

UNE PERSPECTIVE INTERPRETATIVE SUR LA RESOLUTION DE PROBLEMES ARITHMETIQUES : LE CADRE A-S³

Emmanuel SANDER

Université de Genève, Laboratoire IDEA (Instruction, Développement, Education,
Apprentissage)

emmanuel.sander@unige.ch

Résumé

Cet article a pour objet la présentation du cadre A-S³, fondé sur la distinction entre trois formes d'analogies - de *substitution*, de *scénario* et de *simulation*, interdépendantes mais dissociables, qui influent sur la résolution de problèmes arithmétiques, facilitant, ou au contraire faisant obstacle à, la résolution. Un énoncé de problème fait l'objet d'une interprétation qui repose sur un encodage orienté par les connaissances de la vie quotidienne et qui conduit à se focaliser sur certaines caractéristiques et à en ignorer d'autres. Un énoncé s'avère sujet à une multiplicité de perspectives, chacune pouvant orienter l'élaboration d'une stratégie de résolution ou fonder le transfert d'une stratégie transposée d'un problème résolu antérieurement. Un recodage sémantique est susceptible de conduire une interprétation inadéquate à évoluer au profit d'une autre plus pertinente. Les implications sur le plan de l'élaboration de progressions d'apprentissage et d'évaluations sont discutées.

Mots clés

Résolution de problème, apprentissages arithmétiques, analogie, conceptions intuitives, stratégies informelles, recodage sémantique

I. INTRODUCTION

L'objet de ce texte est de proposer un cadre pertinent sur le plan didactique, s'inscrivant dans l'approche de l'analogie que nous avons développée par ailleurs (Hofstadter & Sander, 2013), applicable à la résolution de problèmes arithmétiques à énoncés verbaux, à la fois dans la perspective de rendre compte des difficultés rencontrées par les élèves, de favoriser l'enseignement de notions mathématiques et d'évaluer les acquisitions de connaissances. La résolution de problèmes y est considérée comme jouant un rôle primordial non seulement dans la mise en œuvre mais également dans la construction même des notions mathématiques.

Le cadre A-S³ (Sander, 2016a, 2016b) met en avant trois formes d'analogies – de *substitution*, de *scénario* et de *simulation*, interdépendantes mais dissociables, supposément influentes sur la résolution d'un problème arithmétique¹. Un énoncé de problème y fait l'objet d'une interprétation par un solveur. Cette interprétation repose sur un encodage selon

¹ Tout au long du texte, la formulation « problème arithmétique » désignera un « problème arithmétique à énoncé verbal ».

certaines dimensions dépendantes de connaissances issues de la vie quotidienne – telles que le fait que des vases sont dans un rapport de contenance avec des fleurs. Elle intègre certaines caractéristiques d'un énoncé et en ignore d'autres, contraignant ainsi les stratégies de résolution envisageables et le transfert d'apprentissage, car seules les stratégies compatibles avec l'interprétation du solveur sont susceptibles d'être mises œuvres, et un transfert de stratégie n'est réalisable que si les interprétations de chacun des énoncés concernés sont appariables.

L'approche proposée ici met l'accent sur la diversité des grilles de lecture d'un même énoncé, chacune traduisant un certain encodage de cet énoncé. Les typologies de problèmes arithmétiques les plus connues (Vergnaud, 1982 ; Riley, Greeno & Heller, 1983, pour les problèmes à structure additive à une étape ; Vergnaud, 1988 ; Greer, 1992, pour les problèmes à structure multiplicative) sont généralement envisagées comme s'appliquant aux énoncés eux-mêmes alors que la conception interprétative introduite ici envisage à l'inverse qu'un même énoncé puisse être, selon son encodage, assigné à différents items d'une typologie, ce qui traduit sa polysémie intrinsèque. Cette dernière est vue comme un levier d'apprentissage car une même situation devient sujette à une diversité de perspectives adoptables, chacune pouvant ancrer l'élaboration d'une stratégie de résolution ou fonder le transfert d'une stratégie transposée d'un problème déjà résolu.

Dans cette optique, l'élaboration de progressions d'apprentissage peut s'envisager à travers des activités en classe qui favorisent la construction de nouvelles interprétations par l'élève, qui suscitent la prise en compte de caractéristiques ignorées jusque-là, bien que mathématiquement pertinentes, ou qui aboutissent à l'occultation de propriétés mathématiquement non pertinentes, quoique saillantes sur le plan de la sémantique quotidienne. En effet, une interprétation d'un énoncé est susceptible de mettre en valeur des propriétés non pertinentes mais saillantes, pouvant faire obstacle à la résolution. Par exemple, dans le problème « Paul avait 8 billes. Il en donne 5 à Pierre. Combien lui en reste-t-il ? », dont l'objet est de déterminer une quantité restante, la caractéristique saillante de recherche du résultat d'une perte peut rendre difficile la perception que l'addition et la soustraction sont des opérations réciproques car l'idée qu'en ajoutant ce qui reste à ce qui a été perdu on retrouve la valeur d'origine n'est pas immédiate – ce dernier type où il s'agit de retrouver la valeur initiale par une addition est d'ailleurs l'un des problèmes additifs les plus difficiles en début d'école primaire. La prédominance de l'analogie de substitution de la soustraction comme recherche de la quantité restante peut ainsi expliquer la difficulté de ces élèves à lier « $5+3=8$ » et « $8-5=3$ » ; l'équivalence entre la forme additive « $5+3=8$ » et la forme soustractive « $8-5=3$ » ne semble absolument pas perçue en début de primaire (Baroody, 1999).

En revanche, la réciprocité de l'addition et de la soustraction sera plus saillante dans un énoncé de comparaison tel que « Hugo a 2 billes, Théo en a 7 de plus, combien Théo a-t-il de billes ? », qui rend plus apparent que l'opération réciproque à l'ajout de 7 à la quantité de Hugo pour obtenir celle de Théo est le retrait de 7 à la quantité de Théo pour obtenir celle de Hugo. Un énoncé tel que « J'ai 2 pommes et 6 oranges. Combien de fruits ai-je en tout ? » rend quand à lui saillant la commutativité de l'addition, car le fait de débiter par les oranges ou les pommes dans cette réunion de fruits paraît indifférent, contrairement au scénario précédent de comparaison où les statuts diffèrent entre la valeur du référent et le terme de la comparaison, rendant difficile de percevoir que l'interversion des deux valeurs conserve le résultat. Ce phénomène incite à introduire les notions mathématiques par des situations mettant au premier plan des propriétés pertinentes sur le plan mathématique et dépourvues tant que possible de propriétés saillantes non pertinentes, qui biaisent le sens de la notion. Sur un plan plus métacognitif, cela oriente vers des activités qui favorisent la prise de conscience par les élèves qu'un même énoncé peut se lire de plusieurs façons et vers une tentative de

lecture alternative lorsqu'une interprétation initiale conduit à l'impasse. Par exemple, dans l'énoncé « Hugo a 2 billes, Théo en a 7 de plus, combien Théo a-t-il de billes ? », la valeur 7 peut être interprétée comme celle d'un écart, ce qui rend saillant la réciprocité de l'addition et de la soustraction, comme nous venons de le voir. Une autre interprétation de cette même valeur 7 est qu'il s'agit de la quantité de billes manquant à Hugo pour qu'il en ait autant que Théo. Cette lecture donne un statut quasiment symétrique aux deux valeurs, qui désignent cette fois le cardinal d'un sous ensemble de 2 billes et celui d'un autre de 7 billes, ce qui peut alors légitimer la commutativité. Ainsi une certaine lecture de cet énoncé favorise la perception de la réciprocité des opérations de soustraction et d'addition, tandis qu'une autre est favorable à celle de la commutativité de l'addition. Un élève qui serait en mesure d'adopter sans difficulté l'une et l'autre de ces lectures et de passer aisément de l'une à l'autre pourrait saisir ces deux aspects. Selon nous (Hofstadter & Sander, 2013), ce phénomène est de même nature que celui de recatégorisation qui permet à une personne de passer d'une catégorisation à une autre de manière flexible, le plus souvent inconsciemment, en fonction du contexte et en particulier du but. Par exemple, une chaise suscite typiquement un usage de siège, mais peut aisément être recatégorisée en objet sur lequel il est possible de monter si le besoin s'en fait sentir, pour changer par exemple une ampoule ; elle peut aussi être catégorisée comme meuble lors d'un déménagement, en objet inutile et encombrant lors d'un vide grenier, en porte veste, en projectile lors d'une crise de colère aigüe... Nous envisagerons dans ce texte cette activité de construction d'interprétations alternatives à travers la notion de recodage sémantique des énoncés de problèmes arithmétiques. Un tel recodage sémantique serait susceptible de conduire une interprétation inadéquate (une lecture figée de 7 comme valeur de l'écart qui occulterait la commutativité) à évoluer au profit d'une autre plus pertinente (la perception de 7 comme un ensemble de billes latent, dont le statut serait homologue à celui de l'autre quantité de billes, favorisant la perception du caractère commutatif de l'addition). Préalablement à la présentation du cadre A-S³ et des activités de recodage sémantique, nous précisons la notion d'analogie.

II. L'ANALOGIE COMME PROCESSUS ADAPTATIF TRANSVERSAL

Une acception contemporaine de cette notion est qu'une analogie « *rend possible de comprendre une situation [la cible] dans les termes d'une autre [la source]* » (Holyoak & Thagard (1995, p. 5). Ainsi, une enfant de 2 ans qui dit « J'ai déshabillé l'orange » (Duvignau, 2003) alors qu'elle l'a épluché, a réalisé une analogie dont la cible est la situation d'épluchage d'orange et la source la notion de déshabillage. L'analogie s'inscrit comme un mécanisme psychologique adaptatif fondé sur la référence au connu pour appréhender la nouveauté (Gick & Holyoak, 1983). Toute situation dans laquelle un individu se trouve comportant une part de singularité, l'expérience ne peut être capitalisée que par ressemblance avec un existant antérieur ; la situation est appréhendée à travers le prisme d'un analogue. Tout comme son expérience du déshabillage donne à Camille un prisme à travers lequel appréhender l'épluchage de son orange, c'est ainsi qu'un individu bénéficie de ses expériences passées. L'analogie conjugue un faible coût cognitif – car la situation source est mobilisée comme cadre interprétatif sans qu'il y ait besoin de construire une structure représentationnelle propre, ce qui serait potentiellement plus coûteux – et un fort pouvoir inférentiel dans la mesure où une fois une source identifiée, les connaissances associées à cette source peuvent être projetées sur la cible et constituer autant d'inférences qui enrichissent la perception de cette cible et auxquelles il aurait fallu aboutir autrement en

l'absence de source. Selon la pertinence de la source d'analogie dans un contexte donné, ces inférences peuvent être fécondes ou, à l'inverse, fourvoyer.

