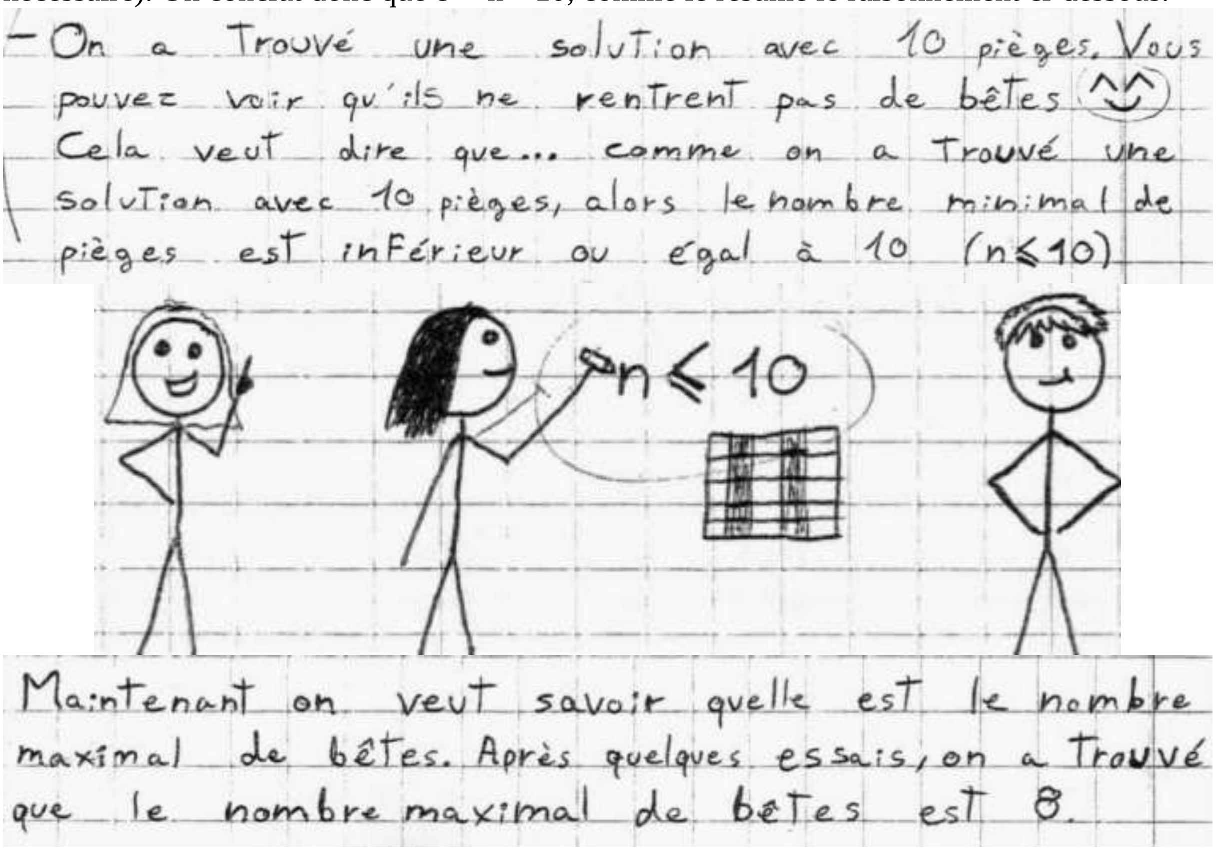
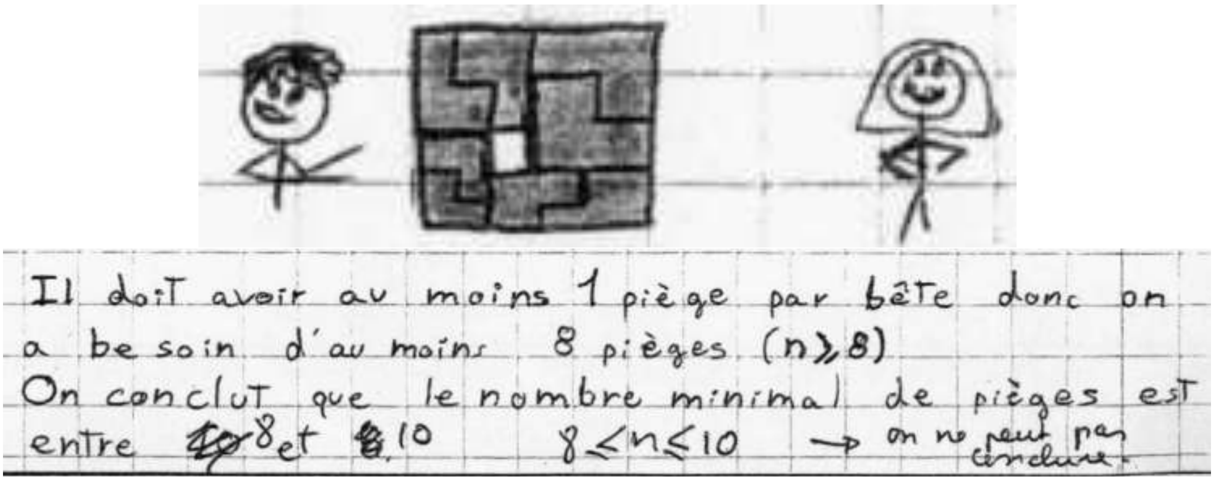


Figure 6 : Solutions à 12 pièges et à 10 pièges.

Cette solution à 10 pièges nous amène à dire que n≤ 10 (où n est le nombre de piège minimal nécessaire). On conclut donc que 8 ≤ n ≤ 10, comme le résume le raisonnement ci-dessous.





« On a trouvé une solution à 10 pièges. Vous pouvez voir qu'il ne rentrent pas de bêtes. Cela veut dire que… Comme on a trouvé une solution avec 10 pièges, alors le nombres de piège est inférieur ou égal à 10. (n≤10).
Maintenant on veut savoir quel est le nombre maximal de bêtes. Après quelques essais, on a trouvé que le nombre maximal de bêtes est 8.
Il doit avoir au moins 1 piège par bête donc on a besoin d'au moins 8 pièges (n≥8). On conclut que le nombre minimal de pièges est entre 8 et 10   8≤n≤10   → On ne peut pas conclure »

Figure 7 : Argument pour encadrer le nombre minimal de pièges.

Pour déterminer le nombre minimal de pièges nécessaires, il faut donc trouver un autre type de raisonnement. Comme souvent en mathématiques, on va s'intéresser à de plus petits cas, c'est-à-dire, ici, à des plus petits jardins. Par exemple, il est facile de voir que dans un jardin de côté 2, un piège ne suffit pas à empêcher les bêtes de venir et qu'il est nécessaire d'en placer au moins deux.

