

ÉLABORATION ET ANALYSE D'UNE FORMATION D'ENSEIGNANTS CENTREE SUR LE CALCUL MENTAL

Jean-François CHESNÉ

Directeur scientifique du Cnesco

Laboratoire de didactique André Revuz, Université Paris Diderot,

jean-francois.chesne@education.gouv.fr

Résumé

Depuis 25 ans en France, des évaluations standardisées font apparaître des constats récurrents sur les activités des élèves dans le domaine des nombres et du calcul. Nous interrogeant sur les apports que pourraient avoir ces évaluations pour l'enseignement, nous nous sommes demandé comment intégrer leurs résultats dans les pratiques quotidiennes des enseignants au début du collège pour améliorer les apprentissages des élèves. Pour cela, nous avons conçu et mis en place un dispositif étagé de formation d'enseignants (PACEM : Projet pour l'acquisition de compétences par les élèves en mathématiques) centré sur le calcul mental.

Nous avons utilisé la théorie de l'activité, la double approche, issue de la didactique des mathématiques et de la psychologie ergonomique, et d'autres outils de didactique des mathématiques que nous avons adaptés pour formuler des hypothèses de formation, mises à l'œuvre dans le dispositif. Puis nous avons exploré comment l'ensemble du dispositif a été mis en place, en analysant *a posteriori* le potentiel de formation des résultats d'un pré-test *ad hoc* réalisé auprès des élèves, et construit à partir d'évaluations standardisées. Enfin, grâce à un protocole spécifique d'évaluation, nous avons analysé les effets de l'expérimentation, positive à bien des égards, en comparant les résultats d'un post-test des élèves impliqués et des élèves de groupes témoins.

Dans notre communication, nous présenterons l'ensemble du dispositif PACEM et les résultats obtenus, en mettant un accent sur le rôle du calcul mental dans la formation des enseignants.

Mots clés

Calcul mental, évaluations standardisées, formation des enseignants, théorie de l'activité

PREAMBULE

Ma présentation recouvre deux histoires imbriquées l'une dans l'autre, et l'exercice qui a consisté à les dégager l'une de l'autre a d'ailleurs représenté en soi la première étape de mon travail de thèse. La première histoire est la conception et la mise en œuvre d'une expérimentation de formation d'enseignants (PACEM), que j'ai menée de 2010 à 2012 alors que j'occupais la fonction de chef de bureau de l'évaluation des actions éducatives et des expérimentations à la Direction de l'évaluation, de la prospective et de la performance, la DEPP, expérimentation toutefois inspirée en partie par des travaux de recherche. La deuxième est celle de ma recherche proprement dite (Chesné, 2014), c'est-à-dire de l'analyse du point de vue du chercheur de cette expérimentation, que j'ai dû revisiter, avec les données qu'elle a demandé de recueillir et qu'elle a fournies, et avec ce que cela impose comme travail de questionnement, de documentation, de choix du cadrage théorique, de problématisation et de méthodologie de recherche.

En fait, au fur et à mesure des diverses présentations de mon travail, je me suis rendu compte que les questions que j'avais eu comme ambition de traiter étaient trop nombreuses ou trop importantes, une par une, pour être toutes exposées dans ce texte. Là où j'en suis maintenant, je crois pouvoir dire que mon travail consistait, et consiste d'ailleurs toujours, en une réflexion accompagnée, voire précédée en partie de mise en actes, sur :

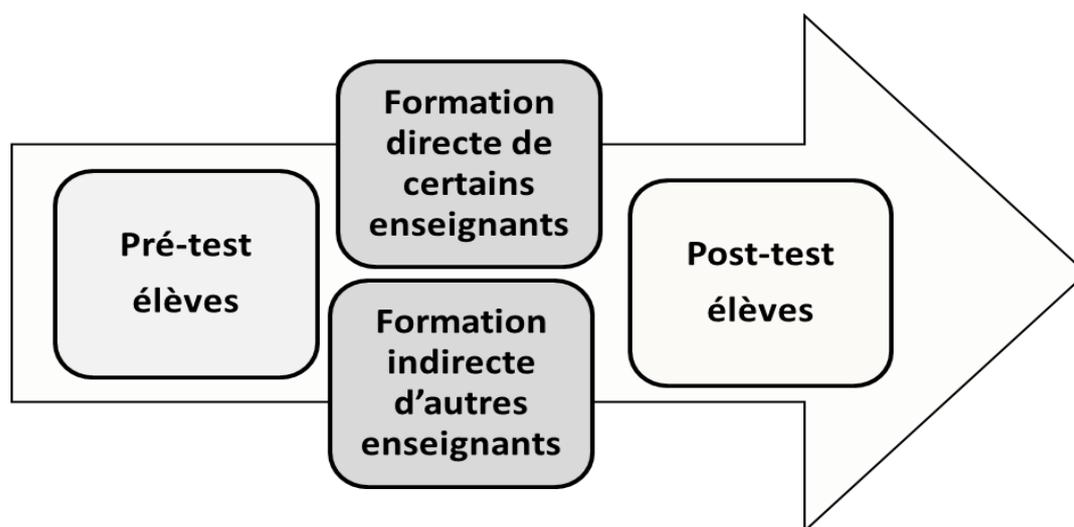
- l'état des lieux des acquis mathématiques des élèves à l'issue de l'école élémentaire, notamment dans le domaine des nombres et du calcul, et des réponses possibles en termes d'enseignement ;
- les évaluations standardisées à la fois productrices d'informations, avec une nécessaire relativisation, et outils potentiels de formation des enseignants ;
- le calcul mental comme élément d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques ;
- le format, spatial et temporel, d'une action de formation continue et sa contribution au développement professionnel, individuel et collectif, des enseignants;
- le déroulement d'une formation d'enseignants et l'identification de « facteurs clés d'efficacité ».

