

LES ETUDIANTS ET LEURS CHOIX POUR LA CONSTRUCTION D'UN NOUVEAU CONCEPT : L'INTRODUCTION DU CONCEPT DE LIMITE DE FONCTION

Sonia Maria **MONTEIRO DA SILVA BURIGATO**

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul/Brésil

soniaburigato@gmail.com

José Luiz **MAGALHÃES DE FREITAS**

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul/Brésil

joseluizufms2@gmail.com

Cécile **OUVRIER-BUFFET**

Université de Reims Champagne-Ardenne/France

cecile.ouvrier-buffet@univ-reims.fr

Résumé

Dans ce travail¹, nous présentons une partie de notre recherche doctorale dont la problématique centrale consiste à étudier l'introduction du concept de limite, chez les étudiants au Brésil et en France. Nous mettons l'accent sur la recherche des premiers schèmes des étudiants lorsqu'ils commencent à étudier le concept de limite. Au Brésil, nous avons élaboré et expérimenté des activités d'introduction du concept de limite de fonction (limite finie d'une fonction en un point, limites à l'infinie et limites infinies en un point). Nous avons réalisé deux entretiens avec les étudiants pendant l'expérimentation. En France, nous avons suivi l'introduction de ce concept dans une classe de lycée et avons conduit des entretiens avec des élèves de cette classe. Notre première analyse des productions des étudiants indique qu'ils mobilisent des schèmes en lien avec les concepts de fonctions et de nombre réel. Cependant, les invariants opératoires ne sont pas toujours pertinents pour les tâches qu'ils ont besoin de résoudre, les obligeant à réorganiser ou abandonner un schème précédent.

Mots clés

Concept image, concept définition, schèmes, théorème-en-acte, représentations

I. INTRODUCTION

Dans ce texte, nous présentons une partie de notre recherche doctorale. La question générale de notre recherche est : Comment les étudiants du Brésil et de la France construisent-ils une première connaissance du concept de limite ? Nous savons que dans ces pays le concept de limite est présent dans l'enseignement de différentes manières. Ainsi, nous nous demandons si ces différences des modèles du Brésil et de la France feront que les étudiants auront des processus de construction de connaissances très différents.

¹ Recherche financée par le PDSE/CAPES.

Une première différence réside dans le fait que le concept de limite est présenté à différents moments au cours de la scolarité au Brésil et en France. Au Brésil, ce concept est introduit à l'université alors qu'en France le concept de limite est introduit dès le lycée.

Le cours à partir duquel nous avons fait la recherche au Brésil est en licence de mathématiques à l'Université Fédérale de Mato Grosso Sul (UFMS). Le concept de limite est introduit dans la première année du cours, dans des disciplines appelées : « Calcul différentiel et intégral I » ou simplement « Calcul I » représentant environ 100 heures par semestre. Les contenus du programme de cette discipline portent sur les fonctions d'une variable réelle, les limites et la continuité des fonctions, les dérivées, les intégrales et leurs applications.

Nous avons fait notre recherche en France dans le lycée de Lombards dans la ville de Troyes, et plus particulièrement dans une classe de terminale générale scientifique, Sciences de la Vie et de la Terre (SVT) où les étudiants² peuvent choisir différentes spécialités (ISN soit Informatique et Sciences du Numérique, ou Physique Chimie, ou SVT, ou Mathématiques).

Nous avons choisi de travailler avec les étudiants sur la présentation de la notion de limite de fonction dans les situations qui permettent de travailler sur des difficultés rencontrées habituellement par les étudiants, telles que l'approximation en un point, ainsi que l'idée de nombre arbitrairement petit et d'infini et l'étude des fonctions. Nous nous inscrivons dans la lignée des recherches antérieures sur l'enseignement et l'apprentissage du concept de limite, recherches de natures épistémologiques et didactiques (compréhension du concept, lignes directrices méthodologiques pour son enseignement) (Artigue, 1995 ; Cornu, 1983 ; Cury, 2004, Santos, 2013, etc.).

