ANALYSE DES PROCESSUS D'APPRENTISSAGE EN MATHEMATIQUES AVEC DES OUTILS SEMIOTIQUES : LA COVARIATION INSTRUMENTEE

Ferdinando **ARZARELLO**

Dipartimento di Matematica « G. Peano »

Université de Turin

ferdinando.arzarello@unito.it

Résumé

L'article met l'accent sur la manière multimodale dans laquelle les processus d'apprentissage se produisent et se développent dans la classe de mathématiques. La première partie introduit le cadre théorique du faisceau sémiotique et ses connexions avec la notion vygotskienne de médiation sémiotique. Le problème de la médiation sémiotique est une question très importante pour l'apprentissage et le chapitre lui répond du point de vue du nouveau cadre, en mettant ainsi l'accent sur la genèse dynamique des signes dans les faisceaux sémiotiques lorsque les artefacts sont utilisés pour instrumenter les processus d'apprentissage. Plus précisément, dans la deuxième partie est introduite la notion de covariation instrumentée. Cela décrit la covariation comme un aspect important et théoriquement omniprésent de la pensée mathématique, mais pas tellement en termes d'enseignement. L'instrumentation avec des artefacts peut favoriser son apprentissage grâce à une planification didactique soignée. Nous l'illustrons avec un exemple qui montre la synergie positive produite par le potentiel sémiotique d'un « duo d'artefacts » utilisé dans une classe d'école primaire : le faisceau sémiotique est utilisé pour analyser les productions des élèves.

Mots clés

Covariation, Instrumentation, Faisceau sémiotique, Problème ouvert, Duo d'artefacts.

MULTIMODALITE ET GESTES

Une bonne enseignante de mathématiques du Liceo Classico Italien, engagée dans une expérience d'enseignement sur l'utilisation des mathématiques pour modéliser les phénomènes physiques [au grade 9], m'a dit un jour : « Ce matin, nous avons réalisé une activité sur la loi de Hook [...] À mon avis, il y avait un malentendu très important entre le sens de l'allongement et celui de la longueur [allungamento - lunghezza en Italien] du ressort. Cela les a empêchés de trouver les bonnes réponses. Et mes élèves sont du Liceo Classico ! ». Des malentendus similaires sont communs et diffus et concernent un vaste phénomène, qui a de profondes racines cognitives et épistémiques, et met en avant un important problème didactique. La prise de conscience de ce phénomène a des conséquences pertinentes pour la conception de l'enseignement.

Le but de cette contribution est d'encadrer théoriquement ces problèmes et de discuter des stratégies d'enseignement appropriées pour les surmonter. Je partagerai donc quelques réflexions sur un champ de recherches ayant un arrière-plan sémiotique, que moi-même et d'autres avons développé au cours des dernières années.
Ces problèmes m'amènent à me concentrer sur une racine commune à différents phénomènes sémiotiques décrits dans la littérature, et qui peuvent servir de base à la conception de tâches mathématiques à l'école : c'est la notion de covariation, largement étudiée par les didacticiens (pour un excellent résumé, voir Thompson & Carlson, 2017). En me basant sur cette notion et en utilisant un point de vue sémiotique, j'ai élaboré un outil d'analyse plus complexe, qui a une contrepartie didactique, que j'appelle *covariation instrumentée* (CI).
Dans cet article, en premier lieu je vais brièvement esquisser un cadre sémiotique (le *faisceau sémiotique*), que j'utilise pour étudier les phénomènes didactiques. Après, j'analyserai spécifiquement le phénomène mathématique de la covariation et les raisons qui font généralement défaut dans de nombreuses classes de mathématiques. Enfin, je définirai la CI, comme une méthodologie didactique possible, qui permet de déclencher et de soutenir une approche covariante des mathématiques.

Outils sémiotiques pour analyser les phénomènes didactiques dans la classe de mathématiques

Si on regarde la phénoménologie des processus d'apprentissage/enseignement dans la classe de mathématiques, on voit une variété d'actions et de productions activées par les élèves et par l'enseignant en utilisant simultanément différentes ressources :

- Mots (oralement ou par écrit) ;
- Modes d'expression extralinguistiques (gestes, regards, ...) ;
- Différents types d'inscriptions (formules, dessins, esquisses, graphiques, ...) ;
- Différents instruments (du crayon aux appareils numériques les plus sophistiqués).

Ces ressources sont (également) utilisées comme outils de communication. Les gestes sont ainsi revendiqués comme ayant un rôle social dans les processus de réflexion. Par exemple, McNeill, l'un des érudits les plus éminents sur la signification et le rôle des gestes dans le discours, avec ses recherches, montre qu'il y a un rôle constitutif des gestes dans la pensée (McNeill, 1992, 1996, 2005) : la pensée n'est pas simplement exprimée en mots ; elle se construit aussi avec les gestes. Cette affirmation peut être considérée comme une extension de l'hypothèse de Vygotski sur le rôle du discours par rapport à la pensée elle-même : c'est-à-dire que les gestes ne reflètent pas seulement la pensée mais ont un impact sur la pensée. Les gestes, avec le langage, aident à constituer la pensée.
L'observation montre que les gens (enseignants et élèves) font aussi des gestes en faisant des mathématiques. C'est dans cette hypothèse vygotskienne qu'il est possible de définir le rôle des gestes dans les activités mathématiques. Comme W. Roth l'écrit (2003) :

> ... les gestes expriment de nouveaux niveaux de compréhension avant qu'un élève exprime cette nouvelle compréhension en mots ; de plus, les gestes expriment les nouveaux concepts bien que le langage reste fidèle aux vieux concepts erronés.
> […] les élèves sont à l'écoute des gestes que les enseignants utilisent et parfois adaptent ces gestes à leurs propres répertoires expressifs, accélérant ainsi le développement de l'alphabétisation (literacy) scientifique. (p. 48 ; traduction de l'auteur)

Ces observations soulèvent des questions importantes, c'est-à-dire :
- Existe-t-il des spécificités des gestes en mathématiques, qui les distinguent de la gestuelle quotidienne ?

- Comment les gestes rentrent-ils dans les processus de conceptualisation mathématique des élèves ?
- Comment une telle analyse peut-elle aider les didacticiens des mathématiques dans leurs recherches et les enseignants dans leur travail ?

En se référant au numéro spécial de ESM (Edwards, Radford & Arzarello, 2009) pour une discussion détaillée de ces points, je mentionnerai ici un résultat très important qui ressort de ces recherches : les gestes en mathématiques sont profondément mêlés non seulement aux mots, mais aussi aux inscriptions produites par les personnes lorsqu'elles résolvent des problèmes. Par conséquent, il faut étendre le cadre habituel utilisé par les chercheurs qui étudient les gestes ; en effet, ce cadre souligne une unité profonde entre les gestes et les énoncés (McNeill, 1992), mais ne considère pas l'entrelacement avec les signes mathématiques, qu'ils soient produits ou interprétés par les agents (enseignants et élèves).
Mais si d'un côté il manque quelque chose à l'analyse habituelle des gestes quand nous analysons la gestuelle dans une classe de mathématiques, d'un autre côté il manque aussi quelque chose à l'approche sémiotique habituelle. Bien sûr, il est vrai que, comme le dit Duval (1995, p.4) : « Il ne peut y avoir de noésis sans sémiosis ». Les systèmes sémiotiques fournissent un environnement pour faire face aux mathématiques non seulement dans leur structure en tant que discipline scientifique, mais aussi du point de vue de leur apprentissage, car ils permettent de rechercher le fonctionnement cognitif sous-jacent à la diversité des processus mathématiques. En effet, l'approche des activités et des productions mathématiques comme systèmes sémiotiques nous permet aussi de considérer les problèmes cognitifs et sociaux qui concernent les phénomènes didactiques. Cependant, l'approche sémiotique classique impose de fortes limitations à la structure des systèmes sémiotiques qu'elle considère. Par exemple, selon Ernest (2006, pp. 69-70), un système sémiotique (classique) a trois composantes :
1. Un ensemble de signes, dont les marques pourraient éventuellement être prononcées, écrites, dessinées ou encodées électroniquement.
2. Un ensemble de règles de production et de transformation des signes, y compris la capacité potentielle de créativité dans la production de signes atomiques (simples) et moléculaires (composés).
3. Un ensemble de relations entre les signes et leurs significations incarnées dans une structure de signification sous-jacente.
En général, cette définition est trop étroite pour interpréter la complexité des phénomènes didactiques en classe. Ceci pour deux raisons :
(i) Comme observé par Radford (2002), il existe une variété de ressources sémiotiques utilisées par les élèves et les enseignants, comme les gestes, les regards, les dessins et les modes d'expression extralinguistiques, qui ne répondent pas aux exigences des définitions classiques pour les systèmes sémiotiques tels qu'ils sont discutés dans la littérature (voir par exemple Duval, 2001).
(ii) La façon dont ces registres différents sont activés est multimodale. Il est nécessaire d'étudier attentivement les relations à l'intérieur des registres et entre ceux qui sont actifs au même moment ainsi que leur dynamique de développement dans le temps. Cette étude ne peut être réalisée que partiellement à l'aide des outils classiques de l'analyse sémiotique. Le point de vue sémiotique classique est aveugle par rapport à beaucoup de ressources sémiotiques qui sont actives dans la salle de classe. Comme le soulignent Bosch et Chevallard (1999), il est nécessaire de disposer d'un système qui peut également donner raison des différents registres :

