LE TRAVAIL HORS LA CLASSE DE COLLEGIENS : LE CAS DES EQUATIONS

Stéphane **SIREJACOB**

LDAR, Université Paris Diderot 7

stephanesirejacob@hotmail.fr

Résumé

Cet article synthétise notre travail de thèse (Sirejacob, 2017) et s'articule autour de deux axes majeurs : d'une part, l'étude personnelle hors la classe de collégiens, sujet d'actualité peu abordé en didactique des mathématiques ; d'autre part, l'enseignement des équations du premier degré à une inconnue en collège, thème agrégeant plusieurs notions d'algèbre élémentaire et source de difficultés pour les élèves. Dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1999), nous réiterrogeons ces difficultés d'un point de vue institutionnel : nous faisons l'hypothèse que certains besoins d'apprentissages, tant relatifs aux gestes d'étude hors la classe que disciplinaires (équations), sont implicitement laissés à la charge des élèves ou ignorés de l'institution (Castela, 2008), alors que ces apprentissages sont nécessaires à la construction d'un rapport personnel idoine aux équations. En appui sur une organisation mathématique épistémologique de référence (Bosch et Gascon, 2005) relative aux équations du premier degré et sur une synthèse de travaux de recherche sur l'étude personnelle, nous construisons un modèle de l'étude personnelle et analysons les effets de la mise en œuvre d'un Parcours d'Etude et de Recherche sur les apprentissages de collégiens.

Mots clés

Travail hors la classe, travail personnel, équations

I. ENJEUX ET QUESTIONS INITIALES SUR LE TRAVAIL HORS LA CLASSE

1. Un travail hors la classe nécessaire aux apprentissages et pourtant peu explicitement organisé par l'institution

Les acteurs du système éducatif considèrent l'étude personnelle hors la classe comme un déterminant de la réussite scolaire. Celle-ci est fréquemment décrite en termes de manque voire d'inexistence pour expliquer certains échecs. La nécessité de l'accomplissement de cette étude personnelle provient de la poursuite de deux objectifs : d'une part, faire rencontrer en classe à tous les élèves une liste d'objets de savoirs du programme officiel dans un temps limité et incompressible, d'autre part provoquer les apprentissages de tous les élèves alors que ces derniers les construisent à des vitesses différentes avec des besoins bien distincts. Il existe ainsi une tension entre l'avancée du temps didactique, c'est-à-dire le temps « officiel » rythmé par la liste de savoirs à rencontrer, et l'avancée du temps praxique, c'est-à-dire le temps nécessaire aux élèves pour construire les apprentissages en jeu dans l'ensemble des tâches qu'ils rencontrent dans leur parcours scolaire (Castela, 2007, 2008).

Les élèves qui ont le plus besoin d'accomplir une étude personnelle hors la classe sont ceux pour qui l'avancée du temps didactique n'a pas coïncidé en classe avec celle du temps nécessaire aux apprentissages. Or bien souvent, il s'agit d'élèves dont les besoins d'apprentissages sont les plus importants, et qui sont le moins à même d'assumer l'autonomie nécessaire pour accomplir cette étude personnelle.

Les textes officiels, dans leur proposition de dispositifs divers tels que l'aide aux devoirs ou l'accompagnement dit personnalisé, semblent très peu prendre en compte les spécificités des mathématiques pour en organiser l'étude personnelle et se limitent la plupart du temps à des préconisations générales d'ordre méthodologique.

2. Contexte de recherche et questions initiales

Cette dernière remarque justifie en partie notre choix de spécifier notre travail sur un objet de savoir, les équations du premier degré à une inconnue, nos recherches s'inscrivant dans le champ de la didactique des mathématiques.

Le choix de centrer notre travail sur les équations du premier degré s'explique aussi par le fait que nos recherches se placent dans la continuité de recherches antérieures relatives aux expressions algébriques, entres autres celles de Grugeon-Allys, Chenevotot-Quentin et Delozanne (2012) et Pilet (2012).

De plus, les équations, parce qu'elles agrègent plusieurs notions mathématiques anciennes et nouvelles et sont donc susceptibles d'accentuer les tensions entre avancées respectives des temps didactique et praxique, constituent un thème particulièrement intéressant pour spécifier nos recherches.

Nos questions initiales sont les suivantes : en quoi consiste l'étude personnelle hors la classe ? Quelle explicitation auprès des élèves et quelle organisation en classe sont réalisées par les enseignants ?

Nous précisons dans ce qui suit les cadres théoriques et les principaux éléments méthodologiques utilisés pour traiter et faire évoluer ces questions (section II), puis nous présentons un modèle de l'étude personnelle (section III) et une organisation mathématique épistémologique de référence relative aux équations du premier degré (section IV), points d'appui d'une construction et d'une mise en œuvre d'un Parcours d'Etude et de Recherche (section V). Nous concluons avec notamment quelques éléments de perspective (section VI).

II. CADRES THEORIQUES, PROBLEMATIQUE ET PREMIERS ELEMENTS METHODOLOGIQUES

1. Une approche multidimensionnelle

Nous avons réinterrogé et fait évoluer nos questions initiales au prisme d'une approche multidimensionnelle dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1999) pour prendre en compte le savoir mathématique et sa transposition didactique dans diverses institutions, ainsi que pour disposer d'un modèle de l'activité mathématique et de l'organisation didactique du savoir.

Rappelons brièvement que dans ce cadre théorique, on suppose que l'activité mathématique d'un élève procède de *praxéologies* : l'élève doit réaliser des *tâches* mathématiques relevant de *types de tâches*, à l'aide de méthodes ou de moyens appelés *techniques*, techniques justifiées par des discours rationnels appelés *technologies*, eux-mêmes justifiés à un niveau supérieur par des *théories*. Nous illustrerons ceci par des exemples dans la suite.

Nous avons également eu recours à un cadre théorique secondaire, la théorie des situations didactiques, pour pouvoir obtenir une autre granularité dans nos analyses lorsque nous en avons eu besoin.

2. Hypothèses de travail et problématique de recherche

Les deux principales hypothèses de travail que nous posons sont les suivantes : le décalage entre avancée du temps didactique et avancée du temps praxique, et l'existence d'enjeux d'apprentissages non pris en charge explicitement par l'institution, sont potentiellement à l'origine de la construction par les élèves de rapports personnels aux équations non idoines.

Sous ces hypothèses, nous formulons notre problématique ainsi : comment l'enseignant peut-il organiser l'étude des équations en classe de quatrième pour favoriser une évolution des rapports personnels des élèves aux équations vers des rapports idoines ? Quels gestes d'aide à l'étude peut-il accomplir pour les accompagner hors la classe à réaliser une étude personnelle favorisant les apprentissages ?

3. Hypothèses de recherche et éléments méthodologiques

Nous émettons deux hypothèses de recherche principales. En classe de quatrième en France (et désormais en fin de cycle 4 dans les programmes actuels), nous supposons que la construction par les élèves de rapports personnels idoines aux équations du premier degré est favorisée d'une part par la mise en œuvre d'une certaine organisation explicite de l'étude personnelle en classe et hors classe par l'enseignant ; d'autre part par la mise en place d'un Parcours d'Etude et de Recherche sur les équations prenant en compte ces besoins, en appui sur les principaux éléments épistémologiques relatifs aux équations.

Pour traquer les enjeux d'apprentissages non explicitement pris en charge par l'institution autour de l'étude personnelle et des équations, nous avons construit un modèle de l'étude personnelle (section III) et une organisation mathématique épistémologique de référence relative aux équations (section IV), que nous avons opérationnalisés pour analyser les savoirs à enseigner dans les programmes et les manuels, et les savoirs enseignés et appris en classe et hors classe, afin de repérer d'éventuels déficits praxéologiques.

