PLACE ET ROLE DES TECHNOLOGIES DANS L'ENSEIGNEMENT ET L'APPRENTISSAGE DU CALCUL SOUSTRACTIF EN CE2 : PROPOSITION D'INGENIERIE

Anne-Marie **RINALDI**
ESPE Amiens, LDAR
anne-marie.rinaldi@u-picardie.fr

Résumé

Notre recherche conduite dans le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique, nous a menée, suite à une étude épistémologique et didactique, à construire une organisation mathématique de référence autour du calcul soustractif. Cet outil théorique permet d'avancer, en analysant différents manuels scolaires de CE1 et de CE2, et des séances de calcul observées dans des classes de CE2, qu'un déficit en éléments technologiques, expliquerait en partie, les difficultés rencontrées par les élèves pour développer de la flexibilité et de l'adaptabilité en calcul mental et pour effectuer un calcul posé en colonne. Par ailleurs, l'évaluation de l'ingénierie que nous avons conçue, en nous appuyant sur l'organisation mathématique de référence et en restant « assez proche » des pratiques des enseignants, montre les effets positifs d'un travail régulier et progressif à partir des écritures arithmétiques sur les apprentissages des élèves. En revanche, les expérimentations permettent de pointer les limites des situations qui mettent en jeu la propriété de conservation des écarts quand celles-ci n'ont pas assez de potentiel adidactique. En ce sens, la thèse soutenue en décembre 2016 peut servir d'appui pour poursuivre la recherche engagée sur les conditions de viabilité d'une organisation mathématique et d'une organisation didactique susceptible de fédérer le calcul mental et le calcul posé.

Mots clés

Calcul mental et posé, soustraction, organisation mathématique, ingénierie didactique

INTRODUCTION

Nos travaux de recherche (Rinaldi, 2016) portent sur l'enseignement et l'apprentissage du calcul soustractif mental et posé en colonne à l'école élémentaire, plus précisément en CE2, donc pour des enfants de 8 à 9 ans. Selon Boole (1994) et Thompson (1999), le calcul mental consiste à rechercher une stratégie basée sur l'application de résultats connus ou retrouvés rapidement, en combinaison avec l'utilisation de propriétés spécifiques du système de numération décimal et des opérations. Il demande donc de la part du calculateur, de la flexibilité et de l'adaptabilité. Flexibilité car il nécessite de connaitre différentes techniques, et adaptabilité, car il s'agit de mettre en œuvre, en fonction du calcul à effectuer, une technique adaptée. A l'inverse le calcul posé en colonne, même s'il s'appuie sur l'application de résultats connus et conceptuellement sur l'utilisation des propriétés du système de numération décimale et des opérations requiert l'utilisation d'une seule technique algorithmique. Reste alors à définir quelle technique algorithmique enseigner [1] et quelle programmation de l'étude envisager afin d'éviter l'atomisation des savoirs pour reprendre une expression de Chevallard (1999) et d'amener les apprenants à surmonter leurs difficultés. Difficultés au niveau du calcul posé car d'après une étude de Maurel et Sackur (2010), certains élèves font le calcul dans le sens où c'est possible[2]. Par ailleurs, même s'ils arrivent à placer à bon escient un couple de retenues, certains élèves interrogés vont parler d'emprunt alors que dans la soustraction par compensation, on n'emprunte pas une dizaine, on ajoute aux deux nombres une dizaine pour poursuivre le calcul. Difficultés également en calcul mental car les élèves vont, d'après Butlen et Pézard (2007), s'ils n'ont pas appris à faire autrement, poser l'opération en colonne ou utiliser systématiquement des techniques qui incitent à calculer en décomposant canoniquement les deux nombres sans chercher *a priori* à utiliser d'autres techniques[3].

Le contexte institutionnel et professionnel dans lequel se situe la recherche soulève donc une question relative à la nature des savoirs à enseigner. Quels répertoires, quelles propriétés des nombres et des opérations, quelles désignations des nombres introduire surtout si l'objectif recherché est de développer suivant Artigue (Artigue, 2005) la valence pragmatique du calcul (calculer vite et bien) et la valence épistémique du calcul (connaitre les propriétés mathématiques qui interviennent dans l'effectuation d'un calcul). Par ailleurs une fois ces savoirs identifiés se pose la question de leur enseignement. Est-il possible de programmer et d'organiser l'étude en tenant compte de la progressivité des apprentissages, des conditions et des contraintes de l'enseignement ordinaire ?

Pour répondre à ce questionnement initial, nous présentons dans une première partie le cadre théorique, la méthodologie et la problématique de la thèse. Nous donnons par la suite quelques caractéristiques des pratiques relatives à l'enseignement du calcul soustractif basées sur l'analyse de manuels et sur l'observation de séances de classe. Dans une troisième partie, nous indiquons les grandes lignes de l'ingénierie que nous avons conçue puis nous revenons sur les résultats deux expérimentations de l'ingénierie, l'une propre au calcul mental, l'autre visant à introduire la propriété de conservation des écarts. Pour finir nous présentons les résultats, les limites et les perspectives de la recherche.

CADRE THÉORIQUE, MÉTHODOLOGIE ET PROBLÉMATIQUE

Références théoriques préalables

Pour préciser notre questionnement, orienter et conduire la recherche, nous nous sommes placée principalement dans le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique. Nous avons intégré le concept d'organisation mathématique qui permet selon Chevallard (1999) de caractériser l'activité mathématique et le concept d'organisation didactique qui renvoie aux différents moments de l'étude.

[1] Trois techniques cohabitent en France. La première technique consiste à poser en colonne une addition à trou. La seconde dite par emprunt est couramment utilisée dans le monde anglo-saxon. Elle s'appuie exclusivement sur le système de numération décimale. La dernière, dite par compensation s'appuie également sur les propriétés du système de numération décimale tout en sollicitant une propriété de la soustraction : la propriété de conservation des écarts.

[2] Pour effectuer par exemple $53-27$, ils vont effectuer $7-3$ et trouver 34 à la place de 26.

