Chapitre 5

Casyopée : didactique, épistémologie et contraintes dans les choix de conception d'un environnement logiciel pour la classe

Jean-Baptiste Lagrange, Bernard Le Feuvre

LDAR, Université Paris Diderot. IREM de Rennes

Résumé. *Cet article a pour but d'étudier comment, dans le cas des fonctions de la Troisième à la Terminale, la didactique et l'épistémologie interviennent dans la conception et l'expérimentation d'un environnement logiciel pour la classe. L'influence de contraintes résultant du contexte scolaire aussi bien que celles qui pèsent sur les choix d'implémentation informatique est également discutée.*

Nous prenons l'exemple du « volet de calculs géométriques » pour examiner les choix globaux de développement, et celui de « l'ensemble de définition des fonctions » pour montrer la nécessité d'être attentif aux choix locaux, très rarement questionnés par les enseignants et les chercheurs. Finalement, avec les « fonctions définies par un algorithme » nous considérons les opportunités et contraintes résultant du choix de concevoir Casyopée comme un logiciel évoluant pour s'adapter à l'évolution de la réflexion didactique et des besoins du terrain.

Mots-clés : *Casyopée*, *fonctions, lycée, didactique, épistémologie, choix locaux, environnement logiciel.*

Qu'est-ce que Casyopée ? Quelles questions didactiques pose sa conception ?

Voici comment Casyopée se présente sur le site http://casyopee.eu où les versions successives sont en téléchargement et où on trouve aussi des exemples de situations de classe :

Casyopée est un logiciel "open source" pour l'apprentissage des fonctions. Casyopée est orienté vers la résolution de problèmes sur et avec des fonctions, la modélisation et la preuve. Il apporte des aides spécifiques à l'élève dans ces activités grâce au calcul formel. Un module de géométrie dynamique, intégré dans l'environnement Casyopée, offre la possibilité d'explorer et modéliser fonctionnellement des situations géométriques.

Les choix principaux de Casyopée sont :

(1)offrir des représentations conformes aux exigences en mathématiques au lycée ; par exemple on distingue la fonction de son graphe et de sa courbe,

(2) permettre un pilotage aisé sans langage de commande,

(3) aider l'élève à dépasser les évidences perceptives pour accéder aux preuves algébriques.

Le site détaille ensuite les fonctionnalités dans quatre "volets", algèbre, graphique, géométrique et « calculs géométriques ».

Comment les utilisateurs voient-ils Casyopée ? Un enseignant a été particulièrement sensible aux possibilités offertes aux élèves pour la modélisation de situations géométriques. Il prend l'exemple de l'optimisation de l'aire d'un losange de côté donné.

J'ai traité cet exercice avec le logiciel Casyopée qui m'impressionne. Les résultats algébriques sont découverts au fur et à mesure de l'avancée de l'exercice. Le logiciel permet de plus de réinvestir des stratégies de base. Il peut y avoir pour ce type de recherche une disparition presque complète de l'énoncé, l'élève arrivant à des résultats qu'il pourra (devra?) démontrer ultérieurement. (Legay 2011)

Du côté des élèves, les témoignages rejoignent celui de l'enseignant et soulignent aussi l'apport du calcul formel et de l'ergonomie du logiciel :

Casyopée permet de faire les calculs facilement d'une dérivée, de factoriser, de calculer les zéros… et d'en plus d'avoir directement à côté dans la même fenêtre la modélisation graphique de la fonction. Il permet sur un problème géométrique d'étudier facilement en calculant les distances et autres calculs géométriques ; de pouvoir établir des variables qui pourront ensuite servir pour étudier le problème par des fonctions… (Amandine),

« Casyopée est plus rapide et plus commode que sur une calculatrice…. On a en même temps le côté géométrique et algébrique du problème. On voit mieux comment une fonction « réagit ». C'est pratique et intéressant » (Chloé).

(Minh 2011 p.184).

Ainsi les utilisateurs, professeurs et élèves, reconnaissent les possibilités offertes par le logiciel, en particulier l'organisation en quatre volets algèbre, graphique, géométrique et « calculs géométriques » et les liens entre ces quatre volets. Une première partie de cet article va s'intéresser aux choix relatifs à cette organisation d'ensemble, en particularisant au volet de « calculs géométriques », qui est une spécificité de Casyopée. Comment la nécessité de ce volet est-elle apparue ? Comment la didactique et l'épistémologie sont-elles intervenues dans la conception ? Quelles contraintes ont été rencontrées au cours du développement et comment ont-elles été gérées ?

La présentation sur le site http://casyopee.eu souligne aussi des choix d'ergonomie plus locaux, dont certains contribuent sans doute à l'appréciation des utilisateurs. Là aussi, didactique, épistémologie et contraintes jouent un rôle qu'il s'agit d'élucider. Ce sera l'objet de la seconde partie à travers quelques particularités du volet d'algèbre.

Finalement, Casyopée est un projet évolutif, cherchant à s'adapter aux nouveaux défis posés à l'enseignement des mathématiques. Parmi ceux-ci, l'algorithmique et la modélisation se sont présentés récemment. La conception de fonctions et de suites «définies par un algorithme » sera discutée dans une troisième partie, toujours sous les trois aspects didactique, épistémologie et contraintes.

Le volet de « calculs géométriques », un choix global et des contraintes

Le volet de « calculs géométriques » est celui où s'effectue une étape fondamentale de la modélisation fonctionnelle de dépendances géométriques : l'identification de grandeurs en dépendances et leur expression à l'aide de distances. Nous avons vu ci-dessus ce qu'en dit l'élève Amandine.

La construction de ce volet s'est inscrite entre 2006 et 2008 dans les choix globaux d'un projet Européen centré sur la contribution d'environnements logiciels pour l'enseignement/apprentissage des mathématiques (Kynigos & Lagrange 2014). L'hypothèse portée par le projet était que cette contribution pouvait être recherchée dans une diversité plus grande des représentations et des moyens de les manipuler. Pour cela, il était nécessaire de s'appuyer sur la conception d'environnements logiciels présentant une diversité de choix relatifs aux représentations et à leur rôle dans l'activité et l'apprentissage.

Pour situer la conception de ce volet dans le cadre de ce projet de recherche, il est nécessaire d'évoquer les premiers travaux qui ont conduit à la conception de Casyopée et qui datent de 2001. Il s'agissait, dans le cadre d'une recherche soutenue par l'INRP, de répondre aux difficultés d'instrumentation identifiées lors de l'usage de systèmes de calcul formel avec des élèves de lycée, dans des situations d'apprentissage de l'algèbre et de l'analyse (Artigue & Lagrange 1999). De précédentes recherches avaient établi que l'intégration de tels systèmes dans des situations d'apprentissage posait problème, en induisant, pour les élèves, des genèses instrumentales longues et hasardeuses que l'enseignant peinait à organiser et à réguler. L'environnement Casyopée a donc été conçu pour organiser les échanges avec un noyau de calcul formel qu'il incluait. Il offrait aux élèves les représentations standards d'une fonction mathématique (graphique, formelle, numérique) et la possibilité de transformer des expressions pour un but donné. Une série d'expérimentations en classe de Seconde a confirmé que ces objectifs pouvaient être atteints, mais a aussi montré les limites du design, relativement au domaine mathématique pour lequel l'environnement était pensé (Lagrange 2005).

Le domaine choisi étant celui des fonctions, les concepteurs ont pris conscience de ce que dans Casyopée ces objets étaient représentés seulement comme ensembles de formules algébriques équivalentes ou par les graphes et tables associés, alors que, dans la recherche didactique comme dans les programmes, l'accent était mis sur le sens à donner aux fonctions à travers des situations de modélisation comme celle de l'optimisation de l'aire d'un losange de côté donné évoquée ci-dessus (Radford 2005, Arzarello & Robutti 2004, Falcade, Laborde & Mariotti 2007). L'épistémologie des fonctions mettait elle-aussi en avant les dépendances entre variables, notamment dans les phénomènes physiques liée au mouvement (Youschkevitch 1976). Ceci nous a conduits à considérer des co-variations et dépendances entre éléments et entre grandeurs géométriques comme représentations de la notion de fonction complémentaires aux représentations algébriques propres à Casyopée. Dans les expérimentations, il a donc été fait appel à un environnement de géométrie dynamique afin d' « explorer » des dépendances, en préalable à l'étude algébrique de cette dépendance avec Casyopée. Nous attendions que les élèves fassent le lien entre la fonction mathématique, telle que représentée dans Casyopée et la dépendance explorée dans l'environnement de géométrie dynamique. Cela ne s'est pas produit : d'une part le passage à l'algèbre en papier-crayon a constitué une rupture, d'autre part, il n'a pas été possible d'organiser des mises en relation entre les représentations, les environnements séparés (géométrie dynamique et Casyopée) ne le permettant pas aisément.

