

DUO D'ARTEFACTS NUMERIQUE ET MATERIEL POUR L'APPRENTISSAGE DE LA GEOMETRIE AU CYCLE 3

Anne **VOLTOLINI**

IFE, Ens Lyon, laboratoire S2HEP

Anne.voltolini@ac-grenoble.fr

Résumé

La recherche présentée ici porte sur l'introduction des technologies numériques pour l'apprentissage de la géométrie au cycle 3, spécifiquement lorsque celles-ci sont utilisées conjointement à des activités papier-crayon. Le premier objectif est de caractériser la notion de duo d'artefacts numérique et matériel tirée des travaux de Maschietto et Soury-Lavergne (2013). L'approche instrumentale de Rabardel (1995) permet d'établir les critères d'une articulation fructueuse, entre un artefact numérique et un artefact matériel, favorisant les conditions d'un apprentissage au sens de Brousseau (1998). L'enjeu suivant est alors d'élaborer un duo d'artefacts incluant le compas matériel en vue de la conceptualisation du triangle à partir du problème de sa construction à la règle et au compas. Des expérimentations en classe ont été le moyen de valider deux hypothèses : le duo en situation provoque l'élaboration d'un nouvel instrument compas pour faire pivoter un segment et induit une déconstruction dimensionnelle 1D du triangle. En outre, la mise en cohérence du modèle des conceptions de Balacheff (1995) et la notion d'instrument de Rabardel (1995) permet d'identifier l'évolution des conceptions des élèves sur le triangle au fil de la situation, en particulier, l'apparition d'une vision 1D du triangle comme une ligne brisée fermée.

Mots clés

Situation didactique, duo d'artefacts, genèses instrumentales, conceptions, géométrie, déconstruction dimensionnelle, manipulation, EIAH (Environnements Informatiques pour l'apprentissage humain), école primaire

I. LE PROBLEME ETUDIE ET LES OBJECTIFS DE CE TRAVAIL

Dans cette recherche (Voltolini, 2017), je me suis interrogée sur la possibilité d'élaborer des situations didactiques (Brousseau 1998), intégrant les technologies numériques, pour l'apprentissage de la géométrie au cycle 3 (fin de l'école primaire, début du collège). L'idée de départ, est d'introduire le numérique dans des pratiques ordinaires de classe, sans qu'il vienne se substituer aux activités de manipulation dans l'espace sensible ou aux activités papier-crayon déjà pratiquées. Mon expérience d'enseignante m'a convaincue que la différence de résolution d'une même tâche dans les deux environnements, numérique et papier-crayon, pouvait être une potentialité à exploiter. C'est donc dans la perspective d'une mobilisation conjointe des deux environnements, numérique et papier-crayon, que s'est inscrit ce travail. L'objectif de cette recherche est donc d'étudier l'introduction des technologies

numériques comme environnement complémentaire à des activités papier-crayon afin de proposer des situations didactiques qui engagent les élèves dans l'acquisition de connaissances géométriques sur les figures. Mon hypothèse est que des manipulations de représentations d'objets mathématiques à l'interface de l'ordinateur peuvent être une aide, un intermédiaire au saut cognitif que constitue le passage entre des manipulations d'objets matériels et des tracés géométriques aux instruments.

Dans un premier temps, ce texte explicitera les points clés sur lesquels se focaliser pour élaborer une situation didactique, d'enseignement de la géométrie au cycle 3, incluant les technologies numériques. La deuxième partie de ce texte exposera les caractéristiques établies pour définir le concept de duo d'artefact numérique et matériel. Dans sa troisième partie, le texte présentera un duo d'artefacts particulier dédié à la conceptualisation du triangle à partir du problème de sa construction à la règle et au compas. Enfin, la quatrième partie sera consacrée aux expérimentations et à l'analyse de l'effet du duo d'artefacts sur les apprentissages.

1. Apprendre la géométrie au cycle 3

Elaborer des situations d'enseignement de la géométrie au cycle 3, réclame d'analyser ce que signifie faire de la géométrie à la fin de l'école primaire. Duval (2005) précise que faire de la géométrie nécessite de décomposer toute forme en une configuration d'autres unités figurales du même nombre de dimensions ou d'un nombre inférieur de dimensions. Mettre en œuvre la déconstruction dimensionnelle des formes est selon Duval un processus indispensable pour permettre un travail géométrique sur les figures. La vision « surfaces » est la vision première des figures chez les enfants. Dans les premières années de la scolarité, la figure est la trace d'un objet matériel, une surface avec un bord. L'apprentissage de la géométrie aura pour objectif d'ajouter à cette vision initiale une vision « lignes » et une vision « points » (Perrin-Glorian & Godin, 2014). Par exemple au cours de la scolarité un triangle est successivement : une forme de bois ou plastique que l'on peut déplacer et manipuler (Cycle 1, école maternelle) ; une surface que l'on peut tracer sur papier avec un gabarit ou un pochoir (Cycle 2) ; une figure à trois côtés que l'on construit à l'aide d'instruments (Cycle 3) ; enfin un réseau de trois droites, un ensemble de trois points, des relations entre segments, droites et points, des propriétés caractéristiques. « *Le rapport des élèves aux figures est l'un des points clé de leur entrée dans la géométrie* » (Duval & Godin, 2005 p 7). Il s'agit donc d'amener les élèves à changer de regard sur la figure et de les accompagner à passer d'une vision « surfaces » d'une figure à une vision faisant apparaître des unités figurales 1D et 0D.

Duval (2005) estime que la construction de figures est l'entrée nécessaire dans la géométrie. En effet les figures géométriques euclidiennes ont la particularité d'être constructibles à l'aide d'instruments. Parmi les instruments permettant des tracés graphiques certains produisent des formes 2D, par exemple les gabarits ou les pochoirs. D'autres produisent des formes 1D comme la règle, le compas, certains gabarits. Les outils usuels de géométries, incluant les logiciels de géométrie dynamique, sont essentiellement producteurs de tracés 1D. Ainsi la construction d'une figure s'appuie sur sa déconstruction en tracés 1D et 0D constructibles à l'aide d'un instrument. Saisir la procédure de tracé d'une figure aux instruments est une chose mais comprendre pourquoi les instruments utilisés sont adéquats pour réaliser cette construction en est une autre. L'usage d'un instrument ne va pas de soi, il doit être élaboré (Perrin-Glorian, Mathe & Leclercq, 2013) et l'enseignement de la géométrie doit contribuer à cette élaboration. Rabardel (1995) distingue l'artefact qui est l'objet donné à un sujet et l'instrument qui est construit au cours du processus de genèse instrumentale. Un instrument est une entité mixte constituée de l'artefact mobilisé par l'individu et d'une composante psychologique, les schèmes personnels d'utilisation pour un type de tâche donnée. L'artefact

devient un instrument quand le sujet se l'est approprié et l'a intégré dans son activité. En géométrie cohabitent deux types d'artefacts : les artefacts tangibles (la règle, le compas, les gabarits... ainsi que les outils de géométrie dynamique) et les artefacts théoriques (les objets mathématiques, les théorèmes) (Houdement, 2007). L'utilisation d'un instrument plutôt qu'un autre pour produire une figure peut induire une vision différente de la figure. L'objectif est donc de proposer des problèmes de construction mobilisant différents types d'artefacts conduisant à de nouveaux instruments et permettant d'intégrer des visions géométriques différentes sur les figures.

Un problème du cycle 3 : la construction du triangle à la règle et au compas

Le choix de cet apprentissage, la construction du triangle à la règle et au compas, résulte des programmes du cycle 3, et d'une analyse théorique du triangle reposant sur sa déconstruction dimensionnelle. Dans l'enseignement, cette construction (Figure 1) n'est souvent associée qu'à une procédure de tracé et non à la conceptualisation du triangle.

La règle graduée, un obstacle à franchir

La construction du triangle à la règle et au compas est un apprentissage qui résiste au sens où les élèves tracent spontanément le triangle à la règle graduée uniquement. Tant que, dans leur scolarité les élèves n'ont mobilisé que la règle graduée pour tracer des segments de longueurs données et donc pour tracer les côtés d'un polygone, la règle graduée est alors l'instrument naturellement associé au tracé du triangle ; elle permet de tracer ses trois côtés de mesures données. L'utilisation de la règle graduée pour construire un triangle de longueurs des côtés données peut être vue comme un obstacle. La résistance de cet obstacle tient à une vision 2D du triangle comme « une surface délimitée par trois côtés » ; elle tient aussi au fait que souvent les longueurs des côtés sont données par leur mesure.

Une construction qui repose sur la conceptualisation du point

Construire un triangle à partir de trois longueurs fixées, c'est montrer que le triangle existe théoriquement et produire un tracé de ce triangle, ou montrer que le triangle n'existe pas théoriquement, c'est-à-dire que les trois longueurs données ne vérifient pas l'inégalité triangulaire. La construction attendue (Figure 1) consiste à tracer à la règle un segment d'une des trois longueurs souhaitées, puis à tracer avec le compas deux cercles (arcs de cercle) centrés sur les extrémités de ce segment avec pour rayon chacune des deux autres longueurs. Le compas en produisant un cercle, produit tous les points qui sont à distance fixe de son centre. Les intersections des deux cercles permettent de trouver deux points situés à des distances données de chaque extrémité du premier segment tracé. Ces deux points, s'ils existent, sont les sommets de deux triangles symétriques construits de part et d'autre du segment initial. Construire un triangle nécessite donc de décomposer le triangle en tracés constructibles, en particulier il s'agit de construire le 3ème sommet du triangle comme intersection de deux cercles (arcs de cercle) à tracer.