Cette réflexion engage plusieurs entrées, plus ou moins générales, plusieurs temporalités et plusieurs postures – celle de formateur concepteur, de formateur acteur, de chercheur... Après avoir rappelé quelques éléments sur l'expérimentation PACEM et les ancrages théoriques que j'ai adoptés pour ma recherche, j'ai choisi aujourd'hui d'évoquer principalement mon travail sur le calcul mental, en tant qu'objet d'étude pour lui-même, et dans ses liens avec les autres aspects évoqués ci-dessus.

A. QUELQUES REPÈRES SUR L'EXPÉRIMENTATION PACEM

La première histoire, c'est celle d'un projet, orienté d'emblée vers la classe et vers l'amélioration des acquis des élèves, avec l'hypothèse qu'il y a moyen de faire évoluer les pratiques des enseignants grâce à une formation adéquate pour améliorer ces acquis, et par le biais d'une diffusion de la formation au sein des établissements des enseignants formés.

Figure 1 : Protocole de l'expérimentation PACEM



Le protocole de mesure d'impact de l'expérimentation est classique avec la comparaison des résultats des élèves à un pré-test et un post-test, tous deux construits à partir d'items d'évaluations nationales antérieures (standardisées), validés d'un point de vue

psychométrique.

Un groupe expérimentateur et un groupe témoin ont été constitués, le plus rigoureusement possible, avec à l'intérieur de chacun de ces deux groupes, deux catégories d'enseignants.

Figure 2 : Structure de la population d'enseignants de l'expérimentation PACEM en 2011-2012

| Enseignants | Collèges expérimentateurs | Collèges témoins |
|--|---|--|
| Identifiés par l'inspection et volontaires pour participer à l'expérimentation | Participent à une formation continue spécifique (« <i>Enseignants Correspondants</i> ») | Ne participent pas à la formation (« <i>Enseignants témoins</i> ») |
| Non identifiés par l'inspection | Ne participent pas à la formation (« <i>Enseignants associés</i> ») | Ne participent pas à la formation (« <i>Enseignants involontaires</i> ») |

La population étudiée est quantitativement importante, et équilibrée du point de vue de variables disponibles sur les élèves.

Figure 3 : Structure de la population d'élèves de l'expérimentation PACEM en 2011-2012

| Enseignants | Élèves | | Classes | | Garçons | | Élèves "à l'heure" | | Élèves "en retard" | |
|----------------------------|--------|------|---------|------|---------|------|--------------------|------|--------------------|------|
| | N | % | N | % | N | % | N | % | N | % |
| Correspondants (17) | 591 | 19,3 | 28 | 19,2 | 303 | 51,3 | 467 | 79,0 | 107 | 18,1 |
| Associés (39) | 1221 | 39,9 | 58 | 39,7 | 625 | 51,2 | 989 | 81,0 | 216 | 17,7 |
| Témoins (16) | 524 | 17,1 | 25 | 17,1 | 255 | 48,7 | 416 | 79,4 | 92 | 17,6 |
| Involontaires (28) | 724 | 23,7 | 35 | 24,0 | 362 | 50 | 598 | 82,6 | 121 | 16,7 |
| TOTAL | 3060 | 100 | 146 | 100 | 1545 | 50,5 | 2470 | 80,7 | 536 | 17,5 |

Les prétests ont confirmé cet équilibre du point de vue des performances des élèves.

La formation des enseignants dure 18 heures, réparties en 1 journée puis 4 demi-journées sur le premier semestre de l'année scolaire. Elle comporte quatre temps :

- **une phase d'amorce** destinée à favoriser des prises de conscience des enseignants sur des notions clés à partir d'évaluations nationales, puis des résultats des élèves au pré-

- test ; à faire émerger des pratiques et à faire exprimer des besoins ;
- **un apport** de connaissances mathématiques et didactiques, notamment en calcul mental.
- **une phase d'appropriation** de ces connaissances par les enseignants que le formateur inscrit dans des pratiques de classe possibles, grâce à des exemples de couples tâches/déroulements en calcul mental ;
- **une phase de structuration**, permettant aux enseignants d'organiser les différentes séances de calcul mental entre elles d'une part, et les séances de calcul mental dans une programmation globale annuelle des nombres et du calcul d'autre part.

Les résultats obtenus, par-delà les biais possibles liés notamment à la méthode pré-test/post-test, aux effets expérimentaux, montrent un impact global positif de l'expérimentation avec :

- un effet positif direct de la formation, c'est-à-dire sur les élèves des enseignants formés ;
- un effet positif indirect de la formation : on observe une nette progression des élèves des enseignants du groupe expérimental, non-identifiés par les inspecteurs, par rapport aux scores des élèves des enseignants « involontaires » du groupe témoin, mais aussi par rapport aux scores des élèves des enseignants « identifiés » du groupe témoin ;
- des tendances intéressantes sur les résultats des filles, sur ceux des élèves d'éducation prioritaire, et sur ceux des élèves de bas niveau, qui semblent marquer des « effets de rattrapage » ;
- un effet positif du dispositif qui se conserverait sur deux ans, mesuré par deux tests effectués en fin de 5^e (un test spécifique lié à l'expérimentation, et le test national proposé en 2012).

B. LA RECHERCHE SUR PACEM

La deuxième histoire est celle de mon travail de recherche, mené avec Aline Robert et Janine Rogalski, qui va m'obliger à faire non pas un pas de côté, mais plusieurs, pour me départir de mes rôles successifs de concepteur et pilote du dispositif, et de formateur. Il s'agit alors pour moi d'interroger et de comprendre *a posteriori* ce qui a été mis en place dans l'expérimentation PACEM, pour en quelque sorte dénaturer les éléments qui la composent, les analyser, identifier ceux qui, dans la démarche d'expérimentation, avaient déjà pu, au moins partiellement, relever d'une démarche de recherche, et enfin repérer l'évolution de certains d'entre eux.

J'ai donc été amené, du point de vue du chercheur, à m'engager dans l'analyse du dispositif, et pour cela me poser un certain nombre de questions sur chacune de ses composantes, avec la difficulté que la complexité des pratiques enseignantes se retrouvait d'une certaine façon dans la conception et la mise en œuvre du dispositif. L'architecture globale de ma recherche s'est donc organisée autour de quatre grands axes d'étude :

- l'analyse des évaluations standardisées (dégager une méthodologie, comment m'y étais-je pris pour les analyser ? Que nous apprennent-elles exactement ? Formaliser ce que j'en avais fait pour la conception des tests, pour concevoir la formation) ;
- l'analyse de ce qui concerne le calcul mental (qu'est-ce que c'est ? Qu'est-ce que la recherche en sait, du côté des élèves ? Des enseignants ? Quel rôle le calcul mental peut-il jouer dans les apprentissages ? Pourquoi ? Comment ça peut se passer en classe ?) ;
- l'analyse de la formation des enseignants (qu'est-ce qui s'est joué, en comparant notamment le scénario initial avec le déroulement ?) ;

- l'appréciation de l'impact du dispositif sur les élèves (valider en quelque sorte le protocole d'évaluation envisagé, mais aussi le compléter et en définir les limites, et bien sûr analyser les résultats) ;

Même si, comme chacun sait, il y a beaucoup plus d'allers-retours dans la réalité que dans la présentation finale d'un travail de recherche, la première étape de ce travail fut bien sûr d'abord de définir un cadrage théorique adapté à mes questionnements, qui me permettrait à la fois d'analyser les fondements et la manière dont ma démarche avait été opérationnalisée au cours de l'expérimentation.

Toutes les questions énoncées ci-dessus ne sont pas reprises dans ce texte, qui est centré sur le calcul mental. Toutefois, après avoir présenté les éléments théoriques qui m'ont permis de légitimer et d'étayer ma démarche de chercheur, j'exposerai rapidement en quoi l'analyse des évaluations standardisées en a constitué une première étape fondatrice. Je m'attarderai ensuite plus largement sur le calcul mental, ce qu'il recouvre de mon point de vue, sur les fonctions qu'il peut recouvrir pour la classe, du côté des élèves et des enseignants, et sur la place qu'il peut prendre dans une formation d'enseignants. Je ne reviendrai pas sur l'analyse de l'impact du dispositif, mais son caractère positif, non seulement sur les acquis des élèves des professeurs ayant participé à la formation spécifique organisée pour l'expérimentation (les « enseignants correspondants »), mais aussi sur ceux des élèves de leurs collègues dans les collèges expérimentaux, non formés directement (les « enseignants associés »), constitue, malgré certaines limites, des avancées incontestables pour la recherche, et offre également un certain nombre de perspectives que je propose à la fin du texte.

1. Cadre théorique

Il est important de préciser les trois ancrages théoriques que j'ai choisis. Pour analyser ce qui touche, dans mon travail, l'enseignement et l'apprentissage, j'ai choisi comme toile de fond la théorie de l'activité, qui permet d'étudier, en situation scolaire et en mathématiques, les apprentissages des élèves en relation avec leurs activités provoquées par leurs enseignants. Pour compléter, et spécifier ce cadrage, j'ai choisi la théorie de la double approche, issue de la didactique des mathématiques et de la psychologie ergonomique (Robert et Rogalski, 2002), qui est un moyen de prendre en compte la complexité des pratiques (réelles) des enseignants. Pour analyser ce qui relève de la formation des enseignants, je me réfère également aux deux cadres précédents : à la théorie de l'activité, en mettant les activités mathématiques des élèves, notamment en classe, au centre de ce qui peut provoquer leurs apprentissages (objectif des pratiques et des formations), et à la double approche, permettant d'apprécier les choix réels, les anticipations et les improvisations de ce qui peut se jouer en classe. Mais, en ce qui concerne plus spécifiquement les formations, j'ai aussi essayé d'avancer dans un travail de modélisation, dans lequel Aline Robert et moi-même sommes engagés depuis plusieurs années, et qui s'inspire de la notion de zone proximale de développement. Nous définissons ainsi une zone proximale de développement des pratiques (ZPDP), associée à des activités des enseignants proches des leurs, qu'ils peuvent reconstituer, apprécier, analyser et enrichir.

L'hypothèse que nous faisons est que pour qu'un travail en formation enrichisse les pratiques, et pas seulement des connaissances sur les exercices ou les déroulements, il est important qu'il s'appuie sur des éléments des pratiques relevant de cette ZPDP, dont les enseignants ont conscience ou peuvent prendre conscience. Ce peut être parce qu'ils les reconnaissent comme relevant de leurs pratiques ou proches de celles-ci, ou parce qu'ils peuvent en ressentir le besoin. En fait ce qui est développé ici relève du travail réalisé à partir de cette hypothèse, même si cela a été explicité en partie après la formation (et a donc pu bénéficier de

l'expérience de formateur acteur) ! Avec, tout de suite, une question sous-jacente : les ZPDP sont individuelles, et la formation collective.

2. Analyse des évaluations standardisées

Concernant l'analyse comparative des évaluations standardisées, des chercheurs s'y étaient déjà livrés avant moi (Pluvinage & Rauscher, 1991 ; Bolon, 1992, 1996 ; Roditi, 2001). J'ai tenté pour ma part de travailler de manière quasi exhaustive sur l'ensemble des matériaux des évaluations nationales disponibles en faisant un certain nombre de choix : d'abord, restreindre mon champ d'étude au domaine qui me préoccupait, nombres et calcul. Ensuite, considérer que cette analyse se rapporte à ce qui est enseigné, ou en tout cas censé être enseigné, et donc pour cela procéder à l'étude des programmes en vigueur au cycle 3 depuis 1980, c'est-à-dire en gros, ceux qui correspondent à la scolarité des élèves testés depuis que les résultats d'évaluations les plus anciens sont disponibles (1989). Puis j'ai abordé cette analyse, non pas avec l'objectif de dresser un bilan du niveau des élèves, c'est-à-dire par exemple en cherchant à savoir s'il y avait des évolutions du nombre d'élèves en difficulté (en effectuant des comparaisons temporelles), mais avec le but de dresser un état des lieux (évolutif) du niveau de maîtrise par les élèves des différents types de tâches testés, tels qu'ils sont définis dans les programmes du cycle 3 de l'école primaire. Pour cela, j'ai regroupé tous les items disponibles par type de tâches, et j'ai analysé d'un point de vue didactique les données métriques¹ sur l'ensemble des tâches disponibles ; enfin, j'ai dégagé des résultats non pas d'un point de vue rétrospectif, c'est-à-dire orienté vers une recherche d'éléments qui peuvent les expliquer, mais dans la perspective de comprendre en quoi ce que ces données nous apprennent peut être utile à un enseignant de sixième pour travailler avec ses élèves. L'ensemble des résultats obtenus m'a ainsi permis de mettre en relief certaines connaissances, sans doute insuffisamment acquises par les élèves à la fin de l'école primaire pour constituer une base solide qui leur permette d'en acquérir de nouvelles au collège : en particulier celles qui portent sur les décimaux et les rationnels, celles qui mettent en jeu des structures multiplicatives et celles qui concernent l'estimation d'un ordre de grandeur d'un résultat numérique. Cela m'a aussi permis d'anticiper sur des bénéfices potentiels du calcul mental relativement aux apprentissages des élèves sur ces points précis.

C. LE CALCUL MENTAL

La formation des enseignants dans le dispositif PACEM s'est progressivement articulée autour de la place du calcul mental dans l'enseignement au collège, en termes de choix de contenus, de déroulements, et de programmation. Quel calcul mental, pourquoi y consacrer du temps, dans quels buts, comment l'organiser en classe, quand ? Je présente dans cette partie quelques sources qui ont inspiré ma démarche avec les enseignants lors de cette formation ; je propose ensuite une définition du calcul mental, issue d'une revue de littérature nationale et internationale, et j'expose enfin mes partis pris sur les apprentissages des élèves liés au calcul mental, et d'autres se plaçant plutôt du côté des pratiques des enseignants.

1. Introduction

L'exercice du calcul mental a toujours fait partie de mes pratiques d'enseignant, au collège et

¹ Ces données renseignent à la fois sur la réussite des élèves à un item et sur la corrélation de celui-ci avec l'ensemble des items proposés dans le même test.

au lycée, et j'ai maintes fois eu l'occasion de constater des effets positifs sur les élèves, et pas seulement sur des dimensions purement cognitives comme le souligne ce témoignage d'élève :

« Le calcul mental m'a permis d'acquérir des automatismes, c'est-à-dire qu'en face d'opérations, je sais tout de suite ce qu'il faut faire. Il m'a aussi permis de donner un ordre d'idée des résultats. Ainsi, je peux me rendre compte quand mes résultats sont faux. A force de travailler en calcul mental, c'est plus facile de résoudre des problèmes. J'ai plus confiance en moi. »

A contrario, j'ai également pu constater les difficultés des élèves en calcul mental, lors de travaux communs avec des collègues enseignants ou à l'occasion d'examens oraux. Ces difficultés sont d'ailleurs confirmées par les résultats des évaluations nationales. Pour rappel, selon l'évaluation de fin de 3^e menée en 2008 par la direction de l'évaluation, de la prospective et de la performance (Depp) dans le cadre du cycle d'évaluations disciplinaires réalisées sur échantillons (Cedre), certains élèves parmi les plus performants sont en difficulté devant le calcul « trois quarts de 44 » Et selon les évaluations nationales à l'entrée en 6^e, nombreuses sont les tâches moyennement ou faiblement réussies par les élèves, et qui pourraient relever d'un calcul mental simple, comme par exemple :

- Addition et soustraction des décimaux :
 - $1,7 + 2,3$ (2003, TR = 61 %)
- Multiplication
 - $35,2 \times 100$ (1994, TR = 60 % ; 2008, TR = 32 %)
 - 3 fois 0,5 (2003, TR = 44 %)
- Ecriture fractionnaire d'un nombre décimal
 - $\frac{1}{4} = 0,25$ (2008, TR = 27 %)

Comme formateur enfin, j'ai souvent eu l'occasion de constater le manque de familiarité des enseignants ou des futurs enseignants avec le calcul mental, mais aussi l'intérêt que peut présenter le recours au calcul mental en formation comme réponse possible à des difficultés d'enseignement des nombres et du calcul.

2. Ce que recouvre le calcul mental

Pour ma recherche, j'ai donc cherché à étayer les partis pris que j'avais finalement adoptés au cours de la mise en œuvre du projet PACEM. Je me suis d'abord livré à une revue de littérature, française avec essentiellement les travaux de Butlen et Pézard (1992, 1996), et internationale, très abondante sur ce thème. La très grande majorité des recherches dont j'ai pris connaissance s'accorde à présenter les bienfaits du calcul mental dans les apprentissages des élèves, mais il n'y a cependant pas consensus sur un enseignement systématique du calcul mental. Un certain nombre de recherches menées sur les pratiques d'enseignement relatives au calcul mental font en effet apparaître le risque de voir ces pratiques réduites à des exercices techniques routiniers (Maclellan, 2001). Quoi qu'il en soit, l'enseignement exclusif, mécanique, des algorithmes standards de calcul posé semble quasi unanimement rejeté aujourd'hui par les chercheurs, en France (Butlen, 2007) comme à l'étranger (Gravemeijer, 2003; Heirdsfield & Cooper, 2004 ; Kamii & Dominick, 1997). Par exemple, les recommandations actuelles de chercheurs britanniques, néerlandais et américains, accompagnant l'évolution de l'enseignement des mathématiques dans leurs pays respectifs,

insistent largement sur la compréhension par les élèves des méthodes et stratégies utilisées en calcul mental (par exemple Anghileri, Beishuizen & Putten, 2002 ; Thompson, 1999, 2008 ; van de Heuvel-Panhuizen, 2001 ; Yackel, 2001).

De quoi parle-t-on quand on parle de calcul mental ? Pour ma part, j'entends par calcul mental l'ensemble des activités qui consistent à effectuer des opérations avec des nombres, essentiellement sans aide matérielle externe. J'étends ces activités relevant du calcul mental à un travail explicite sur les désignations des nombres (écrites, orales, symboliques chiffrées ou non) et à un travail participant, tout ou en partie, à la résolution de problèmes mettant en jeu des données numériques, dans un cadre intra ou extra mathématique (de l'amorce de la démarche à la résolution complète). Le calcul mental est donc bien davantage que la seule activité, fréquente dans les classes de l'école primaire il y a une cinquantaine d'années, qui consistait à exécuter le plus rapidement possible des procédures opératoires sur les nombres, et dont l'objectif principal était l'automatisation de ces procédures. Dans cette acception, le calcul mental se rapproche largement du concept anglo-saxon de « *number sense* » (Gersten & Chard, 1999 ; Berch, 2005) qui n'est pas associé exclusivement au calcul mental. Ce concept fait globalement référence à « la compréhension générale des nombres et des opérations, ainsi qu'à la capacité d'utiliser cette compréhension de façon adaptée dans la gestion de situations numériques, pour porter des jugements mathématiques et élaborer des stratégies utiles et efficaces » (Reys, Reys, McIntosh, Emanuelsson, Johnsson & Yang, 1999). En particulier, je reprends fortement à mon compte ce que les chercheurs appellent *inclination* en anglais, et que je comprends comme la tendance et l'envie de recourir au calcul mental, associées à la disponibilité, au sens de Robert (1998) de connaissances sur les nombres et les opérations. Ce dernier aspect renvoie à l'idée que quelqu'un qui se sent « à l'aise » avec les nombres saura d'autant mieux les utiliser et les interpréter (Turkel & Newman, 1988).

J'établis ainsi une grande proximité du concept de « *number sense* » selon deux dimensions sous-jacentes centrales dans mon travail de recherche sur le calcul mental. La première de ces dimensions porte sur les contenus numériques et les différentes manières de les mettre en œuvre avec des élèves, la seconde est liée à la nature des objectifs visés en calcul mental : fin en soi pour que les élèves acquièrent des connaissances et des capacités spécifiques parmi d'autres connaissances et d'autres capacités, ou moyen pour faciliter chez eux des apprentissages, voire leur permettre de les amorcer. Autrement dit, je m'intéresse au calcul mental comme apprentissage, mais aussi et surtout, comme modalité d'apprentissage le dépassant : la pratique du calcul mental par les élèves, défini et mis en œuvre selon des choix conscientisés et optimisés par les enseignants, ne constituerait pas seulement un moyen d'acquérir des faits numériques (tables d'addition et de multiplication par exemple) ou des procédures de calcul automatisées (multiplier par 11 ou par 0,5 par exemple), mais une voie privilégiée pour la construction des nombres et des propriétés des opérations.

3. Une analyse des partis pris sur le calcul mental pour la classe et dans la formation PACEM

Ce qui devait constituer un élément de formation parmi d'autres, le calcul mental, est en réalité devenu l'axe principal, le fil rouge, de la formation PACEM. De nouveaux questionnements sont alors apparus tout naturellement au cours de mon travail de recherche : en quoi et sur quoi la pratique du calcul mental apporte un plus pour l'apprentissage des élèves ? Dans quelle mesure est-il profitable pour les enseignants d'enseigner des procédures de calcul mental ? Comment concilier un enseignement de procédures de calcul mental et prendre en compte les procédures personnelles des élèves ? A quel moment doit-on passer à une « procédure experte » ? Est-il toujours pertinent de le faire ? Et plus largement, une des

questions, de mon point de vue fondamentale actuellement, porte sur la pertinence d'élaborer des progressions pour le collège autour de tâches spécifiques à effectuer mentalement.

Cette réflexion m'a conduit à déterminer trois fonctions spécifiques que le calcul mental peut jouer pour répondre à des difficultés identifiées chez les élèves :

- du côté des tâches et du côté des activités spécifiques des élèves qu'elles peuvent provoquer, une fonction qui fait la quasi-unanimité dans la recherche étrangère : participer à l'acquisition de connaissances mathématiques des élèves, c'est-à-dire développer le sens des nombres chez les élèves, avec la signification évoquée ci-dessus, et favoriser des habiletés pour la résolution de problèmes (engagement dans des démarches heuristiques, stratégies personnelles de résolution et de contrôle) ;
- du côté des enseignants : la possibilité d'adopter un « rythme didactique » spécifique, voire différent ; au niveau macro, dans l'organisation annuelle de l'enseignement, qui permet non seulement la fréquentation régulière, renouvelée, de notions, mais aussi l'anticipation sur de nouveaux apprentissages pour les élèves, avec l'élaboration de représentations mentales et de formulations intermédiaires ; et au niveau local, l'organisation de moments de classe spécifiquement dédiés au calcul mental, sans lien nécessaire avec le reste des séances, offrant ainsi de la souplesse aux enseignants ;
- et enfin, une troisième fonction, qui porte *a priori* sur une tout autre dimension, mais néanmoins importante, notamment dans les classes de l'académie de Créteil (largement peuplée d'élèves socialement défavorisés) : la pratique du calcul mental est un moyen d'installer un climat de classe favorable aux apprentissages, en créant des routines qui favorisent à la fois une mise en activité rapide de tous les élèves et des interactions entre les élèves, et entre les élèves et leur enseignant. Mais des tâches de calcul mental, convenablement choisies, peuvent être à la fois immédiatement accessibles aux élèves et leur offrir des cheminements différents pour les effectuer. Une certaine pratique du calcul mental en début de séance peut donc aller bien au-delà de ce seul aspect de gestion de classe.