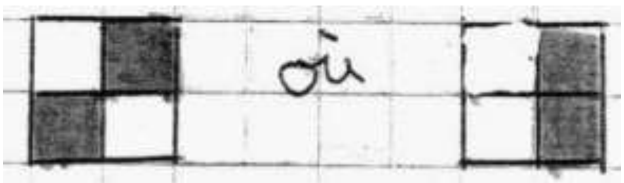


Figure 8 : Il faut au moins 2 pièges dans un jardin de côté 2.

De la même façon, il est nécessaire de placer au moins 3 pièges dans un jardin de côté 3.

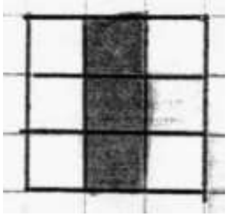
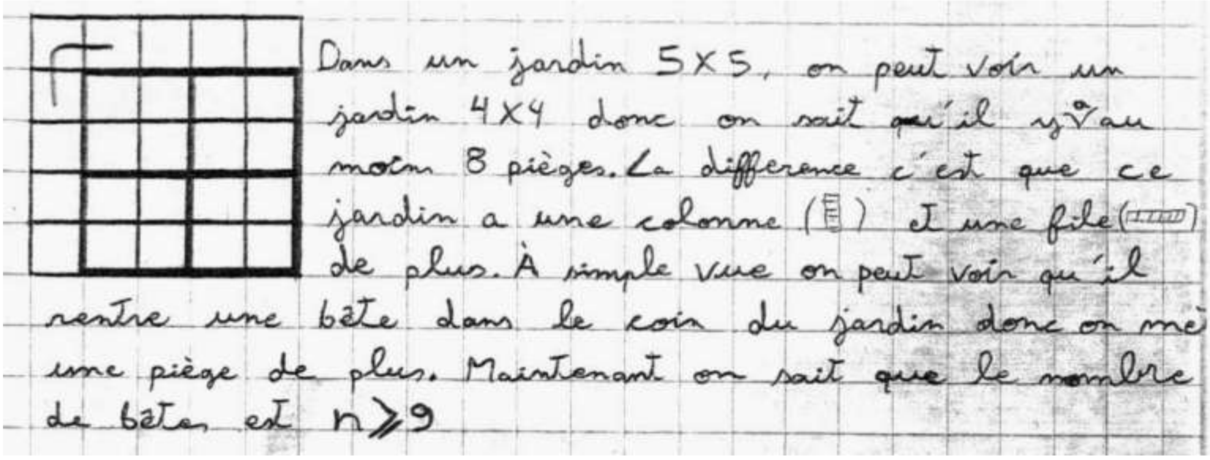


Figure 9 : Il faut au moins 3 pièges dans un jardin de côté 3.

Il s'agit alors de découper notre jardin initial en zones plus petites, comme le montre le raisonnement ci-dessous.



> *« Dans un jardin 5x5, on peut voir un jardin 4x4 donc on sait qu'il y a au moins 8 pièges. La différence c'est que ce jardin a une colonne et une file de plus. À simple vue, on peut voir qu'il rentre une bête dans le coin du jardin donc on met une piège de plus. Maintenant on sait que le nombre de bêtes est n≥* ***9*** *»*

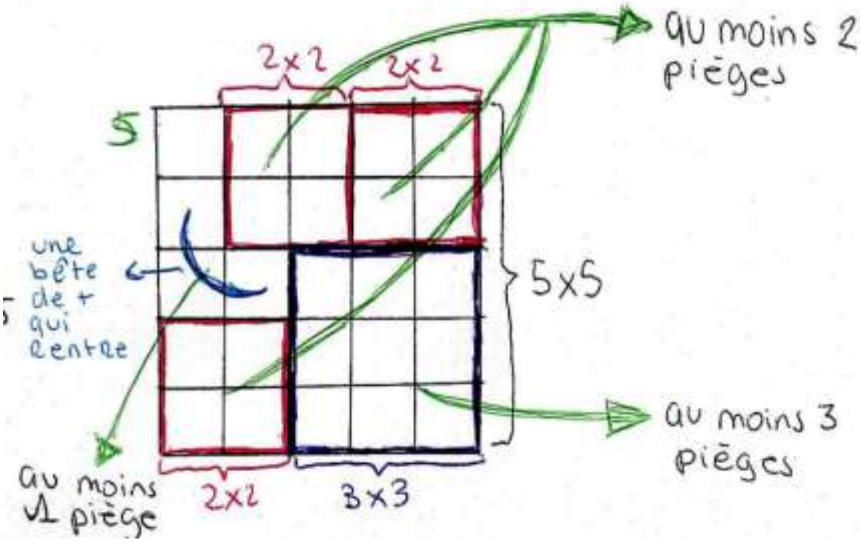


Figure 10 : Il faut au plus 9 pièges dans un jardin de côté 9.

Dans ce découpage, il faut donc au moins 2 pièges pour chaque zone carrée de côté 2, donc au moins 8 pièges mais il faut encore rajouter un piège car on voit qu'une bête pourrait rentrer dans le coin. On a donc réduit l'intervalle et maintenant on sait que 8 pièges ne peuvent pas suffire, reste donc à trancher entre n=9 ou n=10. Pour cela, on va reprendre le même type de raisonnement en découpant les zones plus finement. Ci-dessous un découpage, accompagné d'un raisonnement proposé par des élèves (figure 10).

Figure 11 : Un découpage pour le jardin 5x5.

Le jardin 5x5 est ici découpé en une zone 3x3, pour laquelle il faut au moins 3 pièges et 3 zones 2x2, pour chacune desquelles il faut au moins 2 pièges. Cela donne un total d'au moins 9 pièges pour ces zones-là. Cependant, on remarque qu'on pourrait alors encore placer une bête à l'extérieur de ces zones. Il faut donc un piège de plus pour empêcher cette bête de venir. Il faudra donc en tout au moins 10 pièges. Comme on avait trouvé une solution à 10 pièges (cf. figure 6), on conclut que n=10 est la solution.

4. Quelques idées de prolongements

On peut continuer cette situation en élargissant le champ des questions. On peut, par exemple, se poser la question du nombre minimal de pièges lorsque les jardins carrés sont plus grands. Voici ci-dessous le témoignage d'une recherche en ce sens, où les élèves cherchent à déterminer le nombre de pièges dans des configurations similaires à celles identifiées pour le cas du carré de côté 5.