[3] Une technique basée exclusivement sur la décomposition sera efficace pour effectuer par exemple $53-21$ car $53-21=50-20+3-1$ mais problématique pour effectuer le calcul $53-27$ car trois est inférieur à 7.

Nous avons également utilisé le concept d'organisation mathématique de référence. L'organisation mathématique de référence selon Bosch et Gascon (2005) permet au chercheur, pour un sujet donné, ici le calcul soustractif sur les entiers naturels, d'identifier à partir d'une étude épistémologique et didactique l'ensemble des savoirs à enseigner. Dans notre recherche, cette organisation mathématique de référence nous a servi pour concevoir un dispositif d'enseignement (une organisation de l'étude) et comme outil d'analyse de l'existant.

Nous avons aussi emprunté à Robert (2013) les concepts de contrat, d'habitude et de régularité des pratiques pour étudier les pratiques de trois enseignants de CE2 et le concept de zone proximale de développement des pratiques pour concevoir une organisation de l'étude pas trop éloignée des pratiques de l'« enseignement ordinaire ».

Un autre concept, celui d'ingénierie didactique (Artigue, 2011), nous a servi pour définir une méthodologie générale de mise à l'épreuve et d'analyse de l'organisation de l'étude conçue.

Nous présentons maintenant notre méthodologie

Méthodologie

Pour conduire notre recherche nous avons opté pour la méthodologie suivante :

- ✓ Première étape : construction de l'organisation mathématique de référence
- ✓ En second lieu : utilisation et mise à l'épreuve de cet outil pour analyser les pratiques d'enseignants (trois enseignants) et analyser les manuels.
- ✓ En troisième lieu : utiliser l'étude des manuels et notre connaissance des contrats et habitudes des trois enseignants avec lesquels nous avions « travaillé » pour nourrir l'organisation didactique de l'ingénierie. L'organisation mathématique étant elle fondée sur l'organisation mathématique de référence.
- ✓ Pour finir, expérimentation de l'ingénierie dans deux classes avec les enseignants dont nous connaissions les pratiques pour mettre à l'épreuve l'ingénierie en confrontant analyse *a priori* et analyse *a posteriori.*

Nous caractérisons maintenant les éléments qui ressortent de l'étude épistémologique et didactique qui permet d'élaborer l'organisation mathématique de référence autour du calcul soustractif utilisée à plusieurs reprises dans le travail. Elle permettra de formuler la problématique de la thèse.
Cette méthodologie nous a donc conduite à identifier quelques caractéristiques des pratiques relatives à l'enseignement du calcul soustractif que nous préciserons avant de présenter l'ingénierie en elle-même.

Organisation mathématique de référence autour du calcul soustractif

L'organisation propre au calcul soustractif sur les entiers naturels est fédérée autour de quatre organisations mathématiques locales :

- ✓ La première organisation OM1 regroupe les tâches propres à la production de calcul. Tâches qui permettent essentiellement à l'école élémentaire de modéliser les situations additives en référence aux travaux de Vergnaud (1990).

- ✓ La seconde organisation OM2 regroupe les tâches qui consistent à associer ou transformer des représentations sémiotiques. Parmi ces représentations sémiotiques, nous retenons les écritures arithmétiques, les schémas et les expressions langagières. Cette organisation est motivée par OM1 et OM3.
- ✓ La troisième organisation OM3 regroupe les tâches qui vont consister à effectuer un calcul.
- ✓ La dernière organisation OM4 est associée à la réécriture de calculs. C'est celle qui va permettre de montrer quelles sont les propriétés des nombres et des opérations qui sont mobilisée donc de développer la valence épistémique du calcul au sens d'Artigue (2005).

En rapport avec notre recherche, nous avons particulièrement développé l'étude de l'organisation propre à l'effectuation de calculs (OM3). Nous avons identifié différents types de tâches[4] et pour chaque type de tâches les techniques potentielles en nous référant aux travaux de Fuson et al.(1997), Carpenter et al.(1998), Klein et al. (1998) et Thompson (1999). Nous avons regroupé les techniques citées autour de quatre technologies savantes. La première technologie Θ_{DD} s'appuie sur la décomposition des deux nombres, la recomposition d'un nombre, les répertoires additifs et soustractifs, les propriétés de la numération positionnelle décimale (relation décimale entre les positions et le principe de position), les propriétés de la soustraction sur N. Elle génère deux techniques de décomposition τ_{1010}, $\tau_{(1010)'}$ et la technique algorithmique de la soustraction par emprunt[5] . La seconde technologie Θ_D s'appuie sur les mêmes propriétés que la première. Elle ne nécessite pas de décomposer les deux nombres du calcul mais nécessite de décomposer un des deux nombres, en l'occurrence le nombre à soustraire. Elle génère trois techniques séquentielles τ_{N10}, τ_{A10} et τ_{N10C}[6]. La troisième technologie $\Theta_{SOU/ADD}$ s'appuie sur la définition de la soustraction comme opération inverse de l'addition sur les entiers naturels et génère la technique $\tau_{SOU/ADD}$[7]. La dernière technologie Θ_{AN} s'appuie la propriété de conservation des écarts. Elle génère une technique de calcul mental τ_{AN}[8] et l'algorithme de la soustraction par compensation qui consiste à ajouter aux deux termes du calcul si, besoin est, un ou plusieurs multiples de dix ou de cent ou de mille...

---

[4] Ces types de tâches sont soustraire un nombre à un chiffre ($T_{a-\square}$), un multiple de dix ($T_{a-\square 0}$), soustraire un nombre à deux chiffres ($T_{a-\square\square}$), puis un nombre à trois chiffres ($T_{a-\square\square\square}$).

[5] $\boldsymbol{\tau_{1010}}$: technique par décomposition canonique des deux nombres qui consiste à calculer des différences partielles sur des multiples de 100, de 10, de 1 et à les ajouter.
Exemple : $168 - 23 = (100 + 60 + 8) - (20 + 3) = (100) + (60 - 20) + (8 - 3)$
$\boldsymbol{\tau_{(1010)'}}$: technique par décomposition du premier nombre et décomposition canonique du nombre à soustraire qui se rapproche de $\boldsymbol{\tau_{1010}}$.
Exemple : $165 - 27 = (100 + 60 + 5) - (20 + 7) = (100) + (50 - 20) + (15 - 7)$.