La question s'est donc posée d'organiser des liens entre la géométrie dynamique et Casyopée, de façon à aider les élèves à faire ces mises en relation. Nous avons choisi de ne pas lier Casyopée à un logiciel de géométrie dynamique existant. En effet tous les objets géométriques créés par l'utilisateur devaient avoir, comme les objets symboliques de la version initiale, une définition formelle dans le noyau de calcul formel[5]. Nous avons donc construit un volet de géométrie dynamique spécifique[6]. La question posée aux concepteurs était celle des moyens offerts par le logiciel pour organiser le passage d'une dépendance géométrique à une fonction mathématique. La première conception a été orientée par la pratique de « mise en équation » menée en papier/crayon. Elle prévoyait un processus en quatre étapes :

a) Identification d'une grandeur comme variable indépendante[7].

b) Construction de la figure prenant en compte ce choix,

c) Modélisation par une ou plusieurs fonctions d'éléments ainsi construits.

d) Détermination d'une fonction modélisant la dépendance recherchée, par combinaisons algébrique des fonctions déterminées à l'étape c.

Par exemple pour l'optimisation de l'aire d'un losange de côté donné (prenons ici 10), l'étape a) peut conduire à identifier la longueur d'une diagonale comme variable indépendante, que nous notons x, variant sur l'intervalle [0 ;20]. L'étape b) consiste à construire un segment [AC] de longueur x, puis deux cercles de rayons 10 centrés respectivement en A et C, et à nommer B et D les deux points d'intersection, s'ils existent. L'étape c) peut consister à créer une fonction h qui à x associe la demi-longueur du segment [BD]. A l'étape d) on crée alors la fonction f qui à x associe $x*h(x)$.

Ce processus était relativement facile à implémenter : la variable indépendante étant déterminée au départ, Casyopée pouvait calculer une définition formelle de tous les éléments construits, et donc aussi les éléments entrant dans la modélisation. Cela permettait de contrôler ou de guider le travail de l'élève. Il était par exemple possible que les fonctions à l'étape c) soient calculées par Casyopée, après que l'élève ait déterminé les éléments pertinents de la construction. L'expression déterminée à l'étape d) pouvait être simplifiée par Casyopée pour éliminer la présence des fonctions de l'étape c).

Avec le recul, on peut voir deux défauts majeurs

1. Le choix de la variable s'effectuait dès la première étape.

---

[5] Il a fallu aussi concevoir une interface dans l'ensemble conforme aux environnements de géométrie dynamique existants, de façon à ne pas dérouter l'utilisateur. Ainsi, un utilisateur habitué à un autre logiciel de géométrie dynamique retrouve dans Casyopée les fonctionnalités les plus courantes, même si beaucoup ne seraient pas absolument nécessaires, ou pourraient se présenter différemment, pour créer des figures où observer des dépendances entre objets géométriques. Le volet de géométrie dynamique dans Casyopée n'a pas cependant l'ambition d'être un environnement dédié à l'apprentissage de la géométrie ni du point de vue des fonctionnalités, ni du point de vue de l'ergonomie. Il en existe d'excellents, en premier lieu Cabri-Géométre.

[6] Il faut rendre hommage à Jean-Michel Gélis et Cyrille Lefranc qui ont développé ce volet dans les délais extrêmement serrés imposés per le projet Européen tout en contribuant à la réflexion rapportée dans cet article.

[7] Pour la simplicité du propos, nous employons ici « variable indépendante » » et « variable dépendante » pour désigner les éléments en dépendance dans une fonction tout en étant conscients de ce que ce vocabulaire n'est pas dans les habitudes en France.

2. Le travail sur les grandeurs (ici exprimer une aire à partir de longueurs) s'effectuait dans un environnement algébrique.

En s'inspirant de la technique papier/crayon on retrouvait ses deux défauts. De plus, il manquait des moyens d'observer des valeurs de grandeurs pour explorer la figure et faire des conjectures. Bref, on basculait trop tôt dans l'algèbre.

Plutôt que de faire apparaître les valeurs des grandeurs sur la figure, nous avons créé un volet avec une liste de ce qu'on a appelé des "calculs géométriques", permettant d'exprimer des grandeurs telles que des distances, des périmètres et des aires, et plus généralement toute combinaison de distances et de coordonnées. Les valeurs numériques étant affichées en regard, cela a donné un moyen de visualiser l'évolution des grandeurs par déplacement de points mobiles ou animation de paramètres. Cela a permis aussi de différer le choix de la variable indépendante. Ainsi s'est instauré un travail dans les grandeurs bien en amont du travail algébrique.

Dans un second temps, nous avons pris conscience d'une dissymétrie trop forte entre la variable dépendante (un calcul géométrique) et la variable indépendante (choisie dans un menu), et de ce que cette variable indépendante pouvait très bien être conçue elle même comme un calcul géométrique. Dans le fonctionnement actuel, établi pour remédier à cette dissymétrie, les calculs géométriques peuvent être dans un premier temps des variables à observer sans a priori sur leur rôle dans une fonction et, dans un second temps, deux d'entre eux peuvent être choisis pour être en relation fonctionnelle, l'un comme variable indépendante, l'autre comme variable dépendante. La Figure 3 illustre le fonctionnement de Casyopée pour l'expression de la dépendance entre l'aire d'un losange de côté 10 et une autre grandeur variable. Plusieurs autres constructions du losange ainsi que plusieurs autres choix d'une variable indépendante auraient été possibles, mais toutes ne donnent pas un calcul aisé de la fonction modèle.

