LES PRATIQUES ENSEIGNANTES CONCERNANT LA DERIVEE DANS LE SECONDAIRE

Monica **PANERO**

S2HEP-Ifé, ENS de Lyon ; Dipartimento di Matematica, Università di Torino

monica.panero@ens-lyon.fr ; monica.panero@unito.it

Résumé

Cet article porte sur ma thèse (Panero, 2015) que j'ai soutenue en 2015 à l'Université de Turin, en Italie. Cette recherche s'intéresse aux pratiques enseignantes relatives à la notion de dérivée lorsqu'elle est considérée en tant qu'outil pour étudier une fonction ou bien en tant que fonction elle-même. J'ai examiné comment l'étude des propriétés ponctuelles, globales et locales des fonctions est gérée dans l'enseignement secondaire de la dérivée, dans le contexte italien. Pour mes analyses, j'ai coordonné trois éléments théoriques : les praxéologies (Chevallard 1999), les perspectives sur les fonctions (Vandebrouck 2011) et le faisceau sémiotique (Arzarello 2006). Cette étude qualitative de la transposition didactique de la dérivée s'appuie principalement sur l'analyse de deux manuels et des praxéologies de trois enseignantes italiennes de la classe de terminale scientifique (élèves de 18-19 ans). Un des résultats principaux est l'identification de deux praxéologies enseignantes différentes pour introduire le nombre dérivé qui sont fondées sur des définitions différentes de droite tangente à la courbe d'une fonction. De plus, j'ai repéré un point critique dans les pratiques enseignantes au moment de l'introduction de la fonction dérivée : une perspective globale sur la dérivée en tant que fonction est à construire alors qu'on part d'une perspective ponctuelle donnée par la définition de nombre dérivé.

Mots clés

Fonctions, dérivée, perspectives, pratiques enseignantes

POURQUOI CETTE ETUDE SUR LA DERIVEE ?

Cette étude porte sur la transposition didactique de la notion de dérivée dans le secondaire : une notion cruciale à l'articulation entre Algèbre et Analyse. De nombreuses recherches considèrent la conceptualisation de la dérivée à la fois comme centrale et comme critique dans l'étude d'une fonction, aussi bien dans le secondaire (Maschietto, 2002, Yoon et al., 2011) qu'à la transition entre secondaire et supérieur (Gueudet, 2008, Vandebrouck, 2011, Park, 2015). En effet, ce concept représente un des fondements de l'Analyse impliquant cependant des compétences, des notions et des registres qui relèvent des domaines soit algébrique, soit géométrique. Son acquisition implique un travail algébrique sur les fonctions et sur leurs propriétés, sur les limites, mais aussi sur des objets géométriques comme la droite tangente. Plus particulièrement, comme nous le mettons en évidence dans cet article, la notion de dérivée a la spécificité d'être à la fois un outil pour étudier les variations d'une fonction et un objet en tant que fonction à étudier pour elle-même. Cette caractéristique rend complexe l'activité mathématique des élèves et des étudiants. Par suite, il est indispensable de confronter les élèves et les étudiants à cette dialectique outil-objet (Douady, 1986) autour de la dérivée pour qu'ils parviennent à conceptualiser et maitriser la dérivée de façon complète et réfléchie. L'intérêt pour l'étude de cette dialectique est dû aussi à un facteur linguistique-culturel : en italien, il n'existe pas d'expression équivalente à « nombre dérivé ». Comme les anglophones, par exemple, on n'utilise que la locution « *derivata di una funzione in un punto* »[1] (dérivée d'une fonction en un point). Le langage a surement un effet sur la conceptualisation d'un objet mathématique. En particulier, lorsque les élèves interagissent avec un objet mathématique, la manière dont ils le nomment peut jouer un rôle important sur les images qu'ils s'en construisent (Tall & Vinner, 1981). Dans ce cas, l'expression française « nombre dérivé » explicite qu'il s'agit d'un nombre. Au contraire, en italien, la locution "*derivata di una funzione in un punto*" cache cette propriété. Une remarque similaire peut être faite pour ce qui concerne le coefficient directeur de la droite tangente, grâce auquel on définit le nombre dérivé. En fait, en italien on parle de « *coefficiente angolare* » (coefficient angulaire) et là aussi on peut retrouver un possible obstacle linguistique à la conceptualisation de la dérivée comme direction de la droite tangente.

Encore une précision est nécessaire pour mieux rentrer dans le contexte scolaire italien. En Italie, la dérivée est introduite en dernière année de lycée (élèves de 18-19 ans) après avoir travaillé formellement le concept de limite et pendant un temps long sur les coniques deux années plus tôt. Cette différence au niveau des programmes scolaires implique que certains outils sont à disposition des élèves italiens lorsque la dérivée leur est introduite.

Sur la conceptualisation de la dérivée

Les concepts que nous rencontrons en mathématiques ont été rencontrés sous d'autres formes avant d'être formellement définis et une structure cognitive complexe existe dans la tête de chaque individu. Une variété d'images mentales personnelles sont produites lorsqu'un concept est évoqué : c'est ce que Tall et Vinner (1981) appellent image d'un concept (« *concept image* »). De nombreuses recherches se sont focalisées sur le nombre dérivé et plus précisément sur le *concept image* de la tangente et sur son influence et sa persistance dans le processus de recherche de la pente de la courbe d'une fonction générique. Les études de Vinner (1982) puis de Tall (1987) ont montré que les expériences de la tangente au cercle amènent les élèves à croire que la tangente est une droite qui touche le graphique en un seul point et ne le traverse pas. Cette idée persiste dans la tête des élèves et elle est source d'obstacles lorsque plus tard ils sont confrontés au cas d'une courbe générique. Sierpinska repère des difficultés chez les élèves pour attribuer du sens à l'image « limite de sécantes ». Dans une étude sur les obstacles épistémologiques concernant les limites (1985), elle constate que la définition de la dérivée en passant par l'image de la tangente comme limite de droites sécantes n'est pas facilement accessible par les élèves. Dans cet article, publié en français dans la revue *Recherche en Didactique des Mathématiques*, elle remarque que :

> « La notion de tangente est un concept nouveau pour les élèves qui demandent le franchissement de beaucoup d'obstacles. On ne peut pas compter sur le fait que l'interprétation de la dérivée comme le coefficient angulaire de la tangente puisse approcher cette notion si elle est introduite d'abord comme limite de la suite de quotients différentiels » (Sierpinska, 1985, p.58).

Castela (1995) choisit précisément cette situation comme un exemple significatif de « apprendre avec et contre ses connaissances antérieures ». Des recherches plus récentes

---

[1] Traduit comme « dérivée d'une fonction en un point » : nous allons utiliser cette locution lors de notre discussion des études de cas pour garder une liaison plus forte avec le discours original.

impliquant des étudiants en licence de mathématiques (Biza & Zachariades, 2010) et des enseignants de mathématiques dans le secondaire en formation continue (Paéz & Vivier, 2013) ont confirmé que même ceux qui maitrisent les concepts de tangente et de courbe peuvent être déstabilisés par une investigation plus profonde et sentir la nécessité de réorganiser leurs images du concept, remettant en question leur structure cognitive. L'enseignement-apprentissage de la tangente ne peut pas être réduit à une simple généralisation expansive (Harel & Tall, 1991). Autrement dit, il ne s'agit pas simplement d'étendre la structure cognitive de l'élève mais cela demande des changer des images fondamentales. On parlera plutôt de généralisation reconstructive (Harel & Tall, 1991) où les élèves changent radicalement les anciennes images du concept pour qu'elles puissent être réinvesties dans un contexte plus large.

Si l'introduction du nombre dérivé évoque des images du concept de tangente, l'introduction de la dérivée en tant que fonction remet en cause les conceptions des élèves sur les fonctions. Les études sur la fonction dérivée, moins diffusées en littérature, portent principalement sur la relation entre une fonction et sa fonction dérivée et s'intéressent plus particulièrement à cette relation dans le registre graphique. Nemirovsky et Rubin (1992) ont souligné que les élèves ont tendance à supposer une certaine ressemblance entre le graphique d'une fonction et celui de sa dérivée. Dans cette mise en relation des propriétés d'une fonction et celles de sa dérivée, ont un rôle important les processus de visualisation (Haciomeroglu et al., 2010) aussi bien que les gestes et autres ressources sémiotiques (Yoon et al., 2011). Le passage du nombre dérivé à la fonction dérivée signifie passer de considérer la fonction en un point spécifique à la considérer sur un intervalle et cette transition n'est pas triviale pour les élèves (Monk, 1994). S'appuyant sur ces résultats, Park (2013, 2015) a récemment étudié le discours des étudiants et des professeurs sur la dérivée dans le contexte de l'enseignement supérieur. Elle a remarqué que le changement de point de vue (d'un point spécifique à un intervalle) est fondé principalement sur des notations symboliques avec très peu d'explications sur comment la valeur de la dérivée change. Les étudiants montrent « une notion mélange de dérivée, comme fonction sur un intervalle et comme objet ponctuel au même temps, sans apprécier pleinement leur relation » (Park, 2013, p. 637).

La problématique visée

Cette recherche s'intéresse à la transposition didactique (Chevallard, 1985) de la notion de dérivée dans le secondaire. Le premier pas a donc été celui d'étudier la définition de dérivée dans le savoir savant. Sur les manuels plus utilisés à l'université nous retrouvons deux grandes approches à la notion de dérivée.

> Déf. 1 – Soit $f :]a,b[\rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f possède une dérivée en x_0 appartenant à $]a,b[$ si
>
> $$\lim_{h\to 0} (f(x_0+h)-f(x_0))/h$$
>
> existe et est finie. Cette limite est nommée dérivée première de f à x_0 et est notée $f'(x_0)$. La droite d'équation $y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ s'appelle droite tangente au graphique de f au point $(x_0,f(x_0))$. (Bramanti et al., 2000, p.171)

Dans la définition 1, la dérivée est présentée comme le coefficient directeur de la droite tangente, définie comme la position limite d'une sécante à la fonction. Cette définition compare les infinitésimaux PA et XX_0 (Fig. 1) : leur rapport est le coefficient directeur de la sécante, la limite de ce rapport est $f'(x_0)$.

> Déf. 2 – Soit f une fonction réelle à valeurs réelles définie dans l'intervalle [ouvert] I (qui ne se réduit pas à un seul point) et soit x_0 un point de I. On dit que f est différentiable à x_0 avec dérivée λ appartenant à $\mathbb{R}$ si et seulement si on a
>
> $$f(x) = f(x_0) + \lambda\,(x\text{-}x_0) + o(x\text{-}x_0) \ \text{ pour } x \rightarrow x_0 \quad \text{([dénotée ensuite par] *).}$$
>
> [...] La droite par P_0 (x_0, $f(x_0)$) d'équation $y = f(x_0) + \lambda\,(x\text{-}x_0)$ où λ se déduit de * s'appelle droite tangente au graphique de f au point P_0. (Geymonat, 1981, p.188)

Dans cette deuxième définition, la dérivée est présentée comme nombre réel λ, qui est le coefficient d'un développement limité au premier ordre de la fonction f en x_0. Ce nombre est le coefficient directeur de la droite tangente, définie comme la droite qui approche le mieux le graphique de la fonction dans le voisinage du point x_0. Autrement dit, en remplaçant la courbe par la droite, l'erreur faite est un infinitésimal d'ordre supérieur par rapport à l'incrément x-x_0 quand x tend vers x_0 (on compare QP et XX_0 en Fig. 2). Par conséquent, la fonction devient « quasi-linéaire » dans un voisinage de x_0. Geymonat (1981) rajoute en fait :

> « [L'expression] * signifie que pour x près de x_0 la fonction f peut être approximée avec une fonction affine, c'est-à-dire que le graphique de f est bien approximé par le graphique de sa tangente. Intuitivement, on peut dire que le graphique de f dans le voisinage de P_0 est 'quasi-linéaire' (ou 'quasi-droit') ». (Geymonat, 1981, p.188)

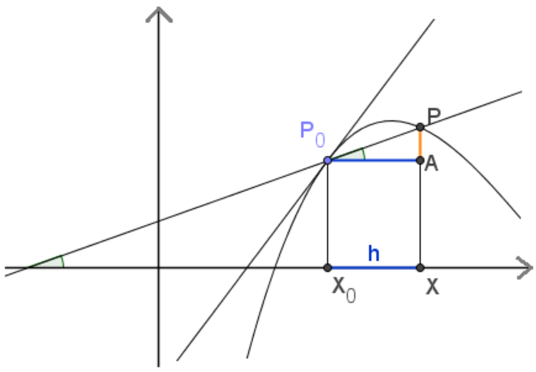

Fig. 1 : Selon Déf. 1, le rapport des deux infinitésimaux PA et XX_0 tend vers $f'(x_0)$.

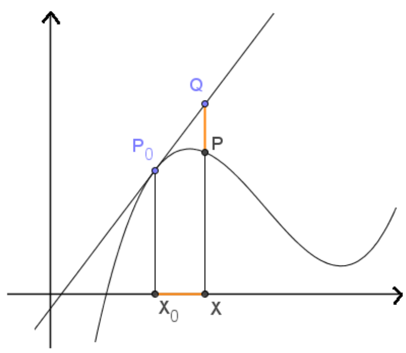

Fig. 2 : Selon Déf. 2, l'infinitésimal QP est d'ordre supérieur à l'infinitésimal XX_0.

Il est très simple de prouver que ces deux définitions sont équivalentes. De plus, toutes les deux et leurs possibles variantes mettent en jeu une dimension locale sur la fonction f. Cependant elles peuvent générer de différentes conceptualisations de dérivée et de droite tangente. Nous remarquons que, d'un point de vue didactique, les deux définitions sont *a priori* transposables dans l'enseignement secondaire.

En résumé, avec l'introduction du nombre dérivée, le travail sur les fonctions s'enrichit d'une dimension locale, car il faut apprendre à raisonner en termes de voisinage et de limite. De plus, une dialectique outil-objet s'engendre sur cette nouvelle notion : la dérivée est ponctuellement un outil pour étudier les variations d'une fonction et globalement un objet en tant que fonction elle-même. Notre problématique de l'introduction de la dérivée dans l'enseignement-apprentissage des fonctions au niveau secondaire se divise ainsi en deux sous-problématiques liées : l'introduction de la dérivée au point x_0 (nombre dérivé) et la dimension locale du travail sur f ; le passage du nombre dérivé à la fonction dérivée et le jeu ponctuel-global dans le travail sur f'.

La question qui a guidé l'étude de chacune de ces sous-problématiques est comment les différentes dimensions du travail sur les fonctions (ponctuelle, globale et locale) sont-elles gérées, notamment dans le savoir à enseigner et dans le savoir enseigné ?

CADRE THEORIQUE

La transposition didactique (Chevallard, 1985) est un processus fondamental de la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) (Chevallard, 1999). Comme Chevallard l'explicite et des recherches successives le confirment, la transposition didactique n'est pas

> « […] un simple 'transfert', adaptation ou simplification, au contraire c'est un processus de déconstruction et de reconstruction de différents éléments du savoir, dans le but de le rendre 'enseignable', tout en gardant son pouvoir et son caractère fonctionnel. » (Bosch & Gascón, 2006, p.53).

Pour investiguer les dimensions ponctuelle, globale et locale dans le travail sur les fonctions, je coordonne trois éléments théoriques qui viennent de trois approches théoriques différentes.

- La notion de praxéologie (Chevallard, 1999), qui est centrale dans la TAD comme modèle pour décrire toute activité humaine à l'intérieur d'une institution donnée, incluant donc les pratiques enseignantes dans les différentes étapes de la transposition didactique.
- Les différentes perspectives (ou points de vue) sur les fonctions (Rogalski, 2008, Maschietto 2002, Vandebrouck, 2011), qui dépendent du caractère ponctuel, global ou local des propriétés des fonctions qui sont considérées à un moment donné du travail.
- Le faisceau sémiotique (*semiotic bundle* : Arzarello, 2006), qui rend compte de toutes les ressources sémiotiques utilisées pour identifier une propriété donnée de la fonction en jeu, ainsi que les relations entre ces ressources.

Dans les paragraphes suivants je présente chaque élément du cadre théorique pour enfin justifier leur coordination.

Praxéologie mathématique et moments didactiques

Une praxéologie se compose d'un type de tâche, de techniques pour le résoudre, de justifications de l'efficacité de ces techniques (discours justificatifs qui constituent la technologie) et d'arguments théoriques qui soutiennent ces justifications. Parmi les types de tâches liés aux deux sous-problématiques identifiées, cette étude s'intéresse plus particulièrement à :

- Déterminer l'équation de la tangente à la courbe d'une fonction générique en un point (T_{tangente} dans la suite) ;
- Donner une expression algébrique de la fonction dérivée ($T_{f'}$ dans la suite).

L'aspect intéressant des praxéologies liées à ces deux types de tâches est la dialectique entre les dimensions ponctuelle, globale et locale qu'ils engendrent dans le travail sur les fonctions. En effet, le type de tâche T_{tangente} a déjà été travaillé avec les coniques (selon les programmes italiens) avec des techniques et des justifications dont la validité ne peut pas être étendue à une courbe générique. Du point de vue didactique, retravailler cette praxéologie permet d'introduire la dérivée comme outil fondamental pour résoudre le type de tâche dans le cas générique. Construire une praxéologie pour le type de tâche $T_{f'}$ conduit à établir une dialectique entre la dimension ponctuelle et la dimension globale sur la fonction dérivée, ainsi qu'une dialectique entre les différentes propriétés des fonctions en jeu, dans la mise en relation d'une fonction avec sa fonction dérivée. Du point de vue didactique, travailler cette praxéologie permet d'introduire la dérivée comme objet en relation avec la fonction qui l'a générée.

Nous distinguons deux plans :

- la praxéologie mathématique à construire pour $T_{tangente}$ et $T_{f'}$;
- la praxéologie didactique qui comprend l'organisation et la gestion du développement de la praxéologie mathématique par l'enseignant, à travers différents moments didactiques.

Chevallard (1999) identifie six moments didactiques dans l'intervention de l'enseignant lorsque sa tâche didactique est celle de transposer aux élèves la praxéologie mathématique pour un type de tâche donné. De ces moments, je considère les trois qui constituent le groupe « Activités d'étude et de recherche » :

- le moment de la (première) rencontre avec le type de tâche T, vu comme rencontre significative qui pose T comme type de tâche problématique ;
- le moment de l'exploration de T et de l'émergence de la technique, qui implique la construction d'une technique (au moins embryonnaire) pour accomplir T ;
- le moment de la construction du bloc technologico-théorique, qui a pour objectif de produire des justifications et des éléments de théorie qui soutiennent la technique.