[6] $\boldsymbol{\tau_{N10}}$: technique séquentielle où on décompose canoniquement le nombre à soustraire.
Exemple : $125 - 23 = 125 - (20 + 3) = (125 - 20) - 3$.
$\boldsymbol{\tau_{A10}}$: technique séquentielle où on décompose le nombre à soustraire afin d'obtenir des calculs soustractifs intermédiaires plus simples à effectuer. Exemples : $125 - 27 = 125 - (25 + 2) = (125 - 25) - 2$ ou $123 - 70 = 123 - (20 + 50) = (123 - 20) - 50$.
$\boldsymbol{\tau_{N10C}}$: technique séquentielle où on remplace le nombre à soustraire b par un multiple de dix ou de cent supérieur à b et où on compense le surplus. Exemple : $125 - 47 = (125 - 50) + 3$.

[7] $\tau_{SOU/ADD}$: technique par inversion qui consiste à remplacer une soustraction par une addition à trou. Exemple : pour calculer$125 - 47$, on cherche le complément de 47 à 125.

[8] $\boldsymbol{\tau_{AN}}$: technique par translation qui consiste à ajouter (respectivement soustraire) un même nombre à chaque terme du calcul soustractif. Exemple : $125 - 47 = (125 + 3) - (47 + 3)$.

Parallèlement, nous avons cherché quels ostensifs, objets sensibles permettant d'évoquer les concepts selon Bosch et Chevallard (1999) pouvaient être utilisés pour mettre en avant les différentes fonctions des technologies (expliquer, évaluer, valider, motiver) en référence à l'article de Castella et Romo Vasquez (2011). En nous basant sur les études de Teppo et Van den Heuvel-Panhuizen (2014), Ernest (1985), Gravemeijer (1994), Bobis et Bobis (2005), Van den Heuvel-Panhuizen (2008) nous avons émis plusieurs hypothèses. La droite numérique vide (DNV) aiderait à visualiser les différentes étapes d'un calcul donc à expliquer le mode d'emploi des techniques séquentielles. La droite numérique graduée (DNG) aiderait à visualiser l'écart dans le cadre de la mesure. Les écritures chiffrées (EC) et les arbres permettant eux de valider toutes les techniques. Le cadre théorique fixé, nous avons formulé notre problématique.

Problématique de la thèse

Il s'agit de concevoir et d'évaluer une ingénierie viable dans l'enseignement ordinaire qui fédère le calcul mental et le calcul posé autour de deux technologies principales basées sur la décomposition des nombres (Θ_{DD}) et la propriété de conservation des écarts (Θ_{AN}) et qui introduit un travail de réécriture de calculs (OM4) afin d'expliquer et de valider l'ensemble des techniques de calcul soustractif.

L'ORGANISATION MATHEMATIQUE DE REFERENCE : OUTIL D'ANALYSE DES PRATIQUES

Nous avons choisi de nous intéresser à deux collections Outils pour les maths CE1 & CE2 (2012) et Euro Maths (2001) & CE2 (2012). Pour chaque collection nous avons étudié de façon minutieuse les manuels de CE1 et de CE2 et les livres du maître pour repérer les techniques étudiées, les ostensifs introduits et les éléments de technologie présents. Nous avons également observé et analysé des séances de calcul mental conduites dans trois classes de CE2. Nous avons reconstruit à partir du déroulement de chacune d'entre elles, le parcours cognitif proposé par les enseignants. L'étude des manuels nous donne un premier résultat sur les liens entre les organisations mathématiques à enseigner.

Liens entre les différentes organisations mathématiques locales (manuels)

La première organisation mathématique locale OM1 est liée à la production de calculs. Avec Outils pour les Maths, les tâches proposées sont motivées par des énoncés de problèmes et ne mobilisent que des écritures de la forme $a+b$ et $a-b$ que nous appelons expressions numériques. Il n'y a pas de production d'écritures de la forme $a+b=x, a-b=x, a+x=b$ que nous appelons calculs et donc pas d'addition à trou. A l'inverse, les auteurs d'Euro Maths proposent en premier lieu des jeux, des textes reprenant des jeux, des énoncés de problèmes issus de contextes variés pour amener les élèves à produire des calculs et des représentations à partir de la droite numérique vide (DNV).

Au niveau de l'effectuation de calculs (OM3), pour Outils pour les Maths, le calcul mental est exclusivement mental. L'élève ne note que le résultat. Il ne cherche pas en utilisant un papier et un crayon. C'est pourquoi nous n'avons pas relié le calcul mental aux écritures chiffrées. Les auteurs d'Euro Maths proposent à l'élève de réécrire le calcul (de façon isolée cependant) quand celui-ci se prête à l'utilisation de la technique séquentielle τ_{N10}.

Autre élément important qui n'apparait pas sur le schéma présenté à la figure 1, la propriété de conservation des écarts a un réel statut dans Euro Math et permet d'introduire sans véritablement l'installer[9] une technique que les auteurs nomment technique à la russe qui est basée sur cette propriété.