> le registre de *l'oralité*, le registre de *la trace* (qui inclut graphismes et écritures), le registre de *la gestualité*, enfin le registre de ce que nous nommerons, faute de mieux, *la matérialité*

> *quelconque*, où prendront place ces objets ostensifs qui ne relèvent d'aucun des registres précédemment énumérés. (Bosch & Chevallard, 1999, p. 96, souligné dans l'original)

Pour surmonter ces deux difficultés, j'adopte une approche vygotskienne pour l'analyse des ressources sémiotiques et présente une notion élargie du système sémiotique, que j'ai appelée *faisceau sémiotique*. Il englobe tous les registres sémiotiques classiques comme des cas particuliers. Ainsi, il ne contredit pas l'analyse sémiotique développée à l'aide de tels outils mais permet d'obtenir de nouveaux résultats et de cadrer les anciens dans une image unitaire. Le faisceau sémiotique (Arzarello, 2006) est un outil qui peut offrir une analyse intégrée de toutes les ressources sémiotiques dans la classe de mathématiques (Arzarello & Sabena, 2014).

Mon cadre est également spécifique aux mathématiques ; il permet de mieux combiner deux problématiques : celle de la sémiotique, dans l'esprit de la définition d'Ernest des systèmes sémiotiques, et l'autre de la psychologie, selon l'approche vygotskienne. Les deux images sont essentielles pour analyser les processus d'apprentissage en mathématiques ; ils sont ici intégrés dans un modèle plus large.

D'une part, il est nécessaire d'élargir la notion de système sémiotique pour englober toute la variété des phénomènes de médiation sémiotique en classe, comme le suggérait déjà Radford (2002), qui a introduit une nouvelle notion de système sémiotique :

> L'idée du système sémiotique que j'introduis comprend un système classique de représentations - langage naturel, formules algébriques, systèmes de représentation bi ou tridimensionnels, en d'autres termes, ce que Duval (2001) appelle registres discursifs et non discursifs - mais comprend aussi des systèmes plus généraux, tels que les gestes (qui ont une signification intuitive et dans une certaine mesure, une syntaxe floue) et des artefacts, comme les calculatrices et les règles, qui ne sont pas des signes mais ont une signification fonctionnelle. (Radford, 2002, note p.7, traduction de l'auteur).

D'un autre côté, les processus psychologiques de l'intériorisation, si importants dans la description de la médiation sémiotique des signes et des outils, doivent occuper une place naturelle dans le nouveau modèle.

Une fois que les systèmes sémiotiques ont été élargis pour contenir des gestes, des instruments, des pratiques institutionnelles et personnelles et, en général, des moyens d'expression extralinguistiques, la même idée de fonctionnement dans ou entre différents registres change de sens. Il ne s'agit plus seulement d'un traitement ou d'une conversion (en utilisant la terminologie de Duval) dans ou entre des représentations sémiotiques selon des règles algorithmiques (par exemple la conversion du registre géométrique dans le registre du graphique cartésien). Au contraire, les opérations (intra ou inter) doivent être élargies pour englober aussi des phénomènes qui ne peuvent pas être strictement algorithmiques : par exemple, des pratiques avec des instruments, des gestes, etc.

À ce stade de la discussion, pour obtenir un système sémiotique aussi étendu, il faut étendre la définition ci-dessus d'Ernest. Nous arrivons ainsi à la notion que j'ai appelée *faisceau sémiotique*, ou faisceau d'ensembles sémiotiques (Arzarello, 2006). Pour le définir, j'ai besoin d'abord de la notion d'ensemble sémiotique, qui est un élargissement de la notion de système sémiotique.

Un *ensemble sémiotique* est :

a) Un ensemble de signes qui peuvent éventuellement être produits avec différentes actions qui ont un caractère intentionnel, comme le fait de dire, d'écrire, de dessiner, de faire des gestes, de manipuler un artefact ;

b) Un ensemble de modes pour produire des signes et éventuellement les transformer ; de tels modes peuvent éventuellement être des règles ou des algorithmes mais peuvent aussi être des modes d'action ou de production plus flexibles utilisés par le sujet ;

c) Un ensemble de relations entre ces signes et leurs significations incarnées dans une structure de signification sous-jacente.
Les trois composantes ci-dessus (signes, modes de production / transformation et relations) peuvent constituer une variété de systèmes, allant des systèmes de composition, habituellement étudiés en sémiotique traditionnelle (par exemple les langages formels) aux ensembles de signes ouverts (par exemple les gestes). Les premiers sont faits de constituants élémentaires et leurs règles de production impliquent à la fois des signes atomiques (simples) et moléculaires (composés). Les derniers ont des caractéristiques holistiques, ne peuvent être divisés en composants atomiques, et les modes de production et de transformation sont souvent idiosyncrasiques pour le sujet qui les produit, même s'ils incarnent des aspects culturels profondément partagés, selon la notion de système sémiotique de significations culturelles élaborée par Radford, cité ci-dessus. Le mot 'ensemble' doit être interprété dans un sens très large, par ex. comme une collection variable d'objets.
Un *faisceau sémiotique* comprend :
(i) Une collection d'ensembles sémiotiques, qui changent dans le temps ;
(ii) Une collection de relations entre les ensembles du faisceau.
Certaines des relations peuvent avoir des modes de conversion entre elles.
Un faisceau sémiotique ne doit pas être considéré comme une juxtaposition d'ensembles sémiotiques ; au contraire, c'est un système unitaire et ce n'est que pour l'analyse que nous distinguons ses composantes comme des ensembles sémiotiques. De plus, un faisceau sémiotique est une structure dynamique qui peut changer dans le temps à cause des activités sémiotiques du sujet (d'où son nom, tiré de la théorie mathématique des topoi, c'est-à-dire comme faisceau d'ensembles variables : Goldblatt, 1984) : par exemple, la collection d'ensembles sémiotiques qui le constituent peut changer ; de plus, les relations entre ses composantes peuvent varier dans le temps ; parfois les règles de conversion ont une nature génétique, à savoir qu'un ensemble sémiotique est engendré par un autre, élargissant le faisceau lui-même (on parle alors de conversions génétiques).
Il faut observer que si l'on se borne à examiner seulement les systèmes sémiotiques classiques, de nombreux aspects intéressants des discours humains sont perdus : ce n'est qu'en considérant les faisceaux d'ensembles sémiotiques que l'on peut découvrir de nouveaux phénomènes.
Un premier exemple de faisceau sémiotique est donné par l'unité parole-geste (McNeill, 1992) : le geste et le langage forment un faisceau sémiotique, constitué de deux ensembles sémiotiques profondément entremêlés (un seul, le discours, est aussi un système sémiotique classique). La recherche sur les gestes a mis au jour des relations importantes entre les deux (par exemple, les notions de 'match-mismatch' dans Goldin-Meadow, 2003). Un deuxième exemple se trouve dans le travail de De Freitas et Sinclair (2012, p. 149), même s'il est dans une perspective différente (*ibid.*, p. 151) : ici l'unité du faisceau sémiotique est donnée par l'entrelacement entre les dessins et les gestes dans les activités mathématiques d'étudiants universitaires.