Pour faire évoluer les rapports personnels des élèves aux équations vers des rapports idoines, nous avons ensuite construit et mis en œuvre un Parcours d'Etude et de Recherche dans une classe de quatrième d'un collège d'un réseau d'éducation prioritaire (section V).

III. UN MODELE DE L'ETUDE PERSONNELLE HORS LA CLASSE

1. Des travaux existants prenant peu en compte les spécificités d'un secteur d'étude et le rôle de l'institution

À partir d'une synthèse de travaux sur l'étude personnelle (entre autres : Milhaud 1998 ; Esmenjaud-Genestou, 2005 et 2006 ; Castela, 2002 et 2007 ; Félix, 2004 ; Rayou, 2008 ; Blochs, 2012 ; Farah, 2015) nous avons pu repérer plusieurs obstacles relatifs à l'organisation de cette dernière. En particulier, un obstacle majeur est la difficulté à définir explicitement en quoi consiste l'étude personnelle hors la classe et en particulier en mathématiques, comme nous l'avons déjà souligné plus haut. Les élèves, ne saisissant pas de contrat didactique explicite autour de cette étude personnelle, peuvent alors réaliser des gestes très variés. Certains travaux comme ceux de Félix (2004) ou Castela (2002) indiquent notamment que les élèves dits « en difficulté » accomplissent des gestes comme la simple relecture ou la mémorisation intensive et qui prennent peu en compte les spécificités de la discipline, tandis que les élèves dits « en réussite » parviennent à identifier des types de tâches et à leur associer des techniques et des technologies pour réaliser ces derniers, témoignant ainsi de connaissances sur le fonctionnement mathématique (Castela, 2000).

Dans la recension de travaux sur l'étude personnelle que nous avons réalisée, un faible nombre relevait de la didactique des mathématiques et prenait en compte les particularités de la discipline. Nous avons trouvé très peu de travaux qui simultanément mettent en relation les gestes enseignants avec les gestes des élèves, prennent en compte les spécificités de l'activité mathématique sur un thème donné et le rôle de l'institution dans l'organisation de l'étude. C'est pourquoi nous avons eu besoin d'élaborer un modèle de l'étude personnelle adapté à nos questions de recherche.

2. Une première étude exploratoire dans un collège REP

Eléments de contexte

Nous avons tout d'abord voulu vérifier expérimentalement les résultats des travaux de recherche sur l'étude personnelle, qui ne portaient pas simultanément et sur le collège et sur un thème donné.

Nous nous sommes rendu dans un collège d'un réseau d'éducation prioritaire. Nous avons filmé et nous sommes entretenu avec huit élèves en train d'accomplir leur étude personnelle hors la classe en mathématiques au cours d'une séquence sur le calcul d'expressions algébriques. Les deux enseignants avec qui nous avons travaillé ont eux-mêmes choisi les élèves interrogés selon une catégorisation classique, « bon », « moyen » et « en difficulté », suivant des critères non explicités.

Trois niveaux d'analyse pour l'étude exploratoire

Nous avons analysé les réponses selon trois niveaux. Un premier niveau porte sur les organisations mathématiques (abrégées OM par la suite) mobilisées par les élèves. Un deuxième niveau d'analyse est relatif aux gestes d'étude pour apprendre à construire et à articuler les OM. Enfin, suivant un troisième et dernier niveau d'analyse, nous avons cherché à mettre en relation les gestes d'étude des élèves avec les gestes d'aide à l'étude de leur professeur.

Les OM mobilisés par les élèves hors la classe

Nous donnons ici quelques exemples pour montrer comment nous faisons fonctionner la grille d'analyse précédemment décrite. Tous les prénoms ont été modifiés pour garantir l'anonymat des élèves et des enseignants.

Vincent, un élève dit « en difficulté », avait pour tâche hors la classe de développer une expression algébrique : $3 \times (a + 5)$. Voici ce qu'il a fait : « *J'ai fait trois fois… Enfin, a plus cinq… Donc ça fait cinq a fois trois. Donc du coup, ça fait quinze a.* » Autrement dit, Vincent a concaténé $a + 5$ en $5a$ avant de multiplier le tout par 5 pour finalement obtenir $15a$. Remarquons qu'en plus de cette réécriture incorrecte, Vincent n'explicite pas spontanément d'élément technologique pour justifier ses actions et qu'il ne contrôle pas son résultat, par exemple en s'appuyant sur la structure de l'expression ou en recourant à la substitution pour tester l'égalité $3 \times (a + 5) = 15a$.

Tamara, une élève dite « en réussite », parvient à réaliser correctement la même tâche que celle accomplie par Vincent : « *J'ai utilisé la distributivité. Ca fait… l'égalité… trois fois a plus trois fois cinq.* » Notons que Tamara justifie spontanément la technique employée par un discours technologique correct. Elle non plus toutefois ne vérifie pas la correction de son résultat.

De façon générale, sur les élèves interrogés, nous avons constaté que les élèves dits « en réussite » parvenaient à réaliser correctement les tâches et à expliciter des éléments de technique et de technologie, ce qui était moins le cas des élèves dits « en difficulté ». Nous avons également pu faire des premiers liens entre les OM enseignées en classe et celles mobilisées par les élèves hors la classe. Par exemple, nous avons noté tout à l'heure que les deux élèves ne contrôlaient pas leurs résultats ; nous relions cette observation au fait que leur enseignant n'avait pas, en classe, proposé de moyens de contrôle.

Les gestes pour apprendre à construire les OM accomplis par les élèves hors la classe

Voici une deuxième série d'exemples qui concernent le deuxième niveau d'analyse de notre grille. Nous avons posé aux élèves des questions toujours en lien avec les organisations mathématiques mais cette fois-ci sur la manière d'apprendre à les construire et à les articuler. L'une des questions portait sur les types de tâches que les élèves pensaient devoir affronter le jour de l'évaluation.

À la question « Qu'y aura-t-il comme type d'exercices le jour de l'évaluation ? », Marianne, une bonne élève, répond : « ***Réduire****. […] Il y a… je sais plus comment ça s'appelle, mais en gros, c'est l'****agrandir****. […]* ***Calculer*** *[…] Si c'est trois a, on va faire trois fois le nombre qui est donné.* » Marianne a été capable de nous donner une liste assez complète de types de tâches, accompagnée de surcroît d'exemples de tâches et d'une résolution correcte de ces tâches.

Géraldine, en revanche, qui est une élève dite « moyenne », a montré moins d'aisance à expliciter les types de tâches : « *Il y aura par exemple… euh… par exemple les x […]* ***faire les x*** *[…] il y aura par exemple les…* ***a égal à deux, a égal cinq*** ». Elle n'a su ni reconnaître la totalité des types de tâches lorsque nous lui en présentions, ni réaliser ces types de tâches.

Cette capacité à identifier des types de tâches, présentée comme un levier dans certains travaux de recherche en didactique (Castela 2000 ; Castela 2007 ; Esmenjaud-Genestoux, 2005 ; Milhaud, 1998), nous est apparue comme une nécessité première pour pouvoir accomplir d'autres gestes d'étude, comme celui de réguler ses propres besoins d'apprentissages en vue de préparer une évaluation. Tamara, la bonne élève que nous avons déjà rencontrée, nous a dit par exemple lors d'un entretien : « *Je fais un exercice sur la notion qu'on a vue. Donc* ***si on a vu six notions, ben je vais faire six exercices*** *».* Ses camarades, dits « élèves moyens », se sont quant à eux entraînés sur des séries d'exercices sélectionnés de manière aléatoire, parfois en grand nombre. C'est le cas de Mehdi, élève « moyen » : « *Je prends* ***une file d'exercices*** *et je les suis, je les suis [...]* **au hasard**. *Je prends… par exemple, on va dire, j'ai l'exercice 31, je fais l'exercice 31 jusqu'à l'exercice 35.* » C'est aussi le cas d'Annabelle, élève « en difficulté », qui dit faire des exercices en les prenant « *au pif* ». La manière de travailler de ces élèves n'est donc ni économique ni ciblée sur des types de tâches précis.