Perspectives sur les fonctions

Les perspectives (ou points de vue) sont les différentes façons de regarder une fonction quand on travaille sur elle, selon les propriétés qui sont prises en considération. On peut s'intéresser à une propriété ponctuelle de f qui n'est valide qu'en un point (comme par exemple, $f(2)=4$, ou $x=3$ est un zéro de f) ou sur un ensemble fini de points. Dans ce cas, une perspective ponctuelle est activée sur la fonction. On peut considérer la fonction comme un tout ou des propriétés globales qui sont valides dans un intervalle donné (comme par exemple, f est paire, f est croissante dans [0,1]). Dans ce cas, une perspective globale est activée sur la fonction. On peut se concentrer sur une propriété locale de f qui est valide dans le voisinage d'un point donné (comme par exemple, f est discontinue en $x=2$, f a un point de maximum en $x=1$). Dans ce cas, une perspective locale est activée sur la fonction, mettant en avant des propriétés de f qui sont valides sur une famille de voisinages contenant le point donné. Il ne suffit pas de connaitre la valeur de la fonction à ce point et il n'est pas nécessaire de choisir un intervalle particulier : une propriété locale est valide sur une infinité d'intervalles contenant le point.

Semiotic bundle

Le concept de faisceau sémiotique a été introduit par Arzarello (2006) pour étudier les relations entre les ressources sémiotiques qui sont employées dans une activité mathématique. La définition donnée par Arzarello comprend la variété de ressources utilisées par les élèves et par les enseignants, incluant aussi les gestes, les dessins et les modes extralinguistique d'expression. De plus, le faisceau sémiotique permet d'étudier la relation entre les registres qui sont activés en même temps et leurs dynamiques, vu la multi-modalité de leur activation.

Un ensemble sémiotique est compose de trois éléments :

- un ensemble de signes (dans le sens de Peirce[2]) produits par différentes actions intentionnelles ;
- un ensemble de modes de production et transformation de ces signes ;
- un ensemble de relations entre les signes et leurs significations respectives.

Un faisceau sémiotique ou faisceau d'ensembles sémiotiques, à son tour, est composé d'une collection d'ensembles sémiotiques et un ensemble de relations entre eux. Selon Arzarello, par exemple, « le discours, les gestes et les représentations écrites (des croquis et des diagrammes jusqu'aux symboles mathématiques) » sont des exemples de « trois types différents d'ensembles sémiotiques » et tous ensemble, y compris les relations entre eux, « constituent un faisceau sémiotique, qui évolue dynamiquement avec le temps » (Arzarello, 2006, p.284).

La coordination des trois éléments théoriques

Dans l'étude de la transposition didactique de la notion de dérivée dans le secondaire, je considère les deux types de tâches T_{tangente} et $T_{f'}$. Plus précisément, je m'intéresse aux praxéologies mathématiques qui sont développées pour résoudre ces types de tâches et qui sont proposées dans le curriculum *attendu* et dans le curriculum *implémenté* dans les classes (Mullis & Martin, 2007)[3]. Les techniques employées pour résoudre T_{tangente} et $T_{f'}$ reposent sur des propriétés ponctuelles, globales et locales des fonctions en jeu, qui constituent le bloc technologico-théorique des praxéologies. Les arguments développés pour justifier les techniques à utiliser en effet se réfèrent explicitement ou implicitement à ces propriétés. Pour identifier si le sujet qui développe et utilise une certaine praxéologie (auteur des programmes, auteur des manuels, enseignant ou élève) a activé une perspective spécifique sur les fonctions en jeu, il est évidemment important de considérer ce qui est déclaré (dit ou écrit) à propos de la fonction. Cependant, c'est la coordination avec d'autres ressources sémiotiques, différentes du discours oral ou écrit, qui peuvent nous renseigner effectivement sur la perspective adoptée par le sujet. Autrement dit, c'est l'analyse en termes de faisceau sémiotique qui nous donne des informations sur la perspective en jeu.

Une grande variété de ressources sémiotiques peuvent être utilisées par le sujet (qu'il soit l'enseignant ou l'élève) lorsqu'il travaille sur T_{tangente} ou $T_{f'}$: discours oral ou écrit, symboles, gestes, croquis ou dessins. Elles peuvent exploiter différents registres de représentation (algébrique, symbolique, graphique, etc.) sur les fonctions et révéler ou cacher une perspective donnée sur ces fonctions. Si les différentes ressources sémiotiques utilisées (comme par exemple, le discours et les gestes) concourent à mettre en évidence la même perspective sur la fonction en question, cette unité peut encourager l'activation de cette perspective. Mais il est aussi possible que plusieurs ressources sémiotiques utilisées simultanément mettent l'accent sur des perspectives différentes. Par exemple, si l'affirmation

---

2 Dans une lettre à Lady Welby, Peirce écrit : "I define a Sign as anything which is so determined by something else, called its Object, and so determines an effect upon a person, which effect I call its Interpretant, that the latter is thereby mediately determined by the former" (Peirce, 1977, pp.80-81; Letter to Lady Welby, 1908).

3 Cette terminologie a été introduite par le *Second International Mathematics Study* (*SIMS*) dans les années '80. Le curriculum *attendu* se réfère aux objectifs des programmes et aux intentions que le pays a pour ces élèves : documents officiels du ministère, programmes et manuels qui explicitent le savoir à enseigner dans le classe ainsi que des indications méthodologiques. Le curriculum *implémenté* concerne tout ce qui est effectivement enseigné à l'école.

locale « f est discontinue en x_0 » est accompagnée par un geste ponctuel sur le graphique de f au point (x_0, $f(x_0)$), le faisceau sémiotique composé de discours, graphique et gestes montre quelques relations internes conflictuelles par rapport à la perspective adoptée. Une telle contradiction, qui souvent se produit inconsciemment, peut interférer avec l'intention d'évoquer une perspective locale sur la fonction. Ainsi, dans l'analyse du développement d'une praxéologie pour $T_{tangente}$ et $T_{f'}$ deux aspects semblent essentiels à identifier et à discuter : quelles ressources sémiotiques sont utilisées ensemble pour évoquer une perspective donnée et s'il y a concordance ou discordance entre les perspectives activées par les différentes ressources constituant le faisceau sémiotique.

Les questions de recherche auxquelles cette étude se propose de répondre peuvent être ainsi reformulées dans ce cadre théorique : Comment la perspective locale est-elle gérée dans le développement d'une praxéologie pour déterminer l'équation de la tangente à la courbe d'une fonction en un point ($T_{tangente}$) ? Comment les perspectives ponctuelle et globale sont-elles gérées dans le développement d'une praxéologie pour représenter algébriquement la fonction dérivée ($T_{f'}$) ?

METHODOLOGIE

Concernant le savoir à enseigner, j'ai considéré le curriculum attendu en adoptant un point de vue global sur les programmes italiens pour les lycées (*Indicazioni Nazionali per i Licei* : MIUR, 2010). Plus précisément, j'ai analysé les indications impliquant la dérivée dans les programmes des lycées scientifiques. Ensuite j'ai restreint mon point de vue pour analyser deux manuels italiens (Bergamini et al, 2013, Sasso, 2012) qui se sont révélés parmi les plus utilisés en cinquième année de lycée scientifique en 2013 dans la région de Turin. Pour investiguer le savoir enseigné, je me suis appuyée sur des études de cas. Trois enseignantes ont participé à cette recherche sur la base du volontariat : Vittoria, Martina et Margherita. Elles ont été contactées car elles suivaient un des manuels analysés et leur expertise était différente : Vittoria et Martina sont enseignantes depuis une vingtaine d'années et depuis plusieurs années elles travaillent dans le même établissement ; Margherita est une jeune enseignante qui travaillait au lycée scientifique en 2012-2013 comme précaire et pour la première fois avec des élèves en cinquième année.

J'ai interviewé les enseignantes avant qu'elles introduisent la dérivée en classe, je les ai observées en classe pendant une dizaine d'heures de cours, j'ai proposé deux tâches aux élèves. Les entretiens étaient du type semi-structuré, selon une liste de sujets à aborder (utilisation du manuel, introduction habituelle ou prévue du concept de dérivée et de fonction dérivée, influences possibles de pratiques précédentes notamment sur les coniques et sur les limites). Au-delà des interviews préliminaires, durant et après la phase d'observation en classe, j'ai eu l'opportunité de discuter informellement avec les enseignantes de ce qui s'était passé en classe, de leurs commentaires et leur bilan. Du point de vue de la recherche, ces entretiens m'ont donné des éclairages sur les pratiques déclarées ou projetées par les enseignantes et ont étayé mes interprétations des décisions et des choix des enseignantes en phase d'analyse. Dans la phase d'observation, j'ai pris des vidéos du travail de classe que j'ai pu aussi utiliser comme support pour mes entretiens plus informels avec les professeurs. Mon rôle d'observateur dans la classe peut se définir comme une « participation modérée » c'est-à-dire « l'observateur est présent sur la scène de l'action mais ne participe pas activement, n'interagit pas, ou il le fait seulement occasionnellement, avec les personnes sur scène »

(DeWalt et al., 1998, p.262). Enfin, j'ai conçu deux tâches pour les élèves afin d'avoir un aperçu à chaud sur leurs acquis en termes de perspectives sur les fonctions et de conceptualisation de fonction dérivée. L'observation et l'analyse de l'activité des élèves a été conduite aussi pour repérer des possibles influences des praxéologies des enseignantes sur les praxéologies mathématiques développées chez les élèves. Cette partie de l'étude mériterait d'être approfondie ultérieurement et elle ne fait pas l'objet de cet article.

De mon côté, j'ai donné aux enseignantes des informations sur le contexte et les objectifs de la recherche, sur mon rôle dans la classe, sur le traitement des sons et des vidéos. Je ne suis pas rentrée tout de suite dans les détails des tâches que je projetais de proposer aux élèves, pour ne pas influencer leurs pratiques habituelles qui étaient l'objet de mon observation ; j'en ai discuté plus tard avec chaque enseignante avant leur mise en œuvre dans la classe.