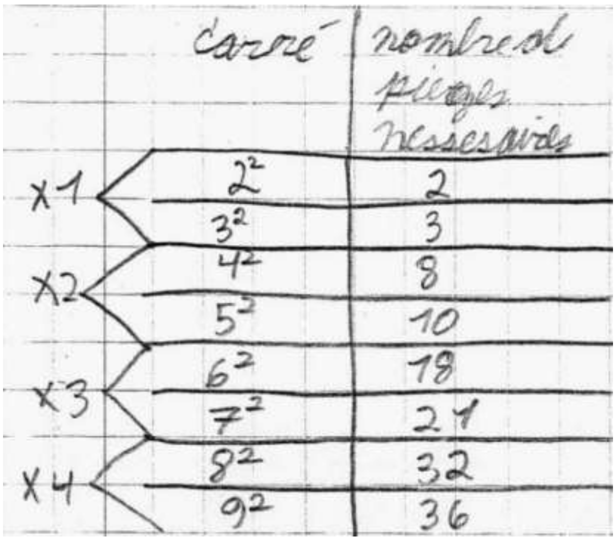


Figure 12 : Nombre de pièges en fonction de l'aire du jardin.

On peut aussi prolonger la situation en imaginant de nouvelles formes de bêtes ou bien différentes espèces de bêtes qui viennent en même temps dans le jardin.

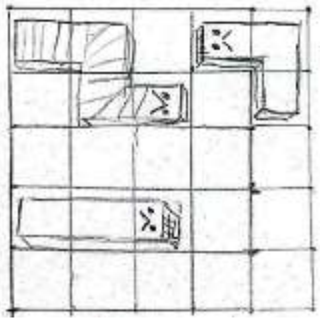


Figure 13 : Différentes espèces de bêtes se partagent le jardin.

On peut encore imaginer que la forme du jardin varie, sur la base d'un ensemble de cases carrées accolées par une arête.

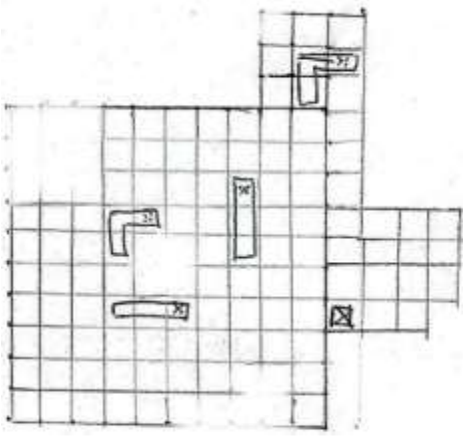


Figure 14 : La forme du jardin peut varier.

Ces différents prolongements peuvent être proposés par l'enseignant ou bien être laissés au choix des élèves. Les groupes ne sont pas tous obligés de s'engager sur le même questionnement.

II. PREMIERES CARACTERISTIQUES D'UNE SITUATION RECHERCHE

C'est en nous appuyant sur la situation détaillée dans la section précédente, que nous allons maintenant décrire quelques caractéristiques d'une Situation Recherche.

1. Caractéristiques de la situation mathématique

Objets mathématiques faciles d'accès - Domaine facilement compréhensible

Les situations que nous proposons ne sont pas formalisées en termes mathématiques. Les jeunes élèves n'y reconnaissent d'ailleurs pas, la plupart du temps, un problème mathématique.
Dans « La chasse à la bête », l'habillage de la situation sous forme de jardin et de bêtes permet aux élèves de rentrer facilement dans le problème : la question est facilement compréhensible. De plus, dans la résolution de ces situations, il n'y a pas (ou il y a peu) d'utilisation de propriétés ou formules du cours, il y a peu de prérequis nécessaires. D'une part, cela participe au fait que les élèves s'engagent facilement dans la résolution. Dans « La chasse à la bête », les élèves peuvent commencer par tester avec des pavages. D'autre part, cela permet aussi qu'il puisse y avoir un travail sur la preuve et le raisonnement qui ne soit pas perturbé par l'utilisation de propriétés mal maîtrisées.

Situations issues de la recherche actuelle en mathématiques discrètes

Les situations proposées par Maths à Modeler sont issues de la recherche actuelle en mathématiques discrètes. La plupart des situations font référence à un problème général ouvert pour la communauté mathématique, c'est-à-dire non encore résolu par elle. Il en résulte, entre autres, qu'il n'existe pas (ou du moins pas encore) de « fin », il n'y a que des résultats partiels qui renvoient à d'autres questions. Dans la situation précédente, le problème particulier du jardin peut se prolonger par d'autres problèmes d'optimum où l'on peut faire varier la forme du jardin ou des bêtes. Cela permet, par exemple, aux élèves d'explorer de nouvelles pistes qu'ils choisissent, se rapprochant en quelque sorte du travail du chercheur devant qui s'ouvrent de nombreuses questions. Cela permet d'autre part, au professeur, de différencier la situation suivant l'avancement des groupes, ce qui facilite la gestion du travail de groupe.

Enjeu de découverte et enjeu de vérité

Dans de nombreux exercices du secondaire qui commencent par « démontrez que... », il n'y a aucun enjeu de découverte ni aucun enjeu de vérité. En effet, l'élève sait ce qu'il doit trouver et, puisqu'il doit le démontrer, il sait aussi que c'est vrai. Pour mener sa démonstration, il part des hypothèses et sait qu'il doit utiliser les théorèmes du cours. Dans ces Situations Recherche, comme dans le *problème ouvert* (Arsac & Mante, 2007), l'enjeu de découverte est réel, l'élève ne sait pas *a priori* ce qu'il va trouver. De plus, la question de départ amène souvent l'élève à s'en poser d'autres qui sont de réelles questions pour lui. Il doit donc faire des essais pour pouvoir proposer des conjectures et s'attacher à la recherche d'éventuels contre-exemples.

Distinction de la condition nécessaire et de la condition suffisante

Dans cette situation « La chasse à la bête », comme dans d'autres, la preuve de la condition nécessaire (nombre nécessaire de pièges) n'est pas de même nature que la preuve de la condition suffisante (nombre suffisant de piège). Cela permet de travailler le fait que la validité d'une implication ne dit rien sur la validité de sa réciproque.

2. Caractéristiques de la mise en œuvre des SiRC

Travailler la démarche mathématique

À travers ces Situations Recherche, l'équipe Maths à Modeler cherche à permettre l'apprentissage de la démarche mathématique. En effet, pour pouvoir résoudre la tâche, les élèves sont amenés à faire des essais (Figure 15), à les organiser et les trier, à formuler des conjectures, à produire des contre-exemples, à modéliser la situation, à réduire la situation à des sous-cas. L'entrée dans la preuve passe par l'argumentation pour défendre ses conjectures. Ces « savoirs transversaux », au centre de l'activité mathématique, prennent ici tout leur sens dans la recherche d'une réponse à un questionnement. Ce n'est pas la réponse au problème qui est mise en avant par le professeur mais la recherche de moyens pour aller vers cette réponse, l'organisation de cette recherche et la justification des moyens utilisés.