Nous avons également pu repérer des différences flagrantes sur la manière « d'apprendre la leçon », injonction pédagogique générale souvent prononcée par les enseignants. Les « bons » élèves trouvaient peu d'intérêt à revenir sur la leçon (Tamara : « *je vois pas l'intérêt de réviser la leçon* ») tandis que ceux avec des besoins d'apprentissages plus forts se lançaient dans des efforts intenses de mémorisation (Mehdi : « *Apprendre [la leçon], pour moi,* ***c'est par cœur*** » ; Annabelle : « *Je* ***mémorise*** *[la leçon] [...] Je* ***mémorise*** *[les corrections d'exercices]* »).

Les observations que nous avons pu faire rejoignent donc finalement certains résultats de travaux de recherche sur l'étude personnelle. Nous avons relié la variabilité des gestes d'étude selon le profil des élèves aux implicites inhérents aux recommandations pédagogiques du type « apprendre », « relire » ou « réviser » émis par les enseignants.

3. Le modèle de l'étude personnelle

Cette première étude exploratoire nous a conduit à approfondir les analyses sur ces trois niveaux : analyse des praxéologies mathématiques mobilisées par les élèves, analyse de leurs gestes heuristiques, et mise en relation des gestes d'étude des élèves avec les gestes d'aide à l'étude des enseignants. Nous en arrivons ainsi à présenter le modèle de l'étude personnelle que nous avons élaboré au cours de nos recherches.

Définition de l'étude personnelle et des praxéologies d'étude

Dans ce modèle, l'étude personnelle relative à un objet de savoir est définie comme étant l'ensemble des gestes accomplis par l'élève dans une institution donnée pour construire les apprentissages mathématiques en vue d'établir un rapport personnel idoine à cet objet de savoir. Cette étude n'est pas obligatoirement explicitement organisée par l'institution alors qu'elle peut s'avérer nécessaire à l'établissement de rapports personnels idoines.

Nous avons également défini ce que nous avons appelé des *praxéologies d'étude*. Il s'agit de praxéologies non mathématiques au sens où elles ne portent pas sur le produit de l'activité mathématique mais plutôt sur son déroulement. Elles font référence à des gestes heuristiques, pour apprendre à construire, utiliser, articuler, situer les unes par rapport aux autres des organisations mathématiques.

En utilisant le terme de praxéologie, nous affirmons l'existence de techniques d'étude et d'un *logos* à leur sujet, que l'enseignant peut mettre en scène en classe à travers une organisation didactique explicite. La question est de savoir comment l'enseignant peut accompagner les élèves dans leur organisation de l'étude personnelle pour qu'ils développent des praxéologies d'étude favorisant une activité mathématique idoine.

Les praxéologies d’étude supposées favoriser une activité mathématique idoine

Avec cette définition de l’étude personnelle, nous considérons les injonctions du type « réviser », « revoir », « apprendre » comme relevant de praxéologies d’étude pédagogiques générales puisque ne donnant pas la primauté aux spécificités de la discipline. Nous leur opposons des praxéologies d’étude que nous supposons permettre une activité mathématique idoine, à savoir :

- identifier un type de tâches mathématiques ;
- mettre en relation un type de tâches avec une technique et une technologie ;
- situer et articuler des organisations mathématiques nouvelles et anciennes entre elles ;
- diagnostiquer puis réguler ses besoins d’apprentissages.

Si nous nous sommes risqué dans notre travail (Sirejacob, 2017) à proposer des techniques d’étude qui en l’état mériteraient des assises théoriques plus solides et des confirmations expérimentales, nous ne sommes pas prononcé sur les technologies d’étude. En effet, nous n’avons à ce jour pas connaissance de discours rationnels largement partagés dans la communauté enseignante sur le sujet.

Schéma du modèle de l’étude personnelle

Le schéma ci-dessous (figure 1) synthétise une partie de la complexité des phénomènes liés à l’étude personnelle que nous avons cherché à analyser. Dans ce schéma, l’étude personnelle hors la classe prend place dans un système didactique auxiliaire (SDA) piloté par le système didactique principal (SDP) classe (Chevallard, 2002). Nous supposons que la construction de certaines praxéologies d’étude en classe et la gestion didactique de l’enseignant favorise (ou non) l’émergence de conditions pour que cette étude soit accomplie de manière adéquate, et permet (ou non) à l’élève d’occuper des positions d’étudiant autonome dans le modèle de structuration du milieu (Margolinas, 2003 ; Castela, 2006).

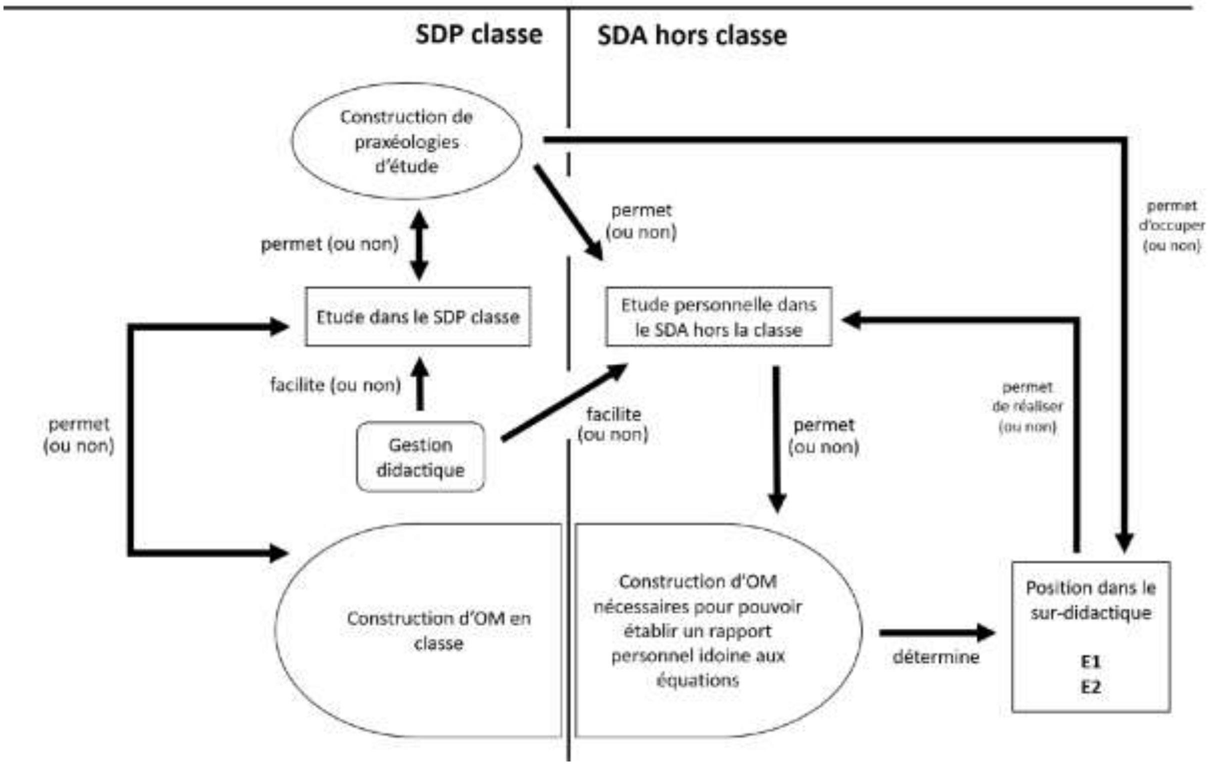

Figure 1 : Un modèle de l’étude personnelle hors la classe.