Ce sont ces trois fonctions qui ont fondé mes partis pris sur le calcul mental, en termes de pratiques enseignantes potentiellement porteuses de facteurs favorables à l'apprentissage des élèves.

Le premier point a été souligné par Lieven Verschaffel (pour les nombres entiers à l'école primaire) lors de la conférence de consensus sur la numération co-organisée par le conseil national d'évaluation du système scolaire (Cnesco) et l'institut français de l'Éducation (Ifé / ENS de Lyon) en novembre 2015. Le calcul mental est porteur d'un intérêt primordial, s'il est conçu comme un moyen privilégié de favoriser la conceptualisation des nombres (compréhension du système de numération, décompositions additives et multiplicatives, ordre de grandeur), notamment par comparaison avec le calcul posé. Du point de vue de la nature de l'activité cognitive provoquée par les deux démarches, Verschaffel a rappelé que le calcul posé repose sur des algorithmes, qu'il fonctionne sur les chiffres, et qu'il exige de travailler « de droite à gauche », alors que le calcul mental a un fondement heuristique, qu'il opère sur les nombres au lieu des chiffres, et qu'il va « de gauche à droite ». Au-delà de ces différences de ces deux méthodes de calcul desquelles de nombreux chercheurs (étrangers surtout) ont analysé les forces et les faiblesses, à la fois en termes d'efficacité et plus largement de leur importance pour l'enseignement des mathématiques, le calcul mental permet aussi une articulation aisée entre différents registres de représentation sémiotique, oraux et écrits.

Je vais présenter quelques analyses de tâches que j'ai menées. Elles m'ont en effet permis de faire émerger différents types de traitements sur les nombres et sur les opérations, et m'ont conduit à faire l'hypothèse générale qu'une certaine pratique du calcul mental permettrait d'optimiser les choix, à la fois sur les nombres et sur les opérations, tout en étant très compatible avec des modalités de gestion de la classe favorables à des activités des élèves.

Prenons le cas d'une somme à calculer, par exemple $37 + 99$. Dans un calcul posé, il s'agit d'abord pour un élève de reconnaître qu'il s'agit d'une addition de deux entiers et éventuellement de repérer qu'ils ont le même nombre de chiffres. La deuxième étape consiste à choisir une organisation spatiale adaptée (écriture des nombres l'un en-dessous de l'autre avec alignement des chiffres de même rang), puis à gérer l'écriture de nouveaux chiffres, y compris celle de la retenue intermédiaire. Enfin, vient une phase de traitement qui est ici un algorithme et qui comporte au moins 2 étapes, voire 3 ou 4 : « $7 + 9 = 16$, je pose 6 et je retiens (voire j'écris au bon endroit) 1 ; $3 + 1 = 4$ et $4 + 9 = 13$ ». Le résultat est le nombre qui s'écrit avec un 1, un 3 et un 6 dans cet ordre, donc $37 + 99 = 136$. Cette analyse vaut peu ou prou pour tous les calculs posés, notamment l'étape finale, « reconstitutrice » du résultat obtenu à partir de chacun de ses chiffres, et éventuellement avec une virgule à placer correctement. Une ultime étape pourrait être – devrait être – un contrôle *a posteriori* de l'ordre de grandeur du résultat, mais l'activité menée dépasse alors l'application stricte de l'algorithme.

Sur la même somme ($37 + 99$) à effectuer mentalement, il s'agit toujours évidemment de reconnaître une addition de deux entiers, mais en identifiant cette fois que l'un des deux est très proche de 100. Le travail consiste d'abord à remplacer la somme à effectuer par celle de 100 et de 37 et de compenser ensuite (ou avant). Le traitement interne qui va suivre a donc été anticipé dans les deux phases précédentes, par la double reconnaissance de l'opération et de la spécificité des nombres en jeu. C'est comme si cette troisième phase avait été déclenchée avant d'avoir réellement débuté le calcul, par la transformation de 99 en $100 - 1$. Il reste alors à effectuer $37 + 99 = 37 + (100 - 1) = (37 + 100) - 1$ (ou $(37 - 1) + 100$) ; on remplace un entier par une différence d'entiers (choisie lors de l'anticipation), puis une somme de deux entiers par une somme/différence de trois entiers, et on table sur la disponibilité de $37 + 100$ et de l'expression de l'entier qui précède 100, sans parler de l'associativité en actes, qu'on considère ici comme naturelle. Il y a donc deux étapes et au moins un choix.

C'est ce travail de description précise des sous-activités possiblement en jeu qui m'a permis d'identifier des facteurs favorables à une certaine pratique du calcul mental, porteuse d'apprentissages pour les élèves à la fois

- en termes de tâches qui favorisent la mémorisation, la conceptualisation des nombres et de leurs propriétés (travail sur les nombres et non sur les chiffres, travail de gauche à droite), le développement d'habiletés pour la résolution de problèmes, -
- et en termes de modalités (quand faire du calcul mental avec les élèves et comment, avec l'importance de l'explicitation et de la mutualisation des procédures des élèves, ce qui renvoie à un travail sur la ZPD).

Voici quelques exemples de calculs, repris des évaluations nationales, qui me semblent particulièrement représentatifs des difficultés repérées chez les élèves, propices au questionnement des enseignants, qui étaient présents dans le pré-test et qui ont été travaillés en formation, avec une centration sur le calcul mental :

- Addition et soustraction des décimaux :
 - $38 - 1,5$ (EN 6^e 2008, TR = 52 % ; PACEM sept 2011, TR = 30 %)
- Multiplication :
 - $3,72 \times 1000$ (PACEM sept 2011, TR = 30 %)
 - $4,6 \times 3$ (PACEM sept 2011, TR = 35 %)
- Ecriture fractionnaire d'un nombre décimal
 - $\frac{1}{4} = 0,25$ (EN 6^e 2008, TR = 27 % ; PACEM sept 2011, TR = 27 %)

Ces exemples illustrent des connaissances très partiellement acquises, qui relèvent, dans les programmes, à la fois de l'école primaire et de la sixième, et pour lesquelles je considère qu'une certaine pratique du calcul mental peut avoir une influence positive sur les apprentissages des élèves, en développant la disponibilité des connaissances mises en jeu. Ainsi, le premier calcul apparemment largement à la portée d'un élève de sixième, offre pourtant des taux de réussite très moyens surprenants, et permet d'enclencher avec les enseignants un travail de réflexion sur l'insuffisance de ces taux de réponse, puis sur la nature des réponses erronées (37,5 pour environ la moitié des réponses incorrectes, et 23 ou 2,3), en remontant aux procédures des élèves, à leurs connaissances sur les nombres décimaux, et en ouvrant des pistes concrètes pour favoriser l'apprentissage de ces connaissances par des tâches de calcul mental.