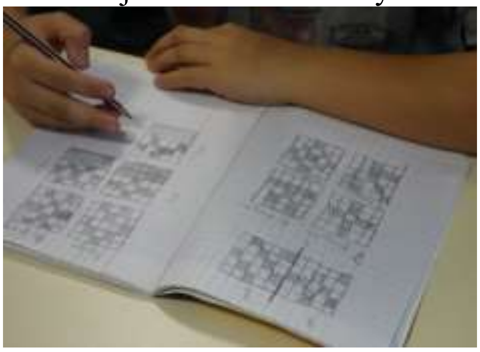


Figure 15 : Nombreux essais organisés sur le cahier.

Dimension ludique

En plus d'une formulation concrète du problème, nous présentons nos situations à l'aide de matériel (souvent en bois). Par exemple, dans le cas de « La chasse à la bête », nous apportons des plateaux carrés de côté 5 cases (jardins) sur lesquels on pose des carrés noirs représentant les pièges et des pièces en bois représentant les bêtes. Cela permet aux élèves de mieux se représenter la situation mais surtout d'entrer facilement dans la résolution puisqu'ils sont d'abord attirés par la manipulation du matériel. De plus, les nombreux essais sont facilités par le matériel.

Même si le matériel doit être enlevé au bout d'un certain temps afin que les élèves se détachent du cas particulier pour modéliser et prouver dans un cas plus général (Godot, 2006), il n'en reste pas moins que ce matériel est un atout pour leur entrée dans la recherche. Très souvent, comme le montre la Figure 16 ci-dessous, les élèves utilisent d'eux-mêmes conjointement le matériel et leur cahier : sur ce dernier, ils peuvent garder une trace des essais qu'ils ont effectués sur le premier.

Figure 16 : Utilisation conjointe du matériel et du cahier.

Organisation de la mise en œuvre dans la classe

La mise en œuvre en classe de ces SiRC reprend certaines caractéristiques de celle des problèmes ouverts au sens didactique défini par l'IREM[1] de Lyon (Arsac & Mante, 2007).
Les élèves mènent leur recherche par groupes de trois ou quatre. Le professeur ne doit en aucun cas les guider. Régulièrement, des bilans provisoires sont faits pour que les groupes puissent présenter l'avancée de leurs recherches. Lors de ces bilans, le professeur ne prend pas position sur la validité des résultats proposés mais il garantit la possibilité d'un débat mathématique. Dans le cas rare où tous les élèves sont d'accord sur une même proposition erronée, le professeur peut leur poser une question ou leur proposer un exemple qui pourrait les amener à rectifier leur avis d'eux-mêmes.
Lorsque cela est possible, la séquence est organisée de façon à ce que les élèves puissent présenter leur travail à d'autres élèves ou à des parents lors de la dernière séance. Pour préparer ces restitutions, ils doivent décider de ce qu'ils veulent montrer, se répartir le travail et fabriquer des affiches ou d'autres supports visuels.

3. Quelques effets dans les classes

Voici quelques effets de la mise en place des Situation Recherche dans les classes, illustrés par quelques témoignages d'élèves de CM2 (11 ans) qui ont passé cinq séances sur une Situation Recherche et qui l'ont présentée à une autre classe.

Une autre façon de faire des mathématiques

Beaucoup d'élèves et même d'adultes apparentent les mathématiques à la mise en œuvre d'algorithmes de calcul ou de raisonnements pour lesquels il faut utiliser la « bonne » formule pour arriver au « bon résultat ». Au contraire, ces Situations Recherche nécessitent peu de prérequis et offrent un enjeu de découverte qui laisse une place à l'erreur, au tâtonnement et à la recherche d'exemples et de contre-exemples. Les mathématiques deviennent alors des outils pour essayer de répondre à des problèmes. En ce sens, beaucoup d'élèves et de professeurs ont le sentiment qu'ils font « d'autres mathématiques ».

> ***Stéphanie :***
>
> *On a appris à faire des maths autrement !*
>
> ***Hugo :***
>
> *Des fois les maths c'est bof, bof... et là j'ai vraiment adoré parce que ça nous permettait de voir les maths d'une autre manière que leçon/exercice/leçon//exercice.*

[1] Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques.

Clément :

Mais quand on dit « mathématiques », on pense au calcul et aux multiplications et aux divisions… mais c'est pas que ça les mathématiques ! Y'a la logique dedans, c'est…chercher, y'a plusieurs étapes pour…

Flora :

Quand on se trompe, c'est pas grave, on a le droit, on peut recommencer…

Avoir une posture réflexive sur sa recherche

Lorsqu'ils doivent présenter les résultats de leur recherche à des personnes (élèves, parents) qui n'ont pas cherché à résoudre le problème, les élèves doivent revisiter leur propre recherche. Ils doivent décider ensemble de ce qu'ils souhaitent (et doivent) donner à voir ou non. Souvent, les élèves ont d'abord envie de ne montrer que le résultat final mais les discussions les amènent à prendre conscience qu'il est important aussi de montrer leur recherche : les pistes qu'ils ont ébauchées, les contre-exemples qui les ont obligés à les abandonner, les conjectures qu'ils ont émises, les différentes stratégies qui leur ont permis d'avancer... Le statut de chaque phrase énoncée doit être clair pour ceux qui n'ont pas cherché, il faut donc bien les différencier les unes des autres. Au moment de préparer le support visuel, des choix sont encore à effectuer : choix d'exemples par manque de place mais aussi choix de la modélisation de la situation la plus compréhensible et encore choix de l'ordre de présentation.

Eloane :

[Quand on présente], il faut être précis, il faut être concentré, il faut réfléchir.

Amina :

Il fallait savoir comment s'organiser, fallait aussi savoir placer les choses du bon ordre.

De nouvelles connaissances

Bien que ce ne soit pas l'objectif premier des SiRC, il arrive aussi qu'en cherchant, les élèves se construisent des outils mathématiques qui deviendront ensuite des savoirs enseignés. Par exemple, des élèves de CM2 ont découvert que, dans leur situation, pour trouver un résultat en fonction d'un nombre donné, il fallait toujours utiliser la même formule en changeant simplement le nombre qui varie. Ils ont commencé à rédiger leur affiche en écrivant leur formule avec un espace de trois petits points pour placer le nombre choisi. Nous leur avons alors proposé de remplacer les petits points par la lettre N qui représenterait ainsi le nombre choisi. La situation a donc permis, à certains élèves d'avoir un premier aperçu de l'entrée dans l'algèbre sans que cela n'ait été voulu a priori.

Juliette :

Moi, y'a des choses que je trouve intéressantes, comme, par exemple, on a utilisé la lettre N pour calculer et moi je savais pas du tout qu'on pouvait utiliser la lettre N pour calculer.