Figure 1 : Illustration de la construction du triangle à la règle et au compas.

La construction du triangle à la règle et au compas présente donc plusieurs difficultés. D'une part, cette construction repose sur une déconstruction du triangle 2D en un triangle déterminé par un côté, objet géométrique 1D, et le troisième sommet, objet géométrique 0D obtenu

comme intersection de deux lignes, difficilement appréhendé par les élèves de l'école primaire. D'autre part le compas ne produit pas le contour du triangle mais produit des tracés auxiliaires, des cercles (arcs de cercle) n'appartenant pas au triangle et il doit être vu comme un instrument permettant de réaliser des égalités de longueurs.

Trois enjeux pour l'élaboration d'une situation didactique

A la lumière des travaux de Duval, Perrin-Glorian et Godin (Duval & Godin, 2005; Perrin-Glorian & Godin, 2014), trois idées directrices soutiennent l'élaboration d'une situation.

Occasionner une déconstruction dimensionnelle du triangle sans aller jusqu'au point

Le premier enjeu est d'adopter une démarche qui tienne compte du développement cognitif des élèves. Mettre un accent particulier sur la déconstruction dimensionnelle du triangle sans aller jusqu'au point, difficilement appréhendable par les élèves, est au cœur de cette démarche. Il s'agit donc d'élaborer une situation favorisant l'émergence d'une déconstruction dimensionnelle 1D du triangle.

Amener la pertinence géométrique du compas dans la construction du triangle

Le deuxième enjeu est de dépasser la procédure d'utilisation du compas et d'induire sa pertinence géométrique dans la construction du triangle. Il s'agit de faire prendre conscience à l'élève de la nécessité d'un nouvel instrument, autre que la règle graduée, pour réaliser cette construction. La situation doit donc provoquer une nouvelle genèse instrumentale du compas.

Caractériser le cercle, objet mathématique, pour identifier une distance

Faire évoluer les connaissances des élèves sur le cercle, est le troisième enjeu. La situation doit donc aussi permettre d'amener le cercle, objet mathématique, comme instrument pour identifier une distance dans la construction du triangle.

2. Rôle des technologies numériques

De nombreuses études issues de la recherche en didactique reflètent un optimisme pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques avec les technologies numériques (Hoyles & Lagrange, 2010; Sinclair & Baccaglini-Franck, 2015; Drijvers et al., 2016; Moyer-Packenham, 2016). Les environnements, sensible et papier-crayon, ne sont pas pour autant négligés mais il apparaît que majoritairement, les technologies numériques sont utilisées pour remplacer une activité de manipulations d'objets matériels ou une activité papier-crayon. Si les deux environnements, numérique et matériel, sont mobilisés, les tâches proposées dans les différents environnements, sensible, papier-crayon, numérique, sont la plupart du temps disjointes. Des études comme par exemple celle de Gueudet, Bueno-Ravel et Poisard (2014) relatent une utilisation simultanée d'un outil matériel et d'un outil numérique. Dans ces travaux, ni la cohérence entre l'utilisation de chaque outil, numérique et matériel, ni l'élaboration de l'artefact numérique étant donné l'artefact matériel ne sont interrogées. De plus, à ma connaissance, aucune recherche n'a été réalisée sur la façon dont les élèves adaptent leurs connaissances de l'environnement papier-crayon à un environnement numérique ou réciproquement. C'est donc dans la perspective d'une utilisation conjointe des environnements, numérique et matériel ou papier-crayon, et de leur complémentarité que cette étude se fait. L'utilisation conjointe d'un environnement numérique et d'un environnement papier-crayon dans une même situation didactique peut-elle être une plus-value pour les apprentissages ?

Avant d'étudier la valeur ajoutée d'une utilisation conjointe des environnements numérique et papier-crayon il est important de rappeler le potentiel et la plus-value des environnements de géométrie dynamique pour l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie.

Potentialités de la géométrie dynamique dans l'enseignement de la géométrie

L'utilisation des environnements de géométrie dynamique induit pour les élèves de nouvelles façons d'apprendre et de comprendre les concepts mathématiques (Laborde et al., 2006). Souvent, les élèves se contentent d'appliquer des procédures pour résoudre un problème, sans donner de sens à celles-ci. La géométrie dynamique permet de créer des représentations dynamiques d'objets mathématiques qui peuvent être facilement manipulées et ainsi peut engendrer des pratiques pédagogiques qui favorisent l'expérimentation et l'étude des objets mathématiques et pas uniquement l'apprentissage de procédures de résolution. Les environnements de géométrie dynamique, sont des outils de visualisation, de réification, et de manipulation directe de représentations d'objets mathématiques et de certaines de leurs propriétés (Artigue, 2008). Les logiciels de géométrie dynamique qui permettent la manipulation directe proposent à l'utilisateur d'agir directement sur les objets mathématiques et ainsi transforment la façon habituelle (dans l'environnement papier-crayon) d'agir sur ceux-ci (Laborde & Laborde, 2014). Avant d'entreprendre une action, les élèves ont à prendre des décisions qui sont influencées par leurs connaissances sur les objets en jeu. Les représentations dynamiques d'objets mathématiques offrent donc aux élèves une nouvelle fenêtre pour la conceptualisation et peuvent être un moyen de favoriser la transition d'une appréhension perceptive des figures vers une appréhension géométrique.

Les environnements numériques sont donc favorables à la création de milieux (Brousseau, 1998) et conduisent à l'élaboration de nouveaux types de tâches, engageant l'élève à interagir avec l'environnement, qui ne peuvent exister dans l'environnement papier-crayon (ibid). Le fait que ce soit l'environnement qui réagit, indépendamment de l'enseignant, contribue à une meilleure appropriation du problème par les élèves ; un environnement de géométrie dynamique permet à l'utilisateur d'invalidier les stratégies erronées et d'être soutenu dans la recherche d'une stratégie.

La géométrie dynamique en complément et en interaction avec l'utilisation des instruments usuels de géométrie : question de recherche

L'objet de ce travail est d'utiliser les potentialités d'un environnement de géométrie dynamique pour organiser un milieu qui permette d'explorer le triangle au travers d'une analyse visuelle différente de celle induite par la règle graduée et le compas. Les technologies numériques peuvent-elles être un moyen pour accompagner la conceptualisation 1D du triangle ? L'élaboration d'un artefact numérique qui permet de travailler hors de l'environnement papier-crayon et donc hors de l'utilisation des instruments usuels de géométrie peut-il être un moyen de franchir l'obstacle de la règle graduée et d'amener la nécessité de l'usage d'un nouvel instrument compas autre que la règle graduée pour réaliser la construction d'un triangle de longueurs des côtés données ?

L'enjeu est donc d'introduire la géométrie dynamique articulée à l'usage du compas matériel. Il s'agit de développer un environnement numérique, qui inclut une approche expérimentale sur la base de manipulations directes de représentant dynamiques d'objets mathématiques, articulé à l'usage du compas matériel. La question sous jacente est alors d'étudier les conditions d'une articulation entre un artefact numérique et un artefact matériel qui soit une plus-value pour les apprentissages. Comment une telle articulation peut-elle influencer la conceptualisation ? Ce qui conduit à définir la notion de duo d'artefacts numérique et matériel.

II. LE CONCEPT DE DUO D'ARTEFACTS NUMERIQUE ET MATERIEL

L'objectif ici, est de caractériser ce qui fait duo : à quelles conditions la mobilisation conjointe de deux artefacts, numérique et matériel, dans une situation peut-elle être qualifiée de duo d'artefacts ?

1. Une proposition de définition d'un duo d'artefacts

Dans un premier temps, il est utile de justifier les choix de vocabulaire, matériel et numérique. L'adjectif matériel est préféré à l'adjectif tangible, au sens où les objets et/ou les outils considérés sont réels, faits de matière. Ces objets et/ou outils matériels, peuvent être manipulés, touchés, ils sont donc aussi tangibles. Cependant, des objets numériques peuvent aussi être tangibles. En particulier lors de l'usage de technologies tactiles, les doigts sont directement en contact avec l'écran, les interactions se font par le toucher. Laborde et Laborde (2014) parlent aussi de représentations dynamiques et tangibles à l'interface d'un logiciel de géométrie dynamique. L'adjectif numérique est choisi même si en mathématiques le terme numérique se rapporte aussi aux nombres et peut donc, dans certaines situations, prêter à confusion. Le mot virtuel est rejeté car il se rapporte à ce qui n'est qu'en puissance, qu'en état de simple possibilité par opposition à ce qui est en acte. Or justement, comme il a été dit précédemment, les environnements numériques permettent de re-matérialiser les objets mathématiques abstraits, qui sont invisibles et virtuels.