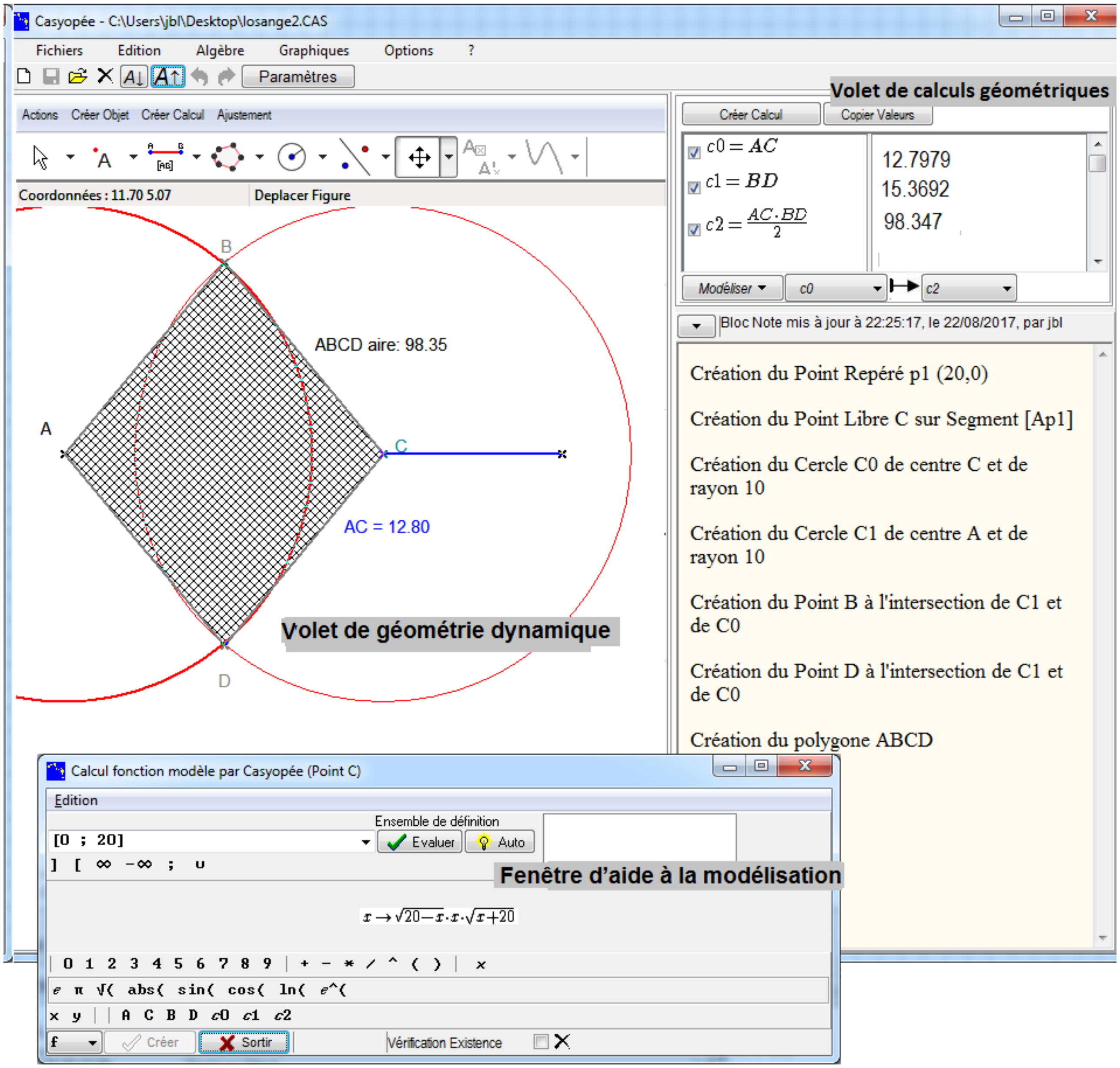

Figure 3. Le volet de géométrie dynamique, le volet de calculs géométriques et la fenêtre d'aide à la modélisation de Casyopée pour l'optimisation de l'aire d'un losange.

Voici quelques effets constatés chez les élèves de ce travail dans le volet de calculs géométriques. Voici d'abord un extrait d'un entretien réalisé par l'équipe italienne du projet européen mentionné dans l'introduction, chez des élèves de terminale après une expérimentation d'une dizaine d'heures (Mariotti 2013).

- <u>Question</u> : Qu'entendez-vous par les termes « fonction », « variable indépendante » et « variable dépendante » ?
- <u>Réponse</u> : La variable indépendante est celle qui est modifiée en première, en conséquence de cela, l'autre est modifiée.

- Question : Quels éléments du logiciel peut être mis en relation avec ces termes ? Pourquoi ?

- Réponse : La variable indépendante correspond au point mobile, car il est l'élément qui peut être modifié arbitrairement, alors que tous les chiffres [...] sont des variables dépendantes, l’aire et le périmètre sont modifiées selon la façon dont le point mobile se déplace.

On voit que cette élève a bien compris la dépendance entre les variables (réponse 1), elle voit bien la variable dépendante comme une entité numérique, mais pour elle, dans le logiciel, la variable indépendante reste une entité géométrique, le point mobile.

Voici des réponses d’élèves de terminale après deux ans d’utilisation. Ils ont répondu à un questionnaire sur leur perception du travail avec Casyopée dans le cadre de la thèse de Tranh Kiem Minh (Minh 2011).

- En effet, la chose la plus dure, c’est le choix de variable, la modélisation. Il faut bien choisir la bonne variable[8].

- Le choix de la variable n’est pas souvent abordé en papier/crayon. Le logiciel m’a permis de mieux comprendre le but d’une variable.

- Choix de la variable. Je trouve cela intéressant de choisir sa variable puis de l’approfondir.

- Possibilité de créer des variables que l’on peut ensuite transformer en nombre.

- Il faut que la variable choisie nous aide à résoudre… il faut vraiment choisir une bonne variable.

L’idée de choix d’une variable comme étape importante et non triviale de la modélisation est soulignée très souvent par ces élèves. Ils apprécient que le logiciel leur dévolue ce choix et ont bien compris que l’enjeu est de passer d’entités géométriques à des entités numériques, c’est-à-dire que l’expression de la fonction passe par une quantification.

Beaucoup d’études montrent que dans la notation $f(x)$, le x a très peu de sens pour les élèves. Les élèves voient généralement bien une fonction comme une quantité qui varie, mais n’identifient pas ce qui fait varier. L’élève interrogée par l’équipe italienne a bien compris ce qui fait varier dans la dépendance géométrique, mais n’a pas conscience d’une dépendance entre grandeurs. Pour les élèves observés par Tranh Kiem Minh, et qui ont eu un usage plus long du logiciel, la variable indépendante prend sens comme une grandeur à choisir de façon adéquate dans le processus de modélisation.

Finalement, nous retenons de cette expérience que des références didactiques sur les fonctions comme modèles de dépendances géométriques nous ont conduits à développer un volet de géométrie dynamique complétant les volets existants algébrique et graphique. Ces références ne nous ont cependant pas donné de clé pour créer les interactions nécessaires entre ces volets. La

[8] Il s’agit d’élèves français, et donc dans leurs réponses, « variable » signifie « variables indépendante ».

création d'un volet de « calculs géométriques » s'est imposée de façon pragmatique, mais nous avons pris conscience seulement de façon progressive de l'intérêt du travail sur les grandeurs que permet ce volet, rejoignant ainsi des travaux didactiques sur la quantification (Thomson 2011).

Le volet d'algèbre, l'attention aux choix locaux

Nous expliquons ici ce qu'est l'attention aux choix locaux de développement. Nicklos Jackiw est le développeur de SketchPad un logiciel de Géométrie Dynamique qui a été largement utilisé dans le monde, et il emploie le terme « détail » pour parler de ces choix. Il regrette d'abord qu'on regarde la technologie seulement sur le plan de potentialités globales, alors qu'il existe aussi une myriade de micro choix, particulièrement au niveau des actions de l'élève et que ceux-ci sont loin d'être anodins d'un point de vue didactique.

> Généralement ce qui est retenu de la technologie, c'est moins les détails et particularités des logiciels qu'une perspective généralisée sur le potentiel qu'offre un milieu technologique conçu de façon globale (...)
>
> Je suis confronté quotidiennement, comme je pense d'autres concepteurs, à d'innombrables choix de conception pratiques et localisés (..).
>
> D'un point de vue mathématique, différentes trajectoires technologiques peuvent conduire à la même construction d'un triangle (…). Cependant, d'un point de vue didactique, ce qui compte est la façon dont l'élève construit le triangle (…). Jackiw2010, p. 432.

Nous allons prendre un exemple, celui de l'ensemble de définition des fonctions en contrastant les choix opérés dans Casyopée et ce que nous pouvons constater dans un autre logiciel, l'inévitable[9] GeoGebra. Par souci de conformité épistémologique, dés le début, nous avons choisi que les fonctions dans Casyopée soient créées avec un ensemble de définition. Plus tard, nous avons mis en place des situations de modélisation, et ce choix s'est avéré productif, parce que généralement, on modélise sur des domaines restreints[10]. Considérons la situation de la nacelle[11]. Une roue est actionnée par une corde de longueur 12 mètres enroulée sur sa circonférence, et la fonction modélise le déplacement vertical d'une nacelle, en fonction de la longueur de corde

---

[9] Nous nous permettons ce qualificatif car nous trouvons un nombre toujours croissant de publications de recherche ou de ressources pour les enseignants, la mention de GeoGebra comme un substitut pour « géométrie dynamique » et même pour « technologie » comme si ce logiciel concentrait sans qu'il soit besoin de le discuter, toutes les potentialités de la géométrie dynamique et plus généralement de la technologie dans l'enseignement des mathématiques.

[10] Dans les programmes du lycée en France il n'est plus demandé de mettre l'accent sur la recherche de l'ensemble de définition des fonctions, et celui-ci est la plupart du temps donné avec la fonction. Il est vrai que, dans le cas d'une fonction donnée par une formule, cette recherche conduit à un travail algébrique qui peut apparaître comme trop technique. Les programmes ne détaillent pas l'activité attendue de l'élève au cours d'un processus de modélisation. Il nous semble que, dans le cas d'une fonction issue d'une démarche de modélisation, l'élève doit se poser la question des limites dans lesquelles la situation à modéliser a du sens, ce qui est différent de la recherche du domaine de validité d'une formule. L'exemple qui suit montre les aides apportées par Casyopée pour cette démarche, relativement à l'ensemble de définition de la fonction modèle : proposition d'un ensemble de définition à partir du modèle en géométrie dynamique et contrôle algébrique de la validité de la formule sur le domaine.