Nos études nous ont conduit à délimiter un champ conceptuel (Vergnaud, 1990) pour l'introduction du concept de limite, centré sur les concepts d'inégalités, d'intervalles, de nombres réels et de fonction. Ces concepts sont importants pour la construction de la notion de limite et ils sont considérés comme connus par les étudiants. Cependant, plusieurs aspects de ceux-ci ne sont approfondis que dans les situations de limite (Artigue, 1995) et ces concepts ne sont pas forcément maîtrisés par les étudiants. Pour Vergnaud (1990), l'apprentissage d'un concept implique un ensemble de situations mais aussi un ensemble de concepts qui s'entrecroisent, comme un réseau. L'étudiant traite de nouvelles situations à la recherche de similitudes avec des situations vécues et bien résolues par leurs schèmes. Alors, comment l'étudiant va-t-il apprendre à gérer ces situations d'introduction au concept de limite? Quelles connexions sont pertinentes ou non pour faire face aux situations proposées ? Ces questions et d'autres ont guidé notre enquête. Nous présentons dans ce qui suit l'organisation de notre étude.

II. CADRE THEORIQUE ET METHODOLOGIE

Notre cadre théorique est principalement basé sur les champs conceptuels (Vergnaud, 1990) car nous cherchons à étudier le processus d'apprentissage des étudiants dans des situations d'introduction du concept de limite. Vergnaud (1990) définit un concept comme un triplet.

Dans notre cas, le concept est celui de limite, et le triplet est le suivant :

- *les situations*: qui donnent du sens au concept de limite ;
- *des invariants opératoires* : concepts-en-acte et théorèmes-en-acte qui permettent de faire face aux situations ;
- et *les représentations* : l'ensemble des formes langagières et non langagières qui permettent de représenter symboliquement le concept, ses propriétés, les situations et les procédures de traitement.

L'autre élément théorique que nous utilisons réside dans les schèmes (Vergnaud, 1990)

² Pour faciliter la lecture, nous utiliserons le terme générique d'étudiant. Nous préciserons toujours s'il s'agit de la France (lycée) ou du Brésil (université).

composés de :

- un objectif (but) ou plus ;
- des règles d'action (prendre le contrôle et des informations) ;
- des invariants opératoires (concepts-en-acte et théorèmes-en-acte) ;
- et des possibilités d'inférence.

Nous faisons l'hypothèse que ces éléments nous permettront de caractériser les différentes actions organisationnelles qui guident les étudiants dans les situations des activités proposées. Nous nous intéressons en particulier aux « erreurs », difficultés rencontrées et connaissances mobilisées par les étudiants tout au long du processus de résolution.

Notre problématique est d'enquêter (et de comparer) sur les chemins parcourus par les étudiants dans la construction de la notion de limite au Brésil et en France. Nous organisons notre travail de la façon suivante :

- Caractériser certains concepts de base du champ conceptuel des activités d'introduction du concept de limite.
- Identifier les invariants opératoires mobilisés par les élèves pour résoudre les activités, mais aussi pour justifier leurs choix.
- Caractériser les *schèmes* de raisonnement des étudiants.
- Identifier quels sont les concepts utilisés dans ces schèmes.

Notre étude et nos analyses de documents officiels, de manuels, de recherches didactiques sur le concept de limite nous ont permis d'identifier des activités pertinentes pour notre étude, et ce dans une perspective de comparaison France-Brézil.

Au Brésil, nous avons élaboré et appliqué un questionnaire dans une classe du cours de mathématiques de l'UFMS. Notre objectif était de présenter la recherche, ainsi que d'identifier certaines connaissances antérieures des étudiants. Nous souhaitons également vérifier qui serait intéressé à participer à notre étude. Ensuite, nous avons élaboré et expérimenté trois ensembles d'activités, où les situations suivantes ont été étudiées : nous prenons les valeurs proches d'un point, du domaine de définition de la fonction, pour vérifier ce qui se passe avec les valeurs prises par la fonction ; étude de la limite finie d'une fonction en un point, étude de limites à l'infinie (en $+\infty$ ou $-\infty$) et de limites infinies en un point (approche par « définition intuitive³ »). Après ces deux ensembles d'activités, nous avons réalisé un entretien en binôme avec les étudiants volontaires, puis avons mis en œuvre la troisième activité ; nous avons ensuite conduit un entretien individuel. À la fin, cinq mois plus tard, nous avons réalisé une dernière interview individuelle.