Les travaux sur les métaphores conceptuelles, dont le voisinage conceptuel avec l'analogie a été amplement noté (Leary, 1990), montrent l'omniprésence et la persistance de ce phénomène d'appréhension d'une notion (la cible de la métaphore) par le biais d'une autre (sa source). Alors que le vocable d'analogie met l'accent sur la similitude structurale entre le source et la cible (le « rapport » existant, en se fondant sur l'étymologie du terme analogie), celui de métaphore met l'accent sur le transfert opéré (le « transport » sur le plan étymologique). L'idée principale qui unit ces notions est celle d'une cible perçue selon le prisme d'une source en s'appuyant sur la ressemblance ; l'idée selon laquelle une métaphore s'appuie sur un rapport d'analogie n'est pas sujet à controverse. Selon Lakoff et Johnson (1980 ; voir également Lakoff & Nunez, 2000 spécifiquement sur les mathématiques), notre système conceptuel est métaphorique par nature : une notion un tant soit peu abstraite ne peut être conçue autrement que métaphoriquement, la source de la métaphore étant une notion concrète et familière. Ces métaphores, généralement inconscientes, sont qualifiées de conceptuelles pour marquer qu'elles sont « avant tout, affaire de pensée » (Lakoff & Johnson, 1980, p. 153). Elles se repèrent en particulier dans les expressions langagières ; par exemple la métaphore conceptuelle « Un DEBAT est un COMBAT » est mise en évidence par l'existence d'expressions du langage commun empruntées au champ lexical du combat pour qualifier un débat, comme « *Camper sur ses positions* », « *Se retrancher derrière un argument* », « *Combattre une idée* », « *Etre offensif dans son argumentation* », « *Capituler face à un débateur* », « *Rendre les armes face à ses détracteurs* », « *Repousser les assauts de ses opposants* ».... Du fait que les sources privilégiées de métaphores sont ancrées dans l'expérience concrète, cette théorie place les métaphores sensorielles, comme celles liées à la perception visuelle, au premier rang. Par exemple, la métaphore conceptuelle « COMPRENDRE est VOIR » se manifeste par des expressions qui, pour qualifier la compréhension, s'inscrivent dans ce registre de la perception visuelle, telles que : « *Changer de point de vue* », « *Voir d'un nouvel œil* », « *Adopter un autre regard* », « *Avoir une illumination* », « *Trouver une idée claire, brillante* », « *Bien vu !* », « *C'est encore flou* », « *Changer de perspective* »... Loin d'être de simples moyens pour communiquer à propos de notions abstraites, ces métaphores conceptuelles sont considérées comme constitutives des notions elles-mêmes. Ainsi, la notion de débat serait intrinsèquement pénétrée de celle de combat, celle de compréhension de celle de vision, si bien qu'expurger une source de métaphore conduirait à appauvrir conceptuellement la notion, voire serait inconcevable tellement l'une se construit sur l'autre. Cette approche n'est pas restreintes aux savoirs profanes et concerne aussi les champs disciplinaires. Elle a été en particulier déclinée pour la philosophie (Lakoff & Johnson, 1999) et pour les mathématiques (Lakoff et Nunez, 2000).

Deux constats ayant une portée importante sur le plan de l'éducation ont émergé de travaux sur l'analogie (Hummel & Holyoak, 1997 pour une revue ; voir aussi Richland & Simms, 2015). La première est que le transfert analogique est potentiellement efficace dans la mesure où le fait d'avoir résolu un certain problème favorise en général la résolution d'un autre problème de même structure : disposer de sources d'analogie efficaces est un atout, car celles-ci sont mobilisables pour résoudre des problèmes analogues. Toutefois, de nombreux travaux ont modulé ce constat d'efficacité du transfert analogique car ce dernier est particulièrement marqué lorsque la situation source est explicitement indiquée à l'élève, par exemple lorsqu'un enseignant indique quel problème préalablement résolu en classe est susceptible d'aider à résoudre le problème en cours. En revanche, lorsque l'élève cherche à identifier un problème source approprié, des écueils existent du fait d'un accès en mémoire fondé parfois sur des indices inappropriés (Ross, 1989 ; Trench & Minervino, 2015). Ainsi, un élève ayant appris à résoudre un problème respectant un certain principe de solution peut

se trouver démunis pour l'identifier comme source d'analogie pertinente. Un transfert négatif est même parfois observé, caractérisé par la mise en œuvre de la structure de solution d'un problème superficiellement ressemblant mais structurellement non analogue (Novick, 1988). Un double enjeu éducatif émerge donc, celui de la construction de sources d'analogie pertinentes et celui de la possibilité de leur évocation à bon escient.

Ce double enjeu est reflété par deux facettes du développement des concepts, l'une comme l'autre étroitement liées aux processus d'analogie. La question des liens entre analogie et concepts n'est pas nouvelle (Turner, 1988 ; Ramscar & Pain, 1996), et nous avons développé (Hofstadter & Sander, 2013) un cadre qui les associe étroitement. Chaque concept y est évoqué par les analogies qu'établit notre système cognitif afin d'interpréter ce qui est nouveau et inconnu dans des termes anciens et connus. Outre ce rôle de l'analogie dans l'évocation d'un concept, le développement conceptuel est lui-même piloté par des analogies. Un mécanisme d'extension catégorielle conduit en effet chaque nouvelle situation rencontrée, une fois associée par analogie à une catégorie mentale préexistante, à transformer cette même catégorie ; un tel mécanisme dynamique et cumulatif oriente le développement conceptuel (Hofstadter & Sander, 2013 ; Sander, sous-presse). Alors que ce dernier est soumis à l'arbitraire des expériences de vie individuelles pour les concepts quotidiens, un enjeu éducatif majeur est que l'enseignement oriente cette construction lorsqu'il s'agit de notions scolaires.

III. LE CADRE A-S³

Le cadre A-S³ distingue trois formes d'analogies intuitives², les analogies de *Substitution*, de *Scénario* et de *Simulation*. Ces trois formes d'analogies reposent sur des connaissances extra-mathématiques, issues de la vie quotidienne, préalables à l'enseignement. Ces analogies orientent les interprétations de l'énoncé par l'élève ; peuvent être facilitatrices comme obstructives selon qu'elles suscitent des inférences pertinentes et favorisent la réussite ou à l'inverse des inférences inappropriées et y font alors obstacle. Les identifier permet de se prononcer sur la plus ou moins grande difficulté de résolution d'un problème. Elles peuvent être mises à profit pour élaborer des progressions d'apprentissage et favoriser une montée en abstraction. Leur prise en compte peut également orienter l'élaboration d'évaluations (Sander, 2007), dans la mesure où les succès ne s'interprètent pas de manière identique selon qu'ils sont obtenus « avec le support de » ou « malgré l'obstacle engendré par » tel ou tel type d'analogie.

1. Les Analogies de Substitution

A la différence des analogies de Scénario et de Simulation, les analogies de substitution portent sur les notions mathématiques elles-mêmes. Elles sont illustrées dans ce texte principalement avec les quatre opérations élémentaires mais peuvent être envisagées pour toute notion mathématique. Elles se repèrent par le fait qu'une notion est conçue par analogie avec une connaissance familière. La terminologie d'analogie de substitution provient du fait que cette connaissance familière se substitue à la notion disciplinaire pour l'individu, qui

² Ces analogies sont qualifiées d'intuitives au sens de Fischbein (1987), comme une « cognition qui apparaît subjectivement comme évidente, directement acceptable, holistique, coercitive et extrapolable ».

considère qu'il traite de la notion scientifique alors qu'il s'appuie en fait sur l'analogie de substitution. Une analogie de substitution est attachée à un domaine de validité (Sander, 2008), qui désigne le champ de coïncidence entre la notion mathématique et la source d'analogie et marque les cas où la substitution conduit au succès. Une analogie de substitution est facilitatrice à l'intérieur du domaine de validité et obstructive à l'extérieur. Cette notion d'analogie de substitution est en phase avec celle de modèle tacite (Fischbein, 1989) et de métaphore conceptuelle (Lakoff & Nunez, 2000). Relativement à ces deux cadres, elle offre l'intérêt d'ancrer ces analogies de substitution dans une théorie des concepts, car les sources d'analogie sont des concepts quotidiens. En particulier, il devient pertinent de s'intéresser à la structure même des concepts source avec par exemple la présence de prototypes et de membres atypiques, et à leur développement, avec la possibilité que la source même de l'analogie soit sujette à développement (Sander, 2017).

Prenons le cas de la soustraction et la tâche d'inventer un problème de soustraction qui puisse se résoudre par l'opération $8-3=5$. De manière quasi systématique, un énoncé tel que « Paul (Hugo, Théo, Nathan, Léa, Marie, Judith, etc...) a 8 bonbons (billes, gâteaux, pommes, etc...). Il/Elle en donne (mange, perd, etc...) 3 à (pendant, etc...). Combien lui en reste-t-il ? » est proposé. En dépit de la diversité des scénarios inventés, une structure commune est présente, qui manifeste l'existence de l'analogie de substitution selon laquelle soustraire c'est perdre, retirer, enlever (Fischbein, 1989 ; Lakoff & Nunez, 2000). Plus précisément, une totalité est donnée, dont une partie est retranchée et la question porte sur la partie subsistante (« Combien en reste-t-il ? »). Il apparaît donc que l'analogie de substitution de la soustraction est la recherche de la quantité restante après qu'un événement conduise à faire décroître une quantité initiale donnée. Plus de 90% des élèves de fin d'école primaire, de Master en psychologie ou des enseignants d'école primaire proposent des énoncés obéissant strictement à cette forme (Sander, 2016b, sous-presse). La tâche d'inventer un problème d'addition qui puisse se résoudre par l'opération $5+3=8$, va quant-à-elle conduire majoritairement à des énoncés ayant la forme: « Paul (Hugo, Théo, Nathan, Léa, Marie, Judith, etc...) a 5 bonbons (billes, gâteaux, pommes, etc...). Il/Elle en reçoit (gagne, etc...) 3 à (pendant, etc...). Combien en a-t-il en tout ? ». L'analogie de substitution de l'opération d'addition est celle de l'ajout (Fischbein, 1989; Lakoff & Nunez, 2000). Plus précisément deux formes d'ajout prédominent dans le cadre de cette analogie de substitution. Soit (i) un état initial est donné, ainsi qu'un accroissement et la question porte sur l'état résultant, soit (ii) deux parties sont données, qui forment un tout et la question porte sur la valeur de ce tout (Sander, 2016b, sous-presse).