Sur le plan théorique, le faisceau sémiotique permet de décrire d'une manière plus confortable la notion de *médiation sémiotique,* qui est au cœur du cadre de Vygotski (Bartolini & Mariotti, 2008). Selon Vygotski, le rôle et la dynamique de la médiation sémiotique peuvent être caractérisés comme suit : d'abord, orienté vers l'extérieur, un signe ou un outil est utilisé en action pour accomplir une tâche spécifique ; puis, les actions avec le signe ou l'outil (activité sémiotique, éventuellement sous la direction d'un expert), génèrent de nouveaux signes (mots inclus), qui favorisent le processus d'intériorisation et produisent un nouvel outil psychologique, orienté vers l'intérieur, complètement transformé mais qui conserve certains aspects de son origine. Selon Vygotski, une composante majeure de ce processus d'internalisation est le langage, qui permet les transformations. Ce sont précisément les signes qui transforment le registre linguistique du discours en un nouveau système : Vygotski l'appelle langage intérieur, qui a une structure complètement différente de celle du langage extérieur (Vygotsky, 1985, chap. 7). Vygotski distingue deux types de propriétés qui permettent de différencier le langage intérieur du langage extérieur : les propriétés structurelles et les propriétés sémantiques. Les propriétés structurelles du langage intérieur sont sa réduction syntaxique et sa réduction phasique : la première consiste dans le fait que le langage intérieur se réduit à la juxtaposition pure de prédicats minimisant son articulation syntaxique ; la seconde consiste à minimiser ses aspects phonétiques, à savoir réduire les mêmes mots. Selon Vygotski, les propriétés sémantiques du langage intérieur sont basées sur la distinction faite par le psychologue français Frédéric Pauhlan entre le sens et la signification d'un mot et sur ce qu'il appelle la prépondérance du sens [smysl] d'un mot sur sa signification [znachenie] (Vygotski, 1985). Dans le langage intérieur, le sens est toujours en train de submerger la signification. Cet aspect dominant du sens a deux effets structurels sur le langage intérieur : l'agglutination et l'influence. Le premier consiste à coller différentes significations (concepts) en une seule expression ; le second se produit lorsque les différents sens « coulent » ensemble en une seule unité. Pour expliquer les propriétés du discours intérieur, Vygotski utilise des analogies qui se réfèrent au discours extérieur et qui ne donnent qu'une idée de ce qu'il veut dire : en fait, il utilise un système sémiotique (écrit ou parlé) pour décrire quelque chose qui n'est pas un système sémiotique. Les métaphores de base par lesquelles Vygotski décrit le langage intérieur montrent leur similarité avec les ensembles sémiotiques : des propriétés comme l'agglutination et l'influence font que le discours intérieur s'apparente à des ensembles sémiotiques, comme les dessins, les gestes, etc. En outre, les phénomènes de réduction syntaxique et phasique signifient que les propriétés dites linéaires et compositionnelles des systèmes sémiotiques classiques sont violées. La description de Vygotski ne s'interprète que partiellement en termes de systèmes sémiotiques.

La notion de faisceau sémiotique permet de rendre compte correctement du point le plus important de l'analyse de Vygotski, à savoir les transformations sémiotiques qui permettent la transformation du discours externe en discours intérieur. Le cœur de l'analyse de Vygotski, à savoir le processus d'intériorisation, consiste précisément à signaler une conversion génétique au sein des faisceaux sémiotiques : il génère une nouvelle composante sémiotique, le discours intérieur, à partir d'un autre existant, le discours extérieur. La description est donnée en utilisant la structure du discours extérieur (le langage extérieur), qui est clairement un système sémiotique, pour construire des métaphores de base afin de donner une idée de la seconde (le langage intérieur), qui est un ensemble sémiotique. Le processus peut être décrit par des transformations dynamiques des composantes d'un faisceau sémiotique qui évolue dynamiquement à travers leur action.

En termes de pratiques d'enseignement, cette approche avec un système sémiotique plus large est particulièrement fructueuse lorsque les processus et les activités des personnes apprenant les mathématiques sont examinés. Dans les recherches réalisées par l'équipe de Turin, nous étudions les faisceaux sémiotiques composés de plusieurs ensembles sémiotiques : gestes, discours et inscriptions écrites (par exemple symboles mathématiques, dessins). Les résultats consistent à décrire certaines des relations et des règles de conversion au sein d'un tel ensemble complexe. Dans ces recherches nous élaborons également une méthodologie didactique qui peut être utile pour améliorer l'apprentissage des élèves selon une perspective vygotskienne.

Typiquement, l'analyse des processus d'apprentissage avec le faisceau sémiotique permet de mettre en évidence certaines relations entre les objets mathématiques et l'élève qui va les saisir, mais n'est pas encore en mesure de s'exprimer immédiatement et complètement avec le

langage verbal (il est en ‘zone de développement proximal’). Une médiation sémiotique appropriée peut favoriser l'évolution de ses processus de compréhension. Cette médiation peut être faite par l'enseignant ou avec l'utilisation d'instruments, qui, avec le soutien de l'enseignant, peuvent également servir comme médiateurs de ces processus. Un exemple du premier type est donné par les *jeux sémiotiques*, que j'ai développé il y a quelques années (Arzarello & Paola, 2007; Arzarello et al., 2009), tandis qu'un exemple du deuxième type, la covariation instrumentée, est essentiellement nouveau dans ce cadre théorique et est le sujet de la deuxième partie du chapitre.
Avant de développer ce deuxième thème, pour des raisons d'exhaustivité, je terminerai la première partie du chapitre par un très petit sketch sur les jeux sémiotiques. Un jeu sémiotique peut se produire lorsque l'enseignant interagit avec les élèves, comme dans les discussions en classe ou pendant le travail en groupe. Dans un jeu sémiotique, l'enseignant utilise la ressource sémiotique activée (entre autres) par l'étudiant (par exemple les gestes) et produit les mêmes signes que lui dans ce registre, afin de l'informer que ce qu'il produit est correct. Mais l’enseignant utilise une autre ressource sémiotique (par exemple, la parole) dans laquelle il exprime d'une manière précise, en utilisant le langage scientifique officiel, le concept qu’il a reconnu, comme enseignant, dans la production imprécise et naissante de l'élève. De cette façon il fait évoluer les connaissances mathématiques des élèves vers des significations scientifiquement partagées : c’est-à-dire, il prête ses mots à ce que les élèves avaient voulu dire en utilisant des gestes. C'est un aspect délicat des stratégies d'enseignement, à ne pas confondre avec l'effet « funnel » (entonnoir) (Bauersfeld, 1978, p. 162) ou «Topaze» (Brousseau, 1997, p. 162).

LA COVARIATION INSTRUMENTEE

La deuxième partie de ma présentation introduira une forme spécifique de médiation sémiotique: la *covariation instrumentée* (CI). Dans la CI les instruments jouent un rôle de pivot, et le faisceau sémiotique est un outil d’analyse très utile. La CI étend le concept de médiation sémiotique tel qu’on le trouve dans la littérature, en particulier celle de Bartolini et Mariotti (2008).
Je présenterai d’abord la CI en m'appuyant sur quelques outils théoriques que je vais résumer très schématiquement. Après cette courte introduction théorique, j’illustrerai la CI à travers un exemple concret qui concerne la géométrie au niveau primaire. Cependant les résultats ne sont pas limités à cet âge ni à ce sujet.

La covariation dans les mathématiques

De nombreuses recherches montrent la pertinence du raisonnement covariant en mathématiques d'un point de vue épistémologique :

> Nous soulignons que le raisonnement covariant continu, ou le raisonnement sur les valeurs de deux quantités ou plus variant simultanément, a joué un rôle crucial dans l'invention par les mathématiciens des concepts qui ont conduit à la définition moderne de la fonction, de l'utilisation d'équations pour représenter une variation contrainte à des représentations explicites de relations déterministes entre des quantités. (P.W. Thompson and M.P. Carlson, 2017, p. 423 ; traduction de l’auteur)

Le raisonnement covariant a fait irruption de façon spectaculaire dans les mathématiques avec la naissance et le développement de l'algèbre moderne grâce aux travaux de Viète, Descartes et autres. Les méthodes d'analyse et de synthèse en algèbre, empruntées à la géométrie des Grecs, introduisent une manière révolutionnaire d'aborder les problèmes de mathématiques, que Lagrange au début du XIXème siècle a pu résumer comme suit :

> L'algèbre prise dans le sens le plus étendu, est l'art de déterminer les inconnues par des fonctions des quantités connues, ou qu'on regarde comme connues. (Lagrange, 1808, p. vii).

La rupture du nouveau paradigme avec l'idée d'une algèbre élémentaire comme arithmétique généralisée, selon une image souvent présente dans les manuels (mais pas seulement), a été discutée dans un article très important de Chevallard (1989), où il souligne le rôle crucial que les variables et les paramètres jouent dans la nouvelle algèbre, tant d'un point de vue épistémologique que didactique. Par exemple, la solution "arithmétique" (verbale) d'un problème élémentaire comme le suivant :

> Diviser un nombre donné en deux parties telles que la première dépasse la seconde en un excès donné.

ne peut être traduit en termes algébriques que si l'on fait un raisonnement covariant, en utilisant des paramètres pour représenter (et manipuler) les nombres supposés donnés.