Opérationnalisation du modèle sur trois niveaux

Nous avons opérationnalisé le modèle de l'étude personnelle pour analyser cette dernière suivant les trois niveaux que nous avons déjà présentés (§ III. 2) mais que nous avons affinés.

À un premier niveau, nous comparons d'une part les OM travaillées en classe avec celles « visiblement » mobilisées par les élèves hors la classe, d'autre part les OM enseignées avec celles de l'OM épistémologique de référence sur les équations que nous présenterons plus bas

À un deuxième niveau, nous mettons en perspective d'une part les praxéologies d'étude développées en classe avec celles utilisées par les élèves hors la classe, d'autre part ces mêmes praxéologies d'étude avec celles dont nous avons supposées qu'elles favorisaient l'accomplissement d'une étude idoine.

À un troisième niveau, nous analysons la gestion didactique de l'enseignant. Comment ce dernier mène-t-il les phases de recherche en classe ? Comment prend-il en compte les techniques mobilisées par les élèves durant ces phases et celles de validation ? Quelle institutionnalisation est réalisée ? Porte-t-elle sur les OM mais aussi sur les praxéologies d'étude ?

Nous avons croisé chacun des trois niveaux d'analyse précédents avec les six moments de l'étude (Chevallard, 1998), c'est-à-dire les moments « incontournables » qui organise l'étude : première rencontre avec un type de tâches, exploration de ce type de tâches et élaboration d'une technique pour le résoudre, constitution de l'environnement technologico-théorique, travail de la technique, évaluation de cette technique.

Nous montrerons plus loin comment nous faisons opérer le modèle sur des exemples précis. Avant cela, nous présentons l'organisation mathématique épistémologique de référence relative aux équations du premier degré à une inconnue

IV. UNE ORGANISATION MATHEMATIQUE (OM) EPISTEMOLOGIQUE DE REFERENCE RELATIVE AUX EQUATIONS DU PREMIER DEGRE A UNE INCONNUE

1. Une OM construite à partir d'une approche anthropologique et d'une approche cognitive

Nous avons élaboré cette organisation de référence à partir d'une synthèse de travaux de recherche en didactique de l'algèbre sur les équations et en adoptant deux approches. La première, anthropologique (Bosch et Gascon, 2005 ; Chevallard, 1985, 1989, 1998 ; Gascon, 1994 ; Ruiz-Munzon, 2010), nous permet de situer la place et la fonction des équations dans les curricula et prend en compte les phénomènes transpositifs du savoir. À cette première approche, nous en coordonnons une seconde, cognitive (Coulange, 1998 ; Douady, 1986 ; Duval, 1993 ; Filloy, Puig et Rojano, 2008 ; Kieran, 2007 ; Sfard, 1991 ; Vergnaud, Cortes et Favre-Artigue, 1987), afin de déterminer les sources de signification des équations et les processus de conceptualisation des élèves liés à la génération et à la manipulation des équations.

Prenant place dans l'organisation mathématique globale algèbre, l'organisation mathématique épistémologique de référence relative aux équations du premier degré à une inconnue est une organisation mathématique régionale qui intègre et articule des OM locales relativement complètes. Chacune de ces dernières est pilotée par des éléments technologico-théoriques. Nous allons seulement présenter en détail les deux premières organisations (se reporter à Sirejacob (2017) pour la troisième).

OM1 : mise en équation

La première organisation mathématique locale (OM1) porte sur la mise en équation. Elle fait intervenir les activités de formation, de représentation et de coordination inter-registres de représentation sémiotique et fournit un environnement technologico-théorique pour justifier les techniques de production, de traduction et d'association de relations entre grandeurs données dans des registres différents. D'après la synthèse de travaux de didactique de l'algèbre que nous avons réalisée et en particulier selon les travaux de Ruiz-Munzon (2010), les équations se situent à la deuxième étape d'un processus de reconstruction de l'algèbre à partir de programmes de calcul : elles sont utiles pour répondre au type de tâches problématique « deux programmes de calcul étant donnés, quelles sont toutes les valeurs d'entrée possibles telles que les résultats finaux des deux programmes soient égaux ? ». Les programmes de calcul sont paramétrés par des valeurs de variables didactiques telles que leur égalisation conduit à la production d'une équation algébrique non arithmétique, c'est-à-dire une équation de la forme $ax + b = c$ d'inconnue x et dont la résolution peut se faire en inversant les opérations (remontée arithmétique). Cette production nécessite d'effectuer des changements de registres de représentation sémiotique. D'après les travaux de Duval (1993), les conversions sémiotiques et la coordination inter-registres sont sources de signification pour l'élève. La mise en équation, type de tâches relevant de l'algèbre, s'accompagne de plus de ruptures épistémologiques avec l'arithmétique : l'égalité change de statut et devient une fonction propositionnelle dont on interroge la valeur de vérité, et les opérations peuvent demeurer suspendues.

OM2 : Résolution algébrique

La deuxième organisation mathématique locale (OM2) porte sur les transformations algébriques à opérer sur une équation en vue d'en trouver l'ensemble des solutions. Elle ne comprend que des types de tâches nécessitant le recours à une technique de résolution algébrique, puisque l'OM de référence est une OM régionale prenant place au sein de l'OM globale algèbre. La mise en équation d'un problème d'égalisation de programmes de calcul « bien » paramétré conduit à une équation qu'il faut traiter dans le registre des écritures algébriques à l'aide d'une technique de résolution algébrique. En effet, l'inconnue étant présente dans les deux membres, la technique par remontée arithmétique est inopérante, et la solution à trouver étant fractionnaire non décimale, la technique par essais/erreurs est mise en échec elle aussi. La résolution de cette équation nécessite une coupure didactique (Filloy, Puig & Rojano, 2008), les opérations devant porter sur l'inconnue et obéissant à de nouveaux discours technologiques liés à l'application des propriétés de conservation de l'égalité.

OM3 : Structure et solutions

La troisième et dernière OM locale (OM3) est liée à la structure des équations et à leurs solutions. Elle est pilotée par des éléments technologico-théoriques justifiant les techniques de substitution pour tester une solution ou encore de reconnaissance de structure pour guider la résolution algébrique.

2. Une OM épistémologique opérationnelle pour analyser les OM à enseigner relatives aux équations dans les programmes et les manuels

Nous avons opérationnalisé l'organisation mathématique épistémologique de référence pour pouvoir réaliser une analyse praxéologique des programmes officiels et des manuels scolaires (l'analyse détaillée peut être trouvée dans Sirejacob (2016)). En la comparant aux organisations mathématiques à enseigner, nous interprétons les écarts comme d'éventuels déficits praxéologiques susceptibles d'être à l'origine de la construction de rapports personnels aux équations non idoines.

L'analyse praxéologique des programmes indique que les directives générales sont imprécises concernant les variables didactiques des problèmes de mise en équation à proposer aux élèves pour motiver le recours aux équations. Certains types de tâches, comme la reconnaissance de la structure d'une équation, fondamentale pour guider l'intelligence des calculs dans la résolution algébrique, et qui relève de la troisième organisation mathématique locale, sont peu présents. De plus, les injonctions relatives au socle commun affaiblissent potentiellement les raisons d'être des équations en rendant dispensables ces dernières dans la résolution de certaines tâches. Les documents d'accompagnement comblent en partie ces déficits praxéologiques mais, de par leur caractère marginal, nous en interrogeons l'utilisation qui en est effectivement faite par les enseignants.