ANALYSE DES MANUELS

Les Indications Nationales italiennes (MIUR, 2010) mentionnent la différentiabilité d'une fonction comme un des concepts fondamentaux du calcul infinitésimal, avec la continuité et l'intégrabilité. Cependant ce n'est pas explicité que ce groupement est dû au caractère local de ces propriétés. Les indications laissent aux enseignants une grande liberté d'aborder le concept. De plus, il n'a pas de référence explicite à la définition de fonction dérivée.

Dans les manuels analysés, en revanche, les sous-problématiques identifiées dans cet article sont approchées aussi bien algébriquement que graphiquement et la notion de fonction dérivée apparaît comme essentielle pour résoudre les problèmes de *maturità* (baccalauréat italien) : les élèves sont censés avoir conceptualisé la dérivée en tant que fonction, avec ses propriétés en relation avec les propriétés des fonctions primitives (Derouet & Panero, 2014).

Concernant T_{tangente}, dans les manuels analysés, nous pouvons reconnaitre la transposition didactique de la définition « savante » Déf.1. En effet, au début du chapitre sur la dérivée, aussi bien Bergamini et al (2013) que Sasso (2012) développent les phases suivantes. D'abord, ils introduisent le problème de la tangente à la courbe d'une fonction générique et la droite tangente est vue comme limite d'une droite sécante dynamique ou d'une suite de droites sécantes (voir Fig. 3).

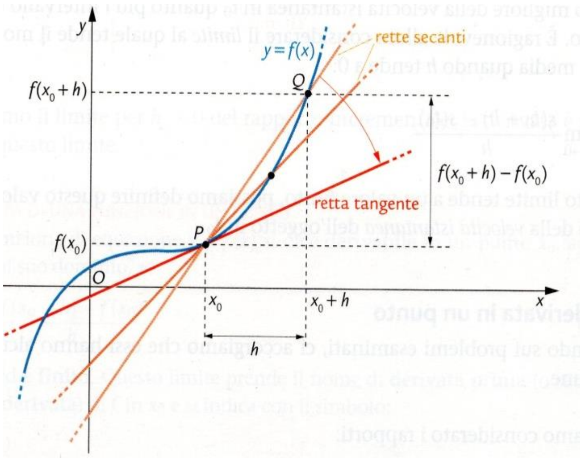

Fig. 3 : La tangente comme limite d'une séquence de sécantes (Sasso, 2012, p. 259).

Cette figure est accompagnée avec des descriptions comme « Q s'approche de P » et « lorsque Q devient de plus en plus proche de P ». Ensuite, le coefficient directeur de la droite sécante *PQ* est écrit en fonction de x_0 et h et on lit : « Imaginons maintenant que h tend vers 0 » et le symbole de limite est introduit. Enfin, la dérivée de la fonction f au point x_0 est définie par cette limite si elle existe et est finie.

Pour ce qui concerne les perspectives, nous pouvons remarquer que dans une première phase un travail important est fait sur la droite sécante, ce qui active les perspectives ponctuelle et globale sur la fonction. Puis le symbole de limite est introduit assez soudainement impliquant une perspective locale sur la fonction f. À travers le faisceau sémiotique *mots + graphique + symboles*, nous pouvons reconnaitre une activation potentielle, mais plutôt implicite, de la perspective locale. Cependant, il est difficile d'établir des relations parmi les mots qui décrivent dynamiquement un graphique statique et le symbolisme introduit « $\lim_{h\to 0}$ ».

Concernant $T_{f'}$, les manuels partent de la dérivée d'une fonction en un point x_0 d'une fonction f et remplacent x_0 par x.

> « On peut aussi calculer la dérivée d'une fonction en un point générique. Dans ce cas, la valeur obtenue $f'(x)$ est une fonction de x et, pour cette raison, nous parlons aussi de fonction dérivée. […] La fonction dérivée, lorsque x varie, donne le coefficient directeur de toutes les droites tangentes à la fonction donnée. » (Bergamini et al. 2013, p. 1621)

Quelques lignes après on trouve la formule symbolique $f'(x) = \lim_{h\to 0} [(f(x+h)-f(x))/h]$ appliquée dans un exercice guidé. La technique consiste ici à remplacer x_0 par x et elle est fondée sur l'idée de considérer un point générique x (Panero et al. 2016).

Pour ce qui concerne les perspectives, nous pouvons remarquer que le passage d'une perspective ponctuelle à une perspective globale sur la fonction dérivée est implicitement proposé de façon très concise. La formule globale qui exprime $f'(x)$ est ensuite immédiatement utilisée dans un exercice guidé. À travers le faisceau sémiotique, nous pouvons reconnaitre que les ressources utilisées pour montrer ce passage de perspectives sont les mots et les symboles. La technique proposée est presque totalement exprimée en symboles.

Nous pouvons conclure que, en termes de curriculum attendu, le caractère local de la propriété de différentiabilité est implicitement reconnu, peu travaillé, mais parfois demandé dans les tâches que l'élève est censé savoir résoudre. Lorsque la dérivée est introduite, la perspective locale sur les fonctions est potentiellement activable par un élève qui dispose de ce matériel, mais cela pourrait être difficile sans une médiation. Au moment du passage à la fonction dérivée, les manuels examinés n'approfondissent pas la justification de la technique consistant à remplacer x_0 par x. Le focus se déplace alors naturellement sur les enseignants qui ont la tâche de transposer ce savoir à enseigner : Comment les enseignants gèrent-ils les perspectives sur les fonctions dans le développement des praxéologies pour T_{tangente} et $T_{f'}$?

RESULTATS DES OBSERVATIONS EN CLASSE

Martina et Margherita ont essentiellement suivi la même praxéologie, celle du manuel (notamment Sasso, 2012). Je vais présenter ici le cas de Vittoria qui a introduit avec ses élèves une praxéologie différente, surtout au niveau du bloc technologico-théorique.

Vittoria enseigne mathématiques et physique dans un lycée scientifique de Turin. Elle travaille dans cet établissement depuis plusieurs années, et en particulier avec les élèves de la classe observée (élèves de 18-19 ans) depuis deux années. Les enseignants de mathématiques de l'établissement ont adopté le manuel de Bergamini et al (2013), mais Vittoria préfère s'appuyer sur ses notes pour préparer les cours et n'utilise le manuel que pour les exercices. Elle a obtenu un doctorat en Analyse et donnait des TD : ses notes sont en fait une transposition de ces travaux. Concernant le background des élèves observés, ils ont étudié la tangente aux coniques deux années plus tôt, en utilisant des techniques ponctuelles. Par exemple, une des techniques étudiées consiste à imposer Δ égal à zéro dans l'équation de second degré permettant de résoudre le système entre l'équation de la courbe et l'équation du faisceau de droites sécantes au point donné. Au moment de l'introduction de la dérivée les élèves venaient de travailler sur les limites : leur définition formelle (« $\varepsilon - \delta$ »), leur calcul et leur utilisation pour étudier le comportement du graphique d'une fonction dans le voisinage d'un extremum ou à l'infini. En particulier, Vittoria a travaillé avec ses élèves la propriété d'équivalence asymptotique de deux fonctions dans le voisinage d'un point. Voici ci-dessous la définition qu'elle a donné dans la classe et sur laquelle les élèves se sont appuyés pour résoudre les « limites remarquables » tels que $\lim_{x\to 0} [\sin x / x] = 1$.

> Déf. [équivalence asymptotique] Soient f et g deux fonctions qui tendent vers zéro lorsque $x \to a$. Nous disons que f et g sont asymptotiquement équivalentes pour $x \to a$, si $\lim_{x\to a} [f(x) / g(x)] = 1$.

En particulier, les élèves ont visualisé graphiquement cette propriété en utilisant GeoGebra et en zoomant sur les deux courbes dans le voisinage du point a ; puis ils l'ont employée comme outil pour le calcul de limites, en remplaçant une fonction par son équivalente asymptotique[4].

Praxéologie mathématique pour $T_{tangente}$

Au cours de l'entretien préliminaire, Vittoria a expliqué que d'habitude elle commence par la définition de droite tangente. En fait, dans la classe elle pose tout de suite le problème de définir la tangente à une fonction générique en un point donné. Plus spécifiquement elle demande aux élèves : « Quelles propriétés doit avoir la droite tangente ? ». Une discussion ouverte se met en place et les élèves, comme Vittoria l'avait prévu, rappellent toutes les définitions opérationnelles et les techniques utilisées avec les coniques. En termes de moments didactiques, la première phase de la séance est dédiée à une discussion technologico-théoretique sur le problème de la tangente dans le cas d'une fonction générique. L'intérêt est en fait celui de définir l'objet mathématique avec lequel ils vont travailler et d'expliquer pourquoi toutes les techniques reliées aux coniques ne marchent plus. Comme elle l'a déclaré avant le cours, Vittoria a l'intention de désarmer les élèves de toutes leurs techniques précédentes et d'introduire la dérivée comme un outil pour résoudre le type de tâche $T_{tangente}$ dans le cas générique. Cependant, la discussion produit chez les élèves non seulement du désarroi, mais aussi une définition inattendue mais correcte de tangente. Je vais présenter l'analyse de quelques épisodes saillants de ce débat de classe.

La première définition proposée par un élève (E1) est : « La tangente intersecte la courbe en un seul point ».