[11] http://www.toutatice.fr/portail/cms/_NXSITE_/site/sites/la-nacelle

déroulée, c'est pourquoi elle est définie sur [0; 12]. Il est demandé aux élèves de faire une figure dynamique dans Casyopée, puis d'obtenir une fonction avec une formule et un ensemble de définition modélisant la dépendance entre le déplacement de la nacelle et le déroulement de la corde et finalement d'étudier cette fonction. Le mouvement a été choisi pour que la fonction ne soit pas dérivable aux positions correspondant à un point bas de la nacelle. L'objectif est que les élèves prennent conscience de ce qu'une fonction continue peut ne pas être dérivable en certains points, et qu'ils associent cela avec des propriétés du mouvement modélisé.

Dans les observations que nous avons faites, pour étudier la fonction les élèves demandent la dérivée. Casyopée donne un avertissement (Figure 4). En effet, notre choix a été de faire opérer une vérification de l'existence de la fonction sur l'intervalle de définition proposé, ici [0; 12], A l'aide du noyau de calcul formel, Casyopée a repéré qu'il y a peut-être un problème sur l'intervalle. Mais les élèves ignorent l'avertissement. Un autre choix de développement est que Casyopée tient compte de l'ensemble de définition pour le graphe, et donc comme il n'y a pas de valeur exclue, il trace le graphe comme un trait continu.

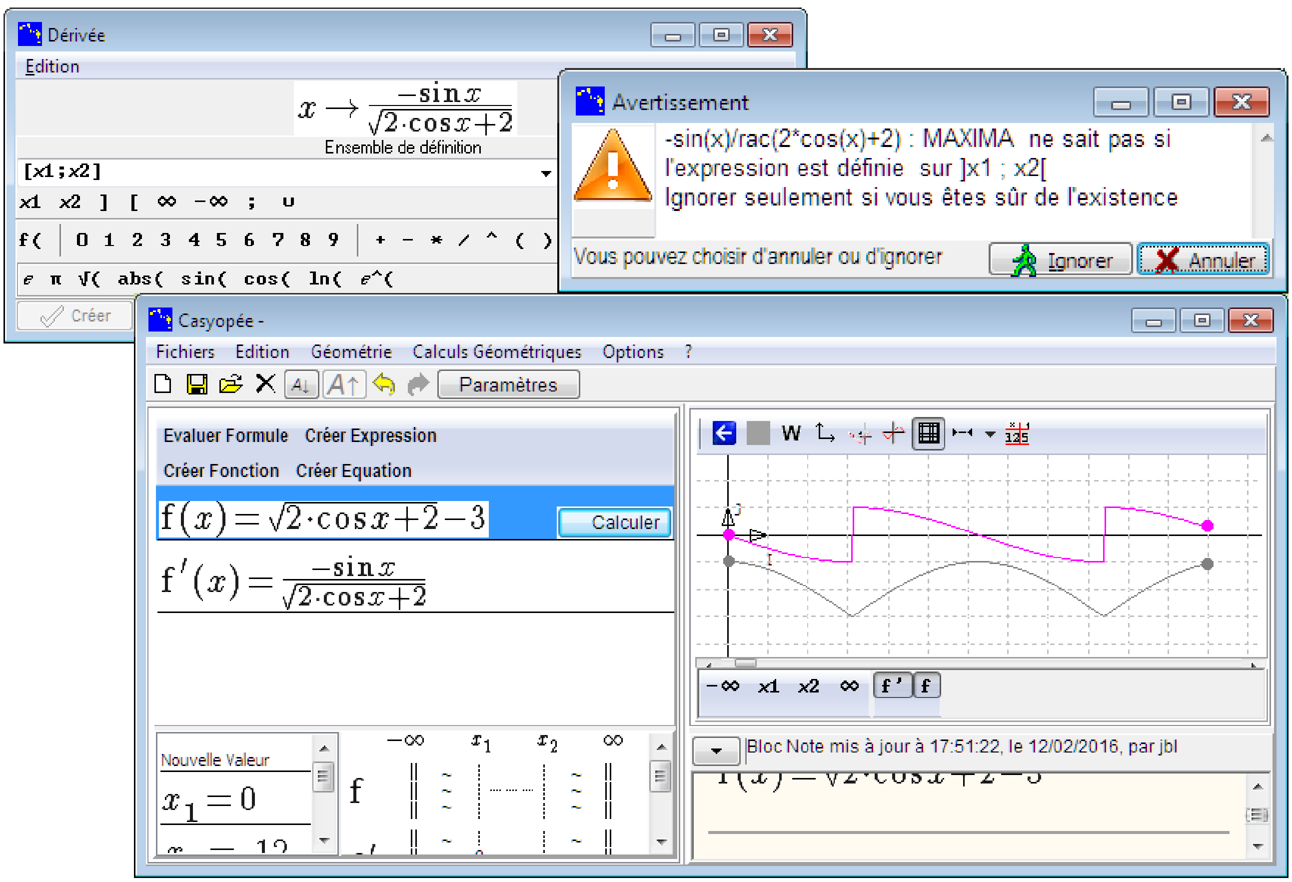

Figure 4 : Calcul et graphe de la dérivée de la fonction modèle dans la situation de la nacelle.

Le professeur attire l'attention sur les deux traits verticaux, et les élèves prennent conscience de la non définition aux points correspondants. Ils cherchent les valeurs et entrent un nouvel ensemble de définition pour la dérivée excluant les valeurs aux points anguleux. Cette fois Casyopée graphe la fonction avec l'affichage standard de la discontinuité (Figure 5). Les élèves ont ainsi pris conscience de ce qu'il peut être nécessaire de restreindre l'ensemble de définition quand on calcule une dérivée.