Les liens entre les différentes organisations sont mis en évidence sur le schéma suivant :

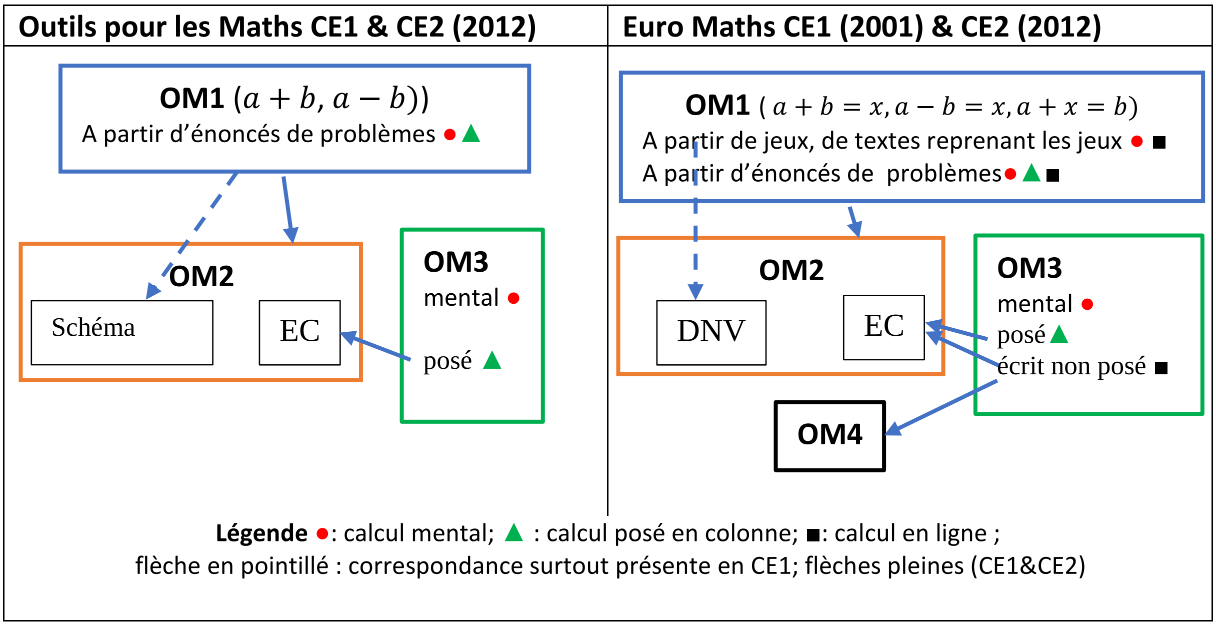

Figure1 : liens entre les différentes organisations mathématiques
Outils pour les Maths CE1 & CE2 (2012) et Euro Maths CE1 (2001) & CE2 (2012)

Pour compléter cette étude sur les organisations mathématiques a *priori* enseignées dans les classes, nous présentons ci-après les éléments prélevés suite aux observations conduites dans trois classes de CE2.

Éléments prélevés suite aux observations (classes)

La valence pragmatique du calcul est prédominante dans le sens où les enseignants cherchent avant tout à ce que les élèves calculent vite et bien. Les corrections étant là surtout pour valider les résultats. Peu de synthèses autour des techniques sont mises en place. Par ailleurs, dans les séances de calcul mental que nous avons observées, les enseignants proposaient des séries de calcul pour s'entrainer à soustraire un nombre à un chiffre, soustraire des multiples de dix, soustraire un nombre à deux chiffres, donc des tâches non isolées et toutes d'un même type. Le travail en calcul mental vu qu'il était conduit essentiellement à l'oral, ne facilitait pas la réécriture de calcul. Sur l'ensemble des techniques enseignées, on ne retrouvait pas de technique s'appuyant sur la propriété de conservation des

[9] Peu de tâches permettant de travailler la technique sont proposées. Le seul moment de l'étude présent est celui de la première rencontre.

écarts. Un dernier point : les enseignants alors qu'ils n'étaient pas demandeurs initialement d'un autre projet d'enseignement ont accepté dans un premier temps de mettre en œuvre des scénarios que nous leurs avions proposé (entre autres sur la propriété de conservation des écarts) et dans un second temps d'expérimenter l'ingénierie que nous présentons dans le paragraphe suivant.

PRESENTATION DE L'INGENIERIE

Rappelons que l'ingénierie vise l'explicitation des éléments technologico théoriques et à agréger les organisations mathématiques locales pour permettre aux élèves de calculer vite et bien (en calcul mental et en calcul posé en colonne), de faire preuve de flexibilité et d'adaptabilité et de donner du sens à ce qu'ils font (valence épistémique du calcul). Par ailleurs, elle s'appuie sur les pratiques des enseignants A, B et C avec l'objectif de les modifier sans chercher à les bouleverser.

Le tableau suivant montre les grandes lignes de l'ingénierie :