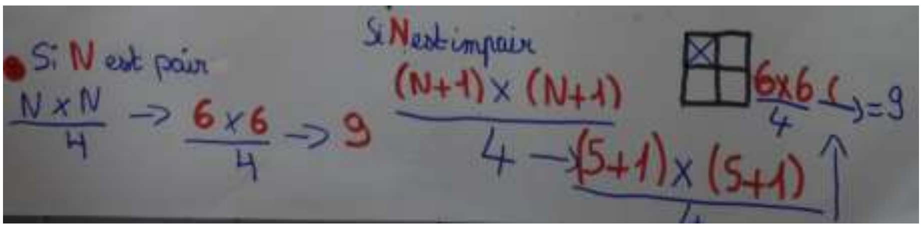


Figure 17 : Utilisation de la lettre N en CM2.

Une autre place pour les élèves en difficulté

Lorsque nous mettons en place ces situations, nous voyons régulièrement des élèves, dont les professeurs nous disent qu'ils sont en difficulté, prendre goût à la recherche et produire des raisonnements qui étonnent leurs camarades et leurs professeurs. Nous faisons l'hypothèse que le fait qu'il n'y ait pas beaucoup de recours aux propriétés du cours et le fait que le matériel permette de faire des essais donnent une nouvelle place aux élèves en difficulté.
Comme ces situations ne sont en général pas reconnues tout de suite comme relevant des mathématiques, les élèves en difficultés n'ont pas cette réaction de peur et de rejet qui se manifeste souvent. Ils peuvent ici entrer dans la tâche sans avoir l'impression de « se mettre en danger ».

> ***Marine** :*
>
> *D'habitude, je suis pas trop forte en maths mais là j'y arrive bien parce que… ben, c'est bien, on a bien rigolé ! Et puis, j'ai présenté ça à mes parents ! Mais ils ont rien compris…*

Dans cette deuxième partie, nous avons voulu, à partir de la situation de « La chasse à la bête », présenter quelques caractéristiques des Situations Recherche.

III. DEUX CHAMPS DE RECHERCHE : DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES ET MATHEMATIQUES DISCRETES

Dans cette troisième partie, nous montrons comment différents types de recherche se développent autour des SiRC. Certaines recherches permettent la conception des SiRC, d'autres analysent leur potentiel pour le travail de classe ou les situations de médiation. Ces recherches mobilisent des chercheurs de différentes communautés.

1. Interactions entre mathématiques discrètes et didactique des mathématiques

Les développements des SiRC s'est fait à l'interface entre deux domaines de recherche : les mathématiques discrètes et la didactique des mathématiques. Les mathématiques discrètes apportent un champ de problèmes dont certaines caractéristiques sont spécifiques. En plus d'apporter des problèmes qui sont des « candidats potentiels » à des situations d'apprentissage, la collaboration avec les mathématiques discrètes contribue à la réflexion épistémologique sur la nature de l'activité de recherche mathématique et la spécificité du discret (et des objets et raisonnements en jeu). La didactique des mathématiques apporte, elle, un questionnement sur les potentiels de ces problèmes et des outils pour penser leurs usages dans la classe (et en situation de médiation). Ce travail a permis d'explorer des problèmes ouverts ou actuels pour la recherche en mathématiques discrètes, étudiés dans l'interaction entre mathématiciens et didacticiens, pour concevoir de nouvelles Situations Recherche. On peut reconnaître dans ce travail une intention de transposer l'activité du chercheur vers la classe avec une certaine « fidélité ».
Nous donnons ici une liste non-exhaustive de situations développées pour la classe et la médiation, associées aux branches de la recherche en mathématiques discrètes desquelles elles sont issues :

- La chasse à la bête – Optimisation dans les graphes,

- Pavages par des dominos – Couplages parfaits,
- Chemins, cycles et arbres dans la grille (chemins et cycles hamiltoniens dans les graphes, sous-arbres couvrants),
- La roue aux couleurs (combinatoire des permutations),
- Chercher la frontière (algorithmique et optimisation),
- Jeu du chocolat (théorie des jeux, jeux combinatoires),
- Les reines / les caisses de dynamite (généralisation du problème des huit reines, problèmes d'optimisation sur les sous-ensembles de sommets dans un graphe).

La collaboration a aussi débouché sur des caractérisations des Situations Recherche pour la classe et sur différents travaux de recherche spécifiques en didactique des mathématiques. Nous revenons ici sur les caractéristiques identifiées et les travaux didactiques qui se sont développés.

2. Des Situations Recherche pour la classe étudiées pour elles-mêmes

Les Situations Recherche pour la classe ont pour objectif principal de permettre aux élèves d'avoir une activité relativement proche de celle du chercheur. C'est pourquoi, elles ont été étudiées principalement pour ce potentiel de développement de connaissances et savoir-faire relatifs à la démarche de recherche mathématique elle-même.
Revenons à l'exemple de « La chasse à la bête ». Parmi les activités et connaissances mises en jeu on peut identifier, entre autres :

- travail d'un problème d'optimisation (identification de solutions recevables, solution non améliorable, solution meilleure que toute autre),
- interprétation en termes de condition nécessaire/ condition suffisante (il faut/il suffit),
- les conditions nécessaires et suffisantes se prouvent d'une manière très différente,
- entrée dans l'activité de recherche mathématiques (conjectures, exemples et contre-exemples, cas particuliers/généralisation, construction d'outils ou de théories ad-hoc, argumenter, prouver…).

Ces Situations Recherche ne visent pas nécessairement des savoirs notionnels spécifiques. Il pourrait y en avoir, liés au discret, mais ils ne constituent pas l'enjeu de la situation. Elles visent des savoirs dits parfois « transversaux », liés à la logique, au raisonnement, aux heuristiques de résolution de problèmes, à la démarche de recherche. La solution du problème (« 8 pièges sont nécessaires et suffisants dans le cas de bêtes 1x3 et d'un jardin 5x5 ») n'est pas l'objectif de la situation, c'est la recherche elle-même, et ce sont des éléments liés à cette recherche qui seront institutionnalisés.
Le choix du champ des mathématiques discrètes permet, en tout cas dans les situations développées, de constituer un milieu de recherche abordable dans lequel peu de concepts « complexes » seront mis en jeu. Par contre, la complexité de la situation se situe du côté de la richesse des raisonnements, des stratégies de résolution et des preuves qu'elle permet d'aborder. Cette idée repose sur l'hypothèse suivante, sous-jacente à de nombreux travaux sur les Situations Recherche : il est plus facile de travailler le raisonnement lorsque les objets en jeu ne sont pas complexes. Les notions mathématiques en jeu ne doivent donc pas faire obstacle au développement de l'activité de recherche et les mathématiques discrètes peuvent offrir des objets pertinents pour cela. Godot résume bien cette idée : « Même s'il n'est pas familier, le domaine conceptuel dans lequel se trouve le problème est d'un accès facile afin que l'on puisse facilement « prendre possession » de la situation et s'engager dans des essais, des conjectures, des projets de résolution. » (Godot, 2006, p. 34)
Grenier et Payan (1998, 2003) ont proposé une caractérisation de ces situations selon cinq critères :

(a) Le problème abordé doit être proche de la recherche actuelle.