En ce qui concerne la multiplication, les tâches « Inventer un problème de multiplication » et « Définir l'opération mathématique de multiplication » montrent, pour la première d'entre elles, que la quasi-totalité des problèmes inventés décrivent une réplique sommative, par exemple « J'ai 3 paquets de 10 gâteaux. Combien cela fait-il de gâteaux en tout ? », qui peuvent se résoudre comme des additions répétées (Fischbein, 1989 ; Lakoff & Nunez, 2000 ; Sander, 2008). De manière systématique, une des valeurs est un nombre entier et a le statut de multiplicateur. Les définitions construites et unanimement acceptées par des étudiants à l'université reflètent cette conception d'addition répétée (Hofstadter & Sander, 2013) : « Une multiplication est une addition réitérée d'un nombre, un nombre de fois donnée. » ; « Multiplier consiste à ajouter à un chiffre donné ce même chiffre autant de fois qu'on le souhaite. » ; « Multiplier, c'est additionner un certain nombre à lui-même autant de fois que le nombre par lequel on le multiplie l'indique. » ; « La multiplication est un calcul dans lequel on choisit combien de fois on additionne une quantité par elle-même. » L'analogie de substitution de la division est la recherche de la taille de la part dans un contexte de partage équitable (Fischbein, 1989; Lakoff & Nunez, 2000). A la question "Inventer un problème de division" tant les élèves français de 12 ans à 13 ans que des adultes

étudiants à l'université en France proposent à plus de 90% de problèmes de partage équitable où la question porte sur la taille de la part (Audo & Sander, 2008 ; Sander, 2008), qui mène à un résultat dans la même unité que la quantité initiale. Quelques exemples d'énoncés produits par des étudiants à l'université (Hofstadter & Sander, 2013) reflètent cette conception de la division : « 4 amis se partagent 12 bonbons. Combien de bonbons chaque ami recevra-t-il ? » ; « Au marché, une maman achète 20 pommes pour ses 5 enfants. Combien de pommes chaque enfant aura-t-il ? » ; « Pour les vacances, on prépare 20 kilos de vêtements à mettre dans 4 valises. Combien va peser chaque valise ? » ; « Un terrain de 90 m² doit être divisé en 6 parcelles de superficie égale. Quelle sera la superficie de chaque parcelle ? » ; « On utilise 12 mètres de tissu pour fabriquer 4 robes. Combien de mètres de tissu faut-il pour fabriquer une seule robe ? »

Le caractère facilitateur ou obstructif des analogies de substitution dépend de l'inscription ou non de la situation à l'intérieur de champ de validité. Pour la soustraction, la tâche d'« Inventer un problème de soustraction dont la solution est $8-3=5$ et dans lequel on ne perd rien, on ne fait que gagner » met en impasse le plus souvent les élèves d'école primaire, voire des adultes, alors que des situations tout aussi concrètes que les précédents énoncés de soustraction existent, qui ont simplement la caractéristique de ne pas se conformer à la recherche de reste. Par exemple, un énoncé orienté vers une recherche de gain, tel que « Paul a 3 billes. Il en gagne pendant la récréation et maintenant il en a 8. Combien de billes a-t-il gagnées ? » répond à la tâche précédente mais est rarement envisagé. Ainsi, l'analogie de substitution donne sens à la notion, mais induit une focalisation sur un seul type de situation. Elle est nécessaire mais limitante, car elle éclipse la diversité des situations de soustraction (Sander, 2008) : sur la douzaine de catégories de problèmes soustractifs à une étape que comportent les typologies de problèmes qui ont émergé dans les années 1980 (Vergnaud, 1982 ; Riley, Greeno & Heller, 1983), plus de 90% des propositions se concentrent ainsi sur la seule catégorie des recherches de reste dans une situation de retrait. Des situations de comparaison où l'on cherche la valeur de l'écart ou d'un terme de la comparaison, des situations de recherche de gain, ou des situations de recherche d'une partie manquante connaissant la totalité et l'autre partie, ne sont quasiment jamais proposées, ce qui montre la prégnance de l'analogie de substitution. On note aussi qu'un énoncé tel que « Lors d'une course, 108 coureurs prennent le départ. Il y a beaucoup d'abandons : 85 coureurs seulement terminent la course. Combien de coureurs ont abandonné ? », proposé en France par la Direction de l'Evaluation de la Prospective et de la Performance (DEPP) auprès d'élèves de CE2 (8 ans) donne lieu à seulement 25% de réussites (DEPP 2014 ; Sander & Richard, 2017). Bien qu'il s'agisse d'un contexte de diminution car des coureurs abandonnent, cette situation sort du domaine de validité de l'analogie de substitution car la valeur du reste est connue et la question porte sur la quantité ôtée. Le cadre A-S³ rend compte du fait qu'un énoncé questionnant non sur le nombre d'abandons mais sur le nombre de coureurs atteignant la ligne d'arrivée serait nettement mieux réussi (Vergnaud, 1981/1994). On voit poindre deux modes d'intervention scolaire. L'un conduisant à ce que la notion de soustraction embrasse d'autres cas que ceux de recherche de reste, l'autre permettant à un élève de lire différemment l'énoncé et de pouvoir y percevoir une recherche de reste par un glissement d'interprétation (en l'occurrence, que ceux qui ont abandonné la course sont ceux qui restent une fois ôtés ceux qui l'ont terminée).

En ce qui concerne l'addition, la tâche « Inventer un problème d'addition dont la solution est $5+3=8$ et dans lequel on ne gagne rien, on ne fait que perdre » laisse sans proposition la grande majorité des adultes, alors qu'un énoncé tel que « Paul avait des billes. Il en perd 3 pendant la récréation et maintenant il lui en reste 5. Combien de billes avait-il avant la récréation ? » y répondrait. Là encore, une telle situation est tout aussi concrète que celles des problèmes d'addition proposés en l'absence de contrainte. La difficulté provient du

fait qu'elle nécessite de ne pas se restreindre au cadre de l'analogie de substitution qui assimile l'addition à la recherche du résultat d'un accroissement ou à un ajout de deux parties. Parmi les problèmes additifs à une étape, les deux types qui s'inscrivent dans le champ de validité de l'analogie de substitution sont résolus par la totalité des élèves de 6 ans tant que les valeurs numériques sont suffisamment faibles (Riley, Greeno & Heller, 1983). C'est le cas des problèmes « Paul avait 3 billes. Il en gagne 5 à la récréation. Combien a-t-il de billes maintenant ? » et « Paul a 3 billes. Pierre a 5 billes. Combien ont-ils de billes ensemble ? ». En revanche, hors du champ de validité de l'analogie substitution, les performances chutent. Ainsi, le problème « Paul avait des billes. Il en perd 3 pendant la récréation et maintenant il lui en reste 5. Combien de billes avait-il avant la récréation ? » n'est réussi qu'à 28%, tandis que « Paul a 3 billes. Pierre a 5 billes de plus que Paul. Combien de billes Pierre a-t-il ? » obtient 17% de réussite au même âge, en dépit du mot « plus » dans l'énoncé dont on pourrait attendre qu'il déclenche une addition par un simple effet de mot clé. Ce phénomène illustre le fait que la conformité à l'analogie de substitution paraît être un facteur majeur de réussite.

Concernant la multiplication, l'analogie de substitution conduit à ce qu'un nombre entier soit systématiquement introduit lors de l'invention d'un problème et que les définitions acceptées de manière consensuelles soient celle d'une addition réitérée, qui ne s'applique pourtant pas pour les produits en général, par exemple lors du calcul de la surface d'un rectangle ou d'une distance parcourue connaissant la vitesse et la durée. Cette analogie conduit également à la croyance erronée que multiplier rend plus grand et rend difficile l'invention d'un problème où multiplier rend plus petit. Elle rend aussi difficile à justifier la commutativité de la multiplication dans la mesure où l'analogie de substitution légitime les notions de multiplicateur et de multiplicande en faisant jouer un rôle asymétrique aux valeurs du produit ; dans le cadre de la multiplication vue comme addition réitérée, la justification que $3 \times 5 = 5 \times 3$ ($5+5+5 = 3+3+3+3+3$) ne va alors pas de soit. Les explications données par les élèves et certains adultes sont souvent de l'ordre de la règle arbitraire (« parce qu'on a le droit de le faire » ; Sander, 2008). La difficulté de résolution d'un problème de multiplication dépend également de sa conformité à l'analogie de substitution. Ainsi, l'énoncé « Si un gallon d'essence coûte £1,27, combien coûte 0,22 gallon ? » est réussi seulement par 44% de collégiens anglais de 12 à 15 ans alors que la réussite atteint 100% si c'est le prix d'une valeur entière de gallons qui est recherché (Bell, Swann & Taylor, 1981) ; le premier cas n'est pas assimilable à une addition réitérée alors que le deuxième l'est. De même, auprès cette fois de collégiens italiens, en maintenant les mêmes valeurs numériques mais, selon la place de ces valeurs, en restant ou non dans le domaine de validité de l'analogie de substitution : « Avec un quintal de blé, on obtient 0,75 quintaux de farine. Quelle quantité de farine peut être obtenue avec 15 quintaux de blé ? » obtient 77% de réussite tandis que pour « Le volume d'un quintal de gypse est de 15 cm^3 . Quel est le volume de 0,75 quintaux ? », on ne compte plus que 53% de réussite (Fischbein et al., 1985).

Pour ce qui est de la division, nous avons montré que la tâche « Inventer un problème de division avec un résultat plus grand que la valeur initiale » est difficile, car la recherche de la taille de la part conduit toujours à obtenir une quantité moindre que la quantité initiale. Une expérience menée auprès d'élèves de 11 ans et 12 ans au collège en France a conduit à ce que 78% d'entre eux considèrent que c'est impossible (Audo & Sander, 2008 ; Sander, 2008), tandis que la même tâche proposée à des adultes étudiants à l'université conduisait à 74% d'échec, ceux-ci se répartissant de manière à peu près équivalente entre ceux qui disent « Impossible » avec des justifications soulignant l'influence de l'analogie de substitution telles que « Impossible, car diviser c'est découper en plusieurs morceaux » ou encore « Lorsqu'on divise par une moitié, on a plus, mais c'est impossible de diviser par une moitié », ceux qui posent une opération (par exemple : $4/0,2$) sans être en mesure d'élaborer un énoncé (« je ne trouve pas de situation qui va avec »), et ceux qui construisent un problème

transgressant la consigne (« Jean a 20 bouteilles de vin. Il en vend la moitié à 8 euros la bouteille. Combien d'argent reçoit-il ? ») (Hofstadter & Sander, 2013 ; Sander, 2008). Pourtant, les énoncés pour lesquels « diviser rend plus grand » (par exemple « Combien de verres de 0,25 l peut-on remplir avec une carafe de 2 l ? ») sont aussi concrets que ceux inventés spontanément sans la contrainte de rendre plus grand, mais la nécessité de quitter le champ de validité de l'analogie de substitution rend la tâche particulièrement difficile.

En synthèse, les analogies de substitution offrent l'intérêt de donner sens à une notion mathématique. Elles constituent une entrée pour cette notion. Au même titre que les métaphores conceptuelles apparaissent nécessaires pour développer une conception de toute notion qui n'est pas directement incarnée sur le plan expérientiel, les analogies de substitution sont utiles, voire nécessaires, et offrent une incursion dans la notion, dont la validité, même partielle, explique la prégnance et la robustesse. En effet, comme les cas précédents le montrent, de même que des travaux menés auprès d'enseignants en formation (e.g. Tirosh et Graeber, 1991), ces analogies de substitutions ne sont pas transitoires. Leur influence persiste chez les adultes et, même si nous avons choisi de nous focaliser sur les quatre opérations arithmétiques élémentaires, les notions mathématiques concernées peuvent être plus complexes. Par exemple, une fonction serait conçue par analogie avec une « fine ligne d'encre » et la continuité d'une telle fonction serait conçue comme « une fine ligne d'encre tracée sans lever le stylo » (Fischbein, 1987). De cette analogie de substitution, on peut tirer qu'une fonction continue est dérivable presque partout car si l'on « zoome » d'assez près sur la courbe, on trouve forcément des portions lisses et donc des possibilités de tracer des tangentes à la courbe. De fait, Ampère (1806) lui-même semble avoir été pris au piège de cette analogie en montrant – pensait-il – qu'une fonction continue est dérivable partout sauf en un nombre limité de points.

Mais qu'en est-il des fonctions non traçables ? Bolzano puis Weierstrass ont démontré qu'il était possible pour une fonction continue de n'être dérivable nulle part. La réaction de la communauté des mathématiciens a été pour partie hostile. Ainsi peut-on citer Charles Hermite (1893), particulièrement virulent :

« Je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions continues qui n'ont point de dérivées »

tout comme Henri Poincaré (1908) :

« La logique parfois engendre des monstres. On vit surgir toute une foule de fonctions bizarres qui semblaient s'efforcer de ressembler aussi peu que possible aux honnêtes fonctions qui servent à quelque chose. [...] de la continuité, mais pas de dérivées [...], on les invente tout exprès pour mettre en défaut les raisonnements de nos pères, et on n'en tirera jamais que cela. »

Pourtant ces fonctions sont maintenant considérées comme parfaitement « respectables » : elles sont même denses dans l'ensemble des fonctions continues et sont parfaitement intégrées aux mathématiques, notamment avec les objets fractals.

Sur le plan de l'éducation, la question n'est pas de faire disparaître par l'enseignement ces analogies de substitution. Elles ne peuvent ni se déconstruire ni être éradiquées comme les données précédemment présentées semblent le montrer. L'enseignant a à intégrer leur présence chez lui comme chez l'élève. Leur influence persiste au même titre que les métaphores conceptuelles telles que « DEBATTRE est COMBATTRE » ou « COMPRENDRE est VOIR » sont inscrites culturellement et n'ont pas vocation à disparaître, pas plus que « SOUSTRAIRE est RECHERCHER CE QUI RESTE » ou « ADDITIONNER est AJOUTER ». En revanche, un objectif clé de l'éducation est d'aider les élèves à surmonter l'influence puissante de leurs analogies de substitution même si celles-ci

resteront toujours des stéréotypes incontournables de la notion. Toutefois, l'objectif est que la notion cesse d'être réduite à son analogie de substitution et que « de combien le nombre de billes a-t-il augmenté ? » puisse être vu comme résoluble par une opération de soustraction. C'est l'enjeu d'un développement conceptuel ancré sur l'analogie de substitution et que l'enseignement contribue à faire évoluer. Cela est notamment concevable en s'appuyant sur des scénarios, car les analogies de substitution sont seulement la partie émergée de l'iceberg, et vont de concert avec des analogies de scénarios.

2. Les Analogies de Scénario

Un énoncé de problème, de même qu'un proverbe, un court récit ou une fable, évoque une catégorie de scénarios, par exemple des situations d'échange, de partage équitable, de gain, de don, de perte, de répartition, etc. Ces catégories de situations quotidiennes ne sont toutefois pas indépendantes des résolutions mathématiques qui leur sont associées. Les situations qu'elles regroupent sont analogues entre elles ; ce qui les lie est d'un niveau d'abstraction qui va au-delà des objets concrets impliqués dans les situations par le fait justement qu'elles constituent par exemple des scénarios d'échanges ou de partage. Ainsi, des billes réparties dans des sacs de billes, des oranges dans des paniers et des tulipes dans des vases dessinent le contour d'un scénario de répartition de contenus dans des contenants. Les résolutions dont la structure mathématique est congruente avec cette catégorisation sont facilitées par l'analogie de scénario car les propriétés activées sont cohérentes avec les propriétés mathématiquement pertinentes alors qu'en cas de dissonance, la difficulté de résolution est accrue.

Si l'on demande à des adultes (Bassok, Chase & Martin, 1998) d'inventer d'une part un énoncé dans lequel il est question d'oranges et de pommes et d'autre part un énoncé dans lequel il est question d'oranges et de paniers, le premier énoncé induira de manière presque systématique un scénario où les deux sortes de fruits ont un statut symétrique (typiquement « Combien y-a-t-il de fruits en tout ? ») alors que la seconde tâche induira un scénario où les rôles sont asymétriques et où la relation fonctionnelle est impliquée (typiquement « Quel est le nombre d'oranges par panier ? »). Les énoncés impliquant les oranges et les pommes, ou plus généralement impliquant des collatéraux d'une même catégorie superordonnée, donnent ainsi lieu à des problèmes se résolvant par une opération d'addition ou de soustraction, alors que les énoncés impliquant les oranges et les paniers, ou plus généralement impliquant des entités entretenant une relation fonctionnelle de type contenance ou répartition, donnent lieu à des problèmes se résolvant par une multiplication ou une division. Il s'avère difficile, y compris pour des enseignants à l'école primaire (Sander, 2016b), de concevoir un énoncé impliquant des oranges et des pommes et se résolvant par une multiplication ou une division. Les manuels scolaires suivent ce mouvement. Bassok, Chase & Martin (1998) ont trouvé que pour 97% des problèmes à résoudre par addition, les objets additionnés appartenaient à des catégories de même niveau (e.g., des pommes et des poires, ou des billes rouges et des billes noires) alors que 94% des problèmes requérant une division faisaient intervenir des objets reliés fonctionnellement (e.g., des billes et des boîtes). Cette orientation exclut par exemple l'introduction d'un énoncé dans lequel il y aurait dissociation du scénario communément induit et de l'opération mathématique, comme ce serait le cas pour la question « Combien de fois plus de pommes que d'oranges ? ».

Le caractère facilitateur ou obstructif de l'analogie de scénario est déterminant pour la difficulté d'un problème. Ainsi, dans le cas d'énoncés de division, les problèmes « Avec 75 roses, on peut faire 5 bouquets identiques. Combien de roses seront dans chaque bouquet ? » et « 15 amis ont acheté ensemble 5 kg de cookies. Combien chacun en a-t-il reçu ? » donnent lieu à des performances très différentes (93% de réussite pour le premier versus 28% pour le second par des élèves de collège italien ; Fischbein et al., 1985). En effet, le premier est bien

conforme sur le plan de l'analogie de scénario dans lequel un certain nombre de contenus est réparti dans un plus petit nombre de contenants alors que pour second, la quantité d'objets partagée paraît moindre que le nombre d'acteurs et la plupart des élèves rétablissent un scénario dans lequel 5 amis se partageraient 15 gâteaux pour proposer, à tort, la solution 15/5. On notera que l'analogie de substitution n'est en effet pas en cause ici, car l'un et l'autre de ces problèmes sont conformes à l'analogie de substitution de la division dans la mesure où il s'agit de cas de partages équitables dans lesquels la taille de la part est recherchée : la composante obstructive provient de l'analogie de scénario.

Comme l'illustre le cas précédent, les caractères facilitateur ou obstructif sur le plan de l'analogie de substitution et sur le plan de l'analogie de scénario sont dissociables. Par exemple, la résolution d'un énoncé tel que « J'ai 3 paquets de 10 gâteaux. Combien ai-je de gâteaux en tout ? » est supposée facilitée par la conformité sur le plan de l'analogie de substitution (réplication) et sur celui de l'analogie de scénario (relation fonctionnelle de contenance des gâteaux dans les paquets). En revanche, l'énoncé « J'ai 4 oranges. Je reçois 5 pommes en échange de chaque orange. Combien aurai-je de pommes ? » est favorable sur le plan de l'analogie de substitution dans la mesure où il y a réplication des groupes de 5 pommes, en revanche l'analogie de scénario est obstructive pour cet énoncé qui implique des collatéraux d'une même catégorie, qui ne sont pas dans une relation fonctionnelle. Pour un énoncé tel que « Si un gallon d'essence coûte £1,27, combien coûte 0,22 gallon ? », il n'y a pas cette fois conformité sur le plan de l'analogie de substitution (absence de réplication), mais conformité sur le plan de l'analogie de scénario (recherche d'un prix payé connaissant le prix unitaire d'une certaine marchandise et la quantité de cette marchandise).

Selon le scénario évoqué par l'énoncé, les stratégies envisagées par les solveurs sont susceptibles de changer radicalement (Gros, Thibaut & Sander, 2015 ; Mengue, Richard & Sander, 2015 ; Gamo, 2009 pour la mise en évidence de cet effet parmi une population d'enseignants d'école primaire). Par exemple, le problème « Laurent achète une trousse à 7 euros et un classeur. Il paie 15 euros. Jean achète un classeur et une équerre. Il paie 3 euros de moins que Laurent. Combien coûte l'équerre ? » est presque toujours résolu par une stratégie en trois étapes tant par des adultes que par des élèves de fin d'école primaire (calcul du prix du classeur : $15 - 7 = 8$; calcul de la somme payée par Jean : $15 - 3 = 12$; calcul du prix de l'équerre : $12 - 8 = 4$), et ce y compris si de fortes incitations sont faites pour que la solution la comportant le moins d'opérations soit proposée. En revanche, lorsqu'exactement la même consigne est proposée pour l'énoncé « Laurence a suivi des cours de danse pendant 7 ans et s'est arrêtée à 15 ans. Jeanne a commencé au même âge que Laurence et s'est arrêtée 3 ans plus tôt. Combien de temps Jeanne a-t-elle suivi ses cours de danse ? », une majorité de participants identifie cette fois une solution en un seul calcul ($7 - 3 = 4$; Jeanne a suivi ses cours de danse pendant 4 ans). Or ces deux énoncés sont l'un et l'autre résolubles par les mêmes stratégies, en trois calcul et en un calcul. En revanche, dans le premier cas le type de scénario évoqué oriente vers des résolutions par complémentation et rend presque invisible la solution directe $7-3=4$, conduisant à voir le prix de l'équerre comme résultant du fait d'ôter du prix de la trousse l'écart des prix totaux payés par Jean et Laurent. Cette deuxième stratégie devient pourtant saillante dans le second cas, où une comparaison de durée (un écart de 3 ans qui se transpose de l'âge d'arrêt des cours à leur durée) permet de proposer une solution directe. Cet effet est si robuste qu'une large proportion d'adultes étudiants à l'université considère que le problème « Laurent achète une trousse à 7 euros et un classeur. Jean achète un classeur et une équerre. Il paie 3 euros de moins que Laurent. Combien coûte l'équerre ? » est insoluble alors qu'une simple soustraction conduit à sa solution et que ce n'est presque jamais le cas pour l'énoncé « Laurence a suivi des cours de danse pendant 7 ans. Jeanne a commencé au même âge que Laurence et s'est arrêtée 3 ans plus tôt. Combien de temps Jeanne a-t-elle suivi ses cours de danse ? » (Gros, Sander, & Thibaut, 2016). Il se trouve que

tous ces énoncés incarnent le théorème selon lequel « Si deux ensembles ont une partie commune, l'écart entre les cardinaux de ces ensembles est le même que l'écart entre les cardinaux de leurs parties non communes », mais il s'avère que selon le type de scénario, l'un mettant l'accent sur des caractéristiques cardinales qui suscitent une stratégie par complémentation, et l'autre mettant l'accent sur des caractéristiques ordinales qui suscitent une stratégie par comparaison, la solution en une opération qui opérationnalise le théorème est soit fréquemment mise en œuvre (cas ordinal, tel que celui des cours) soit rarement (cas cardinal, tel que celui des achats). On notera que lorsque le scénario est favorable à la mise en œuvre de la stratégie directe, cela n'indique pas pour autant une conceptualisation du théorème, car en cas de scénario cardinal, cette stratégie directe cesse d'être perçue par les mêmes participants. La difficulté à percevoir la solution directe pour ces énoncés dans le cas cardinal reste marquée jusque pour des élèves qui ont réussi les concours scientifiques de la rue d'Ulm, montrant la difficulté à percevoir certaines analogies de structure mathématique et la tendance à privilégier des analogies de scénarios, qui conduisent à juger analogues entre eux les scénarios cardinaux et analogues entre eux les scénarios ordinaux et à ignorer l'analogie entre scénarios cardinaux et ordinaux, légitimée pourtant par une structure mathématique commune qui fonde le théorème mentionné plus haut (Gros, Thibaut & Sander, 2015 ; Gros, Sander, & Thibaut, 2016).

Ainsi, tout comme c'était le cas pour les analogies de substitution, la réussite est un indicateur assez pauvre de conceptualisation lorsque l'analogie de scénario est facilitatrice dans la mesure où la même personne peut se trouver mise en échec dès lors qu'une dissociation est introduite entre le scénario et la structure mathématique. Ce phénomène a été notamment mis en évidence dans le cadre de la résolution de problèmes de combinatoire (Ross, 1987, 1989 ; voir aussi Bassok, Wu & Olseth, 1995 pour une mise en évidence plus systématique encore de ce phénomène). Un problème source était proposé aux participants, adultes étudiants à l'université, accompagné d'une formule pour déterminer sa solution. Le problème source était « Les mécaniciens d'IBM doivent s'assurer que les voitures de la société fonctionnent bien. Ce jour-là, il y a 11 voitures et 8 mécaniciens. Les mécaniciens choisissent au hasard sur quelle voiture ils vont travailler. Ce choix est fait par ordre d'ancienneté. Quelle est la probabilité que les 3 plus anciens mécaniciens, Al, Bud et Carl, choisissent respectivement les voitures du chef du conseil d'administration, du président exécutif et du vice-président ? » et la solution indiquée était « $1/(11 \times 10 \times 9)$ ». Dans un second temps, les participants étaient scindés en deux groupes. Le premier groupe recevait l'énoncé suivant : « Les mécaniciens d'IBM réparent les voitures des commerciaux de la société. Les mécaniciens choisissent au hasard sur quelle voiture ils vont travailler, le meilleur mécanicien choisissant en premier et ainsi de suite. Ce jour là, il y a 16 voitures de commerciaux et 5 mécaniciens. Quelle est la probabilité que le meilleur mécanicien choisisse la voiture du meilleur vendeur et que le 2^{ème} meilleur mécanicien choisisse la voiture du 2^{ème} meilleur vendeur ? ». Les participants étaient 75% à proposer la solution correcte : $1/(16 \times 15)$. Un deuxième groupe recevait pour énoncé « Les mécaniciens d'IBM réparent les voitures des commerciaux de la société. Les commerciaux choisissent au hasard le mécanicien qui réparera leur voiture, le meilleur commercial choisissant en premier et ainsi de suite. Ce jour là, il y a 14 voitures de commerciaux et 16 mécaniciens. Quelle est la probabilité que le meilleur mécanicien répare la voiture du meilleur vendeur et que le 2^{ème} meilleur mécanicien répare la voiture du 2^{ème} meilleur vendeur ? ». La même solution correcte $1/(16 \times 15)$ n'était cette fois proposée que par 37% des participants. Comment expliquer cette baisse de moitié de la performance de transfert ? Le premier énoncé partage avec le problème source un scénario dans lequel l'ensemble dans lequel se fait le tirage est confondu avec les entités inanimées du récit. Si celui qui interprète le problème source comprend que lorsqu'un récit fait intervenir des objets et des individus, le dénominateur est déterminé par les objets, il

aboutira à la solution exacte tout en ignorant la notion d'ensemble dans lequel se fait le tirage. A l'inverse, dans le second cas de figure, la même interprétation conduit à proposer la solution erronée $1/(14 \times 13)$. Ainsi l'analogie de scénario s'avère facilitatrice dans le premier cas car il y a congruence entre les inanimés et l'ensemble dans lequel se fait le tirage ; en revanche il y a non congruence dans le second cas. Le scénario évoqué par le problème incarne une structure dont la congruence avec la structure mathématique est déterminante pour la réussite du problème.

En cas de congruence, qui est le cas par défaut dans les manuels scolaires, il n'est pas possible de distinguer ce qui relève de la conception mathématique de ce qui relève de la sémantique des scénarios évoqués. En cas de non congruence, les analogies de scénarios deviennent obstructives. Il s'agit d'un enjeu éducatif important que les élèves soient en mesure de résoudre des problèmes y compris lorsque le scénario n'est pas un support pour la résolution. Comme l'illustre le deuxième énoncé (Ross, 1987, 1989), c'est ce dernier cas qui est le plus probant d'une conceptualisation mathématiquement satisfaisante.

3. Les Analogies de Simulation

La troisième forme d'analogie du cadre A-S³ relève de l'approche des modèles mentaux (Johnson-Laird, 2006) selon laquelle lorsque l'on lit un texte, un modèle mental du contenu décrit dans ce texte en est construit, qui est un analogue d'une situation du monde extérieur, qui préserve les caractéristiques des entités décrites dans la situation. Il est possible alors d'opérer sur le modèle mental comme on le ferait dans une situation réelle, mais par simulation mentale. Par exemple, si l'énoncé indique que j'ai 5 bonbons dans ma poche et que j'en mange deux, il est possible de mentalement simuler cette action jusqu'à aboutir à un modèle mental comprenant 3 bonbons, sur la base duquel la solution à ce problème peut être énoncée sans connaissance scolaire en arithmétique car la simulation associée au modèle mental conduit à la solution sans formalisme arithmétique. Ce phénomène renvoie aux travaux sur les stratégies informelles qui conduisent de jeunes enfants non encore scolarisés à trouver par simulation mentale la solution à des problèmes qui seraient également résolubles par des opérations arithmétiques (Carpenter, Ansell, Franke, Fennema, & Weisbeck, 1993).

Lorsque la simulation mentale de la situation évoquée par l'énoncé mène à la solution, l'analogie de simulation est facilitatrice alors que lorsque la simulation n'est pas praticable pour atteindre la solution, l'analogie de simulation devient obstructive. Une recherche de Schliemann et al. (1998) illustre ce phénomène. Des adolescents brésiliens qui font du commerce de rue mais n'ont pas été scolarisés sont invités à répondre pour la moitié d'entre eux au problème « Quel est le prix de 3 objets à 50 cruzeiros ? » et pour l'autre moitié « Quel est le prix de 50 objets à 3 cruzeiros ? ». Selon le cadre A-S³, ces deux énoncés ont le même statut facilitateur sur le plan des analogies de substitution et de scénario. En effet, il s'agit d'une réplique qui se prête à une addition répétée, ce qui inscrit l'énoncé à l'intérieur du domaine de validité de l'analogie de substitution. L'analogie de scénario est facilitatrice également car il s'agit de la recherche du prix d'un achat groupé. Pourtant ces deux problèmes diffèrent grandement par leur difficulté, ce dont l'analogie de simulation permet de rendre compte. En effet, la simulation mentale est efficace dans le premier cas pour aboutir à la solution ($50+50+50=150$) alors qu'elle ne l'est pas dans le second ($3+3+3+\dots=?$). De fait, 75% des adolescents trouvent la solution dans le premier cas et 0% dans le second. Même si des adultes qui ont été scolarisés sont tout à fait en mesure de résoudre les problèmes en faisant appel aux opérations arithmétiques, il arrive qu'ils les résolvent par simulation mentale lorsque cette dernière est efficace (Gvozdic & Sander, 2018), ce qui se justifie si cette stratégie est perçue comme la plus directe et si c'est la première qui vient à l'esprit.

Le même phénomène s'observe parmi les problèmes à structure additive. Ainsi, les énoncés « Pierre a 15 billes. Il en perd 3 à la récréation. Combien lui en reste-t-il ? » et « Pierre a 15 billes. Il en perd 12 à la récréation. Combien lui en reste-t-il ? » sont supposés être de difficultés différentes en dépit du fait que pour l'un et l'autre les analogies de substitution et de scénario sont facilitatrices (recherche d'un reste et scénario de perte de billes). En effet, la simulation mentale est favorable pour le premier énoncé en ôtant 3 de 15 (comptage à rebours de 3), mais défavorable dans le second car il faudrait alors ôter mentalement 12 de 15 (comptage à rebours de 12) ce qui est coûteux et requiert un contrôle difficile à assurer. Nous montrons (Brissiaud & Sander, 2010 ; voir aussi Gvozdic & Sander, 2017) que jusqu'en classe de CE2 l'efficacité ou non de la simulation mentale est un facteur déterminant : les performances qui vont du simple au double selon que l'analogie de simulation est facilitatrice, c'est-à-dire que la simulation mentale seule mène à la solution, ou qu'elle est obstructive, c'est-à-dire qu'elle est trop coûteuse pour être mise en œuvre, auquel cas il est nécessaire de faire appel aux propriétés des opérations arithmétiques. L'efficacité ou non de la simulation mentale module plus la difficulté que l'appartenance à tel ou tel item d'une typologie de problèmes à structure additive ou que les effets de taille de nombres. Par exemple, parmi les quatre énoncés suivants, « 1/ Nicolas va en récréation avec 27 billes. Pendant la récréation, il gagne des billes et maintenant il en a 31. Combien de billes Nicolas a-t-il gagnées ? ; 2/ Nicolas va en récréation avec 31 billes. Pendant la récréation, il perd 27 billes. Combien de billes reste-t-il à Nicolas ? ; 3/ Nicolas va en récréation avec 4 billes. Pendant la récréation, il gagne des billes et maintenant il en a 31. Combien de billes Nicolas a-t-il gagnées ? ; 4/ Nicolas va en récréation avec 31 billes. Pendant la récréation, il perd 4 billes. Combien de billes reste-t-il à Nicolas ? », le premier et le quatrième sont résolus par 75% des élèves de CE1 alors que le deuxième et le troisième par seulement 40% d'entre eux. Parmi les problèmes faciles comme parmi les difficiles on trouve des énoncés de recherche de gain et de recherche de reste, ainsi que des énoncés avec des grands nombres et des énoncés contenant un petit nombre ; le facteur discriminant est le fait que l'analogie de simulation soit facilitatrice ou non. Les mêmes effets s'observent avec des énoncés de problèmes à structure multiplicative tels que « 1/ Dans un paquet de 200 images, on fait des tas de 50 images. Combien y a-t-il de tas ? ; 2/ On partage 200 images en 50 tas. Combien y a-t-il d'images dans chaque tas ? ; 3/ On partage 200 images en 4 tas. Combien y a-t-il d'images dans chaque tas ? ; 4/ Dans un paquet de 200 images, on fait des tas de 4 images. Combien y a-t-il de tas ? », où recherche de taille ou de nombre de parts, ainsi que les différentes configurations de tailles de nombre se trouvent répartis parmi les problèmes faciles (le 1 et le 3 résolus par 75% des écoliers de CE1, avant même toute étude de la division) et parmi les problèmes difficiles (le 2 et le 4, 20% de réussite). L'efficacité de la simulation mentale est là encore le facteur discriminant sur le plan de la difficulté de résolution.

La possibilité de dissociation des trois formes d'analogie peut-être illustrée par les quelques exemples suivants. Ainsi, l'analogie de substitution n'est pas facilitatrice pour « Pierre a 3 billes. Il en gagne à la récréation. Maintenant il en a 15. Combien en a-t-il gagnées ? » car il ne s'agit pas d'une recherche de reste ; l'analogie de scénario est en revanche facilitatrice pour cet énoncé car il s'agit d'un scénario de gain de billes ; l'analogie de simulation n'est quant à elle pas facilitatrice car elle encourage à compter en avançant de 3 à 15. En ce qui concerne, la résolution du problème « Paul a 3 oranges. Il reçoit 10 pommes par orange. Combien de pommes reçoit-il ? », celle-ci est soutenue par l'analogie de substitution car il y a une réplique (succession de groupes de 10 pommes), mais pas par l'analogie de scénario car les pommes et oranges n'orientent pas vers un scénario d'échanges, tandis que l'analogie de simulation ($10+10+10$) est facilitatrice. Concernant l'énoncé « Combien de verres de 0,5 l peut-on remplir avec une carafe de 2l ? », on reconnaîtra que les

analogies de scénario et de simulation sont facilitatrices mais que le problème se situe hors du domaine de validité de l'analogie de substitution.

La résolution aisée d'un problème résoluble par simulation mentale et la difficulté rencontrée par le même élève si la simulation mentale n'est pas efficiente sont des indicateurs que l'élève résout le problème en faisant appel à une compréhension générale de la situation et par la mise en œuvre de stratégies informelles, efficaces dans des contextes spécifiques, mais inadaptées pour faire face à l'ensemble des situations faisant intervenir la notion mathématique, et ne relevant pas d'une conceptualisation satisfaisante de cette notion. En revanche, la résolution d'un énoncé pour lequel la simulation mentale ne permet pas d'aboutir au résultat est indicatrice de conceptualisation de propriétés mathématiques.

IV. DES INTERVENTIONS POUR DEVELOPPER LES NOTIONS

Comme les cas envisagés l'illustrent, les élèves sont souvent en mesure de mettre en œuvre les stratégies de résolution adaptées, mais sont limités dans les contextes dans lesquels ils perçoivent cette possibilité de mise en œuvre. Par exemple, un élève fera une soustraction dans le cas d'un énoncé de recherche de reste mais pas dans celui d'un énoncé de recherche de la valeur qui a été ôtée (DEPP, 2014) ; ou encore il trouvera une stratégie directe dans un contexte ordinal mais pas dans un contexte cardinal (Mengue, Richard & Sander, 2015) ; ou encore, il trouvera une solution en comptant à rebours dans un certain contexte mais pas dans un autre alors que le même comptage à rebours aurait mené à la solution (Brissiaud & Sander, 2010 ; Gvozdic & Sander, 2017). Ainsi, il apparaît que les compétences stratégiques sont régulièrement présentes mais dans des contextes limités aux cas où les analogies intuitives sont facilitatrices alors qu'elles seraient adaptées dans des contextes plus larges. La difficulté est que les élèves se fondent sur un codage situationnel trop spécifique par rapport aux notions mathématiques concernées ; lorsque deux situations relèvent de la même notion sur le plan scolaire, la perception d'une analogie entre elles ne va pas de soi.

Cela oriente vers des enseignements destinés à susciter la perception de l'analogie qui fonde les notions scolaires et justifient par exemple de regrouper sous le label « problème de soustraction » une diversité de scénarios, qui, sur le plan des connaissances quotidiennes évoquées, ont peu en commun. Il s'agit donc d'intervenir pour faire relier et rendre possible la mise en œuvre dans des contextes plus larges qu'initialement des compétences présentes au départ dans le champ restreint des analogies intuitives. C'est l'enjeu du recodage sémantique (Hofstadter & Sander, 2013 ; Sander, 2016 ; Sander & Richard, 2017). L'objectif du recodage sémantique est de faire apparaître la ressemblance profonde entre deux situations qui, en dépit des différences sémantiques, sont analogues sur le plan des notions disciplinaires. Son objet est de faire dépasser une compréhension spontanée (« intuitive »), fondée sur les seules connaissances quotidiennes. Il consiste à attribuer à une situation des propriétés usuellement attribuées à une autre et incite à faire abstraction des différences entre situations et favorise le développement d'une conception plus abstraite qui fonde l'analogie et rend accessible une stratégie qui n'aurait pas été envisagée avec le codage spontanée de la situation. Il peut s'agir de voir différemment la notion même, par exemple d'associer une soustraction pas simplement à une recherche de reste mais aussi à une recherche d'écart. Il peut aussi s'agir de proposer une grille de lecture différente d'un énoncé afin de le lier à la notion telle qu'elle est conçue (Sander & Richard, 2017).