Concernant l'analyse de manuels, nous avons cherché à déterminer le poids de chaque organisation mathématique locale dans quatre manuels : Horizon 4ème (2011, Ed. Didier), Myriade 4ème (2011, Ed. Bordas), Phare 4ème (2011, Ed. Hachette), Transmath 4ème (2011, Ed. Nathan). Nous avons identifié les types de tâches présents et ceux qui le sont moins, et les discours technologiques utilisés.

Au niveau du poids des organisations mathématiques locales, celle sur la résolution algébrique est la plus présente dans tous les manuels (entre 53% et 65% des OM locales travaillées). Le type de tâches « résoudre algébriquement une équation du premier degré » est le plus travaillé. En revanche, la reconnaissance de la structure des équations, type de tâches de la troisième organisation mathématique locale, est quasiment absente, ce qui fait écho à sa faible présence dans les programmes officiels.

Pour ce qui est des problèmes donnés à résoudre aux élèves, près de la moitié d'entre eux peuvent être solutionnés à l'aide d'une technique non algébrique, c'est-à-dire une technique ne s'appuyant pas sur les propriétés de conservation de l'égalité, dans les quatre manuels. Nous interrogeons le choix des auteurs de proposer une si grande proportion de types de tâches ne motivant pas le recours à la technique de résolution algébrique et les effets sur les apprentissages des élèves qui persistent dans l'utilisation d'anciennes techniques arithmétiques ou par essais/erreurs.

V. Construction et mise en œuvre d'un parcours d'etude et de recherche relatif aux equations

Nous avons montré dans la section précédente qu'il existait des déficits praxéologiques portés par les savoirs didactiquement transposés dans les programmes et les manuels. À ces déficits, nous répondons par la proposition d'un Parcours d'Etude et de Recherche appuyé sur les principaux éléments de la référence épistémologique et intégrant les éléments supposés favoriser le développement de praxéologies d'étude adéquates.

1. Fondements théoriques du Parcours d'Etude et de Recherche

Nous articulons des outils de la théorie anthropologique du didactique et de la théorie des situations didactiques pour concevoir ce parcours d'étude et de recherche. Nous le balisons par des questions génératrices motivant la construction de complexes praxéologiques par un travail équilibré des trois organisations mathématiques locales de l'organisation épistémologique de référence et nous suggérons une organisation didactique explicite de l'étude en classe et hors la classe appuyée sur les moments didactiques. Les situations que nous proposons, avec des milieux riches, donnent des raisons d'être aux types de tâches, aux techniques et aux technologies mathématiques. Une partie de ces situations préexiste dans le champ de la recherche en didactique, notamment dans les travaux de Combier, Guillaume et Pressiat (1996) dans leur ouvrage *Au pied de la lettre.*

2. Un parcours en trois étapes

Nous avons structuré le Parcours d'Etude et de Recherche (abrégé PER dans la suite) en trois étapes.

La première étape motive la production d'une équation pour résoudre un problème de mise en équation à base de programme de calcul, suivant le processus d'algébrisation de Ruiz-Munzon (2010). Dans cette étape, le milieu contient un solveur d'équations qui prend temporairement en charge la résolution de l'équation. Les types de tâches travaillés relèvent principalement des OM locales OM1 et OM3 de l'OM épistémologique de référence.

La deuxième étape du PER donne des raisons d'être à la technique de résolution algébrique. La question génératrice de cette étape est : « comment trouver la valeur d'une variable x dans une égalité de la forme $ax+b=cx+d$? », les coefficients a,b,c,d étant « bien » choisis. L'objectif est de construire une technique fonctionnant quels que soient les coefficients a,b,c,d. Le milieu ne contient plus le solveur d'équations mais comporte un logiciel prenant en charge une partie des transformations algébriques à opérer sur l'équation. Dans cette étape, les types de tâches relèvent principalement de OM2 et OM3.

La troisième et dernière étape du PER concerne la résolution de problèmes algébriques divers, avec un jeu important sur les variables didactiques qui module la complexité de ces problèmes.

Dans un souci de renforcer les raisons d'être des OM relatives aux équations, nous avons proposé des tâches préparatoires avant les étapes du PER. Dans ces tâches est prolongé le moment du travail des techniques arithmétiques et par essais/erreurs et des OM relatives au numérique et aux expressions algébriques.

3. L'organisation didactique au sein du PER

Chaque étape du parcours voit s'opérer un cycle de moments de l'étude pour le principal type de tâches relatif aux équations travaillé. De manière fortement articulée avec le travail des OM, nous proposons des pistes pour faire développer des praxéologies d'étude aux élèves.

Par exemple, dans le schéma ci-après (figure 2), où nous nous situons à l'étape 1 du PER, les premiers moments didactiques correspondent à l'évaluation de techniques anciennes et à l'élaboration de la nouvelle technique de résolution algébrique. Il nous semble possible durant ces moments de faire travailler des techniques d'étude pour apprendre aux élèves à situer les nouvelles OM par rapport aux anciennes, ou encore pour identifier la nouvelle technique comme telle.

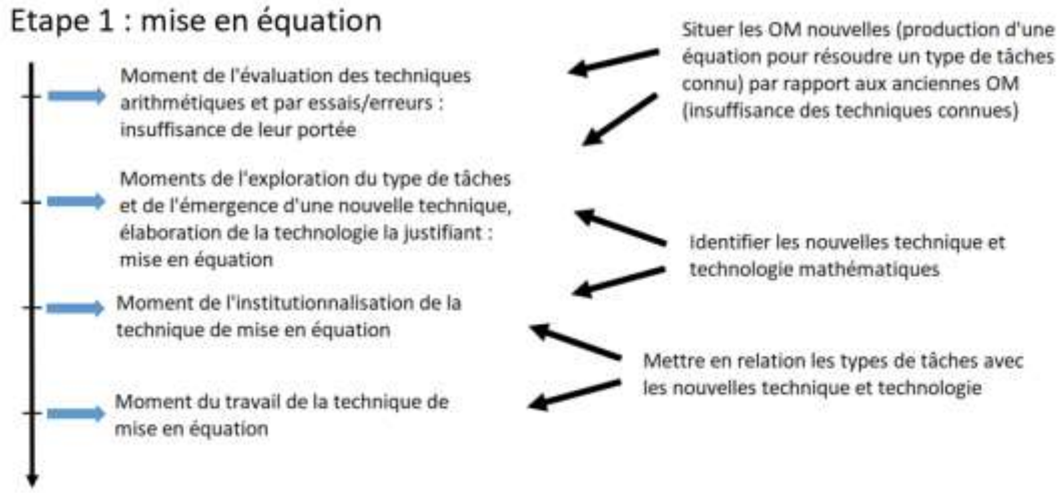

Figure 2 : Des articulations possibles entre OM et praxéologies d'étude à l'étape 1 du PER.

À titre d'illustration, un exemple de type de tâches mathématiques proposé à faire en autonomie à l'étape 2 du PER est présenté dans la figure 3 ci-après. Il s'agit dans cet exemple de résoudre des équations algébriques. Nous avons fait varier sur les valeurs des variables didactiques, avec l'explicitation ou non de signes multiplicatifs ou la présence ou non de produits parenthésés. À ce stade du PER, les élèves ont déjà plusieurs fois rencontré l'objet équations, en ont produites et en ont résolues. Nous nous situons dans le moment du travail de la technique de résolution algébrique. Il nous paraît donc possible pour l'enseignant de réaliser un travail sur quelques praxéologies d'étude : par exemple, il peut amener les élèves à identifier la tâche comme relevant d'une « résolution d'équation » à partir de la donnée de la consigne et des quatre équations en présence, et leur faire associer la technique de résolution algébrique. Au cours de la résolution des équations, il peut également leur faire remarquer en quoi les changements de variables didactiques – sans utiliser les termes de variables didactiques bien entendu – ont conduit à adapter certains éléments de la technique de résolution algébrique, en appui sur la reconnaissance de la structure des expressions en jeu. C'est alors l'occasion de situer les OM relatives aux expressions algébriques par rapport aux OM relatives aux équations et de mettre en avant leur articulation.