(b) La question initiale doit être facile d'accès et ne doit pas être formalisée en termes mathématiques pour faciliter l'entrée dans le problème.

(c) Des stratégies d'approche simples doivent exister pour permettre d'entrer dans une démarche de recherche.

(d) De nombreuses stratégies de recherche peuvent être mises en place, les méthodes de résolutions ne sont pas désignées.

(e) Une question résolue peut amener à se poser d'autres questions : il n'y a que des critères de fin locaux.

Le critère (a) témoigne de la proximité des situations à la recherche en mathématiques. Cette proximité est rendue possible par les spécificités des mathématiques mises en jeu : les objets mis en jeu sont très simples et accessibles aux élèves, alors que les questions mathématiques (ou leur généralisation) peuvent se révéler extrêmement complexes. Ce critère est souvent affaibli sous la forme suivante : le problème abordé doit être suffisamment éloigné des mathématiques rencontrées par les élèves pour les placer hors des techniques et méthodes dont ils disposent usuellement.

Les critères (b) et (c) ainsi que la citation de Godot concernent la dévolution possible du problème aux élèves afin qu'ils entrent dans une démarche de résolution.

Le critère (d) concerne la possibilité du développement de stratégies de recherches diverses, plus ou moins fructueuses, mais qui contribuent à une proximité avec le travail du chercheur face à un problème nouveau, ainsi qu'à un potentiel pour une confrontation riche des stratégies lors de phases de mise en commun et discussion des résultats entre pairs.

Il peut sembler paradoxal de se placer dans un cadre nouveau, voire inconnu pour les élèves, tout en revendiquant que les objets doivent avoir une certaine familiarité permettant une dévolution et une focalisation sur les raisonnements et les propriétés. C'est justement un équilibre entre ces deux conditions que doit respecter la situation : des objets suffisamment proches pour permettre l'appropriation de la question et la construction d'un certain milieu expérimental, mais, assez rapidement, des questions qui résistent et nécessitent un travail de recherche pour l'élève.

Le critère (e), enfin, est caractéristique de la volonté de transposer certains aspects de l'activité du chercheur : la résolution ne se termine jamais (en théorie) puisque chaque solution peut donner lieu à de nouvelles questions. C'est ainsi que la résolution du premier cas de « La chasse à la bête » donne lieu à de nouveaux problèmes, en modifiant les valeurs des variables (forme des bêtes) ou en généralisant (taille quelconque du jardin). L'appropriation par l'élève du «geste» de se poser de nouvelles questions face à un problème résolu, tout comme celui de « resserrer » le problème dans le cas d'un problème trop général pour être résolu directement, peut devenir un enjeu d'apprentissage (heuristique).

Sur ce point, le travail de Godot (2005), apporte des éléments d'éclairage, avec la notion de variable de recherche. Lors d'une SiRC une forte responsabilité est déléguée à l'élève. En effet, à partir de la situation initiale, il a le choix de ses questions et donne la direction qu'il souhaite à ses recherches. Certaines variables de la situation (didactiques ou non) sont laissées à la disposition de l'élève pour organiser son travail de recherche. Il peut alors y avoir une rupture vis-à-vis du contrat didactique usuel de la classe.

> *Les variables de recherche sont des variables de tâches inhérentes à la situation recherche, elles définissent les différents sous-problèmes qui lui sont rattachés et impliquent des tâches différentes (Godot, 2005 p.133.)*

On voit apparaître ici plus nettement cette intention de transposition de l'activité du chercheur, par l'autonomie laissée à l'élève dans l'abord du problème, de ses sous-problèmes, de ses variantes…

3. Des situations pour étudier la spécificité des mathématiques discrètes

Les Situations Recherche ont aussi permis le développement de recherches sur les spécificités des mathématiques mises en jeu.
Certains travaux se sont intéressés à la situation spécifique des mathématiques discrètes dans les curriculums. Ils montrent la potentialité qu'il pourrait y avoir à y introduire des contenus de mathématiques discrètes (Cartier, 2008, par exemple pour la théorie des graphes), en regardant ce qui existe et est possible dans certaines niches où elles existent. On peut cependant se demander si l'absence de ces mathématiques des curriculums n'est pas l'un des facteurs qui contribue à la possibilité de faire vivre des Situations Recherche en appui sur ces mathématiques « accessibles mais inconnues » comme nous l'avons noté précédemment.
Ouvrier-Buffet (2009, 2014) et Grenier (2009, par exemple), se sont intéressées à la spécificité des raisonnements en mathématiques discrètes. Cette question soulève aussi celle de la transférabilité de ces raisonnements à d'autres champs des mathématiques (énumération de tous les cas dans le fini par exemple, raisonnement d'optimisation spécifique au problème...) mais aussi les potentialités pour comprendre la spécificité et l'intérêt de certains résultats classiques du cours de mathématiques qui deviennent faux (ou plus faibles) dans les cas discrets. D'autres travaux (Grenier, 2012, par exemple) soulignent aussi la pertinence d'étudier certains raisonnement dans des situations discrètes bien choisies qui permettent de mieux saisir la portée de ces raisonnements, notamment la récurrence qui peut être travaillée dans un cadre plus riche que celui de la preuve de formules algébriques.
Enfin, notons que la spécificité des objets discrets proposés permettent souvent de développer des théories ad-hoc. Ces micro-théories, construites spécifiquement pour la résolution du problème, permettent de mieux comprendre certains concepts mathématiques, comme par exemple, comprendre ce qu'est la définition en mathématiques et quel est son statut dans le travail de recherche et de preuve.

4. Les Situations Recherche en classe comme support de recherche

Certains travaux de recherche se sont appuyés sur les situations de recherche pour la classe pour développer des recherches sur d'autres questions. Nous prendrons pour exemple le travail de thèse de Giroud (2011) qui s'est intéressé à la démarche expérimentale en mathématiques. Nous prendrons pour exemple un concept développé dans sa thèse et proposé pour la recherche en didactique des mathématiques : la notion de *concept-problème*. En appui sur la notion de concept dans les travaux de Vergnaud (1990), Giroud propose la définition suivante :
« Nous considérons que le concept-problème sur un problème P est composée des éléments suivants :
– l'ensemble des problèmes ***P*** qui donnent du sens à P , nous parlerons d'espace problème ;
– l'ensemble des invariants opératoires qui correspondent aux connaissances sur lesquelles repose l'action du sujet en situation de résolution d'un élément de ***P*** ;
– l'ensemble des représentations R que l'on peut associer aux éléments de ***P***. »
Cette notion lui permet de décrire le concept-problème relatif à des problèmes donnés. Ainsi, pour « La chasse à la bête », cela donne la synthèse suivante :

