

# INSCRIPTION DU RECIT DANS LE MILIEU EN RESOLUTION DE PROBLEMES DE MATHEMATIQUES : PROPOSITION ET MISE A L'EPREUVE D'UN MODELE D'INTERACTION DES PROCESSUS DE NARRATION ET DE RAISONNEMENT DANS UNE ACTIVITE DE RESOLUTION DE PROBLEMES

Marianne **Moulin**

EA 4148 S2HEP (Sciences, Société, Historicité, Éducation et Pratiques)  
EA 2462 Laboratoire de Mathématiques de Lens  
marianne.moulin@cue-lillenorddefrance.fr

## Résumé

Notre travail vise à explorer la pertinence du Récit en tant que mode de pensée et support potentiel à la construction de raisonnement. Ainsi, dans notre thèse, nous nous sommes attachés à caractériser le rôle du Récit dans le cadre d'une activité de résolution de problèmes en mettant en relation les processus inhérents à cette activité et les fonctions du Récit : structuration, problématisation, explication. Nous avons en particulier caractérisé deux espaces problèmes en interrelation : *L'espace problème du contenu* (relatif au Problème de Mathématiques) et *l'espace problème rhétorique* (relatif au Récit). Notre travail théorique et expérimental nous a permis de déterminer les conditions nécessaires à une inscription du Récit dans le milieu didactique permettant d'envisager une co-construction entre récit et raisonnement. La situation que nous avons proposée (cycle 3) a amené les élèves à produire différents types de récits pour résoudre des problèmes numériques. Nos résultats mettent en évidence que le Récit enrichit le milieu didactique en particulier le *registre empirique* et le *registre des nécessités* et permet à l'élève de circuler entre les différents niveaux structurels du milieu didactique (*milieu matériel, milieu objectif, milieu de référence*). C'est en produisant différents types de récits que les élèves, tout en prenant en charge les contraintes mathématiques de la situation, s'affranchissent du monde sensible et s'engagent dans une véritable activité de preuve mathématique (production d'exemples, de contre-exemples, de conjectures, d'argumentations, etc.).

## Mots clés

Récit, Fonctions du récit, Raisonnement, Langage, Milieu Didactique, Jeu

## INTRODUCTION

Le travail de thèse<sup>1</sup> présenté au séminaire national de janvier 2016 et dans ce texte a été conduit sous la direction de M. Eric Triquet et de Mme Virginie Deloustal-Jorrand au sein du laboratoire S2HEP. Il a été soutenu en juillet 2014 à l'Université Claude Bernard Lyon 1

---

<sup>1</sup> Moulin, M. (2014) *Inscription du récit dans le milieu en résolution de problèmes de mathématiques : Études des contraintes didactiques, des apports et des limites dans la construction de raisonnement*, Thèse de doctorat disponible en ligne, Université Claude Bernard Lyon 1, 328p, <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01066443>.

(Moulin, 2014). Nous y avons proposé une approche par le Récit qui se fonde sur les travaux de Bruner (2003, 2008) mettant en évidence la tendance naturelle de l'Humain pour le Récit ainsi que le rôle de ce dernier dans la construction des connaissances :

Tout indique (...) que la manière la plus naturelle et la plus précoce dont nous organisons nos expériences prend précisément une forme narrative (Bruner, 2008, p. 151).

Depuis 2007, ce type d'approche narrative s'est développé au sein du laboratoire S2HEP en Sciences Expérimentales avec pour objectif de caractériser les fonctions du Récit dans les apprentissages scientifiques. Notre travail de thèse visait à étendre cette approche aux mathématiques et plus précisément à en caractériser les fonctions dans le cadre d'une activité de résolution de problèmes. En nous appuyant sur les travaux menés au S2HEP ainsi que sur les perspectives ouvertes par notre mémoire de Master (Moulin, 2010), nous avons fait le postulat initial que l'acte de construction et de production d'un récit permet à l'élève, sous certaines conditions, la prise en charge ou la mobilisation de connaissances, la construction de nouvelles connaissances ainsi que la (re)structuration des connaissances anciennes et nouvelles. Ce postulat a amené un choix épistémologique particulier dans notre approche : Nous intéresser au Récit non pas en tant qu'« objet matériel » c'est à dire un texte déjà construit (respectant des caractéristiques de structure et de forme singulières) qu'il est possible de donner à étudier à des élèves, mais en nous intéressant au Récit en tant que « mode de pensée » dans son acte de construction. Comme le souligne Bruner, « il est [en effet] possible de distinguer avec précision ce qui appartient au mode de pensée narratif de ce qui est texte ou discours narratif » (Bruner, 2008, p. 166). Avec cette distinction nous envisageons l'inscription du Récit dans le milieu didactique comme un outil permettant aux élèves de mobiliser, dans l'élaboration de leur raisonnement, des processus heuristiques et structurants inhérents à la construction d'un récit. Confronté à une *situation problématique*, c'est à dire un problème de mathématiques ou toute autre situation conduisant à mobiliser des connaissances mathématiques (pour répondre à une question ou produire une explication), l'élève peut s'engager, ou être amené à s'engager, dans la production d'un récit. Nous faisons l'hypothèse que cette production de récit (qu'elle soit naturelle ou imposée) dans le cadre d'une activité de résolution de problèmes, peut participer à la production du raisonnement, à sa structuration et sa justification.

Dans ce texte, nous traitons tout d'abord les aspects théoriques de cette hypothèse en proposant une modélisation des objets « Problème » et « Récit » qui nous permet d'anticiper sur l'action potentielle du Récit sur le milieu didactique (Brousseau, 1990). En nous appuyant sur les travaux de Scardamalia & Bereiter (1987, 1998), nous caractérisons un « espace de transfert de processus » entre deux activités a priori différentes : la construction d'un récit et la résolution d'un problème. Nous mettons ainsi en évidence la possibilité d'inscrire et de construire un raisonnement dans un espace de travail qui soit à la fois mathématique et rhétorique et la possibilité d'une interaction productive entre les deux activités voire une co-construction entre récit et raisonnement. Dans une seconde partie, nous présentons la mise à l'épreuve expérimentale de modèle en présentant quelques résultats significatifs de l'ingénierie didactique développé dans notre thèse. Nous analysons dans cette même partie les conditions et enjeux d'une rencontre entre Récit et Problème, construction de récit et résolution de problème.

## **TRAVAIL THEORIQUE : MODELISATION DES INTERACTIONS ENTRE CONSTRUCTION DE RECIT ET RESOLUTION DE PROBLEMES**

Pour introduire cette partie théorique, nous proposons une analyse du discours d'un élève de cycle 3 pendant la correction collective d'un travail de résolution de problèmes (Enoncé :

figure 1 ; Réponse de l'élève : Figure 2). Le discours de l'élève est proposé dans le tableau 1.

| Énoncé  | Règles du jeu  |
|---|--|
| Laura joue aux toupies.   | - 1 pour le joueur qui lance sa toupie en dehors du stadium  |
| Pendant le début de la partie, elle gagne 5 points.                             | - 3 pour le joueur qui touche le stadium durant la manche  |
| En tout elle a gagné 3 points. Que s'est-il passé pendant la fin de la partie ? | + 3 pour le joueur éjecte la toupie de son adversaire<br>+ 2 pour le joueur qui coince son adversaire en zone de pénalité<br>+ 1 pour le joueur dont la toupie tourne plus longtemps que celle de son adversaire tout en restant dans le stadium |

Figure 1 : Énoncé du problème

pendant 2, ~~pas~~ manche elle a  
 tisen à côté du stadium  
 car  $5 - 1 - 1 = 3$  et il n'y a pas  
 de -2 point

Figure 2 : Énoncé du problème et Réponse de l'élève

|   |   |
|---|---|
| 1 | Bah au début, moi je pensais que ça allait être en une manche, que ça allait être en fait ... puisque en tout on disait qu'elle [gagnait] trois points. |
| 2 | Puisque elle en avait cinq au début. Et ensuite elle en avait trois, elle perd deux points donc.  |
| 3 | Et puisque y a pas dans la règle moins deux points y a que un ou moins trois (...) Donc ensuite moi j'ai dit qu'il fallait faire en deux manches,       |
| 4 | deux fois en tirant à coté du stadium comme ça, ça fait moins deux ».   |

Tableau 1 : Transcription du discours de l'élève

Le raisonnement décrit ici débute par une réflexion centrée sur des aspects relatifs au récit (Tableau 1 - Ligne 1) : l'énoncé « en tout elle a gagné 3 points » suggère à l'élève une fin de partie en une étape. En conservant cette idée d'une étape unique, l'élève s'engage ensuite au calcul de la valeur de la transformation (Ligne 2). Il s'éloigne ainsi du contexte de la situation et du récit pour s'engager dans un travail mathématique et déterminer la transformation en jeu. Il revient ensuite au récit (Ligne 3) en s'attachant à déterminer les événements permettant cette perte effective de deux points et se rend compte qu'il n'est pas possible de la réaliser en une seule étape. Ce travail qui ne relève pas directement des mathématiques et qui met en jeu uniquement des événements relatifs au récit amène l'élève à modifier son idée initiale et d'envisager deux manches pour la fin de la partie. Enfin (Ligne 4), il réinvestit le domaine mathématique pour valider « comme ça, ça fait moins deux » et conclure.