En fait, la nouvelle méthode de raisonnement covariant avec les quantités physiques a été l'une des racines qui a rendu possible la naissance de la science moderne avec les ‘sensate esperienze e le dimostrazioni matematiche’ (expériences sensibles et démonstrations mathématiques) de Galilei. Ce type de raisonnement s'est développé comme une recherche des relations entre des variables concrètes, dynamiques et continues, pour exprimer l'idée de changement et les phénomènes de mouvement. C'est une très vieille histoire : les anciens savants manquaient d'une description mathématique du mouvement ; ils voyaient la distance et le temps comme des quantités mesurables, mais pas la vitesse. En fait, la notion de changement, selon la philosophie d'Aristote, n'était que de nature qualitative et avait une signification très large (Génération et corruption, Altération, Augmentation et diminution, Mouvement local). Les idées ont changé à partir du Moyen Age et c'est au XIV[e] siècle que des nouvelles conceptions révolutionnaires ont mûri à Oxford, au Merton College, et à Paris, avec Nicole Oresme (1325-1380). Les philosophes du Moyen Age avaient réalisé que les qualités ont aussi une intensité (Arzarello, 2004). Les lois mathématiques de la nouvelle science peuvent s'exprimer parce qu'on commence à raisonner de manière covariante ; l'algèbre, cependant, ne suffit plus et un nouveau calcul est nécessaire. Malheureusement, cette manière fondamentale de raisonner a été négligée dans les écoles : comme l'algèbre est enseignée comme une arithmétique généralisée, les fonctions sont souvent enseignées aussi suivant la définition statique de Bourbaki, qui gèle leur nature dynamique dans le langage statique de la théorie des ensembles.

Cette affirmation sur la pertinence de soutenir le raisonnement covariant à l'école est également énoncée dans le document cité de P.W. Thompson et M.P. Carlson (2017), avec de nombreuses références ; ils écrivent :

> [N]ous soutenons que le raisonnement variant et covariant est fondamental pour le développement mathématique des élèves. Nous fondons cette affirmation sur des recherches qui mettent en évidence les difficultés éprouvées par les étudiants en ce qui concerne les relations fonctionnelles, car ils n'ont pas la capacité de raisonner de façon variante ou covariante et dans des recherches montrant des changements productifs dans les conceptions et utilisations des fonctions par les enseignants et les élèves, quand ils utilisent le raisonnement covariant. (*ibid.*, traduction de l'auteur)

La même question a été analysée d'un point de vue différent en psychologie par J. Piaget (1950) et en mathématiques par W. Lawvere et S. Schanuel (1991) : le premier en définissant la notion d'opérateur multiplicatif ; les derniers en discutant la notion de produits, coproduits et adjonctions au sein de la théorie des catégories.

Saldanha and Thompson (1998) reprennent le travail de Piaget :

> L'idée de Saldanha et Thompson d'un objet multiplicatif est dérivée de la notion de ‘et’ chez Piaget en tant qu'opérateur multiplicatif - une opération que Piaget a décrite comme une classification opératoire et une sériation sous-jacentes dans la pensée des enfants.
>
> (Thompson & Carlson, 2017, p. 433, traduction de l’auteur)

Ces travaux illustrent la covariation à partir de deux points de vue concurrentiels, cognitifs et épistémologiques.

Pour le premier : une personne forme un objet multiplicatif à partir de deux quantités lorsqu'elle unit mentalement leurs attributs pour faire un nouvel objet conceptuel qui est simultanément l'un et l'autre. Saldanha et Thompson (1998) illustrent cela en considérant l'engagement des étudiants dans des tâches centrées sur l'activité de suivre et de décrire le comportement des distances entre une voiture et deux villages pendant que la voiture se déplace le long d'une route ; les étudiants utilisent un environnement géométrique dynamique pour simuler le mouvement de la voiture en faisant glisser un point avec la souris et en commentant la trace des deux distances pendant qu'elles covarient.

Dans le premier chapitre de leur livre introductif à la théorie des catégories, Lawvere et Schanuel (1991) introduisent aussi le phénomène de covariation avec la notion d'objet multiplicatif en se basant sur un exemple historique, qui montre à la fois sa parenté directe avec la notion de Piaget (en fait ils utilisent la même terminologie), et sa pertinence pour la révolution scientifique :

> Commençons par Galilée, il y a quatre siècles, qui s'interroge sur le problème du mouvement. Il voulait comprendre le mouvement précis d'un rocher lancé ou celui du jet d'eau d'une fontaine. Tout le monde a observé les arcs gracieux paraboliques qu’ils produisent ; mais le mouvement d'un rocher signifie plus que sa trajectoire. Le mouvement implique, pour chaque instant, la position de la roche à cet instant ; pour l'enregistrer, il faut une image animée plutôt qu'une exposition temporelle. Nous disons que le mouvement est une ‘carte’ (ou fonction) du temps dans l’espace.
>
> […]
>
> Ces deux cartes, ombre et niveau, semblent réduire chaque problème d'espace à deux problèmes plus simples, l'un pour le plan et l'autre pour la ligne. Par exemple, si un oiseau est dans votre espace, et que vous ne connaissez que l'ombre de l'oiseau et son altitude, vous pouvez reconstituer la position de l'oiseau. Il y a plus, cependant. Supposons que vous ayez un film montrant l'ombre de l'oiseau pendant qu'il vole, et un film de son altitude - peut-être y avait-il un ornithologue grimpant sur notre ligne, restant toujours à la même altitude que l'oiseau et filmant le spectateur. A partir de ces deux films, vous pouvez reconstituer tout le vol de l'oiseau ! Donc non seulement une position dans l'espace est réduite à une position dans le plan et une autre sur la ligne, mais aussi un mouvement dans l'espace est réduit à un mouvement dans le plan et un sur la ligne.
>
> […]
>
> La découverte de Galilée est que de ces deux mouvements plus simples, dans le plan et sur la ligne, il pourrait complètement retrouver le mouvement complexe dans l'espace.
>
> (Lawvere & Schanuel, 1991, 3-6, traduction de l’auteur)

Les aspects épistémologiques et cognitifs généraux de la covariation ont été mis en évidence par la notion d'objet multiplicatif dans Piaget et (Lawvere & Schanuel, 1991), tandis que l'exemple de Saldanha et Thompson illustre ses potentialités didactiques.

Nous allons maintenant approfondir l'analyse de la covariation en utilisant un outil didactique plus spécifique : la notion de problème ouvert (Arsac, Germain et Mante, 1991). Ensuite, nous pourrons nous concentrer sur un important phénomène didactique, la *covariation instrumentée* : elle peut aider les enseignants à concevoir des situations didactiques appropriées, dont le but est d'initier les étudiants au raisonnement covariant dans des environnements de géométrie dynamique.

Problèmes ouverts

Il est bien connu que la formulation d'une tâche est une variable didactique importante : le même problème peut changer selon la manière dont il est formulé. Notre but est de rechercher des formulations appropriées de problèmes qui stimulent le raisonnement covariant. Dans ce but, la notion de *problème ouvert* (Arsac, Germain et Mante, 1991) se révèle très utile. Le résumé réalisé par Kosyvas sur l'histoire et les potentialités didactiques des problèmes ouverts (Kosyvas, 2010) affirme que, selon l'élaboration faite par le groupe de recherche de l'IREM de Lyon, les principales caractéristiques d'un problème ouvert sont :

- L'énoncé du problème est habituellement court et formulé en langage courant ou mathématique. L'énoncé simple et court favorise la lecture rapide et la compréhension et crée des conditions de facilité en ce qui concerne ce qui se maintiendra en mémoire et en ce qui concerne la gestion des données. En outre, il peut donner l'impression que le problème est facile et inciter à s'intéresser à ce problème.
- En aucun cas, cette solution ne devra se limiter à l'utilisation simple ou à l'application directe de conclusions ou de règles qui se sont présentées durant les derniers cours, parce qu'alors, il constituera un problème d'application directe et non un problème ouvert. Cependant, ce qui a une importance fondamentale est la manière dont est posé l'énoncé du problème ouvert qui ne résulte pas directement de la méthode et de la solution.
- Le problème ouvert doit être fondé sur des notions avec lesquelles les enfants sont assez familiarisés. Ceci est indispensable afin que les enfants, dans le cadre des restrictions habituelles de l'horaire scolaire, puissent calculer des résultats ou produire des idées dans le temps imparti. Le problème peut être ouvert mais cependant, le temps de la recherche reste malheureusement fermé. Dans ces conditions, les enfants doivent pouvoir saisir facilement la situation et prendre part à des essais, formuler des conjectures, établir des voies de vérification, des projets de résolution et des contre-exemples, lesquels visent à la découverte et à la création de la solution ou des solutions du problème ouvert. (Kosyvas, 2010, p.56).

Dans la dernière partie nous verrons l'utilisation de problèmes ouverts dans le cadre de la covariation instrumentée.

Un exemple

Voyons maintenant un exemple où la notion de problème ouvert peut être utilisée pour l'analyse didactique d'un problème.
Voici le "même" problème énoncé dans deux versions différentes (Figure 1) :

- avec une formulation standard (FS) dans le cadre théorique classique de la géométrie euclidienne (hypothèse, thèse)
- comme un problème ouvert (PO), à résoudre éventuellement dans un environnement de géométrie dynamique (EGD).