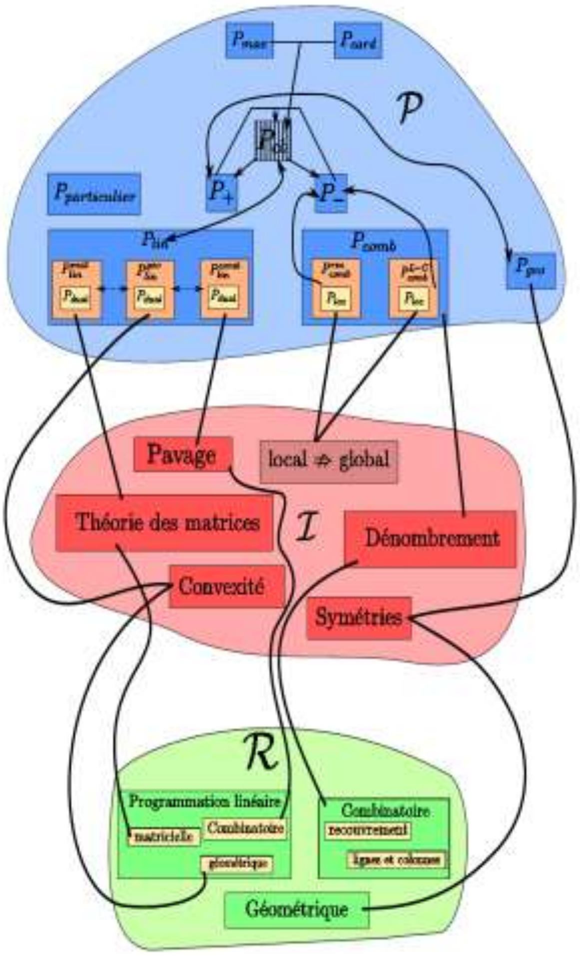


Figure 18 : Concept-problème de « La chasse à la bête », d'après Giroud (2011).

À l'issue de ce travail, Giroud identifie deux intérêts du concept-problème à des fins didactiques :

- Le concept-problème est une aide à l'analyse a priori d'une situation, il permet de faire des hypothèses sur certains obstacles, difficultés ou représentations manquantes. L'établissement de la conception d'un élève (à l'aide d'une expérimentation) et de sa confrontation au concept-problème permet alors de vérifier ces hypothèses.
- Le concept-problème est une aide aux choix des variables de recherche.

5. Ancrages didactiques

Les travaux de recherche sur les Situations Recherches et le développement collaboratif de ces situations s'ancrent principalement dans deux cadres théoriques (déjà mentionnées dans les paragraphes précédents) : la Théorie des Situations Didactiques (Brousseau, 1998) qui apporte un cadre pour penser la mise en œuvre des situations et leur analyse, et la théorie des champs conceptuels (Vergnaud, 1990).

Ces théories sont partagées plus ou moins implicitement avec les chercheurs en mathématiques impliqués dans le développement des situations. En particulier, les outils de la Théorie des Situations Didactiques, tels que les variables didactiques et l'analyse a priori, permettent de penser l'organisation des situations développées collaborativement avec les mathématiciens. Un certain modèle épistémologique de l'activité mathématique agit aussi comme une référence partagée entre mathématiciens et didacticiens et sert de cadre à la construction des situations et à la recherche.

IV. MATHS A MODELER

Pour terminer, nous présentons la structuration de l'équipe Maths à Modeler et ses missions. Nous souhaitons montrer comment la collaboration entre didacticiens et mathématiciens, notamment, vit et comment elle permet d'articuler recherche, formation et médiation.

1. Une équipe

L'équipe Maths à Modeler n'est pas une équipe de recherche au sens où on l'entend habituellement puisque les différents membres n'appartiennent pas tous au même laboratoire de recherche. Il faut prendre le mot « équipe » dans le sens d'un groupe de personnes qui travaillent ensemble sur un même projet « Maths à Modeler ». Initié à Grenoble en 2000, le réseau Maths à Modeler se répartit depuis sur le territoire français et hors du territoire. Voici une carte recensant quelques lieux et quelques membres.

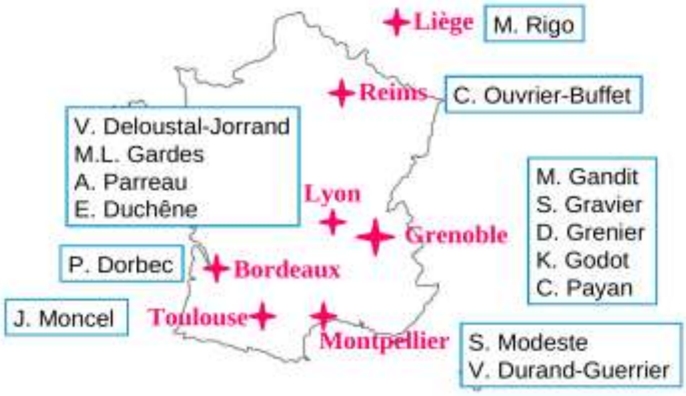


Figure 19 : Quelques membres du réseau Maths à Modeler et leur localisation[2].

On retrouve divers profils dans les membres de l'équipe : des chercheurs en didactique des mathématiques et en mathématiques discrètes (parfois dans des équipes d'informatique) principalement, mais aussi des chercheurs en sciences de l'éducation, en psychologie et en sciences de l'information et de la communication. En plus des chercheurs, l'équipe comprend des enseignants, formateurs et médiateurs scientifiques.
Les interactions entre ces différents profils se font à différents niveaux :

- Conception des situations
- Analyse des situations
- Expérimentations des situations
- Étude des pratiques des chercheurs en mathématiques

Des rencontres annuelles, « Les Journées Maths à Modeler », permettent à tous les acteurs d'échanger autour d'exposés et d'ateliers. Des problèmes mathématiques qui pourraient donner lieu à de nouvelles Situations Recherche y sont présentés, discutés, analysés. Des retours d'expériences, en appui sur les pratiques de terrain de chacun, y sont rapportés. C'est le lieu d'échanges et d'interactions privilégié entre les membres qui ne travaillent pas ensemble au quotidien.