Par exemple, le problème « Paul avait des billes. Il en perd 3 pendant la récréation et maintenant il lui en reste 5. Combien de billes avait-il avant la récréation ? » est massivement

échoué même en CE1. Il se situe en dehors du domaine de validité de l'analogie de substitution « addition c'est ajouter ». Toutefois un travail en classe peut favoriser un recodage sémantique qui va orienter l'élève vers une réinterprétation de l'énoncé qui rendra envisageable l'addition en montrant l'analogie avec un problème d'ajout. Le raisonnement qui sous-tend la mise en œuvre d'une addition est difficile à expliquer dans le problème original pour justifier que c'est en additionnant ce qui reste à ce que l'on a perdu que l'on trouve ce qu'il y avait à l'origine. L'introduction de « situations pivots », dénommées ainsi parce qu'elles se prêtent aisément à plusieurs codages, peut favoriser la perception de l'analogie entre problèmes qui paraissent au départ très différents, et faciliter le transfert de stratégie. Par exemple, un énoncé tel que « Pierre va à l'école avec des billes bleues et des billes rouges. A la récréation, il perd ses 39 billes rouges. Maintenant il lui reste ses 4 billes bleues. Combien de billes Pierre avait-il avant la récréation ? » se perçoit aisément d'une part comme une recherche de la valeur initiale, connaissant la valeur de la perte et la valeur finale, mais aussi comme la recherche de la totalité (le nombre de billes qu'avait Pierre le matin), connaissant la quantité perdue (les billes rouges) et la quantité restante (les billes bleues), ce qui constitue un recodage de la situation et le rend similaire à un problème d'addition canonique dans lequel deux parties sont données afin de trouver le tout. Les problèmes pivots s'avèrent largement mieux réussis que les problèmes classiques et rendent possible la mise en œuvre de stratégies de résolution ignorées dans les formulations standards des énoncés (de Longuemar & Sander, 2016). Nous avons montré qu'en faisant travailler des élèves de CE1 et de CE2 en classe spécifiquement sur des séries de problèmes pivots (Sander & Fort, 2014), leurs progrès étaient plus importants que s'ils travaillaient sur des problèmes classiques, l'hypothèse étant qu'un recodage était suscité par le travail sur les problèmes pivots et qu'il pouvait ensuite s'appliquer aux énoncés classiques.

Le recodage sémantique peut également être suscité par la comparaison d'énoncés en travaillant avec les élèves à la mise en place d'un codage commun qui rend perceptible les analogies existant entre les énoncés. Il est ainsi possible de faire acquérir à des élèves d'école primaire des points de vue pourtant « invisibles » spontanément à des adultes, dans des classes banales (Gamo, Richard & Sander, 2010) ou en éducation prioritaire (Gamo, Nogry & Sander, 2014). Le recodage sémantique peut être suscité également par les situations introduites et les activités en classe associées, avec la perspective que les élèves développent une appétence particulière pour la recherche de points de vue alternatifs susceptibles de leur faire voir le problème d'une manière qui les aide à le résoudre. Les élèves apprennent par exemple à percevoir que lors de la résolution d'un problème tel que « Madame Durand achète dans une librairie pour chacun de ses 5 enfants, 3 stylos rouge, 6 stylos bleu et 4 stylos vert. Combien de stylos achète-t-elle en tout ? », le développement et la factorisation ne constituent pas simplement deux algorithmes concurrents mais découlent de deux codages alternatifs d'une même situation qui conduisent à des stratégies distinctes. Dans le cas du développement, c'est le codage par couleur qui est privilégié en procédant à l'addition successive des stylos de chaque couleur : « $5 \times 3 + 5 \times 6 + 5 \times 4$ ». Dans le cas de la factorisation, le codage par objets est privilégié en procédant d'abord à l'addition des types de stylo : « $5 \times (3 + 6 + 4)$ ». Un tel travail de repérage des différents codages possibles auprès d'élèves des deux dernières années d'école primaire (Scheibling-Sève, Sander & Pasquinnelli, 2017) a conduit à des progrès importants concernant la mise en œuvre de la factorisation et le fait de pouvoir envisager deux stratégies de résolution pour un même énoncé.

V. CONCLUSION

Sur le plan des relations entre les connaissances quotidiennes et les notions mathématiques, nous espérons, à travers la cadre A-S³, avoir montré trois formes d'influence. La première, appréhendée par les analogies de substitution, relève de la conception de la notion mathématique elle-même, qui n'est pas directe mais ancrée sur des concepts quotidiens : ainsi, si l'on se cantonne aux quatre opérations arithmétiques, l'opération de soustraction est conçue comme la recherche de la quantité subsistante dans un contexte où une quantité initiale est connue et où une action conduit à la faire décroître ; l'opération d'addition est conçue comme la recherche d'une quantité résultant d'un ajout, que cet ajout soit obtenu par réunion de deux quantités de même nature ou comme un accroissement d'une quantité initiale connue ; l'opération de multiplication s'appuie sur la réplication et est conçue comme un ajout successif de répliques d'une certaine entité quantifiée ; l'opération de division est conçue comme la recherche de la taille d'une part dans le cadre d'un partage équitable.

La deuxième, appréhendée par les analogies de scénario, concerne les scénarios induits par les entités et les contextes dans lesquels ces entités sont mises en scène dans un énoncé de problème. Par exemple, l'introduction de collatéraux d'une même catégorie générale dans un énoncé suscite des scénarios dans lesquels ces entités ont des statuts symétriques alors que l'introduction d'entités qui entretiennent des relations fonctionnelles telles qu'une relation de contenance suscite des scénarios où les entités ont un rôle asymétrique et conforme à cette relation fonctionnelle.

La troisième, appréhendée par les analogies de simulation, concerne la manière dont la représentation de la situation décrite par l'énoncé permet une résolution par simple simulation mentale. Lorsque cette dernière est efficiente, elle est privilégiée par rapport à l'usage de représentations arithmétiques, ce qui conduit à ce qu'il soit par exemple plus facile de soustraire une petite quantité d'une grande dans un cadre de recherche de reste que de recherche de gain et à l'inverse qu'il soit plus facile de soustraire une grande quantité d'une autre pour obtenir un résultat peu élevé dans un cadre de recherche de gain que de recherche de reste : l'efficacité de la simulation mentale contraint la stratégie mise en œuvre, et une stratégie arithmétique est proposée moins systématiquement lorsqu'une simple simulation mentale conduit à la solution.

Les travaux qui portent sur analogies intuitives indiquent donc qu'elles sont présentes de manière précoce chez les élèves. Ils indiquent également leur persistance après enseignement et à l'âge adulte, notamment parmi une population enseignante, en particulier pour les analogies de substitution et de scénario, ce qui est conforme aux connaissances sur la psychologie des concepts, qui se développent en restant ancrés sur des conceptions quotidiennes (Fischbein, 1987 ; Lakoff & Nunez, 2000 ; Lautrey, Sander, Rémi-Giraud & Tiberghien, 2008 ; Hofstadter & Sander, 2013). Comme toute catégorie de situations, elles sont sujettes au phénomène de typicalité, autrement dit à l'existence de prototypes des catégories et de cas atypiques, pour lesquels l'appartenance catégorielle est moins évidente. Elles sont également sujettes au phénomène d'extension catégorielle par analogie qui oriente le développement conceptuel (Hofstadter & Sander, 2013; Sander, 2016b, 2017). Ces travaux invitent à une démarche qui oriente le choix des exemples et des situations choisis en classe afin de ne pas accentuer encore l'ancrage des conceptions intuitives.

Le cadre A-S³ peut ainsi être mobilisé afin de se prononcer sur la difficulté de résolution d'un problème, afin de distinguer les cas « d'expertise apparente » de compréhension plus profonde des notions, de construire des évaluations, de former des