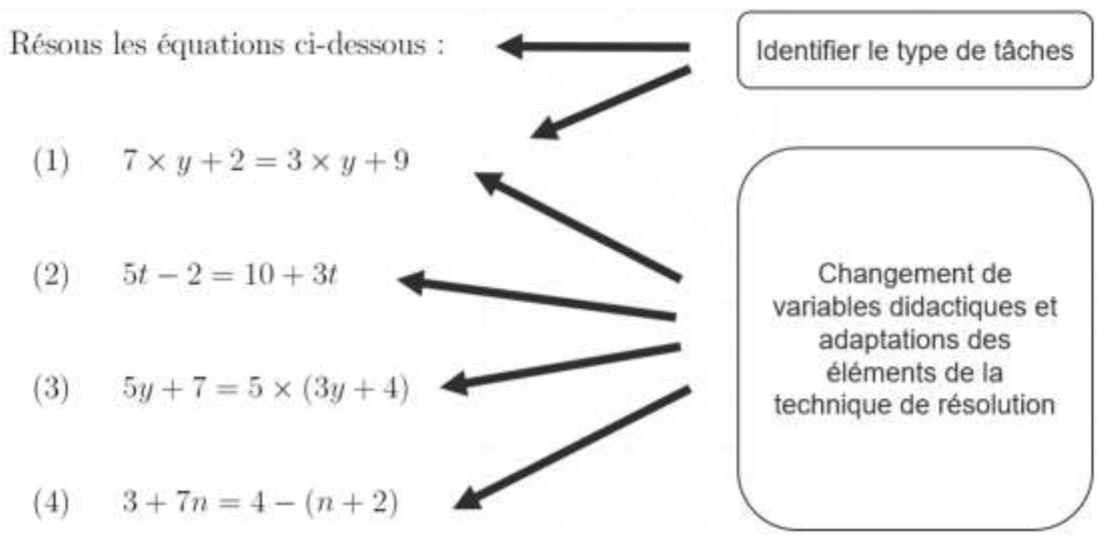

Figure 3 : Un exemple de type de tâches donné à travailler hors la classe.

Afin d'accompagner l'élève dans l'organisation de son étude personnelle hors la classe, nous avons suggéré pour chaque étape du parcours des tâches mathématiques à réaliser en autonomie. Ces tâches ont été choisies pour correspondre à des tâches relevant du même type et qui ont été réalisées en classe. Pour chaque tâche, nous avons fourni un ensemble d'aides de différentes natures, que nous avons différenciées en fonction des besoins d'apprentissages repérés par le test diagnostique automatique. Nous avons fait l'hypothèse que la richesse du milieu ainsi construit pour l'élève étudiant hors la classe et les rétroactions fournies par ce milieu – notamment par les différentes aides – lui permettraient de développer des praxéologies d'étude parmi celles supposées favoriser une activité mathématique adéquate.

Les types d'aides que nous avons proposés sont multiples et comme nous l'avons déjà dit en lien avec les praxéologies d'étude que nous avons voulu faire développer par les élèves :

- Les aides de renvoi, comme leur nom l'indique, renvoient l'élève vers des tâches du même type que celle qu'il a à réaliser en autonomie.
- Les aides comparatrices suggèrent à l'élève de comparer des formulations d'énoncés ou des corrigés, là aussi afin de développer l'identification du type de tâches.
- Les aides pour mobiliser une technique ou pour appliquer une technique donnent des indications à l'élève sur la technique à utiliser ou sur la façon de l'appliquer, par exemple à travers des tâches résolues.
- Les aides régulatrices se présentent sous la forme d'arbres où j'ai anticipé plusieurs réponses possibles d'élèves. En fonction de la réponse donnée, et en appui sur les analyses *a priori* des tâches, nous proposons une aide adaptée aux besoins de l'élève.
- Enfin, les aides au contrôle fournissent à l'élève des moyens de contrôler ce qu'il fait quand il réalise une tâche.

4. Mise en œuvre du PER dans une classe de collège et analyses *a posteriori*

Nous passons à présent à la mise en place du PER dans une classe de collège REP et à l'analyse *a posteriori* de l'expérimentation.

Eléments de contexte de la mise en œuvre du PER

Un enseignant, que nous baptisons ici Marc, a mis en œuvre le PER dans une de ses classes de niveau quatrième. Dans cette classe se trouvaient trois élèves à qui nous avons fait passer les premiers entretiens. Le fait de pouvoir nous entretenir de nouveau avec ces mêmes élèves nous a permis de comparer leurs gestes d'étude hors la classe.

Sept séances d'une heure ont été nécessaires à l'enseignant Marc pour la mise en scène du PER. Une heure supplémentaire a été consacrée à l'évaluation écrite des productions des élèves sur les équations.

Nous avons filmé l'ensemble des séances et travaillé sur leurs transcriptions. Nous avons également filmé les entretiens passés avec les trois élèves sur un mode opératoire identique à celui utilisé pour les tout premiers entretiens.

Des genres de tâches qui auraient pu être travaillés de manière moins inégale

Nous avons analysé les transcriptions en utilisant la grille à trois niveaux que nous déjà présentée (section III.2) et que nous allons maintenant faire fonctionner.

Nous avons tout d'abord constaté un travail relativement équilibré des OM locales de l'OM de référence relative aux équations (OM1 : 42% ; OM2 : 29% ; OM3 : 29%). Toutefois, certains genres de tâches ont été moins travaillés que d'autres, comme « Identifier la structure d'une équation », « Prouver l'équivalence de deux équations » et « Tester si un nombre est solution », alors qu'ils sont en particulier utiles pour contrôler les calculs sur les équations.

Nous nous sommes ensuite particulièrement intéressé à ce qui est laissé à la charge des élèves : réalisent-ils les tâches données à faire et qui explicitent les techniques et les éléments technologiques, ou bien est-ce l'enseignant ? Sur l'ensemble du PER, nous avons observé que dans plus de la moitié des cas, l'enseignant prenait la responsabilité d'accomplir les tâches travaillées en classe et d'expliciter la technique ou la technologie correspondantes.

Des praxéologies d'étude qui auraient pu prendre en compte davantage les spécificités du secteur d'étude

Au niveau des praxéologies d'étude développées en classe, nous avons constaté une présence importante de praxéologies pédagogiques « générales », du type « réaliser une tâche mathématique » ou « réviser un contrôle ». À l'inverse, l'identification des types de tâches mathématiques est peu développée. Or, nous avons fait l'hypothèse que sans cette identification, l'ensemble des autres praxéologies d'étude supposées favoriser une activité mathématique idoine en autonomie hors la classe avait peu de chance d'être développé.

Durant la mise en place du parcours, nous avons également observé une part importante de ce que nous avons appelé des « occasions manquées », c'est-à-dire des occasions pour l'enseignant de développer des praxéologies d'étude signalées et suggérées dans le parcours initial. Par exemple, sur la cinquantaine de tâches mathématiques réalisées en classe, nous pensons que l'enseignant aurait pu identifier les types de tâches parents plus souvent, ou situer les OM nouvelles par rapport aux anciennes sur les tâches qui agrégeaient les OM ponctuelles d'OM régionales différentes.

Nous avons toutefois noté une croissance dans le nombre de praxéologies d'étude développées en classe au cours des séances : celles-ci ont été plus travaillées dans les dernières séances et les élèves avaient davantage la charge de mobiliser ces praxéologies.

