Brochure IREM

n°99

Décembre 2017

L'introduction de la fonction exponentielle

examinée sous plusieurs aspects : diverses classes de terminales, la licence, la formation des maîtres, différentes définitions mathématiques, des liens avec la physique

Par le Groupe Analyse de l'IREM de Paris
Composé de Sylvie Alory, Renaud Chorlay, Charlotte Derouet, Dominique Pasquerault, Marc Rogalski, Sophie Rousse, Fabrice Vandebrouck, Laurent Vivier et Mohamed Habib Zorai

INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES
UNIVERSITE PARIS DIDEROT

Imprimé par l'IREM de Paris – Université Denis Diderot Paris 7

Exemplaire **téléchargeable** sur notre site dans la section Publication
http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/

Coordonnées de l'IREM

Pour venir à l'IREM (il est possible de consulter et d'acheter les publications sur place):
Université Paris-Diderot, Bâtiment Sophie-Germain,
8 place Aurélie Nemours (sur l'avenue de France), huitième étage,
75013 Paris 13ème arrondissement
(métro 14 -Bibliothèque François Mitterrand ou tramway ligne T3a – Avenue de france)

Nous Contacter

Pour téléphoner: 01 57 27 91 93

Pour écrire à l'IREM concernant les publications:

par voie postale:
Locufier Nadine
IREM de Paris – Case 7018
Université Paris Diderot
75205 Paris cedex 13

par voie électronique:
nlocufier@irem.univ-paris-diderot.fr

La liste des publications de l'IREM est mise à jour sur notre site web :

http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/ (en bas à gauche de la page d'accueil)

Pour rester informé:

inscription à la liste de diffusion de l'IREM de Paris également sur le site de l'IREM

L’introduction de la fonction exponentielle

examinée sous plusieurs aspects : diverses classes de terminales, la licence, la formation des maîtres, différentes définitions mathématiques, des liens avec la physique

Groupe Analyse de l’IREM de l’Université Paris-Diderot

Sylvie Alory, Renaud Chorlay, Charlotte Derouet, Dominique Pasterault, Marc Rogalski, Sophie Rousse, Fabrice Vandebrouck, Laurent Vivier, Mohamed Habib Zorai

Table des matières

Chapitre 1. Introduction

Suite à la brochure sur l'introduction de la dérivée en classe de première (Brochure IREM 2015), le groupe IREM « Analyse au lycée » de l'université Paris Diderot a décidé de travailler sur l'introduction de la fonction exponentielle qui est peut-être le deuxième « vrai » moment dans l'enseignement secondaire où les élèves commencent à entrevoir des problématiques de l'analyse (après la dérivée). Une autre raison qui nous a poussés à nous intéresser à cette notion est le fait que la fonction exponentielle est abordée dans de nombreuses filières en terminale, et aussi en licence et en formation des maîtres, mais avec des préconisations différentes dans les programmes ou les pratiques, quant à son introduction. En terminale S, il est demandé d'introduire la fonction exponentielle avec la relation $f' = f$, tandis qu'en terminale ES-L, il est demandé d'étendre les suites géométriques q^n à q^x (pour x un nombre réel). En terminale STI2D, la fonction exponentielle est introduite comme réciproque de la fonction logarithme, qui elle-même est amenée par la relation fonctionnelle $f(xy) = f(x) + f(y)$. Cette multitude d'approches nous a semblé riche et intéressante à étudier. L'idée du groupe a donc été de travailler en parallèle sur différentes approches pour introduire la fonction exponentielle en suivant les indications des programmes tout en essayant de pallier les manques ou les maladresses des propositions de certains manuels. Nous n'avons pas ici comme ambition de juger les choix des programmes mais de partir de ceux-ci et faire des propositions concrètes qui essaient de pointer les limites et les difficultés des différentes approches.

Dans cette brochure, nous présentons des propositions d'introduction suivant les différentes approches, mais aussi nous proposons d'éclairer sur les liens entre les différentes approches. Même si les liens ne sont pas tous à expliciter aux élèves, il est intéressant en tant qu'enseignant de les comprendre et d'avoir conscience des avantages et des inconvénients de chacune de ces approches.

Quels sont les différentes approches de la fonction exponentielle ?

Dans une note, Bair et Henry (2009) présentent les différentes facettes de la fonction exponentielle. Les différentes approches pour l'introduction de la fonction exponentielle, que l'on rencontre dans l'enseignement secondaire actuel, en BTS, en licence ou dans la formation des enseignants en préparation au CAPES de mathématiques, sont les suivantes :

- approche par prolongement des suites géométriques : l'introduction de la fonction exponentielle en terminale ES et terminale TMD ;
- approche avec l'équation différentielle $f' = f$: l'introduction de la fonction exponentielle en terminale S ;
- approche comme fonction réciproque de la fonction logarithme : l'introduction de la fonction exponentielle en terminale STI2D ;
- approche avec l'équation fonctionnelle $\boldsymbol{f(x+y) = f(x)f(y)}$: l'introduction de la fonction exponentielle en M1 MEEF 2nd degré parcours Mathématiques (préparation au CAPES) ;
- recherche des fonctions à sous-tangentes constantes : on retrouve l'équation $f' = f$;
- le développement en série $\sum_{p\geq 0} x^p/p!$: approche fréquente en licence ;

On peut y ajouter, mais pas au secondaire, la limite de $(1+x/n)^n$ quand n tend vers l'infini.

Un petit retour historique sur les programmes

Jusqu'en 1967, il n'y a pas d'enseignement au lycée de la fonction exponentielle (sauf à de rares exceptions). En revanche, la fonction logarithme est étudiée avec une utilisation des tables logarithmiques. A partir de 1967, la fonction logarithme est introduite comme primitive de $1/x$ nulle pour $x = 1$ puis la fonction exponentielle est vue comme la fonction réciproque de la fonction logarithme. Cette approche va rester la base de l'enseignement des logarithmes et des exponentielles jusqu'en l'an 2000 (Friedelmeyer, 2005). Comme le mentionne Friedelmeyer (2005) : « *Il est cependant frappant de constater que leur introduction dans l'enseignement secondaire à dominante mathématique est en concordance avec celle de considérations d'analyse fine comme la continuité ou les propriétés de l'ensemble des réels. Nous avions déjà vu que Bertrand introduisait la notion de continuité seulement au moment où il cherchait à définir la fonction a^x pour x réel quelconque. C'est que la fonction exponentielle, du fait qu'elle étend à des réels quelconques une notation qui au départ n'est définie que pour des rationnels, est la première fonction rencontrée par les élèves à poser problème quant à sa définition et son existence même. C'est le nœud des difficultés pour enseigner ces fonctions, et on ne peut pas y échapper, sauf à l'ignorer complètement* » (p. 654). Il pointe du doigt les difficultés inhérentes à la notion qui ne sont pas à négliger. Friedelmeyer (2005) précise qu'avec l'introduction de la fonction exponentielle l'élève rencontre pour la première fois :

> « • *Le problème de l'existence et de la construction d'un objet abstrait qui n'est pas donné immédiatement.*
> • *La déduction argumentée de tout un ensemble de propriétés non évidentes, laquelle met en jeu les concepts nouvellement acquis ou à acquérir de dérivabilité et de continuité.*
> • *Une intuition plus forte de ce qui caractérise le continu de l'ensemble des réels comparé à celui des rationnels et de la densité du second par rapport au premier.* »

Ces points nous semblent effectivement importants.

Dans le programme de terminale S des années 2000, il y avait un fort accent sur les liens entre physique et mathématiques. De plus, contrairement au programme antérieur, il est conseillé d'introduire la fonction exponentielle avant la fonction logarithme.

Des travaux existants

Des travaux plus ou moins récents de groupes IREM notamment ou de travaux de recherche ont déjà travaillé sur la question de l'introduction de la fonction exponentielle. Cependant certains maintenant commencent à dater. De plus, ici nous proposons de regrouper les introductions qui nous semblent pertinentes suivant les différentes approches.

Dans les années 90, les programmes ne précisent plus le mode d'introduction des fonctions ln et exp et la plupart des manuels introduisent d'abord la fonction ln comme primitive de la fonction 1/x s'annulant en 1 et ensuite l'exponentielle comme la fonction réciproque du logarithme népérien (Rezard, 1994). La fonction logarithme est introduite en étant justifiée par le théorème « toute fonction continue sur un intervalle y admet des primitives » admis en terminale et l'unicité connaissant une condition. Puis, l'existence de l'exponentielle résulte de l'existence de la fonction réciproque d'une fonction continue et strictement croissante sur un intervalle. Cependant, ce théorème n'est plus un attendu de la classe de terminale. De plus, comme le précise Rezard, cette approche « *ne met pas en valeur la problématique propre du logarithme et de l'exponentielle, c'est-à-dire la relation entre addition et multiplication* ». C'est pourquoi Rezard propose dans son article d'introduire la fonction exponentielle avant la fonction logarithme par une situation de population de bactéries qui doublent à chaque heure. On retrouve dans sa proposition l'approche préconisée en terminale ES actuellement. Une variante sera décrite dans le chapitre 2. Dans un article de recherche, Doerr (2006) fait une comparaison de plusieurs classes autour du problème des pièces de monnaie sur un damier (duc de Toscane). Cette situation est analogue à celle des bactéries, avec le problème du discret.

L'APMEP en 2005 a publié un dossier *« Fonctions logarithme et exponentielle »* (n°460). Dans ce dossier, nous pouvons retrouver une proposition d'introduction de la fonction exponentielle avec une approche par l'équation différentielle, comme préconisé actuellement en TS (Fréchet, 2005), avec un travail sur des séries entières (sans le dire explicitement aux élèves), des suites de fonctions, des suites adjacentes et un travail avec des factorielles. Cette introduction parait vraiment hors programme dans le contexte actuel, mais correspond peu ou prou à ce qui se fait souvent en licence de mathématiques.

Nous pouvons aussi trouver, dans la littérature, des propositions prenant appui sur des logiciels comme Cabri-Géomètre (Cuppens, 2005).

Signalons aussi le livre (Schneider & al., 20--)), qui comporte une approche très intéressante sur les fonctions exponentielles.

Certaines propositions sont interdisciplinaires, soit lié à l'enseignement de la physique comme c'était préconisé dans les anciens programmes, soit lié à un contexte de recherche particulier. Par exemple, pour éviter la difficulté physique de la radioactivité, (Magnin & Rogalski, 2011) proposent d'étudier la dilution d'une solution saline, problème physique bien plus simple, avec une relation entre l'approche discrète et l'approche par l'équation différentielle.
Nous pouvons citer un exemple au Canada (Caron & Savard, 2012), qui propose l'activité « Assassinat chez Math Thériault », exemple qui a été conçu dans le but d'amener les élèves à découvrir la fonction exponentielle et ses propriétés fondamentales : forme algébrique, allure du graphique et comportement asymptotique. Le contexte d'enquête criminelle amène l'élève, en tant qu'enquêteur, à poser et résoudre une équation exponentielle pour estimer l'heure d'un décès à partir de la température du cadavre (relevée à toutes les heures pendant quatre heures) et, si possible, identifier le suspect principal.

Bibliographie

Berr, J. & Henry, V. (2009), L'exponentielle : une fonction à plusieurs facettes, *Losanges n°3*, 31-37.

Brochure IREM (2015), *Autour de la notion de dérivée en classe de première scientifique*, brochure n° 97 de l'IREM de l'Université Paris-Diderot.

Cuppens, R. (2005), Découvrir l'exponentielle et le logarithme avec Cabri-Géomètre, *APMEP n°460*, 831-854.

Doerr, H. (2006), Teacher’s ways of listening and responding to student’s emerging mathematical models, *ZDM – Mathematics education, 38(3),* 255-268.

Fréchet, M. (2005), Equation différentielle y’= y et fonction exponentielle, *APMEP n°460*, 668-674.

Friedelmeyer, J.-P. (2005), Comment introduire les fonctions logarithmiques et exponentielles au lycée ?, *APMEP n°460,* 645-664.

Magnin, N. & Rogalski, M. (2011), Un scénario pour motiver l’introduction de la fonction exponentielle en terminale S, *APMEP n°492*, 17-29.

Rezard, H. (1994), De la reproduction exponentielle au logarithme népérien, *Repères IREM n°15,* 75-90.

Schneider, M., Balhan, K., Gerard, I., Henrotay, P., (20--), *Du calcul infinitésimal à l’analyse mathématiqu*e, Presses de l’Université de Liège.

Chapitre 2. L'introduction aux fonctions exponentielles en Terminales ES et L

I. Les programmes : les contenus et leur analyse

En Terminales ES et L, selon les termes du programme officiel en vigueur à la rentrée 2012, les fonctions exponentielles doivent être « *présentées comme un prolongement continu des suites géométriques* ». La seule précision du programme à ce propos est : « *On admet que ces fonctions sont dérivables sur* $\mathbb{R}$ *et transforment les sommes en produit* ».
Toujours selon ce programme, la fonction exponentielle doit être définie comme l'unique fonction exponentielle dont la dérivée en 0 est égale à 1. Il est expliqué qu'un logiciel permet d'observer « *qu'entre toutes les fonctions exponentielles, une seule semble avoir 1 pour nombre dérivé en 0* ». Pour finir, le nombre *e* est défini comme l'image de 1 par cette fonction.

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Fonctions exponentielles Fonction $x \mapsto q^x$ avec $q > 0$. Relation fonctionnelle.	• Connaître l'allure de la représentation graphique de la fonction $x \mapsto q^x$ selon les valeurs de q.	Ces fonctions sont présentées comme un prolongement continu des suites géométriques. On admet que ces fonctions sont dérivables sur **R** et transforment les sommes en produits.
Fonction exponentielle $x \mapsto e^x$.	• Connaître la dérivée, les variations et la représentation graphique de la fonction exponentielle. • Utiliser la relation fonctionnelle pour transformer une écriture.	On fait observer à l'aide d'un logiciel qu'entre toutes les fonctions exponentielles, une seule semble avoir 1 pour nombre dérivé en 0. L'existence et l'unicité de cette fonction sont admises. Le nombre e est l'image de 1 par cette fonction.
Dérivée de $x \mapsto e^{u(x)}$ où u est une fonction dérivable.	• Calculer la dérivée d'une fonction de la forme $x \mapsto e^{u(x)}$.	On étudie des exemples de fonctions de la forme $x \mapsto e^{u(x)}$ notamment avec $u(x) = -kx$ ou $u(x) = -kx^2$ ($k > 0$), qui sont utilisés dans des domaines variés. La notion générale de composée est hors programme.

Extrait du Bulletin Officiel spécial n°8 du 13 octobre 2011, page 4

(a) La continuité en Terminales ES et L :

Dans leur programme de mathématiques officiel, les élèves de filières ES et L rencontrent pour la première fois le mot « continu » (du moins un mot qui en dérive), en Terminale, dans un intitulé de la colonne « *Contenus* » : « *Notion de continuité sur un intervalle* ».

Notion de continuité sur un intervalle	• Exploiter le tableau de variation pour déterminer : - le nombre de solutions d'une équation du type $f(x) = k$; - le signe d'une fonction.	On se limite à une approche intuitive et on admet que les fonctions usuelles sont continues par intervalle. La propriété des valeurs intermédiaires est présentée graphiquement ; on convient que les flèches obliques d'un tableau de variation traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré. On admet qu'une fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle.

Extrait du Bulletin Officiel spécial n°8 du 13 octobre 2011, page 3

Aucune « *capacité* » n'est attendue à propos de la définition de la continuité. Seul un « *commentaire* » apparait : « *on se limite à une approche intuitive et on admet que les fonctions usuelles sont continues par intervalle* ».
Ainsi, toute définition mathématique de la continuité d'une fonction est écartée. La continuité ne peut vivre en Terminale ES ou L que comme un concept « en acte ».
Rien n'est indiqué concernant l'intuition de la continuité à convoquer auprès des élèves.
Quelques expériences permettent aux individus de se représenter le continu et peuvent donc participer de la construction du concept « en acte » de continuité : l'écoulement du temps, le mouvement d'un objet qui ne saute pas, le tracé d'une ligne au crayon sans le lever, la corde d'un seul tenant. Nul doute que dans un contexte de fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$, le support intuitif de la continuité tout désigné est le tracé de la courbe de cette fonction sans lever le crayon !

Bien qu'échappant à toute définition rigoureuse, la continuité d'une fonction sur un intervalle fait l'objet de deux énoncés de propriétés rigoureux.
L'un d'eux est que toute fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle
L'autre est la propriété des valeurs intermédiaires. Elle apparait dans la colonne des commentaires comme une propriété « en acte » :
- elle doit être « *présentée* » aux élèves dans le cadre graphique ;
- le registre de représentation des tableaux de variation est son support de mise en application ; les flèches y symbolisent la continuité de la fonction, en plus de sa stricte monotonie par morceaux ; les valeurs des images des bornes des intervalles de stricte monotonie, placées « au bout » des flèches, complètent cette représentation toute en symboles.

L'utilisation du registre de la langue naturelle n'est pas exclue par le programme officiel, l'exposé de connaissances peut comporter un énoncé rigoureux de la propriété des valeurs intermédiaires. Cependant sa mise en application ne nécessite de la part des élèves de Terminales ES et L que l'élaboration d'un tableau de variations.

(b) Vous avez dit prolongement ?

Le mot « prolongement » est proche du mot « prolongation ». Les élèves de Terminale ES, qui ne l'ont *a priori* pas encore rencontré dans leur cursus en mathématiques, risquent donc de le comprendre dans un sens plus proche d'« aller plus loin » que le sens visé d'« extension ». Vis-à-vis des élèves, sa signification mérite de leur être explicitée.
Finalement, en quoi les fonctions exponentielles seraient-elles un « prolongement continu des suites géométriques » ?
Après un rapide détour historique, nous aborderons cette question d'un point de vue mathématique et ferons un tour d'horizon de ce qui se prolonge (ou pas) dans le cadre d'un

enseignement des fonctions exponentielles à partir des suites géométriques en Terminale ES ou L.

Prolongement de la notation exponentielle – un point de vue historique :
D'après Michel Serfati (2005)[1], cette notation est apparue au XVIIe siècle. Après que Descartes ait créé la notation d'exposant a^3, Newton l'a immédiatement reprise pour la généraliser à a^p où p est « le signe d'un donné indéterminé ». Newton, dans une lettre à Leibniz, définit le nombre $a^{\frac{m}{n}}$ où m et n désignent des entiers. Puis Leibniz étendit l'exponentielle à a^x où x désigne un nombre « indéterminé », implicitement, avec le langage d'aujourd'hui, un réel positif. D'après Serfati, « *cependant à aucun moment il n'évoque une procédure de cette « forme » : c'est une « forme » sans signification.* » La « forme » a^x, bien que non définie par Leibniz, embarquait avec elle les propriétés algébriques connues pour des exposants entiers positifs. Elle permit dès lors la manipulation de « formes » plus complexes, comme $a^{(2x)+y}$.
Toujours selon Serfati (2005), malgré l'absence de définition de cette « forme », son utilité l'a imposée à tel point que Leibniz pensait que l'exponentielle expliquerait tout. Serfati explique volontiers que, dans l'histoire des mathématiques, certaines notations passent de l'acceptable à l'utile, puis deviennent nécessaires et finalement naturelles.
C'est Euler qui donna à la « forme » a^x, quelques dizaines d'années plus tard, une définition.

Le « principe de prolongement » tel que Serfati le définit à la fin de son ouvrage précité est le suivant : « *Tout objet, toute formule mathématique, apparemment en soi, peut le cas échéant être regardé comme une instance seulement d'un objet ou d'un canon plus vaste qui le recouvre et le prolonge sur le plan signifiant, cependant que sa forme symbolique est inchangée* ».
Ce principe permet de décrire l'émergence historique de l'exponentielle de base réelle positive à exposant réel : la « forme » symbolique de l'exponentiation permit de prolonger les propriétés algébriques des exposants entiers naturels aux exposants « indéterminés », précédent de plusieurs décennies toute définition des exponentielles à exposants non entiers.

Historiquement, le registre de représentation symbolique dans lequel s'inscrit la notation exponentielle, au sein du cadre algébrique, permet de passer de a^p avec a réel fixé et p entier naturel fixé à a^p avec a réel fixé et p réel indéterminé. Ce registre embarque les propriétés algébriques de l'exponentielle. On peut faire l'hypothèse qu'il pourrait en être de même pour les élèves.
Remarquons qu'à l'époque de Leibniz, l'exposant est une indéterminée ; la question de la « forme » prédomine ! Par opposition, dans la partie du programme officiel de 2012 qui nous préoccupe, l'exposant est une variable.

Deux définitions mathématiques de q^x par prolongement de q^n

Du point de vue de la théorie mathématique, on peut définir q^x où x est réel à partir de q^n de différentes façons. Dans tous les cas, on définit dans un premier temps q^x pour x entier négatif et pour x nombre rationnel. Nous ne reviendrons pas ici sur ces définitions qui sont courantes.
Examinons les notions mathématiques mises en œuvre dans deux approches et les points de vue qu'elles véhiculent :

[1] Serfati, M. (2005). *La révolution symbolique.* Editions Petra. Paris

- Si x est réel, on définit q^x comme limite des q^{x_n} où (x_n) est une suite de rationnels qui converge vers x.
  Ce procédé permet de définir q^x pour chaque réel x en adoptant un point de vue local. Dans ce cas, la propriété de transformation des sommes en produits se déduit de la définition de q^x par un passage à la limite de cette même propriété vérifiée sur l'ensemble des rationnels. Demailly (2010) [2] propose un parcours mathématique de ce type, abordable avec un bagage en analyse limité. Il y déduit les limites, la continuité et la dérivabilité des fonctions exponentielles par des jeux de majorations et minorations.

- On définit q^x sur $\mathbb{R}$ par le théorème et la définition suivantes.

> Soit q un réel strictement positif.
>
> Il existe une unique fonction f définie sur $\mathbb{R}$ qui prolonge à $\mathbb{R}$ la suite géométrique $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et qui satisfait les conditions suivantes :
>
> - f est continue sur $\mathbb{R}$;
> - pour tous x et y réels , $f(x+y)=f(x)\times f(y)$.
>
> Cette fonction est appelée fonction exponentielle de base q.
>
> On note, pour tout réel x, $f(x) = q^x$.

Dans cette deuxième approche, la fonction $x \longmapsto q^x$ est définie comme une fonction qui est continue et qui vérifie la propriété de transformation des sommes en produits. On peut montrer dans un premier temps que, sur $\mathbb{Q}$, elle coïncide nécessairement avec l'exponentielle de base q. Un passage à la limite qui utilise sa propriété de continuité permet de la construire sur $\mathbb{R}$ [3]. Ainsi le réel q^x où x est un réel est construit par une approche locale. Cependant, l'énoncé de ce théorème et définition offre un point de vue global de la fonction exponentielle de base q.
Remarquons que la condition de continuité sur $\mathbb{R}$ peut être remplacée par une condition de continuité (ou de dérivabilité) en un point ou bien entendu par une condition de dérivabilité sur $\mathbb{R}$.
Ces deux approches s'appuient sur la définition des puissances à exposants positifs entiers. La définition de l'ensemble des nombres réels en tant qu'ensemble des limites de suites de nombres rationnels est nécessaire dans les deux cas. Celle de continuité d'une fonction l'est uniquement dans le deuxième cas.

Compte tenu de l'intitulé du programme officiel et l'injonction de procéder par prolongement des suites géométriques, la deuxième façon semble opportune pour un cours de Terminale ES ou L, à condition d'admettre le théorème : les élèves n'ont à leur disposition aucune définition rigoureuse des nombres réels, de la notion de limite et de celle de continuité d'une fonction. De ces objets et notions mathématiques, ils disposent cependant de quelques « définitions en acte » et/ou de représentations mentales ou gestuelles dans le cadre graphique.
Par ailleurs, pour des élèves de Terminale ES ou L, il est certainement préférable d'énoncer le théorème et définition avec une condition à caractère global de continuité ou de dérivabilité sur $\mathbb{R}$, plutôt qu'une condition à caractère local de continuité ou de dérivabilité en un seul

[2] Demailly, J.P. (2010). Puissances, exponentielles, logarithmes, de l'école primaire à la terminale. A l'adresse : https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/manuscripts/log_exp.pdf
[3] Pour plus de détails, voir le chapitre 5 §III de cette brochure.

point : il est difficile conceptuellement de comprendre qu'une propriété locale en un point puisse avoir pour conséquence la même propriété globalement sur $\mathbb{R}$.
Quant à elle, la première façon fait certainement appel à des notions trop théoriques pour des élèves de la série ES ou L qui ne disposent d'aucune connaissance (définitions ou théorèmes), même en acte, concernant l'approximation d'un réel par une suite de rationnels. Leurs connaissances concernant les nombres irrationnels (donc la différence entre les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$) sont pauvres : d'une part, rappelons que l'étude des ensembles de nombres n'est plus un objectif du programme de seconde ; d'autre part les objectifs des programmes des filières ES et L ne permettent pas d'approfondir ce sujet.
Remarquons qu'admettre « *que ces fonctions sont dérivables sur* $\mathbb{R}$ *et transforment les sommes en produit* », tel qu'indiqué dans le programme de 2012, est cependant contradictoire avec la seconde façon d'introduire les fonctions exponentielles décrite ci-dessus : ce sont l'existence et l'unicité d'un tel prolongement qui sont alors admis.

Prolongement de la monotonie
La propriété de monotonie des fonctions exponentielles se déduit de l'une ou de l'autre définition de q^x énoncée préalablement ; la fonction $x \longmapsto q^x$ a le même sens de variation que la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Les propriétés de monotonie des suites géométriques s'étendent donc aux fonctions exponentielles.

Prolongement du vocabulaire
Le prolongement de q^n à q^x embarque celui du vocabulaire associé aux exponentielles : les mots « base », « exposant », « puissance » sont utilisés de la même manière que l'exposant soit entier ou non. Notons une exception : on peut dire « exponentielle de x » pour e^x, ce vocabulaire est absent dans le cas où seuls les exposants entiers positifs sont connus des élèves.
Le vocabulaire associé à la monotonie des suites est lui aussi conservé : croissance, décroissance.

Prolongement du point de vue graphique
En reliant les points de la représentation graphique de $x \longmapsto q^x$ définie sur $\mathbb{Z}$, on obtient une courbe d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Son unicité peut sembler aller de soi pour un non expert, surtout s'il relie lui-même au crayon et à main levée des points à abscisses entières consécutives avec de petites unités graphiques (comme le ferait un enfant).
Cette façon de relier les points peut être qualifiée de « continue » dans son sens intuitif de « sans lever le crayon ». Ce peut être d'ailleurs la définition informelle de la continuité d'une fonction adoptée par un enseignant en Terminale ES dans le cadre du programme de 2012.
Implicitement, le non expert trace de cette façon la représentation graphique d'une fonction monotone sur $\mathbb{R}$ (le crayon ne fait que « monter » ou « descendre », comme semblent l'imposer les points représentant la suite) et dérivable sur $\mathbb{R}$ (pour l'absence de points anguleux).

Qu'en est-il de la calculatrice ?

La touche « ^ » ou « y^x » de la calculatrice est utilisée de la même façon, que l'exposant x soit un entier positif ou un réel quelconque. Le fait même qu'elle donne un résultat, quel que soit l'exposant réel, pour une base strictement positive, peut pour les élèves sembler suffire à montrer son existence. De plus, les calculatrices graphiques en fournissent une courbe qui peut leur sembler être « la courbe qui va de soi », « régulière et continue ». Il en est de même avec un tableur ou un traceur. Les outils numériques et particulièrement l'outil personnel des élèves qu'est leur calculatrice graphique semble donc apporter le prolongement des suites géométriques aux fonctions exponentielles « clef en main » : les élèves disposent d'un moyen de calculer des valeurs approchées et d'un moyen de représenter graphiquement les fonctions exponentielles.

Conclusion
Le prolongement des suites géométriques à bases strictement positives aux fonctions $x \longmapsto q^x$ définies sur $\mathbb{R}$ avec conservation de la propriété de transformation des sommes en produit ne va pas de soi mathématiquement. Pour le moins, une hypothèse de continuité en un point est nécessaire (voir aussi le chapitre 5 appendice 2).
Si un exposé théorique est certainement éloigné des connaissances et des pratiques d'élèves de Terminale ES, une simple constatation graphique parait en être une introduction bien maigre compte tenu de ce qui se joue mathématiquement dans ce passage du discret de $\mathbb{N}$ au continu de $\mathbb{R}$.
Quels pourraient être les besoins des élèves, relativement à la construction des fonctions exponentielles ? On peut penser que, pour le moins, ils pourraient retenir qu'il se passe quelque chose qui n'est pas simple dans ce passage et que remplacer n par x ne dit pas grand-chose sur ce qu'est effectivement q^x. Et bien évidemment que la propriété de transformation de sommes en produits est conservée, propriété qu'ils auront à appliquer maintes fois au cours de leur année de Terminale.
Enfin, selon la tendance des programmes officiels et des examens nationaux, la modélisation est de plus en plus au cœur des tâches dévolues aux élèves de lycée. Les phénomènes étudiés en filière ES peuvent relever du discret comme du continu, ils peuvent être modélisés dans le discret par des suites comme dans le continu par des fonctions. Introduire les fonctions exponentielles par la modélisation d'un phénomène continu modélisé en premier lieu par une suite géométrique peut être une excellente occasion de donner du sens aux tâches de modélisations tout en montrant (au moins partiellement) aux élèves pour quoi et comment on « remplit » du discret pour arriver à du continu.

Nous allons explorer quelques alternatives proposées par quatre manuels, puis des scénarios réalisés en classe par différents enseignants.

II. Etude de l'introduction aux fonctions exponentielles via les suites géométriques dans quatre manuels de terminales ES et L édités en 2012

Le programme officiel laisse une marge de manœuvre importante aux concepteurs de manuels et aux enseignants dans ce que ce programme dénomme la « présentation » des fonctions exponentielles. Nous analyserons quatre manuels édités en 2012 lors de la parution des « nouveaux » programmes de Terminale. Nous les avons choisis pour la diversité des introductions aux fonctions exponentielles qu'ils offrent ainsi que la proximité de ces introductions avec les choix de nos collègues de Terminales ES et L.

(a) Manuel « Hyperbole » Terminales ES et L, éditions Nathan, 2012

L'introduction aux fonctions exponentielles est faite au sein du deuxième chapitre de ce manuel, intitulé « les fonctions exponentielles ». Le premier chapitre a pour titre « Suites géométriques » et le troisième « Notion de continuité sur un intervalle ».
La notion de continuité d'une fonction n'est donc abordée qu'au chapitre qui suit celui dans lequel les fonctions exponentielles sont présentées comme « *un prolongement continu des suites géométriques* » selon les termes du programme officiel.

L'« activité d'approche » 1 : Evolution d'un marché immobilier

Objectif
Découvrir une modélisation continue.

1 Évolution d'un marché immobilier

Dans un pays fictif, les prix de l'immobilier progressent, depuis 2008, de 21 % par an. Un appartement est estimé à 100 000 unités monétaires (um) au 1er janvier 2011.

On se propose d'observer l'évolution de la valeur de ce bien immobilier au fil du temps.

L'instant $t = 0$ est le 1er janvier 2011 et on note $v(t)$ la valeur de ce bien en centaines de milliers d'um à l'instant t (en années). Ainsi $v(0) = 1$.

1 Pour tout nombre entier naturel n, on pose $u_n = v(n)$.
Quelle est la nature de la suite u ? Calculer u_1 et interpréter.

2 a) Calculer $v(-1)$ et $v(-2)$. Interpréter ces résultats.
b) Avec un tableur, tabuler la fonction v sur l'intervalle $[-2\,;6]$ avec le pas 1 et représenter graphiquement ce tableau.

3 Le propriétaire souhaite connaître la valeur de l'appartement début juillet 2011.
a) Déterminer le taux équivalent pour un semestre au taux annuel de 21 %.
b) En déduire $v(0{,}5)$. Calculer alors $v(1{,}5)$ et $v(2{,}5)$, puis interpréter.
c) Vérifier que $v(1{,}5) = v(1 + 0{,}5) = v(1) \times v(0{,}5)$ et $v(2{,}5) = v(1 + 1{,}5) = v(1) \times v(1{,}5)$.
d) Avec un tableur, tabuler la fonction v sur l'intervalle $[-2\,;6]$ avec le pas 0,5 et représenter graphiquement ce tableau.

4 On observe maintenant l'évolution de la valeur du bien, mois par mois.
a) Vérifier que 1,6 % est le taux mensuel approché équivalent à un taux annuel de 21 %.
b) En déduire $v\left(\frac{1}{12}\right)$, c'est-à-dire la valeur du bien au 1er février 2011.
c) Avec le tableur, tabuler la fonction v sur l'intervalle $[-2\,;6]$ avec le pas $\frac{1}{12}$ et représenter graphiquement ce tableau.

5 Afficher à l'écran de la calculatrice, la courbe de la fonction $x \mapsto 1{,}21^x$ sur $[-2\,;6]$ et tabuler la fonction avec le pas $\frac{1}{12}$. Comparer avec les résultats de la question **4**.

Note
On dit que cette fonction est **la fonction exponentielle de base 1,21**, sa courbe prolonge le nuage représentatif de la suite v de la question **1**.

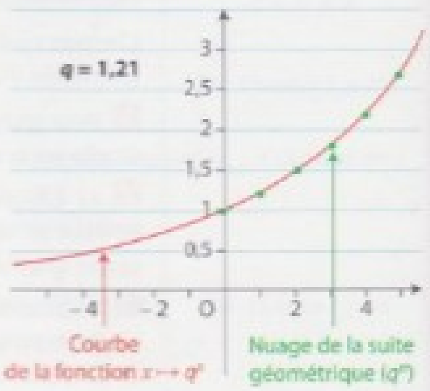
Son objectif explicite est de « *découvrir une modélisation continue* ».
Elle se propose d'étudier une évolution des prix de l'immobilier qui « *progressent depuis 2008 de 21% par an* », en fonction du temps en nombre d'années. L'origine du temps est au 1er janvier 2011. La variable est notée t. Rien n'est dit concernant l'ensemble auquel elle appartient. Il pourrait s'agir de $\mathbb{N}$ puisque dans le langage courant il est généralement question d'évolution de l'immobilier par an ou par groupe d'années entières. Cependant, la notation utilisée pour la valeur du bien en fonction du temps en centaines d'unités monétaires, $v(t)$, de type fonctionnel, peut suggérer que v est, selon l'usage au lycée général, définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$.
Résumons le passage du discret positif au continu dans cette « activité d'approche » : le temps (substrat dont on peut supposer qu'il peut être perçu comme continu par les élèves) est dans cette « activité d'approche » discrétisé en années, puis en demi-années et enfin en douzièmes d'années. Implicitement, cette discrétisation pourrait se poursuivre avec les semaines, les

jours, les heures… indéfiniment, le temps pouvant être perçu comme divisible à l'infini. De plus, quelle que soit l'origine prise pour la variable temps, l'élève peut admettre que la variable prenne aussi bien des valeurs positives et des valeurs négatives.
Le temps est ainsi mesuré tout d'abord en nombres entiers positifs d'années puis en nombres entiers relatifs d'années et enfin en fractions d'années.
Ces fractions peuvent apparaitre comme quelconques. Ainsi, si la divisibilité à l'infini du temps est considérée comme allant de soi, un argument qu'on pourrait qualifier de « physique » justifie que la fonction v ait un ensemble de départ incluant $\mathbb{Q}$.
Les élèves sont en mesure de calculer à l'aide de la calculatrice les valeurs de $v(t)$ lorsque t est entier, lorsqu'il est un multiple de $\frac{1}{2}$ puis de $\frac{1}{12}$. Ils construisent donc en partie, dans le cadre numérique, la nouvelle fonction. Une fois le procédé de calcul établi, le tableur permet de générer toutes les valeurs fractionnaires de ce type dans un intervalle borné. La généralisation du procédé à toutes les fractions est passé sous silence mais peut faire l'objet d'une expérience de pensée.
Le prolongement de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$, lui aussi passé sous silence, est « à la charge » de la calculatrice : sous le mode « fonction », l'utilisateur peut y entrer $x \mapsto 1{,}21^x$; le mode « fonction » de la calculatrice et les notations sont ceux du continu ; l'affichage de la courbe montre une courbe « continue ».
Nous pouvons cependant faire l'hypothèse que les élèves n'éprouvent pas le besoin de combler les « trous » qui subsistent dans l'ensemble des rationnels, compte tenu des connaissances réduites des élèves de filière ES au sujet des irrationnels.

Cette « activité d'approche », en plus des difficultés intrinsèques au prolongement qu'elle tente de présenter, comporte des embuches pour les élèves liées au calcul approché, à l'utilisation du tableur dans la génération des termes d'une suite. Les différents types de graphiques qui sont disponibles pour représenter des données discrètes sur tableur peuvent brouiller les objectifs de cette « activité ».
Selon le travail qui aura été fait en amont, les questions qui concernent les calculs de taux semestriel et mensuel peuvent excéder les capacités des élèves de Terminale ES, ou pas.
Pour ces raisons, à moins que l'enseignant ne dispose d'une longue plage horaire et d'effectifs réduits (ce qui est rare), il semble difficile de la donner dans sa totalité aux élèves seuls ou par groupe, et préférable d'effectuer en classe entière au minimum les questions délicates.
De plus c'est le jeu entre cadres numérique, algébrique et graphique, sous tendu par une situation modélisée qui évolue en fonction du temps, qui permet de mettre en scène le prolongement opéré de suite à fonction, d'exposant entier à exposant réel quelconque avec conservation de la transformation des sommes en produits, de points isolés à courbe continue. Ce jeu reste dans sa plus grande partie à la charge de l'enseignant.

L'exposé de connaissances définissant les fonctions exponentielles

PROPRIÉTÉ-DÉFINITION q désigne un nombre réel strictement positif. On considère le nuage de points représentatif de la suite géométrique (q^n).
Il existe **une unique** fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et qui satisfait aux conditions suivantes :
(1) la courbe représentative de f réalise un prolongement continu de ce nuage ;
(2) f est dérivable sur $\mathbb{R}$;
(3) pour tous nombres réels x et y, $f(x+y) = f(x) \times f(y)$ (on dit qu'il s'agit d'**une relation fonctionnelle**).
Cette fonction est appelée **la fonction exponentielle** de base q. On note pour tout nombre réel x, $\boldsymbol{f(x) = q^x}$.



La propriété-définition énoncée est mathématiquement rigoureuse. Elle invoque explicitement le prolongement du nuage de points représentatif de la suite géométrique tel qu'exposé dans l'« activité d'approche » analysée ci-dessus ; de surcroit, l'exemple choisi dans le cadre graphique est celui de la suite géométrique de raison 1,21 et de la fonction $x \mapsto 1{,}21^x$ qui modélisent la situation de l'évolution du marché immobilier dans cette même « activité ».

(b) Manuel « Odyssée » Terminales ES et L, éditions Hatier, 2012

Dans le manuel « Odyssée » de 2012, les fonctions exponentielles sont introduites et étudiées au chapitre 3. Les deux précédents chapitres s'intitulent : « suites » pour le premier ; « fonctions » pour le deuxième. C'est dans le deuxième chapitre qu'est définie la continuité d'une fonction.

L'activité 1 intitulée : « Du discret au continu »

1 Du discret au continu

Réinvestir : • Les suites géométriques.
Découvrir : • La moyenne géométrique.
• Les fonctions exponentielles.

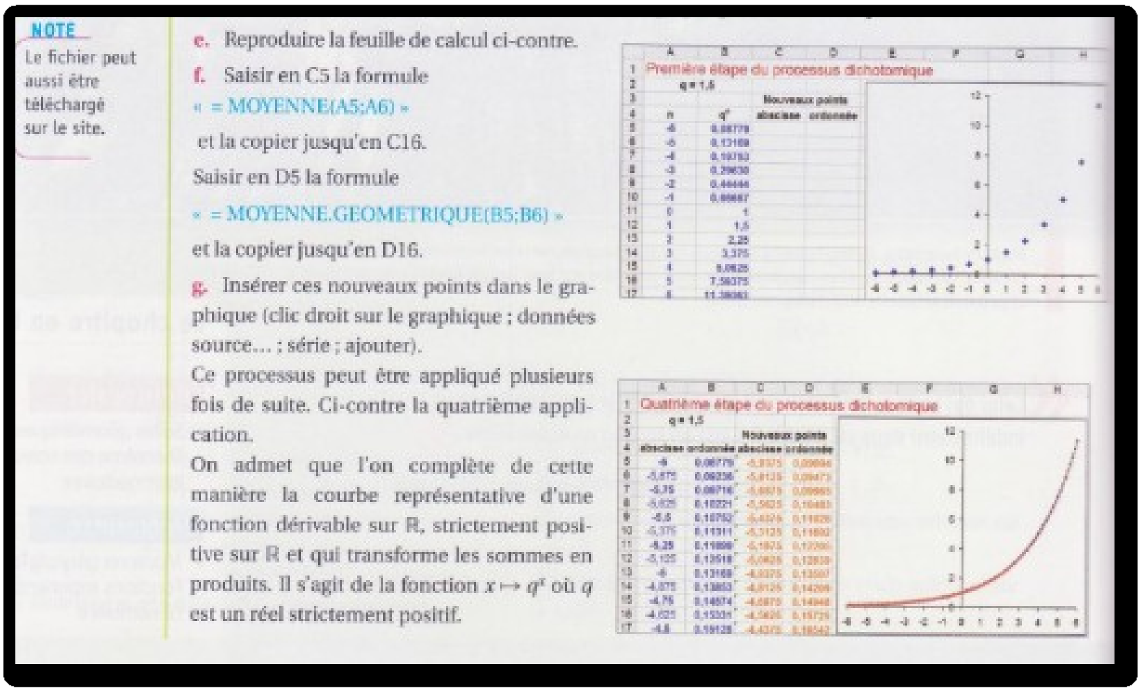
1 Soit la suite géométrique (u_n) de raison $q = 1{,}5$ et de premier terme $u_0 = 1$.
a. Exprimer u_n en fonction de l'entier naturel n.
b. À l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, calculer les 7 premiers termes de la suite (u_n).

2 Prolongement sur les entiers négatifs
Pour tout entier naturel n, $1{,}5^{-n} = \dfrac{1}{1{,}5^n}$, donc on peut compléter la suite (u_n) pour les entiers négatifs.
Avec un tableur, calculer $1{,}5^n$ pour n entier compris entre -6 et 6 puis représenter le nuage des points de coordonnées $(n\,;\,1{,}5^n)$.

3 Prolongement par dichotomie
Soit le point $B(n\,;\,1{,}5^n)$ du graphique précédent.
a. Quelle est l'ordonnée y_A du point A d'abscisse $n-1$ du graphique ?
b. Quelle est l'ordonnée y_C du point C d'abscisse $n+1$ du graphique ?
c. Comparer la **moyenne arithmétique** des abscisses des points A et C à l'abscisse de B.
d. Quelle remarque peut-on faire sur le réel $\sqrt{y_A \times y_C}$?

REMARQUE La **moyenne géométrique** des réels strictement positifs a et b est le réel $\sqrt{a \times b}$.
Les points du graphique vérifient donc la propriété suivante : « Chaque point a pour abscisse la **moyenne arithmétique** des abscisses des deux points qui l'entourent et a pour ordonnée la **moyenne géométrique** des ordonnées des deux points qui l'entourent ». Cette propriété permet d'ajouter entre deux points consécutifs du graphique un nouveau point.

L'intitulé de cette activité est (relativement) explicite pour l'enseignant. Pour leur part, les élèves devraient avoir rencontré la continuité d'une fonction au chapitre précédent. Le mot « discret » a pu, ou pas, être utilisé par l'enseignant et peut donner lieu à des questions des élèves.
Les buts du concepteur en sont explicites : cette « activité » d'après lui, permet de « *réinvestir les suites géométriques* » et de « *découvrir la moyenne géométrique et les fonctions exponentielles* ».
Mathématiquement, le processus décrit dans cette « activité » permet de construire la fonction exponentielle de base 1,5 sur l'ensemble des rationnels de la forme $\frac{k}{2^n}$ $(k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N})$. La propriété de divisibilité à l'infini de $\mathbb{R}$ est ici utilisée. Or tout nombre réel x est la limite d'une suite (x_n) de rationnels de cette forme, construite par dichotomie. L'image de x par la fonction exponentielle de base 1,5 s'obtient par passage à la limite de la suite de terme général $1{,}5^{x_n}$.

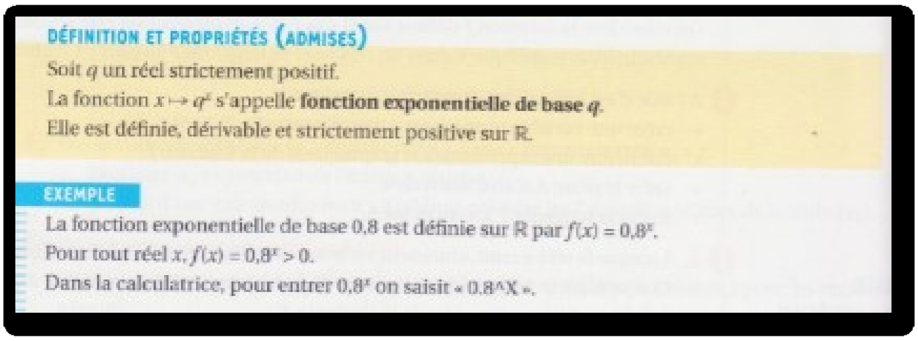


Il est donc faux d'affirmer comme le fait la conclusion de cette « activité » « *que l'on complète de cette manière la courbe représentative d'une fonction dérivable sur* $\mathbb{R}$ ». Tout au plus la courbe est-elle prolongée à celle d'une fonction définie sur un ensemble dense dans $\mathbb{R}$.
Il serait certainement peu adapté de dire aux élèves que ce prolongement de la suite géométrique généralisée à $\mathbb{Z}$, à une fonction définie sur $\mathbb{R}$, est le résultat du passage à la limite d'un processus dichotomique.
L'enseignant peut en revanche leur expliquer que le processus décrit par cette « activité » peut être « *appliqué plusieurs fois de suite* » bien sûr, mais aussi autant de fois que l'on veut (autrement dit à l'infini). C'est la propriété de divisibilité à l'infini de $\mathbb{R}$ qui est mobilisée alors. Les « trous » qui restent peuvent passer inaperçus aux yeux des élèves ; la divisibilité à l'infini a constitué un support à intuition du continu pendant des siècles. Les résultats dans les cadres numérique et graphique obtenus dans cette « activité » peuvent corroborer cette intuition. L'enseignant devrait cependant être prêt à répondre à des questions plus poussées.

L’activité se termine par une phrase qui à la fois conclut le travail fait à partir de la suite géométrique de base 1,5 et généralise subitement le processus à toute base q, réel strictement positif quelconque. Ce peut être difficile à suivre pour les élèves.

L’utilisation du tableur avec une gestion éclairée des graphiques qu’il propose est centrale à la bonne mise en œuvre de cette « activité ». Quant à elle, la calculatrice graphique comporte le risque de court-circuiter le cheminement proposé dès la question 2 !
L’ « activité » 1 affirme dans sa conclusion que la fonction obtenue transforme les sommes en produit. La relation fonctionnelle en est pourtant une grande absente. Les élèves pourraient être invités à la vérifier (de façon approchée) sur quelques exemples numériques calculés par le tableur.
Avec des élèves performants en calcul algébrique, la relation $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \sqrt{f(a) \times f(b)}$ qui sert de base au processus dichotomique pourrait être mise en valeur, puis faire le lien avec la relation fonctionnelle.
Etant données les difficultés d’ordre de technique algébrique, le manque possible de pratique du tableur par les élèves en séries ES et L ainsi que les difficultés conceptuelles liée à ce prolongement et le peu de commentaires qui l’accompagnent dans le manuel, l’intervention de l’enseignant est indispensable à la mise en œuvre de cette « activité ». Seul son discours adapté peut éclairer les élèves sur ce qui se joue effectivement dans ce processus dichotomique.

L’exposition de connaissances


DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS (ADMISES)

Soit q un réel strictement positif.
La fonction $x \mapsto q^x$ s'appelle **fonction exponentielle de base q**.
Elle est définie, dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$.

EXEMPLE

La fonction exponentielle de base 0,8 est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0,8^x$.
Pour tout réel x, $f(x) = 0,8^x > 0$.
Dans la calculatrice, pour entrer $0,8^x$ on saisit « 0.8^X ».

La « définition » des fonctions exponentielles proposée par ce manuel repose sur le prolongement de la forme algébrique de l’exponentiation, par substitution de la lettre x à la lettre n.
Il ne s’agit donc pas d’une définition ; cet énoncé ressemble à la démarche de Leibniz décrite au début de cette partie.
De façon surprenante, elle ne comporte rien qui rappelle que les fonctions exponentielles sont mathématiquement le fruit d’une construction, dont l’une est ébauchée dans l’ « activité » 1. Elle laisse croire que la forme peut tenir lieu de définition, alors que « la notation ne fait pas la fonction » !
Il se peut que le concepteur ait pensé son énoncé comme faisant suite à une définition de q^x préalable (peut-être comme suite directe de l’ « activité » 1). Il serait préférable d’être plus explicite, l’implicite crée un manque dans la construction du nouvel objet mathématique.

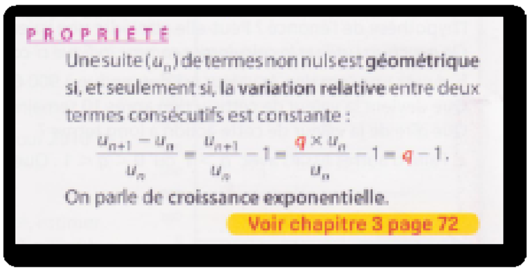
La « Définition et propriétés » des fonctions exponentielles de ce manuel présente une confusion entre ce qui tient de la définition et ce qui tient des propriétés. Elle laisse même à penser que le prolongement de $\mathbb{N}$ (ou $\mathbb{Z}$) à $\mathbb{R}$, de la « forme » exponentielle peut tenir lieu de définition. Les justifications des propriétés énoncées par la suite présentent pour certaines des manques voire des incohérences, notamment dans leurs prolongements de $\mathbb{N}$ (ou $\mathbb{Z}$) à $\mathbb{R}$.

Ces prolongements semblent rentrer en jeu pour masquer un manque d'arguments - dont on ne peut attendre qu'ils soient tous d'ordre mathématique à ce niveau d'enseignement, mais qui pourraient davantage s'appuyer sur des registres de représentation variés… ou des propriétés explicitement admises.
Le décalage entre l' « activité » 1 qui tente un début de construction mathématique des fonctions exponentielles, et les non-dits de sa conclusion ainsi que le manque de rigueur de l'exposé de connaissances, est étonnant.
Serait-ce dû à la difficulté éprouvée par le concepteur devant un prolongement qui est à la fois si « facile à voir » grâce au tableur, à la calculatrice graphique et à la notation, et si difficile à justifier auprès d'élèves qui ont un bagage mathématique modéré en analyse ?

(c) Manuel « Déclic », Terminale ES, éditions Hachette, 2012

Le manuel « Déclic » fait le choix de traiter les fonctions exponentielles dans le troisième chapitre, après un premier chapitre intitulé « Suites » et un deuxième chapitre intitulé « Continuité et convexité ».

Des quatre manuels analysés dans ce travail, celui-ci est le seul à aborder la notion de variation relative. Elle ne figure en effet pas au programme officiel de mathématiques. Celle-ci figure dans l'index du manuel et y fait référence à 7 pages différentes, au sein des chapitres 1 (sur les suites) et 3 (sur les fonctions exponentielles). Dans le chapitre 1, une propriété caractéristique des suites géométriques y est énoncée dans l'exposé de connaissances :


PROPRIÉTÉ

Une suite (u_n) de termes non nuls est **géométrique** si, et seulement si, la **variation relative** entre deux termes consécutifs est constante :

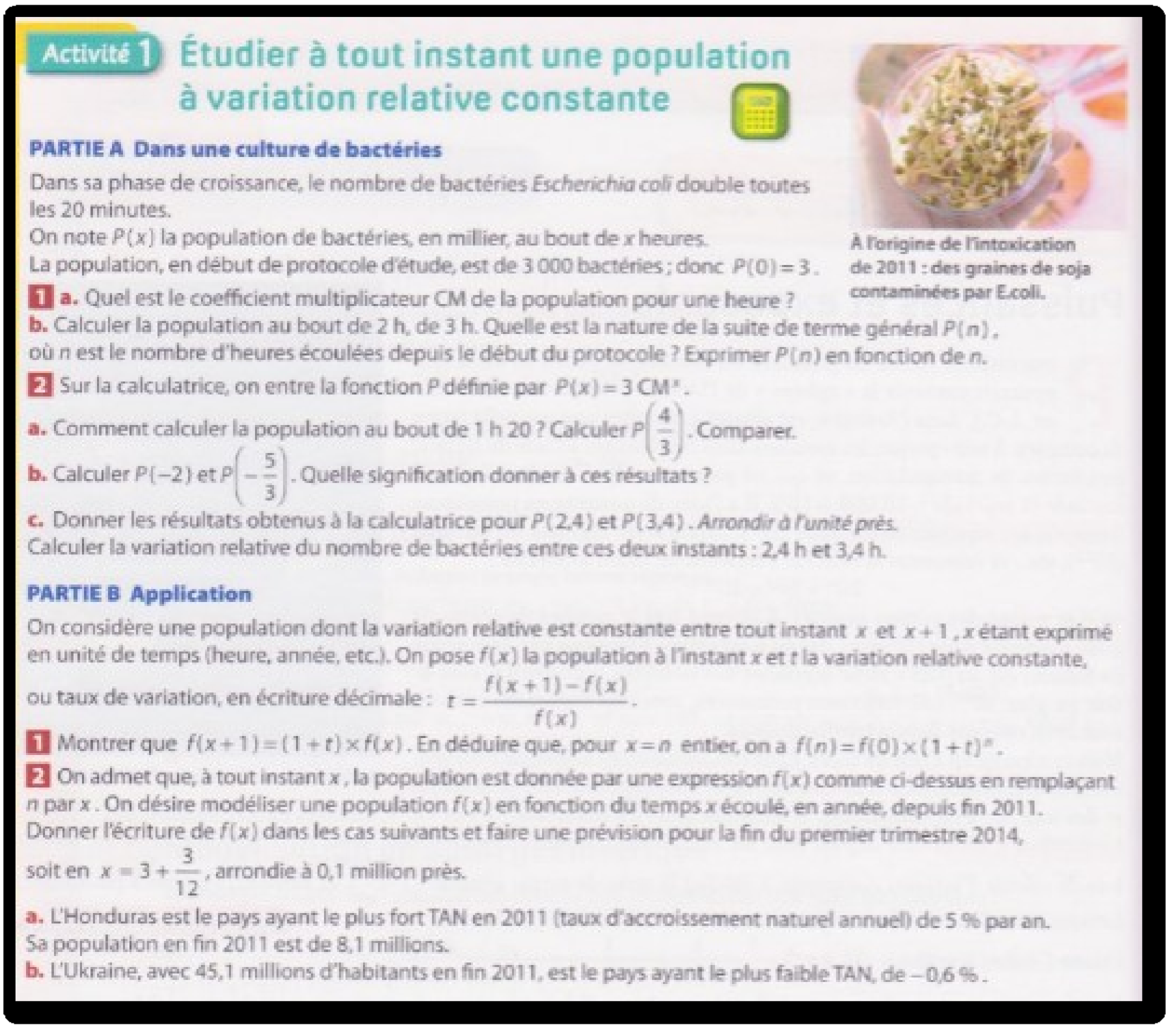
$$\frac{u_{n+1}-u_n}{u_n} = \frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = \frac{q \times u_n}{u_n} - 1 = q - 1.$$

On parle de **croissance exponentielle**.

Voir chapitre 3 page 72

C'est l'occasion pour l'auteur d'introduire l'expression « croissance exponentielle ». Nous verrons que la notion de variation relative constitue un fil rouge pour l'introduction aux fonctions exponentielles de ce manuel.
L'introduction aux fonctions exponentielles est faite dans ce manuel par trois « activités » différentes.

L' « activité » d'introduction 1 intitulée « *Etudier à tout instant une population à variation relative constante* ».



Activité 1 Étudier à tout instant une population à variation relative constante

PARTIE A Dans une culture de bactéries

Dans sa phase de croissance, le nombre de bactéries *Escherichia coli* double toutes les 20 minutes.
On note $P(x)$ la population de bactéries, en millier, au bout de x heures.
La population, en début de protocole d'étude, est de 3 000 bactéries ; donc $P(0)=3$.

À l'origine de l'intoxication de 2011 : des graines de soja contaminées par E.coli.

1 **a.** Quel est le coefficient multiplicateur CM de la population pour une heure ?
b. Calculer la population au bout de 2 h, de 3 h. Quelle est la nature de la suite de terme général $P(n)$, où n est le nombre d'heures écoulées depuis le début du protocole ? Exprimer $P(n)$ en fonction de n.

2 Sur la calculatrice, on entre la fonction P définie par $P(x) = 3\,\mathrm{CM}^x$.
a. Comment calculer la population au bout de 1 h 20 ? Calculer $P\left(\frac{4}{3}\right)$. Comparer.
b. Calculer $P(-2)$ et $P\left(-\frac{5}{3}\right)$. Quelle signification donner à ces résultats ?
c. Donner les résultats obtenus à la calculatrice pour $P(2{,}4)$ et $P(3{,}4)$. *Arrondir à l'unité près.*
Calculer la variation relative du nombre de bactéries entre ces deux instants : 2,4 h et 3,4 h.

PARTIE B Application

On considère une population dont la variation relative est constante entre tout instant x et $x+1$, x étant exprimé en unité de temps (heure, année, etc.). On pose $f(x)$ la population à l'instant x et t la variation relative constante, ou taux de variation, en écriture décimale : $t = \frac{f(x+1)-f(x)}{f(x)}$.

1 Montrer que $f(x+1) = (1+t)\times f(x)$. En déduire que, pour $x = n$ entier, on a $f(n) = f(0)\times(1+t)^n$.

2 On admet que, à tout instant x, la population est donnée par une expression $f(x)$ comme ci-dessus en remplaçant n par x. On désire modéliser une population $f(x)$ en fonction du temps x écoulé, en année, depuis fin 2011.
Donner l'écriture de $f(x)$ dans les cas suivants et faire une prévision pour la fin du premier trimestre 2014, soit en $x = 3 + \frac{3}{12}$, arrondie à 0,1 million près.
a. L'Honduras est le pays ayant le plus fort TAN en 2011 (taux d'accroissement naturel annuel) de 5 % par an. Sa population en fin 2011 est de 8,1 millions.
b. L'Ukraine, avec 45,1 millions d'habitants en fin 2011, est le pays ayant le plus faible TAN, de $-0{,}6$ %.

Le titre de cette « activité » d'introduction annonce dès le début qu'il s'agit d' « *étudier à tout instant une population* ». Le temps qui s'écoule est donc utilisé comme support de l'intuition du continu. Discrétisé en heures dans la partie A et en années dans la partie B, il va permettre de passer du continu au discret pour revenir au continu.
D'emblée, la population étudiée dans la partie A est modélisée par une fonction P d'une variable nommée x. Selon les habitudes des élèves, les notations adoptées sont celles d'une fonction d'une variable réelle.
L'utilisation de la lettre n permet, tout en gardant la notation fonctionnelle, de passer à l'étude de l'évolution « *à tout instant* » à son étude heure après heure, donc de passer du continu au discret. La suite correspondante étant géométrique, les élèves peuvent en déduire l'expression de $P(n)$ en fonction de n.
La forme algébrique du terme général de la suite est alors prolongée, conjointement, de deux façons :

- Par le basculement inverse, de l'utilisation de la lettre n à celle de la lettre x ;
- Par l'utilisation de la calculatrice dans laquelle les élèves entrent la fonction $\mapsto 3 \times 8^x$.

L'auteur tâche d'effectuer dans le cadre numérique deux allers-retours entre le contexte de la situation et sa modélisation par la fonction P :

- Il demande la population au bout de 1h20 en « espérant » que les élèves vont le faire avec des coefficients multiplicateurs. Il demande de calculer $P\left(\frac{4}{3}\right)$ en « espérant » qu'ils vont le faire à la calculatrice. Puis il demande de comparer.
- Il demande de calculer $P(-2)$ et $P\left(-\frac{5}{3}\right)$ en « espérant » que les élèves vont le faire à la calculatrice. Puis il demande une interprétation des résultats dans le contexte de la population de bactéries.

Nous utilisons le mot « espérant » car nous pouvons deviner les intentions du concepteur de cet exercice. Néanmoins, par manque d'explicitation, les élèves peuvent prendre d'autres chemins que ceux souhaités par l'auteur. D'autant plus que le prolongement de la forme algébrique qui a servi de « définition » à la fonction P est présenté comme allant de soi.
Quoi qu'il en soit, pourquoi le concepteur fait-il ces allers-retours ? Est-ce pour essayer de donner une légitimité à cette fonction qui n'est aucunement construite ?
Remarquons que dans cette partie, la nouvelle fonction est mobilisée avec des valeurs numériques de la variable qui sont entières positives puis négatives et rationnelles non décimales, puis décimales : le domaine de définition de P s'étend « en acte » pour les élèves de $\mathbb{N}$ à $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$ et $\mathbb{Q}$.

Nous avons constaté que la notion de variation relative joue un rôle de fil conducteur dans ce manuel entre les suites géométriques et les fonctions exponentielles. En l'occurrence, sur un exemple numérique, l'auteur fait calculer la variation relative de la population de bactéries sur un intervalle de temps égal à 1 (heure) entre deux valeurs non entières. Il est possible que les élèves fassent le constat (ou que l'enseignant les y invite) de ce que cette variation relative est égale à la même constante qu'entre deux termes consécutifs de la suite de terme général $P(n)$.

La partie B prend le chemin inverse : elle part d'une population à variation relative constante entre deux instants x séparés d'une unité de temps, qui est un paramètre t. En remplaçant x par n, la situation est modélisée par une suite géométrique dont on admet que l'écriture du terme général en fonction de n se généralise aux nombres réels en remplaçant n par x. Le changement de nom de la variable est le moyen utilisé par l'auteur pour passer du continu au discret et vice versa. Le prolongement de la forme algébrique est à nouveau mobilisé par l'auteur, cette fois avec la précaution de dire qu'il est admis.

Cette activité n'utilise pas de tableau de valeur ni de représentation graphique. Les cadres algébrique et numérique sont mobilisés, que ce soit dans des tâches papier-crayon ou instrumentées par la calculatrice.
Il est difficile pour les élèves (et peut-être un peu long pour les enseignants) de faire la part entre ce qui y relève de la démonstration et ce qui y relève de ce qui est admis. Le but des tâches est parfois sibyllin. Les enjeux de cette introduction sont donc en grande partie cachés.
Nous avons aussi constaté que les sciences économiques et les mathématiques utilisent un vocabulaire commun pour des notions de taux et de variation parfois différentes.
D'où un besoin important d'explicitations aux élèves de la part de l'enseignant.

L' « activité » d'introduction 2 intitulée « Lire le sens de variation de $x \mapsto q^x$:

Elle a pour but de lire graphiquement le sens de variation de $x \mapsto q^x$ (q>0) par l'intermédiaire de GeoGebra ou de la TI-Nspire via un curseur, ou via un tableau de valeurs obtenu sur tableur.
Un lien explicite avec le sens de variation des suites géométriques est demandé.

L' « activité » d'introduction 3 intitulée « Découvrir des relations fonctionnelles ».

Activité 3 **Découvrir des relations fonctionnelles** TICE

On **admet** que les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=q^x$, avec $q>0$, transforment les sommes en produits. Autrement dit, quels que soient les réels x et y, on a la **relation fonctionnelle** : $f(x+y)=f(x)\times f(y)$.

1 On considère la fonction f telle que $f(x)=2^x$.

a. Écrire $f(3+5)$ et retrouver une relation connue.

b. En écrivant la relation avec $y=0$ et un réel x quelconque, en déduire la valeur $f(0)=2^0$.

c. En écrivant $x+(-x)=0$, exprimer $f(-x)$ en fonction de $f(x)$.

d. Écrire $2x$ sous la forme d'une somme. En déduire $f(2x)$ en fonction de $f(x)$.
Que peut-on conjecturer pour $f(n\times x)$?

e. Sachant que $\left(\sqrt{2}\right)^2=2$, comment peut-on écrire $f\left(\frac{1}{2}\right)$ en utilisant un exposant ?

2 On désire vérifier ces relations, à l'aide d'un tableur, pour un nombre q **strictement positif** quelconque et x et y réels quelconques.

a. Indiquer la formule à écrire en cellule C2 qui, par recopie vers le bas, donnera les images des nombres de la colonne B par la fonction f.

b. Indiquer la formule à écrire en D4 pour vérifier la relation fonctionnelle.

c. D'après les réponses aux questions **1 c.** et **1 d.**, indiquer les formules à écrire en D6, D7 et D9 pour vérifier les relations trouvées.

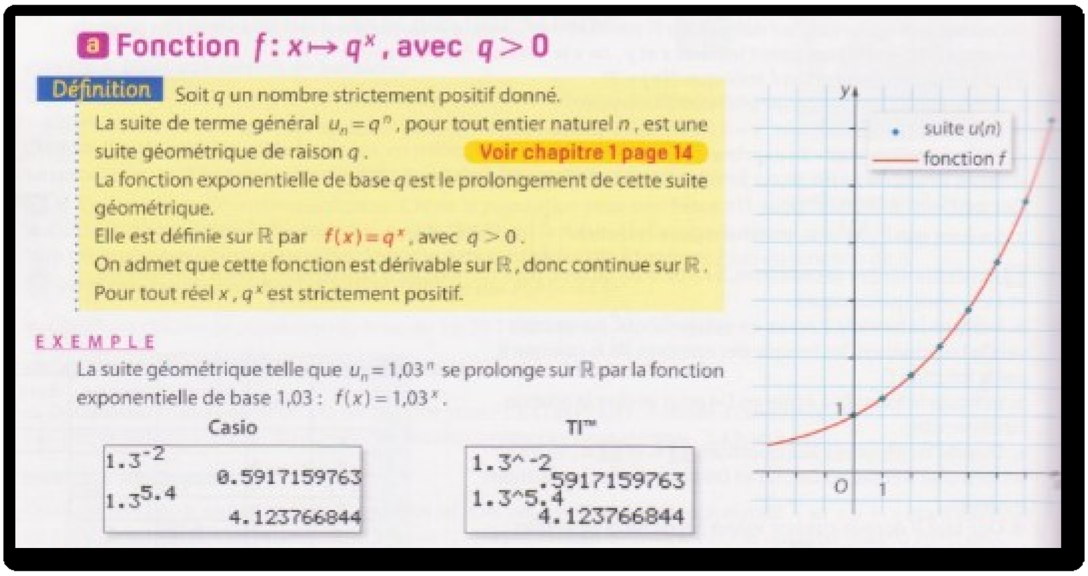
d. Que faut-il donner comme valeur à n en B8 pour vérifier la réponse à la question **1 e.**

e. Visualiser les résultats obtenus pour $q=1{,}3$, $x=-3{,}5$ et $y=3{,}5$.
Choisir d'autres valeurs de x et de y.

	A	B	C	D	E
1		valeurs	image $f(x)=q^x$	avec les relations	base q
2	x	3	8		2
3	y	5	32		
4	$x+y$	8	256	256	
5	0	0	1		
6	$-x$	-3	0,125	0,125	
7	$2x$	6	64	64	
8	n	4			
9	$n\times x$	12	4096	4096	

L'énoncé de l' « activité » commence par écrire que la relation fonctionnelle de transformation des sommes en produits des fonctions exponentielles est admise.
Dans la question 1, cette relation est mise en fonctionnement avec la fonction $f : x \mapsto 2^x$.
L'écriture de $f(3+5)$ fait le lien avec la formule correspondante vue en classe de 4e (avec exposants entiers).
La question 1.b. a pour but de démontrer la relation $f(0)=1$. On peut remarquer que la relation $2^0=1$ est une conséquence d'une convention connue des élèves depuis la 4e. Le statut de cette démonstration est donc pour le moins bancal.
La question 1.c. a pour but de démontrer que $f(-x)=\frac{1}{f(x)}$. Le lien avec la propriété connue des élèves depuis le collège pour les exposants entiers n'est pas demandé.
La question 1.d. a pour but de démontrer la relation $f(2x)=(f(x))^2$. Une expression de $f(nx)$ en fonction de $f(x)$ est alors conjecturée. Le lien avec ces propriétés lorsque les exposants sont entiers, connues des élèves depuis le collège, n'est pas demandé non plus.
Enfin, il est demandé d'écrire $f\left(\frac{1}{2}\right)$ en utilisant un exposant. Il s'agit probablement d'une erreur, la question est probablement « en utilisant une racine carrée ».
Dans la question 2 l'énoncé demande une vérification des propriétés vue dans la question 1, via le tableur, avec les mêmes valeurs numériques dans un premier temps. Or à part une conjecture, les propriétés de la question 1 sont démontrées voire connues depuis la 4e ; quelle est alors l'utilité de les vérifier au tableur ?
La question 2.d. n'est pas claire.
La dernière question propose de tester les propriétés avec q = 1,3, x = -3,5 et y = 3,5 puis avec d'autres valeurs de x et y. Les valeurs proposées sont décimales. Les élèves sont implicitement invités à élargir le domaine d'application des formules algébriques aux exposants non entiers.

L’exposition de connaissances



a Fonction $f : x \mapsto q^x$, avec $q > 0$

Définition Soit q un nombre strictement positif donné.
La suite de terme général $u_n = q^n$, pour tout entier naturel n, est une suite géométrique de raison q. Voir chapitre 1 page 14
La fonction exponentielle de base q est le prolongement de cette suite géométrique.
Elle est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = q^x$, avec $q > 0$.
On admet que cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc continue sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, q^x est strictement positif.

EXEMPLE

La suite géométrique telle que $u_n = 1{,}03^n$ se prolonge sur $\mathbb{R}$ par la fonction exponentielle de base 1,03 : $f(x) = 1{,}03^x$.

Casio

```
1.3^-2
          0.5917159763
1.3^5.4
           4.123766844
```

TI™

```
1.3^-2
           .5917159763
1.3^5.4
           4.123766844
```


La fonction exponentielle de base q (q>0) est décrite comme « le prolongement » de la suite (q^n).
Elle est « définie par $f(x) = q^x$ ».
Cette soi-disant « définition » comporte des messages implicites :

- il n’y aurait qu’une façon de prolonger une suite à l’ensemble des réels (autrement dit, graphiquement, de relier des points isolés) ;
- une notation définirait un objet mathématique.

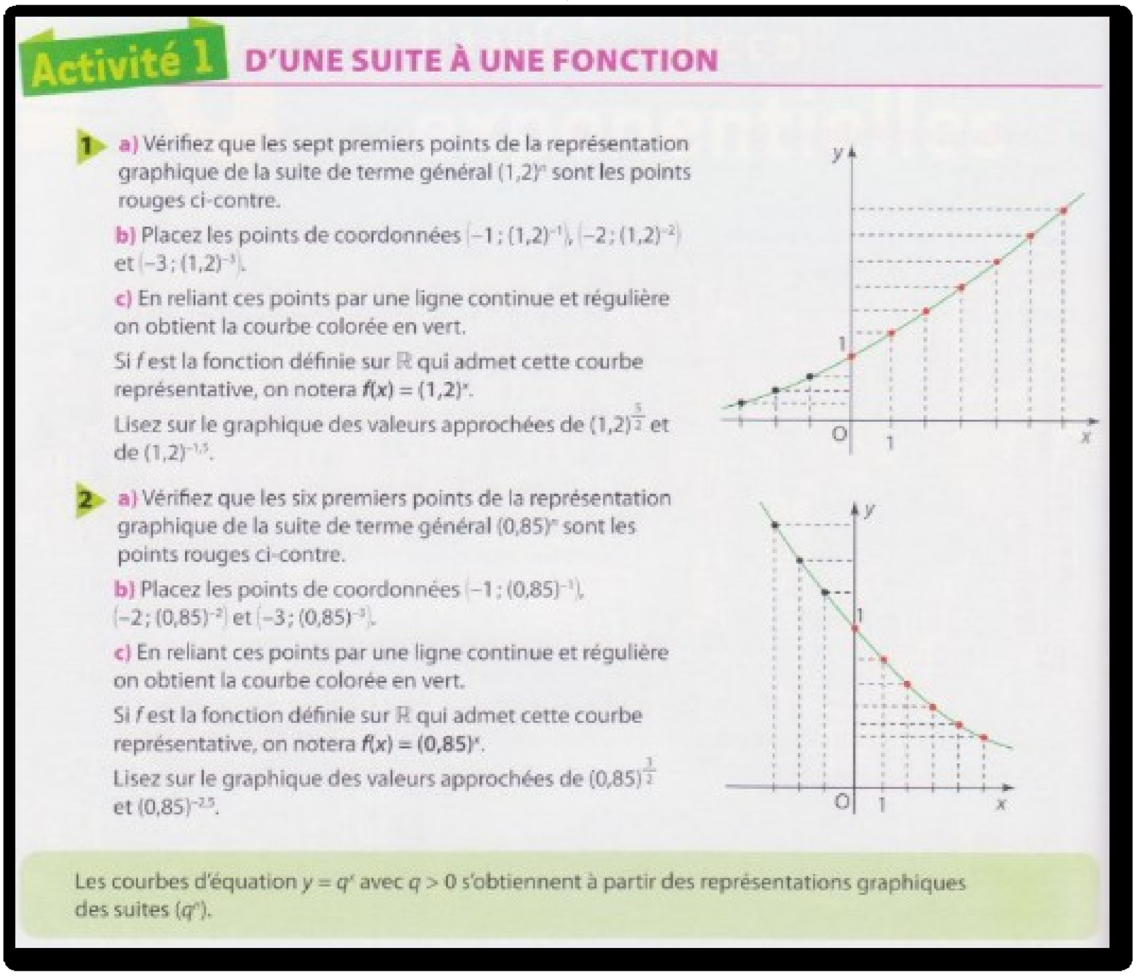
La dérivabilité et le signe sont admis dans la « définition ».
Un exemple est donné en prenant pour base $q = 1{,}3$. Il est décliné dans le cadre algébrique (avec une erreur dans la base), dans le cadre graphique et dans le cadre instrumenté de la calculatrice.
Le sens de variation est admis avec une référence aux suites : « en continuité avec les suites ».
Le mot « continuité » est pris dans son sens commun.
La relation fonctionnelle est énoncée en tant que théorème admis. Les autres propriétés sont listées en tant que conséquences de ce théorème et ne sont pas démontrées.
Une particularité de ce manuel est la définition de la racine $n^{\text{ième}}$ de q.

En remarque, dans la marge à droite, pour tout réel x, la variation relative entre x et x+1 est calculée.
La conclusion en est « *on retrouve le taux d’évolution « par glissement » d’une croissance exponentielle* ». Par « taux d’évolution » le concepteur entend probablement « variation relative », qu’il a aussi nommée à la façon des économistes « taux de variation » et « taux d’accroissement » dans la première « activité ». En effet, le « taux d’évolution en glissement » est une quatrième façon qu’ont les économistes de nommer le même rapport. Il conviendrait de le dire explicitement aux élèves plutôt que d’écrire qu’on « *retrouve* » une dénomination qu’ils n’ont pas encore rencontrée.

(d) Manuel « Transmath », Terminales ES et L, éditions Nathan, 2012

Le chapitre concernant les fonctions exponentielles figure en 3^e position dans ce manuel, après un chapitre sur les suites et un autre intitulé « Continuité sur un intervalle ».

L' « activité » 1 intitulée « *D'une suite à une fonction* »



Activité 1 D'UNE SUITE À UNE FONCTION

1 a) Vérifiez que les sept premiers points de la représentation graphique de la suite de terme général $(1,2)^n$ sont les points rouges ci-contre.

b) Placez les points de coordonnées $(-1\,;(1,2)^{-1})$, $(-2\,;(1,2)^{-2})$ et $(-3\,;(1,2)^{-3})$.

c) En reliant ces points par une ligne continue et régulière on obtient la courbe colorée en vert.

Si f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui admet cette courbe représentative, on notera $f(x) = (1,2)^x$.

Lisez sur le graphique des valeurs approchées de $(1,2)^{\frac{5}{2}}$ et de $(1,2)^{-1,5}$.

2 a) Vérifiez que les six premiers points de la représentation graphique de la suite de terme général $(0,85)^n$ sont les points rouges ci-contre.

b) Placez les points de coordonnées $(-1\,;(0,85)^{-1})$, $(-2\,;(0,85)^{-2})$ et $(-3\,;(0,85)^{-3})$.

c) En reliant ces points par une ligne continue et régulière on obtient la courbe colorée en vert.

Si f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui admet cette courbe représentative, on notera $f(x) = (0,85)^x$.

Lisez sur le graphique des valeurs approchées de $(0,85)^{\frac{1}{2}}$ et $(0,85)^{-2,5}$.

Les courbes d'équation $y = q^x$ avec $q > 0$ s'obtiennent à partir des représentations graphiques des suites (q^n).

La question 1 consiste à vérifier que les sept premiers points représentant la suite de terme général $(1,2)^n$ sont ceux représentés sur un graphique qui est donné dans l'énoncé. Plusieurs difficultés se présentent :

- L'absence de quadrillage rend la lecture des ordonnées difficiles. De plus, l'unité sur l'axe des ordonnées est de 0,9 cm, ce qui ne facilite pas la tâche !
- L'écriture décimale de l'ordonnée du $n^{\text{ième}}$ point comporte $n-1$ chiffres après la virgule.

Deux raisons pour lesquelles il est impossible de vérifier qu'il s'agit des « bons » points. Tout au plus peut-on affirmer que les points semblent proches de ceux de la représentation graphique de la suite de terme général $(1,2)^n$.
Il est peu probable que le concepteur ou qu'un enseignant attende des élèves qu'ils effectuent les calculs des puissances successives de 1,2 à la main. Les élèves mobilisent donc l'utilisation de la touche « puissance » de la calculatrice pour cette question.

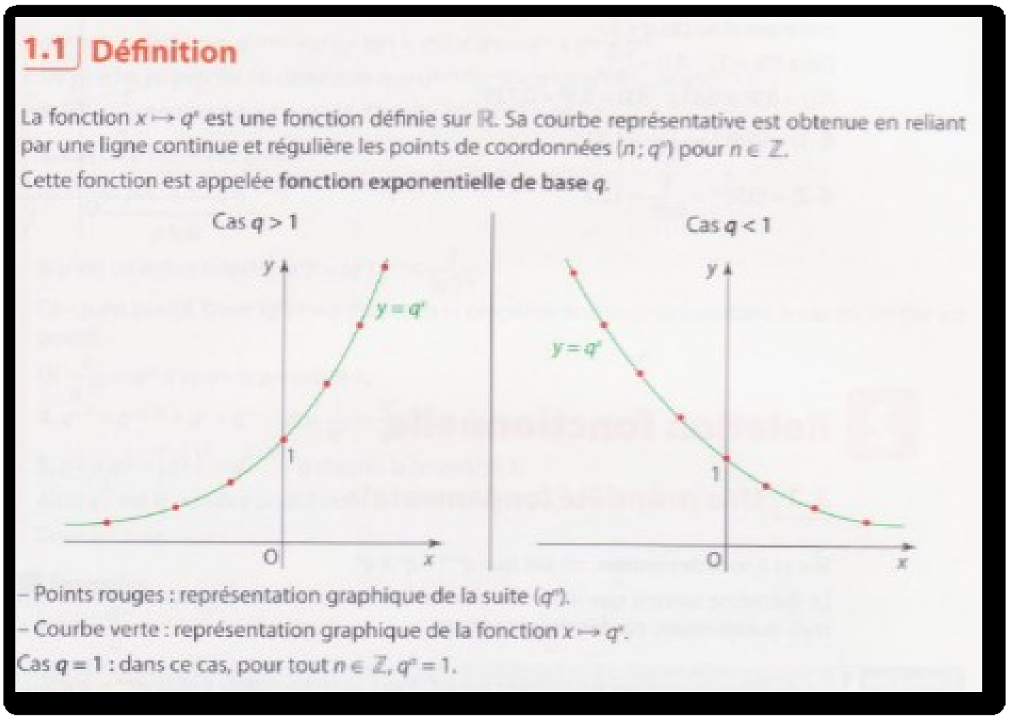
Puis la consigne est de placer « *les points de coordonnées* $(-1;(1,2)^{-1})$, $(-2;(1,2)^{-2})$ *et* $(-3;(1,2)^{-3})$ ». Il n'est pas demandé de placer les points de la question précédente, et la réponse est fournie à droite de la question sur un graphique semblable au précédent. En quoi consiste donc la tâche des élèves ?
Pour le moins, s'ils ne font pas eux-mêmes de graphique, les élèves devraient effectuer les calculs des ordonnées des trois points. Ils peuvent utiliser en étape intermédiaire la définition

connue depuis le collège : « pour tout réel a et tout entier naturel n, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ » puis terminer le calcul à la calculatrice, ou mobiliser directement la touche « puissance » de la calculatrice en entrant un exposant négatif entier. La première procédure, plus longue, présente un intérêt limité.
Puis l'énoncé affirme : « *En reliant ces points par une ligne continue et régulière on obtient la courbe colorée en vert* ». L'unicité d'une telle courbe n'est pas questionnée.
Puis « *Si f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui admet cette courbe représentative, on notera* $f(x) = (1{,}2)^x$ »
Pour finir, les élèves doivent effectuer la lecture graphique de valeurs approchées de $(1{,}2)^{\frac{5}{2}}$ et $(1{,}2)^{-1{,}5}$. Ils ont besoin de l'étape intermédiaire consistant à reconnaitre qu'il s'agit des images des nombres $\frac{5}{2}$ et $-1{,}5$ par f. Notons qu'il s'agit d'images de nombres non entiers.
Les tâches de la question 2 sont presque identiques à celles de la question 1, avec la suite de terme général $(0{,}85)^n$: la raison est cette fois inférieure à 1.

Cette activité semble d'une simplicité déconcertante. Comment, de quoi, procède-t-elle ?
Le prolongement de la suite aux puissance à exposants négatifs est fait, comme dans la théorie, par l'utilisation de la définition « pour tout réel a et tout entier naturel n, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ » donnée en collège ; en pratique dans cette « activité » 1, si l'enseignant ne sollicite pas des élèves qu'ils rappellent cette définition, la nature de ce prolongement risque de passer inaperçue puisque les élèves utilisent probablement la calculatrice pour calculer les puissances à exposants négatifs.
Le cadre graphique sert à prolonger la représentation graphique de l'ensemble des points à abscisses entières à « toutes » les abscisses (sous-entendu à ℝ). Les abscisses décimales ou rationnelles ne font l'objet d'une question qu'une fois la courbe « définie », afin de trouver des ordonnées correspondantes.
Ce prolongement est présenté comme allant de soi, donc unique et parfaitement défini par le fait que la courbe est « continue et régulière ». Notons que dans ce manuel la notion de régularité ne fait pas l'objet d'une définition ni même d'une « approche graphique », comme c'est le cas de la continuité. Cette dernière est une notion qui est au programme de la Terminale, ce n'est pas le cas de la régularité. De plus, le mot « régularité » est pris ici dans un sens intuitif qui inclue certainement la monotonie en plus de la dérivabilité, ce qui n'est pas le cas de la définition mathématique de la régularité d'une fonction.
La notation « $f(x) = (1{,}2)^x$ » est introduite sans commentaire (donc sans référence à la relation fonctionnelle ni même au fait que la notation est prolongée de ℕ à ℝ), puis mise en application numériquement par l'intermédiaire d'une lecture graphique.
Le cadre graphique joue donc le rôle essentiel dans cette « activité », cependant de façon moins visible, la calculatrice donne une légitimité supplémentaire à la nouvelle fonction.

L'exposé de connaissances

Parmi les quatre manuels, c'est le seul dont les pages de l'exposition de connaissances s'enchainent sans les pages, habituellement situées à droite, qui présentent des méthodes pour les résolutions d'exercices.



1.1 | Définition

La fonction $x \mapsto q^x$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Sa courbe représentative est obtenue en reliant par une ligne continue et régulière les points de coordonnées $(n\,;q^n)$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

Cette fonction est appelée **fonction exponentielle de base q**.

– Points rouges : représentation graphique de la suite (q^n).

– Courbe verte : représentation graphique de la fonction $x \mapsto q^x$.

Cas $q = 1$: dans ce cas, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $q^n = 1$.

La fonction $x \mapsto q^x$ (q>0) y est « définie » par l'intermédiaire de sa courbe : celle-ci est « *obtenue en reliant par une ligne continue et régulière les points de coordonnées* $(n; q^n)$ *pour* $n \in \mathbb{Z}$ ». Cette « définition » est conforme à celle de l' « activité » 1 : la fonction est définie pas sa courbe, elle-même présentée comme l'unique prolongement « continu » et « régulier » de l'ensemble discret de points de coordonnées $(n; q^n)$, $n \in \mathbb{Z}$.
Les points en rouge constituent (contrairement à la légende proposée par le manuel) le prolongement de la représentation graphique de la suite (q^n) aux points précités.
L'exposé de connaissance ne fait mention à aucun endroit de l'utilisation de la calculatrice.
La dérivabilité des fonctions exponentielles est énoncée conformément au programme officiel.
Enfin la relation fonctionnelle est énoncée en tant que théorème admis, avec pour remarque introductive le fait que la propriété, connue des élèves pour des exposants entiers, est vraie pour des exposants « *pas forcément entiers* ». Les deux exemples utilisent des exposants soit entiers, soit irrationnels - $\sqrt{3}$ et π. C'est une particularité de ce manuel, les autres utilisent des exposants rationnels – écrits en notation décimale ou fractionnaire.
La relation fonctionnelle n'avait fait l'objet d'aucune « activité » d'introduction ; par contre elle est largement développée dans le cadre algébrique puisqu'un nombre important de propriétés algébriques sont énoncées en tant que conséquences de la relation fonctionnelle, puis démontrées. Le concepteur de ce manuel fait un effort pour souligner le fait que les propriétés algébriques énoncées sont des extensions de propriétés connues des élèves lorsque les exposants sont entiers.

Conclusion
Ce manuel adopte une approche graphique qui repose sur une intuition du continu largement partagée – le tracé sans lever le crayon - et une intuition de la régularité qui pourrait être explicitée, même succinctement, vis-à-vis des élèves. Le fait que l'unicité d'un tel prolongement puisse être questionné est passé sous silence, comme si « tout se passe bien puisqu'on est en math » !
Le silence qui entoure les enjeux de ce prolongement contraste avec le soin apporté à l'énoncé et aux démonstrations des propriétés algébriques des fonctions exponentielles.

Les exemples y incluent des exposants irrationnels mais (et peut-être parce que), finalement, les fonctions exponentielles y ont un côté « désincarné » :

- les élèves ne tracent pas eux-mêmes de courbe. D'ailleurs, s'ils avaient à le faire, certains se poseraient peut-être des questions sur l'unicité du prolongement à partir des points de coordonnées $(n; q^n)$ pour $\in \mathbb{Z}$;
- les élèves n'entrevoient pas la façon dont le calcul numérique avec des exposants différents de demi entiers pourrait se faire ou du moins être approché. Mais alors que fait donc la calculatrice ?
- les fonctions exponentielles ne s'intègrent pas dans une situation, qu'elle soit intra ou extra-mathématique. Les abscisses des points sont considérées directement dans $\mathbb{R}$ après $\mathbb{Z}$, en se basant sur le fait qu'on peut lire l'ordonnée de n'importe quel nombre sur l'axe des abscisses : nul besoin de passer par des intermédiaires décimaux, rationnels. Pourtant, ils donnent de la substance à tout ce qu'il y a entre deux entiers.

Ce ne peut qu'amplifier l'attitude vis-à-vis des mathématiques, courante chez les élèves, notamment en filières ES et L, du type « il n'y a rien à comprendre, j'apprends par cœur et j'applique ». La calculatrice apparait comme une boîte noire.

(e) Conclusion sur les quatre manuels

Des « activités « réponse à un problème »

Dans trois des manuels sur les quatre, l'« activité » d'introduction aux fonctions exponentielles tentent de « répondre à un problème ».

Dans les manuels « Hyperbole » et « Déclic », le problème est de modéliser un phénomène évolutif en fonction du temps afin de pouvoir déterminer son évolution « au fil du temps » pour l'un, « à tout instant » pour l'autre. « Au fils du temps » fait appel à une intuition du continu proche de celle de la corde au niveau macroscopique. « A tout instant » fait appel au continu constitué de points : remarquons la similarité entre l'expression « à tout instant » et l'expression « pour tout réel ».

La variable temps étant *a priori* continue, une unité de temps et une origine du temps étant choisies, le phénomène peut être modélisé par une fonction (implicitement d'une variable réelle), dont on ne connait pas d'expression algébrique.

Le phénomène est à variation relative constante, c'est implicite dans un manuel, explicite dans l'autre ; la variation relative entre deux unités de temps est connue. Il est donc possible de modéliser l'évolution à tout instant entier positif par une suite géométrique dont on connait la raison et le premier terme – dont on peut par conséquent connaitre l'expression du terme général.

La suite est alors étendue à une fonction afin de répondre au problème :

- Dans le manuel « Hyperbole », des images de la fonction à des instants entiers négatifs puis fractionnaires aux dénominateurs de plus en plus grands sont calculées, par l'intermédiaire de coefficients multiplicateurs, grâce à la propriété de variation relative constante. Les points correspondants sont représentés graphiquement via le tableur qui génère des valeurs décimales approchées de la variable et des images ; l'énoncé donne l'expression de la fonction et sollicite finalement la calculatrice afin d'y « entrer » la fonction et d'afficher son graphe.
- Le manuel « Déclic », inversement, donne d'emblée l'expression de la fonction à « entrer » dans la calculatrice. Puis il demande de calculer des valeurs à des instants

entiers négatifs et fractionnaires ; et de vérifier sur un exemple que la variation relative entre deux instants (décimaux) distants d'une unité de temps est la même.

Les valeurs entières négatives et fractionnaires de la variable sont privilégiées pour leur facilité d'interprétation en tant qu'instant. La divisibilité à l'infini du temps permet de poser naturellement la question de l'évolution du phénomène à des instants fractionnaires (davantage que décimaux non entiers).

Le manuel « Odyssée » choisit une situation intra mathématique. Le problème (qui n'est pas formulé dans l'énoncé) est de voir ce qui se passe en étendant la propriété vérifiée par les suites géométriques : l'image du terme de rang n $(n > 0)$ est la moyenne géométrique des images des termes de rangs $n-1$ et $n+1$. Un processus dichotomique permet de prolonger la suite à un ensemble de valeurs rationnelles - dense dans $\mathbb{R}$, ce qui n'est bien évidemment pas dit. Les résultats de la quatrième itération du processus sont donnés par une copie d'écran de tableur et le nuage de points correspondant. La variable prend à cette étape des valeurs de la forme $\frac{k}{2^4}$ $(k \in \mathbb{Z})$ qui sont affichées sous forme de valeurs approchées décimales. Le nuage de points apparait suffisamment dense à cette étape pour que le concepteur dise qu'on admet l'existence d'une fonction qui réponde au problème.

En dehors du fait qu'il est plus motivant pour les élèves d'aborder une notion si elle répond à un problème, une « activité » de ce type permet de répondre en partie à une question que beaucoup d'élèves se posent : « A quoi ça sert ? ».

Du point de vue du passage du discret au continu, ces « activités », par le biais de répondre au problème qu'elles posent, mobilisent des valeurs de la variable qui sont non entières. Elles ne peuvent qu'enrichir la perception qu'ont les élèves de « ce qu'il y a entre deux entiers ».

Pour celles des manuels « Hyperbole » et « Odyssée », une expérience de pensée permettrait d'imaginer ces valeurs se densifier à l'infini, par divisibilité à l'infini (du temps, de $\mathbb{R}$). Bien qu'il soit impossible à ce niveau d'enseignement de conceptualiser qu'un passage à la limite permette de « boucher tous les trous », le continu de l'ensemble pris par la variable est malgré tout approché dans son aspect « sans saut ».

Est-ce que cela peut manquer aux élèves de n'approcher le continu que dans son aspect de divisibilité à l'infini ?

Numériquement, aujourd'hui, les entiers et les décimaux prédominent dans les tâches qui leur sont données, avec la présence discrète de quelques rationnels non décimaux (trois des « activités » d'introduction en sont des exemples) et de rares irrationnels (π et e) - qui sont mobilisés numériquement par des valeurs approchées décimales. La généralisation de l'usage de la calculatrice est probablement partie prenante de cette évolution.

En outre, les « trous que laisse $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ » ne se voient pas ; les tâches des élèves ne soulèvent pas de difficultés à ce sujet.

Nous ne voyons donc pas de raison de penser qu'à ce niveau d'enseignement, le fait de percevoir « le dense » comme du « quasi continu » puisse constituer un manque.

Y a-t-il construction de la nouvelle fonction ?

L' « activité » du manuel « Déclic » procède par prolongement du domaine de définition de la « forme » $P(n) = 3 \times 8^n, n \in \mathbb{N}$, à la « forme » $P(x) = 3 \times 8^x, x \in \mathbb{R}$. La calculatrice peut contribuer à faire apparaitre ce prolongement légitime aux élèves.

Celle du manuel « Transmath » procède par prolongement de l'ensemble des points de coordonnées $(n; q^n)$ pour $n \in \mathbb{Z}$ à ceux d'une courbe « continue et régulière ».

Les deux manuels adoptent dans l'exposé de connaissance une définition contestable de la fonction $x \mapsto q^x$ (q>0) : le prolongement de la suite géométrique de terme général q^n pour

l'une ; <u>celle</u> dont la courbe est obtenue en reliant les points de coordonnées $(n; q^n), n \in \mathbb{Z}$ pour l'autre. (C'est nous qui soulignons).
Ces deux manuels adoptent une démarche de prolongement qui pourrait sembler aller de soi pour des élèves, dans le cadre algébrique pour l'une et le cadre graphique pour l'autre. Aucune construction du sens de l'expression q^x n'est faite, ne serait-ce que sur un exemple numérique d'un exposant non entier.
Le flou de ce discours risque d'amplifier la perception de certains élèves : « Il n'y a rien à comprendre, c'est des math ».

Les « activités » des manuels « Hyperbole » et « Odyssée » proposent une construction, partielle bien sûr, de fonctions exponentielles.
Elles représentent un investissement de temps en classe qui est conséquent et soulèvent des difficultés pour les élèves d'ordre conceptuel, ainsi que de calcul algébrique. Les outils numériques que sont le tableur et la calculatrice peuvent aussi bien enrichir les tâches que les appauvrir ou les compliquer à l'excès. S'il veut que son « activité » soit une réussite auprès des élèves, l'enseignant doit y investir un temps de préparation non négligeable.

Finalement, cet investissement est-il « rentable », est-ce que dévoiler aux élèves le mode de construction proposé peut les aider, et à quoi ?
Nous avons vu plus haut qu'un tel mode de construction permet d'envisager un grand nombre de valeurs non entières de la variable. Dans un contexte institutionnel qui met l'accent sur la modélisation de phénomènes (discret et) continus, il nous semble important d'envisager la variable au plus près de $\mathbb{R}$ que les élèves des filières ES et L peuvent le concevoir : dans son aspect dense dans $\mathbb{R}$.
Un tel mode de construction peut aider les élèves à voir que passer d'une modélisation discrète à une modélisation continue ne va pas de soi. Les énoncés des problèmes qu'ils auront à résoudre ne peuvent qu'avoir alors plus de sens pour eux.
D'un point de vue intra mathématique, un tel mode de construction peut aider à donner un sens à une nouvelle fonction, pour qu'elle ne soit pas pour les élèves juste une « forme », ancienne, à mobiliser sur un ensemble de valeurs étendu, ce qui peut leur paraitre normal « puisque ce sont des mathématiques ». Il permet aussi un énoncé de définition mathématiquement rigoureux, en termes d'existence et d'unicité, qui épouse de façon cohérente la démarche de construction de l' « activité » - c'est ce qu'a fait le manuel « Hyperbole ».

La cohérence des notations et du vocabulaire

Les manuels ne disent rien sur le prolongement de l'utilisation du vocabulaire.
Les manuels « Déclic » et « Transmath », rappelons-le, introduisent les fonctions exponentielles par prolongement de la « forme » pour l'un, de la représentation graphique pour l'autre ; la « forme » q^x serait « définie » par ce prolongement. Ensuite, ils énoncent la relation fonctionnelle en tant propriété de la fonction ainsi « définie ». Pour les élèves, cela doit sembler magique que tout « marche » si bien en mathématiques ! Le manuel « Transmath » prend un grand soin pour souligner et démontrer le fait que les autres propriétés algébriques rencontrées par les élèves pour les exposants entiers sont vérifiées aussi pour les exposants réels. C'est le seul des quatre manuels à établir clairement le lien entre l'ancien et le nouveau du point de vue des connaissances des élèves concernant les propriétés algébriques.

Le manuel « Odyssée » tente une justification de la relation fonctionnelle à partir de la propriété qui est à la base du processus dichotomique. Nous avons vu que cette justification présente des embuches. Il donne des éléments de démonstration plus ou moins corrects pour les autres propriétés algébriques.
Le manuel « Hyperbole » fait calculer par le biais de coefficients multiplicateurs des images de valeurs non entières de la variable par la fonction qui modélise la situation. Puis il utilise ces résultats pour que les élèves puissent constater que la fonction vérifie la relation fonctionnelle. Ce ne sont que des exemples, mais l'enseignant peut s'en emparer pour, en les généralisant, motiver l'usage de la notation exponentielle.
Il démontre brièvement les autres propriétés algébriques.

La « forme » q^x n'est pas juste un heureux hasard : dans ses débuts, au XVIIe siècle, bien que n'ayant pas encore été définie mathématiquement, elle contenait la propriété de transformer des sommes en produits. Aujourd'hui dans un cours de mathématiques dans lequel elle est construite, la « forme » exponentielle est choisie car elle vérifie la relation fonctionnelle. Et non l'inverse. Une démarche du type de celle du manuel « Hyperbole » nous semble donc appropriée.

Le rôle des outils numériques

Mis à part le manuel « Transmath », les autres manuels font un large usage des outils du numériques.
Le tableur joue un rôle important dans le cadre graphique, dans les « activités » d'introduction des manuels « Hyperbole » et « Odyssée », en permettant de visualiser le nuage de points qui se densifie à mesure que le processus de division (du temps pour l'un, d'intervalles de $\mathbb{R}$ pour l'autre) avance.
Nous avons vu que cet usage du tableur doit se faire avec précautions :

- les élèves doivent avoir suffisamment de pratique du tableur pour pouvoir générer les tableaux de calcul demandés ;
- le tableur propose des types de graphiques variés pour des données qui sont par nature discrètes avec cet outil. Même si les élèves sont conscients qu'ils représentent graphiquement des points isolés et choisissent un graphique du type « nuage de points » plutôt que « courbe », le tableur leur propose des « nuages de points avec courbe lissée » et des « nuages de points avec lignes droites ». Ces graphiques ressemblent à tel point à la représentation graphique de la fonction exponentielle visée par l' « activité » que leur utilisation risque fort d'enlever l'intérêt de la suite du travail.

La calculatrice aussi risque de saper les efforts de construction des fonctions exponentielles de ces deux manuels, en ce qu'elles génèrent aussi bien les calculs numériques, les tableaux de valeurs, les courbes, des fonctions exponentielles.
Nous avons pu constater aussi au cours de l'analyse de l' « activité » du manuel « Hyperbole » que l'interface entre les deux outils pouvait être une source de difficulté supplémentaire.

La définition des fonctions exponentielles

On peut deviner que la définition mathématique de q^x qui sous-tend la conception des « activités », définitions et propriétés concernant les fonctions exponentielles du manuel « Odyssée » est du type : « Si x est réel, on définit q^x comme limite des q^{x_n} où (x_n) est une

suite de rationnels qui converge vers x » - il s'agit de la première des deux approches décrite dans la partie de ce travail concernant le programme officiel de Terminale ES et L. L' « activité » proposée est en cohérence avec ce choix. Par contre, nous avons vu que ce choix génère des maladresses dans la définition et les propriétés énoncés.
Le choix du concepteur du manuel « Hyperbole » s'est clairement porté sur la deuxième approche. La cohérence entre « activité », définition et propriétés et grande.
Dans les deux autres manuels, les définitions sont mathématiquement erronées.

Le rôle de l'enseignant

L'analyse des quatre manuels a pu souligner les difficultés que pose l'introduction des fonctions exponentielles, pour l'enseignant ainsi que pour les élèves.
Les « activités » d'introduction des quatre manuels présentent chacune des avantages, des inconvénients, des manques, des imprécisions, des erreurs parfois. Les définitions qu'ils proposent dans l'exposé de connaissances sont plutôt cohérentes avec les « activités » proposées ; en conséquence elles sont, pour trois d'entre les quatre, incomplètes ou erronées.

Citons quelques points relevés dans les manuels :
- les implicites, voire les non-dits sont nombreux : lorsqu'il y a une généralisation d'exemples, une conjecture admise, une extension par la « forme » ou par la courbe voire par la calculatrice, l'enseignant est le seul qui puisse expliciter le non-dit, expliquer les points difficiles aux élèves, combler les manques. Il peut aussi pointer les erreurs bien sûr ;
- en particulier, dans l' « Hyperbole » et l' « Odyssée », l'enseignant peut faire effectuer aux élèves l'expérience de pensée de continuer de diviser la variable à l'infini ;
- les outils tableur et calculatrice sont source de difficultés que les élèves ne peuvent généralement pas surmonter seul.

Qu'ils utilisent le manuel de leurs élèves, qu'ils s'inspirent d'autres manuels ou d'autres ressources, les enseignants ont un rôle important à jouer pour décrypter avec les élèves les enjeux de l' « activité » d'introduction s'il choisit d'en faire une, et le sens de la (ou des) définition(s) qu'il choisit et que l'élève peut rencontrer dans son manuel, sur internet...

Tableau récapitulatif des approches des fonctions exponentielles par les quatre manuels analysés :
Acronymes : AI pour « Activité d'Introduction »
EC pour « exposition des connaissances »
RAP pour « réponse à un problème ».

	AI : RAP	AI : équation fonctionnelle	AI : instruments numériques	AI : passage de $\mathbb{N}$ à $\mathbb{R}$	Définition dans l'EC
Hyperbole	Calcul de la valeur d'un bien immobilier en fonction du temps	Vérifiée sur des exemples numériques	Tableur pour valeurs rationnelles (calculs et graphiques) ; Calculatrice	De $\mathbb{N}$ à un sous ensemble de $\mathbb{Q}$ par coefficients multiplicateurs ; à $\mathbb{R}$ par calculatrice	Correcte

			pour courbe		
Odyssée	Prolongement par dichotomie d'une suite géométrique		Tableur pour valeurs rationnelles (calculs et graphique)	De $\mathbb{N}$ à un sous ensemble de $\mathbb{Q}$ par dichotomie ; à $\mathbb{R}$ par « évidence » visuelle	Unicité implicite ; confusion définition et propriétés ; la « forme » tient lieu de définition
Déclic	Etude d'une population de bactéries en fonction du temps		Calculatrice pour entrer la fonction puis calculs de valeurs approchées	Prolongement par la « forme » algébrique ; Calculatrice pour valeurs numériques	Unicité implicite ; confusion définition et propriétés ; la « forme » tient lieu de définition
Transmath				Prolongement par courbe « continue et régulière »	« Définition graphique »

Chapitre 3. Introduction de la fonction exponentielle en classe de terminale S

I. Dans les programmes de terminale S

En terminale S (TS), le programme prévoit des compléments sur l'étude des suites numériques par rapport à la première S (essentiellement le raisonnement par récurrence et la notion de limite), des compléments sur les fonctions numériques (les limites, la continuité et le théorème des valeurs intermédiaires, les dérivées de quelques types de fonctions composées, l'intégration) et introduit de nouvelles fonctions : les fonctions trigonométrique *sin* et *cos* ainsi que les fonctions *exp* puis *ln*. Il est à noter que *exp* et *ln* sont des fonctions réellement nouvelles alors que pour les fonctions *cos* et *sin*, les élèves ont déjà des connaissances sur les valeurs des *cos* et *sin* d'angles particuliers, dont ces fonctions représentent en quelque sorte des prolongement continus.

La fonction exponentielle est définie comme « l'unique fonction dérivable égale à sa dérivée et qui vaut 1 en 0 ». Ce nouvel objet, la fonction *exp*, est ainsi introduit comme une nouvelle fonction qui répond à un problème intra mathématique. On pourrait, comme dans les programmes précédents proposer un problème extra mathématique (évolution du nombre de bactéries) qui mène plus ou moins naturellement à l'équation différentielle. Selon les élèves l'un ou l'autre des chemins peut constituer une réellement motivation ou au contraire un frein à la bonne compréhension.

L'existence est admise et l'unicité est démontrée. Ce nouvel objet n'est donc pas à construire. Toutefois, l'enseignement actuel propose, de manière usuelle, des phases introductives où les notions sont, au moins en partie, construites. On peut s'attendre à des activités pour motiver l'équation différentielle $f' = f$ (la notion d'équation différentielle est hors programme) et à des activités d'approche de la fonction exponentielle (éventuellement avec la méthode d'Euler qui était au programme précédent).

TS :

Fonction exponentielle Fonction $x \mapsto \exp(x)$.	◙ Démontrer l'unicité d'une fonction dérivable sur **R**, égale à sa dérivée et qui vaut 1 en 0.	La fonction exponentielle est présentée comme l'unique fonction f dérivable sur **R** telle que : $f' = f$ et $f(0) = 1$. L'existence est admise.

Dans les manuels

Nous avons noté (R) le manuel *Repères 2012,* (T) le manuel *Transmath 2012,* (M) le manuel Math'x 2012, (O) le manuel *Odysée 2012*, (D) le manuel *Déclic 2012*, (I) le manuel Indice.
Dans ces manuels les approches de la fonction ou des fonctions exponentielles sont de 4 types selon notre catégorisation.

Voici un tableau récapitulatif avec dans chaque ligne l'ordre (1), (2)… des activités introduites.

	$f' = f$	$f(x+y) = (x)f(y)$	« Croissance exponentielle »	Sous-tangentes constantes
(R)	(1) Recherche des fonctions vérifiants $f' = f$ et $f(0) = 1$, méthode d'Euler			
(T)			(1) Exemple de suite en « croissance exponentielles » si $[P(n+1)-P(n)]/P(n)$ est constant. Etude d'une suite géométrique correspondant à l'augmentation de la population de 1,2 % par an. Passage au modèle continu via la calculatrice (prolongement continu)	(2) Vers une fonction égale à sa dérivée, recherche de fonctions à sous-tangente constante à partir de l'observation de cette propriété sur des suites géométriques
(M)	(1) Situation de radioactivité, approche graphique de la fonction vérifiant $N'(t) = -0{,}012N(t)$ « construction » par le tableur	(2) Passage d'une suite géométrique à une fonction dérivable prolongeant la relation $U(n+m)=U(n)xU(m)$; lien avec l'équation différentielle $f' = kf$		
(O)	(2) Recherche des fonctions vérifiant $f' = f$, recherche numérique par la méthode d'Euler		(1) Situation de « croissance exponentielle », population de bactéries multipliée par 2 toutes les 100 minutes. Modèle discret. Lien avec le continu via le tableur	
(D)	(4) Recherche des fonctions vérifiant $f' = f$ et	(3) Recherche de fonctions transformant sommes	(1) (2) Croissance d'une population de bactéries qui double	

	f(0) = 1	en produits, lien avec l'équation différentielle f ' = kf	toutes les 4 heures, passage au continu, refroidissement d'une température, modèles discrets	
(I)				(1) Recherche des fonctions positives et dérivables à sous-tangentes constantes, lien avec l'équation f ' = f ou f ' = -f

La première approche est celle liée à l'équation différentielle dans (R), (M), (O) et (D). Dans (M) seulement, il y a une motivation extra mathématique à la recherche de fonctions vérifiant une équation différentielle particulière mais cette motivation reste très artificielle (impossibilité de jusfier le passage d'un Δt petit et discret à un ΔT continu qui tend vers zéro notamment). On tombe sur une équation f ' = kf avec k = -0,012. Les élèves doivent dire que la fonction N est supposée dérivable. Dans les autres manuels, on s'intéresse directement au problème mathématique f ' = f , où f est dérivable, assez vite avec la condition f(0) = 1, soit brutalement comme dans (R), soit après d'autres activités qui ont sensibilisé plus ou moins à ce type de propriété différentielle des fonctions, comme dans (D) particulièrement. Dans (O) le caractère dérivable de la fonction f cherchée est totalement implicite.

Dans (M), il n'y a par contre pas d'essai de construction abordé. On utilise le tableur pour faire une courbe qui colle au mieux à un nuage de points discrets. Dans (R) et (O) il y a un effort de construction point par point de la courbe de la fonction en utilisant la propriété f ' = f et la méthode d'Euler. Dans (D) la méthode est esquissée pour sensibiliser au fait que l'on peut bien de cette façon construire une fonction répondant au problème.

La deuxième méthode relève de la propriété f(x+y) = f(x)f(y), dans (M) et dans (D). Dans (M) la modélisation d'une population de noyaux radioactifs diminuant de 8,3 % par jour conduit à une suite géométrique dont on met en avant la propriété U(n+m) = U(n)U(m). L'activité cherche à étendre la propriétés à une fonction dérivable - dans un cas particulier où f(0) = 1 est déjà acquis. On montre que ça implique f ' = kf. Dans (D), on s'intéresse brutalement à des fonctions dérivables qui transforment les sommes en produits, sans amorce dans les activités précédentes, sauf la remarque initiale que cette propriété est vérifiée pour les suites géométriques. On montre que ces fonctions ne s'annulent pas, que nécessairement f(0) = 1, qu'elles sont positives, que les suites f(n) sont géométriques, et qu'en supposant f dérivable on a l'équation différentielle f ' = kf. C'est finalement souvent cette deuxième méthode qui permet de motiver la recherche de fonctions dérivables vérifiant cette « propriété différentielle ».

La troisième approche est assez proche de la précédente puisqu'il s'agit de prolonger continuement des suites géométriques, essentiellement encore à partir de populations qui augmentent d'un certain pourcentage sur un certain temps. Le terme de « croissance exponentielle » est employé mais soit injustifié, soit justifié sans référence à l'exponentielle (et pour cause, elle n'est pas encore introduite). On est dans les manuels (T), (O) et (D). Ce type d'introduction est en fait souvent la première activité introductive. Il s'agit essentiellement d'étudier la suite géométrique – sans cette fois mettre en avant la propriété U(n+m) = U(n)U(m) – sous sa forme $U(n)=a^n$. Alors on prolonge continûment de façon explicite avec le tableur (dans (T), on fait une courbe qui interpole les points de la représentation de la suite, comme on l'a vu en terminale ES), soit de façon totalement implicite : dans (D), on donne un graphe continu prolongeant les points de la suite (ou on dit de « choisir un nuage de points reliés par une courbe » pour représenter les points de la suite). Dans (O) on ne fait pas du tout de lien entre le modèle discret de suite géométrique et un quelconque modèle continu.

La dernière approche est celle par la propriétés des sous-tangentes constantes que l'on trouve dans (I) et dans (T). Dans (T), on part de la propriété sur une suite géométrique et on montre qu'une fonction dérivable strictement croissante vérifiant la propriété – sous-tangente constante égale à 1 - vérifie l'équation différentielle f ' = f . Dans (I), on a un raffinement supplémentaire (sous-tangente « algébrique » égale à 1) qui fait que l'on tombe sur f ' = f ou bien f ' = -f selon que la sous-tangente est positive ou négative.

Finalement ce parcours des manuels induit un circuit qui serait assez complet s'il s'inspirait de chacun de ces manuels à la fois, selon le scénario suivant.

Etape 1 : Etude de suites géométriques modélisant les variations d'une population avec un taux constant d'évolution annuel (ou journalier, ou par mois… peu importe).

Etape 2 : Mise en évidence de la propriété fondamentale qui sera étendue U(n+m) = U(n)U(m).

Etape 3 : Problématisation sur un prolongement continu par une fonction continue (dérivable est plus raisonnable pour les élèves) qui vérifie f(x+y) = f(x)f(y) (*).

Etape 4 : Passage de la propriété (*) à l'équation différentielle f ' = kf.

Etape 5 : Construction par la méthode d'Euler d'une solution de f ' = f avec f(0) = 1.

Etape 6 : Retour sur le lien avec les suites géométriques, écriture a^x, lien avec $\exp_a(x)$ – mais l'exponentielle de base quelconque n'est pas au programme des terminales S.

Etape 7 : Etude de la sous-tangente d'une fonction exponentielle, lien avec une propriété des représentations graphiques de suites, lien entre la longueur de la sous-tangente et la raison de la suite…

Ce parcours aurait le mérite de lier ensemble les propriétés des suites géométriques et celles des fonctions exponentielles, la fonction de base e n'étant qu'un cas particulier. Ceci n'est pourtant pas totalement dans l'optique du programme qui malheureusement semble laisser dans l'obscurité tout un pan de relations importantes pour la bonne compréhension des élèves.

Dans le programme actuellement en vigueur (B.O. du 13 octobre 2011), il est précisé « La fonction exponentielle est présentée comme l'unique fonction f dérivable sur R telle que $f\,' = f \; et \; f\,(0) = 1$. L'existence est admise. ».

Programme B.O. du 13 octobre 2011 :

Fonction exponentielle		
Fonction $x \mapsto \exp(x)$.	▣ Démontrer l'unicité d'une fonction dérivable sur **R**, égale à sa dérivée et qui vaut 1 en 0.	La fonction exponentielle est présentée comme l'unique fonction f dérivable sur **R** telle que : $f' = f$ et $f(0) = 1$. L'existence est admise.
Relation fonctionnelle, notation e^x.	▣ Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$. • Utiliser la relation fonctionnelle pour transformer une écriture. • Connaître le sens de variation et la représentation graphique de la fonction exponentielle. • Connaître et exploiter $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x e^x = 0$.	On étudie des exemples de fonctions de la forme $x \mapsto \exp(u(x))$, notamment avec $u(x) = -kx$ ou $u(x) = -kx^2$ ($k > 0$), qui sont utilisées dans des domaines variés. On fait le lien entre le nombre dérivé de la fonction exponentielle en 0 et la limite en 0 de $\frac{e^x - 1}{x}$. ⇆ [SPC et SVT] Radioactivité. (AP) *Étude de phénomènes d'évolution.*

Alors même que la notion d'équation différentielle n'est plus au programme en mathématiques, comment introduire cette équation auprès des élèves ? Il nous est apparu important de motiver auprès des élèves la résolution de cette équation en leur montrant que ce type d'équations ne tombe pas du ciel mais provient de problèmes par exemple rencontrés en physique. On propose donc un premier scénario en classe dans ce sens.

II. Premier scénario, avec la radioactivité

La séance proposée est découpée en deux parties :

- la première visant à faire rencontrer aux élèves des équations différentielles en prenant appui sur des problèmes de physique qu'ils ont déjà rencontrés, tout du moins en partie ;
- la seconde à « étudier » sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$ dans le cadre du programme.

Ces deux parties sont traitées l'une après l'autre mais ne sont pas distribuées en même temps. La première prend environ 45 minutes, la seconde environ 1h.

Partie 1

Vous avez étudié en physique le fait que certains noyaux se désintègrent spontanément en d'autres noyaux (on dit qu'ils sont radioactifs) et que ce phénomène est aléatoire : on ne peut pas prévoir l'instant précis de cette désintégration. Néanmoins, en considérant un échantillon comportant un très grand nombre de noyaux N, on peut mesurer le nombre de désintégrations pendant une durée de temps donnée. Sur un très grand nombre de mesures, on peut évaluer le nombre moyen $\overline{m}$ de désintégrations pendant une durée Δt. On en déduit la probabilité de désintégration d'*un* noyau par seconde. Cette probabilité est caractéristique de l'élément considéré. On la note λ et on l'appelle la constante de désintégration radioactive. On a l'égalité suivante :

$$\lambda = \frac{\bar{m}/_{\Delta t}}{N} = \frac{\bar{m}}{N \times \Delta t}.$$

En notant $N(t)$ le nombre de noyaux présents dans l'échantillon à l'instant t et $N(t+\Delta t)$ le nombre de noyaux présents dans l'échantillon à l'instant $t+\Delta t$, on obtient la relation :

$$N(t+\Delta t) - N(t) = -\bar{m} \iff N(t+\Delta t) - N(t) = -\lambda N(t)\Delta t \iff \frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t} = -\lambda N(t) \text{ où } \Delta t \neq 0.$$

Si on suppose que la fonction $t \to N(t)$ est dérivable sur $[0; +\infty[$, on pourra écrire :

$$N'(t) = -\lambda N(t).$$

On connait de plus le nombre de noyaux $N(0)$ présents à l'instant $t = 0$.

Ainsi, la fonction $N : t \to N(t)$ vérifie un nouveau type d'équations où *l'inconnue n'est plus un nombre mais une fonction*, accompagnée de sa dérivée. Ces équations sont appelées *équations différentielles*.

Exemples

Donner une solution sur $\mathbb{R}$ des équations différentielles suivantes (c'est-à-dire trouver une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ [4] et qui vérifie l'équation proposée):

a) $f'(x) = 5$

b) $f'(x) = x^2$

c) $f''(x) = -f(x)$

d) $f'(x) = f(x)$

Partie 2

Dans toute la suite, on considère l'équation différentielle :

$$f'(x) = f(x) \text{ et } f(0) = 1 \qquad [*].$$

On cherche ici à obtenir des propriétés sur toutes les fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ qui vérifie les relations [*].

On **suppose** qu'il existe une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant [*]. Nous allons étudier alors quelques propriétés de la fonction f.

1. L'objectif de cette question est de prouver que f ne s'annule pas et est strictement positive sur $\mathbb{R}$. Pour cela, on considère la fonction φdéfinie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = f(x) \times f(-x)$.
   a) Justifier que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\varphi'(x)$.
   b) Montrer que, pour tout réel x : $\varphi(x) = 1$.
   c) En déduire que, pour tout réel , $f(x) \neq 0$ et $f(x) > 0$.
2. Montrer que $f$est unique.
3. Quel est le sens de variations de f sur $\mathbb{R}$?
4. Montrer que, pour tout réel a et b, $f(a+b) = f(a) \times f(b)$. A quoi vous fait penser cette égalité ?
5. Soit a un réel, à quoi est égal $(f(a))^2$? $(f(a))^3$? Quelle propriété peut-on conjecturer ? Prouver-la.

Analyse et critique

Le cours sur l'exponentielle s'inscrit bien sûr dans une progression. Avant d'aborder cette séance, les points suivants ont été étudiés en classe :

[4] On cherche f deux fois dérivable pour c).

- Les fonctions trigonométriques ; à cette occasion, le problème de savoir quelles fonctions vérifient que pour tout réel a et b, $f(a+b)=f(a)+f(b)$ a été rencontré.
- Le cours sur la continuité, le TVI, les compléments de dérivation en particulier la reconnaissance du taux d'accroissement d'une fonction en un point et les résultats ci-dessous :
  Propriété 1 : Soient a et b deux réels, $a \neq 0$ et u une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=u(ax+b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x réel, $f'(x)=a\times u'(ax+b)$.
  Propriété 2 : Soit f une fonction définie et dérivable sur un *intervalle* I. Si, pour tout x de I, $f'(x)=0$ alors f est constante sur I.
- Des types de raisonnement comme la démonstration par récurrence, la démonstration par l'absurde, démontrer l'unicité d'un objet.
- Des points de logique comme la négation du quantificateur universel.

Comme dit précédemment, l'objectif de la première partie n'est pas de résoudre des équations différentielles mais de présenter aux élèves ce nouveau type d'équations. Nous avons choisi un problème rencontré en physique : la désintégration radioactive. L'objectif est de remémorer aux élèves ce qui a été étudié en physique[5] et comment on obtient la relation $N'(t)=-\lambda\, N(t)$ ainsi que le sens de cette relation (les variations de la quantité $N(t)$ sont proportionnelles à la quantité $N(t)$) et d'insister sur le fait que nous sommes face à un nouveau type de problèmes : les équations différentielles (l'introduction du vocabulaire ne pose aucun problème aux élèves, il est toujours plus efficace d'appeler un chat un chat). Mais il est vrai que certains élèves en difficulté en physique n'apprécient pas d'y être confrontés en cours de mathématiques et rien ici n'explique réellement la modélisation trop complexe.

La partie consistant à s'essayer à la résolution d'équations différentielles, donne lieu à une activité dense des élèves qui se prennent au jeu. Très vite la non-unicité de la solution et la solution triviale (f identiquement nulle pour c) et d)) apparaissent. Les élèves n'ont pas eu de difficulté à proposer une solution pour $f''(x)=-\omega^2 f(x)$ (que j'avais gardée en réserve) après avoir trouvé une solution pour c).

L'équation d) $f'(x)=f(x)$ donne lieu à une recherche systématique parmi les fonctions usuelles, démarche que les élèves ont eu l'habitude d'enclencher pour la recherche de contre-exemples. La conclusion s'impose : nous ne connaissons pas de fonction vérifiant cette équation différentielle. Le passage vers la partie 2 se fait alors naturellement.

La seconde partie présente différents intérêts mathématiques. Pour la première fois, les élèves vont étudier les propriétés d'un objet mathématique qui n'est pas connu. Ils vont s'apercevoir que par, le seul biais de la démonstration, on peut obtenir des propriétés de l'objet sans le connaitre. Des démonstrations proches sont plusieurs fois mises en œuvre ce qui au fil des questions rend l'élève autonome. La question 4) amène également, pour la première fois, les élèves à se demander comment démontrer une propriété vraie pour tout réel a et tout réel b et propose une utilisation de l'unicité précédemment démontrée nouvelle pour les élèves.

[5] Je remercie certains de mes collègues de physique et SVT qui ont vérifié et corrigé cette partie.

Certaines de ces démonstrations (1, 2 et 4) sont inscrites au programme comme étant exigibles des élèves.

Cette seconde partie est cependant imparfaite. En tout premier lieu, on admet l'existence de la fonction solution et cela est toujours très frustrant pour les élèves. Le travail proposé ne permet pas de construire la solution. Auquel cas, on peut s'interroger sur la pertinence d'un tel exercice qui finalement propose en amont du cours d'effectuer les démonstrations. Si ce n'est effectivement de mettre en lumière l'efficacité des mathématiques. Il ne faut pas non plus se mentir : le travail de démonstration est long et fastidieux pour certains, plus d'une heure de démonstrations sur un objet qu'on ne cerne toujours pas est un effort conséquent.

Nous avons fait le choix de ne pas nommer la fonction : ce choix permet d'éviter l'écueil grandissant des élèves qui ont des cours particuliers et anticipent le cours ou qui préparent les concours d'école d'ingénieurs.

Ce travail me semble incomplet. Il peut être complété en faisant apparaître le nombre e et en partie justifier l'écriture $f(x) = e^x$ où $x \in \mathbb{R}$.

Lors de cet exercice, on a prouvé plusieurs des propriétés algébriques vérifiées par la fonction cherchée:

- Pour tous réels a et b, $f(a+b) = f(a) \times f(b)$.
- Pour tout réel a, $f(-a) = \frac{1}{f(a)}$.
- Soit $a \in \mathbb{R}$, pour tout entier naturel n, on a $\left(f(a)\right)^n = f(na)$

Je propose donc de poursuivre le travail en faisant apparaitre ce nombre e et en proposant aux élèves des calculs utilisant les propriétés algébriques. Il y a toujours un moment où un élève demande « mais en fait c'est quoi e ? » ou « comment calcule-t-on e^2 ou e^π ? » « On ne sait toujours pas ce que c'est ? » Questions légitimes puisqu'on n'a pas construit la fonction, et la réponse « euh on utilise la calculatrice » n'est pas le moment le plus héroïque du cours !

Je propose d'ajouter dans la question 5, le prolongement de l'égalité aux entiers relatifs négatifs afin de clore cette question.

Suite aux remarques précédentes sur le côté fastidieux de la première séance, je commencerai donc le cours en définissant la fonction exponentielle et en résumant avec la notation exp les propriétés démontrées.

Suite de la séance 1 : le nombre e

1. a) Justifier que, pour tout entier n, $\exp(n) = (\exp(1))^n$. On posera dorénavant $\exp(1) = e$.
   b) Exprimer en fonction du nombre e les nombres exp(2) ; exp(-5) ; exp(1/2) et exp(4/3).
2. On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \exp(x) - x - 1$
   a) Etudier le signe sur $\mathbb{R}$ de la fonction φ.
   b) En déduire que pour tout entier n non nul,
   $\exp\left(\frac{1}{n}\right) \geq 1 + \frac{1}{n}$ et $\exp\left(-\frac{1}{n+1}\right) \geq 1 - \frac{1}{n+1}$.
   c) Prouver que, pour tout entier n non nul, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \mathrm{e} \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

d) En déduire $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

3. Proposer une méthode pour obtenir un encadrement du nombre e d'amplitude 0,01.

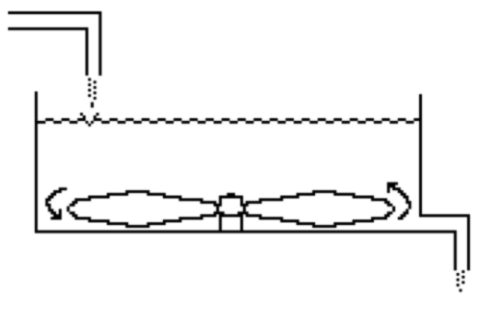
Pour traiter cette partie, il faut au préalable avoir vu les racines cubiques, etc….et la notation $x^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{x^p}$. A l'issue de la question 1), on peut faire admettre aux élèves le prolongement aux exposants réels de la notation $\exp(x)=e^x$ et écrire avec cette notation, les propriétés algébriques déjà démontrées. Les questions 2 et 3 permettent d'obtenir un encadrement de ce nouveau réel e. On peut prolonger ce travail afin d'obtenir un encadrement du réel e^x pour x réel (voir le chapitre 5).
Pour la dernière question (3), on peut tabuler les suites ou programmer un algorithme sur la calculatrice. Dans les deux cas, cela met un peu de temps pour obtenir l'encadrement demandé.

III. Deuxième scénario : la dilution du sel

Ce scénario se trouve dans Repères IREM[6], et sa mise en œuvre en terminale S est analysée en détail dans un bulletin de l'APMEP[7], auquel nous renvoyons le lecteur, la présentation que nous donnons ici est un résumé. L'idée est que l'introduction à partir de la radioactivité risque de perdre les élèves peu physiciens, car il s'agit d'un phénomène physique complexe. Nous proposons donc un phénomène physique n'utilisant aucune physique autre qu'intuitive. Voici le scénario.

Dilution d'une solution saline

Un bassin contient 100 litres d'eau, dans lesquels sont dissous 10 kg de sel. Une arrivée d'eau pure, avec un débit de 10 litres/mn, démarre à l'instant 0. En même temps que l'arrivée d'eau pure, une évacuation du mélange contenu dans le bassin est assurée avec un débit de 10 litres/mn. L'homogénéisation du contenu du bassin est assurée de façon permanente et instantanée par un mélangeur. Au bout d'une heure, quelle quantité de sel reste-t-il dans le bassin ?



[6] Rogalski M., Mise en équation différentielle et mesure des grandeurs par une intégrale, en terminale scientifique : un point de vue mathématique sur la collaboration avec la physique, *Repères IREM* n° 64, juillet 2006.
[7] Magnin, N. & Rogalski, M. (2011), Un scénario pour motiver l'introduction de la fonction exponentielle en terminale S, *APMEP n°492*, 17-29.

L'intérêt de ce scénario est qu'il engage d'abord les élèves dans une activité de *discrétisation physique du phénomène*, en raisonnant de minute en minute, puis de seconde en seconde. En effet, il n'y a aucune loi physique à appliquer. Les étudiants procèdent donc par étapes d'une minute, pendant laquelle ils supposent, soit l*a quantité de sel* constante, soit *la concentration en sel* constante. On constate souvent (et le travail en petits groupes est essentiel pour voir surgir ce phénomène) que pour justifier ce fait ils imaginent deux expériences de pensée (EP pour abréger). Dans la première (EP1), ils arrêtent le robinet d'eau pure au début de la minute, laissent couler le robinet de vidange pendant une minute (la concentration en sel est alors constante pendant cette minute), puis complètent de façon instantanée avec 10 l d'eau pure. Dans la seconde (EP2), ils font l'inverse : arrêt de la vidange pendant une minute (pendant laquelle la quantité de sel est constante), puis vidange instantanée.

Il est facile de voir que EP1 débouche sur le résultat final pour le sel restant :

$$S(60) = 10(0{,}9)^{60} = 0{,}01797\ldots,$$

alors que EP2 débouche sur

$$S(60) = 10\left(\frac{10}{11}\right)^{60} = 0{,}03284\ldots,$$

ce dernier résultat étant presque le double du premier.

Si cette divergence ne suffit pas à augmenter la conscience que la méthode n'est qu'approchée et entachée d'erreur, on peut faire tracer aux élèves la courbe donnant la quantité de sel S(t) en fonction du temps. L'hypothèse de la constance de S(t) pendant chaque minute (cas de EP2), qui donne un graphe en escalier dont les marches ont des hauteurs en décroissance géométrique, contredit fortement le sentiment des élèves que la fonction S est continue ("le sel est évacué peu à peu"). Dans le cas de EP1, on a une diminution affine de cette quantité de sel pendant chaque minute (donc un graphe affine par morceau), contra-dictoire avec le précédent, et dont les ruptures de pentes heurtent l'intuition du phénomène réel qu'ont les élèves.

L'idée de diminuer la durée de chaque étape pour diminuer les erreurs devrait alors surgir d'elle-même, et en général les élèves passent à des étapes d'une seconde, et trouvent un encadrement plus séré.

Si le temps manque, l'enseignant peut alors passer directement à l'étape différentielle, en faisant travailler les élèves sur ce qui se passe entre les instants t et $t+\Delta t$, et les amener à encadrer le rapport $\Delta S/\Delta t$, puis à passer à la limite, pour trouver l'équation différentielle

$$S'(t) = -(1/10)S(t).$$

On peut aussi (mais cela demande plus de temps, c'est une version plus ambitieuse), "pour y voir plus clair", passer du cadre numérique (100 litres, 10 l/mn,…) au cadre symbolique (volume V, débits v, sel initial S_0, durée t, n étapes de durée $\frac{t}{n}$). Il faut là, certainement, *une intervention de l'enseignant pour proposer ce changement de cadre*, et il faut pouvoir en convaincre les élèves ; on peut par exemple dire que c'est le seul moyen de comprendre précisément d'où viennent les erreurs, quels facteurs les déterminent ; on peut aussi évoquer le besoin de généralité dans la compréhension du phénomène étudié. Il s'agit là d'une rupture avec le slogan "pas de paramètres !" des programmes, d'autant plus absurde qu'en physique on incite les élèves à travailler avec des formules à paramètres littéraux, pour "réduire les erreurs de calcul numérique" et, surtout, vérifier les formules par des considérations sur l'homogénéité des dimensions.

On obtient alors, dans le cas de EP1,

$$S(t) = S_0\big(1 - v/V \cdot t/n\big)^n, \qquad \text{et} \qquad S(t) = \frac{S_0}{\big(1+v/V\ t/n\big)^n}$$

dans le cas de EP2.

L'*institutionalisation* de cette première branche de la situation devrait alors être, au plan particulier du phénomène étudié, une *conjecture* : les deux fonctions précédentes devraient, pour chaque valeur de t, converger quand n tend vers l'infini, vers une quantité S(t) qui devrait être la *vraie* quantité de sel à l'instant t. Et c'est ce phénomène de convergence éventuelle (hors du niveau de la terminale S) qui peut motiver le recours à la méthode différentielle présentée plus haut.

Nous n'entrons pas plus dans les détails de ce scénario et de son passage en classe, renvoyant au compte rendu cité précédemment dans le bulletin de l'APMEP. Son bénéfice principal et de faire un lien entre l'approche discrète de la fonction exponentielle et son approche différentielle.

Chapitre 4. L'équation $f(x+y) = f(x)f(y)$: la fonction exponentielle en M1 MEEF 2nd degré

La situation qui suit a été élaborée pour de futurs professeurs de mathématiques et poursuit deux objectifs principaux :

1. faire comprendre la richesse de la fonction exponentielle ainsi que les difficultés du travail mathématique menant à sa construction ;

2. développer un travail mathématique demandant des connaissances dans de nombreux domaines des mathématiques.

Le choix de la fonction exponentielle repose sur l'objectif 2 ainsi que sur le fait que les professeurs auront à enseigner la fonction exponentielle. Partant du fait que la majorité des professeurs ont eu un cursus scientifique où la fonction exponentielle est définie (actuellement) par l'équation différentielle $f' = f$, il nous a paru plus adapté de s'appuyer sur l'équation fonctionnelle caractérisant les fonctions exponentielles de $(\mathbb{R},+)$ dans $(\mathbb{R}^*_+,\times)$. Non seulement nous faisons l'hypothèse que les futurs professeurs identifieront moins facilement la fonction exponentielle qu'avec l'équation différentielle mais, en plus, ils auront à enseigner en Terminale ES où, actuellement, les fonctions exponentielles sont introduites par cet aspect (non formalisé). De plus l'approche par l'équation fonctionnelle caractérise certains types de phénomènes physiques : voir le chapitre 5, § III.1.

Cette situation a été proposée à deux reprises au Chili et en France. Nous n'analysons pas ici l'ensemble de la situation pour nous focaliser sur son potentiel.

La question mathématique consiste en la recherche des fonctions numériques f satisfaisant l'équation fonctionnelle :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x)f(y) \quad (*)$$

La situation est composée de 4 parties :

- Une première phase de travail sur une **situation « réelle »**, pour motiver l'équation fonctionnelle (*) ;
- Une deuxième phase qui se penche sur les propriétés de ses solutions, mettant en évidence le problème de **régularité**, lié à la question des ensembles de nombres (discret, dense et continu) ;
- Une troisième phase qui, avec une hypothèse de régularité, permet d'identifier des suites de polynômes qui pourraient approcher les solutions régulières de (*) ;
- Enfin, une dernière phase où l'on montre la convergence de ces suites de polynômes vers une fonction qui est solution de (*).

Il est à noter que les trois dernières phases sont caractéristiques d'un travail spécifique de l'analyse avec les questions de régularité, d'approximation et d'existence. On retrouve ici la richesse des fonctions exponentielles, dont on peut faire entrevoir certains aspects au lycée.

Voici l'énoncé.

Une machine qui fabrique des bouchons pour les bouteilles de vin a été achetée nouvelle par la somme de $C_0 = \$\ 24.520.000$ (pesos chiliens). Elle peut être revendue plusieurs fois et son prix de vente dépend uniquement de son temps d'utilisation. Ce type de machine perd annuellement 11 % de sa valeur.
Un entrepreneur l'a achetée le 1er janvier 2015 et il désire savoir en quel moment il pourra revendre la machine pour récupérer la moitié du prix initial.
Soit $C(t) = C_0 f(t)$ le prix de vente de la machine dans l'instant *t* par année.

1. Dans quelle année la fonction f prend-elle la valeur un demi (1/2) ?
   Indication : on peut justifier que pour deux entiers i et j on a $C(i + j) = C(i)f(j)$ puis trouver une relation entre $f(i + j), f(i)\ et\ f(j)$.
2. Déterminer le moment de l'année où la revente doit se produire. Indication : on peut justifier que pour un entier k et $t \in [0,1]$, $C(k+t)=C(k)\,f(t)$ puis trouver une relation entre $f(k+t)$, $f(k)$ et $f(t)$.

Cet énoncé a été élaboré après une première application au Chili. On avait noté que les étudiants avaient des difficultés à sortir du domaine des nombres entiers. Pour cela, nous avons opté pour une centration de la tâche sur la valeur 1/2 de la fonction *f*. En outre, la situation est très guidée du point de vue de la modélisation et on aurait pu penser à laisser plus de liberté aux étudiants. Cependant, nous estimons qu'il y aurait peu de chance pour que l'équation (*) émerge. D'ailleurs, même avec cet énoncé l'équation (*) est peu utilisée, ni même établie, par les étudiants. La plupart préfère utiliser la formule $C_0.0{,}89^t$, en général justifiée pour les entiers naturels, étendue sans questionnement à d'autres nombres (réels ? décimaux ?) pour pouvoir utiliser le logarithme.
Les autres caractéristiques de cette situation sont :

- la situation est a priori continue, puisque l'on s'intéresse au temps, même si pratiquement le fractionnement par mois ou par jour est suffisant. Ainsi, il suffit d'étendre au domaine des nombres rationnels ce qui permet effectivement de travailler avec l'exponentielle, mais cela serait à justifier ;
- l'exponentielle choisie est une exponentielle décroissante ;
- la fonction renormalisée *f* est donnée, les étudiants ont du mal avec cette notion.

La question 1 est assez simple, il s'agit d'une suite géométrique, la récurrence s'obtient facilement par proportionnalité, et donc aussi la relation (*) dans le domaine des entiers. La réponse s'obtient par simple calcul des premiers termes de la suite : il doit revendre au cours de l'année 2020.
En revanche, la question 2 est plus délicate. Elle demande d'interpréter *f*(*t*) comme le taux de dépréciation de la machine pour un temps *t*, ce qui mène à l'indication qui est une extension de la relation (*) du 1. Il reste à savoir comment calculer les valeurs de *f*. Pour cela, il faut à nouveau généraliser puis opérationnaliser cette relation et voir, par exemple, que :

- $f(1) = f(1/2)^2$ pour un calcul par semestre ;
- $f(1) = f(1/12)^{12}$ pour un calcul par mois ;
- $f(1) = f(1/365)^{365}$ pour un calcul par jour.

Néanmoins, les étudiants ne procèdent pas de cette manière et utilisent plutôt la procédure suivante, même si elle n'est pas justifiée :

$$(1-\frac{11}{100})^t = \frac{1}{2}\ ou\ (0.89)^t = \frac{1}{2},$$
$$ln(1-\frac{11}{100})^t = ln\frac{1}{2},$$
$$t\ ln(1-\frac{11}{100}) = ln\frac{1}{2},$$
$$t\ ln(1-\frac{11}{100}) - ln\frac{1}{2} = 0,$$
$$t = \frac{ln\frac{1}{2}}{ln\ (0.89)} = 5{,}948034\ldots$$

Ce qui correspond à la date du 12 décembre 2020 (avec une précision de 1 jour).
La suite était décontextualisée et avait pour objectif de construire la fonction exponentielle en s'appuyant sur de nombreuses connaissances mathématiques et de montrer la complexité de cette construction et, par la même, de la fonction. Il est à noter que seules les questions suivantes ont été proposées en France et que les énoncés ont évolué d'une expérimentation à une autre, les objectifs spécifiques étant les mêmes.

Question 1

a. Trouver toutes les solutions constantes sur $\mathbb{R}$.

On recherche désormais les fonctions f, solutions de (*)*, qui ne sont pas constantes.*

b. Montrer que pour tout x réel, on a $f(x) > 0$ et justifier que $f(0) = 1$.

c. Montrer que pour tout x réel et pour tout n entier naturel non nul, on a : $f(x) = f(x/n)^n$.

Cette question permet d'entrer dans le problème avec des propriétés générales. De plus, on commence à voir comment opérationnaliser (*), dès la question b., avec, par exemple, $f(x/2+x/2)$ pour la positivité, $f(x_0+(x-x_0))$ pour montrer que si f s'annule elle est identiquement nulle, ou encore $f(0+0)$ ou $f(0+x)$ pour obtenir $f(0) = 1$.

La formule du c. est importante pour la suite (la question 4 notamment), c'est pourquoi elle est spécifiquement avancée. La preuve se fait par récurrence, mais il vaut mieux montrer $f(ny) = f(y)^n$ qui est plus simple (puis prendre $y = x/n$).

Question 2

2-a. Choisir une valeur pour $f(1)$ compatible avec la question 1, c'est-à-dire dans $\mathbb{R}^+\backslash\{0 ; 1\}$.
<u>Indication</u> : une valeur *simple* peut *simplifier* les calculs !
2-b. Représenter graphiquement votre fonction f, solution de (*) satisfaisant $f(1)$=………, sur [-2 ; 2]. Vous pouvez utiliser le graphique ci-dessous ou un logiciel. Il est demandé une représentation graphique <u>soignée et précise</u>.

Le choix de la valeur de $f(1)$ est laissé libre, mais il semble qu'il faille mieux proposer $f(1)$=2. D'une part la demande n'est pas toujours claire pour les étudiants et, d'autre part, la plupart choisissent cette valeur (on note parfois les valeurs 3, 4 ou 1/2).

L'objectif de cette question est double :

- opérationnaliser (*) pour le calcul des valeurs rationnelles de f (en actes, sans demander l'extension à $\mathbb{Q}$) : pour les entiers naturels il n'y a pas de problème, pour les entiers négatifs on écrit $f(x+(-x))$, puis pour les rationnels on utilise la relation du 1c. ;
- avoir une représentation graphique de la fonction f qui est une exponentielle sur $\mathbb{Q}$.

Il est à noter que les valeurs de f en un nombre irrationnel sont inconnues. On s'attend à ce que les étudiants tracent une ligne continue passant par les points déterminés (ce que fait la très grande majorité). La question que l'on pose alors est « peut-on tracer une ligne continue ? » La réponse n'est pas si évidente car :

- on ne sait rien de la fonction f, est-elle continue ? ce qui permet de lancer la question 3. ;
- $\mathbb{Q}$ étant dense dans **R**, on peut tracer une ligne dense qui a toutes les qualités visuelles du continu[8].

Sans que cela soit formalisé, on a également l'unicité de la fonction f sur $\mathbb{Q}$.

Question 3

a. f est-elle continue ?
b. f est-elle dérivable ?

Cette question est la suite logique de la précédente. En effet, tout porte à croire que f est continue (et même dérivable et régulière), voire que f est l'exponentielle, et notamment le graphe obtenu en question 2. En outre, les étudiants ne sont guère habitués à travailler avec des fonctions discontinues (éventuellement en quelques points isolés, mais pas discontinues en tout point).

On s'attend ainsi à des tentatives de preuves de régularité, ce qui est le cas. Les tentatives, assez nombreuses, avec la définition formelle sont vouées à l'échec. En revanche, on a des éléments avec des suites, puisque, par exemple, la suite $(x/n)_n$ pour x fixé est une suite convergeant vers 0 telle que $f(x/n)=f(x)^{1/n}$ converge vers 1 qui est $f(0)$ (certains groupes le font avec un x général, d'autres avec $x = 1$). C'est donc un indice de continuité en 0, mais qui est insuffisant pour conclure (et pour cause !).

Certains se lancent directement dans la dérivabilité, puisque l'on aurait ainsi la continuité en prime.

D'autres remarquent que la continuité (ou la dérivabilité) en 0 (ou en un point x_0) implique la continuité (ou la dérivabilité) sur $\mathbb{R}$. Cette question, spécifiée dans les premières expérimentations, n'est finalement pas nécessaire car des étudiants y pensent (peut-être ont-ils déjà rencontré ce type de problèmes).

En tout cas, après un certain temps de recherche, le constat d'échec est institutionnalisé. On va donc convenir, par défaut, que l'on va chercher les solutions régulières, continues et dérivables[9].

---

[8] A ce propos, un groupe avait implémenté la relation du 1c. dans le logiciel geogebra. Il s'ensuit que, 1) les points ne sont pas reliés et 2) on voit apparaître une densité autour de 0.

Question 4

On suppose que f est continue et dérivable en 0 (non constante). On a $f(0) = 1$ et on pose $f'(0) = a$.

a. Expliquer pourquoi $f(x)$ peut-être approchée par $P_1(x) = 1+ax$.

b. Chercher un polynôme $P_2(x)$ de degré 2 qui pourrait approcher $f(x)$ mieux que P_1.

c. Trouver des polynômes P_n de degré n qui pourraient approcher $f(x)$ de mieux en mieux.

Dans cette question, on inverse donc le problème : on suppose la continuité et la dérivabilité en 0 (donc sur $\mathbb{R}$) et on cherche à calculer les valeurs de f, dont $f(1)$. Le nombre dérivé en 0 est un paramètre qui remplace $f(1)$ de la question 2.

La question a. est simple car il s'agit de l'approximation locale directe de f en 0 (de la courbe par sa tangente). Les questions b. et c. sont plus délicates et, de fait, deux voies sont possibles :

- montrer que f est de classe C^∞ et montrer que $f^{(n)}(0) = a^n$ puis utiliser le polynôme de Taylor de f en 0. Mais cela demande de jongler entre x et y pour dériver successivement (*) ce qui n'est pas immédiat (aucun étudiant ne l'a proposé) ;
- approcher $f(x/n)$ par $P(x/n)$ puis utiliser la relation du 1c.

C'est vers ce deuxième point que nous orientons les débats. Certains étudiants y pensent assez vite, mais une aide du formateur est nécessaire dans cette question. On peut espérer ainsi avoir une approximation de f car, quand n est grand l'approximation de $f(x/n)$ par $P(x/n)$ est bonne proche de 0 puis ensuite on utilise la relation (*) vérifiée par f. On ne maitrise pas les erreurs faites mais, et c'est le point essentiel, on dispose d'une suite de polynômes (de degré n), $P_n(x) = (1+ax/n)^n$, que l'on peut effectivement étudier. S'il y a convergence, on peut espérer récupérer ainsi la fonction f. C'est l'objet des questions suivantes.

Question 5

- Etudier la suite de polynômes, racine, limites, régularité, convergence de la suite, propriétés de la limite éventuelle,…
- Faire des conjectures.

La question 5 est une exploration. On peut étudier la suite de polynômes de manière algébrique (les racines notamment), du point de vue graphique avec un logiciel (type Geogebra) pour conjecturer la convergence (et même la convergence sur tout compact de $\mathbb{R}$).

Question 6

a. Montrer que $P_n(x)$ converge.

On note $f(x)$ la limite de $P_n(x)$.

[9] On peut se limiter à la régularité en 0 comme mentionné ci-dessus. En outre, on peut se limiter à la continuité, car on a alors la dérivabilité par intégration de (*). Cela ne faisant pas partie de l'objectif de la situation, on suppose la dérivabilité. On peut aussi faire l'hypothèse « localement borné en un point » qui est plus faible mais demande plus de connaissances sur la structure de $\mathbb{R}$ (voir le chapitre 5, appendice 2).

Indication : on pourra d'abord définir la fonction $f(x)$ candidate à être $\lim P_n(x)$ comme une somme infinie.

b. Justifier que la limite f de P_n satisfait (*).

c. Vérifier que f est dérivable sur **R** et que $f' = af$.

La question a. est intéressante du point de vue de l'analyse. L'étude de la convergence de la suite $P_n(x)$ n'est pas simple. La plupart des étudiants pensent à développer la puissance. Le résultat paraît plus complexe mais permet, et certains étudiants y pensent, de faire une convergence terme à terme pour $n\to\infty$, sans justification. L'intérêt est de faire apparaître une nouvelle suite de polynômes, T_n, que l'on peut espérer proche de P_n, qui est surtout beaucoup plus simple et attendue : c'est la suite de Taylor en 0 d'une exponentielle. On a alors toutes les connaissances sur les séries entières : T_n converge vers une fonction f qui est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ (f est donnée comme somme de série entière). La question est alors de savoir si f est bien solution de (*) ou non. On peut aussi se poser la question de la convergence de P_n vers f, ou bien étudier $|P_n-T_n|$ dont la démonstration est intéressante (il faut couper en deux la série et contrôler les morceaux, i.e. les majorer par un $\varepsilon > 0$). Mais en fait, cela ne sert à rien, puisque l'on a maintenant un candidat solution.

La question b. peut se faire directement avec la série définissant f, avec un « produit de Cauchy » (beaucoup d'étudiants y pensent). La question c. est immédiate avec les théorèmes généraux sur les séries entières.

On peut revenir à la question de l'unicité, car si l'on a obtenu une solution régulière, il n'est pas dit qu'il n'y en ait pas d'autres. On peut s'appuyer sur plusieurs arguments comme :

- si f est une solution régulière de (*), i.e. vérifiant les conditions de la question 4, alors f est solution de l'équation différentielle $y' = ay$, et on peut utiliser les résultats généraux sur l'unicité des équations différentielles ;
- si l'on se fixe la valeur de $f(1)$, alors f est entièrement déterminée sur $\mathbb{Q}$ par (*). Comme f est continue sur un sous-ensemble dense de $\mathbb{R}$, il y a donc unicité ;
- si f et g sont deux solutions régulières de (*) avec la même valeur en 1 (non nulle), alors $h = f / g$ est aussi une solution de (*) vérifiant $h(0) = h(1) = 1$ (on a aussi $h'(0) = 0$ si l'on s'appuie sur les conditions de la question 4). La fonction h étant une fonction monotone (il suffit de dériver (*) par rapport à y et prendre $y = 0$), h est donc constante égale à 1 sur [0,1]. L'extension sur **R** s'obtient facilement avec (*) puisque h est alors 1-périodique.

Conclusion

Cette situation est intéressante à plus d'un titre. D'une part, elle permet de construire la fonction exponentielle d'une manière différente de ce qui est normalement proposée aux futurs enseignants. Cela est d'autant plus important que cette manière guide les choix actuels d'introduction en Terminale ES. Elle permet d'utiliser et de connecter beaucoup de connaissances universitaires qui, souvent, sont cantonnées dans des sous-domaines spécifiques des mathématiques. On reprendra cet aspect au chapitre 5.

On peut même faire une connexion avec l'algèbre. Une solution de (*) est une fonction égale à à b^x sur $\mathbb{Q}$ si l'on pose $f(1) = b$. Mais on peut aussi, indépendamment, fixer la valeur de f en, disons, π. Par exemple, avec $f(1) = 2$ et $f(\pi) = 3$, on a, par (*) : $f(p/q\times 1+p'/q'\times\pi)=2^{p/q}3^{p'/q'}$ pour deux rationnels quelconques $r = p/q$ et $r' = p'/q'$. La raison est que 1 et π sont deux nombres réels linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$. On comprend alors que l'on peut fixer de manière arbitraire les valeurs de f sur une base quelconque de $\mathbb{R}$ vu comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel[10]. Cela donne le tournis : il y a une infinité (*considérable*) de solution de (*) dont une seule est régulière sur $\mathbb{R}$ (la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$) si l'on se fixe $f(1)$. En outre, le sous-groupe additif $1\times\mathbb{Q}+\pi\times\mathbb{Q}$ de $\mathbb{R}$ est dense (puisque 1 et π sont incommensurables), donc on peut trouver des valeurs $r\times 1+r'\times\pi$ aussi proches de 0 (ou de tout autre point de $\mathbb{R}$) que l'on veut. Les valeurs de r et de r' sont donc de plus en plus grandes (l'une positive et l'autre négative) et l'on peut alors rendre la valeur de $f(r\times 1+r'\times\pi)$ arbitrairement grande ou petite, tout en étant proche de 0. La fonction f non seulement est discontinue en tout point, mais en plus elle n'est pas localement bornée en tout point.

Pour une approche plus mathématique et moins didactique de certains des aspects de ce chapitre, on pourra se reporter au chapitre 5, où les différentes approches de la fonction exponentielle seront comparées en détails.

[10] Le sous-groupe $V = 1\times\mathbb{Q}+\pi\times\mathbb{Q}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$, dont on peut compléter la base $(1, \pi)$ en une base $(b_j)_{j\in J}$ de $\mathbb{R}$, moyennant l'axiome du choix.

Chapitre 5. Compléments : relations entre différentes approches de la fonction exponentielle

Dans ce chapitre, nous proposons quelques compléments, qui pour les uns se situent dans la droite ligne des programmes de terminale concernant la fonction exponentielle et n'utilisent que des moyens élémentaires, et pour les autres sont destinés aux enseignants et proposent quelques thèmes utiles pour comprendre le contexte mathématique général dans lequel se situe la fonction exponentielle. La question principale est qu'il y a plusieurs approches de cette fonction, et que selon la filière de terminale, voire l'orientation de la première année d'université, l'approche utilisée peut varier.

Du point de vue mathématique, on peut considérer qu'il y a cinq approches traditionnelles de la et des fonctions exponentielles :

(a) La solution définie sur $\mathbb{R}$ de **l'équation différentielle** $y' = y$ vérifiant $y(0) = 1$. On passe aux autres fonctions exponentielles (qui interviennent en mathématiques et en physique) avec l'équation $y' = \lambda y$. C'est le point de vue suggéré par le programme en terminale S.

(b) Les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ vérifiant **l'équation fonctionnelle** $f(x+y) = f(x)f(y)$ et $f(0) = 1$, et ayant un minimum de **régularité**.

(c) **La limite** quand $n \to +\infty$ de la suite de fonctions $g_n(x) = (1+x/_n)^n$ (et pour les autres exponentielles on prendra la limite de $kg_n(\lambda x)$). Cette approche peut apparaître en L1.

(d) **La somme de la série** $\sum_{p\geq 0} x^p/p!$, c'est-à-dire la limite de $f_n(x) = \sum_{n\geq p\geq 0} x^p/p!$. Cette approche est l'approche universitaire fréquente, c'est elle qui permet de définir la fonction exponentielle dans d'autres domaines des mathématiques.

(e) **Le prolongement continu à** $\mathbb{R}$ de la fonction définie sur $\mathbb{Q}$: $p/q \to a^{p/q}$. C'est ce qui est partiellement proposé (et admis) en terminale ES, mais en fait en partant seulement de la fonction définie sur $\mathbb{Z}$: $k \to a^k$, c'est-à-dire des progressions géométriques (le passage par $\mathbb{Q}$ n'est pas mentionné, sauf pour a^{-1}, $a^{1/2}$, $a^{1/3}$ …).

Dans ce chapitre, nous allons essayer de voir comment on peut passer d'une approche à une autre, en proposant des preuves les plus élémentaires possibles, dont certaines seront même accessibles à un élève de terminale sachant bien calculer, utilisant essentiellement : la progression et la série géométriques, et la formule du binôme. L'idée essentielle est de **prouver un certain nombre d'inégalités élémentaires préalables**.

I. Quelques inégalités élémentaires mais fondamentales

1/ Soit f la fonction sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f' = f$, $f(0) = 1$ (on admet ici son existence, comme en Terminale S). Alors on a l'inégalité

(1) $\boxed{f(x) \geq 1+x \text{ pour tout } x \text{ réel}}$.

On va en déduire qu'on a

(2) $\boxed{0 \leq f(x) - (1+x/n)^n \leq f(x)x^2/(n-x^2) \leq f(x)2x^2/n}$ si $|x| \leq A$ et $n \geq 2A^2$.

La première inégalité a été vue dans un chapitre antérieur, la deuxième étend l'inégalité vue dans ce même chapitre : $(1+1/n)^n \leq e := f(1) \leq (1+1/n)^n\, x(1+1/n)$.

Preuve. Pour l'inégalité (1) nous renvoyons plus haut (on étudie le signe de $\varphi(x) := f(x)-1-x$ en dérivant).

Pour (2), on applique (1) au point x/n, on obtient $f(x/n) \geq 1+x/n$; comme $|x| \leq A$ et $n \geq 2A^2$, on peut élever à la puissance n en gardant l'inégalité, et on utilise la relation fonctionnelle $f(x/n)^n = f(x)$: on a donc la première partie de (2).

Pour la deuxième partie de (2), on applique (1) au point $-x/n$, on obtient de la même façon, avec la relation $f(-x) = 1/f(x)$, $1/f(x) \geq (1-x/n)^n$. On va alors utiliser les inégalités

$$1 \geq (1-x/n)^n(1+x/n)^n = (1-x^2/n^2)^n \geq 1-x^2/n,$$

la dernière venant de l'inégalité de Bernoulli généralisée que nous énoncerons en (6). On a donc

$$f(x) \leq 1/(1-x/n)^n \leq (1+x/n)^n/(1-x^2/n).$$

Il n'y a plus qu'à soustraire $(1+x/n)^n$ pour obtenir : $0 \leq f(x) - (1+x/n)^n \leq (1+x/n)^n x^2/(n-x^2) \leq f(x)x^2/(n-x^2)$. On vérifie alors que, si $n/2 \geq A^2 \geq x^2$, la dernière fraction est majorée par $2x^2/n$. Cqfd

2/ On a l'inégalité

(3) $\boxed{|1+x+x^2/2!+\ldots+x^n/n! - (1+x/n)^n| \leq (x^2/n)(1+|x|+x^2/2!+\ldots+|x|^{n-2}/(n-2)!)}$.

Démonstration. C'est un *simple calcul* : le premier membre est majoré par

$$\sum_{2\leq p\leq n} |x|^p/p!\left(1 - n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)/n^p\right) \leq \sum_{2\leq p\leq n} |x|^p/p!\left(1 - [(n-p+1)/n]^p\right)$$

$$= \sum_{2\leq p\leq n} |x|^p/p!\ (p-1)/n\left[1+(n-p+1)/n+[(n-p+1)/n]^2+\ldots+[(n-p+1)/n]^{p-1}\right]$$

$$\leq \sum_{2\leq p\leq n} |x|^p/p!\ \left((p-1)/n\right).p = (1/n)\sum_{2\leq p\leq n} |x|^p/(p-2)! = (|x|^2/n)\sum_{0\leq q\leq n-2} |x|^q/q!.\quad \text{Cqfd}$$

3/ On a l'inégalité

(4) $\boxed{\left|\sum_{n\leq p\leq n+m} x^p/p!\right| \leq 2|x|^n/n! \text{ si } n+1 \geq 2|x|.}$

Preuve. Par l'inégalité triangulaire, le premier membre est majoré par

$|x|^n/n!+ |x|^{n+1}/(n+1)!+\ldots+ |x|^{n+m}/(n+m)!$,

qui est majoré par la progression géométrique

$$|x|^n/n![1+|x|/(n+1)+|x|^2/(n+1)^2+\ldots+|x|^m/(n+1)^m],$$

qui, si $n+1 \geq 2|x|$, est majorée par $2|x|^n/n!$. Cqfd

4/ On a l'inégalité suivante, où $f_n(x) = 1+x+x^2/2!+\ldots+x^n/n!$ et $h \neq 0$:

(5) $$\boxed{|[f_n(x+h) - f_n(x)]/h - f_{n-1}(x)| \leq |h|f_n(|x|+1) \text{ si } 0 < |h| \leq 1.}$$

Démonstration. Il s'agit d'un *simple calcul* [11].

$$f_n(x+h)-f_n(x) = 0 + h +\sum_{2\leq k\leq n}(1/k!)\left[khx^{k-1}+C_k^{\ 2}h^2x^{k-2}+\ldots+h^k\right]$$

$$= hf_{n-1}(x) + h^2 \sum_{2\leq k\leq n}(1/k!)\left[\ C_k^{\ 2}\, x^{k-2}+\ldots+h^{k-2}\right].$$

Comme $|h| \leq 1$, on obtient en divisant par h, la majoration

$$\left|[f_n(x+h) - f_n(x)]/h - f_{n-1}(x)\right| \leq |h| \sum_{2\leq k\leq n}(1/k!)\left[\ C_k^{\ 2}\,|x|^{k-2}+\ldots+1\right]$$

$$\leq |h| \sum_{2\leq k\leq n}(1/k!)(|x|+1)^k \leq |h|f_n(|x|+1).$$ Cqfd

5/ On connaît en terminale S l'inégalité de Bernoulli : $(1+y)^n \geq 1+ny$ si $y \geq 0$ et n entier supérieur à 1. On va l'étendre au cas où $y \geq -1$, et il suffit de montrer l'inégalité suivante.

(6) $$\boxed{(1-v)^n \geq 1-nv \quad \text{si } 0 \leq v \leq 1.}$$

On pose $f(v) = (1-v)^n - (1-nv)$, qui vaut 0 en $v = 0$; et $f\,'(v) = n[1 - (1-v)^{n-1}] \geq 0$ car $0 \leq v \leq 1$. Donc $f(v) \geq 0$, ce que nous voulions.

6/ On a l'inégalité

(7) $$\boxed{|(1+x/n)^n(1+y/n)^n - (1+(x+y)/n)^n| \leq (1/n)(1+(|x+y|+|xy|)/n)^n} \quad \text{si } n \geq 1.$$

On a évidemment

$$(1+x/n)^n(1+y/n)^n = (1+(x+y)/n+xy/n^2)^n = (1+(x+y)/n)^n + \sum_{1\leq k\leq n}(xy/n^2)^k(1+(x+y)/n)^{n-k}C_n^{\ k}$$

et le module du dernier terme est majoré par

$$(1/n) \sum_{0\leq k\leq n}(|xy|/n)^k(1+|x+y|/n)^{n-k}C_n^{\ k}$$

c'est-à-dire par exactement $(1/n)(1+(|x+y|+|xy|)/n)^n$. Cqfd

---

[11] Nous notons ici ce qui est noté usuellement $\binom{k}{p}$ par $C_k^{\ p}$

II. Quelques conséquences de ces inégalités

1/Approximation de l'exponentielle de terminale par $g_n(x) = (1+x/n)^n$

La fonction exponentielle, solution sur $\mathbb{R}$ de f ' = f vérifiant f(0) = 1, et dont on admet l'existence, peut s'approcher par l'inégalité (2) : si $|x| \leq A \leq \sqrt{(n/2)}$, on a $0 \leq f(x) - (1+x/n)^n \leq CA^2 f(A)/n$ qui tend vers 0 si n tend vers l'infini. Remarquons de plus que cette convergence est uniforme sur l'intervalle [-A, A], même si cette remarque ne concerne guère les élèves de terminale.

2/ Une définition de l'exponentielle par la série

Quand on regarde l'ensemble des mathématiques, la seule extension raisonnable de la fonction exponentielle à d'autres domaines mathématiques se fait par la série classique : que ce soit l'exponentielle d'un nombre complexe z, l'exponentielle d'une matrice M, d'un opérateur linéaire T en dimension infinie, etc, on utilise la série $\sum_{p\geq 0} x^p/p!$. Il est donc intéressant de le faire aussi pour l'exponentielle d'un nombre réel.

(a) L'inégalité (4), pour n = 0 et $x \geq 0$ donne $\sum_{n\leq p\leq n+m} x^p/p! \leq 2x^n/n!$, si $n+1 \geq 2x$. Supposons donc qu'on ait $0 \leq x \leq A$; si $n+1 \geq 2A$, on a

$$f_{n+m} := 1+x+x^2/2!+\ldots+x^{n-1}/(n-1)!+x^n/n!+\ldots+x^{n+m}/(n+m)!$$

qui est majoré par $1+A+A^2/2!+\ldots+A^{n-1}/(n-1)!+2A^n/n!$ **quel que soit m**. Donc la suite des sommes partielles $f_k(x) = 1+x+x^2/2!+\ldots+x^k/k!$ de la série est **croissante majorée, donc converge** (et en fait uniformément sur [0,A]). On note exp(x) sa limite, mais on la notera aussi f(x). Ici, on a utilisé un résultat *admis* en terminale S, faute d'y parler de la borne supérieure.

Pour $x \leq 0$, on peut faire un raisonnement analogue avec les termes pairs et les termes impairs de la série, ou utiliser directement l'inégalité (4) qui montre que, quel que soit le signe de x, les sommes partielles de la série forment une suite de Cauchy (et uniforme sur [-A,A]), qui converge (et uniformément sur [-A,A]). Mais, bien sûr, le critère de Cauchy n'est pas disponible en terminale. On verra comme conséquence du paragraphe 3/ ci-dessous comment montrer le cas de x < 0, avec la suite de fonctions $g_n(x) = (1+/x/n)^n$.

(b) On peut ensuite utiliser la continuité de la fonction exponentielle définie par la convergence *uniforme* de la série, puis la relation $f_n'(x) = f_{n-1}(x)$ pour montrer la dérivabilité de l'exponentielle, avec la continuité de l'intégrale par rapport à la convergence uniforme des fonctions. Mais cela dépasse le programme de terminale. Montrons quand même la dérivabilité de l'exponentielle, en admettant sa continuité : de l'intégration de la relation précédente de 0 à x on obtient $f_n(x) - f_n(0) = \int_0^x f_{n-1}(t)dt$; en faisant tendre n vers $+\infty$ on obtient $f(x) - f(0) = \int_0^x f(t)dt$. Cette relation montre que f est de classe C^1 et que sa dérivée est elle-même.

Mais il est bien plus simple de prouver directement que l'exponentielle est sa propre dérivée (donc est continue). On utilise pour cela l'inégalité (5). Si on fait tendre n vers l'infini dans cette inégalité, on obtient

$$|[f(x+h) - f(x)]/h - f(x)| \leq |h|f(|x|+1) \text{ si } 0 < |h| \leq 1.$$

Si on fait tendre maintenant h vers 0, on en déduit que **f '(x) existe et vaut f(x)**. Comme f(0) = 1, on voit que **l'exponentielle définie par la série est la même fonction que l'exponentielle de terminale** (où on a prouvé son unicité).

3/ L'**exponentielle définie comme somme de la série est aussi la limite de $g_n(x) = (1+x/n)^n$**

Cela résulte directement de l'inégalité (3) : elle se réécrit, *pour x de signe quelconque*,

$$|f_n(x) - (1+x/n)^n| \leq (x^2/n)\, f_{n-2}(|x|) \leq (x^2/n)\exp(|x|) \leq (A^2/n)\exp(A) \quad \text{si } |x| \leq A.$$

Donc, si $x \geq 0$, quand $n \to +\infty$, $(1+/x/n)^n \to \exp(x)$ (et uniformément sur [0, A]).

Il va en résulter que $f_n(-x)$ converge si $x \geq 0$, et que si on note exp(-x) sa limite, on a **exp(-x) = 1/exp(x) si x ≥ 0.** En effet on a, si $0 \leq x \leq A$, d'après le prolongement (6) de l'inégalité de Bernoulli,

$$1-A^2/n \leq 1-x^2/n \leq (1-x^2/n^2)^n = (1-x/n)^n(1+x/n)^n \leq 1,$$

soit $1-A^2/n \leq g_n(-x)g_n(x) \leq 1$. Donc $g_n(-x)g_n(x)$ tend vers 1, et on sait que $|g_n(u) - f_n(u)|$ tend vers 0 *pour u de signe quelconque*.

Donc si $n\to+\infty$, on trouve que $f_n(-x)$ converge (et uniformément sur [-A, 0]), ce qui nous manquait au paragraphe 2/(a), et si on note exp(-x) sa limite, on a l'égalité que l'on souhaitait exp(-x)exp(x) = 1.

Exercice 1. Montrer l'inégalité

(8) $$|f_n(x)f_n(-x) - 1| \leq f_{2n}(2x) - f_n(2x) \quad \text{pour } x \geq 0,$$

et en déduire directement, à partir de la seule définition de l'exponentielle par la série pour $x \geq 0$, le résultat précédent, et la convergence de la série pour $x \leq 0$ [*Indication* : réordonner en x le produit $f_n(x)f_n(-x)$ en deux termes dont l'un de degré au plus n, modifier les indices de sommation, utiliser la somme des coefficients du binôme et leur somme alternée].

4/ L'exponentielle définie par la limite de g_n ou celle de f_n vérifie la relation fonctionnelle exp(x+y) = exp(x)exp(y).

On sait que ces deux suites ont la même limite. Partons alors de l'inégalité (7), et faisons tendre n vers l'infini dans chaque membre. Le premier terme tend vers $|f(x)f(y) - f(x+y)|$. Dans le second terme, 1/n tend vers 0, et $(1+(|x+y|+|xy|)/n)^n$ tend vers $f(|x+y|+|xy|)$, donc le produit des deux tend vers 0.

Exercice 2. Montrer l'inégalité

(9) $$|f_n(x)f_n(y) - f_n(x+y)| \leq f_{2n}(|x|+|y|) - f_n(|x|+|y|),$$

et en déduire à nouveau la relation fonctionnelle de l'exponentielle définie par la série [*Indication* : procéder de façon analogue à la méthode de l'exercice 1].

5/ L'exponentielle de terminale amène directement à l'expression sous forme de la série

Bien sûr, cela résulte de tout ce qui précède (en particulier les points 1/ et 3/). Mais on veut ici le faire *directement* à partir de la définition de terminale S.

Appelons en effet, si elle existe, P(g) **la primitive** nulle en 0 d'une fonction continue g sur $\mathbb{R}$; si cette nouvelle fonction possède aussi une primitive nulle en 0, on la notera $P^{(2)}(g)$,… et on notera $P^{(n)}(g)$, si elle existe, la primitive nulle en 0 de $P^{(n-1)}(g)$. On convient que $P^{(0)}(g) = g$.

Partant alors des relations f ' = f et f(0) = 1, une **récurrence simple** montre que f est de classe C^∞, que $P^{(n)}(f)$ existe pour tout entier $n \geq 0$, et qu'on a

(10) $$\boxed{f(x) = 1+x/1!+x^2/2!+x^3/3!+\ldots+x^n/n!+P^{(n+1)}(f)(x) = f_n(x) + P^{(n+1)}(f)(x)}.$$

Dire que $f_n(x)$ converge vers f(x) c'est donc dire que $P^{(n+1)}(f)(x) \to 0$ quand $n\to+\infty$. C'est ce qui est évident avec l'inégalité suivante :

(11) si g est une fonction continue, on a $\boxed{|P^{(n+1)}(g)(x)| \leq |x|^n/n!\ \max_{[-|x|,|x|]}|g|}$.

Cette inégalité se démontre par récurrence avec **l'inégalité des accroissements finis** (qui n'est plus au programme de la Terminale S, bien que ce soit un des théorèmes essentiels de l'analyse !), ou en *majorant des intégrales* par la formule de la moyenne.

Exercice 3. Montrer l'inégalité (11).

Remarquons de plus que la **nécessité** de la formule $f = \lim_{n\to+\infty} f_n$ entraîne **l'unicité** de la solution de l'équation f ' = f vérifiant f(0) = 1. C'est une nouvelle preuve de cette unicité, il y en a d'autres…

III. Prolongement régulier à $\mathbb{R}$ de la fonction définie sur $\mathbb{Q}$ par $p/q \to a^{p/q}$

1/ Pourquoi cette préoccupation ? L'équation fonctionnelle f(x+y) = f(x)f(y), f(0) = 1

Une occupation fréquente des physiciens est d'étudier la loi de variation d'une grandeur physique scalaire, notée y, qui dépend d'une autre grandeur scalaire, notée t (temps) ou x (espace) ou… Nous supposons que le phénomène étudié vérifie les *principes physiques et/ou philosophiques suivants :*

(a) **Le déterminisme**

On suppose que pour toute donnée initiale y_0 à un instant (ou position…) initial(e) t_0, et tout autre instant t la valeur y(t) est parfaitement déterminée (autrement dit il y a bien une **loi** physique). Remarquons que ceci impose aussi le déterminisme vers le passé (ou les positions antérieures…) : de $y(t_0)$ on peut remonter à y(t) même si $t < t_0$.

Remarque. On suppose ici que la donnée initiale suffit à déterminer l'évolution de la grandeur y. Le cas où on a aussi besoin de la valeur initiale de la dérivée de y (par exemple en mécanique) se ramènera au cas des grandeurs *vectorielles* en posant Y(t) = (y(t),y'(t)). Nous n'en traitons pas ici.

(b) **Le principe de réalité**

Le phénomène, et donc sa loi, ne dépend pas de l'observateur, et en particulier de l'origine des temps (ou espace…) choisi par lui pour repérer la variable t (ou x…). *Ce principe ne s'applique pas à toutes les recherches de lois physiques* (si l'observateur déclenche à un *moment donné* un phénomène extérieur artificiel qui *force* celui étudié).

(c) **Le principe de superposition**

Si on ajoute des données initiales $y_1(t_0)$, $y_2(t_0)$, le résultat en t est la somme des deux obtenus par les données initiales séparées $y_1(t_0)$ et $y_2(t_0)$.

(d) **Le principe de continuité**

On suppose que la loi $t \to y(t)$ est une fonction continue, et que la valeur en t de y(t) dépend continûment de la valeur initiale y_0 en t_0.

(e) **Le principe de non nullité**

On suppose que la grandeur y(t) ne s'annule jamais : pour tout t, $y(t) \neq 0$.

Alors il est facile de montrer que la fonction $t \to y(t)$ est **continue** et qu'elle s'exprime (à un facteur constant près) au moyen d'une fonction F qui vérifie l'équation fonctionnelle

(12) $$F(t+s) = F(t)F(s), \quad F(0) = 1.$$

D'où l'importance de cette équation fonctionnelle. *Voir l'appendice 1 pour la preuve et un exemple.*

2/ Premières propriétés d'une solution de l'équation fonctionnelle sur $\mathbb{Q}$

Posons f(1) = a. Il est très facile de montrer les propriétés suivantes :

$a > 0$; $f(p/q) = a^{p/q}$; $\forall x,\ f(x) > 0$; $a = 1 \Leftrightarrow f \equiv 1$; f est croissante ou décroissante selon les inégalités $a > 1$ ou $a < 1$.

Quitte à remplacer f par 1/f (qui vérifie la même équation fonctionnelle), on peut supposer que la fonction **f est croissante**. Donc la fonction f est parfaitement définie sur $\mathbb{Q}$, c'est $r \to a^r$, vue antérieurement (rappelons que si p et q sont des entiers positifs, $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$, et qu'on peut étendre cette notation aux rationnels négatifs grâce à l'inverse, et alors l'équation fonctionnelle sur $\mathbb{Q}$ est vérifiée).

Exercice 4. Montrer toutes les propriétés annoncées ci-dessus.

Lemme 1. La fonction $r \to a^r$ est continue sur $\mathbb{Q}$ (pour $a > 1$).

Démonstration du lemme. On remarque que si $0 < r < 1/n$ on a $1 < a^r < a^{1/n} \leq 1+(a-1)/n$. Seule la dernière inégalité est à prouver, elle résulte de l'inégalité de Bernoulli :

$$(1+(a-1)/n)^n \geq 1+n(a-1)/n = a.$$

On obtient donc la continuité à droite en 0 de la fonction. Mais on a $0 < a^s - a^{r_0} = a^{r_0}(a^{s-r_0} - 1)$, si bien que la continuité à droite en 0 implique la continuité à droite en n'importe quel nombre rationnel r_0. Enfin, la continuité à gauche en tout point résulte du fait que, si $s < 0$, $a^s = 1/a^{-s}$. cqfd

3/ Attention : il y a des solutions de l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x)f(y)$, $f(0) = 1$ sur $\mathbb{R}$ et non continues (discontinues sur tout intervalle).

Ce point est très simple, mais **avec des connaissances plus élaborées**. On utilise le fait que si on considère $\mathbb{R}$ comme un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$, d'après *l'axiome du choix il possède une base* (infinie, bien sûr). Soit b un élément de cette base, et soit f_b la fonction coordonnée sur cette base, c'est-à-dire l'application f_b qui à un réel x fait correspondre sa coordonnée $f_b(x)$ sur cet élément de la base. C'est donc une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Q}$ qui est $\mathbb{Q}$-linéaire. Elle ne peut être continue (et même sur tout intervalle]c, d[elle a un point de discontinuité) car sinon elle devrait vérifier le théorème des valeurs intermédiaires, ce qui est impossible car ses valeurs ne sont que des nombres rationnels et elle n'est pas constante (voir l'exercice 5). Alors la fonction $x \to \exp(f_b(x))$ est une solution de l'équation fonctionnelle qui est discontinue sur tout intervalle. En faisant varier b, on obtient une infinité de solutions discontinues…

Il en résulte qu'il faut ajouter une **condition de régularité** à une solution de l'équation fonctionnelle si on veut obtenir l'exponentielle. Par exemple le fait que f soit continue, ou même simplement que f soit bornée sur un certain intervalle : *voir l'appendice 2*.

Exercice 5. Montrer que si $r < s$ sont des rationnels, $(r+s)/2+\sqrt{2}/n \in]r,s[$ si n est assez grand.

4/ Construction d'une extension continue F à $\mathbb{R}$ de $f : r \to a^r$ définie sur $\mathbb{Q}$, pour $a > 1$

Evidemment il n'y en a qu'une possible, et elle nécessairement définie par le procédé suivant, dont nous donnons seulement le plan détaillé.

Si $x \in \mathbb{R}$, on pose $F_g(x) := \lim_{r\uparrow x,\, r\in\mathbb{Q}} f(r)$ et $F_d(x) := \lim_{r\downarrow x,\, r\in\mathbb{Q}} f(r)$.

(a) Sur Q, $F_g = F_d = f$.

(b) Sur IR, $F_g = F_d$, on note F cette fonction, c'est le prolongement cherché.

(c) F est croissante, continue, $F(0) = 1$, F est non constante.

(d) F est bien solution de l'équation fonctionnelle : $F(x+y) = F(x)F(y)$.

Exercice 6. Prouver les différentes étapes qui précèdent.

5/ Dérivabilité de la fonction F, relation $F'(x) = F'(0)F(x)$

De la propriété fonctionnelle, on déduit que $F((x+y)/2) = \sqrt{[F(x)F(y)]} \leq (F(x)+F(y))/2$ d'après *l'inégalité entre moyenne géométrique et moyenne arithmétique* de deux nombres positifs.

L'inégalité $F((x+y)/2) \leq (F(x)+F(y))/2$ vérifiée par la fonction F sera dite **convexité par demi-somme.** Admettons *provisoirement* le lemme suivant :

Lemme 2. Une fonction g *continue* sur un intervalle I ouvert de $\mathbb{R}$, convexe par demi-somme, est convexe, c’est-à-dire vérifie $g(\lambda x+(1-\lambda)y) \leq \lambda g(x)+(1-\lambda)g(y)$ si $\lambda \in]0,1[$ et $x < y$ dans I (le graphe de g sur $]x,y[$ est en dessous du segment qui joint les points $(x,g(x))$ et $(y,g(y))$).

On va alors en déduire le résultat suivant :

Le taux entre 0 et x de la fonction F : $x\to (F(x)-1)/x$ est une fonction croissante de x.

Démonstration. Prenons par exemple $0 < u < v$; alors la convexité de F appliquée entre les points 0 et v avec $\lambda = u/v$ (car $u = (1-u/v).0 + (u/v).v$) montre que $F(u) \leq (1-u/v).F(0) + (u/v).F(v)$, ce qui se réécrit $(F(u)-1)/u \leq (F(v)-1)/v$. Et on fait une démonstration analogue dans les autres cas. Cqfd

Exercice 7. Finir la démonstration quand $u < 0 < v$, et quand $u < v < 0$.

Preuve de la dérivabilité. La relation $[F(x+h) - F(x)]/h = F(x).[F(h) - 1]/h$ montre que la seule chose à démontrer est la dérivabilité en 0, et qu’on aura alors **$F'(x) = F'(0)F(x)$**. Prenons d’abord le nombre $h > 0$. D’après la croissance en h de $[F(h) - 1]/h$, et le fait qu’il est minoré par le taux entre -1 et 0, $[F(h) - 1]/h$ a une limite quand $h\to 0$, donc la dérivée à droite $F'_d(0)$ existe. Par un raisonnement analogue la dérivée à gauche $F'_g(0)$ existe, et la croissance du taux montre que l’on a $F'_g(0) \leq F'_d(0)$. Enfin, $[F(-h)-1]/(-h) = [F(h)-1]/h.1/F(h)$ si $h > 0$. En faisant tendre h vers 0, on voit que $F'_g(0) = F'_d(0)$: $F'(0)$ existe bien, et n’est pas nulle, sinon F’□□0, et F serait constante. Elle est donc strictement positive, puisque F est croissante. Cqfd

Cela permet d’identifier complètement la fonction F : on pose $G(x) = F(x/F'(0))$, et alors G vérifie l’équation fonctionnelle, est croissante non constante, $G(0) = 1$, et on a $G'(x) = [1/F'(0)]F'(x/F'(0)) = [1/F'(0)]F'(0)F(x/F'(0)) = G(x)$: G est sa propre dérivée, donc c’est la fonction exponentielle de terminale, exp(x). **Si on pose $F'(0) = m > 0$, on a donc $F(x) = \exp(mx)$.**

Reste à prouver le lemme 2.

Preuve du lemme 2. (a) On va d’abord montrer que si une fonction f continue sur I est **strictement** convexe par demi-somme (c’est-à-dire $f[(x+y)/2] < [f(x)+f(y)]/2$ si $x < y$), alors elle est convexe. *Supposons ce point démontré*. Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire, et soit $g_\varepsilon(t) = g(t) + \varepsilon t^2$, où g est convexe par demi-somme; cette fonction est strictement convexe par demi-somme (vérifiez-le sur la fonction t^2). Donc elle est convexe, et par suite on a, si $\lambda\in]0,1[$ et $x < y$: $g[\lambda x+(1-\lambda)y] + \varepsilon[\lambda x+(1-\lambda)y]^2 \leq \lambda[g(x)+ \varepsilon x^2] + (1-\lambda)[g(y)+ \varepsilon y^2]$.

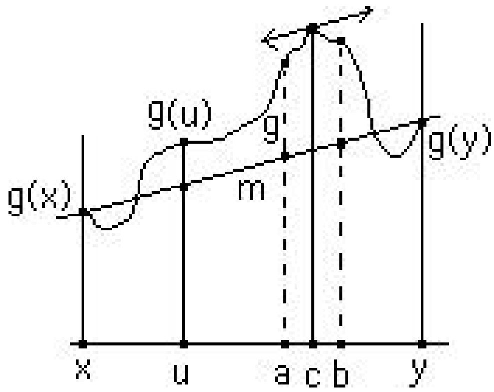
Si on fait tendre ε vers 0, on obtient la convexité de g.

(b) *Il reste à prouver le point admis* pour g strictement convexe par demi-somme. Soit $x < y$ dans I, et soit $t\to m(t)$ la fonction affine sur I coïncidant avec g en x et en y. *On veut montrer que $g(t) \leq m(t)$ sur $]x,y[$. Sinon*, $\exists\, u\in]x,y[$ tel que $g(u) > m(u)$. Alors g-m possède un maximum atteint en $c\in]x,y[$. Choisissons $a < c < b$ tels que $c = (a+b)/2$; on a alors

$g(c)-m(c) \geq [g(a)+g(b)]/2 - [m(a)+m(b)]/2$,

soit $g(c) = g([a+b]/2) \geq [g(a)+g(b)]/2$, ce qui *contredit* la *stricte* convexité par demi-somme de g. Cqfd

Remarque. Il y a une démonstration plus standard du lemme 2, en prouvant la convexité pour des λ *dyadiques* (de la forme $k/2^n$) puis passage à la limite, mais elle est longue et laborieuse.



Conclusion.

Le lecteur est invité à écrire une preuve, la plus courte possible, de **l'équivalence des 5 approches possibles pour définir la fonction exponentielle**, à partir des diverses propriétés que nous avons développées dans ce chapitre. Il faudrait y ajouter une preuve de l'équivalence des diverses propriétés caractéristiques des fonctions exponentielles rappelées dans l'introduction.

On trouvera dans la bibliographie divers textes intéressants sur la fonction exponentielle.

Appendice 1 : la physique et l'équation fonctionnelle

Montrons ici comment avec les propriétés philosophico-physiques du § III.1/ la grandeur étudiée $t \to y(t)$ vérifie l'équation fonctionnelle de l'exponentielle.

* De la propriété (3) on déduit classiquement que pour tout rationnel p/q et tous t, t_0, on a

$$y(t,t_0,(p/q)y_0) = (p/q)y(t,t_0,y_0).$$

* De la propriété (4) on déduit alors que $y(t)$ est une fonction linéaire de y_0. Autrement dit, il existe une fonction R de deux variables telle que

$$y(t) = R(t,t_0)y_0 \quad \text{et} \quad \forall\, t_0\ R(t_0,t_0)y_0 = y_0.$$

* De la propriété (1) on déduit que quels que soient t_2, t_1, t_0, y_0 on a

$$R(t_2,t_1)R(t_1,t_0)y_0 = R(t_2,t_0)y_0.$$

* De la propriété (5) on déduit alors que pour tous t_2, t_1, t_0, on a

$$R(t_2,t_1)R(t_1,t_0) = R(t_2,t_0), \quad \text{et} \quad R(t_0,t_0) = 1.$$

* De la propriété (2), on déduit que l'évolution du phénomène entre deux instants t_1 et t_2 ne dépend que de la différence t_2-t_1 ; dit autrement, il existe une fonction F *d'une seule variable* telle que l'on ait

$$R(t_2,t_1) = F(t_2-t_1).$$

* De la propriété sur la fonction R vue antérieurement, on déduit alors que la fonction F vérifie :

$$F \text{ est continue, } \forall\, u, v \quad F(u+v) = F(u)F(v) \text{ et } F(0) = 1,$$

c'est-à-dire l'équation fonctionnelle sur IR. Il résulte alors de toute la partie III qu'un tel phénomène a donc pour loi **$y(t) = y_0 \exp(mt)$**, pour une certaine constante m. