ANCIENNES ET NOUVELLES QUESTIONS SUR L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
UN EXEMPLE DE RECHERCHES ACTUELLES SUR L'EXPOSITION DES CONNAISSANCES

Stéphanie **BRIDOUX**
Université de Mons, LDAR
stephanie.bridoux@umons.ac.be
Nicolas **GRENIER-BOLEY**
Université de Rouen, LDAR
nicolas.grenier-boley@univ-rouen.fr
Christophe **HACHE**
Université de Paris Diderot, LDAR
christophe.hache@univ-paris-diderot.fr
Aline **ROBERT**
Université de Cergy Pontoise, LDAR
aline.robert@iufm.u-cergy.fr

Résumé
Dans cette intervention, nous rappelons d'abord dans quoi s'inscrivent nos travaux en remontant aux recherches sur l'enseignement supérieur des années 80-90 dont ils sont en partie issus. Puis nous précisons nos inscriptions théoriques actuelles. Nous présentons ensuite des développements récents, intégrant l'étude des déroulements des séances, notamment pendant des moments de « cours » en première année d'université (exposés des connaissances/savoirs aux étudiants). C'est sur l'exemple précis de la convergence des suites et fonctions que nous nous appuyons pour cette dernière présentation, en reprenant successivement des éléments de relief (renouvelés par une étude très précise du symbolisme), des caractéristiques des contenus mathématiques des cours, des proximités (rapprochements discursifs) possibles repérées pendant les cours et en discutant sur d'autres occasions de proximités. Nous terminons par des perspectives.

Mots clés
Enseignement supérieur, exposition des connaissances, cours, contenus des cours, déroulements des cours, proximités.

Les recherches particulières présentées aujourd'hui comme exemples de travaux sur le supérieur héritent d'une longue tradition de recherches, développées notamment autour du « Groupe Sup » (créé dans les années 84-87). C'est un petit collectif de chercheurs, qui se réunissent plus ou moins régulièrement à Paris, pour partager et discuter soit leurs propres travaux soit d'autres, sur l'enseignement des mathématiques, au début de l'université ou plus récemment à la transition secondaire-supérieur, voire même très récemment sur les sciences expérimentales à ces niveaux d'enseignement. Un des interlocuteurs privilégiés de ce groupe est la Commission Inter-IREM Université (CI_2U), créée dans les mêmes années.
Nous commençons par résumer quelques traits saillants de ces anciennes recherches puis nous présenterons des exemples actuels.

REVUE PARTIELLE DE TRAVAUX SUR LE SUPERIEUR DONT NOUS « HERITONS »

Anciens travaux (80-90) : bref aperçu et questions (en France)

Avant de caractériser plus globalement l'ensemble de ces premiers travaux, nous en donnons des exemples précis, regroupés par catégories hétérogènes : il y a eu ainsi des thèses, mais aussi des expériences de plusieurs années d'enseignement en première année d'université, et un certain nombre d'articles, livres et brochures, publiées par les IREM notamment, relatant tel ou tel aspect de ces activités de recherche ou liées aux recherches.

Premiers exemples

Il y a eu un certain nombre de thèses soutenues en France (et souvent, de fait, à Paris, et Grenoble-Lyon), portant sur les apprentissages des étudiants sur des contenus précis enseignés en début d'université, suivies par des articles les complétant souvent (référés de préférence aux thèses ici) : citons les travaux sur les statistiques (Blanchard-Laville, 1980), sur la convergence des suites (Robert, 1982, 1983), sur la convergence uniforme (Robinet, 1984), sur les débuts de l'algèbre linéaire (Dorier, 1991).
En général une étude des notions en jeu est présentée, croisant des spécificités mathématiques et épistémologiques, plus ou moins développées, avec ce qui est à enseigner à ce niveau et des grandes lignes de l'enseignement effectif (où seuls les contenus interviennent). Puis des éléments sur les apprentissages des étudiants sont discutés, basés souvent sur des questionnaires ou des tests, voire des post-tests, mettant en évidence les difficultés initiales, celles qui persistent, voire certaines évolutions. On peut parler ainsi de diagnostics partiels de ce que nous appelons maintenant le relief sur les notions : les aspects cognitifs ne sont obtenus qu'au cours du travail, alors que les aspects mathématico-épistémologiques et curriculaires sont établis dès le début. Les résultats sont mis en regard de l'étude préalable et permettent d'envisager des pistes pour l'enseignement – en termes de prérequis à restituer, ou de types d'exercices à ne pas manquer, voire même d'introductions spécifiques liées au type de notion visé. Dans ce dernier cas, les modalités de travail sont précisées pour les étudiants et pour les enseignants, en termes de nature et de moment des interventions.
Ces diagnostics mettent en œuvre des descriptions (analyses) outillées par les travaux didactiques de l'époque, par exemple les caractères outil/objet des notions, les cadres, registres, points de vue et jeux entre eux, y compris dans les prérequis, mais introduisent aussi, notamment, les modèles exprimés par les étudiants ou encore les types de notion en jeu

et les commentaires « méta ». Ces derniers outils sont la conséquence du constat de la difficulté, dans certains cas, d'adapter la dialectique outil/objet (Douady, 1987) ou de trouver, dans le cadre de l'enseignement pratiqué, une situation fondamentale (Brousseau, 1998). Les chercheurs voulaient néanmoins mettre au point des introductions qui faciliteraient une certaine prise de sens, jugée souvent insuffisante, pour les étudiants, ces séquences étant déjà élaborées dans la thèse ou ayant suivi.

Les recherches restent essentiellement qualitatives, même si dans certains cas de nombreux questionnaires sont étudiés (plusieurs centaines, voire 1250 dans Robert, 1982).

Une deuxième catégorie de travaux, moins publiés mais travaillés dans le Groupe Sup, est liée à des expériences d'équipes d'enseignement, parfois nourries et/ou nourrissant des travaux ci-dessus, ayant duré au moins deux ans ou plus : par exemple l'enseignement en première année d'université Paris 7 organisé conjointement par les matheux et les physiciens (Artigue, 1989), le débat scientifique organisé en amphi à Grenoble (Legrand, 1993), l'enseignement magistral en mathématiques en bi-groupes en première année d'université Paris 6 (Robert, 1985), réunissant deux groupes de TD, souvent après une première séance en TD, l'enseignement expérimental de première année d'université à Lille… Dans ces deux derniers cas, il faut insister sur le travail en équipe des enseignants (réunions hebdomadaires !), et, pour Lille, souligner la production de projets (mémoires) d'étudiants, à la fin de l'année (Rogalski, 1994), et surtout l'édition de très nombreuses fiches de TD, extrêmement riches. On peut noter que ce sont les cours magistraux qui sont souvent le lieu des changements : supprimés, ou au moins modifiés. Le travail en TD en petits groupes, l'enseignement de méthodes, les discours « méta » sont également très présents dans beaucoup de ces expériences (Robert, 1987). Des premières séances de travail sur micro-ordinateur sont également apparues (Jarraud, 1987). Il y a cependant peu d'évaluations quantitatives, signalons celles de Lille, notamment sur des étudiants l'année d'après l'expérience, qui sont positives (Rogalski, non publié).

La brochure de la CI_2U « Enseigner en DEUG autrement », écrite par des chercheurs, et publiée en 1990 par l'IREM Paris Sud, est un très bon reflet de ces deux catégories de travaux (sommaire en annexe 1).

Un zoom sur les travaux en algèbre linéaire et en analyse et leurs développements

En algèbre linéaire, une équipe de chercheurs, Dorier, Robert, Robinet, Rogalski, a poursuivi le travail et cela a abouti à plusieurs articles (Dorier, Robert, Robinet & Rogalski, 1994) et surtout à 2 livres, édités par Dorier (1998, 2000), en français et en anglais. Y sont présentés successivement une étude épistémologique très consistante et la mise en évidence de spécificités de la notion à prendre en compte pour l'enseigner, avec son Formalisme Unificateur et Généralisateur (FUG) – certes Simplificateur mais ce caractère s'avérant non efficace pour les étudiants ne sera pas retenu pour l'enseignement ; puis une étude des difficultés des étudiants, dont les prérequis en logique, théorie des ensembles et avec l'écriture formalisée ; et un scénario (ingénierie mise au point par Rogalski (1994), et testée notamment à Lille). Ce scénario, inspiré des études citées et de l'adaptation des travaux didactiques précédents, propose des problèmes préliminaires, qui seront à unifier par les étudiants, la mise en œuvre explicitée et planifiée, par l'enseignant, du levier méta (dont un enseignement de méthodes), et un travail des étudiants organisé sur des tâches riches avec notamment des changements de points de vue, de cadres et de registres planifiés précisément.