Dans le prolongement des travaux de Machietto et Soury-Lavergne (2013, 2015) un duo d'artefacts est défini comme l'articulation fructueuse d'un artefact numérique et d'un artefact matériel au sein d'une même situation didactique. Les travaux de ces auteures se font dans la perspective d'une articulation, avec une recherche de continuités et de ruptures, entre les deux artefacts, numérique et matériel. Elles montrent que la complémentarité et les ruptures entre les deux artefacts, numérique et matériel, peuvent être favorables à la conceptualisation. La clé d'une utilisation enrichissante des potentialités d'une technologie numérique consiste à y créer un artefact articulé à un artefact matériel donné, de manière à ce que cette articulation induise une valeur ajoutée pour la conceptualisation. Cette articulation, pour être un réel gain didactique, doit répondre à des critères précisés dans les deux prochains paragraphes.

Une situation didactique pour faire exister le duo

« *Les outils n'ayant de sens que par rapport aux situations dans lesquelles ils sont mis en œuvre* » (Bruillard & Vivet, 1994), l'utilisation d'artefacts, numérique et matériel, ne permet l'apprentissage que lorsqu'ils sont mobilisés dans une situation didactique. Composer un duo d'artefacts c'est donc organiser un milieu, en lien avec l'apprentissage visé, comprenant les deux artefacts et susceptible de rétroactions favorables à cet apprentissage. La situation didactique problématise le recours aux artefacts numérique et matériel, éléments essentiels du milieu et met en œuvre l'articulation entre les manipulations avec chaque artefact. Dans un duo d'artefacts la façon dont l'outil numérique est conçu et exploité conjointement à un outil matériel donné est primordiale. L'élaboration de l'outil numérique et des tâches qui le mobilisent doit permettre de tirer profit du potentiel didactique d'un environnement numérique afin de favoriser certaines trajectoires d'apprentissage. Le cœur d'un duo repose sur la plus-value que peut apporter l'artefact numérique pour la conceptualisation. L'objectif est que chaque artefact enrichisse l'autre, en particulier que l'artefact numérique sollicite de

nouvelles stratégies de résolution; il est primordial que les stratégies suscitées par un artefact complètent celles suscitées par l'autre. Ainsi, dans l'élaboration d'un duo d'artefacts et de la situation qui lui permet d'exister, il s'agit de faire en sorte que l'artefact numérique soit une simulation qui offre une gamme de stratégies et d'interactions, contrôlées par l'utilisateur, qui enrichissent celles avec l'artefact matériel.

Des genèses instrumentales associées

Une analyse des genèses instrumentales et des schèmes d'utilisation (Rabardel, 1995) de l'artefact matériel participe à l'élaboration d'un artefact numérique en termes de continuité et discontinuité entre les deux artefacts. L'approche instrumentale fournit le cadre théorique pour élaborer l'artefact numérique et l'articulation entre les deux artefacts numérique et matériel. Dans une situation mobilisant un duo d'artefacts, numérique et matériel, chaque artefact entraîne le développement de schèmes et par conséquent les deux genèses instrumentales s'entremêlent. Dans un duo d'artefacts, le projet est que chaque artefact enrichisse l'autre afin que les instruments construits en bénéficient. Articuler les artefacts c'est donc les mettre en relation tant en continuité qu'avec certaines discontinuités judicieusement choisies. L'articulation des artefacts doit autoriser, dans un premier temps, des tentatives d'assimilation des schèmes d'utilisation de manière à ce que les éléments qui font l'objet de l'apprentissage soient reliés à ce que le sujet connaît déjà. Dans un second temps, il faut qu'un déséquilibre apparaisse afin que des processus d'accommodation des schèmes soient mis en œuvre pour retrouver un nouvel équilibre et induire un apprentissage (Figure 2). De tels déséquilibres sont provoqués par une discontinuité entre les deux artefacts ; l'artefact numérique doit inclure des éléments supplémentaires relativement à l'artefact matériel. La continuité entre les deux artefacts participera quant à elle à ce que les schèmes d'utilisation construits soient plus puissants, plus polyvalents ; ils pourront ainsi être mobilisés dans un plus grand nombre de tâches. Les instruments fondés par le sujet lors de la mobilisation d'un duo ne sont pas simplement deux instruments juxtaposés ; l'instrument 2 incorpore l'instrument 1. Ce qui conduit à formuler une première hypothèse de recherche : Un duo d'artefacts, numérique et matériel, provoque des genèses instrumentales associées qui conduisent, en particulier, à une genèse instrumentale relative à l'artefact matériel.

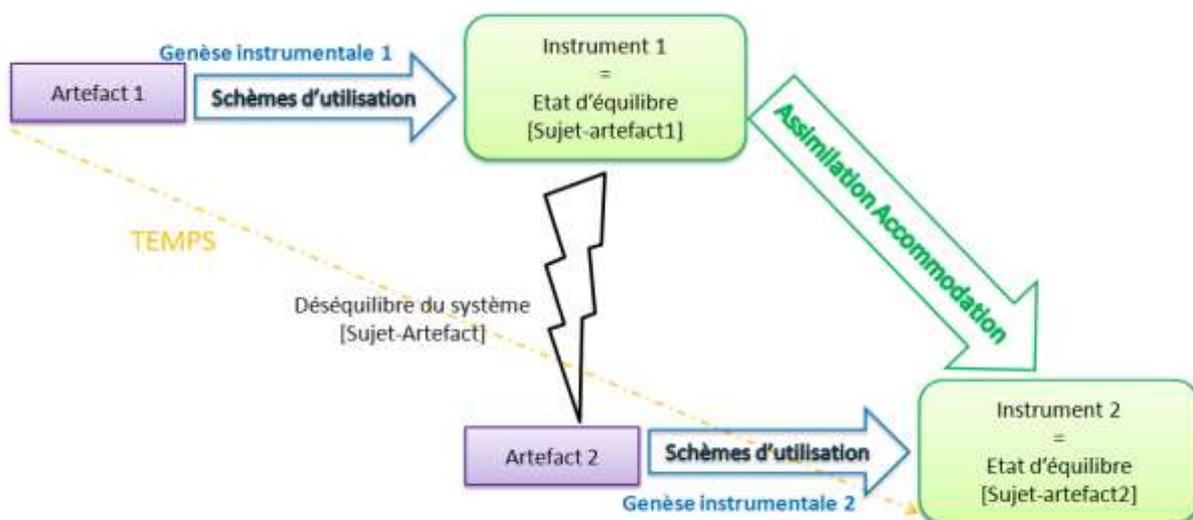


Figure 2 : Un duo d'artefacts engendre des processus d'assimilation et d'accommodation des schèmes d'utilisation d'un instrument à l'autre.

2. Dualité instrument-conception

Au-delà de la caractérisation d'un duo d'artefacts numérique et matériel, il s'agit d'étudier les processus d'apprentissage engagés dans la mobilisation d'un duo d'artefacts dans une situation. Dans cette étude, la notion d'instrument de Rabardel (1995) et la notion de conception de Balacheff (1995) sont mises en cohérence.

Caractériser les connaissances liées à l'émergence d'un instrument

C'est au fond de l'action que se trouve la conceptualisation (Vergnaud, 1996). C'est donc au travers des actions avec les artefacts, numérique et matériel, que la conceptualisation est regardée. Rabardel explique que pour un type donné de tâches, réalisées à l'aide d'un artefact, l'utilisateur développe des structures cognitives, les schèmes d'utilisation, et ainsi élabore un instrument. Les schèmes d'utilisation développés par le sujet en activité ont une fonction épistémique qui traduit la conceptualisation (Rabardel, 1995). Vergnaud (1990) précise lui aussi que c'est dans les schèmes qu'il faut rechercher les connaissances en acte du sujet, c'est-à-dire les éléments cognitifs qui permettent à l'action du sujet d'être opératoire. « *Les schèmes reposent toujours sur une conceptualisation implicite* » (ibid, p. 139). Ainsi un instrument constitué par un sujet est une connaissance du sujet. La mobilisation de cet instrument dans une tâche est donc une instanciation de cette connaissance-instrument par une situation. Le modèle cK ϕ de Balacheff (1995) est un moyen de caractériser les connaissances implicites du sujet liées à la constitution d'un instrument. Ce modèle permet d'explicitier des indicateurs pour identifier les conceptions d'un sujet en situation. Balacheff distingue le concept abstrait, de la connaissance d'un sujet ou d'une institution et d'une conception qui est une instanciation de la connaissance d'un sujet par une situation. Dans le modèle cK ϕ , une conception C est définie par un quadruplet (P, R, L, Σ) dans lequel P est un ensemble de problèmes sur lequel C est opératoire ; R est un ensemble d'opérateurs qui permettent la transformation des problèmes ; L est un système de représentation qui permet d'exprimer les éléments de P et de R ; Σ est une structure de contrôle, elle assure la non contradiction de C. Les éléments cognitifs qui permettent à l'action du sujet d'être opératoire sont situés dans les opérateurs et les contrôles. Un opérateur permet l'action, caractérisée comme la conséquence d'un prédicat. Un contrôle, contient les éléments de décision sur le bien-fondé de l'emploi d'un opérateur ou sur l'état de résolution d'un problème. Un instrument, dans sa partie schèmes d'utilisation, intègre donc des opérateurs qui mobilisent l'artefact et des contrôles : d'une part des contrôles permettant de juger de la validité et des modalités de son utilisation et d'autre part, des contrôles relatifs aux représentations des concepts en jeu. C'est pourquoi dans cette étude, les schèmes d'utilisation sont identifiés à partir d'opérateurs et de contrôles, ce qui permet de caractériser les connaissances liées à l'émergence d'un instrument. Les genèses instrumentales résultent donc de combinaisons d'opérateurs et de contrôles.