L'ensemble de nos observations est à nuancer en regard des moments de l'étude. Par exemple, nous avons remarqué que lors du moment du travail de la technique, les praxéologies d'étude sont davantage développées en classe et ce, par les élèves.

Une autonomie des élèves en classe qui aurait pu être plus importante

Nous nous sommes également focalisé sur l'autonomie dans laquelle les élèves étaient placés. Nous avons pu constater sur l'ensemble des séances analysées que les temps où les élèves étaient autonomes étaient globalement beaucoup moins important que ceux où l'enseignant donne des indications ou réalise les tâches étudiées. En moyenne et en proportion, les élèves sont autonomes environ un cinquième du temps qu'ils passent en classe. Nous interrogeons ceci : comment les élèves dont les besoins d'apprentissages sont les plus forts peuvent-ils occuper des positions d'étudiants au moins localement autonomes hors la classe s'ils font peu en classe l'expérience de cette autonomie ?

Un travail hors la classe des genres de tâches qui aurait pu être plus équilibré

Toujours sur le hors la classe, nous avons observé de plus près les tâches données à faire hors la classe et repéré un déséquilibre. Si de manière peu étonnante, les élèves ont beaucoup résolu d'équations, nous avons remarqué qu'ils ont à l'inverse peu été confrontés à la réalisation de tâches faisant spécifiquement travailler la reconnaissance de la structure, la preuve d'équivalence entre équations ou le test de solutions. Ceci s'est en partie retrouvé dans les traces écrites des élèves où les tâches relevant des genres de tâches les moins travaillés ont été les moins correctement réalisés.

Des effets encourageants sur les apprentissages disciplinaires

Concernant ces traces écrites, nous avons analysé celles de vingt élèves à une évaluation co-construite avec l'enseignant (figure 4). Cette évaluation comportait les principaux types de tâches mathématiques travaillés en classe, entre autres résoudre une équation du premier degré à une inconnue, mettre en équation un problème algébrique du premier degré en égalisant deux programmes de calcul, tester si un nombre est solution d'une équation.

Exercice 2 **Résoudre les équations ci-dessous en détaillant les étapes :** *(5 points)*

$5 \times x + 8 = 3 \times x + 2$	$8x - 4 = -3x + 9$	$3 \times (x + 5) = x + 3$

Exercice 3 *(2 points)*

1] Le nombre 2 est-il solution de l'équation $3x + 5 = 7x - 1$? Justifie.

2] Sam a résolu l'équation $2x + 9 = 3 - 4x$ et a trouvé -1 comme solution. A-t-il raison ? Justifie.

Exercice 4 *(4 points)*

Voici deux programmes de calcul :

PROGRAMME A	PROGRAMME B
• Choisir un nombre • Le multiplier par 11 • Soustraire 4 au résultat	• Choisir un nombre • Lui ajouter 2 • Multiplier le résultat par 6

Alice et Benjamin choisissent le même nombre de départ.

Alice teste le programme A et Benjamin teste le programme B.

Alice et Benjamin trouvent le même résultat final.

Quel nombre de départ ont-ils choisi ? Justifie ta réponse.

Figure 4 : Tâches proposées lors de l'évaluation écrite sur les équations.

Nos analyses indiquent que les élèves semblent majoritairement mobiliser la technique de résolution algébrique pour l'exercice sur la résolution d'équations (exercice 2) : 17 élèves sur 20 ont eu recours à cette technique pour résoudre les équations proposées. Nous relions ceci avec le fait que la résolution d'équations est le genre de tâches qui a été le plus largement travaillé en classe et hors la classe. Les erreurs de calcul que nous avons pu voir dans les traces écrites portent majoritairement sur des OM anciennes. Dans la résolution algébrique des équations, les élèves se trompent dans le calcul sur les nombres relatifs ou sur le développement d'un produit parenthésé avec des expressions algébriques, mais utilisent les propriétés de conservation de l'égalité.

Pour résoudre le problème d'égalisation de programmes de calcul (exercice 4), près de la moitié des élèves ont recours à la technique de mise en équation ; seuls 4 élèves ont tenté d'utiliser la technique par substitution. Cependant, un nombre assez élevé d'équations incorrectes a été constaté, alors que le type de tâches « égaliser deux programmes de calcul » a été lui aussi beaucoup travaillé en classe. Nous avançons au moins deux hypothèses pour expliquer ces résultats. La première est que dans l'évaluation, l'équation traduisant l'égalisation des programmes de calcul comportait un produit parenthésé ; or, en classe, les tâches du même type conduisaient toujours à des équations sans produit parenthésé. Une seconde hypothèse est que le test des solutions et la reconnaissance des structures font partie des genres de tâches les moins travaillés en classe de manière explicite.

Bien que la construction d'un rapport personnel idoine aux équations en classe de quatrième nécessite d'agréger différentes OM, nous considérons comme encourageants les effets obtenus sur les apprentissages des élèves relatifs aux équations après la mise en place du parcours.

Des praxéologies d'étude qui restent à faire évoluer

Pour ce qui est des praxéologies d'étude développées hors la classe, nous avons interrogé trois élèves, pour des raisons liées aux contraintes du terrain. Les résultats que nous avons obtenus sont donc à prendre avec des précautions et des expérimentations à plus grande échelle mériteraient d'avoir lieu.

Pour les élèves qualifiés de « moyens » par leur enseignant, nous n'avons pas constaté d'évolution positive dans leur manière d'organiser leur étude personnelle hors la classe relativement au thème des équations. Ces deux élèves ont continué à réaliser des gestes de lecture ou de mémorisation intensive de la leçon. Ils semblent avoir été peu sensibles aux changements de pratiques de leur enseignant sur les sept séances qu'a nécessité la mise en place du PER. Seule Marianne, l'élève qualifiée de « bonne élève » (section III.2), a changé sa façon d'étudier personnellement : elle qui au premier entretien nous avait dit ne jamais « réviser » les contrôles de mathématiques nous a expliqué qu'elle avait réalisé des tâches relevant des principaux types de tâches relatifs aux équations. Son rapport personnel aux équations nous paraissait déjà idoine à ce niveau scolaire.

Il nous semble hautement probable que l'échelle de temps sur laquelle nous avons analysé les gestes des élèves est très insuffisamment longue pour pouvoir conclure de manière définitive sur les effets d'un travail à long terme des praxéologies d'étude.

VI. CONCLUSION ET PERSPECTIVES DE RECHERCHE

Dans notre travail, nous avons construit un modèle de l'étude personnelle opérationnalisé pour analyser les praxéologies d'étude développées par les élèves et les mettre en perspective avec celles travaillées en classe sous la direction de l'enseignant. Prenant en compte les spécificités de la discipline, et plus précisément celles du thème des équations du premier degré à une inconnue, nous avons fait fonctionner ce modèle en appui sur une référence épistémologique, à travers notamment l'élaboration et l'opérationnalisation d'une OM de référence épistémologique relative aux équations. Face aux déficits praxéologiques repérés dans les programmes et les manuels, nous avons proposé un PER relatif aux équations intégrant les éléments précédents. La mise en place de ce PER au sein d'une classe semble avoir eu des effets positifs sur les apprentissages disciplinaires des élèves.

Le thème de l'étude personnelle hors la classe est peu abordé dans le champ de la didactique des mathématiques. Nous avons conscience d'avoir mené des travaux sur un terrain encore largement en chantier, des interrogations qu'ils peuvent soulever et des nombreux prolongements potentiels à qui ils peuvent donner naissance. Nous en proposons ici quelques-uns.

Nos recherches peuvent être prolongées sur d'autres secteurs d'étude. En particulier, les OM de référence relatives aux expressions algébriques et aux équations du premier degré, présents dans nos travaux et ceux de Pilet (2015) peuvent servir de point d'appui à la construction d'autres OM de référence en algèbre élémentaire, comme celles relatives aux systèmes d'équations ou aux inéquations.