En analyse, après le diagnostic des types des notions visées, des difficultés et modèles successifs des étudiants sur les suites et sur la convergence uniforme, des séquences d'introduction ont été élaborées, souvent testées, mais peu évaluées (Robert, 1983 ; Robinet, 1984). Le travail d'Artigue (1988) sur les procédures différentielles propose une ingénierie

basée sur une collaboration mathématique-physique. C'est dans le cadre du débat scientifique que doit se dérouler la séquence d'introduction à l'intégrale (Legrand, 1986).
Par ailleurs, le caractère limité des ingénieries proposées a amené quelques chercheurs à élargir l'étude à l'enseignement des débuts de l'analyse sur R. Dans ce cadre plusieurs études sur les nombres réels ont été menées (par exemple Robinet, 1986) ainsi que des diagnostics des connaissances des étudiants à différents moments de la première année d'université. Cela a permis notamment une confirmation de « l'hypothèse des blocs » sur l'importance de prérequis, même partiels, dans plusieurs cadres comme condition nécessaire de progrès (Boschet & Robert, 1984 ; Authier, 1986, 1987). Cette hypothèse est inspirée de l'importance des changements de cadres dans les apprentissages, qui repose cependant sur la possibilité de s'appuyer sur des connaissances, certes « inégales », mais dans divers cadres, pour faire travailler les élèves en provoquant des déséquilibres (Douady, 1987). Elle a d'ailleurs été reprise en algèbre linéaire.

Bilan partiel : et alors ?

Après 1990, les expériences n'ont pas été renouvelées (on a noté un certain épuisement des équipes). Et même les recherches de ce type se sont arrêtées ! Il aurait sans doute fallu, au moins, que d'autres professeurs expérimentent dans d'autres lieux. De plus la création des IUFM a amené un certain nombre de chercheurs à réorienter leurs travaux vers les pratiques et les formations – notamment pour le secondaire. On voit là encore comment des conditions externes peuvent peser sur les recherches.
Cela dit, mise à part la difficulté objective pour un universitaire de consacrer beaucoup de temps à l'enseignement, un autre obstacle est peut-être dû aux évaluations des expériences, voire même des recherches, qui ne « suivent » pas. Il faudrait, on le sait bien en didactique, des évaluations différentes des étudiants pour des enseignements différents. Sinon nos résultats « internes » ne sont pas probants pour les collègues. Mais pour mettre en place ces évaluations il faut des enseignants déjà un peu convaincus ! On a même rencontré des enseignants qui ne jouaient pas le jeu de nos évaluations, en prévenant leurs étudiants de ce qui allait leur être proposé, sous le prétexte que c'était des exercices inhabituels. Il y a donc un cercle vicieux.
De plus, ces évaluations se heurtent à des problèmes méthodologiques, si ce n'est théoriques : en effet autant nous sommes outillés pour des analyses locales de séances et pour élaborer des hypothèses sur les scénarios globaux, donnant lieu à des prévisions pointues pouvant être vérifiées, autant pour apprécier vraiment ce qui est en jeu, à savoir des projets longs, nous sommes moins armés (Robert, 1992).
Ainsi nous suggérons que ces travaux, pour être poursuivis, auraient nécessité, outre la disponibilité de suffisamment de chercheurs et d'enseignants, des changements d'échelle. Ils auraient pu :

- Être pensés sur le temps long, avec un projet long, méthodologiquement valide
- Être organisés pour faire travailler les étudiants sur un contenu « consistant » et pas seulement sur l'introduction d'une notion par exemple (cf. projet AHA en Belgique, Schneider, 1991)
- Donner lieu à diffusion et expérimentation large. On retrouve la question posée par les évaluations, avec le fait de pouvoir passer du qualitatif au quantitatif. Cela rejoint les aspects écologiques développés par Artigue dans son exposé récent à INDRUM (International Network for Didactic Research in University Mathematics, Artigue, 2016).

Depuis et ailleurs : divers élargissements, sur les thèmes travaillés, les publics…

A Paris, si la thèse sur l'enseignement de la topologie (Bridoux, 2011) reprend en l'enrichissant le schéma des travaux précédents, d'autres travaux se sont intéressés à des publics d'étudiants différents. Ainsi a été établi (Pian, 1999) un diagnostic des connaissances et difficultés des étudiants capesiens (en quatrième année d'université), en relation avec leurs prérequis, confirmant à ce niveau les résultats précédents.

Des expériences de formation des moniteurs, avec des équipes de formateurs universitaires (Mac Aleese, Pian, Robert, Rogalski & Viennot, 2009), ont remplacé les expériences d'enseignement précédentes. Avec beaucoup d'efforts de la part des universitaires investis, et un questionnement encore plus grand sur leur impact.

Récemment une HDR sur « des technologies pour l'enseignement et l'apprentissage des fonctions du lycée à l'université : activités des élèves et pratiques des enseignant » a élargi le domaine d'étude, le public (transition) et introduit l'analyse des artefacts (Vandebrouck, 2011).

Divers travaux à Lyon, Montpellier et Grenoble ont encore élargi les champs d'étude, en s'intéressant à la logique, au formalisme, au débat scientifique, aux démonstrations et à la géométrie discrète (Grenier & Legrand, 1986 ; Legrand, 1993 ; Arsac 1999 ; Durand-Guerrier & Arsac, 2003 ; Grenier 2012).

À l'école d'été 13 de l'ARDM (Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques), une synthèse sur les travaux sur la transition secondaire-supérieur a été présentée par Gueudet (2005), témoignant de l'élargissement des problématiques à ce moment de l'enseignement.

A l'étranger, et depuis fort longtemps, les congrès PME (et sa section AMT), ICME sup, EMF, ont permis la diffusion de travaux de recherches sur l'enseignement supérieur en mathématiques (parmi d'autres). Très récemment, citons le premier colloque INDRUM pour le seul enseignement supérieur (2016, cité plus haut).

Grossièrement on pourrait classer les travaux, que nous ne pouvons évidemment pas citer ici, en suivant de fait une certaine chronologie, en :

1) des travaux sur des notions précises, comme dans le cas APOS (Action-Process-Object-Schema, Arnon et al., 2013),

2) des travaux sur la forme spécifique du travail mathématique dans le supérieur - AMT : avec des thèmes comme le symbolisme, la généralisation, les démonstrations, les flexibilités indispensables… (Tall, 1991),

3) des études des transitions (ruptures et continuités),

4) des études des pratiques des professeurs (et de leurs prises de conscience éventuelles de certaines difficultés des étudiants), par exemple, récemment, Petropoulou et al. (2016) sur les cours magistraux.

On pourrait schématiser ces tendances entre travaux diagnostics (difficultés des étudiants, spécificités des notions avec les transitions comme révélateurs de certains aspects, pratiques « effectives ») et travaux prescriptifs (sous forme de scénarios particuliers)… Soulignons que la plupart de ces recherches restent qualitatives, quels que soient les cadres théoriques mobilisés, très divers.

Pour conclure je retiendrais quelques conclusions de la conférence synthétique d'Artigue à INDRUM (ibidem), adaptées à notre propos. Elle signalait des faiblesses des recherches sur le supérieur, que je reprends : il y a un manque de prise de conscience du fait qu'on ne forme pas seulement des futurs matheux ; les analyses restent trop locales ; il y a un manque de diffusion… Parmi les défis, j'en retiens particulièrement un : comment faire expérimenter à nos étudiants le jeu subtil entre approche expérimentale et approche déductive grâce aux évolutions de la technologie ?

La question des besoins théoriques à développer chez nos étudiants est pour moi en effet première à ce niveau, qu'ils soient ensuite matheux ou non. On doit en particulier s'interroger sur l'émergence de ces besoins (ou au moins questionnements) à partir de l'utilisation de logiciels qui embarquent déjà les connaissances visées, qui ne travaillent que sur du discret, etc... et cela demande un travail spécifique d'élaboration de situations ne réduisant pas le questionnement théorique des étudiants. Cela nous ramène directement à la définition formelle de la convergence qui va être un des exemples actuels travaillés !

NOS TRAVAUX ACTUELS : UN EXEMPLE

Le Groupe sup continue d'exister ! Avec plusieurs sous-groupes, l'un travaillant sur une recherche inter-disciplinaire pour étudier les pratiques des enseignants du supérieur, l'autre travaillant sur la notion de vecteur en math et en physique, et nous. Nous présentons ici un exemple de nos travaux actuels.

Un certain nombre de travaux actuels portent sur l'étude des déroulements en classe pendant les moments de « cours » (moments d'exposition des connaissances) et nous nous inscrivons dans cette direction de recherche. Dans cette partie, nous commençons par donner quelques généralités sur l'inscription théorique de ces recherches en les spécifiant à nos travaux, notamment en référence à une hypothèse théorique en termes de pseudo-concepts. Puis, nous présentons un exemple précis de nos analyses didactiques sur l'étude des moments d'exposition des connaissances dans l'enseignement de la notion de limite de suites et de fonctions en première année d'université.

Nous parlons de « moments d'exposition des connaissances » pour caractériser ces moments où l'enseignant expose en classe (à l'oral ou à l'écrit), des connaissances générales qui constituent le « cours », par opposition aux exercices où l'utilisation des connaissances est contextualisée.

Nous cherchons à apprécier ce que peut apporter l'exposition des connaissances dans les acquisitions des élèves ou étudiants, quel que soit le dispositif d'enseignement.

L'étude des moments de « cours » fait actuellement l'objet de recherches au lycée et à l'université (Bridoux et al., 2016). Nous présentons ici une étude spécifique sur l'enseignement des limites en L1.

Cette étude sur l'enseignement des limites est motivée par un questionnement général, spécifique à l'Université, sur l'utilité, pour les étudiants, des cours magistraux (CM) donnés en amphi, pratique usuelle dans tout l'enseignement supérieur. En effet, nous savons qu'il y a sans doute probablement encore moins qu'au lycée d'exercices à résoudre et d'interactions entre l'enseignant et les étudiants pendant les cours en amphi, notamment en raison du nombre important d'étudiants qui sont présents. Les étudiants ont aussi accès à de nombreuses ressources qui leur délivrent le texte du savoir, comme les polycopiés, les livres ou les vidéos de cours en ligne. Enfin, les CM magistraux ne sont pas obligatoires. Il nous a donc semblé pertinent de nous demander à ce niveau d'enseignement ce que peuvent retirer les étudiants durant les CM et ce qui peut se jouer dans ces moments en termes d'apprentissages. Il y a encore une autre motivation à l'origine de cette problématique, notamment dans le cas des limites (avec leur formalisme). Nous avons évoqué dans la première partie de ce texte que beaucoup de notions enseignées en L1 sont des notions FUG (en analyse et en algèbre linéaire notamment), donc difficiles à introduire de but en blanc, y compris en TD. Il y a donc également lieu de regarder comment l'enseignant en amphi tente de mettre du sens sur la (nouvelle) notion, introduite directement, d'où un intérêt supplémentaire à l'étudier.

Nous précisons maintenant avec quels outils théoriques nous abordons notre questionnement.
Notre inscription dans la Théorie de l'Activité (Vandebrouck, 2012, Abboud-Blanchard et al. 2017) nous amène à postuler que les activités des élèves[1] sont déterminantes pour leurs apprentissages, même si cela reste partiel[2]. Il s'agit donc d'apprécier ces activités, au regard des notions visées, des contextes précis en jeu, et de nos connaissances didactiques, dont les hypothèses générales que nous adoptons sur les apprentissages. Plus précisément, dans la mesure où n'en sont accessibles à l'observation que des traces, nous étudions les activités possibles des étudiants[3] et tentons de faire des inférences sur les relations entre les différents facteurs qui interviennent. Rappelons que, de façon générale et schématique, nous postulons que, pour favoriser l'apprentissage, l'enseignant doit à la fois ménager et développer une certaine autonomie des élèves, à des moments bien choisis, sur des tâches adaptées (hypothèse piagétienne adaptée au contexte scolaire et aux mathématiques) et proposer un travail accompagné et / ou collectif pas trop éloigné de leurs connaissances « déjà là ». Il s'agit de viser le plus possible, notamment dans les interventions mathématiques et méta-mathématiques, les zones proximales de développement – ZPD (hypothèse vygotskienne).
Or, en classe, les activités des élèves sont essentiellement provoquées par les choix de l'enseignant (tâches proposées, accompagnement mis en place, discours, modalités de travail, organisation du déroulement, etc.). Pendant les phases d'exercices, où on peut entendre les élèves ou deviner (à partir de ce que dit l'enseignant), si ce n'est voir et accéder partiellement à, leurs productions, on peut les étudier en référence aux activités attendues, analysables *a priori*. Mais pendant les phases d'exposition des connaissances qui nous intéressent ici, les activités des élèves sont encore moins observables. Nous nous centrons donc dans ce cas sur le discours de l'enseignant pour percevoir ce qui peut être en jeu. Cela comprend certains gestes et, si cela se produit, les interactions avec des étudiants, les questions de l'enseignant, les réponses ou questions d'étudiants, etc. Les répétitions et reformulations, les silences, les implicites (à nos yeux) sont autant d'indicateurs à prendre en compte pour inférer, dans le discours proposé par l'enseignant, ce qui peut « rapprocher » (ou non) les élèves des connaissances visées.
Reste la question de la référence à utiliser pour l'étude des cours, qui remplacerait l'analyse *a priori* des tâches proposées. Là encore, nous nous basons sur une étude *a priori* de ce que nous appelons le « relief » de la notion. Cette étude a trois dimensions imbriquées : épistémologique (nature des notions), curriculaire (institution, programmes) et cognitive (difficultés des élèves). Elle permet de circonscrire ce qui constitue le corps des connaissances visées sur la notion au niveau de conceptualisation concerné : l'ensemble des tâches dont la résolution peut être demandée, les objets et outils avec les cadres, registres, points de vue dont on attend des étudiants une certaine disponibilité, le niveau de rigueur exigible, la flexibilité et l'organisation des connaissances déjà-là et nouvelles nécessaires… Elle donne aussi accès aux difficultés connues des élèves, plus ou moins répertoriées. Enfin une étude de l'évolution de la présentation de la notion dans les programmes antérieurs, voire un éclairage épistémologique s'il y a lieu, permettent de bien cibler ce qui est nouveau, son sens, et, en particulier, de réfléchir à des introductions appropriées ou à des problèmes transversaux. Autant d'éléments qui permettent d'apprécier les contenus des cours, mais aussi leurs déroulements, dans la mesure où sont précisés les obstacles éventuels, à étudier précisément, ainsi que les dynamiques possibles en jeu entre cours et exercices, entre objets et outils, ou entre exemples, exercices résolus, méthodes et concepts...
Dans le déroulement des cours, on l'aura compris, nous spécifions nos hypothèses en postulant l'importance des liens explicites, des mises en relation entre ce que l'enseignant

1 Ce qu'ils pensent, disent ou non, font ou non, écrivent ou non… en partie inaccessibles.
2 Des facteurs personnels et liés aux contextes sont aussi en jeu.
3 Dont nous pensons qu'elles sont effectives pour un certain nombre d'entre eux.

expose, les définitions, théorèmes, propriétés, formules, démonstrations, méthodes, exemples, vocabulaire général… et les activités (passées, actuelles, à venir) des étudiants (cf. Bridoux et al., 2016). Cela prend essentiellement la forme de reprises, de commentaires, d'explications, prévus ou improvisés, notamment à l'occasion de réponses aux étudiants. La métaphore théorique que nous filons est très adaptée de ce que développe Vygotski pour l'apprentissage des concepts quotidiens par l'intermédiaire des mots et des actions des enfants, supervisées par l'adulte. C'est celle du cours comme réservoir de pseudo-concepts : le cours donnerait aux étudiants une familiarisation avec le concept visé très partielle, liée aux mots, aux formules… qu'on pourrait comparer à une enveloppe adressée mais presque vide. Ce serait par l'association, soulignée et commentée par l'enseignant, de ces mots, formules... aux activités des étudiants organisées de manière adéquate, et corrigées, que le sens s'installerait, petit à petit.