Les résultats positifs de l'expérimentation apportent une réflexion globale, actualisée et adaptée à la sixième, sur le calcul mental, son exploitation à bon escient, et enrichie d'une réflexion didactique un matériel important presque « laissé en jachère » jusqu'ici par les enseignants (les évaluations standardisées). On peut pressentir l'intérêt de recherches allant plus loin dans ce sens, par exemple en explorant plus précisément la proposition aux élèves, régulière et fréquente, de tâches à effectuer mentalement dans la résolution de tâches complexes (au sens où les documents institutionnels les définissent) ou avec l'utilisation des matériels numériques (tableau numérique interactif, tablettes).

D. LA PLACE DU CALCUL MENTAL DANS LA CONCEPTION D'UNE FORMATION D'ENSEIGNANTS

Pour le formateur, les retours des professeurs participant à la formation ont incontestablement valorisé la démarche choisie, mais suscité dans le même temps un certain nombre de questions « naïves » en cours de formation, auxquelles je ne m'attendais pas toujours, ou en tout cas pas aussi clairement explicitées : du côté des contenus et tâches à proposer (comment énoncer un calcul ? Peut-on proposer des tâches qui ne sont pas du « calcul » au sens strict ? Peut-on proposer des tâches de calcul mental qui ne sont pas directement liées à la suite d'une séance ? Etc.), du côté des mises en œuvre (Combien de temps ? Sur quels supports ?), du côté des prises d'information et de leur exploitation (Faut-il « corriger » les productions des élèves ? Faut-il les noter ? Comment organiser la correction ? Quelle durée ?). Ces retours constituent évidemment des indices sur les pratiques des enseignants et leurs besoins, et m'ont obligé à des adaptations en cours de formation. Pour le chercheur, ces mêmes retours offrent des renseignements sur des pratiques dont on peut faire l'hypothèse qu'elles renvoient à des activités génériques, et procurent ainsi des éléments de compréhension sur les apprentissages des élèves. Par ailleurs, ils provoquent des réflexions sur la formation des enseignants, et sur ce qui peut apparaître comme des conditions nécessaires pour atteindre des attendus de la formation, sur le calcul mental en particulier.

Je terminerai mon analyse par la place du calcul mental dans la conception globale d'une « formation à l'envers² » et sa cohérence (compte tenu du domaine étudié) avec le fait d'avoir cherché à travailler dans une zone proximale de développement des pratiques des enseignants participant à la formation. Le fait de travailler d'abord sur des matériaux extérieurs aux enseignants – des résultats d'évaluations nationales –, puis sur des matériaux plus proches

² Nous entendons par « formation à l'envers » une formation dans laquelle les apports du formateur sont adaptés aux besoins des enseignants, soit qu'ils aient été exprimés par eux, soit qu'ils aient été identifiées par le formateur ; Cette stratégie inductive de formation part d'éléments de pratiques locales des enseignants, pour remonter ensuite vers des alternatives et des pratiques plus globales.

d'eux – les résultats du prétest – et de proposer des activités mettant en jeu des « couples³ » contenus/déroulements de calcul mental, comme réponses possibles aux difficultés d'apprentissage et d'enseignement exprimées et identifiées, permet sans doute en effet aux enseignants d'enrichir facilement et rapidement leurs pratiques sans les bouleverser.

E. RESULTATS ET PERSPECTIVES

En ce qui concerne le champ de la didactique des mathématiques, on peut donc considérer que ma recherche offre un certain nombre d'avancées, qui ne sont pas toutes de même nature, et sans doute pas à considérer au même degré de développement. Parmi elles, je retiendrai :

- du côté des évaluations standardisées : l'outillage méthodologique que j'ai mis en place pour analyser les résultats et le potentiel de formation qu'elles peuvent contenir ;
- du côté de la formation des enseignants : la validité d'un travail de formation dans la ZPDP des enseignants, et l'ancrage d'une formation sur au moins deux composantes des pratiques au sens de la double approche (cognitive et médiative) ; la question de la durée de la formation, révélée à la fois sur le plan qualitatif par les retours des enseignants et par les résultats aux tests ; le fait qu'une action de formation continue peut dépasser le seul cadre spatial et temporel de l'action proprement dite, et contribuer au développement professionnel des enseignants d'un même établissement : développement individuel en agissant sur les pratiques dans la classe, et développement collectif, en offrant à une équipe d'enseignants un terrain propice à la réflexion autour de matériaux communs à utiliser (ou à construire) et à mettre en œuvre ;
- enfin, l'intérêt du calcul mental comme élément de formation et comme pratiques en termes de contenus/déroulements pour les enseignants : ces pratiques possibles en calcul mental sont effectivement intégrables par les enseignants, et peuvent générer des activités favorables aux apprentissages des élèves.