<u>FS (formulation standard)</u>:
Etant donnés trois points A, P, D, et C le symétrique de A par rapport à P. Le cercle *C* de centre C et de rayon CP coupe la droite (PD) en B. Prouver que si PD = PB alors ABCD est un parallélogramme.
<u>PO (problème ouvert)</u>:
Soient trois points A, P, D, et C le symétrique de A par rapport à P. Le cercle *C* de centre C et de rayon CP coupe la droite (PD) en B. Étudier quels types de quadrilatères peuvent être obtenus en faisant varier A, P, D.

Dans la version FS, il n'y a pas la même canalisation de l'attention que dans PO : l'hypothèse et la thèse sont liées par la relation de démonstration logique dans une théorie, dont la technique peut être plus ou moins opaque au solveur.

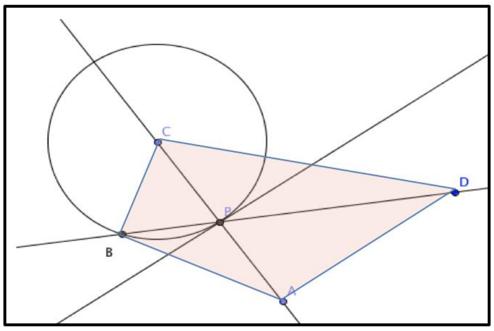

Figure 1

Les deux situations sont descriptibles aussi en utilisant le modèle de la *microgenèse de la représentation d'un problème* développé par Saada-Robert. Le problème, en fonction de la façon dont il est formulé peut induire deux modalités différentes de contrôle : descendante ou ascendante :

> Lorsque le contrôle est descendant, il y a formation d'une idée-guide et recherche autour de sa réalisation, par adéquation entre objet de pensée et objet de travail (objet de production). […]
> Lorsque le contrôle est ascendant, il y a d'abord recherche exploratoire sur l'objet de production défini par la primitive pertinente ; puis formation de l'objet de pensée adéquat (adéquation renforcée par l'idée-guide correspondante). Dans ce cas, la primitive est à la source de l'unité prototype ; le découpage de cette dernière dépend de la primitive repérée à partir du dispositif et du but fixé, et c'est elle qui sert alors de cadre organisateur à la recherche du bon objet à penser." (Saada-Robert, 1989, p. 204)

La modalité descendante est la modalité cognitive qui caractérise la voie du raisonnement vers l'avant, y compris la manière déductive du raisonnement ; inversement, la modalité ascendante est une modalité cognitive qui comporte une façon de penser 'à rebours', vers l'arrière.
D'une manière générale, une formulation ouverte induit d'abord un contrôle ascendant, la formulation d'une conjecture et après un contrôle descendant, avec de possibles alternances descendante-ascendante.
Plusieurs exemples sont discutés dans les ouvrages mentionnés auparavant et aussi par E. Gallo et al. (1989) dans le domaine algébrique.

En général, une formulation standard peut provoquer des blocages car il faudrait commencer par la recherche des éléments théoriques qui pourraient valider la thèse : mais ce n'est pas induit par la formulation et il se peut au contraire qu'elle provoque des modes descendants, qui peuvent produire des difficultés parce que ces modes ne sont pas liés à des conjectures construites. Au contraire, la formulation PO du même problème induit la pensée "dans la direction opposée" à celle où elle est induite dans le cas FS.

L'exemple soulève la question de savoir quelles restrictions devraient être mises sur D pour que ABCD soit un parallélogramme. La modalité ascendante est induite par la formulation elle-même.
La formulation ouverte de l'exemple, suggère une covariation fonctionnelle du type :

$$? \; D = f(B,\_) \; ?$$

Logiquement, c’est une relation fonctionnelle f entre B et D qui est possible. C'est la construction d'un objet multiplicatif (selon les modèles de Piaget et Lawvere et Schanuel, 1991, introduits plus haut) à partir des deux objets D, B. La construction de cet objet est donc le résultat d'un raisonnement covariant, soutenu éventuellement par l'exploration faite dans un EGD. L'exploration est conduite avec ce but en modalité alternativement ascendante et descendante, selon une approche ouverte à la découverte et à la construction de liens entre les faits observés et non à l'application pure d'algorithmes et de règles connus. Au contraire, la formulation standard ne pousse pas les étudiants vers une attitude d'enquête et les empêche généralement d'adopter une approche covariante. Cet aspect typique des processus de résolution des étudiants dans le cas de problèmes ouverts est clairement décrit, même si c'est avec une langue différente, par G. Kosyvas (2010, p. 63):

> Les élèves devront renverser la procédure formelle d’une liaison directe des données avec les questions. En faisant preuve d’imagination et d’inventivité, ils sont appelés à suivre une voie scientifique non linéaire qui implique des progrès et des retours en arrière, des balancements et des renversements d’obstacles, des contrôles et des reconstructions : ils commencent en fouillant et en effectuant des essais pour élaborer une hypothèse initiale de solution, ils vérifient ou infirment l’hypothèse en la testant plusieurs fois et à la fin, la découverte de la solution (ou des solutions) “démontre” la valeur de l’hypothèse. La preuve de l’élève, c’est une voie personnelle, qui diffère des démonstrations mathématiques formelles, et dans cette perspective, il est peut-être mieux que nous parlions de preuve ou d’argumentation et non de démonstration (Balacheff, 1987). Et bien évidemment, on développe la confiance des enfants dans leurs propres compétences. Il est nécessaire de les prendre en compte en tant que sujets.

Du problème ouvert à la covariation instrumentée

Une approche covariante est un phénomène profond qui n’est présent ni épistémologiquement ni didactiquement dans la formulation didactique habituelle, dans le cadre théorique de la géométrie euclidienne (TGE). Par conséquent les habitudes scolaires vont dans la direction opposée. Donc, une approche covariante :

- induit une forme géométrique « différente » (par ex. celle typique des problèmes ouverts où l’on demande de conjecturer);
- implique un changement épistémologique par rapport à TGE;
- a des conséquences cognitives (raisonnement “à rebours”);
- peut avoir des conséquences didactiques dans la salle de classe.

Cela prouve une discontinuité épistémologique entre TGE et la géométrie formulée avec des problèmes ouverts. Cognitivement, la discontinuité est particulièrement marquée quand le problème est abordé dans un EGD. La valeur ajoutée dans ce cas est donnée par l’approche covariante, qui est absente dans le TGE. Beaucoup de différences cognitives entre les deux environnements (TGE vs PO, éventuellement avec EGD) ne sont que la contrepartie cognitive de cette discontinuité.

La recherche / découverte de covariation, que visent les problèmes ouverts, est le ciment qui lie les étapes des arguments. Le travail avec le logiciel constitue une instrumentation de ce processus de recherche covariant. Il peut également avoir lieu dans l'environnement papier et crayon, mais généralement nécessite des solveurs plus experts. L'environnement de géométrie dynamique est un artefact qui amplifie les phénomènes qui dépendent de la formulation du problème et permet leur instrumentation. Le faisceau sémiotique peut nous aider à décrire adéquatement ces phénomènes de covariation instrumentée produits par une ingénierie didactique appropriée avec les artefacts. Bien sûr, le mot instrumentation dérive de l'approche instrumentale de Vérillon et Rabardel (1995), qui soulignent la distinction entre un artefact (un objet matériel ou abstrait, déjà produit par l'activité humaine) et un instrument (une entité mixte avec une composante artefact et une composante cognitive, représentée par des schèmes d'utilisation).

Je présente maintenant un extrait d'une discussion générale finale dans une classe de quatrième année d'école élémentaire, presque à la fin d'une expérience d'enseignement, où la notion de symétrie axiale a été introduite en utilisant deux artefacts différents, selon une variante de l'approche du *duo d'artefacts matériels et numériques* utilisée par Maschietto et Soury-Lavergne (2013). L'expérience d'enseignement a été faite à Bari et a été mise en oeuvre par Faggiano, Montone, et Rossi (Faggiano et al., 2017). L'exemple décrit comment un duo d'artefacts peut produire une compréhension instrumentée de la covariation dans une situation de symétrie géométrique entre deux points : c'est un processus que nous appellerons précisément *covariation instrumentée*. On verra que la covariation instrumentée (CI) est une forme particulière de médiation sémiotique (Bartolini et Mariotti, 1999). Je travaille actuellement sur ce problème et je présente donc ici les résultats d'une recherche en cours.