Le système [sujet-milieu] enrichi grâce au duo

Les ressorts de la conceptualisation apparaissent comme l'interaction du sujet avec le milieu (Brousseau, 1998). La mobilisation d'un duo d'artefacts dans une situation, à travers l'articulation des artefacts, augmente les occasions de rencontre sujet-milieu ; différents milieux se confrontent. Le duo en situation rend possible la réitération d'expériences en faisant varier les contraintes au cours de l'alternance entre actions instrumentées numériques et actions à l'aide des instruments matériels, et ainsi favorise l'émergence et la transformation des connaissances. Grâce au duo, le système [sujet-milieu] est enrichi et multiplie les occasions d'émergence et de transformation des conceptions au cours de la situation. Un duo est favorable à la mise en œuvre d'un parcours de conceptions d'un état initial supposé à un

état final attendu du système [sujet-milieu] au cours de l’alternance entre les actions instrumentées avec les instruments numériques et celles utilisant les instruments matériels. Cela conduit à la formulation d’une seconde hypothèse de recherche : Un duo d’artefacts numérique et matériel, mobilisé dans une situation, favorise l’évolution des conceptions du sujet et l’acquisition de connaissances.

III. UN DUO D’ARTEFACTS ET UNE SITUATION POUR LA CONCEPTUALISATION DU TRIANGLE

L’enjeu est de composer un duo d’artefacts dédié à la conceptualisation du triangle à partir du problème de sa construction à la règle et au compas. L’artefact matériel du duo est le compas. Il s’agit alors de développer conjointement un artefact numérique articulé au compas matériel et une situation qui mobilise le duo. L’objectif est de donner du sens à l’usage du compas dans ce problème de construction et simultanément de favoriser la conceptualisation du triangle.

L’apprentissage est un processus permettant le passage d’une conception à une autre. Modéliser l’apprentissage nécessite donc d’organiser les conceptions relatives à une connaissance et de définir une problématique d’évolution. Ceci nous amène à caractériser, a priori, les conceptions du triangle et leur évolution.

1. Une problématique d’évolution des conceptions du triangle

L’idée est de définir une problématique d’évolution des conceptions du triangle qui mette en œuvre une déconstruction dimensionnelle du triangle 2D au triangle 1D jusqu’au 0D. La construction du triangle à la règle et au compas nécessite de passer d’une conception triangle-2D, une surface à trois côtés qui est l’appréhension première du triangle pour les enfants, à une conception qui nécessite l’appréhension du 0D pour identifier le troisième sommet comme intersection de lignes. Le projet est donc d’étudier la possibilité de faire exister une conception triangle-1D qui mobilise des opérateurs et des contrôles qui relèvent de la dimension 1. Un parcours de conceptions du triangle est ainsi envisagé (Figure 3).

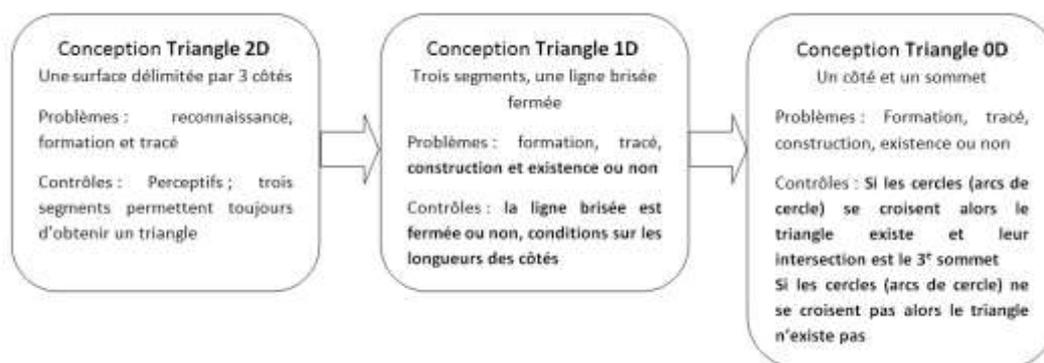


Figure 3 : Parcours de conceptions du triangle.

Chaque conception permet la résolution de nouveaux problèmes et induit un apprentissage. La conception triangle-2D permet de résoudre des problèmes de reconnaissance et de formation de triangles et même des problèmes de tracés de triangles sans contrainte sur les longueurs. Cette conception triangle-2D qui engage des contrôles perceptifs ne permet pas de construire

un triangle à la règle et au compas. La conception triangle-1D permet de résoudre des problèmes de construction de triangles et des problèmes d'existence ou non du triangle. De nouveaux contrôles sur l'existence ou non du triangle sont introduits ; ces contrôles étant inexistant dans la conception triangle-2D. Le passage de la conception triangle-1D à la conception triangle-0D amène le cercle pour identifier une distance. Elle introduit des contrôles sur les cercles caractérisés comme ensemble de points équidistants d'un autre et leur intersection qui détermine ou non le troisième sommet du triangle. Dans cette conception le cercle objet mathématique devient un artefact.

2. Méthodologie de composition du duo d'artefacts et analyse de ses effets

L'objectif est d'élaborer une situation didactique engageant l'utilisation d'un duo d'artefacts, l'artefact matériel compas et un artefact numérique associé, permettant l'évolution des connaissances relatives au triangle et au cercle. Dans ce travail deux autres visées sont aussi en jeu. D'une part la situation mobilisant le duo d'artefacts doit pouvoir être intégrée dans de réelles pratiques de classe. D'autre part, il s'agit d'amener la géométrie dynamique à l'école primaire. Ces deux dernières visées interviennent également dans les choix faits au cours de l'élaboration de la situation et de la composition du duo.

Une ingénierie didactique collaborative

Le duo d'artefacts et la situation en quatre phases (Figure 4), sont élaborés lors d'un travail collaboratif entre chercheurs et enseignants. Ce travail, se réalise au cours d'un processus itératif qui articule des phases d'élaboration de la situation et de composition du duo et des phases d'expérimentations en classe. Ces expérimentations conduites en conditions réelles de classe visent à mettre à l'épreuve de l'expérimentation le duo d'artefacts et la situation et ainsi à les faire évoluer au fil du temps. La prise en compte des observations et résultats des expérimentations alimente, par rétroaction, le processus de composition du duo et conduit à modifier la situation. Les choix de composition du duo sont constamment révisés en se basant sur l'expérience et l'analyse des données recueillies, jusqu'à l'obtention d'une version considérée comme optimale (Collins, Joseph, & Bielaczyc, 2004).

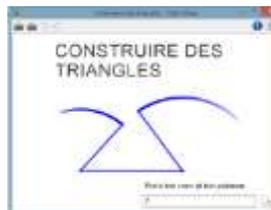
Phase 1



Phase 2



Phase 3



Phase 4



Figure 4 : Une situation en quatre phases qui alterne cahiers informatisés et activités papier-crayon.

Associer des enseignants à la composition du duo semble bénéfique dans la mesure où, dans ce travail, les hypothèses de recherche concernent l'effet du duo sur les apprentissages des élèves. Tester ces hypothèses dans de réelles conditions de classe est donc primordial. En outre, la composition du duo concerne la fonction pragmatique des instruments. Cette fonction est visible pour les enseignants qui peuvent intervenir dans l'élaboration des artefacts et leur articulation dans une situation. En effet, dans leur classe les enseignants observent les

actions des élèves et leurs productions à l'aide des différents instruments. La fonction épistémique des instruments, le développement de schèmes et donc de connaissances est moins évidente pour les enseignants. C'est pourquoi, dans le cadre de ce travail, les enseignants n'ont plus été associés à la phase d'évaluation de l'ingénierie didactique. L'évaluation de la confrontation analyse a priori, analyse a posteriori a été faite uniquement par la chercheuse.

Une orchestration (Trouche, 2005) du duo d'artefacts numérique et matériel est pensée a priori dans le processus d'élaboration. Le choix est fait d'alterner les activités dans l'environnement numérique et dans l'environnement papier-crayon. Chaque phase, cahier informatisé ou activité papier-crayon, est traitée individuellement par les élèves et après chaque phase une synthèse en classe entière est faite par les enseignants. Ces synthèses conduisent à discuter les propositions des élèves et à faire un bilan des apprentissages de la phase. L'appropriation de la situation par d'autres enseignants et donc la mise en œuvre d'autres orchestrations n'est pas étudiée dans ce travail.

Des expérimentations en condition réelle de classe trois années consécutives

La situation est élaborée sur trois années consécutives, ainsi plus de 130 élèves ont testé le duo d'artefacts au cours de son évolution. Les expérimentations ont toutes été réalisées dans des classes de CM2 (deux classes par année) de la même école élémentaire. Elles ont été réalisées en condition réelle de classe ; les consignes et les synthèses étaient conduites par les enseignants. Des captures vidéo du travail de chaque élève dans les cahiers informatisés ont été réalisées les trois années. Les deux premières années, seuls trois élèves par classe étaient filmés dans les activités papier-crayon. Toutes les productions étaient ramassées. Ces productions finales ne rendent pas compte du déroulement des actions des élèves, des étapes intermédiaires mises en œuvre et sont donc insuffisantes pour extraire des informations pertinentes relativement à l'évolution des conceptions des élèves sur le triangle et relativement aux instruments compas élaborés. La troisième année, trois élèves sur quatre ont donc été filmés dans les activités papiers-crayon.

Des analyses a priori et a posteriori en termes d'opérateurs et de contrôles

L'évaluation des effets du duo d'artefacts en situation est fondée sur la confrontation entre analyse a priori et analyse a posteriori. Le modèle cK ϕ (Balacheff, 2013) permet de déterminer des observables, décrits à l'aide d'opérateurs et de contrôles, pour d'une part, construire l'analyse a priori et d'autre part, interpréter les observations et proposer une explication des actions des élèves en termes d'instrumentation et de conceptualisation. Le modèle cK ϕ est utilisé d'une part, pour décrire par des quadruplets (P, R, L, Σ) différentes conceptions du triangle, et d'autre part, pour décrire a priori des stratégies de résolution des différentes tâches proposées par la situation dans chaque environnement numérique ou papier-crayon. Les stratégies ainsi décrites, par un enchaînement d'opérateurs et de contrôles, peuvent être confrontées aux observations. L'analyse consiste alors à étudier les opérateurs et les contrôles effectivement engagés par les élèves pour caractériser, au fil des quatre phases de la situation, des stratégies de résolution réellement mises en œuvre, les différents instruments élaborés, des conceptions révélées sur le triangle, ainsi que des parcours de conceptions.

3. Une situation qui articule compas matériel et cahiers informatisés

Soutenue par la caractérisation de l'apprentissage par adaptation à un milieu (Brousseau, 1998), l'élaboration d'une situation didactique consiste à organiser un milieu représentant les

savoirs à acquérir. L'enjeu est de provoquer la conceptualisation 1D du triangle ainsi qu'une nouvelle genèse instrumentale du compas, grâce à des actions sur les segments côtés du triangle, unités visuelles 1D. Notre intention est de proposer des tâches qui détachent les côtés du triangle de la surface qu'ils délimitent et qui permettent d'identifier des relations entre les côtés. Le but est de coordonner des manipulations de segments dynamiques de longueurs fixes données à des activités à partir de segments tracés dans l'environnement papier-crayon. Les choix de variables didactiques ainsi que les problèmes à résoudre, au fur et à mesure de la situation, doivent permettre l'élaboration de stratégies et donc l'acquisition et l'évolution des connaissances des élèves. Trois variables didactiques sont en jeu. La première est la longueur des segments proposés. S'intéresser à la construction d'un triangle de longueurs des côtés données amène à se poser la question de l'existence ou non du triangle. Souhaitant prendre en compte cette question dans la situation, les longueurs des segments proposées vérifient ou non l'inégalité triangulaire. Une potentialité d'un environnement de géométrie dynamique étant le déplacement des objets, la deuxième variable didactique en jeu est le déplacement des segments proposés. Enfin, la construction de figures se faisant aux instruments la troisième variable didactique concerne les artefacts disponibles aussi bien dans l'environnement papier-crayon que dans l'environnement numérique. Quatre types de problèmes sont à résoudre au fil des quatre phases de la situation (Figure 4): des problèmes de formation de triangle, des problèmes de tracés de triangles, des problèmes de construction de triangles et des problèmes d'existence ou non du triangle.

Des segments numériques d'apparence et de comportement asymétriques

La technologie qui, dans cette recherche, permet de développer des environnements informatisés est le logiciel Cabri Elem¹. Le compas de géométrie dynamique est proposé par cet environnement, cependant l'artefact numérique instrumenté dans le duo est le déplacement d'un point par rotation. En effet, l'environnement numérique développé inclut une approche expérimentale basée sur des manipulations directes de représentations dynamiques de segments. Le premier cahier d'activités informatisé nommé « A la découverte des triangles » comprend cinq pages d'activités numérotées de 1 à 5 (Figure 5).

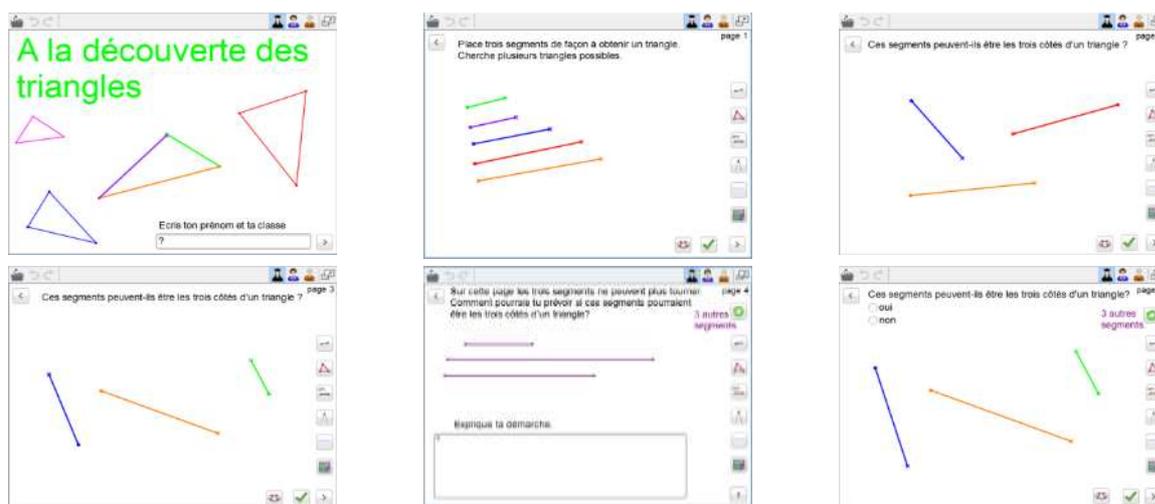


Figure 5 : Les différentes pages du premier cahier informatisé.

Ce cahier informatisé, amène à traiter deux tâches : former des triangles par manipulations directes de segments de longueurs fixes données (page 1), et déterminer si trois segments

¹ Le logiciel Cabri Elem est développé par la société Cabrilog et utilisé dans mon travail dans le cadre d'une collaboration scientifique entre l'entreprise Cabrilog et l'Institut Français de l'Éducation.

donnés peuvent être les trois côtés d'un triangle (page 2, 3, 4 et 5). La deuxième tâche à propos de l'existence ou non d'un triangle est une question mathématique qui problématise la recherche et la formation d'un triangle et donc le recours aux déplacements des segments.

L'environnement numérique permet de contraindre deux déplacements différents pour un segment. Les segments proposés sur les pages 1, 2, 3 et 5 sont donc asymétriques à l'écran dans leur représentation et au cours de leur mouvement. Deux déplacements sont possibles pour un segment : déplacer le segment entier par translation en attrapant le segment ou son extrémité ronde ; faire pivoter le segment autour de l'extrémité ronde qui reste fixe en attrapant le segment par son extrémité cruciforme (Figure 6).

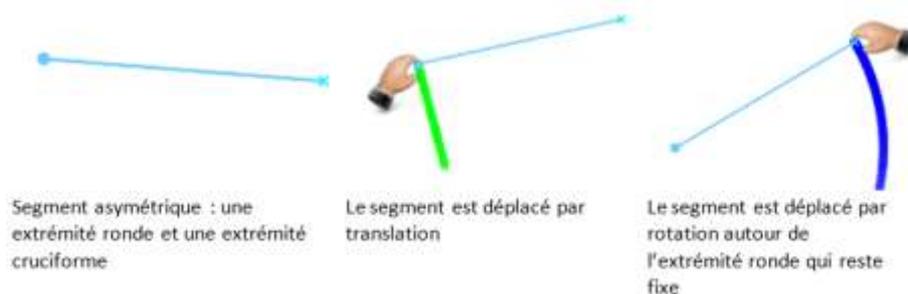


Figure 6 : Des segments asymétriques à l'écran et dans leur comportement.

La distinction graphique des extrémités, ronde ou cruciforme, permet à l'utilisateur d'anticiper le mouvement avant de bouger le segment. Cette asymétrie de déplacement des segments participe à la dynamique de la situation et à la mise en place de stratégies porteuses de savoirs et de sens. Le fait que les deux extrémités d'un segment ne pivotent pas oblige la dissociation des deux déplacements, par translation ou par rotation autour d'une extrémité qui reste fixe, et induit la mise en valeur de la rotation indispensable pour former un triangle à partir des segments numériques. Ceci n'est pas le cas avec des manipulations d'objets matériels comme des pailles ou des baguettes lors desquelles les deux déplacements sont réalisés conjointement. Cette contrainte de double déplacement provoque donc la genèse instrumentale d'un instrument déplacement par rotation pour pivoter un segment numérique autour d'une extrémité qui reste fixe. De plus cette asymétrie de mouvement des segments induit une stratégie gagnante efficace pour former un triangle dans l'environnement numérique. Le fait que les deux extrémités d'un segment ne pivotent pas rend fastidieuse la stratégie par ajustement qui consiste à positionner successivement trois segments et à les ajuster progressivement pour former le triangle. Les ajustements efficaces sont les ajustements par rotation. Une stratégie efficace pour former un triangle consiste donc à former, avec trois segments, une ligne brisée dont les extrémités sont cruciformes. Le triangle est ensuite obtenu en faisant pivoter les deux segments extrêmes de la ligne brisée (Figure 7).