[2] Pour une liste détaillée : http://mathsamodeler.ujf-grenoble.fr

2. Des missions

L'équipe Maths à Modeler a pour principal objectif de faire partager à un large public une certaine vision des mathématiques : celle où elles sont des outils qui permettent de répondre à des problèmes que l'on se pose. C'est ce projet qui va être à l'origine des différentes missions que se donne l'équipe.
Ce projet peut, bien sûr, se décliner dans les classes où, grâce aux SiRC, les élèves rencontrent des « mathématiques différentes » de celles qui sont enseignées au quotidien et entrent dans la démarche et la preuve mathématique.
Cette intervention directe dans les classes se fait à différents niveaux : cycle 3 à l'école primaire, collège, lycée ou même université. Cette participation peut se faire sous diverses formes, une seule séance de deux heures ou une séquence de plusieurs séances, et dans différents contextes : Maths en Jeans[3], semaine des maths, et autres interventions de chercheurs dans les classes, Maison des Mathématiques et de l'Informatique de Lyon[4], UE transversales à l'université, etc.
Ce projet amène aussi l'équipe à intervenir dans la formation des professeurs : en formation initiale (masters Métiers de l'Enseignement, de l'Éducation et de la Formation (MEEF) premier et second degré), en formation continue, dans des séminaires IREM (Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) et en participant à des groupes IREM, en formation des doctorants, dans des colloques tels que journées APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public), colloques Copirelem (Commission Permanente des IREM sur l'Enseignement Élémentaire) et Corfem (COmmission de Recherche sur la Formation des Enseignants de Mathématiques du second degré). Là encore, les interventions sont de natures diverses : cours dans des unités d'enseignement de didactique, en séminaire recherche, encadrement de mémoires, groupes projets, stages de formation continue, par le biais d'ateliers ou conférences dans des colloques, etc.
D'autre part, le projet ayant une large visée, l'équipe souhaite aussi toucher le grand public auquel, grâce aux SiRC, elle montre un aspect du métier de chercheur en mathématiques. Elle intervient donc dans des situations de diffusion de la science dans différents lieux et évènements : Maison des Mathématiques et de l'Informatique de Lyon, La Grange des maths[5], Fête de la science, Semaine des maths, Nuit des chercheurs, Festival Remue-méninges[6], Salon Culture et Jeux Mathématiques[7], etc. De plus, certaines de ses Situations Recherche sont reproduites dans des institutions de diffusion des sciences au grand public (Palais de la découverte[8] par exemple).
Enfin, pour faire connaître ce projet, l'équipe diffuse les résultats de la recherche par des publications (recherche et ressources) mais aussi en participant à des colloques (recherche, formation, grand public) ou encore par l'encadrement de mémoires de master et thèses.

V. CONCLUSION

Dans cet article, nous avons souhaité présenter le projet Maths à Modeler et comment il articule recherche, formation et diffusion. Il est porté par une équipe qui s'agrandit et se développe en

[3] https://www.mathenjeans.fr/
[4] http://mmi-lyon.fr/
[5] https://www.la-grange-des-maths.fr/
[6] http://remuemeningesisere.free.fr/
[7] https://www.cijm.org/salon
[8] www.palais-decouverte.fr/

France et à l’étranger. La motivation du projet peut être résumée par l’envie de proposer à un large public des Situations Recherche qui lui permettent de « chercher comme un chercheur ». Cela permet, d’une part, de travailler la démarche mathématique mais aussi, d’autre part, de faire connaître le métier de chercheur en mathématiques ou encore de donner une autre vision des mathématiques que celle véhiculée classiquement par l’école.

Dans la première partie, nous avons présenté la Situation Recherche « La chasse à la bête » et montré comment des élèves de collège pouvaient s’en emparer pour entrer dans la démarche mathématique : faire des essais, des conjectures, chercher des contre-exemples, réduire le problème, argumenter et prouver.

Dans la deuxième partie, nous nous sommes appuyés sur cet exemple pour montrer les spécificités des Situations Recherche et l’intérêt qu’elles pouvaient avoir pour l’enseignement des mathématiques. Les élèves rencontrent des mathématiques « différentes » de celles habituellement enseignées, qui sont présentées de manière ludique facilitant ainsi la dévolution de la situation. Les preuves y prennent une place importante l’enjeu de découverte étant réel, et le travail sur le raisonnement est facilité par les objets mathématiques « faciles d’accès ».

La troisième partie a montré comment deux champs de recherche, celui des mathématiques discrètes et celui de la didactique des mathématiques, pouvaient se compléter dans ce projet. De plus, ce dernier donne lieu à des recherches de différentes natures. En effet, les recherches permettent de concevoir des Situations Recherche qui elles-mêmes, en retour, ouvrent de nouvelles questions de recherche en didactique des mathématiques. Ces nouvelles recherches sont liées à la spécificité des mathématiques discrètes par exemple ou aboutissent à la construction de nouveaux outils didactiques tels que le « concept-problème ».

Enfin, dans la dernière partie, nous présentons rapidement la constitution de l’équipe et les missions qu’elle se donne dans le cadre du projet Maths à Modeler : des missions de formation, de diffusion et de recherche. Toutes ces missions s’articulent autour des Situations Recherche et se nourrissent les unes les autres. La recherche permet de développer la formation et la diffusion qui, de manière réciproque, apportent de nouvelles questions de recherche.

Parmi ces nouvelles questions, certaines nous donnent des perspectives de recherche. En voici certaines : Quelles spécificités des mathématiques discrètes pour les SiRC ? Quelle formation des enseignants ? Et en particulier, comment faire pour qu’ils s’approprient nos SiRC et les mettent en œuvre dans leurs classes ? Quelles possibilités d’interaction avec d’autres recherches, en particulier en didactique ? Quels apprentissages ont lieu dans les situations de diffusion ou vulgarisation ?

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Arsac, G. & Mante, M. (2007). *Les pratiques du problème ouvert*. SCÉRÉN-CRDP de l’Académie de Lyon.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des Situations Didactiques*. La Pensée Sauvage.

Cartier, L. (2008). *Le graphe comme outil pour enseigner la preuve et la modélisation*. Université Joseph Fourier, Grenoble. http://tel.archives-ouvertes.fr/

Giroud, N. (2011). *Etude de la démarche expérimentale dans les situations de recherche pour la classe.* Université Joseph Fourrier Grenoble. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00649159

Godot, K. (2005). *Situations recherche et jeux mathématiques pour la formation et la vulgarisation. Exemple de la roue aux couleurs.* Université Joseph Fourier. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00102171

Godot, K. (2006). La roue aux couleurs: une situation recherche pour apprendre à chercher dès le cycle 3. *Grand N*, *78*, 31-53.

Grenier, D. (2009). Changer le rapport des élèves aux mathématiques en intégrant l’activité de recherche dans les classes. *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*, 161-178.

Grenier, D. (2012). Une étude didactique du concept de récurrence. *Petit X*, *88*, 27-47.

Grenier, D. & Payan, C. (1998). Spécificité de la preuve et de la modélisation en mathématiques discrètes. *Recherches en didactique des mathématiques*, *18*(2), 59-100.

Grenier, D. & Payan, C. (2003). Situations de recherche en classe, essai de caractérisation et proposition de modélisation. *Cahiers Du Séminaire National de Recherche En Didactique Des Mathématiques*.

Ouvrier-Buffet, C. (2009). Mathématiques Discrètes : un champ d’expérimentation mais aussi un champ des mathématiques. *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*, 31-45.

Ouvrier-Buffet, C. (2014). Discrete mathematics teaching and learning. *Encyclopedia of Mathematics Education,* 181–186.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, *10*(2.3), 133–170.