En France, nous avons suivi une enseignante en cours de Terminale dans l'introduction du concept de limite. Pour cela, nous avons élaboré une grille d'analyse pour identifier les différents moments de travail de cette enseignante. Notre grille d'analyse a été construite sur la base des questions suivantes :

- Quel(s) concept(s) est (sont) rappelé(s) pour l'introduction du concept de limite ? Quels autres concepts et quelles représentations (géométrique, algébrique, graphique, fonctionnelle), définitions, propriétés sont rappelées et introduites ? Quels types de problèmes sont utilisés ? Quels concepts connexes (nombres réels, autres concepts imbriqués du champ conceptuel) sont mobilisés ? Et comment sont-ils représentés et évoqués ?
- Quelles sont les caractéristiques de l'activité d'introduction ?
- Quelles institutionnalisations sont mises en œuvre ? Présentent-elles une définition intuitive, formelle, ou des propriétés ?

³ Nous utilisons ici l'expression de « définition intuitive » dans le sens mobilisé dans un livre très utilisé au Brésil (Guidorizzi, 2001) qui développe une approche conceptuelle qui valorise la présentation des définitions et des démonstrations, ainsi que des représentations géométriques. Nous allons formaliser ces aspects sur les « définitions intuitives » et « formelles » dans notre travail au niveau théorique.

- Quels réinvestissements sont prévus ?
- Comment les concepts sont-ils réinvestis ?

Après l'analyse de la grille de ce cours de l'enseignante sur l'introduction du concept de limite, nous avons préparé un questionnaire similaire à celui que nous avons utilisé au Brésil pour retenir certains étudiants et aussi aider à l'élaboration des questions pour des entretiens. Nous faisons actuellement les retranscriptions des dernières interviews. Dans la Figure 1, nous présentons un résumé de nos choix méthodologiques pour une comparaison Brésil/France.