Avec cet exemple nous voulions mettre en évidence la circulation de l'élève entre deux espaces de travail distincts pour résoudre le problème<sup>2</sup>:

- un espace relatif aux savoirs mathématiques, appelé *espace problème du contenu* ;
- un espace relatif aux événements du récit, appelé *espace problème rhétorique*.

Ces allers-retours (entre l'espace du contenu et l'espace rhétorique) conduisent à une circulation de connaissances d'un espace à l'autre. Par conséquent, une connaissance mathématique relative à l'espace du contenu, peut-être mobilisée, voire transformée sous certaines conditions, dans l'espace rhétorique (et inversement). Les travaux de Scardamalia et Bereiter (1998), sur lesquels nous nous sommes appuyés pour construire notre modèle théorique, proposent une modélisation de ces transferts nommés de processus de *mobilisation* et de *transformation des connaissances*.

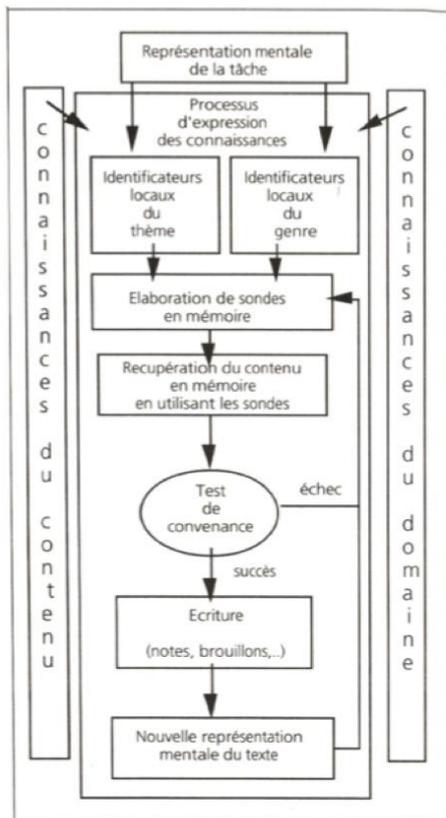
<sup>2</sup> Dans ce texte, l'expression *espace problème (rhétorique ou de contenu)* écrite en italique désigne l'espace problème tel qu'il est défini dans les travaux de Scardamalia & Bereiter (1998). Le mot Problème (avec une majuscule désignera l'objet conceptuel (théorique) en symétrique du mot Récit. Le mot problème (sans majuscule) désignera un problème particulier ou bien fera référence au sens commun du mot problème.

## Modèle de transformation des connaissances (Scardamalia & Bereiter, 1998)

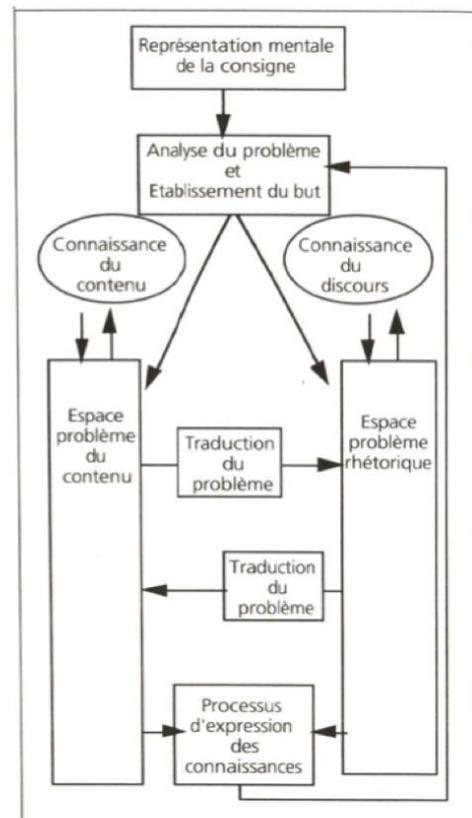
Les travaux de Scardamalia et Bereiter (1987, 1998) analysent les processus mis en place par des rédacteurs, experts et non experts, dans le cadre de la rédaction d'un texte. En observant les pratiques des rédacteurs, les deux auteurs ont caractérisé deux espaces de travail : *L'espace problème rhétorique*, relatif au texte en cours de rédaction, et *l'espace problème du contenu* relatif au domaine de connaissances en jeu.

[La] caractéristique principale est l'existence de deux *espaces-problèmes* interconnectés, un espace qui concerne les problèmes de la connaissance du domaine (l'espace du contenu) et l'autre (l'espace rhétorique) concernant les problèmes relatifs au texte en cours de rédaction (Scardamalia & Bereiter, 1998, p. 31).

Les analyses menées par les auteurs montrent une interaction différente entre ces deux espaces qui est fonction du niveau d'expertise du rédacteur. Dans le cas d'un rédacteur non expert, les connaissances relatives au contenu sont simplement *mobilisées* pour être exprimées dans le texte (Modèle *d'expression des connaissances*, figure 3). Dans le cadre d'un fonctionnement expert, les processus de rédaction induisent une transformation des connaissances dans les deux espaces (Modèle de *transformation des connaissances*, figure 4).



**Figure 3 :** Modèle d'expression des connaissances (Scardamalia & Bereiter, 1998)



**Figure 4 :** Modèle de transformation des connaissances (Scardamalia & Bereiter, 1998)

Plus concrètement, tout problème local de l'un des deux *espaces problèmes* peut se transférer (moyennant transformation) à l'autre espace et y être résolu. Les résultats obtenus (grâce aux processus cognitifs et autres mis en œuvre pour la résolution) peuvent être transférés à nouveau vers *l'espace problème* initial (moyennant à nouveau une éventuelle transformation). Parmi les illustrations proposées par les auteurs nous pouvons citer, par exemple, que « la nécessité rhétorique de construire une transition reliant des sous-thèmes peut entraîner la

découverte d'une relation préalablement non distinguée » (*Ibid.*, p. 33). En effet, dans le cadre de la rédaction d'un texte, un rédacteur peut-être amené à proposer des transitions construites notamment via la proposition de mots de liaison. La nécessité de proposer le mot de liaison le plus adéquat ou le plus pertinent, peut conduire le rédacteur à réinterroger ses connaissances dans le domaine du contenu. Par conséquent il devra réévaluer les relations entre les deux objets de contenu concernés et ainsi transformer sa connaissance de ces deux objets via la découverte ou l'approfondissement d'une relation.

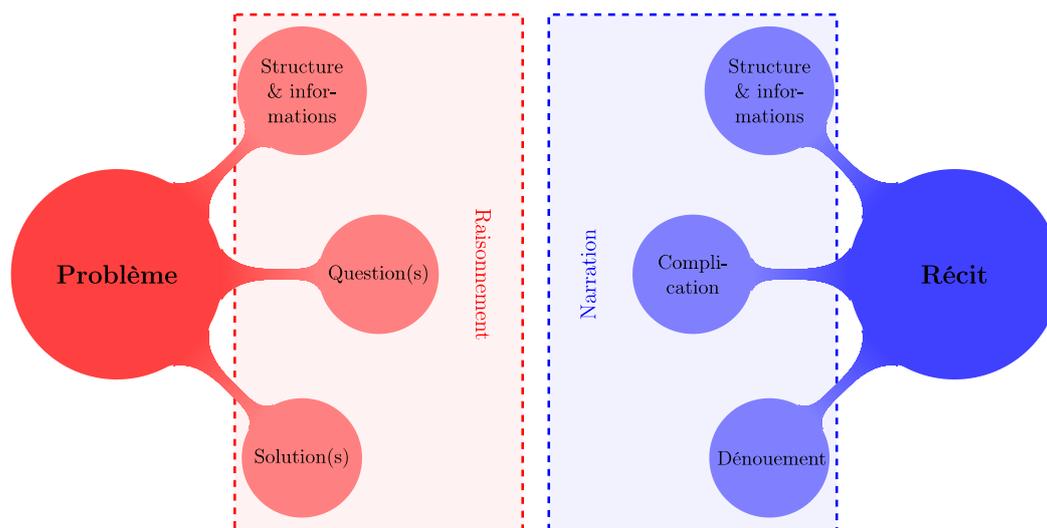
Ces travaux et plus particulièrement ce modèle de transformation des connaissances nous ont permis d'envisager l'interaction entre *l'espace problème* du Récit et *l'espace problème du contenu* relatif au Problème de Mathématiques via la possibilité d'un transfert de connaissances et de processus d'un espace à l'autre (une fois ces espaces convenablement définis dans le point suivant) et d'une co-construction entre récit et raisonnement. Pour cela, nous avons modélisé de manière symétrique les objets Problème et Récit, via la mise en évidence de trois composantes similaires, pour définir nos deux espaces problèmes et ainsi construire notre modèle afin de définir un espace de transfert de processus entre l'activité de résolution de problème et de rédaction d'un récit.