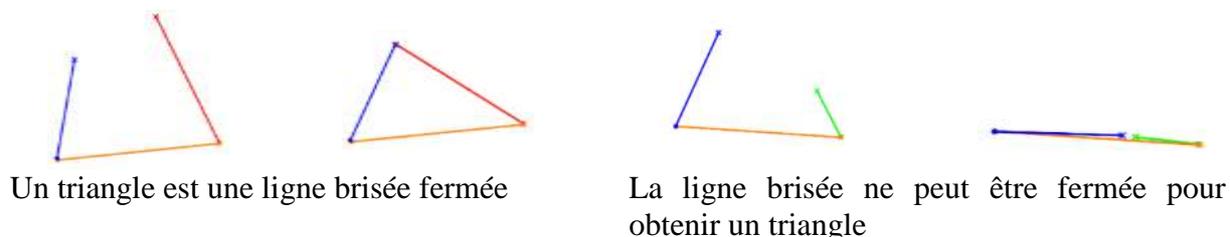


Figure 7 : La stratégie ligne brisée pour former un triangle ou constater que le triangle n'existe pas.

L'environnement numérique permet donc de créer un milieu dont les segments d'apparence et de comportement asymétriques sont des éléments essentiels qui provoquent l'élaboration d'un instrument déplacement par rotation pour pivoter un segment autour d'une extrémité qui reste fixe et qui conduisent à la mise en œuvre d'une stratégie ligne brisée. Cette stratégie ligne brisée amène à penser la ligne brisée que l'on ne peut fermer pour obtenir un triangle et donc l'inexistence du triangle (Figure 7).

Un duo déplacement par rotation et compas matériel

Dans la construction du triangle à la règle et au compas, le compas ne rend pas visibles les segments côtés du triangle. La technologie numérique permet de les rendre visibles dans le premier cahier informatisé. Dans l'environnement papier-crayon, il s'agit pour les élèves de poursuivre l'exploration du triangle à partir de ses trois côtés. Une des caractéristiques d'un duo, mobilisé dans une situation, est que l'articulation des artefacts se fasse dans une certaine continuité. C'est pour cette raison que sont intégrés dans le milieu constitué par la première activité papier-crayon les objets sur lesquels la stratégie ligne brisée fonctionne dans le cahier informatisé : la ligne brisée et les segments côtés. La première activité papier-crayon consiste à tracer des triangles dont les côtés sont donnés sous forme de segments tracés sur la feuille. Les segments proposés sont soit disposés en ligne brisée soit parallèles les uns aux autres. Plusieurs configurations de trois segments sont proposées (Figure 8). Dans un souci de continuité avec les manipulations des segments dynamiques dans le cahier informatisé, la consigne est encore formulée en termes de segment et non en termes de longueurs. Dans chaque cas, la consigne est la même : « Peut-on obtenir un triangle avec les segments proposés ? Si oui, le tracer ». Dans le prolongement du premier cahier informatisé, dans cette première activité papier-crayon des triplets de longueurs vérifient l'inégalité triangulaire et d'autres ne la vérifient pas. Pour réaliser ces tâches, une boîte à outils de géométrie contenant, le crayon, la règle graduée, l'équerre et le compas, est disponible.

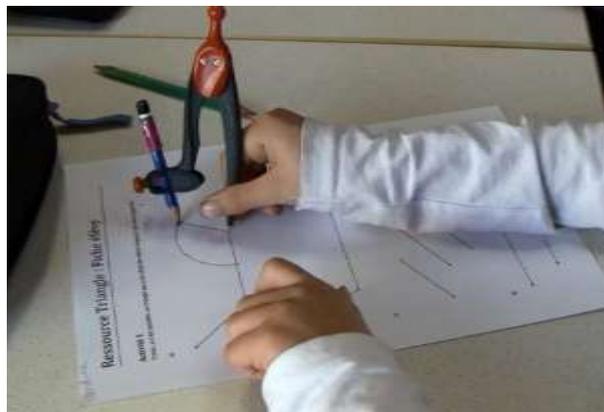


Figure 8 : Illustration de la première activité papier-crayon.

La ligne brisée est l'élément de continuité du duo ; c'est elle qui va permettre de passer du déplacement par rotation au compas matériel (Voltolini, 2014). Les manipulations directes et continues des segments n'étant plus possibles, les outils de géométrie vont être mobilisés pour remplacer les déplacements par translation et rotation de l'environnement numérique. Un nouvel instrument compas est élaboré : le compas pour pivoter un segment. Pivoter le compas revient à pivoter un segment entre ses branches. Dans l'environnement numérique c'est le même segment qui se déplace mais dans l'environnement papier-crayon le compas produit un cercle (arc de cercle) qui est la trace de l'extrémité du segment pivoté. Le segment résultat du pivotement doit donc être tracé de même longueur que le segment initial (Figure 9).



Figure 9 : Un nouvel instrument compas pour pivoter un segment dans la construction du triangle.

La mobilisation du compas matériel est ainsi coordonnée au déplacement par rotation autour d'une extrémité d'un segment numérique dans le premier cahier informatisé. D'une part, le segment numérique asymétrique dans sa représentation à l'écran et dans ses déplacements rappelle le compas matériel : une pointe qui reste fixe et une mine qui tourne. D'autre part, l'instrumentation du déplacement par rotation pour pivoter un segment numérique produit des schèmes d'utilisations qui peuvent s'étendre par assimilation et accommodation à des schèmes d'utilisation du compas matériel. On peut décrire par un enchaînement d'opérateurs (r) et de contrôles (Σ) un schème d'utilisation pour pivoter un segment numérique : distinguer les deux extrémités du segment (ΣExtr) puis attraper l'extrémité cruciforme et déplacer par rotation le point extrémité ($r\text{Rot} + \Sigma\text{Rot}$). On peut décrire un schème d'utilisation pour pivoter un segment à l'aide du compas matériel : distinguer les deux branches du compas et piquer la pointe sur l'extrémité du segment qui reste fixe (ΣPointe), écarter les branches pour poser la mine sur l'extrémité à pivoter (ΣMine), puis pivoter le compas en maintenant l'écartement fixe et produire une trace visible ($r\text{Pi}1$), enfin tracer le segment résultat du pivotement ($r\text{Pi}2 + \Sigma\text{S}$). On identifie des assimilations et des accommodations entre les schèmes d'utilisation d'un instrument à l'autre. Dans chaque schème d'utilisation pour pivoter un segment, dans l'environnement numérique ou dans l'environnement papier-crayon, il faut distinguer : les extrémités du segment ; les branches du compas. Dans chaque schème il faut pivoter : le segment ; le compas. Lors de l'utilisation du compas matériel des accommodations sont nécessaires : il est essentiel de maintenir l'écartement du compas matériel fixe (la permanence des longueurs n'est pas automatique); le compas produit une trace visible, trace de l'extrémité du segment qui pivote ; le segment initial ne pivotant pas il faut tracer le segment résultat du pivotement.

Une conception 1D du triangle incluse dans la stratégie gagnante

La stratégie ligne brisée, stratégie gagnante de l'environnement numérique, est encore une stratégie efficace pour construire un triangle dans l'environnement papier-crayon. Tracer une ligne brisée constituée des trois segments puis pivoter les segments extrêmes de la ligne brisée à l'aide du compas (Figure 9) permet d'apprendre la construction du triangle à la règle et au compas sans aller jusqu'à la conceptualisation du point. Cette stratégie, d'une part provoque une nouvelle genèse instrumentale du compas pour pivoter un segment entre ses branches et, d'autre part, induit une conception 1D du triangle. La conception triangle-1D-ligne brisée : un triangle est une ligne brisée fermée de trois segments, permet de résoudre le problème de construction du triangle ainsi que le problème d'existence ou non du triangle (Figure 9). Ce dernier problème ne pouvait être résolu avec une conception triangle-2D. La stratégie ligne brisée est donc une stratégie porteuse d'apprentissage. C'est une première étape dans la déconstruction dimensionnelle du triangle 2D au triangle 1D. Elle est associée à une conception 1D du triangle qui apporte une structure de contrôle nouvelle sur l'existence ou non du triangle par rapport à la conception triangle-2D.

Les cercles sous-jacents à la construction du triangle

Les deux dernières phases de la situation n'ayant pas été présentées lors du séminaire de l'ARDM, elles ne sont décrites ici que succinctement. Le second cahier informatisé, «Construire des triangles», a pour objectif d'amener les cercles sous-jacents à la construction du triangle. La construction de cercles doit être la stratégie gagnante efficace pour résoudre le problème. La technologie Cabri Elem permet de mettre à la disposition de l'utilisateur certains outils de géométrie dynamique bien choisis. Cette opportunité est utilisée pour contraindre l'utilisation de l'outil cercle dans les stratégies. En effet, dans ce second cahier informatisé, c'est par un jeu sur les outils disponibles que le cercle devient l'outil de la situation. Dans un premier temps, l'outil cercle est utilisé pour vérifier si une ligne brisée peut-être le contour d'un triangle ou non. D'outil pour vérifier, il devient ensuite outil pour produire. Dans un second temps, il s'agit d'utiliser l'outil cercle pour déterminer le troisième sommet du triangle. La situation se termine par une deuxième activité papier-crayon mobilisant le compas matériel dans la construction de triangles. Cette deuxième activité papier-crayon consiste à tracer si cela est possible, des triangles dont les longueurs des côtés sont données par leurs mesures. Cette activité marque la fin de la situation et permet de faire un bilan des apprentissages menés à bien grâce à la mobilisation des artefacts numériques articulés au compas matériel.