Le modèle de l'étude personnelle que nous avons élaboré nous paraît transférable, moyennant évidemment des adaptations, à d'autres secteurs, domaines, voire à d'autres disciplines.

Certains éléments du PER que nous avons conçus peuvent être selon nous informatisés pour améliorer l'organisation de l'étude personnelle hors la classe des élèves. Nous avons fait distribuer aux élèves de très nombreux documents écrits durant nos expérimentations, peu pratiques à utiliser surtout pour des élèves avec de forts besoins d'apprentissages. En particulier, les aides fournies correspondaient à de grands blocs de textes peu lisibles et gagneraient à prendre corps au sein d'une interface dynamique et ergonomique.

Enfin, nous pensons qu'une piste prometteuse pour favoriser la construction de techniques d'étude efficaces en mathématiques chez les élèves consiste à poursuivre les recherches sur la manière d'organiser didactiquement le travail sur les praxéologies d'étude et ce, en appui sur les moments didactiques. Comment organiser le moment de l'élaboration de nouvelles techniques d'étude et montrer aux élèves l'insuffisance éventuelle d'anciennes techniques d'étude qu'ils employaient jusqu'alors ? Sur quels types de tâches d'étude, en lien avec les types de tâches mathématiques travaillés, pourrait-on faire émerger puis travailler ces nouvelles techniques d'étude ? Comment organiser le moment de leur institutionnalisation ? Quel discours technologique, à diffuser auprès de la communauté enseignante, pourrait-on élaborer et utiliser pour les justifier ?

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BOSCH, M. & GASCON, J. (2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. In A. Mercier & C. Margolinas (Eds.), *Balises pour la didactique des mathématiques : cours de la 12e Ecole d'été de didactique des mathématiques. Corps (Isère). Du 20 au 29 août 2003* (pp. 107-122). Grenoble : La Pensée Sauvage.

BLOCHS, B. (2012). Le cahier de cours au collège : une œuvre du professeur ? un instrument pour l'élève ? *Rcherches en Didactique des Mathématiques, 32*(2), 159-193.

CASTELA, C. (2000). Un objet de savoir spécifique en jeu dans la résolution de problèmes : le fonctionnement mathématique. *Recherches en didactique des mathématiques, 20(3),* 331-380.

CASTELA, C. (2002). Les objets du travail personnel en mathématiques des étudiants dans l'enseignement supérieur : comparaison de deux institutions, université et classes préparatoires aux grandes écoles. *Cahier de Didirem,40* . Paris : IREM Paris 7.

CASTELA, C. (2007). Les gestes d'étude en mathématiques d'élèves de première scientifique. In G. Gueudet & Y. Matheron (Eds), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques, année 2006* (pp. 33-77). Paris : IREM Paris 7.

CASTELA, C. (2008). Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissages ignorés par les institutions d'enseignement. *Recherches en didactique des mathématiques, 28(2),* 135-182.

CHEVALLARD, Y. (1985). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Première partie. L'évolution de la transposition didactique. *Petit x, 5,* 51-94.

CHEVALLARD, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Seconde partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation, *Petit x, 19,* 43-72.

CHEVALLARD, Y. (1998). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. In R. Noirfalise (Ed.), *Actes de l'Ecole d'été de la Rochelle, du 4 au 11 juillet 1998, La Rochelle* (pp. 91-120). Clermont-Ferrand : IREM de Clermont-Ferrand.

CHEVALLARD, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques 19(2),* 221-265.

CHEVALLARD, Y. (2002). Nouveaux dispositifs didactiques au collège et au lycée : raisons d'être, fonctions, devenir. *Actes des Journées inter-Irem didactique,* Dijon, 1-26.

COMBIER, G., GUILLAUME, J.-C. & PRESSIAT, A. (1996). *Les débuts de l'algèbre au collège. Au pied de la lettre !* Institut National de Recherche Pédagogique (INRP).

COULANGE, L. (1998). Les problèmes « concrets » à « mettre en équations » dans l'enseignement. *Petit x, 47,* 33-58.

DELOZANNE, E., PRÉVIT, D., GRUGEON, B. & CHENEVOTOT, F.. (2010). Vers un modèle de diagnostic de coméptences. *Revue Techniques et Sciences Informatiques, 29*(8-9), 899-938.

DOUADY, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil/objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7*(2), 5-32.

DUVAL, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives, 5,* 37-65.

ESMENJAUD-GENESTOUX, F. (2005). Le travail 'personnel' au collège ou le partage des responsabilités didactiques entre le professeur, l'élève et ceux qui accompagnent la réalisation de devoirs en mathématiques. Partie 1 : La partie 'privée' du travail des élèves et de l'accompagnement aux devoirs. *Petit x, 69,* 58-77.

ESMENJAUD-GENESTOUX, F. (2006). Le travail 'personnel' au collège ou le partage des responsabilités didactiques entre le professeur, l'élève et ceux qui accompagnent la réalisation de devoirs en mathématiques. Partie 2 : Le professeur accompagne le travail personnel des élèves. *Petit x, 70,* 48-72.

FARAH, L. (2015). *Etude et mise à l'étude des mathématiques en classes préparatoires économiques et commerciales : point de vue des étudiants, point de vue des professeurs*. Thèse de doctorat, Université Paris-Diderot, Paris 7.

FELIX, C. (2004). Les gestes de l'étude personnelle chez les collégiens : une perspective comparatiste. *Spirale, 33,* 483-505.

FILLOY, E., PUIG, L. & ROJANO, T. (2008). *Educational Algebra. A theoretical and Empirical Approach* (Vol. 43). New York : Springer.

GASCON, J. (1994). Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l' « arithmétique généralisée ». *Petit x, 37,* 43-63.

KIERAN, C. (2007). Learning and Teaching Algebra At The Middle School Through College Levels. Building Meaning for Symbols and Their Manipulation. In J. Lester F. K. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learnings* (pp. 707-762).

MILHAUD, N. (1998). Le travail personnel des élèves. *Petit x, 11*(3), 51-78.

PILET (2012). *Parcours d'enseignement différencié appuyés sur un diagnostic en algèbre élémentaire à la fin de la scolarité obligatoire : modélisation, implémentation dans une plateforme en ligne et évaluation*. Thèse de doctorat, Université Paris-Diderot, Paris 7.

PILET (2015). Réguler l'enseignement en algèbre élémentaire par des parcours d'enseignement différencié. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 35(3),* 273-312.

RAYOU, P. (2008). Logiques cognitives et logiques sociales du travail hors la classe. *Communication présentée lors du colloque international Efficacité et équité en éducation.* Consultable sur https://esup.espe-bretagne.fr/efficacite_et_equite_en_education/programme/symposium_rayou.pdf

RUIZ-MUNZON (2010). *La introduccion del algebra elemental y su desarollo hacia la modelizacion funcional*. Thèse de doctorat, Université Autonome de Barcelone.

SFARD (1991). On the dual nature of mathematical conceptions : Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22,* 1-36.

SIREJACOB, S. (2016). Les organisations de savoirs mathématiques à enseigner : les équations au collège. *Petit x, 102,* 27-55.

SIREJACOB, S. (2017). *Le rôle de l'enseignant dans l'organisation de l'étude personnelle hors la classe de collégiens: le cas des équations du premier degré à une inconnue*. Thèse de doctorat, Université Paris-Diderot, Paris 7.

VERGNAUD, G., CORTES, A. & FAVRE-ARTIGUE, P. (1987). Introduction de l'algèbre auprès de débutants faibles. Problèmes épistémologiques et didactiques. In *Actes du colloque de Sèvres : Didactique et acquisition des connaissances scientifiques* (pp. 259-288). La Pensée Sauvage.