Compte tenu de cet enjeu des moments d'exposition des connaissances, en termes de dynamique à établir entre les caractères objet et outil de la notion enseignée, nous nous attachons particulièrement aux liens qui peuvent la concerner et rapprocher ainsi les étudiants de la connaissance visée. Ainsi avons-nous distingué dans le discours des enseignants trois types de proximités discursives (explicites). Elles précisent les proximités-en-acte définies dans Robert et Vandebrouck (2014), qui sont attachées aussi bien à des décisions qu'à des discours, y compris pendant les exercices. Il s'agit ici de fragments de discours, d'énoncés de l'enseignant, éventuellement accompagnés de gestes ostensifs, dont nous analysons qu'ils peuvent contribuer à la compréhension des étudiants :

- soit de la généralisation d'un exercice qui aboutit à l'expression, la définition, voire la démonstration d'une propriété générale (proximité ascendante),
- soit de la manière dont on peut utiliser dans un exercice, voire dans une démonstration, une propriété (ou définition) générale (proximité descendante),
- soit du travail local sur une formule par exemple ou sur le sens d'un théorème, qui n'amènent pas de changement de niveau de généralité (proximités horizontales).

Ces phrases sont repérées par le chercheur, qui distingue des occasions de proximités (*a priori*), à partir du relief, et, dans le discours tenu, des proximités possibles – ou inexistantes (*a posteriori*). Il peut y avoir des proximités possibles imprévues. Toutes restent seulement possibles, tout comme les activités des élèves… Cependant on peut déjà noter que ces outils didactiques restent locaux, alors que l'apprentissage du cours ne peut être qu'un processus long : il y a une hypothèse de cumul que nous nous autorisons, compte tenu de la stabilité des pratiques d'un enseignant donné, déjà soulignée dans nos travaux (Robert, 2007)…

Des exemples précis de proximités suivent.

Relief

Nous allons ici développer des résultats concernant l'enseignement d'une notion précise : les définitions de la notion de limite de suite et de fonction en première année d'Université.

Nous commençons par présenter ce qui est travaillé dans le secondaire en France. Les documents qui accompagnent les programmes de la filière scientifique de la fin du secondaire disent : « La pratique du calcul commence sur des objets encore mal formalisés. Son rôle est décisif pour familiariser les élèves avec ces objets. Leur manipulation permettant ainsi d'en construire une représentation efficace. C'est particulièrement vrai lorsque la définition de ces objets n'est pas étudiée ». Et les programmes citent la notion de limite comme exemple. En classe de première la notion de dérivée est par exemple abordée à travers la notion de limite du taux d'accroissement, mais avant la notion de limite. Le détail des programmes parle « d'appréhension du concept de limite » [fonctions], « d'approche intuitive » [fonctions], de

« première approche » [suites], d'« Approche à partir d'exemples » [suites], « d'approche expérimentale » [suites].
Les élèves ont donc une idée approximative de la notion de limite en sortant de 1re. On peut souligner dans ce contexte l'importance des mots pour le dire : sans définition mathématique, ce sont les descriptions verbales et les références au graphique qui vont permettre de donner un contour à la notion de limite. Or on croisera ci-dessous plusieurs expressions classiques qui renforcent des conceptions erronées des élèves (comme par exemple le fait que la variable pourrait tendre vers une valeur indépendamment de la suite ou de la fonction).

Dans la classe de terminale de la série scientifique, les notions de limite sont approfondies. D'une part, pour définir le fait qu'une suite (u_n) tend vers un réel l quand n tend vers $+\infty$, le programme autorise par exemple la formulation « tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang » ; le fait que (u_n) tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ s'exprime par « tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang ». D'autre part, les notions de limite finie ou infinie d'une fonction en un point ou en l'infini sont introduites pour lesquelles une traduction similaire en termes d'intervalles est proposée. On peut cependant penser que les définitions proposées par les programmes pour les limites en terminale (cf. ci-dessus) sont très difficiles à faire comprendre : notion d'intervalle, quantification sur les intervalles, notion de rang, idée de « à partir d'un certain rang » pour les limites de suites (ce « certain rang » dépendant de l'intervalle), etc. De nombreux résultats sont évoqués par les programmes sur les propriétés des limites (comparaisons, opérations, composition de fonction, limites classiques, etc.). La plupart des exercices font appel à ces propriétés, mais très rares sont ceux nécessitant une connaissance de la définition.

À l'université, en revanche, les définitions formelles en (ε, N) de limite de suite et en (ε, α) de limite de fonction apparaissent rapidement dans les cours. Même si plusieurs caractérisations sont possibles (écrire les quantifications dans la langue naturelle ou avec des symboles, présence explicite ou non d'une implication,...), c'est souvent en termes d'inégalités que la définition est donnée, comme dans les exemples suivants. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel l si

$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Longrightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon)$.
Une fonction f admet une limite finie l en $a \in \mathbb{R}$ si
$\forall\varepsilon > 0, \exists\alpha > 0\ \forall x \in Df, (|x - a| \leq \alpha \Longrightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon)$.

La distance entre le nouveau de ces définitions et les connaissances antérieures est grande :

- Relier cette définition sous forme symbolique et la définition en terme d'intervalle des programmes du secondaire est un exercice ardu (il y a même un travail mathématique : une des définitions parle de tous les intervalles alors que l'autre, une fois décortiquée, parle uniquement des intervalles centrés en l).
- Par ailleurs la nécessité de formalisme ne s'est pas fait sentir au lycée (on peut même dire d'une certaine façon qu'il est demandé d'éviter qu'elle se fasse sentir).

Par ailleurs, compte tenu des connaissances des élèves à ce moment-là, les définitions de la limite ne peuvent donner lieu qu'à très peu d'exercices spécifiques simples.
Tous ces éléments concourent à caractériser les notions de limite en début d'Université comme des notions FUG : introduction d'un formalisme qui unifie et généralise ce qui a déjà été vu, mais qui ne peut pas donner facilement lieu à un problème permettant de lier naturellement ce formalisme aux connaissances antérieures.
En outre, les pratiques langagières pour formuler une définition qui introduit un nouveau formalisme sont complexes, en partie implicites, souvent même pour les locuteurs eux-mêmes. La lecture même de la définition symbolique par l'enseignant pose problème, de

même la formulation par les étudiants (lecture pour soi, discussion, participation au TD, etc.). Pour les limites de suites par exemple :

- Dire la suite. Pour lire « La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite 2 » on prononce « la suite *u n* a pour limite 2 » voire « *u n* a pour limite 2 » confondant ainsi la suite et un de ses termes, dans un contexte où on parle d'une propriété de la suite définie par des propriétés d'une infinité de ses termes.
- Quantifications implicites. On peut citer l'exemple d'un enseignant qui verbalise la définition symbolique écrite au tableau « pour tout epsilon [main sur $\forall$] il existe un entier [un pas, main sur $\exists$] naturel grand *N*, tel que [deux pas, main sur « ($n \geq N$ »] si petit *n* est plus grand que *N* alors [un pas, main sur « $\Rightarrow$ »] valeur absolue de [recule] *u n* moins *l* est plus petit que epsilon [positionnement loin de l'écrit] ». Il ne dit pas, de façon tout à fait naturelle et usuelle, la quantification sur *n* alors qu'elle est écrite et qu'il passe la main dessus en lisant.
- Usage d'expressions « à déplier ». On peut citer l'exemple de « à partir d'un certain rang » qui apparaît dans les programmes de lycée : cette expression cache un jeu complexe de quantifications des variables. Selon les contextes (« nulle à partir d'un certain rang », « constante à partir d'un certain rang », « proche de *l* à partir d'un certain rang ») les quantifications sous-jacentes sont différentes. On peut étudier de même les expressions : « suffisamment grand », « suffisamment proche », etc.
- Apparition d'expressions qui pourraient être trompeuses. On peut citer l'exemple de « tendre vers » qui donne une certaine autonomie à « x tend vers a ».