IV. EXPERIMENTATIONS ET RESULTATS

1. Instrument et conception deux états d'équilibre du système [sujet-milieu] mis en relation

La conceptualisation en termes de genèses de conceptions et de parcours de conceptions est analysée grâce au modèle cKç de Balacheff. Dans cette étude ce modèle permet de relier instrumentation et conceptualisation et de caractériser les connaissances liées à l'émergence d'un instrument. Une conception n'est pas une sous partie, un zoom des connaissances implicites sur lesquelles repose l'opérationnalité des schèmes d'utilisation d'un instrument. C'est une ré-ouverture, une mise en relation. Instrument et conception sont deux états d'équilibre du système [sujet-milieu] « réversibles » (Figure 10).

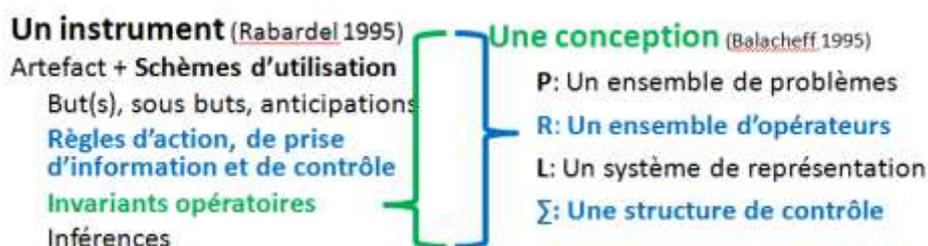


Figure 10 : Une dualité « réversible » entre instrument et conception.

D'un côté, les schèmes d'utilisation d'un instrument reposent sur des connaissances implicites caractérisées en conceptions. De l'autre côté, les problèmes sur lesquels une conception est opératoire incitent à la mobilisation des instruments. Les opérateurs qui permettent la résolution des problèmes et les contrôles qui assurent la non contradiction de la conception comprennent des règles d'action et de contrôle sur les artefacts.

2. Une conception 1D du triangle qui résulte du duo d'artefacts en situation

L'analyse de 34 productions d'élèves de la dernière année d'expérimentation (les 34 élèves pour lesquels des captures vidéo des quatre phases de la situation étaient disponibles) a permis d'identifier les effets du duo d'artefacts sur les apprentissages. Le duo d'artefacts, déplacement par rotation et compas matériel, mobilisé dans la situation permet à 31 élèves sur 34 de mettre en œuvre la construction d'un triangle de longueurs des côtés données à la règle et au compas (Figure 11).

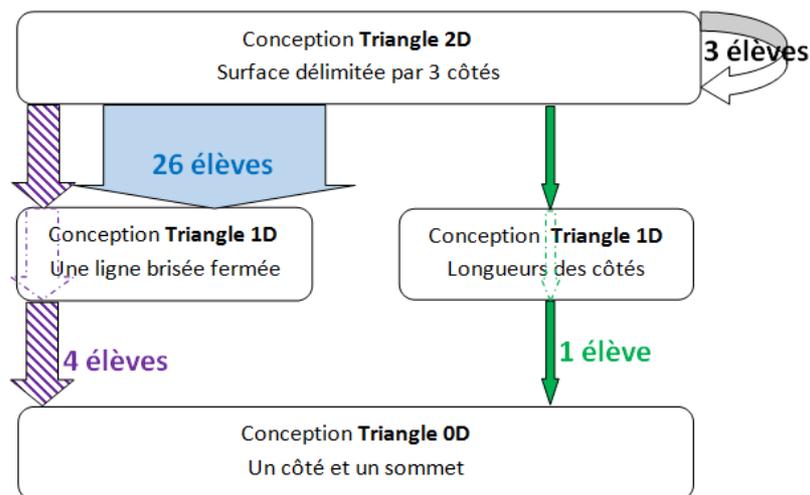


Figure 11 : Une évolution des conceptions du triangle du 2D \rightarrow 1D \rightarrow 0D.

Dès la première page du premier cahier informatisé on observe des interactions des élèves avec les segments numériques afin de les déplacer. Les élèves voudraient pouvoir pivoter les deux extrémités de chaque segment. Dans un premier temps l'extrémité ronde est attrapée et le pointeur est déplacé dans un mouvement circulaire. Dans un second temps le double déplacement des segments est appréhendé ; l'élève comprend que seule une action sur l'extrémité cruciforme permet de pivoter le segment. La stratégie ligne brisée apparaît comme la stratégie gagnante efficace pour former un triangle dans l'environnement numérique constitué par le premier cahier informatisé. Elle est transposée dans l'environnement papier-crayon (Figure 9) par 30 élèves sur 34 (Figure 11). Cette stratégie provoque une nouvelle genèse instrumentale du compas utilisé pour pivoter un segment. Les captures vidéo permettent de relever le discours de Luna : « La ligne brisée ça nous aide parce qu'avant on savait pas qu'il fallait utiliser le compas pour tracer un triangle ».

Un triangle en tant que ligne brisée fermée est une nouvelle conception 1D du triangle qui résulte du duo d'artefacts en situation. La ligne brisée constitue une étape de dimension 1 dans la déconstruction dimensionnelle du triangle qui n'oblige pas, dans un premier temps, à la conceptualisation du point dans la construction du triangle à la règle et au compas. L'analyse des 34 productions fait aussi ressortir une autre conception triangle 1D-longueurs des côtés. Cette conception permet de résoudre le problème d'existence ou non du triangle par comparaison de la somme des petites longueurs à la plus grande, mais ne permet de résoudre le problème de construction du triangle à la règle et au compas. Enfin on observe que 5 élèves construisent le triangle à la règle et au compas sans le tracé intermédiaire de la ligne brisée. Ces élèves ont donc développé une conception du triangle intégrant le 0D.

3. Des parcours d'instruments et de conceptions du triangle

Des parcours individuels d'instruments et de conceptions du triangle ont été réalisés pour chacun des 34 élèves, à partir de l'identification des opérateurs (r) et contrôles (Σ) réellement mobilisés. Par exemple, le travail d'un élève conduit aux parcours de la Figure 12. Dans le premier cahier informatisé, cet élève élabore un instrument déplacement par rotation pour pivoter un segment puis, dans la première activité papier-crayon il mobilise le compas matériel comme instrument pour pivoter un segment. Les tâches proposées dans le second cahier informatisé l'amène à mobiliser le cercle de la géométrie dynamique, d'une part pour pivoter les segments extrêmes d'une ligne brisée et d'autre part, pour identifier une distance et déterminer le troisième sommet du triangle. De retour dans l'environnement papier-crayon dans la quatrième phase de la situation, il effectue la construction du triangle à l'aide du tracé intermédiaire de la ligne brisée. Il mobilise à nouveau l'instrument compas pour pivoter un segment. Cet élève a donc clairement développé une conception triangle-1D-ligne brisée avec un passage « furtif » par une conception triangle-0D dans le second cahier informatisé. Cette conception triangle-0D nécessite encore d'être consolidée.

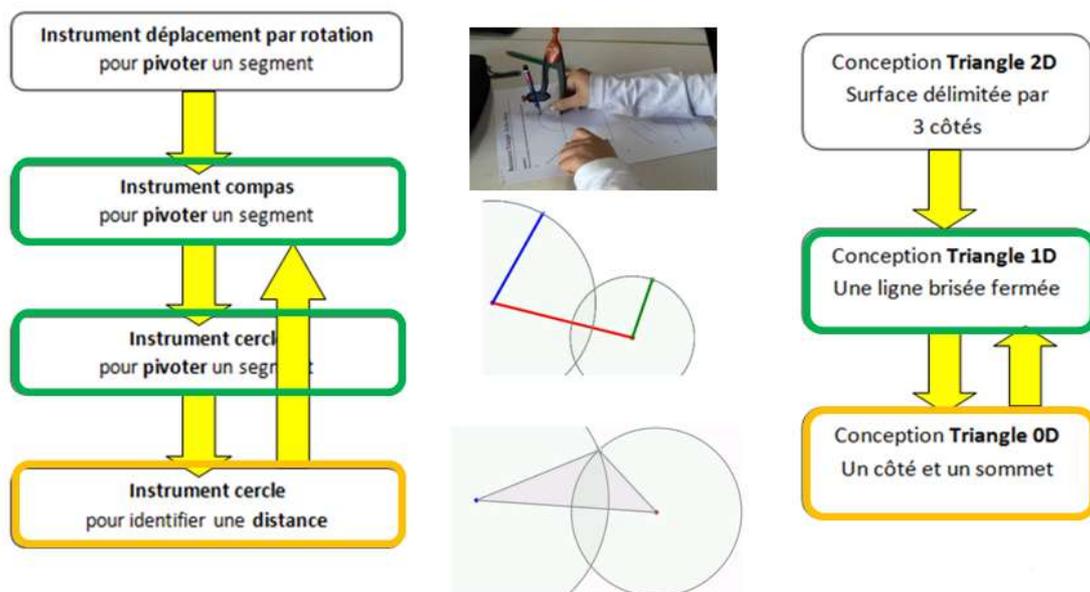


Figure 12 : Les parcours d'instruments et de conceptions du triangle d'un élève.