Bien sûr, il existe des limites à ma recherche qui sont liées à la structure du projet (et notamment à son montage particulier), à la méthodologie de l'expérimentation (effets enseignants ? effets établissements ?) et aux moyens d'observation mis en œuvre (que s'est-il vraiment joué dans les classes et dans les collèges ?). Mais cette recherche fait apparaître aussi un certain nombre de questions théoriques qui offrent des pistes à explorer pour la recherche :

- sur les évaluations : travail de croisement entre différents types de tâches, analyse des activités des élèves pendant un test, formes différentes d'évaluation (en groupes, avec aides), travail de croisement entre évaluations de classe et évaluations standardisées ;
- sur le calcul mental, avec des études plus poussées sur les tâches, des études cliniques sur les liens tâches/activités/productions des élèves, sur les changements de cadres ou les changements de registre, sur l'articulation avec le reste de ce qui est enseigné.

D'autres questions à approfondir sur la dimension collective du métier d'enseignant et sur la possibilité d'exploiter collectivement dans une formation des ZPDP *a priori* individuelles. Des questionnements sur l'activité du formateur, pendant la formation en présentiel, voire au-delà dans le cadre d'une formation hybride, sont encore nombreux, et importants dans la réflexion actuelle sur l'enseignement des mathématiques dans le cadre de la scolarité

³ Un « couple » contenu/déroulement est constitué d'un énoncé et d'un déroulement possible associé à la mise en œuvre en classe de cet énoncé, le choix d'un énoncé prédéterminant *a priori* des tâches pour les élèves, et le déroulement influençant leurs activités.

obligatoire, et la formation continue des enseignants.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ANGHILERI, J., BEISHUIZEN, M. & PUTTEN, K. (2002). From informal strategies to structured procedures: Mind the gap! *Educational Studies in Mathematics*, 49, 149-170.

BERCH, D. (2005). Making Sense of Number Sense: Implications for Children with Mathematical Disabilities. *Journal of learning disabilities*, 38, 4, 333-339.

BOLON, J. (1992) L'enseignement des décimaux à l'école élémentaire. *Grand N*, 52, 49-79. IREM de Grenoble.

BOLON, J. (1996). *Comment les enseignants tirent-ils parti des recherches faites en didactique des mathématiques ? Le cas de l'enseignement des décimaux à la charnière école - collège*. Thèse de doctorat de l'Université Paris 5.

BUTLEN, D. (2007). *Le calcul mental entre sens et technique, Recherches sur l'enseignement des mathématiques aux élèves en difficulté, du calcul mental à la résolution des problèmes numériques*. Presses universitaires de Franche-Comté.

BUTLEN, D., & PÉZARD, M. (1992). Calcul mental et résolution de problèmes multiplicatifs, une expérimentation du C.P. au CM2, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 12(2/3) 319-368.

BUTLEN, D., & PÉZARD, M. (1996), Rapports entre habileté calculatoire et prise de sens dans la résolution de problèmes numériques, étude d'un exemple : impact d'une pratique régulière de calcul mental sur les procédures et performances des élèves de l'école élémentaire. *Cahier de DIDIREM n°27*. Paris, IREM Paris 7.

CHESNÉ, J.-F. (2014). *D'une évaluation à l'autre : des acquis des élèves sur les nombres en sixième à l'élaboration et à l'analyse d'une formation d'enseignants centrée sur le calcul mental*. Thèse de doctorat. Université Paris Diderot (Paris 7).

GERSTEN, R., & CHARD, D. (1999). Number sense: Rethinking arithmetic instruction for students with mathematical disabilities. *The Journal of Special Education*, 33, 19–28.

GRAVEMEIJER, K. (2003). Facts and algorithms as products of students' own mathematical activity. In KILPATRICK J., MARTIN W. G., & SCHIFTER D. (Eds.). *A research companion to Principles and Standards for school mathematics*, (pp. 114–122). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

HEIRDSFIELD, A., & COOPER, T. (2004). Inaccurate Mental addition and subtraction: Causes and Compensation. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 26(3) 43-65.

KAMII, C., & DOMINICK, A. (1997). To teach or not to teach algorithms. *Journal of Mathematical Behaviour*, 16(1) 51-61.

MACLELLAN, E. (2001). Mental calculation: its place in the development of numeracy. *Westminster Studies in Education*, 24(2) 145-154.

PLUVINAGE, F., & RAUSCHER, J.-C. (1991). Les élèves et leur enseignement en mathématiques en sixième. *Education et formations*, 27, 83-95.

REYS, R., REYS, B., MCINTOSH, A., EMANUELSSON, G., JOHNSON, B., & YANG, D. C. (1999). Assessing number sense of students in Australia, Sweden, Taiwan, and the United States. *School Science and Mathematics*, 99(2) 61-70.

ROBERT, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à

l'université. *Recherches en didactique des mathématiques*, 18(2), 139-190.

ROBERT, A., & ROGALSKI, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, 2(4), 505-528.

RODITI, E. (2001). *L'enseignement de la multiplication des décimaux en sixième. Étude de pratiques ordinaires*. Thèse de doctorat. Université Paris Diderot.

THOMPSON, I. (1999). Mental calculation strategies for addition and subtraction - Part 1, *Mathematics in School*, 28, 5, 22-25.

THOMPSON, I. (2008). Mental Calculation. *Mathematics Teaching*, 213, 40-42.

TURKEL, S., & NEWMAN, C. (1988). What's your number? Developing number sense. *Arithmetic Teacher*, 36(6), 53-55.

VAN DE HEUVEL-PANHUIZEN, M. (2001). Realistic mathematics education in the Netherlands. In J. ANGHILERI (Ed.). *Principles and practices in arithmetic teaching: Innovative approaches for the primary classroom*, (pp. 49-64). Buckingham: Open University Press.

VERSCHAFFEL, L. (2015) : Quelles difficultés rencontrent les élèves quand ils ont à effectuer des opérations ? Conférence consultable à l'adresse <http://www.cnesco.fr/numeration/paroles-dexperts/calcul-et-operations/>

YACKEL, E. (2001). Perspectives on arithmetic from classroom-based research in the United States of America. In J. ANGHILERI (Ed.). *Principles and practices in arithmetic teaching: Innovative approaches for the primary classroom*, (pp. 15-32). Buckingham: Open University Press.