Les deux artefacts sont très différents l'un de l'autre. L'artefact concret consiste en une feuille de papier sur laquelle est dessinée une ligne droite pour le pliage, et une épingle pour percer le papier aux points choisis afin de construire leurs symétriques. Cet artefact permet de créer directement une symétrie axiale car la feuille modélise naturellement le plan et le pli permet la réalisation de deux points symétriques à l'aide de l'épingle. L'artefact virtuel a été conçu par les auteurs pour exploiter la valeur ajoutée conférée par la technologie à l'utilisation de l'artefact concret choisi. Il est intégré dans un livre interactif (LI) créé dans l'environnement de création de New Cabri. Le LI apparaît sous la forme d'une séquence de pages comprenant les tâches conçues, ainsi que des outils spécifiques correspondant à des éléments spécifiques des objets concrets : ceux qui permettent la construction de certains objets géométriques (point, droite, segment, point milieu, ligne perpendiculaire, point d'intersection), les artefacts "Symétrie" et "Compas". Un rôle fondamental est également joué par la fonction de "Déplacement" (dragging) et par l'outil "Trace", qui permet d'observer l'invariance des propriétés caractérisant les figures. La principale différence avec l'expérience de Maschietto et Soury-Lavergne est que, dans cet instrument numérique, il n'y a pas de simulation de l'autre artefact.
Dans cette expérience, la conception de l'enseignement exploite le potentiel sémiotique des artefacts. Le potentiel sémiotique d'un artefact est défini comme la double relation qui existe entre un objet et, d'une part, les significations personnelles qui émergent de son utilisation pour accomplir une tâche (activité instrumentée), et d'autre part, les significations mathématiques évoquées par son utilisation et reconnaissables comme mathématiques par un expert (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008). Ce potentiel est à la base de la conception des activités et de l'analyse des actions ainsi que de la production des signes et de l'évolution des significations. L'activité instrumentée ici est précisément l'approche de la covariation des fonctions, c'est-à-dire la CI.
Les élèves sont invités à accomplir des tâches sur les symétries en six cycles successifs, où ils utilisent alternativement les deux instruments (outil concret, OC; outil numérique, ON), selon l'ordre suivant : OC → ON → OC → ON → ON → OC.

Je m'attarde sur les dialogues et les gestes de deux moments clés de la discussion de classe, orchestrés par les chercheurs à la fin des différentes phases de l'expérience. Ils montrent :

a) l'internalisation de la covariation des figures symétriques;
b) la synergie entre les deux artefacts qui soutiennent cette covariation.

Pendant les trois épisodes, les élèves sont assis à leurs bancs disposés en fer à cheval ; ils viennent d'illustrer avec le tableau blanc interactif l'expérience faite avec l'ON pour Yuri, un garçon qui avait été absent ; le tableau blanc est toujours actif devant eux.
a) Internalisation de la covariation entre les deux figures symétriques (E: Enseignant; M, V, Gl : élèves).

(t= 21:14-21:59)
M : si tu déplaces seulement le point A, le point C se déplace avec le point A car ils doivent être symétriques.
E : c'est-à-dire
M : si tu déplaces le point A plus haut…le point C se déplace plus bas car si il doit y avoir le même espace…entre les deux points…
[M bouge ses mains symétriquement ; le pouce et l'index des deux mains se déplacent simultanément comme dans un miroir en soulignant cette symétrie. Alternativement, la symétrie est identifiée comme la même distance en marquant la distance entre les points avec les deux doigts des deux mains].
V [interrompt M] : il doit être à la même distance… toujours… entre la droite… entre les deux points et la droite.
M : entre le point A… entre la droite et le point C
E : pourquoi?
M : parce que sinon ils ne sont pas symétriques.
…
(23:26).
M : si tu déplaces seulement le point A, le point C se déplace avec le point A… partout où va le point A, le point C doit se déplacer avec lui [elle imite le mouvement des deux points A, C avec les deux mains disposées symétriquement et avec le pouce et l'index rassemblés qui pincent, pour ainsi dire, le point : Figure 2].
…
(29 :34)
Gl : Nous l'avons compris parce que lorsque Yuri a traîné le point A, le point C bougeait aussi. Mais quand ils étaient très loin de la droite rouge, il était toujours à la distance de la droite rouge... à partir du point C à la droite rouge… la même distance que... du point A à la droite rouge.

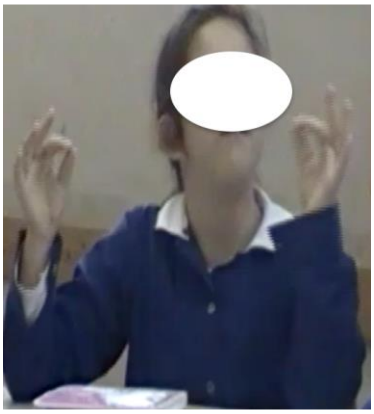
Figure 2


Figure 3

La covariation est observable à travers le faisceau sémiotique. Dans les épisodes, les mots et les gestes sont actifs tous les deux. Les gestes sont principalement iconiques : ils reproduisent particulièrement ce qui a été fait dans ON dans l'espace gestuel de l'élève (imitant le mouvement des deux points symétriques vus dans ON). Le registre parlé, en plus de décrire le mouvement des points, introduit les notions de symétrie et de distance : il est une élaboration mathématique de l'expérience avec les deux artefacts. Il est important de souligner que les artefacts sont seulement virtuellement présents.

b) L'effet synergique des deux artefacts (23:51 – 25:20):

> V : Cela signifie que si je déplace le point A, le point C doit nécessairement se déplacer parce que si le point C ne se déplaçait pas, ils ne seraient plus symétriques parce qu'ils ne conserveraient pas la même distance entre eux
> E : entre eux
> V: non, à savoir, entre la droite et le point
> E : et les points
> V: il ne conserverait pas la même distance entre le point A et la droite et le point C et la droite
> E : cette distance est-elle constante?
> V : ouiiiiiiiiiii… autrement ils ne seraient pas symétriques
> E : comme vous aviez vu que cette chose se passe à savoir, comment le réaliser?
> V: parce que... pas... quand... parce que si nous avons à notre disposition une feuille qu'on peut plier… hem… nous devons... nous tirons le point [les doigts des mains sont rassemblés à la pointe et pincent chaque un point ; avec ses doigts V mime sur le banc ce qu'ils avaient fait dans OC en déplaçant le point et son symétrique : Figure 3] et nous avons à... à savoir, selon la ligne, si elle est droite …il sera à la même distance…hem…
> E : Comment as-tu vu cette chose arriver? À savoir, comment l'atteindre ?
> V: Parce que... pas... quand... parce que si nous pouvons utiliser une feuille que nous pouvons plier… hem... nous devons... nous tirons le point et nous avons ..., le long de la ligne, si c'est juste ce sera au même moment distance, hem ...

Les mots et les gestes de V confirment l'hypothèse selon laquelle l'artefact numérique (ON : Cabri) agit en synergie avec le matériel de manipulation (OC : feuille et épingle) : que les points symétriques doivent avoir la même distance de l'axe de symétrie était compréhensible déjà en pliant la feuille et en perçant le papier avec l'épingle, mais il apparait avec le déplacement du point dans l'ON qu'il est plus facile de réaliser qu'il y a toujours la même distance.

L'expérience individuelle avec l'ON a été suffisante pour saisir l'analogie entre "déplacer le point" et "faire le trou" dans la feuille, c'est-à-dire entre les deux environnements, ON et OC.

La réponse et les gestes de M à la question de l'enseignant montrent que dans l'espace gestuel de V les deux sont mélangés. Ceci est possible à cause de l'internalisation de la dépendance fonctionnelle entre les deux figures, l'une symétrique de l'autre, et c'est perçu en regardant le faisceau sémiotique, qui est partagé dans la classe à un certain point de la discussion. La dépendance fonctionnelle est saisie par tous les élèves en raison des activités avec l'ON : par exemple, elle est clairement indiquée par M ; mais d'autres le montrent aussi avec leurs gestes et mots.

Le tableau suivant recueille les données de 15 minutes de la discussion générale dans la salle de classe à la fin de l'expérience (dont certaines parties sont rapportées ci-dessus), en analysant chaque production des élèves en fonction de marqueurs :

- verbaux
- gestuels
- de dépendance fonctionnelle
- de l'invariance des propriétés
- de référence à l'Artefact Numérique (DA)
- de référence au Matériel de Manipulation (MM)

Dans le tableau, nous voyons que les mots et les gestes sont tous les deux actifs et que la covariation fonctionnelle est très forte au début : l'analyse du faisceau sémiotique montre son internalisation et les élèves expliquent exactement ce qui s'est passé dans l'environnement numérique. Cette phase culmine à 23:58 : c'est un moment de partage fort dans la classe où le sens de la symétrie comme équidistance des points de la ligne est clair pour tous.

Immédiatement après commence la connexion (verbale et gestuelle) avec ce qui a été fait dans l'environnement MM (synergie des deux artefacts).

Temps	Verbal	Gestuel	Dep. fonct	Inv.	DA (EDG)	MM
16:03	X	X	X		X	
16:40		X	X		X	
19:28	X		X		X	
20:30	X		X		X	
20:39	X		X		X	
21:18		X	X		X	
21:29		X	X		X	
21:43	X			X	X	
22:29	X			X	X	
23:25	X	X	X		X	
23:58	X	X	X+++		X	
24:24	X	X		X	X	
24:40						X
24:59	X	X		X		X
26:16	X		X			X
28:00					X	X
29:25	X	X		X?	X	X
30:22	X	X	X		X	X
31:22	X			X	X	X
TOTAL	14	10	13	6	16	7
%	74%	52%	68%	32%	84%	37%
partagé	37%				21%	

Tableau 1

DISCUSSION

Où nous sommes arrivés

Dans cet article, nous avons présenté une introduction didactique à la covariation en mathématiques. Cet objectif a immédiatement soulevé quatre ordres de problèmes :
a) l'opportunité d'une analyse épistémologique et cognitive soigneuse du concept de covariation ;
b) la nécessité d'élaborer des situations didactiques (au sens de Brousseau) qui permettent la dévolution aux étudiants des problèmes de covariation, définis précisément selon le statut analysé en a) ;
c) l'importance de définir le rôle des technologies dans ces situations ;
d) l'exigence de disposer d'outils pour observer les phénomènes didactiques qui se produisent en classe avec la proposition de telles situations.
L'article répond à ces quatre points en illustrant les réponses par des exemples, à la fois pour des raisons d'espace et pour ne pas trop alourdir le fil du discours.

Pour a) : La covariation est une idée omniprésente dans la pensée mathématique moderne, de la naissance de l'algèbre moderne et de la pensée fonctionnelle liée à la révolution scientifique, dont un aspect parallèle, non considéré ici, est l'analyse élémentaire (calculus, en anglais). Comme l'ont montré diverses recherches, cet aspect, à quelques exceptions près, est à peine présent dans les manuels de mathématiques, qui donnent une définition de fonction abstraite et statique ou au mieux se réfèrent à la métaphore input-output des machines. Ce n'est pas une coïncidence si cette approche est plus présente dans les textes traitant de problèmes physiques, biologiques, économiques, etc. dans lesquels il est nécessaire de modéliser des phénomènes qui évoluent dans le temps. Donc on a préféré considérer la covariation comme une forme plus large de pensée, le raisonnement covariant, qui considère les objets mathématiques en considérant et en recherchant leurs relations mutuelles.

Pour b) : Contrairement à d'autres travaux, le raisonnement covariant n'est pas considéré ici comme limité à l'introduction de fonctions. Comme noté en a), il a une valeur épistémologique et cognitive beaucoup plus large : sa contrepartie didactique est constituée par la forme covariante qui se cache derrière la formulation ouverte des problèmes. Nous avons donc repris les problèmes ouverts de la littérature, en les opposant à la nature monodirectionnelle des problèmes sous forme standard généralement présents dans les manuels. La référence aux objets multiplicatifs de Piaget et Lawvere et Schanuel (1991) a illustré les significations cognitives et épistémologiques de ce choix didactique, qui restructure les situations didactiques afin de mettre en jeu le raisonnement covariant en général, incluant naturellement une approche des fonctions non fondée sur la définition statique d'ensemble.

Pour c) : Faire face à la covariation dans un environnement papier et crayon est très abstrait et peut être difficile à comprendre : par exemple, des obstacles cognitifs peuvent être attribués à ce que certains appellent la confusion entre parcours et trajectoires dans le cas où les chronogrammes sont considérés (mais cela peut aussi apparaître dans d'autres situations).

La thèse de l'article est que la covariation peut être abordée avec un certain succès dès les premières années d'école à l'aide d'outils technologiques. La covariation instrumentée a ainsi été introduite. Il est en effet possible de concevoir des situations éducatives où le raisonnement covariant est produit par une médiation appropriée des outils technologiques dans laquelle leur potentiel sémiotique est exploité dans le but de produire une forme de covariation instrumentée.

Pour d) : Nous avons répondu en proposant le modèle du faisceau sémiotique. C'est un modèle qui rend compte de la complexité des ressources sémiotiques utilisées par les élèves et les enseignants lorsqu'ils apprennent / enseignent les mathématiques. Il élargit la notion de système sémiotique classique à des systèmes de signes tels que les gestes et les inscriptions, tous présents dans les processus observés en classe, comme l'illustre abondamment la littérature. Le faisceau sémiotique est une structure dynamique qui intègre toutes ces ressources dans un ensemble unique, en considérant à la fois les relations mutuelles entre elles et leur évolution dans le temps. Dans ce sens, il est une généralisation de l'étude par le système geste-parole de McNeill et d'autres, parce que d'une part il intègre dans le modèle non seulement le discours et les gestes, mais aussi les inscriptions (des formules aux graphiques) sur lesquelles est fondée la pensée mathématique ; d'autre part il présente un modèle qui évolue avec le temps. En raison de sa structure riche, le modèle du faisceau sémiotique permet de saisir dans des variables observables les dynamiques complexes de la pensée mathématique lorsqu'elles se produisent dans une situation d'interaction, et de les rendre ainsi accessibles à la recherche scientifique. Naturellement, pour y parvenir, il est également nécessaire de filmer avec plusieurs caméras ce qui se passe dans les interactions de classe entre les élèves et entre les élèves et les enseignants, tout en gardant une trace de leurs productions écrites. Dans l'analyse finale de ces documents, nous avons également utilisé le modèle de la microgénèse d'un problème, adapté de la recherche susmentionnée par Saada-Robert. Malheureusement, l'espace accordé ne nous permet pas d'illustrer cet aspect ici.

Où nous aimerions arriver

Il y a différents problèmes que cette recherche laisse ouverts. D'une part, nous avons besoin d'une collection plus large de données sur le travail en classe, centrées sur l'introduction du raisonnement covariant pour fournir de plus amples informations sur la dynamique de son apprentissage, en particulier sur les difficultés des élèves et éventuellement sur les ingénieries didactiques appropriées pour les surmonter. D'autre part, il est important de développer un approfondissement cognitif et épistémologique de la notion de covariation : les idées de Piaget et Lawvere et Schanuel (1991) sur les objets multiplicatifs, par exemple la notion d'adjonction, concept fondamental dans la théorie des catégories, doivent être étudiés par rapport aux processus de résolution propres aux problèmes ouverts et aux phénomènes de la microgenèse de la représentation d'un problème discutés ci-dessus. Il semble que l'étude de l'alternance des modalités descendantes et ascendantes dans le processus de résolution de problèmes ouverts dans des contextes covariants, déjà étudiée par l'auteur dans d'autres contextes, puisse être féconde.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ARSAC, G. & MANTE, M. (2007), Les pratiques du problème ouvert, IREM de Lyon, CRDP, Villeurbanne.

ARSAC, G., GERMAN, G., & MANTE, M. (1991). Problème ouvert et situation- problème, IREM de Lyon.

ARZARELLO F., (2006). Semiosis as a multimodal process. *Revista Latino Americana de Investigacion en Matematica Educativa*, Vol. Especial. 267-299.

ARZARELLO F. (2008). Mathematical landscapes and their inhabitants: Perceptions, languages, theories. In: NISS, M. (Editor), *10th International Congress on Mathematical Education, Plenary lecture*. IMFUFA, Roskilde University: Copenhagen, Denmark. 158-181.

ARZARELLO F. (2009). New Technologies in the Classroom: Towards a Semiotics Analysis. In: SRIRAMAN B. & GOODCHILD, S., *Relatively and Philosophically Earnest: Festschrift in Honor of Paul Ernest's 65th Birthday*. Chishing, Charlotte, NC: Information Age Publishing, Inc., ISBN/ISSN: 978-1-60752-240-9. 235-255.

ARZARELLO, F., OLIVERO, F., PAOLA, D. & ROBUTTI, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, Vol. 34 (3).

ARZARELLO, F. & PAOLA, D. (2007). Semiotic Games: the role of the teacher. In: WOO, J., LEW, H., PARK, K., & SEO, D. (Editors). *Proceedings of the 31th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2. Seoul, Korea: The Korean Society of Educational Studies in Mathematics. 17–24.

ARZARELLO F., & ROBUTTI, O. (2008). Framing the embodied mind approach within a multimodal paradigm. In: ENGLISH, L. (Editor). *Handbook Of International Research In Mathematics Education*. ISBN: 10:0-8058-5875-X. New York: Routledge. 720-749.

ARZARELLO, F., PAOLA, D., ROBUTTI, O., & SABENA, C. (2009). Gestures as semiotic resources in the mathematics classroom, *Educational Studies in Mathematics*. Special issue on Gestures and Multimodality in the Construction of Mathematical Meaning, Editors: RADFORD, L., EDWARDS, L., AND ARZARELLO, F. Volume 70, Issue 2. 91-95.