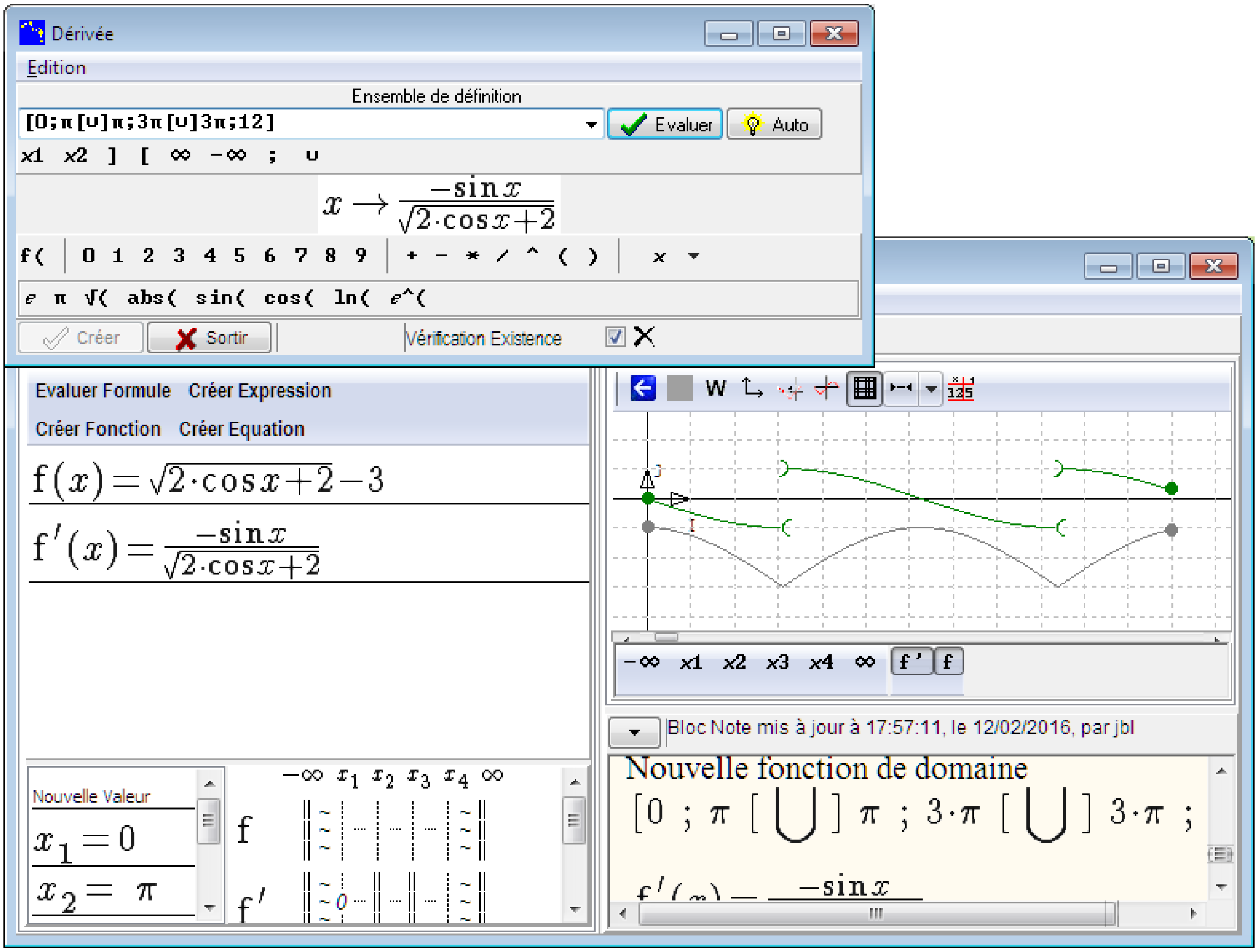

Figure 5 : Calcul et graphe de la dérivée de la fonction modèle avec restriction de l'ensemble de définition.

Avec GeoGebra nous pointons trois différences dans l'activité attendue des élèves : (1) il faut que les élèves calculent en premier lieu une formule, une tâche certainement difficile pour des élèves de Terminale, alors qu'avec Casyopée, ils l'ont obtenue directement après avoir fait une figure dynamique[12] (2) avec GeoGebra (figure) on définit un domaine pour une fonction via un langage de commande, ce que nous avons choisi d'éviter dans Casyopée[13] (3) quand on demande la

[12] Nous pensons en effet que cette étape de calcul introduit une rupture dans l'activité de modélisation des élèves. La possibilité d'obtenir directement la formule implémentée dans Casyopée est une contribution du calcul formel et ce serait une erreur d'en priver les élèves. Voir (Minh & Lagrange 2016) pour une confirmation empirique.

[13] Dès les premières observations des usages du calcul formel par des élèves, nous avons repéré leur tendance à ne pas distinguer la syntaxe du langage de commande du logiciel utilisé et la syntaxe mathématique standard. Par ailleurs, l'utilisation d'un langage de commande impose la mémorisation de mots clés, ce qui nous semble incompatible avec les usages ponctuels généralement observés. Nous avons voulu éviter ces défauts en concevant un pilotage par menus, plutôt que par langage de commande. Nous ne disposons pas d'observations d'usages de GeoGebra qui permettraient de discuter plus à fond ce choix fondamental.

dérivée de la fonction que nous considérons ici, il n'y a pas d'analyse de l'ensemble de définition. La dérivée est certes graphée avec un saut aux valeurs critiques, mais il s'agit d'un simple artifice de tracé : l'algorithme de tracé repère un saut « important » dans les valeurs et « lève le crayon » (Figure 6).

On voit que ces différences ne sont pas anodines. Nous insistons sur la troisième différence qui joue un rôle essentiel dans la situation évoquée ici. L'artifice de tracé de GeoGebra permet un tracé relativement fidèle (bien que non conforme, puisque la discontinuité n'est pas marquée), mais cet artifice empêche la problématisation du phénomène en jeu : le « saut » est observé sans qu'il y ait un choix de l'utilisateur d'exclure les valeurs correspondantes. On peut penser qu'ainsi il n'y aura pas la même prise de conscience qu'avec l'usage de Casyopée.

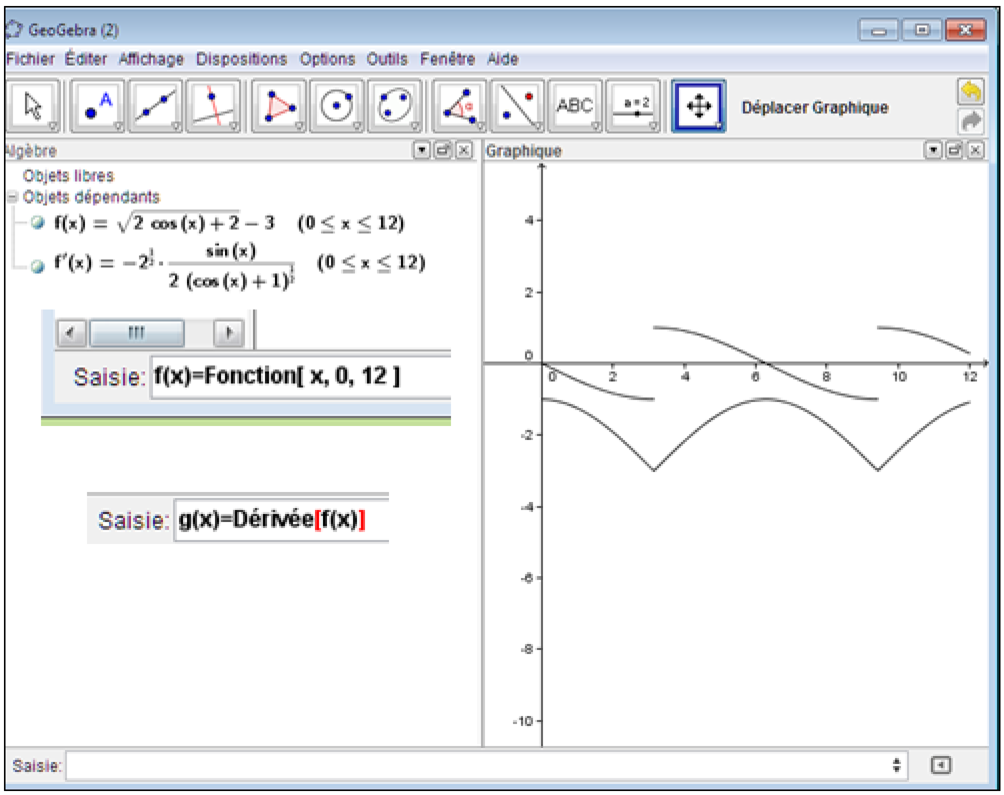

Figure 6 : Calcul et graphe de la dérivée de la fonction modèle par GeoGebra

Cet artifice de l'algorithme de tracé de Geogebra a ses limites. En effet si on multiplie la dérivée par *x*- une valeur proche de pi, même quand on zoome à fond il ne « lève » plus le crayon. Il fait simplement un petit saut bizarre (Figure 7).

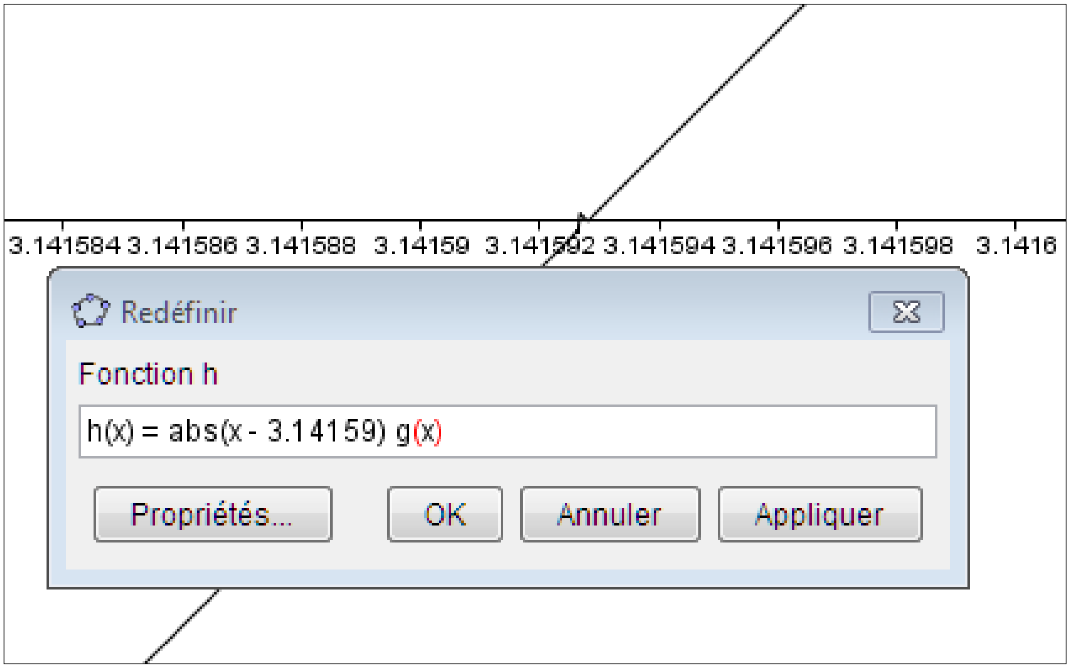

Figure 7 : Une aberration de tracé dans GeoGebra.