Dans le contexte d'étude de l'introduction des définitions de limite ces considérations renforcent l'intérêt de la question posée : comment l'enseignant fait-il pour aménager certaines proximités entre ce que savent les étudiants, ce dont ils peuvent avoir besoin et ce qu'ils doivent apprendre dans ce contexte particulièrement peu propice ?

Problématique et méthodologie

Compte tenu de l'analyse qui vient d'être résumée du relief sur la notion de limite, nous admettons que le rôle de l'enseignant est particulièrement important au moment de l'introduction de la notion, notamment pour expliquer aux étudiants ce que la définition traduit et ce dont on a besoin pour l'utiliser. Cela comprend aussi l'objectif d'appropriation par les étudiants du (nouveau) formalisme que la définition contient. Nous nous sommes donc demandé ce qui est explicité par l'enseignant, dans le cours magistral, lorsqu'il introduit la définition en tant qu'objet. Reformule-t-il la définition avec d'autres mots pour rester « proche » des connaissances, même approximatives, du plus grand nombre possible d'étudiants ou pour lui donner un certain sens ? Donne-t-il des commentaires méta sur son utilisation ? Essaie-t-il de prendre en compte les connaissances déjà-là des étudiants ou la structure logique, singulièrement compliquée à ce stade, de la définition ?
Cette problématique est complètement pilotée par l'étude du relief et par notre inscription théorique en termes d'apprentissages présentées précédemment et elle est, selon nous, l'occasion de repérer des premiers exemples de proximités dans le discours de l'enseignant.
Notre méthodologie repose sur des analyses de cours sous différentes formes : une analyse de manuels, une analyse de capsules vidéo et une analyse de cours donnés en amphi. Nous tentons de repérer, dans chaque média, les diverses reformulations de la définition, la prise en compte de la structure logique globale de la définition, les tentatives de rapprochements avec les connaissances déjà-là des étudiants et différents types de proximités. Le fait d'étudier un média où il n'y a pas d'enseignant, en l'occurrence les manuels, donne un double éclairage sur la présence de proximités potentielles qui pourraient émerger ou non dans un cours « réel » et met aussi en valeur les spécificités du discours de l'enseignant lorsqu'il est là.

Nous avons choisi ici d'étudier deux moments dans les « cours » : l'introduction de la définition et les premiers exemples. Pour avoir une vue globale du scénario, d'autres moments comme les premiers théorèmes et leurs démonstrations sont étudiés dans (Bridoux et al., 2015).
Malgré les différences notables entre les définitions de limite de fonction et de limite de suite, nous faisons l'hypothèse qu'elles restent comparables au regard de nos objectifs puisque nous étudions des moments de première rencontre avec la définition formelle, moments dont on sait qu'ils sont particulièrement difficiles dans le cas de notions FUG (voir étude du relief).
Dans ce texte, nous présentons une étude comparative entre le chapitre sur les limites de fonctions dans le manuel *Mathématiques Tout-En-Un* (Dunod, 2007)[4], une capsule issue du site Exo7 sur les limites de suites et un cours en amphi sur les limites de fonctions donné à environ 200 étudiants en 2014 à l'Université Paris Diderot.
Avant de nous lancer dans cette étude, nous donnons, pour illustrer notre propos, des exemples de proximités possibles, qui pourraient être repérées dans le discours d'un enseignant dans le contexte précis de l'enseignement des limites.
Nous avons repéré une tentative de proximité ascendante chez un enseignant qui utilise une ingénierie didactique élaborée par Robert (1983) pour introduire la définition formelle de la convergence d'une suite numérique. Dans la première partie de l'ingénierie, les étudiants ont travaillé dans le registre graphique et se sont forgé une première représentation (erronée car trop partielle) de la convergence en termes de « bandes » autour du candidat limite dans lesquelles tous les éléments de la suite rentrent à partir d'un certain rang. Dans cette partie, les étudiants travaillent avec des largeurs de 1/10 et 1/100 pour les bandes. Dans la partie suivante de l'ingénierie sont proposées deux affirmations dont l'appréciation (vrai ou faux) met en défaut le fait que la convergence puisse uniquement se définir avec quelques bandes. L'enseignant amène alors l'idée que la définition choisie par les mathématiciens est de travailler avec toutes les bandes, quelle que soit leur largeur. Il y a donc là un processus de généralisation qui amène une proximité de nature ascendante.
Nous avons repéré une tentative de proximité descendante dans le discours d'un enseignant traitant l'exemple de la limite $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}$ après avoir introduit la définition. Pour montrer que cette limite vaut zéro en utilisant la définition, l'enseignant explique comment utiliser celle-ci en prenant en compte l'ordre des quantificateurs, en expliquant comment trouver un réel *A* tel que présent dans la définition. Des liens avec la définition précédente sont explicitement dits, voire même écrits pour certains d'entre eux, par l'enseignant, d'où la nature descendante de la proximité.
Nous avons repéré une tentative de proximité horizontale chez un enseignant qui commente les équivalences suivantes : $|u_n - l| < \varepsilon \Leftrightarrow l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon \Leftrightarrow u_n \in]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$.
Dans son discours, l'enseignant explique oralement et à l'écrit comment on passe de l'inégalité avec valeur absolue à la double inégalité et il reformule ensuite celle-ci pour amener l'idée d'appartenance à un intervalle ouvert. La présence de reformulations d'énoncés d'un même niveau de généralité témoigne de la nature horizontale de ces proximités.

Le manuel

Dans le manuel étudié, le chapitre sur les limites de fonctions vient après celui sur les limites de suites. Dans le chapitre visé, on trouve tout d'abord une définition de la notion de voisinage. La notion de limite d'une fonction f en un réel x_0 est ensuite introduite « brutalement » par la définition suivante :

---

4 GAUTIER C., WARUSFEL A., CAMINADE B., FONTAINE H. & NICOLAS S. (2007) *Mathématiques Tout-En-Un, ECS 1re année,* Éditions Dunod.

Soit f une fonction définie au voisinage de x_0 et l un réel. On dit que f a pour limite l en x_0 si $\forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0 \forall x \in D_f \ (|x - x_0| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon)$.

La caractérisation choisie pour cette définition s'appuie sur le registre symbolique. Il n'y a aucun commentaire explicatif sur la construction de cette définition. En ce sens, il n'y a ici aucune tentative de rapprochement avec les connaissances antérieures que pourrait avoir un étudiant d'université.

Une remarque suit néanmoins la définition : « *La définition signifie qu'on peut obtenir f(x) aussi proche que l'on veut de l pourvu que x soit assez proche de* x_0 ».

Cette reformulation pourrait être l'occasion de tenter une proximité horizontale (locale), sur la transformation de la formulation, mais il n'y a aucune explication sur le passage de la définition aux expressions utilisées ici. Que signifie en effet l'expression « aussi proche que l'on veut » ou « être assez proche de » et en quoi la définition précédente écrite dans le registre symbolique traduit-elle cette idée de rapprochement mathématique ? La réponse à ces questions est complètement laissée à la charge du lecteur.

Regardons maintenant le premier exemple traité après l'introduction de la définition. Nous le recopions ici tel qu'il est écrit dans le manuel :

Montrons que $\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$. *Soit* $\varepsilon > 0$. *Pour* $x \geq 0, \sqrt{x} \leq \varepsilon$ *équivaut à* $x \leq \varepsilon^2$. *On a donc* $\forall x \in R_+, (|x| \leq \varepsilon^2 \Rightarrow \sqrt{x} \leq \varepsilon)$, *ce qui démontre le résultat, puisque la fonction racine est définie sur* R_+.