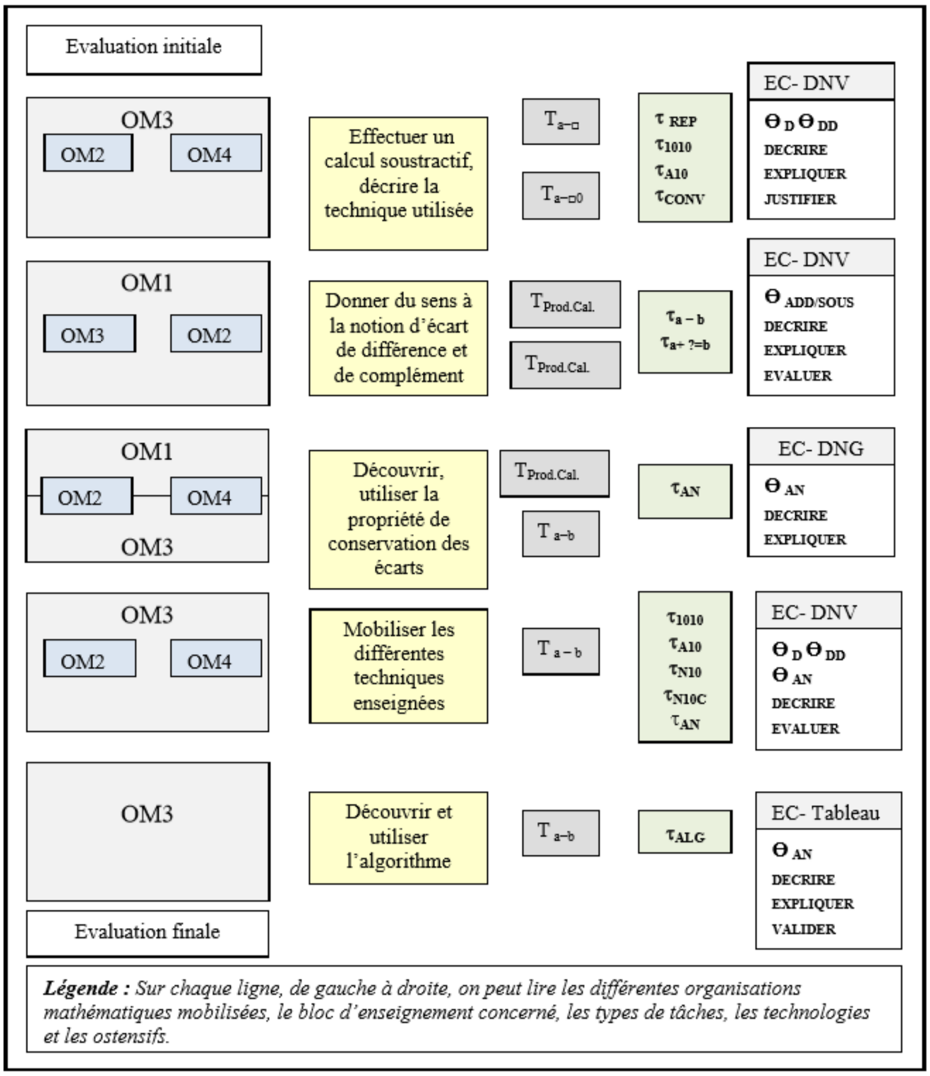

Figure 2 : présentation de l'ingénierie (thèse, page 210)

Le tableau se lit verticalement et horizontalement. Verticalement, il permet de voir que la mise en place de l'ingénierie a été précédée de la mise en place d'une évaluation initiale et suivie d'une évaluation finale pour mesurer les effets de l'ingénierie sur les apprentissages des élèves. Il montre comment l'étude a été découpée et programmée autour de cinq blocs d'enseignement (présentés dans la seconde colonne). Le dernier bloc visant l'introduction de l'algorithme de la soustraction posée basée sur la propriété de conservation des écarts. Le premier et l'avant dernier étant axés sur l'enseignement du calcul mental. Le deuxième et le troisième visant à donner du sens à la notion d'écart, de différence et de compléments et le troisième à découvrir et utiliser la propriété de conservation des écarts. Il révèle comment les blocs sont imbriqués les uns aux autres. Horizontalement, nous allons détailler dans les paragraphes suivant la lecture correspondant au premier et au troisième bloc d'enseignement.

Descriptions et analyses relatives aux types de tâches $T_{a-\square}$ et $T_{a-\square 0}$

Les moments liés à l'étude des deux types de tâches, soustraire un nombre inférieur à dix ($T_{a-\square}$) et soustraire un multiple de dix ($T_{a-\square 0}$) correspondent à des moments de reprise au sens de Larguier (2009) car les élèves ont déjà rencontré ces types de tâches. Il s'agit alors de ne pas reprendre totalement l'étude du thème et de s'efforcer de faire apparaitre le nouveau à étudier par rapport à l'ancien.

Les objectifs sont d'associer à un travail d'effectuation de calculs, un travail sur les représentations sémiotiques et sur la récriture, de limiter, voire mettre en défaut l'utilisation d'une technique basée sur le comptage et pour finir, d'expliciter les éléments technologico-théoriques se référant aux technologies Θ_{DD} et Θ_D en décrivant, expliquant et justifiant la mise en œuvre de chaque technique aux moyens des ostensifs droite numérique (DNV) et écritures chiffrées (EC).

La mise en scène choisie est directement inspirée d'une pratique d'un enseignant. Trois séries de quatre calculs sont donnés à chercher individuellement. Entre deux séries, un temps de restitution face au groupe classe est programmé. Pour chaque série, la consigne donnée aux élèves doit les amener à trouver le résultat du calcul et à décrire la technique qu'ils choisissent de mettre en œuvre.

Sur une série de quatre calculs (exemple : $48-5;\ 59-2;\ 328-6;\ 70-6$) nous faisons en sortes d'assortir les trois premiers au sens de Genestoux (2002). C'est ainsi, que dans l'exemple proposé, pour les trois premiers calculs, le nombre à soustraire est volontairement inférieur au chiffre des unités du nombre auquel on soustrait. La technique τ_{1010} est donc applicable alors que pour le dernier calcul, elle ne l'est pas. La présence de ce quatrième calcul doit amener l'élève à évaluer τ_{1010}.

Description et analyse relative à la rencontre de la conservation des écarts

Cette séquence d'enseignement correspond au moment de rencontre avec la propriété de conservation des écarts, rencontre et non reprise car les élèves n'ont pas étudié cette propriété en CE1.

L'objectif principal est de proposer une rencontre dans le cadre d'une activité de mesurage avec un travail de production de calcul et de prolonger cette rencontre par un travail numérique qui va mobiliser la réécriture des calculs.

Situation de mesurage et de réécriture

L'activité de mesurage consiste à mesurer une bandelette à différents endroits de la règle graduée, à donner cette mesure sous la forme d'un calcul soustractif (en lien avec un travail effectué avec la règle cassée dans une séquence antérieure) puis à comparer les résultats obtenus.

Dans le prolongement, un calcul est proposé : $43 - 18$. L'élève est invité à trouver parmi $43 - 8$, $53 - 20$ et $55 - 20$ les expressions numériques équivalentes sans effectuer de calculs.