1 E1 : [La tangente] doit intersecter [la fonction] en un seul point.

2 E2 : […] Mais, si c'est ça, tous les points n'ont pas de tangente. J'imagine une fonction pentue (il penche sa main) alors peut-être la tangente dans ce cas pourrait intersecter la fonction en un autre point, n'est-ce pas ?

[4] Exemple : $\lim_{x\to 0} [\tan x / x] = \lim_{x\to 0} [(\sin x / \cos x) / x] = \lim_{x\to 0} [(x / (1-x^2)) / x] = \lim_{x\to 0} [1 / (1-x^2)] = 1$.

3 V : […] Donc, tu es en train de penser à une chose pareille ? (Elle trace le graphique en Fig. 4)

4 E2 : Oui, il y a une tangente mais elle touche d'autres points de la fonction.

5 V : Par exemple, si je cherche la tangente ici ? (Elle indique le point maximum sur la courbe, voir Fig. 4) Comment je l'imagine ?

Cette première définition (ligne 1) met en avant une perspective ponctuelle sur la fonction, exaltée par l'indicateur discursif ponctuel « en un seul point ». S'appuyant sur la remarque globale de E2 (ligne 2), Vittoria propose un contre-exemple graphique (ligne 3, Fig. 4). Son dessin global d'une partie du graphique sur un intervalle contextualise son geste ponctuel (« ici » à la ligne 5, Fig. 4), afin d'encourager les élèves à regarder tout le graphique de la fonction dans une perspective globale.

Un autre élève (E3) propose de circonscrire cette définition en rajoutant « dans un intervalle approprié », mais la définition donnée reste ponctuelle.

6 E3 : Pour éviter ce que disait E2, on pourrait choisir un intervalle approprié (il bouge ses doigts vers le haut puis le bas comme en Fig. 5) où la tangente satisfait nos conditions.

7 V : Donc, on limite la zone. […] Dans une zone proche du point, au lieu de considérer entièrement la fonction.

8 E4 : Un voisinage […]

9 V : Prenons un point, celui-ci (x_0, y_0), on se met dans un voisinage approprié (elle dessine la situation au tableau, Fig. 6) et là qu'est-ce qu'on demande ?

10 E5 : Là, que la tangente intersecte seulement en ce point.

11 E4 : Ça suffit pas […] Elle pourrait faire ça (il penche son bras).

12 V : Elle pourrait faire ça (Fig. 7).

L'élève E3 accompagne ses mots (ligne 6) avec un petit geste de ses doigts (Fig. 5) et l'enseignante le reproduit au tableau sous forme de deux droites verticales autour du point (Fig. 6). Bien que le geste de l'élève, renforcé par le signe de l'enseignante, a déjà l'intention d'élargir la perspective ponctuelle de la première définition, les indicateurs discursifs à ce stade sont globaux pour l'élève (« un intervalle approprié », ligne 6 ; « dans cet intervalle », ligne 8) et locaux seulement pour l'enseignante (« dans un voisinage approprié », ligne 9). La définition proposé (ligne 10) corrigée par l'ajout de « là » qui signifie « dans cet intervalle » retombe dans une perspective ponctuelle. La « prise » locale est encore trop faible pour faire bouger la perspective des élèves. En tout cas, E5 reconnait que cette propriété n'est pas suffisante (ligne 11) et, en s'appuyant sur son intervention, Vittoria présente un contrexemple graphique qui exalte le caractère ponctuel de la définition donnée (Fig. 7).

Fig. 4 : Contre-exemple de Vittoria.

Fig. 5 : Geste de E2 pour « un intervalle

approprié ».

Fig. 6 : Vittoria utilise le signe | | en reprenant le geste de E2.

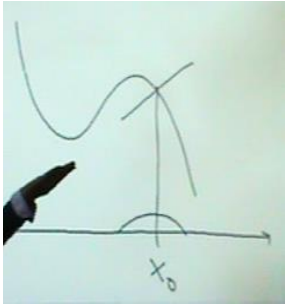

Fig. 7 : Contre-exemple de Vittoria.

La troisième définition proposée par E4 est encore une fois ponctuelle : la tangente est perpendiculaire au rayon du cercle. Elle est complétée localement par une autre élève qui rajoute « du cercle qui approxime le mieux la courbe ». L'enseignante alors reconnait que cela peut être une approche correcte, mais techniquement trop difficile pour eux.

Un autre élève (E6) propose une définition globale en relation avec celle donnée pour les coniques : la tangente doit rester entièrement dans une même région de plan détectée par la fonction donnée. Stimulé par l'enseignante, il spécifie « dans l'intervalle » en répétant le geste de son camarade E3 (Fig. 8) repris encore une fois sous forme de deux droites verticales sur le graphique par Vittoria.

13 V : D'accord, E6. Et si je dessine une fonction comme celle-ci (elle dessine la courbe en Fig. 9) et je te demande de trouver la tangente à ce point (elle indique le point d'inflexion). Y a-t-il la tangente à ce point ou pas ?

14 E5 : Elle tend à coïncider avec la fonction.

15 E3 : C'est comme quand on a étudié sin$x$ qui était asymptotiquement équivalent à $y = x$, n'est-ce pas ?

16 V : On avait la tangente dans ce cas-là ?

17 E4 : On l'avait mais le raisonnement fondé sur les régions de plan ne tient pas.

A la définition globale proposée par E6, Vittoria répond avec un contrexemple graphique local lorsque le point de tangence est un point d'inflexion (Fig. 9). Ce graphique non seulement encourage les élèves à rejeter la nouvelle définition (ligne 17), mais aussi il évoque la propriété d'équivalence asymptotique entre $y = \sin x$ et $y = x$ (lignes 14-15).

Fig. 8 : Geste de E6 pour « dans l'intervalle ».

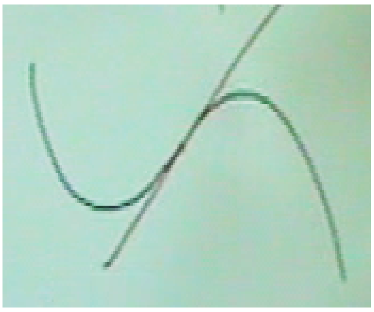

Fig. 9 : Contrexemple de Vittoria.

Ainsi, finalement, un autre élève encore propose une définition locale correcte : la tangente est la droite qui approxime le mieux la courbe donnée dans le voisinage du point. L'élève E6 inspiré par cette définition écrit une égalité au tableau (Fig. 10). Nous pouvons l'interpréter comme une technique précédente (liée à la propriété de l'équivalence asymptotique et aux limites remarquables), remployée au niveau justificatif en relation avec la définition proposée.

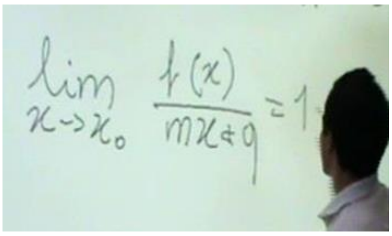

Fig. 10 : Egalité proposée par E6 pour exprimer l'équivalence asymptotique de f(x) et mx+q.

Vittoria, confrontée à cet ultérieur développement inattendu des élèves, avoue : « C'est une approche que je n'ai jamais essayée auparavant. Essayons ensemble maintenant ». La définition et l'égalité données par les élèves mènent à la technique visée pour $T_{tangente}$ (définition du nombre dérivé), mais à travers un discours justificatif que l'enseignante n'a pas préparé. Pour la séance suivante, Vittoria retravaille sur la justification de E6 et une reformulation graphico-symbolique du type de tâche lui permet de trouver la technologie correcte, d'où on peut enfin déduire le coefficient directeur de la tangente. Plus spécifiquement, elle effectue une translation verticale de l'axe des abscisses de vecteur (0, $f(x_0)$) qui lui permet de comparer les infinitésimaux CB et AB lorsque x tend vers x_0 (Fig. 11). Elle accompagne cette action sur le graphique en disant : « Pourquoi l'égalité proposée par E6 (Fig. 10) ne donne pas l'idée d'équivalence asymptotique ? Parce que l'équivalence asymptotique est valide pour des quantités infinitésimales, qui vont à zéro. Donc, ici, tout d'abord j'ai besoin d'une forme indéterminée du type 0 sur 0, les deux quantités doivent tendre à zéro, et après je compare la vitesse avec laquelle elles tendent vers zéro. » Enfin, en exprimant CB et AB en symboles, Vittoria peut écrire l'égalité en Fig. 12.

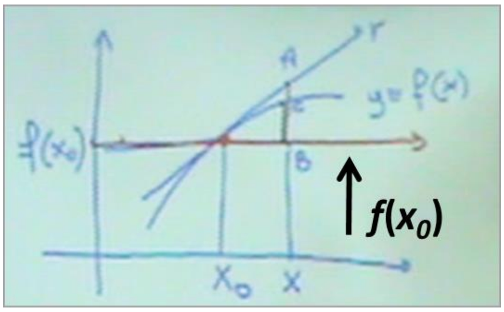

Fig. 11 : Reformulation graphique de $T_{tangente}$.

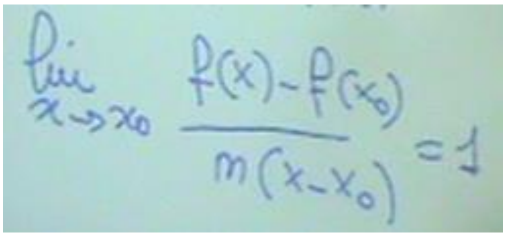

Fig. 12 : Technologie corrigée.