Nous remarquons tout d'abord que le raisonnement qui est développé ne prend pas en compte la structure logique de la définition puisque rien n'est dit sur le choix de η. De plus, aucune justification n'est donnée sur l'équivalence ni sur l'implication qui en découle.

Le traitement de cet exemple serait l'occasion de repérer des proximités descendantes en expliquant comment la définition est utilisée ici mais ces occasions sont selon nous manquées.

La capsule vidéo

On a aussi étudié un autre dispositif de cours : les capsules vidéo. Nous avons choisi d'analyser certaines vidéos du site http://exo7.emath.fr/. Elles mettent en scène un enseignant universitaire filmé devant un diaporama correspondant au cours. Il existe par ailleurs sur le même site un cours écrit téléchargeable, la vidéo s'éloigne peu du cours écrit. Elle permet cependant *a minima* au moins une reformulation : formulation orale du texte écrit, accompagnement de gestes. On a cependant observé que les reformulations peuvent être très nombreuses avec par exemple sept reformulations de la définition en une minute dans la scène d'introduction de la définition de la limite de suite (voir Bridoux et al., 2015).

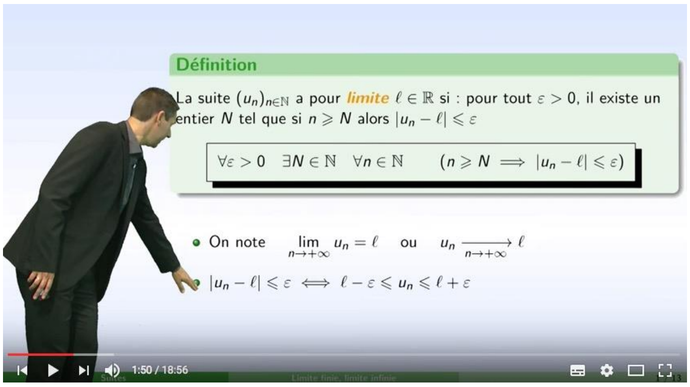

Figure 1 – capture d'écran du site Exo7

On peut voir la multiplication de ces reformulations comme des tentatives de rapprochement par l'enseignant entre d'une part ce dont il est question et d'autre part ce que les élèves peuvent entendre. Les reformulations ne sont cependant pas commentées. La dernière reformulation est signalée par un « autrement dit » : « autrement dit *u n* est aussi proche que l'on veut de *l* à partir d'un certain rang ».
On a montré que la capsule vidéo va plus loin que le texte écrit (Bridoux et al., 2015). La formulation orale et les reformulations, les gestes sont autant de proximités potentielles. Potentielles parce que les choses restent complexes (voire très complexes) et à la charge de l'étudiant.

Le cours d'amphi

Enfin, pour mesurer l'importance du rôle de l'enseignant – et des étudiants ! – lors de l'introduction de la notion de limite de fonction, nous étudions une vidéo de cours magistral en L1.
L'enseignant débute son cours par une introduction au cours de laquelle il obtient d'un étudiant une première reformulation intuitive de la définition de limite : « *OK, f(x)doit se rapprocher autant que l'on veut de l mais quand x se rapproche de* x_0 ». En se basant sur divers éléments (graphique, gestes, flèches), il la fait évoluer en une seconde reformulation : « *f(x)est aussi proche que l'on veut de l si x est suffisamment proche de* x_0 ». Si cette phase témoigne selon nous de la volonté de l'enseignant de partir des représentations des étudiants, la seconde reformulation reste encore éloignée de la définition symbolique[5].
L'enseignant écrit ensuite la définition formalisée symbolique de limite de fonction en un point, bloc par bloc, en se basant sur une chronologie liée à la seconde reformulation, en commentant, en continuant à reformuler oralement. Après quelques éléments de cours sur les voisinages, il écrit la définition suivante au sein de laquelle une troisième reformulation est également présente :
Soit $x_0 \in R$*, f une fonction définie sur un voisinage de* x_0*. f a pour limite* $l \in R$ *en* x_0 *si et seulement si* $\forall \varepsilon > 0 \exists \alpha > 0 \ tel\ que\ \forall x \in D_f \ (|x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$.
Autrement dit, aussi petit que soit ε *on peut trouver un intervalle suffisamment petit autour de* x_0 *sur lequel la distance de f(x) à l est inférieure à ε.*
Selon nous, le travail de l'enseignant témoigne de sa volonté d'introduire la définition de limite en travaillant à la fois sur son formalisme et sa structure logique par le biais d'un réseau de proximités horizontales basées sur de nombreuses reformulations de certaines parties de la définition : avec des mots (oral, écrit), en termes de distances (oral, écrit), d'inégalités impliquant des valeurs absolues (écrit) ou d'intervalles et de voisinages (oral, écrit). Une fois encore, cette tentative nous semble à relativiser compte tenu du fait que certaines de ces reformulations sont orales et non écrites et qu'elles ne prennent pas encore en charge toute la structure logique de la définition.
Après avoir défini (et reformulé) la définition d'une fonction en l'infini, l'enseignant propose de traiter l'exemple suivant : $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}$.
Pour la démonstration elle-même, il met en valeur le formalisme de la définition en reformulant certains éléments logiques (implication, équivalence, quantificateur) et se base sur certaines connaissances anciennes des étudiants (valeur absolue, fonction inverse). En fin de démonstration, il revient oralement sur une méthode générale et féconde (annoncée) pour

5 Entre autres choses, elle est porteuse d'une inversion possible de l'ordre et de la nature des quantificateurs, les propositions contenant « aussi proche » et « suffisamment proche » dites similairement seront quantifiées différemment.

prouver ce type de résultat : partir d'un epsilon quelconque, chercher une condition suffisante d'une certaine forme sur *x*.
Selon nous, l'enseignant a donc introduit les définitions formalisées par le biais de diverses reformulations (proximités horizontales) et la preuve qu'il fournit pour l'exemple ci-dessus demande une démonstration formelle qu'il tente de « rapprocher » (proximité descendante) d'un usage procédural de ces définitions, lié à certaines connaissances anciennes des étudiants.

Résultats

Cette étude comparative d'un manuel, d'une capsule vidéo et d'un cours en amphi, toute limitée qu'elle soit, nous permet tout d'abord de mieux appréhender les (non-)occasions de proximités *a priori*, dans le manuel et la capsule, et celles qui sont tentées ou non par l'enseignant en amphi. Répétons que même si elles sont tentées, elles ne sont que possibles, au sens où nous ne nous sommes pas donné de moyen pour vérifier que les rapprochements potentiels qu'elles portent deviennent effectifs pour les étudiants qui écoutent.
Un premier résultat commun aux trois types de média concerne l'absence de proximités ascendantes. Une explication possible, qui n'est sans doute pas la seule, peut être liée à la nature FUG de la notion enseignée et par le fait qu'il est difficile de trouver un problème initial duquel les étudiants pourraient déduire de manière autonome la définition visée. Il n'y a donc pas d'activité d'introduction dans les trois cas.
L'analyse du manuel montre que les occasions de proximités que nous avons repérées y sont selon nous manquées. Comme nous l'avons expliqué, la remarque et l'exemple qui suivent la définition ne contiennent aucun lien explicite avec la caractérisation choisie pour la définition, que ce soit par les reformulations données ou dans la structure du raisonnement développé dans l'exemple.
Les proximités possibles sont plus nombreuses dans la capsule mais notre analyse révèle que pour ce média également, ces proximités sont selon nous manquées (voir ci-dessus et Bridoux et al., 2015).
Dans le cours en amphi, les proximités horizontales sont davantage présentes, majoritairement sous la forme de reformulations. Nous avons aussi montré la présence de proximités descendantes dans le passage de la définition aux premiers exemples. Toutefois, ce résultat doit être relativisé par le fait que la plupart de ces tentatives de proximités sont orales et pas écrites. Nous pouvons donc nous demander ce que les étudiants en retirent et quelle trace écrite ils gardent éventuellement de ces commentaires oraux.
Nos analyses nous permettent dans un second temps de formuler des résultats plus indirects par rapport à ceux qui visent directement l'étude des proximités. Nous avons montré que le manuel et la capsule ne prennent pas en compte la structure logique de la définition dans les premiers exemples alors qu'il y a des tentatives réelles en ce sens dans le cours en amphi. Nous pointons donc ici une différence essentielle dans le cours où l'enseignant et les étudiants sont physiquement présents en même temps. On peut ainsi supposer que la vue des étudiants en train d'écouter inspire certaines explicitations à l'enseignant. Un résultat semblable peut être formulé à propos de la prise en compte des connaissances antérieures où il semble qu'elles soient davantage sollicitées dans le cours en amphi, où cela peut être régulé par l'enseignant.
Enfin, les raisonnements développés dans le manuel ne sont en outre pas tous rédigés avec la rigueur attendue à ce niveau d'enseignement mais nous comprenons que ce n'est sans doute pas l'objectif premier de ce type de média.