Analyse a priori

Au vu du travail engagé au préalable sur la notion d'écart, **c**haque élève doit être capable de produire un calcul soustractif pour mesurer la bandelette à différents endroits de la règle graduée. Les techniques envisagées pour comparer les résultats obtenus peuvent consister à effectuer le calcul, réécrire le calcul, conclure par référence à la manipulation (translation de la bandelette). Pour la recherche d'expressions équivalentes, nous envisageons le fait que les élèves s'engagent dans un travail de réécriture et utilisent « indirectement » les techniques qu'ils connaissent :
$53 - 18 = 53 - 10 - 8 = 43 - 8$ ($\boldsymbol{\tau_{N10}}$)
$53 - 18 = (53 - 10) - (18 - 10) = 43 - 8$ (τ_{AN})
$53 - 18 = 53 - 20 + 2 = 55 - 20$ ($\boldsymbol{\tau_{N10C}}$)
$53 - 18 = (53 + 2) - (18 + 2) = 55 - 20$ (τ_{AN})

EXPERIMENTATION ET ANALYSES DE L'INGENIERIE

Les expérimentations ont eu lieu dans les classes A et B, de novembre 2015 à janvier 2016. Les enseignants n'avaient pas du tout abordé le calcul soustractif. Ils avaient travaillé sur le calcul additif et la numération (lecture, écriture et décomposition des nombres). Les séquences se sont enchainées, sept séquences de deux voire trois séances de 45 minutes chacune. Les données dont nous disposons sont les productions des élèves, les enregistrements vidéo d'une à deux séances par semaine dans chaque classe. La méthode à consister à analyser, pour les différentes organisations mathématiques ponctuelles, les différents moments (rencontre ou reprise, travail de la technique, construction du bloc technologico théorique) et de confronter analyse *a priori* et analyse a *posteriori.* Nous présentons ci-après les résultats relatifs aux types de tâches présentées précédemment

Expérimentation et analyses relatives aux types de tâches $\mathbf{T_{a-\square}}$ et $\mathbf{T_{a-\square 0}}$

Trois points essentiels ressortent suite à l'analyse des données :

- ✓ Les situations ont amené les élèves à choisir une technique adaptée au calcul qu'ils avaient à effectuer et à décrire la technique mise en œuvre (utilisation des écritures chiffrées, éventuellement de la droite numérique vide).
- ✓ Les synthèses sous forme de *cours dialogués* (Hersant, 2004) entre les séries de calculs ont permis dans les deux classes d'expliquer, valider et évaluer chaque technique et de transposer les éléments théoriques présents dans les différents scénarii. Le cours dialogué se caractérise par le fait que l'enseignant rebondit à partir d'une proposition d'élève pour introduire le savoir visé. Il n'y a pas d'interaction des élèves.

Ce ne sont pas eux, par exemple qui sont amenés à valider ou évaluer la technique proposée par un camarade.

- ✓ Les tâches qui consistent à soustraire un multiple de dix (de type Ta−□0) posent des difficultés (ex : 437- 50) alors que les tâches comme soustraire un nombre inférieur à 10 (de type Ta−□) ont montré que les élèves s'étaient mis à décrire leurs techniques et surtout à utiliser à bon escient et avec efficacité τ_{A10}et τ_{N10C}. L'utilisation de la droite numérique vide (DNV) peut faire écran à l'effectuation du calcul. Elle permet à l'élève de s'engager dans un calcul, de le commencer sans lui permettre de le mener jusqu'au bout. En ce sens elle fait illusion, écran.

Expérimentation et analyses relatives à la rencontre de la conservation des écarts

Nous analysons la rencontre de la conservation des écarts dans le cadre de l'activité de mesurage avant d'aborder les effets du travail de réécriture sur les techniques des élèves.

Situation de mesurage

Comme attendu, les élèves se sont impliqués dans la tâche de mesurage et ont tous produit un calcul soustractif pour mesurer la bandelette. En ce qui concerne l'interprétation des résultats :

- ✓ Environ la moitié des groupes (13 binômes sur 24) justifient l'égalité entre les calculs en effectuant ceux- ci

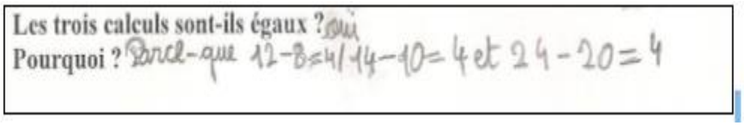

Figure 3 : production d'un binôme mettant en évidence l'égalité en calculant

- ✓ Un quart des groupes (13 binômes sur 24) interprète les résultats en se référant à l'expérience, en indiquant que le fait de translater la bandelette n'a pas d'incidence sur sa longueur.

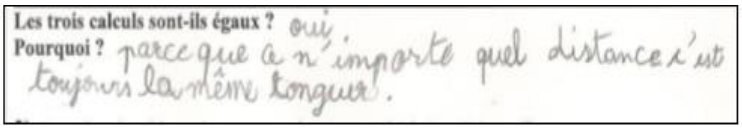

Figure 4 : production d'un binôme mettant en évidence l'invariance par translation

On constate que la taille des bandelettes et l'utilisation d'un double décimètre ne permet pas de produire des calculs qui nécessitent vraiment de la réécriture. Les élèves peuvent comparer directement. Il aurait fallu utiliser des bandelettes de taille plus grande et utiliser un mètre. Nous avons été piégée par le milieu matériel. Dans ce milieu, les élèves peuvent comparer directement. La translation de la bandelette, quant à elle, et c'est une limite de la situation, n'engage pas l'élève à réécrire les calculs.

Au niveau de la construction du bloc technologico théorique, dans une des classes, l'enseignant utilise un schéma extrait de la proposition de scénario et montre que le nombre ajouté aux deux termes de la différence correspond à la valeur de la translation.

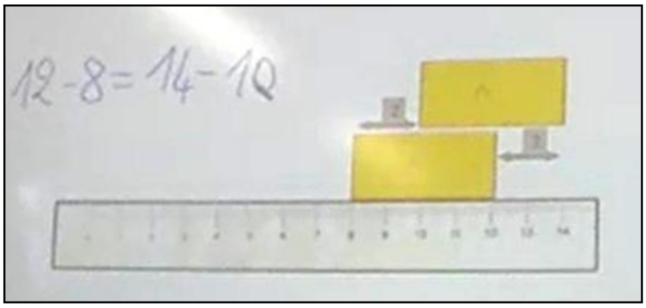

Figure 5 : schéma extrait du scénario mettant en avant l'invariance par translation

En s'appuyant sur le schéma, l'enseignant formule avec ostension la propriété de conservation des écarts appliquée à cet exemple « Si j'avance de deux-là, j'avance de deux-là donc je peux écrire que douze moins huit égal quatorze moins dix ». Le travail de réécriture est amené par la suite.