Le choix de Casyopée de marquer la non définition pour des valeurs confirmées par l'utilisateur conduit en revanche à un affichage correct.

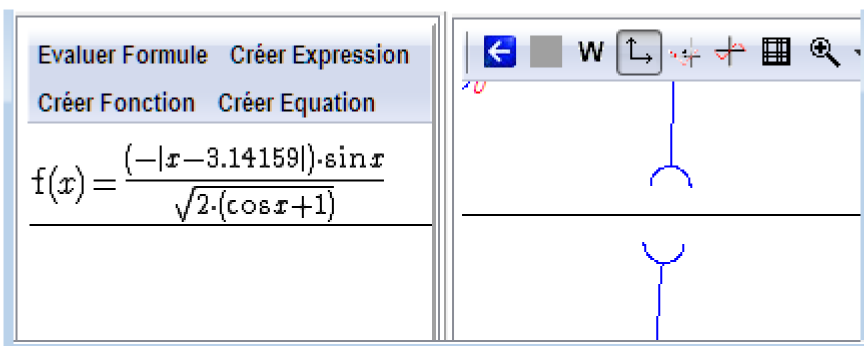

Figure 8 : Le tracé à un point de non-définition par Casyopée

Il y a beaucoup de choix locaux de cette nature dans Casyopée, nous pourrions par exemple mentionner le traitement des paramètres qui est différent des curseurs de Geogebra. Comme on l'a vu dans l'exemple de l'ensemble de définition, ces choix impliquent une négociation fine entre trois pôles : la fidélité épistémologique, les contraintes de développement et des principes relatifs à l'interaction utilisateur-logiciel.

Dans les ressources pour la classe et dans les études didactiques, de tels choix locaux sont rarement mis en évidence. Par exemple il est souvent fait référence à un usage de GeoGebra sans que les particularités de ce logiciel et leur influence sur la situation d'apprentissage soient discutées. La réaction que nous avons souvent à des propositions d'articles ou de ressources basées sur des situations de classe est que « on peut faire tout ça avec GeoGebra ». Nous répondons comme Jackiw (ibid.), oui, mais pas de la même façon, et ce qui compte pour l'apprentissage, c'est la façon dont l'élève procède, y compris au niveau du détail.

Les fonctions définies par un algorithme

Les situations

Dans l'activité récente du groupe Casyopée nous avons exploré certaines situations où le travail sur les fonctions avec le logiciel Casyopée a été complété par un travail en algorithmique. Ceci est cohérent avec l'idée de faire dépasser aux élèves une compréhension des fonctions limitée par l'usage dominant de fonctions définies par une formule algébrique, en leur offrant une variété de manières d'engendrer des fonctions. Nous prenons aussi en compte les instructions officielles pour le lycée qui recommandent de lier algorithmique et contenus mathématiques. Les enseignantes du groupe Casyopée ont insisté sur les situations suivantes et l'apport de l'algorithmique.

1. Trajectoires de mobiles. Il s'avère difficile pour des élèves de Seconde de définir la position d'un mobile par deux coordonnées dépendant du temps (Cazes & Vandebrouck 2014). La mise en œuvre d'un algorithme calculant ces coordonnées de façon itérative et affichant les points dans un repère constitue une tâche utile pour permettre aux élèves de bien comprendre dépendance au temps.
2. Primitive approchée en Première. La recherche de primitive par lecture inverse du tableau des dérivées est une tâche purement symbolique, qui ne met pas en évidence le lien entre fonction et dérivée, notamment dans le registre graphique. La tâche qui peut être demandée aux élèves est la construction approchée de la courbe d'une primitive d'une fonction. Il s'agit de la méthode d'Euler appliquée à l'équation différentielle $F'(x)=f(x)$, F étant la fonction inconnue et f la fonction donnée.
3. Fonctions dont la courbe modélise un objet du monde réel. Pour certains objets, par exemple les ponts suspendus que nous développerons plus loin, il est intéressant de faire étudier par les élèves un modèle discret sous la forme d'une fonction définie par un algorithme, en première approche ou en complément d'un modèle continu sous forme d'une fonction mathématique.

Après avoir expérimenté ces situations avec des environnements de programmation couramment utilisés au lycée[14] les enseignantes du groupe Casyopée ont souhaité qu'une fonction (et non un simple tracé) soit reconnue par les élèves comme définie par l'algorithme, et que la fonction ainsi définie existe dans un environnement qui permette son exploration et la comparaison à des fonctions définies de façon standard par une formule et un domaine. C'est ce qui a motivé un nouveau développement dans Casyopée répondant à deux objectifs : (1) définir des fonctions à partir d'algorithmes, en cohérence avec les fonctions telles qu'elles sont implémentées dans Casyopée ; (2) afficher les graphes, tables et courbes de ces fonctions, dans les mêmes écrans que les autres fonctions, et permettre certains calculs.

Par ailleurs, divers travaux didactiques (Lagrange et Rogalski 2017) nous ont fait prendre conscience des difficultés rencontrées par beaucoup d'élèves à s'approprier les structures des langages informatiques, notamment l'itération et c'est pourquoi un autre objectif a été de proposer une structure de programmation simple, avec un jeu d'instructions réduit.

[14] Algobox ou les calculatrices Texas Instruments.

Réalisation dans Casyopée

Ces objectifs se précisent par des hypothèses sur l'activité de l'élève qui orientent le nouveau développement. L'élève doit comprendre l'itération, en distinguant bien initialisation et corps de boucle. Le programme comprend donc deux blocs prédéfinis, un bloc de déclaration et d'initialisation des variables et un bloc d'itération sous une des quatre formes (boucler, tant que, répéter jusqu'à, pour). L'élève doit percevoir un parcours itératif dans cette structure comme la co-variation de deux variables. Cette co-variation peut être une dépendance fonctionnelle et donc se modéliser par une fonction à valeur dans $\mathbb{R}$. Cette co-variation peut aussi être une dépendance à un même paramètre et donc se modéliser par une fonction à valeur dans $\mathbb{R}^2$. Deux variables spéciales x et y sont donc pré déclarées. Dans le cas d'une dépendance fonctionnelle, la fonction est définie comme une fonction affine par morceaux f telle que $f(x)=y$ pour chaque couple de valeurs de (x, y) obtenus dans l'itération. Dans le cas d'une dépendance à un même paramètre, la fonction est définie comme une fonction f à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ $f(t)=[X(t) ; Y(t)]$, telle que la fonction X (resp. Y) est affine par morceaux et prend pour chaque entier t la valeur de x (resp y) obtenue au pas t de l'itération. Le résultat observable de la programmation est donc la création d'une fonction avec la possibilité d'exploration graphique et numérique.

Observations : la modélisation d'un pont suspendu

Parmi les situations présentées ci-dessus, nous nous référons à une situation de modélisation dont l'observation nous semble particulièrement significative, celle du pont suspendu. Sans entrer dans le détail des objectifs de cette situation, il s'agit ici de montrer l'apport de l'algorithmique, dans une situation qui implique d'autres domaines de modélisation[15].

On considère des modèles du câble dans 4 domaines. Le premier domaine concerne la physique, plus précisément la statique. A partir d'une maquette où les éléments du câble sont des dynamomètres, les élèves repèrent que la tension évolue d'un élément à l'autre. Ils étudient cette évolution en considérant les composantes horizontales et verticales. Le second domaine concerne la géométrie. Les coefficients directeurs étant obtenus à partir de l'étude des tensions, on en déduit une relation de récurrence entre les coordonnées des points d'accrochage des suspentes. A partir de là, il est possible de construire un modèle du câble point par point, pour différentes valeurs du nombre de suspentes. On systématise cette construction par modèle algorithmique qui traduit les relations de récurrence venant des deux domaines précédents. Le 4ème domaine est celui des fonctions mathématiques. La courbe dessinée par le câble est la limite de la ligne brisée considérée dans les modèles précédents. Un passage à la limite dans le coefficient directeur des segments de la ligne brisée permet d'obtenir la dérivée en tout point du câble, puis la fonction par intégration.

Une mise en œuvre a été observée dans une classe de Terminale de 35 élèves à la fin du mois de mars. Les contenus nécessaires en physique et en mathématiques avaient été enseignés dans les leçons précédentes. La première phase d'environ une heure visait à ce que les élèves s'approprient des questions liées aux ponts ainsi que la notion de tension le long d'une corde. Nous ne la détaillons pas ici. La deuxième phase durait 50 mn. Les données relatives au Golden

---

[15] Pour plus de détails, voir (Lagrange 2017).

Gate Bridge ont été présentées à toute la classe et les élèves ont été divisés en groupes de quatre. Chaque groupe a eu une tâche, A ou B, C ou D.

La tâche A concerne le domaine de la statique : les élèves doivent considérer les composantes horizontales et verticales des tensions aux points de suspension, reconnaître que la composante horizontale est constante et calculer une formule de récurrence pour la suite des composantes verticales.

La tâche B concerne le domaine géométrique. Une formule pour la valeur de la pente de chaque segment dans un modèle discret du câble principal est donnée aux élèves, selon un paramètre `H` et le nombre `n` de segments. Les élèves doivent calculer les formules de récurrence générer la série des coordonnées *x* et *y* des points de suspension.

La tâche C concerne le domaine algorithmique. Un algorithme comme dans la Figure 9 leur est donné. Ils doivent entrer et exécuter l'algorithme dans Casyopée, interpréter le paramètre `n` et ajuster le paramètre `H` afin que le modèle donné par l'algorithme soit conforme à la forme du câble.

$x \leftarrow -640$

//abscisse du point d`ancrage

$y \leftarrow 163$

//ordonnée du point d`ancrage

$\mathrm{i} \leftarrow 1$

$\mathrm{V} \leftarrow -5+\frac{10}{2\cdot \mathrm{n}}$

//tension au point d`ancrage

Pour i allant de 1 à n

$x \leftarrow x+\frac{1280}{\mathrm{n}}$

//abscisse des points de suspension

$y \leftarrow y+\frac{1280}{\mathrm{n}}\cdot\left(\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{H}}\right)$

//ordonnée des points de suspension

$\mathrm{V} \leftarrow \mathrm{V}+\frac{10}{\mathrm{n}}$

//tension dans les segments

Fin Pour

Figure 9 : L'algorithme donné aux élèves dans la tâche C.

La tâche D concerne le domaine des fonctions mathématiques. Les étudiants doivent rechercher une fonction *f* dont la courbe modélise un câble principal (modèle continu). Il leur est dit que la composante horizontale de la tension dans le câble est une constante `H` et une fonction linéaire leur est donnée pour la composante verticale de la tension. Ils doivent trouver une formule pour la dérivée de *f*, puis pour *f* et ajuster le paramètre `H` pour que la courbe de la fonction *f* soit conforme à la forme du câble.

La troisième phase a duré également 50 mn. Les élèves ont formé de nouveaux groupes réunissant un ou deux élèves de chacun des groupes précédents. Dans les groupes, les élèves ont été invités à partager leur travail sur les tâches A, B, C et D précédentes et à rédiger un rapport faisant le lien entre les résultats obtenus La quatrième phase a été une synthèse collective dirigée par le professeur.

Nous analysons seulement le travail de groupe des phases 2 et 3. La tâche A (en statique) a été réussie. Les élèves faisant la tâche B (géométrie) ont commencé par dessiner un pont avec beaucoup de suspentes, ne permettant pas d'envisager des segments. Ils ont été incités par l'observateur à limiter à 4 suspentes. Ils ont mis du temps à trouver les coordonnées du point d'ancrage et ont eu des difficultés à utiliser la formule donnée pour la pente des segments et la distance entre suspentes afin de calculer les coordonnées du prochain point. Les élèves faisant la tâche C (algorithmique) ont mis du temps à entrer l'algorithme dans Casyopée. Ils ont identifié le paramètre `n` comme le nombre de suspentes et ont proposé la valeur 83 (le nombre de suspentes dans le Golden Gate Bridge). Ils ont considéré que cette valeur est «proche de l'infini» et c'est pourquoi la courbe `n`'est pas une ligne bisée, contrairement aux petites valeurs de `n`. Lorsque l'observateur a expliqué que `H` est une tension, ils se sont rendu compte que l'augmentation de la valeur de ce paramètre "redresse" le câble et on trouvé une valeur appropriée. Les élèves faisant la tâche D (fonction mathématique) ont trouvé une formule pour la composante verticale de la tension, mais ont eu de la difficulté à interpréter le fait que la tension est dans la direction de la tangente à la courbe.

Dans le groupe de la phase 3, chaque élève a expliqué sa tâche et son travail dans la phase précédente. Le paramètre `H` a été identifié par les élèves comme jouant un rôle dans chaque tâche. Par exemple, lorsqu'un élève qui a effectué la tâche C ne s'est pas souvenu de l'effet de l'augmentation de `H`, confondant avec la «hauteur du câble», un élève qui a accompli la tâche A l'a corrigé, en disant qu'il s'agit d'une tension, et que donc augmenter la valeur de ce paramètre devrait "redresser" plutôt que "relâcher" le câble. Le même élève a aidé à surmonter la difficulté rencontrée par l'étudiant qui a fait la tâche D à trouver la direction de la tangente à la courbe, puis la dérivée de la fonction, en disant « vous devez simplement intégrer le quotient de `V` et `H` ».

Trois étudiants ont été interviewés après la phase 3, en tant que méthode pour évaluer de manière plus approfondie les liens que les étudiants ont établis entre les domaines pendant le travail en groupe. Ils ont souligné que la situation était plus complexe que d'habitude (« nous avons dû mettre en relation beaucoup de choses différentes ») et qu'ils «n'étaient pas habitués à mélanger la physique et les mathématiques ». La Figure 10 présente les liens repérés chez ces élèves entre les 4 domaines de modélisation. Nous mettons l'accent ici sur les liens entre le domaine de l'algorithmique et les trois autres domaines. En animant les paramètres `H` et `n`, sur la courbe de la fonction définie par un algorithme, les élèves ont fait le lien avec le rôle joué par ces paramètres dans la tâche A. Ils ont fait aussi le lien entre les relations de récurrence des coordonnées des points dans la tâche B et le processus itératif dans l'algorithme. Ils n'ont pas montré clairement que la fonction mathématique de la tâche D était la limite de la fonction par morceaux définie par l'algorithme de la tâche C. Par identification graphique des courbes, ils ont pensé que c'était plus ou moins la même fonction pour les grandes valeurs de `n`. La visualisation est alors la façon dont les élèves ont fait le lien entre algorithmique et fonction mathématique. Le seul autre lien repéré, que nous ne détaillons pas ici, est entre la statique et les fonctions mathématiques. En particulier, le modèle géométrique (suite des coordonnées des points de suspension) n'est mis en relation directe ni avec les tensions en statique, ni avec la fonction mathématique dont la courbe modélise le câble.

Cette observation montre que la modélisation d'un objet aussi complexe est loin d'être maîtrisée par ces élèves de Terminale à l'issue de ce travail, mais également que l'algorithmique joue un rôle important pour que ces élèves mettent en relation les différents modèles, alors qu'il leur est difficile de faire des liens directs, notamment entre le modèle géométrique, et d'une part la statique et d'autre part les fonctions mathématiques. Pour nous, cela valide le choix d'introduire la définition de fonctions par un algorithme dans l'environnement Casyopée, car ces liens mettent en jeu une production de l'algorithme que les élèves reconnaissent comme une famille de fonctions, analogue aux fonctions définies par une formule dépendant de paramètres. De plus, le choix de simplicité de la structure algorithmique se révèle efficace, les élèves n'ayant pas de difficulté à s'approprier cette structure et à faire le lien entre le calcul itératif et les relations de récurrence.

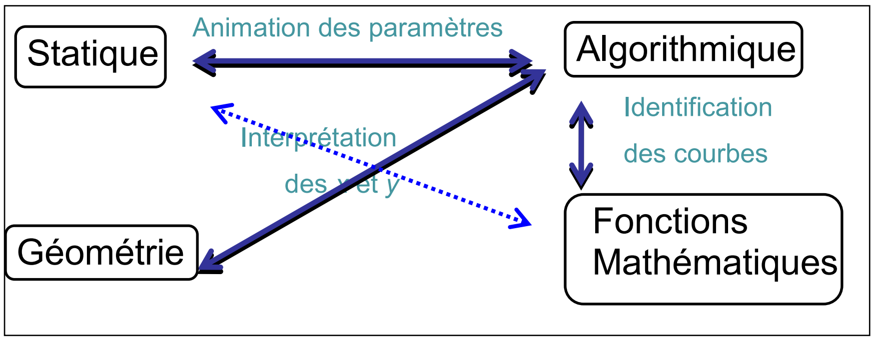

Figure 10 : Les liens entre domaines faits par les élèves dans la situation du pont suspendu.

L'apport de la définition de fonction par algorithme réside en premier lieu dans les liens qu'il permet d'organiser entre un nouveau domaine d'activité des élèves, ici l'algorithmique, et avec les domaines existants, ce qui rejoint le développement plus ancien du volet de « calculs géométriques » présenté dans la première section. L'attention aux choix locaux (« détails ») que nous avons présentée en seconde section se traduit ici par le choix de simplicité de la structure de programmation proposée. Notons cependant que ce choix a dû être modulé par une contrainte liée au contexte du lycée : alors qu'il aurait été possible de se restreindre à la seule forme `Répéter .. Jusqu'à`…, il a fallu tenir compte de ce qu'il est difficile pour un élève de s'approprier plusieurs formes d'itération, et donc que les situations seraient plus efficaces avec un environnement permettant aussi les formes `Tantque … fintanque` et `Pour … Finpour` qui sont souvent familières aux élèves. Nous retrouvons les contraintes du contexte scolaire qui, dans la construction du volet de géométrie, nous ont fait adopter une interface dans l'ensemble conforme aux environnements de géométrie dynamique existants, alors que d'autres choix auraient été possibles (voir note 5).

Conclusion

Finalement, le développement récent des fonctions définies par un algorithme illustre un aspect important des évolutions successives de Casyopée : le souhait de rendre effectives des situations dont le potentiel pouvait être perçu par le curriculum et par les enseignants, mais qui ne pouvaient être pleinement réalisées avec les outils existants. Le développement plus ancien du volet de « calculs géométriques » présenté dans la première section en est une autre illustration, puisqu'il s'agissait de rendre plus efficaces des situations d'optimisation, et plus largement de modélisation de dépendances géométriques. Il faut noter que ce développement avait pu s'appuyer sur des travaux didactiques et sur l'épistémologie des fonctions, alors que cela n'a pas été possible pour les fonctions définies par un algorithme, les travaux sur les apports de l'algorithmique, notamment dans le domaine des fonctions, étant quasi-inexistants. De plus, le rapport entre travaux didactiques et développement de Casyopée ne s'inscrit pas seulement dans une perspective de « valorisation ». A travers ce développement, nous apportons notre contribution à ces travaux de recherche ; (Lagrange & Psycharis, 2016) en est un exemple. Il n'est cependant pas toujours facile de mettre en avant cette contribution, car elle est perçue comme s'appuyant trop étroitement sur les caractéristiques du logiciel Casyopée. Nous nous heurtons à la tendance générale des travaux didactiques sur la technologie, dénoncée par Jackiv, à considérer des potentialités à un niveau général, sans prendre en compte les « détails » d'implémentation. Nous avons montré avec l'exemple de l'ensemble de définition à quel point ils influencent les situations.

Le caractère relativement « confidentiel » de la diffusion de Casyopée est la contrepartie de ce caractère évolutif. Chaque nouveau développement conduit à des versions test qui ne sont stabilisées que progressivement jusqu'au prochain développement qui amène à nouveau de l'instabilité préjudiciable aux usages. Néanmoins, le projet Casyopée perdure depuis près de 20 ans, avec une production régulière d'articles de recherche et un site web bien fréquenté, alors que nombre de logiciels aux ambitions plus vastes ont disparu du paysage. Souhaitons que ce projet résiste encore longtemps dans sa petite niche écologique, apportant un peu de (bio) diversité dans un milieu dominé par GeoGebra, un logiciel que la grande majorité des enseignants et des chercheurs considèrent comme sécurisant, mais dont ils devraient davantage questionner les choix implicites.

REFERENCES

Artigue, M. & Lagrange, J.B. (1999) Instrumentation et écologie didactique de calculatrices complexes. In D. Guin (Ed.), Calculatrices symboliques et géométriques dans l'enseignement des mathématiques. Actes du colloque francophone européen de La Grande-Motte, pp.15-38, IREM de Montpellier.

Arzarello, F. & Robutti, O. (2004). Approaching functions through motion experiments, Educational Studies in Mathematics, Special Issue CD Rom.

Cazes, C. & Vandebrouck, F. (2014) Vil Coyote à la poursuite de Bip-Bip: Modélisation, simulation et apprentissage des fonctions, Repère IREM, 95, 5-22.

Falcade, R., Laborde, C., & Mariotti, M. A. (2007). Approaching functions: Cabri tools as instruments of semiotic mediation. Educational Studies in Mathematics, 66(3), 317-333.

Jackiw, N. (2010) Attention to detail; broadening our design language. In Chapter 21, C. Hoyles & J. B. Lagrange (eds.) Mathematics Education and Technology: Rethinking the Terrain, pp. 431-433. Springer

Kynigos, C., Lagrange, J.B. (2014) Cross-analysis as a tool to forge connections amongst theoretical frames in using digital technologies in mathematical learning. Educational studies in Mathematics. 85(3), 321-327 (2014).

Lagrange, J.B. (2017) Connected working spaces for secondary students' understanding of calculus: modelling a suspension bridge through "jigsaw" group work. Colloque Espaces de Travail Mathématique. 18-22 Juillet 2016, University of Western Macedonia.

Lagrange, J. B. & Psycharis, G. (2013) Investigating the Potential of Computer Environments for the Teaching and Learning of Functions: A Double Analysis from Two Research Traditions. Technology, Knowledge and Learning. 19(3), 255-286.

Lagrange, J.B. (2005) Curriculum, Classroom Practice, and Tool Design in the Learning of Functions through Technology-Aided Experimental Approaches, International Journal of Computers for Mathematical Learning 10(2), 143-189.

Legay, O. (2011) Casyopée s'étoffe, Inclass@blɛs Mathématiqu€s http://www.inclassablesmathematiques.fr/tag/casyopée.

Mariotti, M.A. (2013) Le potentiel sémiotique de Casyopée. Postface à Halbert R., Lagrange J.-B., Le Bihan C., Le Feuvre B., Manens M.-C., Meyrier X. (2013), Les fonctions : comprendre et résoudre des problèmes de la 3ème à la Terminale. L'apport d'un logiciel dédié, pp. 78-82, Rennes, IREM de Rennes.

Minh, T.K. & Lagrange, J.B. (2016) Connected functional working spaces: a framework for the teaching and learning of functions at upper secondary level. ZDM Mathematics Education, 48(6), 793–807. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0774-z.

Minh, T. K. (2011) Apprentissage des fonctions au lycée avec un environnement logiciel: situations d'apprentissage et genèse instrumentale des élèves. Thèse de doctorat, Université Paris Diderot. Available at https://tel.archives-ouvertes.fr/

Radford, L. (2005). The semiotics of the schema. Kant, Piaget, and the calculator. In M. H. G. Hoffmann, J. Lenhard & F. Seeger (Eds.), Activity and sign - Grounding mathematics education. Festschrift for Michael Otte (pp. 137-152). New York: Springer.

Thompson, P. W. (2011). Quantitative reasoning and mathematical modeling. In L. L. Hatfield, S. Chamberlain & S. Belbase (Eds.), New perspectives and directions for collaborative research in mathematics education. WISDOMe Mongraphs (Vol. 1, pp. 33-57). Laramie, WY: University of Wyoming.

Youschkevitch, A. P. (1976). The concept of function up to the middle of the 19th century. Archive for History of Exact Sciences, 16(1), 37-85.