ARZARELLO,F., & SABENA,C. (2014). Introduction to the approach of action, production, and Communication (APC). In: BIKNER-AHSBASHS, A. & PREDIGER,S. (Editors), *Networking of theories as a research practice in mathematics education*, New York:Springer, ISBN: 9783319053882, doi: 10.1007/978-3-319-05389-9. 31-46.

ARZARELLO, F., & SABENA, C. (2014). Analytic-Structural Functions of Gestures in Mathematical Argumentation Processes. In: EDWARDS, L.D., FERRARA, F., & MOORE-RUSSO, M. (Editors), *Emerging perspectives on gesture and embodiment*, Charlotte, NC:Information Age Publishing, ISBN: 9781623965532. 75-103.

ARZARELLO, F. & SABENA, C. (2014). Introduction to the Approach of Action, Production, and Communication (APC). In: BIKNER-AHSBASHS, A. & PREDIGER, S., *Networking of theories as a research practice in mathematics education*.New York: Springer. ISBN: 9783319053882, DOI: 10.1007/978-3-319-05389-9. 31-46.

ARZARELLO, F., ROBUTTI, O., & THOMAS, M. (2015). Growth point and gestures: looking inside mathematical meanings. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 90, ISSN: 0013-1954, doi: 10.1007/s10649-015-9611-5.19-37.

BARTOLINI BUSSI, M. G., & MARIOTTI, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. In: ENGLISH, L., BARTOLINI BUSSI, M., JONES, G., LESH, R. & TIROSH, D. (Editors), *Handbook of international research in mathematics education, second revised edition*. Mahwah: Lawrence Erlbaum. 746-805.

BAUERSFELD, H. (1978). Kommunikationsmuster im Mathematikunterricht – Eine Analyse am Beispiel der Handlungsverengung durch Antworterwartung. In: H. BAUERSFELD (Hrsg.): *Fallstudien und Analysen zum Mathematikunterricht*. Hannover: Schroedel. 158-170.

BOSCH, M., & CHEVALLARD, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 19, n. 1. 77-124.

BROUSSEAU, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Dordrecht : Kluwer.

CHEVALLARD, Y. (1989). *Arithmétique, algèbre, modélisation. Etapes d'une recherche,* Publications de l'IREM d'Aix-Marseille, n° 16.

COX, D., LITTLE, J., O'SHEA, D. (1996). *Ideals, Varieties, and Algorithms*. New York: Springer.

DREYFUS,T., SABENA,C., KIDRON,I., ARZARELLO,F. (2014). The Epistemic Role of Gestures – A case study on networking of APC and AiC. In: BIKNER-AHSBASHS, A. & PREDIGER,S. (Editors), *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education*. New York:Springer, ISBN: 9783319053899. 127-151.

DUVAL, R. (1995). *Semiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.* Berne: Peter Lang.

DUVAL, R. (2001). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Paper presented at the Semiotics Discussion Group of the 25th PME International Conference*, Freudenthal Institute, The Netherlands, July 2001.

DUVAL, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61. 103–131

DE FREITAS, E. & SINCLAIR, N. (2012). Diagram, gesture, agency: theorizing embodiment in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 80. 133–152

ERNEST, P. (2006). A semiotic perspective of mathematical activity: the case of number, *Educational Studies in Mathematics*, 61. 67-101

GALLO, E. (1994). Control and solution of "algebraic problems". Problems in algebraic learning. *Rendiconti del Seminario matematico dell'Università e del Politecnico di Torino,* special issue, 52(3). 263-278.

GASCON, J. (1994). Un nouveau modele de l'algebre elementaire comme alternative à l'«arithmétique généralisée». *petit x*, n. 37. 43-63.

GOLDBLATT, R. (1979). *Topoi: The Categorial Analysis of Logic*. Amsterdam:North-Holland. Revised edition 1984. Dover Publications edition 2006.

GOLDIN-MEADOW, S. (2003). *Hearing gestures: How our hands help us think*. Chicago: Chicago University Press.

INHELDER, B. & PIAGET, J. (1955). *De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent. Essai sur la construction des structures opératoires formelles*. Paris: Presses Universitaires de France.

KOSYVAS, G. (2010). Problèmes ouverts : notion, catégories et difficultés. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, Volume 15. IREM de Strasbourg. 45 – 73.

LAGRANGE, L. (1808). *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés,* Nouvelle edition, Paris: Courcier.

LAWVERE, F.W. & SCHANUEL, S.H. (1991). *Conceptual Mathematics*, Buffalo Workshop Press. Published by Cambridge University Press in 1997.

LIM, V.K., WILSON, A., HAMM, J.P., PHILLIPS, N., IWABUCH, S., CORBALLIS, M.C., ARZARELLO, F., & THOMAS, M. (2009). Mathematical gestures are semantically meaningful, *Brain*. vol. 71; ISSN: 0278-2626, doi: 10.1016/ j.bandc.2009.07.004. 306-312.

MASCHIETTO, M., & SOURY-LAVERGNE S. (2013). Designing a duo of material and digital artifacts: the pascaline and Cabri Elem e-books in primary school mathematics, *ZDM, The International Journal on Mathematics Education*, 45(7). 959-971.

MCNEILL, D. (1992) *Hand and mind: What gestures reveal about thought*. Chicago: Chicago University Press.

MCNEILL, D. (1996). *Hand and Mind: What Gestures Reveal about Thought.* Chicago, Illinois, USA: University of Chicago Press. ISBN 0-226-56134-8.

MCNEILL, D. *(2005). Gesture and Thought.* Chicago, Illinois, USA: University of Chicago Press. ISBN 0-226-51462-5.

MCNEILL, D. *(2012). How Language Began: Gesture and Speech in Human Evolution.* New York, USA; UK: Cambridge University Press. ISBN 1-107-60549-0.

MONTONE, A., FAGGIANO, E., & MARIOTTI, M.A. (2017). The design of a teaching sequence on axial symmetry, involving a duo of artefacts and exploiting the synergy resulting from alternate use of these artefacts. In: DOOLEY, T., & GUEUDET, G. (Editors). *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for*

Research in Mathematics Education (CERME10, February 1-5, 2017). Dublin, Ireland: DCU Institute of Education and ERME. 653-660.

PIAGET, J. (1950). *Introduction à l'épistémologie génétique*. Tome I: *La pensée mathématique*. Presses universitaires de France.

RABARDEL, P. (1995). *Les hommes et les technologies, une approche cognitive des instruments contemporains*. Paris : Armand Colin.

RADFORD, L. (2002). The seen, the spoken and the written. A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics, 22*(2), 14-23.

RADFORD, L. (2006). The Anthropology of Meaning, *Educational Studies in Mathematics*, (61), 39-65.

RADFORD, L., EDWARDS, L., & ARZARELLO, F. (2009). Introduction: beyond words. *Educational Studies in Mathematics*. Special issue on Gestures and Multimodality in the Construction of Mathematical Meaning, Editors: RADFORD, L., EDWARDS, L., & ARZARELLO, F. Volume 70, Issue 2, 97-109.

RICHARD, J. F. (1989). Analyse de protocoles individuels et microgénèse de la représentation d'un problème: commentaire sur l'article de M. Saada-Robert suivi d'une réponse de l'auteur. *Psychologie française*, 34(2-3), 207-211.

ROTH, W.M. (2003). Making Use of Gestures, the Leading Edge in Literacy Development. In: SAUL, W. (Editor), *Communicating science: Examining the discourse*. Newark, DE/ Arlington, VA: International Reading Association & National Science Teachers Association. 48–70.

SAADA-ROBERT, M. (1989). La microgenèse de la représentation d'un problème. Psychologie française, 34(2-3), 193-206.

SABENA, C., ROBUTTI, O., FERRARA, F., & ARZARELLO, F. (2012). The development of a semiotic framework to analyze teaching and learning processes: Examples in pre- and post-algebraic contexts. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, Numéro special, Enseignement de l'algèbre élémentaire. ISSN: 0246-9367. 237-251.

SALDANHA, L., & THOMPSON, P. W. (1998). Re-thinking co-variation from a quantitative perspective: Simultaneous continuous variation. In: BERENSON, S.B. & COULOMBE, W.N. (Editors), *Proceedings of the Annual Meeting of the Psychology of Mathematics Education - North America* Vol 1. Raleigh, NC: North Carolina State University. 298-304.

THOMPSON, P. W., & CARLSON, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421-456). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics

VÉRILLON, P., & RABARDEL, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology of Education*, 10(1). 77–101.

VYGOTSKI L.S. (1985). *Pensée et langage* (synthèse, 1934), publié en français en 1985 (Éditions Sociales, Paris) et en 1997, Éditions La Dispute, Paris, suivi par le *Commentaire sur les remarques critiques de Vigotski* par Jean Piaget.