

L'INTRODUCTION DES REELS AU POST-SECONDAIRE : QUESTIONS EPISTEMOLOGIQUES ET HORIZONS DIDACTIQUES

Denis **TANGUAY**

UQAM

tanguay.denis@uqam.ca

Viviane **DURAND-GUERRIER**

IMAG UMR CNRS-UM 5149

viviane.durand-guerrier@umontpellier.fr

Le présent projet de recherche est né du constat que les élèves-étudiants de fin de lycée et de début d'université n'ont des nombres réels qu'une connaissance lacunaire. L'étude de Vergnac et Durand-Guerrier (2014), par exemple, montre que peu des élèves sondés savent comment définir un nombre réel, et très peu invoquent une représentation à partir de la droite. Bergé (2010) a pour sa part montré que les étudiants universitaires auprès desquels elle a expérimenté ont de la complétude de \mathbb{R} une connaissance non opérationnelle, qui ne s'appuie pas sur un ensemble de situations/problèmes que la complétude résoudrait.

Une conceptualisation adéquate des réels est un atout important pour un abord réussi des cours d'analyse à l'université. L'idée que les ensembles denses \mathbb{D} et \mathbb{Q} puissent laisser des « interstices » sur la droite réelle est contre-intuitive, et nous faisons l'hypothèse que la continuité suggérée par le tracé de la droite cristallise l'idée d'une dichotomie entre le discret et le continu qui ne laisse pas de place au « dense », la densité étant erronément confondue avec la continuité. Nous nous intéressons donc à la genèse conceptuelle des réels telle qu'elle pourrait être soutenue dans l'enseignement et nous étudions les questions de recherche suivantes : doit-on envisager une forme ou une autre de reconstruction des réels en classe ? Si oui, comment selon les niveaux scolaires considérés ? À quels concepts, objets et preuves donne-t-on accès selon les approches adoptées ?

La présentation affichée reprend celle qui a été présentée au congrès INDRUM à Montpellier en mars et avril 2016 (Tanguay et Durand-Guerrier, 2016a) et a été présentée au colloque du Groupe de didactique des mathématiques du Québec (GDM 2016), ayant donné lieu à un texte développé dans les actes (Tanguay et Durand-Guerrier, 2016b). Elle porte sur les analyses épistémologiques et mathématiques (a priori), préalables à l'élaboration des dispositifs de collecte de données pour une étude didactique encore en cours.

Nous avons ainsi repéré et examiné trois démarches typiques.

1. Une construction de \mathbb{R} via les coupures, issue du texte original de Richard Dedekind (1872), dans la version traduite et commentée par Sinaceur (2008).
2. Une construction comme ensemble des suites de Cauchy de rationnels, quotienté par une relation d'équivalence bien choisie. Initiée par Cantor, nous en reprenons plutôt les versions, plus accessibles, qu'en donnent Burrell (1967) et Lelong-Ferrand & Arnaudière (1977).

3. Une construction qui associe les réels aux développements décimaux illimités. Elle est examinée dans les notes d'un cours rédigées par M. Herzlich (2013), lui-même inspiré d'un manuel de D. Perrin (2005).

En conclusion, il s'agit de repérer, à travers ces différentes approches, ce qu'elles privilégient comme objets, représentations et avenues de conceptualisation, comment elles articulent les éléments centraux que sont l'ordre, les développements décimaux infinis, la densité, et les 3 ou 4 théorèmes classiques équivalents où se déclinent la complétude et la continuité. L'horizon des questions que posent les transpositions (didactiques) de ces démarches en classe complète les réflexions suscitées.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- BERGÉ, A. (2010). Students' perceptions of the completeness property of the set of real numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, Vol. 41, n°2, 217–227.
- BURRIL, C. W. (1967). *Foundations of Real Numbers*. McGraw-Hill, New-York.
- DEDEKIND, R. (1872). *Stetigkeit und Irrationale Zahlen*. Braunschweig: Vieweg. Traduction française H. Sinaceur (2008) in Dedekind, R. *La création des nombres*. Coll. Mathesis, Librairie philosophique J. Vrin, Paris.
- HERZLICH, M. (2013). *Notes polycopiées du cours GLMA 202 – Concepts fondamentaux en Analyse*. Université Montpellier 2, Faculté des sciences.
- LELONG-FERRAND, J. ET ARNAUDIES, J.-M. (1977). *Cours de mathématiques, Tome 2, ANALYSE*. Éd. Dunod Université, Paris.
- PERRIN, D. (2005). *Mathématiques d'école*. Éditions Cassini, Paris.
- TANGUAY, D. ET DURAND-GUERRIER, V. (2016a). Introduire les réels à la transition lycée université: Questions épistémologiques et horizon didactique. First conference of International Network for Didactic Research in University Mathematics, Mar 2016, Montpellier, France. <hal-01337935>
- TANGUAY, D. ET DURAND-GUERRIER, V. (2016b). L'introduction des réels au post-secondaire : questions épistémologiques et horizon didactique. À paraître dans D. Guillemette et R. Barwell (éds), *Actes du colloque du Groupe de didactique des mathématiques du Québec* (GDM 2016). Université d'Ottawa, 31 mai au 2 juin 2016.
- VERGNAC, M. ET DURAND-GUERRIER, V. (2014). Le concept de nombre réel au lycée et en début d'université, un objet problématique. *Petit x*, 96, 7-28.