enseignants, de développer des progressions d'apprentissage. Les trois formes d'analogie identifiées sont dissociables les unes des autres dans la mesure où toutes les configurations en termes de « facilitateur/obstructif » peuvent être observées. Cette possibilité de dissociation n'exclut pas l'existence d'interdépendances, indiquant que certaines configurations sont plus aisément constructibles que d'autres. Les représentations initiales des élèves s'avèrent orientées par des catégorisations par analogie, qui rattacheront les énoncés de problème ou les notions mathématiques incarnées dans ces énoncés à des catégories mentales préexistantes ; ces rattachements contraindront leurs interprétations, les stratégies mises en œuvre et les transferts d'apprentissage envisageables. Des progressions d'apprentissage peuvent être élaborées afin de faire évoluer les représentations des élèves, notamment par des recodages sémantiques, afin de limiter l'influence des analogies intuitives lorsqu'elles font obstacle. De tels recodages sémantiques favorisent la perception d'analogies qui fondent les notions scolaires et peuvent favoriser un développement de la conceptualisation.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- AMPERE, A.-M. (1806). Recherches sur quelques points de la théorie des fonctions dérivées. *Journal de l'École polytechnique*, 13, 148-191.
- BAROODY, A.J. (1999). Children's relational knowledge of addition and subtraction. *Cognition and Instruction*, 17(3), 137-175.
- BASSOK, M., CHASE, V.M. & MARTIN, S.A (1998). Adding and Oranges: Alignment of Semantic and Formal Knowledge. *Cognitive Psychology*, 35, 99-134.
- BASSOK, M., WU, L.L. & OLSETH, K.L. (1995). Judging a book by its cover: Interpretative effects of content on problem-solving transfer. *Memory and Cognition*, 23, 354-367.
- BELL, A., SWANN, M. & TAYLOR, G. (1981). Choice of operation in verbal problems with decimal numbers. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 399-420.
- BRISSIAUD, R. & SANDER, E. (2010). Arithmetic word problem solving: a situation strategy first framework. *Developmental Science*, 13 (1), 92-101.
- CARPENTER, T.P., ANSELL, E., FRANKE, M.L., FENNEMA, E. & WEISBECK, L. (1993). Models of problem solving: a study of kindergarten children's problem-solving processes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24, 428-441.
- DUVIGNAU, K. (2003) Métaphore verbale et approximation. In K. Duvignau, O. Gasquet et B. Gaume (Eds.), *Regards croisés sur l'analogie* (pp. 869-881). Paris : Hermès Sciences
- FISCHBEIN, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: An Educational Approach*. Reider: Dordrecht.
- FISCHBEIN, E. (1989). Tacit models and mathematical reasoning, *For the Learning of Mathematics*, 9, 9-14.
- FISCHBEIN, E., DERI, M., NELLO, M. S. & MARINO, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16, 3-17.
- GAMO, S., NOGRY, S. & SANDER, E. (2014). Apprendre à résoudre des problèmes en favorisant la construction d'une représentation alternative chez des élèves scolarisés en éducation prioritaire, *Psychologie française*, 59(3), 215-229.
- GAMO, S. (2009). *Rôle des effets de contenu dans la catégorisation des problèmes arithmétiques à plusieurs solutions: Recodage sémantique et transfert de procédures*. Thèse de doctorat, Université Paris 8.
- GAMO, S., SANDER, E. & RICHARD, J-F. (2010). Transfer of strategies by semantic recoding in arithmetic problem solving. *Learning and Instruction*, 20, 400-410.
- GICK, M. L. & HOLYOAK, K. J. (1983). Schema induction and analogical transfer. *Cognitive Psychology*, 15, 1-38.
- GREER, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.276-295). New York: Macmillan Publishing Company.
- GROS, H., THIBAUT, J.-P. & SANDER, E. (2015). *Robustness of semantic encoding effects in a transfer task for multiple-strategy arithmetic problems*. In Noelle, D. C., Dale, R., Warlaumont, A. S., Yoshimi, J., Matlock, T., Jennings, C. D. & Maglio, P. P. (Eds.), *Proceedings of the 37th Annual Meeting of the Cognitive Science Society* (pp. 818-823). Austin, TX: Cognitive Science Society.
- GROS, H., SANDER, E. & THIBAUT, J-P. (2016). "This problem has no solution": when closing one of two doors results in failure to access any. In A., Papafragou, D., Grodner, D., Mirman, & J.C., Trueswell, (Eds.) (2016). *Proceedings of the 38th Annual Conference of the Cognitive Science Society* (pp. 1271-1276). Austin, TX: Cognitive Science Society.
- GVOZDIC, K. & SANDER, E. (2017). Solving additive word problems: Intuitive strategies make the difference. In G. Gunzelmann, A. Howes, T. Tenbrink & E. Davelaar (Eds.) *Proceedings of the 39th Annual Meeting of the Cognitive Science Society* (pp. 2150-2155). Austin, TX: Cognitive Science Society.
- GVOZDIC, K. & SANDER, E. (2018). When intuitive conceptions overshadow pedagogical content knowledge: Teachers' conceptions of students' arithmetic word problem solving strategies. *Educational Studies in Mathematics*, 98, 157-175.

- HERMITE, C. (1893/1905). Lettre à Stieltjes. In B. Baillaud et H. Bourget (Eds.), *Correspondance d'Hermite et de Stieltjes*, 2 (pp. 317-319). Paris : Gauthier-Villars
- HOFSTADTER, D. & SANDER, E. (2013). *L'Analogie : Cœur de la pensée*. Paris: Odile Jacob.
- HUMMEL, J.E. & HOLYOAK, K.J. (1997). Distributed representations of structure: a theory of analogical access and mapping, *Psychological Review*, 104, 427-466.
- JOHNSON-LAIRD, P.N. (1983). *Mental models : Towards a cognitive science of language, inference, and consciousness*. Cambridge, MA : Harvard University Press/ Cambridge. UK : Harvard University Press.
- JOHNSON-LAIRD, P.N. (2006). *How We Reason*. Oxford University Press.
- LAKOFF, G. & JOHNSON, M. (1980). *Metaphors we live by*. Chicago, IL: University of Chicago Press.
- LAKOFF, G. & JOHNSON, M. (1999). *Philosophy In the Flesh: The Embodied Mind And Its Challenge To Western Thought*. New York, NY: Basic Books.
- LAKOFF, G. & NUNEZ, R. (2000). *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*. New York: Basic Books.
- LAUTREY, J., RÉMI-GIRAUD, S., SANDER, E. & TIBERGHEN, A. (2008). *Les connaissances naïves*. Paris, Armand Colin.
- LEARY, D. E. (1990). Psyche's muse: the role of metaphor in the history of psychology. In D. E. Leary (Ed.), *Metaphors in the history of psychology* (pp. 1-78). New York: Cambridge University Press.
- DE LONGUEMAR & G., SANDER, E. (2016). *Learning to overcome inadequate intuitive strategies in arithmetic word problem solving*. Communication affichée présentée à la Budapest CEU Conference on Cognitive Development, Budapest; 01/2016
- MENGUE, E., RICHARD, J-F. & SANDER, E. (2015). Classification des problèmes additifs : statut intermédiaire de la transformation relativement au complément et à la comparaison, *L'Année Psychologique*, 115 (4), 497-531.
- NOVICK, L. R. (1988). Analogical transfer, problem similarity, and expertise. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 14, 510-520.
- POINCARÉ, H. (1908). *Science et méthode*. Paris : Flammarion.
- RAMSCAR, M. J. A. & PAIN, H. G. (1996). Can a real distinction be made between cognitive theories of analogy and categorisation? In S.E. Cozzens & T.F. Gieryn (Eds.) *Proceedings of the 18th annual conference of the cognitive science society* (pp. 346-351). New Jersey: Lawrence Erlbaum.
- RICHARD, J-F. & SANDER, E. (2015). *Quelles relations établir entre la résolution de problèmes et l'introduction des opérations et de leurs propriétés ? Faut-il systématiquement relier les enseignements à des situations de la vie réelle ou concevoir des situations ad hoc ?* Rapport technique pour la conférence de consensus « Nombres et opérations : premiers apprentissages à l'école primaire » CNESCO, novembre 2015.
- RICHLAND, L. E. & SIMMS, N. (2015). Analogy, higher order thinking, and education. *Cognitive Science*, 6(2), 177-192.
- RILEY, M. S., GREENO, J. G. & HELLER, J. I. (1983). Development of children's problem solving ability in arithmetic. In H. P. Ginsberg (ed.), *The Development of Mathematical Thinking* (pp. 153–196). New York: Academic Press.
- ROSS, B.H. (1989). Distinguishing types of superficial similarities: Different effects on the access and use of earlier problems. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, & Cognition* (15), 456-468.
- SANDER, E. (2007). Manipuler l'habillage d'un problème pour évaluer les apprentissages, *Bulletin de psychologie*, 60, 119-124.
- SANDER, E. (2008). Les connaissances naïves en mathématiques. In J. Lautrey, S. Rémi-Giraud, E. Sander & A. Tiberghien (Dir). *Les connaissances naïves* (pp. 57-102). Paris : Armand Colin.
- SANDER, E. (2016a). *Analogies, éducation, conceptions du maître et de l'élève*. Séminaire du Groupe Compas «Education et Cognition », Ecole Normale Supérieure Ulm, 15 février 2016, Paris, France
- SANDER, E. (2016b). *L'impératif analogique*. Séminaire international de l'IFE Apprendre et Faire apprendre : perspectives internationales, « L'analogie. Quelles conceptions et quelles conséquences éducatives ? », 12e session des 29 et 30 juin 2016, Lyon, France
- SANDER, E. (2016c). Enjeux sémantiques pour les apprentissages arithmétiques. *Bulletin de Psychologie*, 546(6), 463-469.
- SANDER, E. (2017). Des concepts quotidiens pour développer des concepts scientifiques : une perspective éducative. *L'homme dans le monde de l'incertitude. Pour le 120e anniversaire de la naissance de Lev Vygotsky* (pp.14-20). Moscou : FIRO.
- SANDER, E. (sous-presses). Transformer l'inconnu par le connu. Constructions et interventions analogiques pour les apprentissages scolaires. In J.-M. Barbier & M. Durand (Dir.), *Représenter/transformer : Débats en analyse des activités* (pp.259-279). Paris : L'Harmattan.
- SANDER, E. & FORT, C. (2014). *Semantic ambiguity as basis for promoting learning in the case of arithmetic problem solving*. Proceedings of ICAP 2014, 28th international congress of applied psychology, 8-13 July 2014, Paris.
- SANDER, E. & RICHARD, J-F. (2017). Les apprentissages numériques. In R. Miljkovitch, F. Morange-Majoux et E. Sander (Dir.). *Traité de Psychologie du Développement* (pp. 251-258). Paris : Masson.
- SCHEIBLING-SÈVE, C., SANDER, E. & PASQUINELLI, E. (2017). *A recategorization method to improve pupils' cognitive flexibility*. Budapest CEU Conference on Cognitive Development. Budapest, Hongrie, 6-8 janvier.
- SCHLIEMANN, A.D., ARAUJO, C., CASSUNDÉ, M.A., MACEDO, S. & NICÉAS, L. (1998). Use of multiplicative commutativity by school children and street sellers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29, 422–435.

- TIROSH, D. & GRAEBER, A. O. (1991). The effect of problem type and common misconceptions on preservice elementary teachers' thinking about division. *School Science and Mathematics*, 91(4), 157–163.
- TRENCH, M. & MINERVINO, R. A. (2015). The role of surface similarity in analogical retrieval: Bridging the gap between the naturalistic and the experimental traditions. *Cognitive Science*, 39, 1292-1319.
- TURNER, M. (1988). Categories and analogies. In D. H. Helman (Ed.), *Analogical Reasoning* (pp.3-24). Kluwer Academic Publishers.
- VERGNAUD, G. (1981/1994). *L'enfant, la mathématique et la réalité : problèmes de l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire*. Berne : Peter Lang.
- VERGNAUD, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. In T.P. Carpenter, J.M. Moser and T.A. Romberg (Eds.) *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (pp. 39-59). Hillsdale: Erlbaum.
- VERGNAUD, G. (1988). Multiplicative structures. In H. Hiebert and M. Behr (Eds.) *Research Agenda in Mathematics Education: Number concepts and operations in the Middle Grades* (pp. 141-161). Hillsdale : Erlbaum.