A travers la loupe du faisceau sémiotique, nous pouvons remarquer que les mots, les graphiques et les symboles locaux de Vittoria pour produire l'égalité en Fig. 12 peuvent être interprétés comme la justification de la technique pour trouver le coefficient directeur de la tangente *m*. Cette technologie est supportée, au niveau théorique, par la propriété locale d'équivalence asymptotique. En termes de moments didactiques, cette deuxième phase du travail peut être interprétée comme une étroite interrelation entre le moment technologico-théoretique et celui d'élaboration d'une technique pour déterminer le coefficient directeur de la tangente et ensuite pour en trouver l'équation. S'appuyant sur la définition théorique de la tangente et sur la propriété d'équivalence asymptotique, la technologie est formulée en utilisant le graphique (Fig. 11), le discours (« l'équivalence asymptotique est valide pour les quantités infinitésimales, qui vont à zéro », « une forme indéterminée 0 sur 0, les deux quantités doivent tendre vers zéro ») et les symboles (Fig. 12) afin de trouver la technique visée pour $T_{tangente}$: équation $y = f(x_0) + m\,(x\text{-}x_0)$ avec $m = \lim_{x \to x_0} [(f(x)\text{-}f(x_0)) / (x\text{-}x_0)]$.

La praxéologie pour $T_{tangente}$ construite par Vittoria et sa classe est résumée dans le Tableau 1.

$T_{tangente}$	Déterminer l'équation de la tangente à la fonction *f* au point x_0.
Technique	tg : $y = f(x_0) + m\ (x\text{-}x_0)$ avec $m = \lim_{x \to x_0} [(f(x)\text{-}f(x_0)) / (x\text{-}x_0)]$.
Technologie	Parmi toutes les droites qui passent par $(x_0, f(x_0))$, la tangente est celle qui approxime le mieux la fonction. La quantité infinitésimale $f(x)\text{-}f(x_0)$ est asymptotiquement équivalente à la quantité infinitésimale $m(x\text{-}x_0)$ (Fig. 11-12). Condition satisfaite : $\lim_{x \to x_0} [(f(x)\text{-}f(x_0)) / (m(x\text{-}x_0))] = 1$. Puisque *m* est une constante on peut l'extraire du signe de limite : $1/m \quad \lim_{x \to x_0} [(f(x)\text{-}f(x_0)) / (x\text{-}x_0)] = 1 \leftrightarrow m = \lim_{x \to x_0} [(f(x)\text{-}f(x_0)) / (x\text{-}x_0)]$.$\frac{1}{m} lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{m(x-x_0)} = 1 \Leftrightarrow m = lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
Théorie	Définition de tangente comme *meilleure approximation affine de la courbe dans le voisinage du point* ; Propriété d'équivalence asymptotique ; Équation analytique d'une droite ; Théorie des limites.

Tableau 1 : La praxéologie mathématique de Vittoria pour $T_{tangente}$

Praxéologie mathématique pour $T_{f'}$

Au démarrage de la troisième séance, Vittoria donne aux élèves une technique équivalente pour trouver le coefficient directeur de la tangente à la courbe d'une fonction *f* au point x_0 :

$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} [(f(x)\text{-}f(x_0)) / (x\text{-}x_0)]$

$\leftarrow [x\text{-}x_0 = h] \rightarrow f'(x_0) = \lim_{h \to 0} [(f(x_0+h)\text{-}f(x_0)) / h]$ (dénotée par ** dans la suite).

Ensuite, Vittoria propose aux élèves une tâche qui est ponctuelle sur *f'* : déterminer la dérivée de la fonction $y = x^2$ au point d'abscisse $x_0 = 2$. Les élèves travaillent individuellement pendant quelques minutes puis l'enseignante corrige au tableau. Ils trouvent $f'(2) = 4$. Vittoria alors propose une variante de la tâche : déterminer la dérivée de la fonction $y = x^2$ en un point quelconque x_0. Les élèves travaillent seuls puis Vittoria corrige : ils trouvent $f'(x_0) = 2x_0$.

Ces exercices pourraient être considérés comme une mise en pratique de la praxéologie (qui est encore un autre moment didactique de Chevallard), mais derrière on reconnait l'intention de l'enseignante d'introduire la fonction dérivée. La tâche donnée en effet vise à stimuler une perspective ponctuelle générique sur *f'* (« un point quelconque x_0 ») alors que la technique dont les élèves disposent (voir **) est ponctuelle sur *f'*. Nous rentrons ainsi dans le développement d'une autre praxéologie mathématique dans la classe : celle pour résoudre $T_{f'}$ (représenter la fonction dérivée, dans le registre algébrique). Vittoria commente le travail fait :

1 V : Qu'est-ce qu'on a découvert ? On a découvert que quand on a la fonction x^2, sa dérivée est, point par point, $2x_0$.

2 V : Donc, si j'écris ici la fonction, et ici sa dérivée (elle commence à remplir un tableau « *f* | *f'* »). J'ai découvert que la dérivée de la fonction x^2 est $2x$. (Elle écrit x^2 | $2x$ dans la première ligne du tableau).

3 V : Ce processus est automatique, car si j'ai x^2, à partir de maintenant, je ne calculerai plus jamais la limite du rapport incrémental. Je sais que sa dérivée est $2x$. Je l'ai calculée une fois pour toutes, dans le cas général d'un point quelconque x_0, donc je l'ai.

Lorsque Vittoria trouve le résultat $2x_0$, elle l'interprète comme « la dérivée point par point » [ligne 1] ce qui implique une perspective ponctuelle générique sur *f'*. De façon implicite, sans donner plus de détails, Vittoria remplace x_0 par la variable globale *x* [ligne 2]. Il s'agit de la technique pour représenter la fonction dérivée (remplacer x_0 par *x* dans l'expression du nombre dérivé à x_0). Cependant, cette technique et sa justification reste implicite dans le changement de signes de la ligne 1 à 2. En termes de perspectives, x_0 est utilisé par Vittoria comme signe ponctuel générique, représentant toute abscisse x_0 du domaine, tandis que x a le sens global de variable. Mais ce changement de x_0 à x parait drastique aux yeux des élèves.

4 E4 : Est-ce que la variable indépendante change de f à f' ? Est-ce toujours x_0 ou est-ce toujours la même ?

5 V : C'est un point x. […] Prenons $f(x) = x^2$, que je sais dessiner, car c'est une parabole (elle trace la courbe en Fig. 13). Qu'est-ce que j'ai découvert et prouvé ? Que si je prends n'importe quel point x_0 (elle choisit un point x_0 sur l'axe des abscisses), alors le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse x_0 [...] est $2x_0$. Donc, si je trace la tangente ici (elle trace la tangente au point correspondant sur la parabole), cette droite a $2x_0$ comme coefficient directeur (elle écrit « $m = 2x_0$ »).

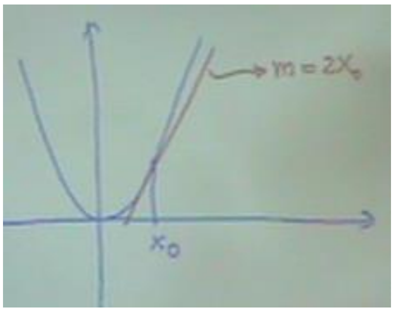

Fig. 13 : Exemple de la parabole proposé pas Vittoria au tableau.

6 V : Ça veut dire que je peux faire varier x_0 comme je veux (elle bouge sa main comme en Fig. 14). Donc, je peux écrire x à la place de x_0, pour des raisons pratiques.

7 V : Et point par point j'ai une formule, qui est la suivante (elle écrit « $f'(x) = 2x$ »), qui point par point (elle bouge la baguette comme en Fig. 15) me donne la valeur du coefficient directeur de la tangente.

8 E4 : […] $f'(x)$ me donne le coefficient directeur.

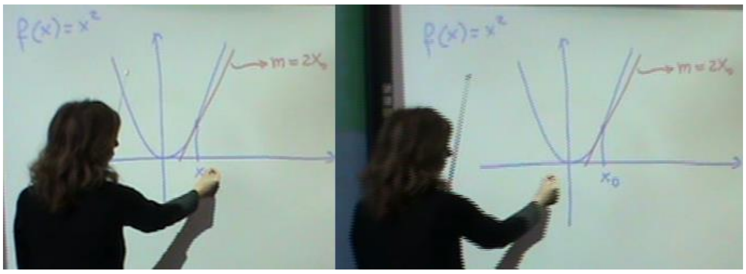

Fig. 14 : Vittoria accompagne avec ce geste les mots «je peux faire varier x_0 comme je veux » (ligne 6)

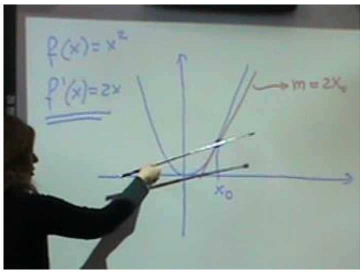

Fig. 15 : Geste continu de Vittoria sur le graphique de f.

9 V : Oui, lorsque x varie. Donc, la variable est la même. Point par point, ici j'ai une fonction qui point par point automatiquement, comme une machine, me donne le coefficient directeur de la tangente.

10 E4 : Seulement, je ne comprends pas ce passage. Si nous savons que m est $2x$, $f(x)$ correspond à y, tandis que m correspond à la tangente, comment peuvent-ils être équivalents ? Je ne comprends pas.