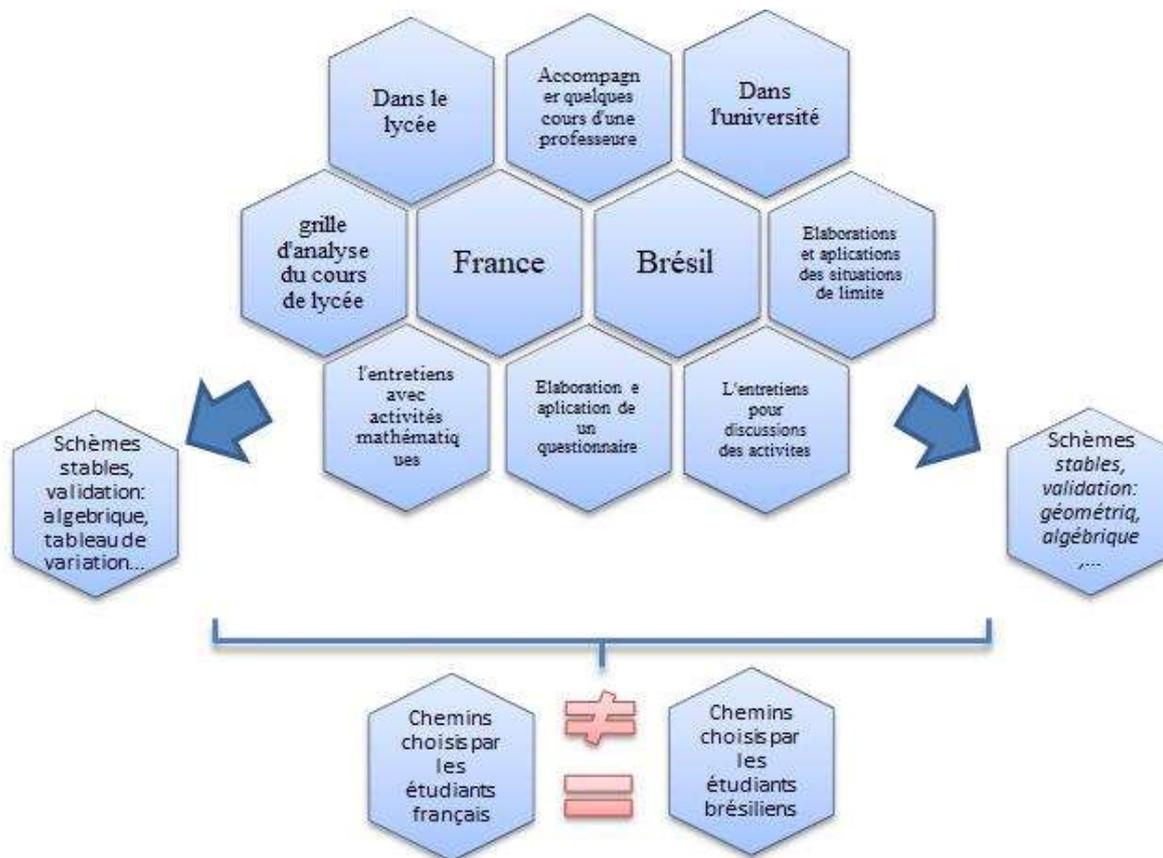


Figure 1 : Choix méthodologiques.

III. LES PREMIERS RESULTATS ET PERSPECTIVES

L'étude de comment les schèmes sont construits ou reconstruits par les étudiants nous a fait réfléchir sur un autre aspect de notre travail lié à la notion de limite et l'étude d'un autre point s'est révélée nécessaire. Nous savons qu'il existe un certain nombre de définitions possibles, certaines plus formelles que d'autres, avec des représentations variées. Ces définitions sont construites en lien étroit avec les expériences de l'étudiant, dans un processus dynamique. Un étudiant peut avoir une définition de limite bien mémorisé, mais sans aucun schème efficace pour traiter des activités liées à cette définition. Toutefois, il peut mobiliser un processus stable pour faire face à plusieurs situations impliquant des limites. Nous souhaitons interroger ici la proximité de ces schèmes avec la notion de limite proposée par (et dans) l'enseignement. En effet, nous nous référons à Vergnaud (1990) et à l'évolution des schèmes au fil des situations. Ce questionnement fait écho aux outils théoriques proposés par Tall et Vinner (1981). Ils soutiennent que beaucoup de concepts que nous utilisons tous les jours ne sont pas formellement définis et sont utilisés au travers de leur reconnaissance d'expériences passées.

Nous pouvons faire un parallèle avec Vergnaud (1990) et dire que dans des situations reconnues comme similaires à des situations précédemment vécues, l'étudiant mobilise des schèmes ayant fonctionnés précédemment. À ce stade de la recherche, nous souhaitons intégrer dans nos analyses la distinction proposée par Tall et Vinner (1981) en utilisant les termes *concept image* et *concept définition* afin de faire progresser nos outils d'analyse et de comparaison. Il s'agit là des *concepts images* et *concepts définitions* du concept de limite mais aussi de ceux des autres concepts en jeu dans les situations étudiées.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- ARTIGUE, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. In *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Bogotá : Grupo Editorial Iberoamérica. 97-140.
- CORNU, B. (1983). *Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles*. Thèse de doctorat, Grenoble.
- CURY, H. N. & CASSOL, M. (2004). Análise de erros em Cálculo: uma pesquisa para embasar mudanças. *Atas Científica*, Canoas, 6, 27-36.
- GUIDORIZZI, H. L. (2001). *Um Curso de Cálculo*: volume 1. Editora LTC, Rio de Janeiro, 5ª edição.
- SANTOS, M. B. S. (2013). *Um Olhar para o Conceito de Limite: Constituição, Apresentação e Percepção de Professores e Alunos sobre o seu ensino e Aprendizado*. Thèse de doctorat en Enseignement des Mathématiques, PUC, São Paulo, Brésil.
- TALL, D. & VINNER, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 3(12), 151-169.
- VERGNAUD, G. (1990). La théorie de champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10 (2-3), 133-170.