Les limites de la situation : faire évoluer les conceptions sur le cercle

Un des enjeux de ce travail était d'amener le cercle, objet mathématique, dans la construction du triangle et de faire évoluer les conceptions des élèves sur le cercle. L'instrument compas pour pivoter un segment entre ses branches devrait être un moyen de développer une conception du cercle comme la trajectoire de l'extrémité d'un segment qui pivote. En outre, le cercle de la géométrie dynamique devait amener le cercle objet mathématique comme outil pour identifier une distance. Les expérimentations n'ont pas permis de pouvoir caractériser les conceptions du cercle engagées par les élèves. Deux hypothèses peuvent être formulées pour l'expliquer : d'une part, la situation ne problématise pas le cercle et d'autre part, utiliser l'outil cercle de la géométrie dynamique nécessite une identification du centre et du rayon du cercle ce qui implique une déconstruction dimensionnelle du cercle en son rayon 1D et en son centre 0D difficile à mettre en œuvre par les élèves de l'école primaire.

V. CONCLUSION

L'objet de cette recherche était d'étudier l'introduction des technologies numériques comme environnement complémentaire à des activités papier-crayon pratiquées dans des situations ordinaires de classe. A partir d'un apprentissage du cycle 3, le problème de la construction du triangle à la règle et au compas, les éléments caractéristiques à la composition d'un duo d'artefacts numérique et matériel et son incidence sur les apprentissages ont été illustrés. Afin de favoriser la connaissance individuelle des élèves, les deux caractéristiques principales d'un duo d'artefacts numérique et matériel, sont d'une part d'être sollicité au sein d'une situation didactique et d'autre part, que les artefacts numérique et matériel s'enrichissent l'un l'autre. Un duo d'artefacts en situation engendre des genèses instrumentales associées qui conduisent en particulier à une genèse instrumentale relative à l'artefact matériel. En outre, un duo d'artefacts en situation rend possible la réitération d'expériences en faisant varier les contraintes au cours de l'alternance des actions instrumentées numériques et matérielles et ainsi favorise l'émergence et la transformation des connaissances des élèves. L'exemple du duo d'artefacts composé à partir du problème de la construction du triangle à la règle et au compas, met en évidence comment l'articulation entre des manipulations dans un environnement de géométrie dynamique et l'utilisation du compas matériel permet aux élèves d'élaborer un nouvel instrument compas pour pivoter un segment. De plus le duo d'artefacts conduit à l'élaboration de stratégies porteuses d'apprentissage. La stratégie ligne brisée, qui consiste à former une ligne brisée de trois segments et à faire pivoter les segments extrêmes, stratégie efficace dans l'environnement numérique et dans l'environnement papier-crayon, permet de mettre en œuvre une déconstruction dimensionnelle du triangle et participe à l'élaboration d'une conception 1D du triangle comme une ligne brisée fermée. Le duo d'artefacts en situation est donc une valeur ajoutée au compas matériel qui aide à franchir l'obstacle de la règle graduée et à induire la pertinence géométrique du compas dans la construction du triangle et qui participe à l'élaboration et à l'évolution des connaissances des élèves sur le triangle.

Cette recherche montre qu'il est possible de faire de la géométrie 1D sans nécessairement aller jusqu'à la conceptualisation du point à l'école primaire. Elle ouvre ainsi de nouvelles perspectives de recherche. Il pourrait en effet être intéressant de prolonger la réflexion en composant d'autres duos d'artefacts pour la conceptualisation 1D d'autres figures géométriques usuelles. D'autres duos d'artefacts pourraient aussi être envisagés pour observer la conceptualisation des objets de base de la géométrie (le cercle, le segment, la droite, le point) en relation avec les instruments qui permettent de les construire.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- ARTIGUE, M. (2008). L'influence des logiciels sur l'enseignement des mathématiques, contenus et pratiques. *Actes du séminaire DGESCO de février 2007*.
- BALACHEFF, N. (1995). Conception, connaissance et concept. In Denise Grenier (Ed.) *Didactique et technologies cognitives en mathématiques, séminaire 1994-1995* (pp. 219–244). Grenoble : Université Joseph Fourier.
- BALACHEFF, N. (2013). cKç, a model to reason on learners' conceptions. In M. V. Martinez & A. Castro Superfine (Eds.) (pp. 2–15). Chicago IL, USA. Retrieved from <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00853856>
- BROUSSEAU, G. (1998). *La théorie des situations didactiques*. Grenoble : La pensée Sauvage.
- BRUILLARD, E. & VIVET, M. (1994). Concevoir des EIAO pour des situations scolaires. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(1.2), 275–304.
- COLLINS, A., JOSEPH, D. & BIELACZYK, K. (2004). Design Research: Theoretical and Methodological Issues. *Journal of the Learning Sciences*, 13(1), 15–42. https://doi.org/10.1207/s15327809jls1301_2

- DRIJVERS, P., BALL, L., BARZEL, B., HEID, M. K., CAO, Y., & MASCHIETTO, M. (2016). *Uses of technology in lower secondary mathematics education; A concise topical survey*. New York: Springer. Retrieved from <http://link.springer.com/10.1007/978-3-319-33666-4>
- DUVAL, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 10, 5–55.
- DUVAL, R., & GODIN, M. (2005). Les changements de regard nécessaires sur les figures. *Grand N*, 76, 7–27.
- GUEUDET, G., BUENO-RAVEL, L. & POISARD, C. (2014). Teaching Mathematics with Technologies at Kindergarten: Resources and Orchestrations. In A. Clark-Wilson, O. Robutti & N. Sinclair (Eds.), *The Mathematics Teacher in the Digital Era* (Vol. 2, pp. 213–240). Springer.
- HOUEMENT, C. (2007). A la recherche d'une cohérence entre géométrie de l'école et géométrie du collège. *Repères IREM*, 67, 69–84.
- HOYLES, C. & LAGRANGE, J.-B. (Eds.). (2010). *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain* (Vol. 13). Boston, MA: Springer US. Retrieved from <http://link.springer.com/10.1007/978-1-4419-0146-0>
- LABORDE, C., KYNIGOS, C., HOLLEBRANDS, K., STRÄBER, R., GUTIERREZ, A. & BOERO, P. (2006). Teaching and learning geometry with technology. In *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, Present and Future* (pp. 275–304). Rotterdam: Sense Publishers.
- LABORDE, C. & LABORDE, J.-M. (2014). Dynamic and Tangible Representations in Mathematics Education. In S. Rezat, M. Hattermann & A. Peter-Koop (Eds.), *Transformation - A Fundamental Idea of Mathematics Education* (pp. 187–202). New York, NY: Springer New York. Retrieved from http://link.springer.com/10.1007/978-1-4614-3489-4_10
- MASCHIETTO, M. & SOURY-LAVERGNE, S. (2013). Designing a duo of material and digital artifacts: the pascaline and Cabri Elem e-books in primary school mathematics. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 45(7), 959–971. <https://doi.org/10.1007/s11858-013-0533-3>
- MOYER-PACKENHAM, P. S. (Ed.). (2016). *International Perspectives on Teaching and Learning Mathematics with Virtual Manipulatives* (Vol. 7). Cham: Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-32718-1>
- PERRIN-GLORIAN, M.-J. & GODIN, M. (2014). De la reproduction de figures géométriques avec des instruments vers leur caractérisation par des énoncés. *Math-Ecole*, 222, 28–38.
- PERRIN-GLORIAN, M.-J., MATHE, A.-C. & LECLERCQ, R. (2013). Comment peut-on penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 à 15 ans ? *Repères-IREM*, 90, 5–41.
- RABARDEL, P. (1995). *Les hommes & les technologies : approche cognitive des instruments contemporains*. Paris France: Armand Colin.
- SINCLAIR, N. & BACCAGLINI-FRANCK, A. (2015). Digital technologies in the early primary school classroom. In *Handbook of International Research in Mathematics Education: Third Edition* (pp. 662–686). Lyn D. English; David Kirshner.
- SOURY-LAVERGNE, S. & MASCHIETTO, M. (2015). Articulation of spatial and geometrical knowledge in problem solving with technology at primary school. *ZDM*, 47(3), 435–449. <https://doi.org/10.1007/s11858-015-0694-3>
- TROUCHE, L. (2005). Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques : nécessité des orchestrations. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 25, 91–138.
- VERGNAUD, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(2.3), 133–170.
- VERGNAUD, G. (1996). Au fond de l'action, la conceptualisation. In J-M, Barbier (pp.275-292). *Savoirs théoriques et savoirs d'action*. Paris: Presses Universitaire de France.
- VOLTOLINI, A. (2014). Un duo d'artefacts virtuel et matériel pour apprendre à construire un triangle à la règle et au compas. *Grand N*, 94, 25–46.
- VOLTOLINI, A. (2017). *Duos d'artefacts matériel et numérique pour l'apprentissage de la géométrie au cycle 3*. Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Lyon, Lyon France.