L'intervention de E4, qui est un bon élève [ligne 4], montre que la technique introduite par Vittoria est source de doutes sur les variables en jeu chez les élèves. L'enseignante clarifie dans son discours le rôle générique de x_0 et explicite le passage de x_0 à x. Sur le graphique

(Fig. 13, ligne 5), nous pouvons remarquer une discordance qui se produit fréquemment quand on utilise un graphique pour parler de quelque chose de générique. On déclare considérer un point générique sur la courbe, une valeur quelconque de l'abscisse x_0. Pourtant, lorsque nous l'identifions sur le dessin, le point ou l'abscisse devient forcément un point spécifique sur la courbe ou une valeur spécifique de l'abscisse. Afin de regagner en généralité et variabilité, Vittoria utilise le discours (« Je peux faire varier x_0 comme je veux [...] Je peux écrire x à la place de x_0 » [ligne 6]) et les gestes continus sur le graphique (voir Fig. 14-15). La technique est un petit peu plus développée maintenant : Vittoria est en train de donner au signe ponctuel générique x_0 le statut global de variable. Grace à la coordination du discours et des gestes continus sur le graphique, la perspective sur la fonction f (la parabole, dans ce cas) est globale. Par contre, sur la fonction f' à ce stade Vittoria n'utilise que les mots et les symboles, en exploitant la formule $f'(x) = 2x$ qui « point par point me donne la valeur du coefficient directeur de la tangente » [ligne 7]. La fonction dérivée est donc définie comme « la fonction qui point par point automatiquement, comme une machine, me donne le coefficient directeur de la tangente » [ligne 9]. La perspective sur f', à travers l'utilisation de ces ressources sémiotiques, reste ponctuelle générique (« point par point »). Elle est certainement susceptible de devenir globale, mais cela n'est pas spontané chez les élèves : on le voit dans le doute de E4 qui persiste sur les variables en jeu et en particulier sur le statut de fonction de f' [ligne 10]. E4 a activé une perspective globale sur la fonction f, supportée par le registre graphique que l'enseignante utilise, mais il n'arrive pas à comprendre comment le coefficient m (et donc f'), lui aussi, pourrait se comporter comme une fonction.

La praxéologie pour $T_{f'}$ construite par Vittoria et ses élèves est résumée dans le Tableau 2. Elle reste un peu faible au niveau du bloc technologico-théorique pour permettre aux élèves de donner à f' le statut de fonction globale comme celui de f.

$T_{tangente}$	Représenter la fonction dérivée (dans le registre algébrique).
Technique	Dans la formule $f'(x_0) = \lim_{h\searrow 0} [(f(x_0+h)-f(x_0))/h]$, on « écrit x à la place de x_0 ».
Technologie	On peut « faire varier x_0 comme on veut » : x_0 acquiert le statut de variable.
Théorie	La définition et la formule de la dérivée en un point x_0. La définition de fonction dérivée comme « une machine » qui point par point automatiquement, donnée une valeur de x, nous donne la valeur du coefficient directeur de la tangente au point x.

Tableau 2 : La praxéologie mathématique de Vittoria pour $T_{f'}$

DISCUSSION ET CONCLUSIONS

Cette étude de cas nous permet de parcourir les moments didactiques qui mènent au développement d'une praxéologie mathématique pour déterminer l'équation de la droite tangente à la courbe d'une fonction en un point spécifique ($T_{tangente}$) et représenter la fonction dérivée dans le registre algébrique ($T_{f'}$). Concernant ces deux types de tâches, liés à la dérivée, nous étions intéressés à la gestion des perspectives sur la fonction, notamment de la perspective locale sur la fonction à dériver dans le cas de $T_{tangente}$ et des perspectives ponctuelle et globale sur la fonction dérivée dans le cas de $T_{f'}$. Relativement à ces deux questions de recherche, je vais discuter les résultats dans les paragraphes suivants.

Gestion de la perspective locale lors de l'introduction du nombre dérivée

En analysant le cas de Vittoria, émerge une transposition didactique de la dérivée qui n'est pas transposée du manuel. Elle consiste plutôt à une transposition directe de la définition « savante » Déf.2 (Geymonat, 1981). La perspective locale sur la fonction à dériver est présente dans le discours (par exemple, « l'équivalence asymptotique est valide pour des quantités infinitésimales, qui vont à zéro »). Cette perspective est aussi marquée par les gestes des élèves (Fig. 5 et 8) et par le signe « | | » de Vittoria qui les reproduit sur le graphique au tableau (Fig. 6). La relation entre les ressources sémiotiques utilisées dans ce cas est encore plus complexe que dans un jeu sémiotique[5]. En effet, l'enseignant exploite un des gestes partagés dans la classe, mais sans le répéter ; elle change de ressources sémiotique (signe sur le graphique) et convertit ce geste dans le signe écrit « | | » en l'accompagnant avec un discours riche en sens mathématiques, pour encourager les élèves à passer d'une perspective globale « dans l'intervalle » à une perspective locale « dans le voisinage ». Cette conversion se révèle une stratégie importante pour promouvoir la perspective locale. Vittoria part de la façon dont les élèves se réfèrent à un intervalle sans spécifier si leur perspective est globale ou locale sur la fonction, et construit sur cette base le raisonnement dans le voisinage du point.

Un moment décisif dans le travail de la classe est le contrexemple local de la tangente en un point d'inflexion (Fig. 9). A travers cette ressource graphique, Vittoria évoque inconsciemment dans la tête des élèves le cas de $y = \sin x$ qui est asymptotiquement équivalent à $y = x$ lorsque x va à 0. Le rappel de cette propriété et de la praxéologie relative conduit les élèves à proposer une définition complétement locale de tangente en enrichissant les fondements théoriques de la praxéologie en construction pour T_{tangente}. De plus, un élève propose une technologie en introduisant une possible formalisation symbolique (égalité en Fig. 10) qui n'est pas adaptée, mais en tout cas une tentative remarquable d'utiliser la propriété d'équivalence asymptotique de façon opérationnelle. C'est seulement à partir de ce moment que l'enseignante commence à manipuler les symboles. La perspective locale, qui a été graduellement développée et renforcée par la définition de tangente, est ainsi transférée aux symboles *lim* et $x \rightarrow x_0$ que les élèves empruntent à une autre praxéologie, elle aussi locale, celle des limites remarquables. La dimension locale sur la fonction générique f est donc activée par le raisonnement dans le voisinage du point, qui est à la base de l'idée de meilleure approximation affine. La perspective locale sur la fonction imprègne chaque partie de la praxéologie de Vittoria. Il n'y a pas d'allusion à des aspects ponctuels ou globaux de la fonction, différemment de la transposition « traditionnelle » avec le raisonnement sur la sécante ou les incréments globaux qui doivent être réduits.

En conclusion, cette transposition didactique de la notion de dérivée peut représenter un défi mais aussi une alternative puissante pour les enseignants par rapport à la transposition traditionnelle (celle des manuels), dont la procédure parait parfois obscure et artificielle.

Gestion des perspectives ponctuelle-globale lors de l'introduction de la fonction dérivée

Vittoria commence par la tâche qui consiste à calculer la dérivée de la fonction $f(x) = x^2$ au point $x_0 = 2$ et emploie la technique « remplacer x_0 par x afin d'obtenir $f'(x) = 2x$ ». Dans le discours de l'enseignante, cette technique s'exprime à travers les mots « Je peux faire varier x_0 comme je veux [...] Je peux écrire x ». Vittoria fonde la justification de cette technique sur l'idée de considérer un point x_0 générique en lui donnant ensuite le statut de variable. Sur la fonction f la perspective globale est renforcée à travers la coordination du registre graphique avec des gestes continus sur le graphique pour illustrer les variations de la tangente. Sur la fonction f', on passe d'une perspective ponctuelle à une perspective ponctuelle générique :

[5] Un jeu sémiotique se produit lorsque « l'enseignant utilise une des ressources partagées (gestes) pour rentrer dans une attitude de communication consonante avec ses élèves et un autre (discours) pour les emmener vers le sens scientifique de ce qu'ils sont en train de considérer » (Arzarello & Paola, 2007, p.23).

essentiellement sont utilisés discours et symboles de nature ponctuelle générique (« un point quelconque », « point générique », « point par point », etc.). La définition de fonction dérivée dans le registre algébrique est déléguée à la formule symbolique $f'(x) = \lim_{h\to 0} [(f(x+h)-f(x)) / h]$ accompagnée par la formulation verbale : « la fonction qui point par point automatiquement, comme une machine, me donne le coefficient directeur de la tangente ». Nous pouvons remarquer qu'il s'agit d'une définition ponctuelle générique qui est susceptible de devenir globale mais, comme il a été fait pour la fonction *f*, d'autres ressources sémiotiques devraient être utilisées d'un point de vue global, notamment le graphique et les gestes sur ce graphique. Toutefois il sera nécessaire d'établir des relations entre les nouvelles ressources sémiotiques (graphique et gestes) et les symboles et les mots utilisés auparavant pour introduire algébriquement la fonction dérivée. Ces relations peuvent assurer la création d'un faisceau sémiotique fort qui pourra supporter la construction de sens pour les signes et les variables utilisés, exactement comme on l'a pu observer sur la fonction *f* dans le cas de Vittoria.

Potentiel ponctuel, global et local d'une technique ou d'une ressource sémiotique

D'après les résultats de cette recherche, j'introduis l'idée de « potentiel ponctuel, global ou local » d'une technique ou d'une ressource sémiotique utilisée dans l'étude de fonctions. Il est défini comme le degré d'adéquation d'une certaine technique ou d'une certaine ressource sémiotique à activer une perspective donnée.

Une technique donnée peut avoir un potentiel ponctuel, global ou local. Premièrement, la technique utilisée dans la transposition didactique faite par les manuels a un potentiel local. En effet, elle s'appuie sur l'idée de s'approcher d'un point P sur une courbe avec une suite d'autres points $\{Q_n\}_{(n\in N)}$ de cette courbe, qui pour *n* suffisamment grand se situent dans un voisinage de P. Deuxièmement, la technique utilisée par Vittoria a aussi un potentiel local, car elle se fonde sur l'idée de zoomer sur un graphique et sa tangente jusqu'à ne pouvoir plus les distinguer et cela se produit dans le voisinage du point de tangence (équivalence asymptotique). Les deux techniques promeuvent donc un travail sur le graphique de la fonction dans le voisinage d'un point. Cependant, cette recherche a montré que la deuxième technique a un potentiel local plus élevé car l'idée de zoomer sur un graphique et sa tangente permet de travailler directement les propriétés locales de tangence. Elle évite en fait l'introduction artificielle d'une sécante qui intervient comme une sorte de *deus ex machina* et déplace l'attention vers des propriétés ponctuelles et globales de la fonction.

Une certaine ressource sémiotique peut avoir un potentiel ponctuel, global ou local. Par exemple, le graphique a un fort potentiel global. En effet, quand on trace un graphique il s'agit forcément d'une portion du graphique de la fonction qui a donc certaines propriétés dans l'intervalle choisi, même quand le choix n'est pas fait consciemment. Selon le cadre théorique du faisceau sémiotique, les ensembles sémiotiques ne vivent pas isolés, mais en relation mutuelle avec d'autres ensembles sémiotiques. D'après les résultats de cette recherche, nous pouvons remarquer que pour être sûr de l'activation du potentiel d'une certaine ressource sémiotique, et donc de la perspective associée, il faut l'étudier dans ses relations avec les autres ressources sémiotiques utilisées pour activer la même perspective. Le potentiel global d'un graphique, par exemple, peut être activé seulement si d'autres ressources mettant en avant des aspects globaux de la fonction sont efficacement coordonnées avec le graphique. Il peut s'agir d'un indicateur discursif (tel que « la fonction entièrement », « pour tout *x* », « toujours ») ou d'un geste continu tout le long du graphique (tel que parcourir le profil du graphique). De façon similaire, si la propriété que l'on veut montrer sur le graphique est ponctuelle, on peut indiquer un point spécifique : ce geste active le potentiel ponctuel du graphique et en conséquence une perspective ponctuelle sur la fonction. En conclusion, le potentiel ponctuel (ou global ou local) d'une ressource sémiotique est activable seulement grâce à la coordination de cette ressource avec au moins une autre ressource sémiotique mettant en avant la perspective ponctuelle (ou globale ou locale).

En particulier, cette étude a montré que le graphique possède aussi un haut potentiel local. Toutefois, son activation doit être opportunément conduite par l'enseignant, à travers la coordination d'autres ressources sémiotiques. Les élèves en fait doivent être guidés dans le raisonnement sur un graphique dans le voisinage d'un point. L'idée de potentiel ponctuel, global et local peut être utile aux enseignants pour une double raison : d'une part, pour choisir les ressources sémiotiques les plus adaptées pour introduire une perspective donnée sur les fonctions ; d'autre part, pour reconnaitre si un élève a activé cette perspective et s'il est en train de l'utiliser.

Comme remarque conclusive, je voudrais ajouter que, bien que les élèves de Vittoria ont été exposés à une praxéologie qui favorise davantage la dimension locale, ils n'ont pas montré une perspective locale très forte sur les fonctions comme on l'aurait pu croire. L'éducation à la perspective locale, ainsi que l'attribution d'un sens global à la fonction dérivée, nécessitent du temps et du travail dans des contextes différents et avec des différents types de tâches. L'étude des effets des praxéologies dans la perspective locale sur les apprentissages des élèves, tout au long du parcours des élèves en Analyse, pourrait constituer un développement futur de cette recherche.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ARZARELLO, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 9(1), 267–300.

ARZARELLO, F., & PAOLA, D. (2007). Semiotic games: the role of the teacher. In W. Jeong-Ho, L. Hee-Chan, P. Kyo-Sik & S. Dong-Yeop (Eds.), *Proceedings of PME31* (Vol. 2, pp. 17–24). Seoul: PME.

BIZA, I., & ZACHARIADES, T. (2010). First year mathematics undergraduates' settled images of tangent line. *The Journal of Mathematical Behavior*, 29(4), 218–229.

BOSCH, M., & GASCÓN, J. (2006). Twenty-five years of the didactic transposition. *ICMI Bulletin*, 58, 51–63.

CASTELA, C. (1995). Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures : un exemple concret, celui de la tangente. *Recherches en didactique des mathématiques*, 15(1), 7–47.

CHEVALLARD, Y. (1985). *La transposition didactique.* Grenoble: La pensée sauvage.

CHEVALLARD, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(2), 221–265.

DEROUET, C., & PANERO, M. (2014). *Etude comparative sur l'enseignement des fonctions dans le secondaire en France et en Italie.* Cahiers du LDAR, n.11. IREM, Université Paris Diderot.

DEWALT, K., DEWALT, B., & WAYLAND, C. (1998). Participant observation. In H. R. Bernard (Ed.), *Handbook of methods in cultural anthropology* (pp. 259–299). Walnut Creek, CA: AltaMira Press.

DOUADY, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques*, 7(2), 5–31.

GUEUDET, G. (2008). Investigating the secondary-tertiary transition. *Educational Studies in Mathematics*, 67(3), 237–254.

HACIOMEROGLU, E. S., ASPINWALL, L., & PRESMEG, N. C. (2010). Contrasting cases of calculus students' understanding of derivative graphs. *Mathematical thinking and learning*, 12(2), 152–176.

HAREL, G., & TALL, D. O. (1991). The general, the abstract, and the generic in advanced mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 11(1), 38–42.

MASCHIETTO, M. (2002). *L'enseignement de l'analyse au lycée : les débuts du jeu global/local dans l'environnement de calculatrices.* Thèse de Doctorat, Université Paris 7 et Università di Torino.

MIUR (MINISTERO DELL'ISTRUZIONE, DELL'UNIVERSITÀ E DELLA RICERCA). (2010) *Schema di regolamento recante indicazioni nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento concernenti le attività e gli insegnamenti compresi nei piani degli studi previsti per i percorsi liceali.* D.M. 7 ottobre 2010, n. 211. http://nuovilicei.indire.it/content/index.php?action=lettura&id_m=7782&id_cnt=10497.

MONK, G. S. (1994). Students' understanding of functions in calculus courses. *Humanistic Mathematics Network Journal*, 1(9), 21–27.

MULLIS, I. V., & MARTIN, M. O. (2007). TIMSS in perspective: Lessons learned from IEA's four decades of international mathematics assessments. In T. Loveless (Ed.) *Lessons learned: What international assessments tell us about math achievement* (pp.9-36). Brookings Institution Press.

NEMIROVSKY, R., & RUBIN, A. (1992). *Students' tendency to assume resemblances between a function and its derivative.* Cambridge, Massachusetts: TERC Working Paper.

PÁEZ MURILLO, R. E., & VIVIER, L. (2013). Teachers' conceptions of tangent line. *The Journal of Mathematical Behavior*, 32(2), 209–229.

PANERO, M., ARZARELLO, F. & SABENA, C. (2016). The mathematical work with the derivative of a function: teachers' practices with the idea of "generic". In I. M. Gómez-Chacón, L. Vivier (Eds.), *Mathematical work: the role of teacher, knowledge and interactions* (*BOLEMA*), 30(54), 265–286.
PARK, J. (2013). Is the derivative a function? If so, how do students talk about it?. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 44(5), 624–640.
PARK, J. (2015). Is the derivative a function? If so, how do we teach it?. *Educational Studies in Mathematics*, 89, 233–250.
PEIRCE, C. S. (1977). *Semiotics and significs: the correspondence between Charles S. Peirce and Lady Victoria Welby*. Indiana University Press.
ROGALSKI, M. (2008). Les rapports entre local et global : mathématiques, rôle en physique élémentaire, questions didactiques. In L. Viennot (Ed.), *Didactique, épistémologie et histoire des sciences* (pp. 61–87).
SIERPINSKA, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches en didactique des mathématiques*, 6(1), 5–67.
TALL, D. O., & VINNER, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151–169.
TALL, D. O. (1987). Constructing the concept image of a tangent. In J. C. Bergeron et al. (Eds.) *Proceedings of PME11* (Vol. 3, pp. 69–75). Montreal: PME.
VANDEBROUCK, F. (2011). Perspectives et domaines de travail pour l'étude des fonctions. Dans les *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, 16, 149–185.
VINNER, S. (1982). Conflicts between definitions and intuitions: the case of the tangent. In A. Vermandel (Ed.), *Proceedings of PME6* (pp. 24–28). Antwerp: PME.
YOON, C., THOMAS, M. O., & DREYFUS, T. (2011). Grounded blends and mathematical gesture spaces: developing mathematical understandings via gestures. *Educational Studies in Mathematics*, 78(3), 371–393.

MANUELS UNIVERSITAIRES ET SCOLAIRES

BERGAMINI, M., TRIFONE, A., & BAROZZI, G. (2013). *Matematica.blu 2.0*, Vol.5, Libro digitale multimediale. Bologna: Zanichelli.
BRAMANTI, M., PAGANI, C. D., & SALSA, S. (2000). *Matematica: calcolo infinitesimale e algebra lineare.* Bologna: Zanichelli.
GEYMONAT, G. (1981). *Lezioni di Analisi Matematica 1.* Torino: Levrotto & Bella.
SASSO, L. (2012). *Nuova Matematica a colori.* Edizione BLU per la riforma. Quinto anno. Vol.5. Novara: Petrini, De Agostini Scuola.