### **Définition des *espaces problèmes* du Problème et du Récit**

L'objectif de notre travail de modélisation était de pouvoir anticiper sur les interactions possibles entre la construction d'un récit et d'un raisonnement dans une même situation. Dans ce but, nous avons retenu trois composantes symétriques pour caractériser structurellement nos *espaces problèmes* (Moulin, 2014, p. 129) :

- **La structure** interne qui apparaît (sans être forcément entièrement définie) au travers de la donnée des **informations explicites** et de leurs relations (temporelles, logiques, etc.). Dans un récit, une part importante de ces informations peut être proposée lors de l'exposé de l'état initial, dans un problème scolaire elles sont présentées dans l'énoncé. Les **informations implicites** qui complètent la situation sont à déterminer par le résolveur lors de la résolution du problème et par le récepteur du texte lors de sa lecture du récit.
- **L'élément problématique** qui est à l'origine de la construction du problème et du récit. Il est généralement présenté sous forme d'une ou plusieurs **questions** dans un problème scolaire. Il apparaît sous forme d'une **complication** grâce un élément perturbateur dans le récit et permet la construction de l'intrigue.
- **Le(s) élément(s) de solution**, construits en réponse à l'élément interrogatif. Il(s) consiste(nt) en la résolution de l'intrigue et à un état final stable, le **dénouement**, dans un récit et à la (les) réponse(s) aux questions du problème lorsqu'elle(s) existe(nt), la (les) **solution(s)**.

La construction de cette modélisation en symétrique (figure 5) est développée dans les chapitres 5, 6 et 8 de notre travail de thèse.



**Figure 5 : Composantes des objets Problème et Récit**

L’inscription dans le cadre développé par Scardamalia et Bereiter (1998) nous a conduits à associer ces trois composantes aux différents processus de traitement qui leur sont liés afin de définir nos deux *espaces problème*. En effet, dans le modèle de Scardamalia et Bereiter (Figure 4), les processus développés dans chaque *espace problème* (considérés comme des réponses à des problèmes locaux rhétoriques traduits pour être transformés en problèmes de l’*espace du contenu* ou inversement) sont à l’origine de la transformation des connaissances du rédacteur. La définition de nos deux *espaces problème* intègre donc ces processus.

Dans notre cas, du côté du Problème, ces processus s’inscrivent dans une activité globale de résolution de problème via la construction d’un raisonnement et dans une activité d’élaboration d’un texte via l’acte narratif. En référence aux travaux de Polya (1945, 1994), qui mettent en évidence les aspects heuristiques de l’activité de résolution de problèmes, nous avons mis en évidence trois type de processus du côté de l’*espace problème* du Problème (en relation avec la caractérisation des fonctions du Récit exposées ci-après) :

- **Des processus « de structuration et de modélisation » relatifs en particulier au traitement de la structure et des informations** : Dans notre approche de l’activité de résolution de problèmes, nous avons considéré que la détermination de l’ensemble des relations entre les objets mathématiques en jeu était équivalente à la résolution du problème. Ainsi, nous avons qualifié de « processus de structuration » l’ensemble des processus permettant la caractérisation (en terme de propriétés et / ou de mesure et de valeurs) des objets en jeu et de leurs différentes relations. Les processus permettant de représenter (mathématiquement ou schématiquement) la situation et de faire évoluer (au fil de la résolution du problème) ces représentations ont été considérés dans notre travail comme des « processus de modélisation ».
- **Des processus « d’élaboration et de problématisation » participant au traitement de la question** : L’élaboration de conjectures, le découpage du problème en sous-problèmes pour produire de nouvelles informations (et compléter la connaissance de la situation), la recherche d’un modèle de résolution connu ou l’élaboration d’un nouveau modèle via l’articulation de sous-problèmes sont autant de démarches que nous avons qualifiées de « processus d’élaboration et de problématisation ».
- **Des processus « calculatoires » et processus « d’explication et d’argumentation » participant à la détermination en termes de valeurs de la (des) solution(s) de la preuve de sa (leur) validité** : Au delà de la détermination de la valeur de la solution

via des processus « calculatoires » (l'application d'un algorithme, la résolution d'une équation, etc.), la résolution d'un problème nécessite la justification de la solution trouvée. Que ce soit via la rédaction d'une preuve mettant en jeu arguments logiques et théorèmes ou simplement via la production d'explications permettant de justifier la validité de solution par rapport aux contraintes de la situation le résolveur du problème s'engage dans des processus « d'explication et d'argumentation ».

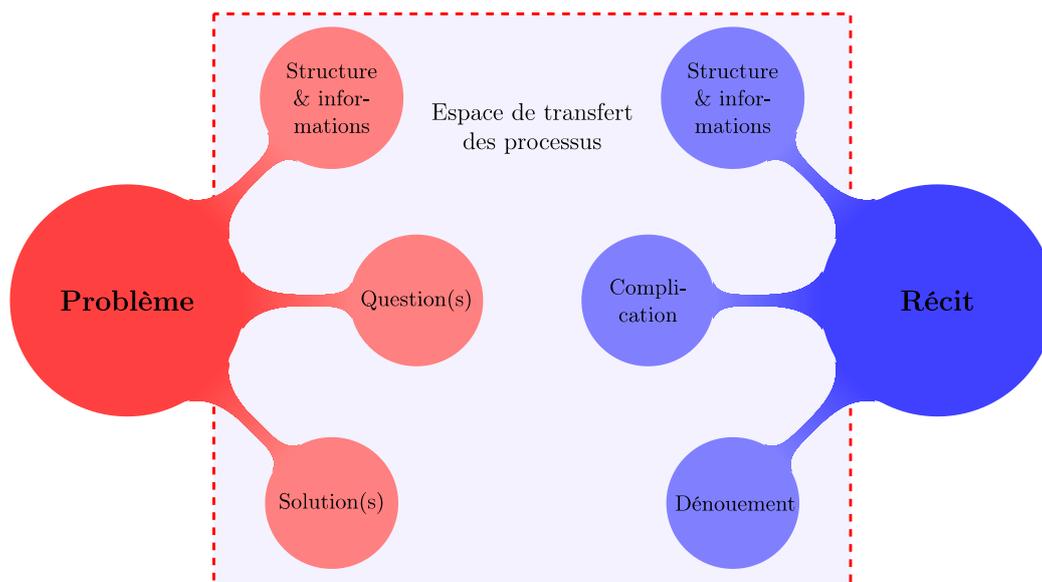
Du côté du Récit, nous nous sommes intéressés à l'ensemble des processus mis en place par un auteur dans l'acte de construction de ce récit (la narration). En considérant le Récit comme un mode de pensée et en référence aux travaux de Bruner (2005, 2008) et Eco (1985, 1996) nous avons pu inscrire ces processus dans trois fonctions spécifiques du Récit :

- **Fonction structurante :** La mise en Récit permet de prendre en charge des objets et facilite leur mise en relation. En conduisant à la construction d'un tout cohérent (le *holos*), le récit peut structurer des connaissances et permettre l'articulation des phénomènes. Il facilite ainsi la compréhension de systèmes complexes.
- **Fonction problématisante :** Il n'y a pas de Récit sans intrigue et donc sans problématisation. La mise en place de l'intrigue, via un élément perturbateur, peut être comparée à la construction d'un problème. Elle invite à reconsidérer les connaissances en jeu et à adopter une démarche de problématisation.
- **Fonction explicative :** Le Récit, à travers la fiction, permet de construire des explications. Celles-ci s'inscrivent dans des *mondes possibles* qui prennent en charge toutes les contraintes portées par le récit et par la situation de référence. Les explications produites respectent par conséquent ces mêmes **contraintes**.