BILAN ET PERSPECTIVES

Dans cette étude, nous avons présenté des analyses théoriques qui fournissent des indicateurs permettant d'apprécier les déroulements des moments de cours (en termes de rapprochements, interprétés en termes de ZPD) se référant à une analyse des contenus, générale et particulière (utilisant le relief attribué à l'enseignement de ces notions). En ce sens, la mise en regard des occasions de proximités – déterminées par le chercheur *a priori* à partir du relief, dans les manuels – et des proximités possibles – repérées par le chercheur *a posteriori* dans le discours tenu par l'enseignant en cours – permet de repérer ce qui est implicite, ou au contraire les « ajouts », dans l'un ou l'autre média. Dans le cours magistral étudié, nous avons pu voir que les proximités possibles ont au moins trois origines : elles sont dues aux anticipations de l'enseignant, aux interactions visibles ou invisibles entre l'enseignant et les étudiants (regards, attitudes…) ou encore liées à des questions explicites d'étudiants, éventuellement inattendues, qui entrainent des improvisations. Contrairement à ce que l'on pourrait croire, il se passe donc des choses en cours, la présence des étudiants semblant avoir un effet sur le contenu des liens discursifs que l'enseignant tente d'organiser entre les étudiants et la connaissance visée (voir les différences entre les analyses de la capsule vidéo et du cours magistral).

Cette étude est un travail en cours, qui admet donc un certain nombre de limites. En particulier, elle porte sur un petit nombre de vidéos et les effets du cours sur les apprentissages des étudiants durant les moments d'exposition des connaissances sont encore hors de portée. Cependant, il nous semble que la méthodologie qui y est mise en œuvre offre certaines perspectives.

En premier lieu, elle peut permettre de comparer différents cours sur le même sujet, de comparer des prévisions de chercheurs et des cours effectifs d'enseignants. Plus précisément, on peut envisager de baliser une palette de possibles, à partir des régularités et des diversités des déroulements de cours réels, en fonction des notions et en référence à une étude didactique.

En second lieu, elle pourrait aussi permettre de prendre en compte l'évolution des modalités de cours, l'analyse de nouvelles ressources (en lien avec les pédagogies inversées comme les capsules (Allard et al., 2016) ou les MOOC).

Enfin, dans quelle mesure un cours dépend de la notion enseignée ? Quelles en sont les variables ? A ce titre, il pourrait être intéressant d'étudier des cours portant sur d'autres notions, comme celles du début de l'algèbre linéaire toujours en première année d'université. Dans ce cadre, une recherche avait montré l'existence de liens étroits entre les moments de cours, leur but (objet ou outil) et l'autonomie laissée aux étudiants lors des premiers travaux dirigés en algèbre linéaire (Grenier-Boley, 2009, 2014). Une idée serait de la prolonger en comparant les moments de cours donnés en travaux dirigés à ceux donnés en amphi.

De plus, lorsque les observations s'y prêtent (temps long) nous essayons aussi de dégager des logiques globales repérables dans plusieurs cours d'un même enseignant – traduisant une certaine cohérence et traduites par des récurrences dans les choix étudiés des enseignants. De manière caricaturale, on peut détecter deux logiques « en tension », opposées, qui traversent les manières d'exposer les cours devant les élèves, activant deux niveaux de pensée :

- une logique un peu globale, liée au sens, à l'organisation des idées entre elles, au mode de fonctionnement en mathématiques (vrai/faux etc.)
- et une autre plus locale, plus liée à la volonté de faire mémoriser les mots et les phrases, de faire suivre localement les justifications, et aussi d'armer les futures utilisations (y compris techniques), mettant aussi plus en jeu les contrats.

De manière plus générale, ainsi complétée, l'étude des cours pourrait aider à mieux comprendre les pratiques ordinaires d'enseignement dans le supérieur, ce qui est d'autant plus crucial qu'il n'existe pas (ou peu) de formation des enseignants à ce niveau. En ce sens, une recherche a débuté au LDAR pour tenter d'éclaircir l'empreinte de la discipline de recherche sur les pratiques enseignantes des enseignants-chercheurs, avec une vision comparatiste entre les disciplines concernées (chimie, géographie, mathématiques, physique).

D'autres possibilités pour étudier les moments de cours existent, par exemple celle de Petropoulou et ses collègues (2016). Si ce travail a en commun de porter aussi sur l'analyse du discours des enseignants universitaires en cours, l'approche qui y est développée diffère de la nôtre. Ainsi, l'analyse du relief des notions sous-jacentes y est moins précise, il y a moins de références aux notions mathématiques visées par les cours étudiés. Par contre, l'étude se focalise sur la manière dont les enseignants prennent ou pas en compte les besoins des étudiants, y sont sensibles.

Si nous reprenons ce qui a été évoqué au début de ce séminaire, d'une part les changements d'échelle et d'autre part les ouvertures suggérées par Michèle Artigue notamment (Artigue, 2016), il nous semble que l'enseignement en Master MEEF mathématiques est un lieu à investir, en transposant des résultats de recherche comme ceux qui précèdent. D'une part, cela pourrait favoriser un travail commun entre les mathématiciens et les didacticiens qui y interviennent et d'autre part permettre de diffuser des résultats de recherche aux étudiants. C'est aussi un lieu où il y a des besoins (affirmés ou non) de la part des étudiants qui deviendront les futurs enseignants du secondaire.

Une dernière perspective concerne les questions liées au renouvellement des enseignements supérieurs, en lien avec les TICE et aux nouvelles possibilités d'investir la dynamique expérimental/déductif restent difficiles : il semble encore difficile de concilier l'émergence souhaitée de besoins théoriques chez les étudiants et une utilisation de logiciels qui embarquent tellement de mathématiques qu'il ne reste plus qu'à s'en servir…

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ABBOUD, M., ROBERT, A., ROGALSKI, J. & VANDEBROUCK, F. (2017). Pour une théorie de l'activité en didactique des mathématiques, un résumé des fondements partagés, des développements récents et des perspectives. *Cahier du Laboratoire de Didactique André Revuz* 18, IREM Paris Sud.

ALLARD, C., ASIUS, L., BRIDOUX, S., CHAPPET-PARIES, M., PILORGE, F. & ROBERT, A. (2016). Quand le prof de mathématiques est sur Youtube… Quelques réflexions sur les moments d'exposition des connaissances et les capsules pour des classes inversées. *Cahier du Laboratoire de Didactique André Revuz* 16, Septembre 2016.

ARNON, I., COTTRILL, J., DUBINSKY, E., OKTAÇ, A., ROA FUENTES, S., TRIGUEROS, M. & WELLER, K. (2013). *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Springer Science & Business Media.

ARTIGUE, M. (1988). Procédures différentielles dans la mise en équation de problèmes. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives, 2*, 173-190.

ARTIGUE, M. (1989). Une recherche d'ingénierie sur l'enseignement des équations différentielles en DEUG première année. *Actes du Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique.* Grenoble : IMAG.