Situation de réécriture d'expressions numériques

La consigne formulée oralement face au groupe classe est la suivante : « *Vous avez une étiquette sur laquelle est écrit* $53 - 18$. *Je veux qu'un enfant aille me placer une étiquette dont le résultat serait le même que celui-là. Je ne veux pas de calculs. On évite de calculer. Cela a un lien avec ce qu'on vient de faire juste avant.* »
La consigne est claire. Elle précise bien les attentes de l'enseignant sur le plan cognitif : l'élève ne doit pas calculer pour trouver une expression numérique équivalente à 53-18. Elle est trop fermée dans le sens où un seul type de réécriture, celui qui met en jeu la propriété de conservation des écarts est attendue en lien avec ce qui vient d'être fait juste avant.

Suite à cette consigne, spontanément, un élève propose de placer l'étiquette sur laquelle est écrit $43 - 8$. L'enseignant sans plus attendre lui demande comment il a fait pour « passer » de cinquante-trois à quarante-trois. C'est un autre élève qui indique qu'il a « enlevé » une dizaine. Ce à quoi, l'enseignant sans plus attendre répond :
« J'ai enlevé le même nombre aux deux termes. J'ai enlevé dix à chaque fois. Est-ce que j'ai eu besoin de faire le calcul ? Non, je sais que le résultat est le même à chaque fois. »

Cet échange permet à l'enseignant d'expliquer comment on applique la conservation des écarts pour comparer deux expressions numériques sans avoir à les calculer. Au cours des échanges non retranscrits ici, l'enseignant motivera l'utilisation de cette technique en demandant aux élèves quelle(s) expression(s) ils choisiraient pour effectuer facilement un des calculs suivants $53 - 18, 43 - 8$ et $55 - 20$.

Cette situation permet aux élèves de s'engager dans un travail de réécriture avec l'aide de l'enseignant. Un prolongement pourrait être de rechercher une situation permettant aux élèves de prendre davantage d'initiatives et de formuler eux-mêmes la conservation des écarts.

RESULTATS DE LA RECHERCHE

Notre premier résultat est relatif à l'organisation mathématique de référence autour du calcul soustractif sur les entiers naturels. Celle-ci s'est avéré opérationnelle comme filtre d'analyse d'éléments de pratiques (manuels, pratiques effectives) et comme cadre de la conception d'ingénierie.

Dans les manuels étudiés, nous avons noté peu ou pas de prise en compte de la dimension technologique et une faible articulation entre calcul mental et calcul posé. Par ailleurs, le choix des techniques à enseigner en calcul mental n'est pas toujours argumenté. La réécriture des calculs pour justifier les techniques est parfois absente.

Dans les classes observées, les enseignants en privilégiant un travail exclusivement oral cherchent à développer la valence pragmatique (calculer vite et bien) sans mettre en avant les propriétés des nombres et des opérations qui interviennent. Des élèves utilisent alors systématiquement l'usage du comptage ou des techniques « posées ». L'utilisation d'ostensifs comme les écritures chiffrées et la droite numérique ne semble pas ancrée dans les pratiques usuelles de l'école primaire.

Dans ce contexte, nous avons noté les effets positifs d'un travail régulier et progressif à partir des écritures arithmétiques sur les apprentissages des élèves. L'analyse des productions de l'évaluation finale montre que plus des trois quarts des élèves (dans les deux classes confondues) arrivent à indiquer avec précision le mode d'emploi de la technique qu'ils mettent en œuvre. De plus, les réponses justes sont plus nombreuses qu'à l'évaluation initiale comme le montre le tableau suivant .

<table>
<tr><th colspan="2">Ta−□</th><th colspan="3">Ta−□0</th><th colspan="3">Ta−□□</th></tr>
<tr><td rowspan="2">421−3
ED:24/48</td><td rowspan="2">235−6
EF: 30/48</td><td colspan="2">203−10</td><td rowspan="2">463−90
EF:27/48</td><td colspan="2">31−29</td><td rowspan="2">63−17
EF: 28/48</td></tr>
<tr><td>ED:20/48</td><td>EF:38/48</td><td>ED:17/48</td><td>EF:
27/48</td></tr>
</table>

Figure 6 : résultats aux évaluations diagnostiques et finales (48 productions au total)

Aux évaluations diagnostiques (ED), pour effectuer le calcul $421 - 3$, uniquement la moitié des élèves réussissaient le calcul et parmi eux beaucoup décomptaient de un en un alors qu'aux évaluations finales (EF) pour effectuer le calcul $235 - 6$ la plupart des élèves arrivent à montrer au moyen des écritures chiffrées ou d'un schéma avec appui sur la droite numérique vide (DNV) qu'ils effectuent $236 - 5 - 1$ (utilisation de $\boldsymbol{\tau_{A10}}$). De la même manière la technique pour effectuer $203 - 10$ a évoluée (moins de décomptage de un en un) et consiste maintenant à soustraire une dizaine à vingt dizaines puis à convertir 19 dizaines en unités ($\boldsymbol{\tau_{CONV}}$) et enfin à calculer $190 + 3$ ou à effectuer $203 - 3 - 7$ (utilisation de $\boldsymbol{\tau_{A10}}$). Un autre calcul est beaucoup mieux réussi, celui de $31 - 29$. Les élèves font maintenant preuve de flexibilité et d'adaptabilité en passant par une addition à trou $(29 + .. = 31)$ ou une technique par compensation $(31 - 29 = 31 - 30 + 1)$ ou encore une technique par translation $(31 - 29 = 32 - 30)$.