C'est la mise en évidence de la relation particulière de chacune de ces trois fonctions à une composante spécifique de l'objet Récit qui nous a conduit à classer les processus de résolution de problème de manière similaire dans notre définition de l'*espace problème* du Problème. Dans la suite de ce texte, pour plus de légèreté dans l'écriture et en accord avec les dénominations de Scardamalia et Bereiter, l'*espace problème* du Problème sera appelé *espace problème du contenu* et l'*espace problème* du Récit sera appelé *espace problème rhétorique*.

## **Espace de transfert des processus et inscription du Récit dans le milieu didactique**

Le modèle proposé par Scardamalia et Bereiter nous a permis d'envisager la co-construction entre raisonnement et récit comme un transfert des processus de résolution de problèmes de l'*espace problème du contenu* vers l'*espace problème rhétorique* (et inversement) grâce la possibilité de *traduction* de chaque problème local (à l'origine du processus) d'un *espace problème* à l'autre. La mise en évidence de ce que nous avons appelé un « espace de transfert de processus » (Figure 6) dans le cadre d'une activité de résolution de problème de Mathématiques apporte aux élèves un nouvel espace de travail : l'*espace problème* du Récit. Cet *espace problème rhétorique*, dans lequel les élèves vont pouvoir développer certains processus est structuré par une logique narrative qu'ils maîtrisent. Cette maîtrise autorise la mise en place de processus plus complexes que ceux qui pourraient être développés dans l'*espace du problème du contenu* qui est également structuré mais qui est régi par une logique mathématique moins maîtrisée des élèves. Dès l'âge de six ans, les enfants sont en effet capables de produire des structures logiques narratives aussi complexes que celles d'un adulte (Fayol, 1985) ce qui n'est pas le cas en Mathématiques.



**Figure 6 : Espace de transfert des processus**

Ainsi, en accord avec le *modèle de transformation des connaissances*, tout problème de *l'espace problème du contenu* peut donc (théoriquement) être *traduit* dans *l'espace problème rhétorique* et y trouver une solution pertinente via la mise en place d'un ou plusieurs processus (et inversement). Cette solution (qui est en fait une nouvelle connaissance, une connaissance transformée, une mise en évidence ou caractérisation d'une relation, etc.) peut ensuite être réinvestie dans *l'espace du contenu* directement ou moyennant une réinterprétation. Le travail théorique développé dans notre travail de thèse et présenté ici, nous permet donc de mettre en évidence l'existence, sous certaines conditions, d'un « espace de transfert de processus » entre Problème et Récit et, de fait, la possibilité pour les élèves de s'appuyer sur des processus relatifs à la narration et aux fonctions du Récit pour résoudre un problème de Mathématiques.

L'inscription du Récit dans le milieu didactique que nous avons proposée dans notre thèse a pour donc pour objectif de mettre à disposition des élèves un milieu didactique plus riche et un espace de travail supplémentaire. Même si c'est généralement « *la propriété de milieu antagoniste à l'élève qui est mise en avant* » (Hersant, 2010, p. 44), le milieu possède en fait trois propriétés fondamentales : il est rétroactif, proactif et contraignant. C'est la propriété de contraignances qui nous a particulièrement intéressée dans notre travail car elle est essentielle pour le développement de situations de preuves et de raisonnement. Après avoir souligné la faiblesse de plusieurs situations dans ce domaine, Hersant propose deux manières d'enrichir le milieu didactique (p. 45-46) pour favoriser sa contraignances : l'enrichissement du registre empirique et l'enrichissement du registre des nécessités. Le Récit de par ses caractéristiques peut, en tant qu'acte de pensée, participer à l'enrichissement de ces deux registres :

- **Registre empirique** : Le Récit, via la fiction, amène la possibilité de construire des mondes alternatifs. Ceux-ci peuvent mettre en jeu une situation réelle légèrement modifiée, une situation fictive ou une situation plus intermédiaire. Dans tous les cas, les mondes possibles engendrés par la construction d'un récit enrichissent le registre empirique porté par le milieu. En effet, même en proposant une situation fictive, le récit est porteur d'un exemple qui peut être considéré et analysé et ce même s'il ne s'est pas effectivement réalisé. Il est ainsi possible de s'affranchir de la réalité, tout en restant dans un monde concret, voire sensible, et respectant les caractéristiques (mathématiques) de la situation.

- Registre des nécessités : Le Récit est un objet structuré dont la construction est régie par une organisation nécessairement logique. Lorsque celle-ci n'est pas conforme à la réalité, les variations sont nécessairement explicites. Tout ce qui n'est pas présenté comme discordant est analogue à la réalité. De fait, les mondes possibles que nous évoquions ci-dessus sont soumis à la logique du récit mais aussi à celle de la situation dans laquelle ils sont construits. Chaque décision prise dans la construction du récit peut donc permettre de considérer ou de déterminer une nécessité relative à la situation. La création de nouveaux récits participe de fait à l'enrichissement du registre des nécessités.

Le Récit peut également, dans une situation de résolution de problème de Mathématiques, favoriser la circulation de l'élève entre les différentes couches du milieu didactique mises en évidence dans les travaux de Margolinas (1998) : le *milieu matériel*, le *milieu objectif* et le *milieu de référence*. L'élève placé face à un énoncé proposant ce que nous avons appelé une situation problématique (avec une question qui lui est posée), doit opérer un passage du *milieu matériel* (composé des objets matériels et / ou conceptuels proposés dans la situation et l'énoncé) vers un *milieu objectif* en établissant un rapport localement stable avec les objets du *milieu matériel* (Margolinas, 1998). En incluant des objets mathématiques (proposés dans l'énoncé) dans la construction d'un récit, l'élève se positionne par rapport à eux en les sélectionnant et en les organisant. Il peut ainsi construire un rapport stabilisé avec ces objets. C'est alors la fonction de structuration du Récit qui entre en jeu et qui peut favoriser le passage du *milieu matériel* vers le *milieu objectif*. Il ne s'agit pas de proposer à l'élève d'établir un récit global incluant toutes les informations et objets mais d'imaginer une multitude de récits, en fonction de différentes contraintes de préférence mathématiques, relatifs aux différents objets en jeu. Le passage vers le *milieu de référence* implique la mise en évidence de similitudes et / ou d'incohérences dans la structure du milieu afin d'en repérer les propriétés. La comparaison et l'analyse de ces différents récits, qu'elle soit structurelle ou qu'elle prenne en charge les relations des objets en jeu, peut permettre de repérer ces propriétés et participer à la détermination de la structure mathématique proposée dans l'énoncé du problème. La démarche de propositions et de tests (à ajuster en fonction des rétroactions du milieu) adossée à une construction de récit (contraint et structuré par nature) va permettre à l'élève de s'affranchir du milieu matériel, de s'éloigner du milieu objectif pour en déterminer les contraintes. Les fonctions de problématisation et d'explication en particulier favoriseront ainsi le passage du *milieu objectif* vers le *milieu de référence*.

## Conclusion sur le modèle théorique

La construction de ce modèle d'interactions entre construction de Récit et résolution de Problème ainsi défini nous a permis de mettre en évidence un « espace de transfert de processus » et de nous engager dans une série d'hypothèses mises à l'épreuve dans la partie expérimentale de notre travail de thèse (Moulin, 2014, p. 88 & 139) :

- Sous certaines conditions, l'introduction du Récit dans le traitement d'une *situation problématique*<sup>3</sup> amène une interaction entre la narration (comme activité de production de récit) et la construction d'un raisonnement. L'élaboration d'un récit visant à répondre à une *situation problématique* peut être un élément déclencheur et structurant du raisonnement. Autrement dit, le Récit est un outil problématisant qui permet également de produire une argumentation en vue de

---

<sup>3</sup> Dans notre thèse, nous avons appelé situation problématique toute situation mise en jeu dans un problème de mathématiques via la question posée dans l'énoncé ou tout sous problème inhérent à cette même question.

justifier la solution trouvée. À un second niveau, les interactions entre les deux *espaces problèmes* (*espace rhétorique* relatif au Récit et *espace du contenu* relatif au Problème de mathématiques), via le transfert de processus mis en évidence dans notre modèle, permettent la mobilisation de connaissances mathématiques et compétences mathématiques et transversales nécessaires à la résolution et peuvent induire une transformation des ces mêmes connaissances afin de permettre la résolution effective du problème.

- Le Récit enrichit, notamment grâce à la fiction, le registre empirique grâce aux possibles, réels et fictionnels, qu'il permet d'exprimer. Le Récit, de par son caractère structurant, contribue à la définition de la structure de la situation par l'élève en lui permettant de déterminer et d'exprimer les contraintes en jeu. Il participe, de ce fait, à la dévolution de la preuve. De plus, sous certaines conditions, le Récit participe, en tant que support de pensée, à la circulation de l'élève entre les différents niveaux structurels du milieu didactique (milieu matériel, milieu objectif et milieu de référence). Ces deux paramètres (enrichissement et circulation) sont essentiels pour conduire l'élève à entrer dans un processus de preuve. Enfin, en tant qu'objet de communication, le Récit prolonge l'action du milieu en apportant la possibilité d'être mis à l'épreuve des pairs et donc d'être soumis à une validation collective.

## **TRAVAIL EXPERIMENTAL : INSCRIPTION DU RECIT DANS LE MILIEU DIDACTIQUE ET RESOLUTION DE PROBLEMES**

Afin de tester ces hypothèses, nous avons développé un travail expérimental reposant sur la méthodologie de l'ingénierie didactique (Artigue, 1988). La situation proposée, devait permettre l'entrée dans une démarche d'écriture de récit et mettre en jeu des objets et des problèmes de mathématiques. Nous avons proposé à six classes de cycle 3 une séquence<sup>4</sup> construite autour d'un jeu de toupies dont les règles sont présentées (Figure 7) :

La partie est découpée en manches. Au signal, les deux joueurs lancent leur toupie dans le stadium en même temps. Si un joueur lance sa toupie à coté du stadium, il perd la manche. Si les deux toupies atterrissent dans le stadium, c'est le début de la manche. La manche se termine dès que :

1. un joueur touche le stadium ;
2. une des toupies n'est plus dans le stadium ;
3. une des toupies est en zone de pénalité ;
4. une des toupies ne tourne plus.

Le premier joueur qui se retrouve dans une de ces situations perd la manche. S'il n'est pas possible de déterminer un perdant, et par conséquent un vainqueur, la manche est annulée puis rejouée. Cela peut être le cas si les deux toupies arrêtent de tourner en même temps par exemple. Une fois la manche terminée, des points sont distribués ou retirés à un seul des deux joueurs. Pour cela, il faut attribuer les points en appliquant les règles suivantes dans l'ordre ci-dessous (dès qu'un point est distribué ou retiré, on passe à la manche suivante) :

- 1 pour le joueur qui lance sa toupie à côté du stadium ;
- 3 pour le joueur qui touche le stadium pendant la manche ;
- + 3 pour le joueur qui éjecte la toupie de son adversaire hors du stadium ;
- + 2 pour le joueur qui coince la toupie adverse dans la zone de pénalité ;
- + 1 pour le joueur dont la toupie tourne plus longtemps que celle de son adversaire.

Il n'y a donc qu'un seul joueur qui gagne ou perd des points à chaque manche. Il est également possible d'avoir un score négatif. La partie se termine lorsqu'un joueur atteint 7 points (ou plus). Le premier joueur qui obtient un score supérieur ou égal à 7 points gagne la partie.

<sup>4</sup> Les six classes ont suivi des séquences similaires mais avec des conditions différentes dans certaines classes que nous détaillerons en note pour chaque activité présentée.

## Figure 7 : Règles du jeu

### Production de récits à partir de la situation de jeu

Cette situation permet effectivement aux élèves d'entrer dans une activité de production de récit. Après avoir joué une première partie nous leur avons demandé de raconter la partie qu'ils avaient jouée. Ce premier type de récit descriptif (exemple Figure 8), permet de décrire, sous une forme structurée, une succession d'événements et d'y associer des scores.

Simon a marqué 1 point car sa toupie a tourné plus longtemps, ensuite c'est la même chose. Après Antoine a marqué 1 point car la toupie de Simon est tombée avant la sienne. Après, Simon a marqué 2 points en envoyant la toupie d'Antoine en zone de pénalité. Mais, Simon a marqué 1 point en faisant tourner sa toupie plus longtemps que celle d'Antoine. Ensuite, Antoine marqua 2 fois d'affilée 1 point et après, ce fut le contraire. Simon gagna donc 7-3.

Fin

Figure 8 : Exemple de récit descriptif

On repère dans ce texte des marqueurs de récit tels que des marqueurs de temps (éléments soulignés), le mot « fin », des personnages (Simon, Antoine). Il n'y a pas ici d'action du Récit sur le milieu didactique car il n'y a pas de problème mathématique en jeu. Les points et les scores sont inclus dans le récit, les règles du jeu sont prises en charge automatiquement. Il s'agit d'une première étape visant à l'entrée des élèves dans une démarche d'écriture de récit.

Pour inscrire réellement le Récit dans le milieu didactique, nous avons proposé par la suite aux élèves de construire des récits de parties qui n'avaient pas eu lieu. Il s'agit alors de récits d'anticipation qui, même s'ils ne relatent pas des parties réelles, doivent se conformer aux règles du jeu. Les déroulements des manches correspondent toujours aux événements du récit, mais les points et les scores deviennent des objets mathématiques à part entière et les règles du jeu deviennent une axiomatique locale au sens de Tarski (1960). En situation de résolution de problème, c'est à dire à partir du moment où l'on impose une contrainte mathématique au récit d'anticipation (un score final, un nombre de manches, etc.) le Récit est inscrit dans le milieu didactique. La résolution du problème et la construction du récit et qui se font simultanément imposent (non nécessairement dans cet ordre) l'analyse des contraintes mathématiques de la situation, la construction d'une succession d'événements permettant d'expliquer la situation problématique, la vérification de l'adéquation de cette solution avec les contraintes mathématiques et événementielles de la situation.

Dans notre travail expérimental, nous avons proposé aux élèves deux types de situations de résolution de problèmes : des situations dans lesquelles le Récit était explicitement convoqué par la consigne et d'autres où le récit ne l'était pas. Dans les deux points suivants nous proposons d'analyser au travers du modèle d'interactions que nous avons présenté dans la

partie théorique le rôle du Récit dans ces deux types de situations.

### **Exemple d'action du Récit sur le milieu didactique (structuration et explication) dans une situation où le récit est explicitement convoqué par la consigne**

Nous avons proposé aux élèves de résoudre des problèmes mettant en jeu des objets mathématiques dans le cadre du récit. Nous leur avons fourni un début de récit qu'ils devaient compléter par rapport à différentes contraintes sur le score final du narrateur :

*Je joue contre Camille. À la première manche, ma toupie a tourné plus longtemps donc j'ai gagné 1 point. À la deuxième manche, c'était l'inverse, c'est Camille qui a marqué 1 point parce que ma toupie s'est arrêtée en premier. On est à égalité. À la manche suivante, j'ai lancé ma toupie plus fort et j'ai réussi à coincer la toupie de Camille dans la zone de pénalité. J'ai gagné 2 points.*

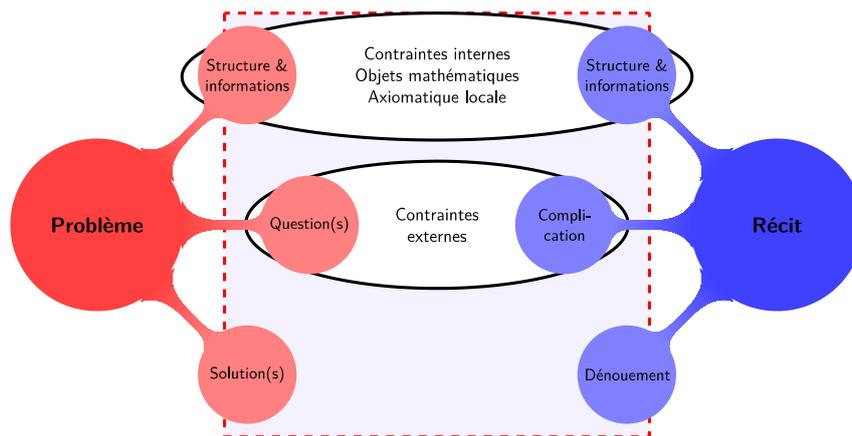
**Figure 9 : Récit initial**

La donnée de cette situation et de la question « complète le récit pour que Laura gagne la partie avec un score de ... points » place les élèves dans une situation de résolution de problème. D'un point de vue mathématique, ils doivent déterminer une transformation permettant de passer d'un état initial de 3 points à un état final de 7, 8, 9 ou 10 points selon la contrainte proposée. L'objectif de la tâche était de permettre aux élèves d'analyser la structure mathématique de la situation (une analyse exhaustive, sous forme d'une axiomatique locale, est proposée dans le chapitre 9 de notre thèse). Ils devaient en particulier déterminer qu'il est nécessaire de gagner au moins 2 points à la dernière manche pour atteindre un score de 8 points, qu'il est nécessaire d'avoir 6 points puis de gagner 3 points d'un coup pour atteindre un score de 9 points et enfin qu'il n'est pas possible d'atteindre un score de 10 points<sup>5</sup>.

L'analyse cette tâche de résolution de problème au travers de notre modèle d'interaction (Figure 10) nous amène à considérer le récit à compléter comme étant la donnée d'une structure d'informations comprenant des objets mathématiques reliés par une axiomatique locale. La situation ainsi définie est commune au récit et au problème et donc à *l'espace problème du contenu* et à *l'espace problème rhétorique*. Notre contrainte externe, la question du problème mettant en jeu score final du personnage, correspond également à la complication dans *l'espace problème* du Récit.

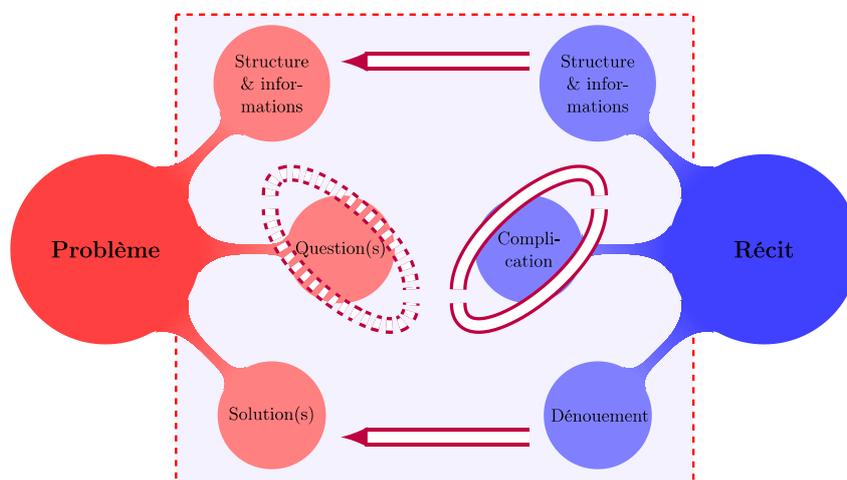
---

<sup>5</sup> Lors de la première expérimentation (classe 1), nous avons proposé aux élèves un récit qui se terminait (provisoirement) sur un score de 6 à 1. Les élèves n'avaient donc plus qu'une étape à déterminer ce qui a eu pour conséquence de fermer la situation et les a empêché de mettre en évidence le passage crucial au score de 6 points. Dans les classes 4 et 5, les enseignants ont autorisé les élèves qui avaient des difficultés à écrire à proposer un récit « raccourci » ne comportant que les scores (sans décrire les événements). Nous avons montré dans notre thèse que cela a été un frein à l'analyse de la structure mathématique de la situation.



**Figure 10 : Analyse des composantes**

Pour résoudre le problème mathématique proposé, il est nécessaire d'opérer un travail dans *l'espace problème rhétorique*. L'élève ne doit pas seulement déterminer la valeur de la transformation, il doit également déterminer des événements permettant cette transformation. Ce travail, qui est à l'origine un problème de *l'espace rhétorique*, conduit l'élève à analyser la structure et la situation problématique en relation avec les règles du jeu (afin de trouver une succession d'évènements permettant d'atteindre l'état final tout en respectant ces règles). Il amène, de fait, l'élève à analyser la situation par rapport aux propriétés de l'axiomatique locale et, donc, d'un point de vue mathématique. Le problème initial, qui est avant tout un problème mathématique avec une question mathématique (Entouré en pointillés, Figure 11) est déplacé par la consigne « complète le récit » dans *l'espace rhétorique*. L'analyse de la situation dans *l'espace problème rhétorique* conduit à l'analyse de la situation dans *l'espace problème du contenu* (Flèche du haut, Figure 11) et la solution trouvée du point de vue des événements répond également au problème mathématique (Flèche du bas, Figure 11).



**Figure 11: Analyse des processus**

Plus concrètement, lorsque nous avons proposé aux élèves différentes contraintes sur le score du personnage, ils se sont engagés dans la production de *possibles explicatifs* (voire d'*impossibles explicatifs*), c'est à dire de récits permettant d'expliquer une situation problématique. Le cadre du Récit, qui impose une description des événements a amené les élèves à explorer du point de vue mathématique la situation et son axiomatique.

Ils ont par exemple pu repérer qu'il est nécessaire de gagner au moins 2 points à la dernière manche pour terminer une partie avec 8 points, ce qu'ils n'avaient pas réussi à déterminer

dans un premier temps<sup>6</sup> (Exemple : Figure 12).

Et quatrième manche, ma toupie a éjecté la toupie  
de Camille en dehors du stade donc j'ai eu 3 points.  
Et la cinquième manche, j'ai perdu 1 point car  
ma toupie est n'est pas rentré dans le stadium quand  
je l'ai lâché. Et la sixième manche, j'ai  
gagné 2 points en éjectant la toupie de  
Camille dans la zone de pénalité. J'ai donc  
gagné 8 à 1.

Figure 12 : Possible explicatif pour terminer avec 8 points

Ils ont également pu se rendre compte qu'il n'était pas possible de dépasser un score de 9 points (Figure 13) alors que beaucoup affirmaient initialement qu'il était possible de terminer une partie avec n'importe quel score supérieur à 7. Même après avoir construit un *impossible explicatif*, certains élèves mettent en évidence la prise en compte des contraintes mathématiques de la situation en proposant explicitement que leur personnage, même après avoir gagné ait envie de continuer à jouer.

J'ai trois points à 1. Je gagne 4 manche +4  
j'ai 7 points. après j'ai mis sa toupie en zone de  
pénalité. Plus qu'une manche. Après j'ai lancé  
ma toupie plus fort donc j'ai gagné  
On peut pas 9 points maximum

Figure 13 : Impossible explicatif pour terminer avec 10 points

Ces exemples mettent en évidence les fonctions de structuration et d'explication du Récit. La mise en récit permet aux élèves de prendre en charge les objets mathématiques et leur mise en relation (dans le but de produire le récit). Ce travail les amène en particulier à déterminer des contraintes mathématiques qui n'étaient pas explicites et qui restaient indisponibles pour les élèves dans un premier temps. Le récit a également conduit les élèves à envisager des mondes possibles et impossibles et ainsi à déterminer les contraintes qui les rendaient effectivement possibles et impossibles. La fonction d'explication du récit leur a permis de s'engager dans l'explicitation de contraintes mathématiques, voire pour certains d'entrer dans la production de preuves (Figure 14) ce qui n'était pas forcément attendu de la part d'élèves de cycle 3.

Ce n'est pas possible car quand on  
a 7 point on s'arrête. Donc si on a 5 point;  
le maximum de point est de 3 point;  $5+3=9$   
c'est donc impossible.

Ce n'est pas possible car le  
5 max est 7 et si elle a 5 et  
qu'elle en met 3 ça fait 9.

Figure 14: Exemples de justifications / preuves

D'une certaine manière, et en comparaison avec la tâche d'élaboration et justification de conjecture que nous présenterons dans le point suivant, cette tâche peut être assimilée à une

<sup>6</sup> En amont de cette activité, les élèves ont du produire des conjectures sur les scores que le vainqueur d'une partie peut atteindre, sur le nombre maximum de manches qu'il est possible de jouer et sur le nombre minimum de manches nécessaires pour terminer une partie (seconde tâche présentée dans cet article).

activité de validation / invalidation de conjectures proposées par la consigne grâce à la production d'un possible explicatif (tout en restant une activité de résolution de problèmes). Les processus de problématisation étaient en partie portés, ou du moins guidés, par la consigne : la conjecture était donnée et le moyen (l'exhibition par le récit d'un cas « ou ça marche » ou non) était également imposé. Le transfert de la question dans *l'espace problème du Récit* a permis aux élèves de s'engager dans l'exploration mathématique de la situation en s'appuyant sur des processus de problématisation également placés dans *l'espace heuristique*. Le problème résolu par les élèves était, en essence et initialement, un problème heuristique : Quelle suite d'événements proposer pour atteindre un état final donné ? L'appui sur des processus, maîtrisés, dans *l'espace problème du Récit*, a conduit à la nécessité pour les élèves de s'engager dans des processus mathématiques de structuration et d'explication tels que nous les avons définis.

### **Exemple d'action du Récit sur le milieu didactique (problématisation) dans une situation où le récit n'est pas convoqué par la consigne**

Le second type de situation que nous avons proposé aux élèves ne convoquait pas explicitement le récit. Nous leur avons demandé de proposer des conjectures sur l'axiomatique locale et la structure de la situation en nous intéressant particulièrement à :

- la valeur des scores possibles du vainqueur ;
- le nombre de manches minimum pour terminer une partie ;
- le nombre de manches maximum dans une partie.

Cette activité a été proposée aux élèves après qu'ils ont joué et raconté une première partie. Elle s'est donc déroulée (à l'écrit) en amont de la tâche présentée dans le point précédent et donc avant que les élèves élaborent les différents récits d'anticipation présentés ci-dessus. La principale différence est qu'ici les élèves n'ont pas d'indication sur l'état final qu'ils peuvent atteindre. Ils doivent donc s'engager, sans support imposé, dans une activité d'élaboration d'une conjecture, la tester, l'ajuster lorsque cela s'avère nécessaire et proposer une justification accompagnant la conjecture choisie. Les processus de problématisation sont ici au cœur du travail demandé à l'élève. Les conjectures des élèves ont été discutées à l'oral dans des séances ultérieures (après l'activité présentée dans le point précédent)<sup>7</sup>.

Concernant la première conjecture (sur les scores possibles du vainqueur) les élèves se sont engagés dans différentes procédures (exemples tableau 2) :

- Des procédures prenant appui sur une opération (une addition ou une multiplication) avec une analyse plus ou moins correcte de la situation avec des élèves qui semblent inscrire leurs processus de problématisation (et de structuration et d'explication) uniquement dans *l'espace problème du contenu* ;
- Des procédures basées sur la production d'un *possible explicatif*<sup>8</sup> qui conduit les élèves à s'engager dans des processus inhérents à *l'espace problème rhétorique* (avec une conjecture mathématique éventuellement construite dans *l'espace problème du contenu*). Certains ont également proposé plusieurs *possibles explicatifs* avec dans certains cas une base commune qui met en évidence le fait que l'élève a repéré un aspect crucial de la situation.
- D'autres approches sont également apparues avec des justifications basées sur le matériel, sur l'expérience des parties jouées ou encore sur les règles du jeu.

Les arguments avancés par les élèves sont majoritairement des preuves d'existence relatant

<sup>7</sup> Cette tâche a été proposée dans toutes les classes, seule la classe 1 n'a pas réalisé cette activité à l'écrit.

<sup>8</sup> C'est à dire d'un récit, d'une suite d'événements, permettant d'atteindre le score souhaité.

des parties se terminant avec des scores égaux à 7, 8 ou 9.

| Appui sur une opération   | Production d'un possible explicatif  | Production de plusieurs possibles explicatifs   |
|---|--|---|
| <p><i>Si le gagnant fait <math>3 + 3 + 2 + 3 = 12</math> donc il peut avoir 12 points.</i></p> <p><i>9 points c'est le maximum car si on éjecte de l'arène la toupie adverse 3 fois cela fait 9 car <math>3 \times 3 = 9</math></i></p> | <p><i>À la première manche la toupie de mon adversaire s'est arrêtée avant donc j'ai +1. À la deuxième manche j'ai coincé la toupie de mon adversaire à la zone de pénalité donc j'ai +2, à la troisième manche j'ai éjecté la toupie de mon adversaire donc +3. À la quatrième manche la toupie de mon adversaire ...</i></p> | <p><i>Le vainqueur peut avoir 9 points car s'il a 6 points et s'il éjecte l'autre toupie du stadium il gagne + 3 points donc il a 9 points. Le joueur peut avoir 8 points car s'il a 6 points et qu'il envoie la toupie de son adversaire dans la zone de pénalité il a gagné 8 points. Et enfin si le joueur a 6 points et qu'il gagne une manche il a 7 points.</i></p> |

**Tableau 2 : Exemples de justifications de conjectures**

Quantitativement, sur 113 élèves, une quinzaine seulement utilise des arguments mathématiques et / ou basés sur les règles du jeu et donc en s'appuyant des processus développés (*a priori* uniquement) dans *l'espace problème du contenu*. Plus de la moitié s'engage dans la production de possibles explicatifs grâce au récit, en donc en inscrivant (au moins en partie) leurs processus de problématisation dans *l'espace problème du Récit*, confirmant ainsi le penchant naturel pour ce dernier (souligné par Bruner, 2008). D'un point de vue qualitatif, cette seconde approche se révèle également efficace car elle amène :

- 85 % des 32 conjectures complètes,
- 60 % des 46 conjectures incomplètes,
- moins de 50 % des 27 conjectures fausses.

Dans l'objectif de proposer et de justifier des conjectures, ces élèves se sont engagés, sans que la consigne ne leur impose, dans la production de ces *possibles explicatifs*. Ces élèves ont ainsi construit leur raisonnement en mobilisant naturellement des processus relatifs à la production de Récit. La fonction de problématisation du Récit, qui entre en jeu dès lors que l'on cherche à construire un récit, a conduit ces élèves à questionner leur connaissance « sensible » de la situation (connaissance des règles du jeu et expérience d'une partie effectivement jouée) et à rechercher des caractéristiques mathématiques de la situation et des objets mathématiques qui y sont inscrits (*situation objective* en lien avec le *milieu objectif*). *L'espace problème du Récit*, en tant qu'espace de travail, a permis à ces élèves d'explorer la situation mathématique.

### **Prolongement de l'action du Récit sur le milieu didactique par le passage à l'oral**

Durant les phases de discussion en classe entière, le Récit en général et les récits construits dans les séances précédentes ou pendant la discussion elle-même sont devenus des supports pour l'argumentation. En tant qu'objet de communication et pouvant être partagé facilement, le Récit peut prolonger l'action du milieu en apportant la possibilité de mettre les récits produits (des *possibles explicatifs*) à l'épreuve des pairs. Les récits de parties enrichissent le *registre empirique* du milieu didactique commun aux élèves. Ils sont en effet partagés dans la classe et proposent des exemples concrets que les élèves intègrent au débat en les discutant et en les acceptant (car ils respectent et donc prennent en charge les contraintes mathématiques de la situation) comme des arguments convaincants. Dans notre travail de thèse, en analysant les transcriptions des phases de travail collectif, nous avons mis en évidence plusieurs utilisations du Récit par les élèves :

- Ils ont utilisé des récits de parties réelles, en y faisant référence, comme des exemples et des contre-exemples pour valider ou invalider des conjectures. Par exemple, l'idée

qu'une partie ne pouvait pas comporter plus de quatorze manches (le nombre de lignes de la feuille) a été réfutée par le fait que deux élèves de la classe ont lu leur récit de partie. À partir de ce récit, les élèves ont proposé de compléter leur récit pour proposer des parties de plus en plus longues en repérant et en « réutilisant » les événements qui ont été à l'origine de la longueur de la partie.

- Les élèves ont également construit durant les débats des récits de parties imaginaires afin de convaincre leurs pairs qu'une conjecture était vraie. Par exemple, toujours lorsque les élèves tentaient de déterminer le nombre de manches maximum qu'il était possible de jouer dans une partie, ils ont utilisé l'inscription dans la fiction pour s'affranchir de la réalité. Même si « il n'y a pas le temps », même si « dans la réalité au bout d'un moment y en a un qui gagne » il est possible de construire et de raconter une partie infinie. En voici plusieurs exemples construits par les élèves qui ont convaincu leurs camarades (proposition finale) :
  - Il gagne trois points en éjectant et après il touche le stadium, il a zéro (...) Il tourne plus longtemps et après il lance à coté.
  - Parce qu'à chaque fois on fait moins trois.
  - Si on gagne un point et si on en perd un ; ça fait plus un moins un.
  - Plus trois, moins un, plus deux (...) il a quatre, moins trois et moins un et il se retrouve à zéro.

Ces *possibles explicatifs*, tout en s'éloignant des situations réelles, ont conduit les élèves à explorer les caractéristiques mathématiques de la situation. Dans un premier temps, ils se sont appuyés sur des processus de *l'espace problème du Récit*, puis sur des processus de *l'espace du contenu*. Les élèves se sont appuyés sur des constructions via les événements du récit, rattachés aux scores de manière ultérieure. Dans un second temps, les élèves se sont détachés de ces événements de Récit, les processus relatifs à *l'espace problème rhétorique* ont été réduits, voire (dans le cas des trois dernières propositions) éliminés (du moins dans l'expression orale). C'est ici la fonction explicative du Récit qui est au cœur de l'activité. En construisant des *possibles explicatifs*, et plus précisément en vérifiant individuellement et collectivement qu'ils sont valides par rapport aux contraintes mathématiques, les élèves établissent un rapport objectif avec les objets mathématiques en jeu et enrichissent le *registre des nécessités* du milieu didactique. Ils mettent en évidence les régularités, les points clefs de la situation et s'engagent dans des processus mettant en évidence leur inscription dans le *milieu objectif* et pour certain dans le *milieu de référence*.

## Conclusion sur l'expérimentation

L'expérimentation menée nous a permis de montrer, en référence à notre hypothèse initiale, que le Récit était effectivement un support privilégié par les élèves pour émettre et justifier des conjectures, pour justifier et argumenter à l'écrit comme à l'oral :

- L'engagement dans le raisonnement s'appuie en particulier sur le caractère fictionnel du Récit et sur sa *fonction explicative* : En construisant des récits, en produisant des *possibles explicatifs*, les élèves s'affranchissent de la *situation matérielle* (ce qu'il est possible de faire en vrai avec les contraintes de temps et de matériel) et s'inscrivent dans une *situation objective* en s'engageant la construction d'exemples et de contre-exemples non sensibles. Le passage du *milieu matériel* au *milieu objectif* s'appuie sur des constructions « fictives » mais structurées par les contraintes mathématiques *objectives* de la situation étudiée.
- La structuration du raisonnement peut s'appuyer sur la *fonction de problématisation* et de *structuration* du Récit. Le caractère structuré du Récit et la résolution d'un élément problématique de *l'espace problème* du Récit amène les élèves à repérer les

caractéristiques mathématiques de la situation. La possibilité d'engager des processus de raisonnement dans *l'espace problème rhétorique* accompagne les élèves dans le passage vers le *milieu de référence*. La comparaison structurelle, la comparaison des événements (avant la comparaison mathématique) leur permet de saisir les subtilités de la situation et d'appuyer leur raisonnement via le repérage de ces points critiques traduits par la suite dans *l'espace problème du contenu*.

- La justification du raisonnement peut s'appuyer sur des exemples produits et / ou exprimés par le Récit. Les *possibles explicatifs* construits dans *l'espace problème rhétorique* sont analysés par les élèves dans ce même espace mis également dans *l'espace problème du contenu* et donc par rapport aux mathématiques. Ce travail leur permet de produire des arguments mathématiques solides et permettant la validation.

## CONCLUSION

L'objectif principal de notre travail était de déterminer si le Récit, introduit dans le milieu didactique en tant que mode de pensée, pouvait participer au travail mathématique et à la construction de raisonnement.

Le modèle théorique développé dans notre travail de thèse qui s'appuie sur une similarité structurelle entre Récit et Problème met en évidence des lieux d'interaction entre construction de récit et construction de raisonnement. Grâce aux travaux de Scardamalia et Bereiter (1998), nous avons en particulier défini et caractérisé un « espace de transfert de processus » entre ces deux activités et souligné la possibilité d'une co-construction entre récit et raisonnement lors d'un travail de résolution de problèmes de mathématiques. Les processus de structuration, d'argumentation, de problématisation, d'argumentation nécessaires à la résolution d'un problème, qui s'inscrivent habituellement dans *l'espace problème du contenu*, peuvent ainsi être réalisés (moyennant une *traduction* et une réinterprétation des problèmes locaux) dans *l'espace problème rhétorique*. Le travail dans cet espace, soutenu par les fonctions structurantes et heuristiques du récit, peut permettre aux d'élèves d'initier, de construire et de justifier leur raisonnement.

Le travail expérimental que nous avons réalisé a confirmé la validité de notre modèle théorique. En explorant et en construisant différents types de récits et différents types de structures les élèves ont enrichi le milieu didactique, au sens proposé par Hersant (2010), ainsi que leurs rapports avec ce dernier. L'appui sur les différentes fonctions du récit a en particulier permis aux élèves de s'affranchir des contraintes matérielles de la situation afin d'établir un rapport plus objectif avec les objets mathématiques en jeu et les différentes caractéristiques mathématiques de la situation. Ils ont en particulier pu repérer et analyser certains points cruciaux de l'axiomatique locale de la situation. Le Récit en tant que mode de pensée a été dans cette situation un support puissant qui a permis à certains élèves de s'engager dans des processus de preuve.

La situation choisie, permettant la proposition de problèmes de transformation avec des caractéristiques temporelles faciles à rapprocher du Récit, a certainement facilité le transfert des processus vers *l'espace problème rhétorique*. Le travail engagé à la suite de notre thèse vise à étendre ce type d'approches à des situations qui apparaissent *a priori* (et *a priori* seulement) plus éloignés de la structure du récit telle qu'on la connaît (c'est à dire avec des étapes, des changements et une temporalité (chronologique) assez marquée. Il faut noter que le Récit en tant qu'objet n'a pour temporalité que celle que l'auteur lui donne en organisant

son discours dans un ordre, qui n'est pas nécessairement l'ordre chronologique de l'histoire qu'il raconte. Ce travail d'organisation, essentiel au travail de problématisation dans *l'espace problème rhétorique*, permet de mettre en relation des objets et des événements d'une manière non temporalisée qui pourrait se rapprocher de situations mathématiques non temporalisées.

Les perspectives ouvertes par ce travail, en particulier vis à vis de la preuve, nous incitent également à nous intéresser de près aux processus d'élaboration preuve en particulier dans ce qu'ils ont de commun et / ou de différent avec les processus de construction de récit tels que nous les avons évoqués ci-dessus (temporalité mais aussi, et surtout, organisation, mise en relation, etc.). Une étape préliminaire à ce travail, nous a conduite à nous engager dans le domaine de la géométrie. En nous appuyant sur les travaux de Duval, nous développons et analysons une entrée par le récit dans les apprentissages relatifs aux programmes de construction et à l'analyse de figures (Moulin & Mithalal, 2015).

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Artigue, M. (1988) Ingénierie didactique. *Recherche en didactique des mathématiques*, 3, 281–308. Grenoble : La pensée Sauvage Editions.
- Brousseau, G. (1990). Le contrat didactique : le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(2/3), 309-336.
- Bruner, J.S. (2003). *Making stories: Law, literature, life*. Harvard University Press.
- Bruner, J.S. (2005). *Pourquoi nous racontons-nous des histoires?*. Paris : Pocket.
- Bruner, J.S. (2008) *L'éducation, entrée dans la culture : les problèmes de l'école à la lumière de la psychologie culturelle* (Nouv. éd.). Retz.
- Eco, U. (1985) *Lector in fabula*. Hachette.
- Eco, U. (1996) *Six promenades dans les bois du roman et d'ailleurs* (M. Bouzaher, Trad.). Éditions Grasset.
- Fayol, M. (1985). *Le récit et sa construction : une approche de la psychologie cognitive*. Delachaux & Niestle.
- Hersant, M. (2010) *Le couple (contrat didactique, milieu) et les conditions de la rencontre avec le savoir en mathématiques : de l'analyse de séquences ordinaires au développement de situations pour les classes ordinaires*. Note de synthèse HDR, Université de Nantes, Nantes.
- Margolinas, C. (1998) Le milieu et le contrat, concepts pour la construction et l'analyse de situations d'enseignement. In Noirfalise Robert (Ed.), *Université d'été de didactique de La Rochelle, La Rochelle, France*. (pp. 3-16) I.R.E.M. de Clermont-Ferrand.
- Moulin, M. (2010). Mathématiques et récits : des textes de fiction pour bien lire des énoncés de problèmes de mathématiques en classe de CM2. *Grand N*, 86, 33-57.
- Moulin, M. (2014) *Inscription du récit dans le milieu en résolution de problèmes de mathématiques : Études des contraintes didactiques, des apports et des limites dans la construction de raisonnement*, Thèse de doctorat disponible en ligne, Université Claude Bernard Lyon 1, 328p, <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01066443>.
- Moulin, M., Mithalal, J. (2015) *Le programme de construction comme un récit : réticence et prolifération*, Atelier présenté aux Journées d'étude LEMME, 05-06 octobre 2015, Villeneuve D'Ascq.
- Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton University Press.
- Polya, G. (1994). *Comment poser et résoudre un problème*. Sceaux : Gabay.
- Scardamalia, M., & Bereiter, C. (1987). Knowledge telling and knowledge transforming in written composition. In R. Rosenberg (Ed.), *Reading, writing, and language learning* (pp. 142–175). Cambridge : Cambridge University Press.
- Scardamalia, M., & Bereiter, C. (1998). L'expertise en lecture-rédaction. In : Piolat, A., Pélissier, A., & Bereiter, C. (Eds), *La rédaction de textes : Approche cognitive* (pp. 13–59). Lausanne : Delachaux et Niestlé.

Tarski, A. (1960). *Introduction à la logique : ["Introduction to logic and to the methodology of deductive science"]*, par alfred tarski, 2e édition revue et augmentée. traduit de l'anglais par [le p.] jacques tremblay, S.J.. Paris : Gauthier-Villars.