ARTIGUE, M. (2016). Mathematics Education Research at University Level: Achievements and Challenges. In *First conference of International Network for Didactic Research in University Mathematics,* Montpellier, 11-27.

ARSAC, G. (1999). Variations et variables de la démonstration géométrique. *Recherches en didactique des mathématiques, 19(3),* 357-390.

AUTHIER, H. (1986-1987). Connaissances en mathématiques des étudiants issus des bac F. *Cahiers de didactique* n°31 et n°46, IREM Paris Sud.

BLANCHARD-LAVILLE, C. (1980) *Les étudiants de psychologie face à l'enseignement de statistiques (analyse) des réponses à un test de mathématiques et à des questionnaires d'opinion*. Thèse de troisième cycle, Paris 7.

BOSCHET, F. & ROBERT, A. (1984). Acquisition des premiers concepts d'analyse sur R dans une section ordinaire de première année de Deug. *Cahier de didactique* 7, IREM Paris Sud.

BROUSSEAU, G. (1998). *La théorie des situations didactiques.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

BRIDOUX, S. (2011). *Enseignement des premières notions de topologie à l'université – Une étude de* cas. Thèse de doctorat de l'Université Paris Diderot (Paris 7).

BRIDOUX, S., CHAPPET-PARIES, M., GRENIER-BOLEY, N., HACHE, C. & ROBERT, A. (avec la collaboration de LEVI, M.C. et PILORGE, F.) (2015). Les moments d'exposition des connaissances en mathématiques (secondaire et début d'université). *Cahier du laboratoire de didactique André Revuz,* 14, Juillet 2015.

BRIDOUX, S., HACHE, C., GRENIER-BOLEY, N., & ROBERT, A. (2016). Les moments d'exposition des connaissances en mathématiques, analyses et exemples. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 21*, 187-233.

DORIER, J.-L. (1991). Sur l'enseignement des concepts élémentaires d'algèbre linéaire à l'université. *Recherches en didactique des mathématiques, 11(2/3)*, 325-364.

DORIER, J.-L. (1995). A general outline of the genesis of vector space theory. *Historia mathematica, 22(3),* 227-261.

DORIER, J.-L. (1998). État de l'art de la recherche en didactique à propos de l'enseignement de l'algèbre linéaire. *Recherches en didactique des mathématiques*, *18(2)*, 191-230.

DORIER, J.-L. (Ed.) (1998). *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

DORIER, J.-L. (Ed.) (2000). *On the Teaching of Linear Algebra*. Dordrecht : Kluwer Academic Publisher.

DORIER, J.-L., ROBERT, A., ROBINET, J. & ROGALSKI, M. (1994). L'enseignement de l'algèbre linéaire en DEUG première année, essai d'évaluation d'une ingénierie longue et questions. In M. Artigue et al. (Eds.), *Vingt ans de Didactique des Mathématiques en France* (pp. 328-342). Grenoble : La Pensée Sauvage.

DOUADY, R. (1987). Jeu de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7(2),* 5-31.

DURAND-GUERRIER, V. & ARSAC, G. (2003). Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Spéficités de l'analyse. Quelles implications didactiques ? *Recherches en didactique des mathématiques*, *23(3)*, 295-342.

GRENIER, D. & LEGRAND, M. (1986). Une séquence d'enseignement sur l'intégrale en DEUG A première année. *Cahier de didactique* n° 22, IREM Paris Sud.

GRENIER, D. (2012). Une étude didactique du concept de récurrence. *Petit x, 88*, 27-47.

GRENIER-BOLEY, N. (2009). Un exemple d'étude de gestion des déroulements en travaux dirigés de Mathématiques à l'Université. *Cahier de DIDIREM* n°59.

GRENIER-BOLEY, N. (2014). Some issues about the introduction of first concepts in linear algebra during tutorial sessions at the beginning of university. *Educational Studies in Mathematics, 87(3)*, 439-461.

GUEUDET, G. (2005). Perspectives en didactique des mathématiques. La transition secondaire-supérieur : résultats et perspectives des recherches didactiques. In A. Rouchier & I. Bloch (Eds.), *Perspectives en didactique des mathématiques, école d'été XIII* (pp. 159-175). Grenoble : La Pensée Sauvage.

HOLTON, D. (Ed.). (2001). *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI study* (Vol. 7). Springer Science & Business Media.

JARRAUD, P. (1987). Travaux dirigés de mathématiques sur micro-ordinateurs en DEUG SSM. *Cahiers de didactique* n°27, n°35 et n°45, IREM Paris Sud.

LEGRAND, M. (1993). Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse. *Repères IREM*, *10*, 123-158.

MAC ALEESE, J., PIAN, J., ROBERT, A., .ROGALSKI, M. & VIENNOT, L. (2009). Propositions pour une formation des moniteurs en mathématiques. *Documents pour la formation* n°12, IREM Paris-Diderot.

PETROPOULOU, G., JAWORSKI, B., POTARI, D. & ZACHARIADES, T. (2016). Addressing large wohorts of first year mathematics students in lectures. In *First conference of International Network for Didactic Research in University Mathematics*, Montpellier, 390-399.

PIAN, J. (1999). Diagnostic des connaissances de mathématiques des étudiants de CAPES, vers une interprétation cognitive des apprentissages individuels. *Cahier de Didirem* n°34, IREM Paris Diderot.

ROBERT, A. (1982). L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur. *Recherches en didactique des mathématiques*, *3(3),* 307-341.

ROBERT, A. (1983). L'enseignement de la convergence des suites numériques en DEUG. *Bulletin de l'APMEP*, *340*, 431-449.

ROBERT, A. (1985). Rapport enseignement/apprentissage (débuts de l'analyse sur R) : connaissance des élèves, analyse d'une section de Deug A première année (connaissance antérieures et procédures en cours d'apprentissage), évaluation. *Cahiers de didactique* n°18.0, 18.1, 18.2, 18.3, IREM Paris-Sud.

ROBERT, A. (1987). De quelques spécificités de l'enseignement des mathématiques dans l'enseignement post-obligatoire (EPO). *Cahier de didactique* n°47, IREM Paris-Sud.

ROBERT, A. (1992). Projets longs et ingénieries pour l'enseignement unviersitaire : questions de problématiques et méthodologie. *Recherches en didactique des mathématiques, 12(2/3),* 181-220.

ROBERT, A. (2007). Stabilité des pratiques des enseignants de mathématiques du second degré. *Recherches en didactique des mathématiques, 27(3),* 271-312

ROBERT, A. & VANDEBROUCK, F. (2014). Proximités-en-acte mises en jeu en classe par les enseignants du secondaire et ZPD des élèves : analyses de séances sur des tâches complexes. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 34(2/3),* 239-285.

ROBINET, J. (1984). *Ingénierie didactique de l'élémentaire au supérieur*. Thèse d'état, Paris 7.

ROBINET, J. (1986). Les réels : Quels modèles en ont les élèves ? *Cahier de didactique* n°21, IREM Paris Sud.

ROGALSKI, M. (1994). L’enseignement de l’algèbre linéaire en première année de DEUGA. *La gazette des mathématiciens*, *39-62*.
SCHNEIDER, M. et al., groupe AHA (1991). *Vers l’infini pas à pas, approche heuristique de l’analyse, manuel pour l’élève*. Bruxelles : De Boeck.
TALL, D. (1991). *Advanced Mathematical Thinking* (Vol. 11). Springer Science & Business Media.
VANDEBROUCK, F. (2011). *Des technologies pour l’enseignement et l’apprentissage des fonctions du lycée à l’université : activités des élèves et pratiques des enseignants*. Note de synthèse pour une HDR, Université Paris Diderot.
VANDEBROUCK F. (Ed.) (2012). *Mathematics classrooms students' Activities and Teachers' Practices*. Rotterdam: Sense Publishers.

ANNEXE 1 : SOMMAIRE DE LA BROCHURE « ENSEIGNER EN DEUG AUTREMENT »

TABLE DES MATIERES