LIMITES ET PERSPECTIVES DE LA RECHERCHE

Même si l'ingénierie construite et mise en œuvre dans deux classes de CE2 a eu des effets globalement positifs sur les compétences des élèves en calcul soustractif, il nous semble important de revenir sur ce qu'elle n'a pas permis d'atteindre, pour engager quelques pistes de réflexion et ouvrir des perspectives …

Pas assez de différenciation pédagogique, pas assez de potentiel adidactique pour certaines situations

Le travail régulier et progressif sur les écritures numériques même s'il s'est avéré « porteur » pour la majorité des élèves n'a pas été convaincant pour permettre à un tiers des élèves de progresser et d'arriver à calculer en ligne a – b avec b nombre à deux chiffres. L'introduction de l'ostensif droite numérique, même s'il permet de visualiser les étapes d'un calcul, n'aide pas l'élève à effectuer le calcul à proprement parler. De même, le fait d'explorer d'emblée plusieurs techniques, avant de stabiliser l'usage de certaines d'entre elles, n'est pas forcément bénéfique pour tous les élèves. Autre limite, la situation proposée autour du mesurage et de la réécriture de calculs pour introduire la conservation des écarts était trop fermée et laissait peu d'initiatives aux élèves.

Des pistes de réflexion, des perspectives…

Ce travail de thèse n'est qu'un début. La question soulevée par l'utilisation de la droite numérique est à approfondir au vu de l'obstacle soulevé par son utilisation pour effectuer des tâches comme soustraire un multiple de dix. Obstacle que nous avons essayé de formuler en évoquant « un écran à l'effectuation de calculs ». Nous aimerions également approfondir la question de l'utilisation de la propriété de conservation des écarts aux cycle 3 et 4 pour résoudre des équations. Cette propriété est-elle explicitée et mise en relation avec le travail effectué autour de l'algorithme de la soustraction posée.

Le travail collaboratif enseignants-chercheur réalisé pour la thèse est plus présent qu'il n'y parait même s'il reste à l'analyser et le formaliser avec d'autres outils théoriques avant d'engager un travail sur le même thème avec un autre groupe d'enseignants. Nous pensons à un groupe IREM ou à un Léa, ce qui permettrait d'avoir des temps de rencontre et de formation, des conditions matérielles qui faciliteraient la collaboration, et ouvrirait éventuellement le groupe à d'autres chercheurs.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ARTIGUE, M. (2005). L'intelligence du calcul. In Actes de l'Université d'été de mathématiques, Saint Flour. Disponible en ligne : http://www.ac-clermont.fr/disciplines/fileadmin/user_upload/Mathematiques/pages/site_math_universite/CD-UE/Texte_02.doc (consulté le 11/07/15).

ARTIGUE, M. (2011). L'ingénierie didactique comme thème d'étude. In Margolinas C., Abboud-Blanchard M., Bueno-Ravel L., Douek N., Fluckiger A., Gibel P., Vandebrouck F. & Wozniak F. (Eds.). *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (p.15-25). Grenoble : la Pensée Sauvage.

BOBIS, J., BOBIS, E. (2005). The empty number line : Making children's thinking visible . Disponible en ligne: https://www.researchgate.net/publication/271447200_The_empty_number_line_Making_children%27s_thinking_visible (consulté le 01/08/ 2015)

BOSCH, M., CHEVALLARD, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(1), *77*-124.

BOSCH, M., GASCON, J. (2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. In Mercier, A., Margolinas, C. (eds), *Balises pour la didactique des mathématiques : cours de la 12ième Ecole d'été de didactique des mathématiques. Corps (Isère). Du 20 au 29 aout 2003* (p. 107-122). Grenoble: La Pensée Sauvage.

BOULE, F., (1994-1995). Regards sur le calcul mental. *Grand N, 58*, 39-52.

BUTLEN, D., CHARLES-PEZARD, M. (2007) Conceptualisation en mathématiques et élèves en difficulté. Le calcul mental entre sens et technique. *Grand N, 79*, 7-32.

CARPENTER, T.-P., FRANKE, M.- L., JACOBS, V.-R., FENNEMA, E., EMPSON, S.-B. (1997). A longitudinal study of invention and understanding in children's multidigit addition and subtraction. *Journal for research in mathematics education*, *29*(1), 3-20.

CASTELA, C., ROMO VAZQUEZ, R. (2011). Des mathématiques à l'automatique : étude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs. *Recherches en didactique des Mathématiques*, *31*(1), 79-130.

CHEVALLARD, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques, 19*(2), 221-265.

ERNEST, P. (1985). The number line as a teaching aid. *Educational studies in Mathematics, 16*. 411- 424.

FUSON, K. C., WEARNE, D., HIEBERT, J., HUMAN, P., MURRAY, H., OLIVIER, A., CARPENTER, T.-P., FENNEMA, E. (1997). Children's conceptual structures for multidigit numbers and methods of multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*, 130-162.

GRAVEMEIJER, K. (1994). Educational development and developmental research in mathematics education, *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*, 443-471.

KLEIN, A.-S., BEISHUIZEN, M., TREFFERS, A. (1998). The Empty Number Line in Dutch Second Grades: Realistic versus Gradual Program Design. *Journal for Research in Mathematics Education*, *29*, 443- 464.

MAUREL, M., SACKUR, C. (2010). Il ne faut pas désarticuler un nombre. Mise en œuvre du dispositif Cesame en primaire. *Grand N*, *85*, 43-59.

RINALDI, A.-M .(2016). *Place et rôle des technologies dans l'enseignement et l'apprentissage du calcul soustractif en CE2 : proposition d'ingénierie.* Thèse de doctorat. Université Sorbonne Paris Cité. Université Paris Diderot. Disponible en ligne :https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01470473/ (consulté le 21/06/ 2016)

ROBERT, A., PENNINCKX, J., LATTUATI, M. (2013). Présentation d'un ouvrage. Une ressource en formation de formateurs d'enseignants de mathématiques du secondaire. *Petit x*, *92*, 49-56.

TEPPO, A., VAN DEN HEUVEL- PANHUIZEN, M. (2014). Visual representations as objects of analysis : the number line as an example. *ZDM: the International Journal on Mathematics Education, 46*(1), 45-58.

THOMPSON, I. (1999). Mental calculation strategies for addition and subtraction Part 1. *Mathematics in School November*, 2-4.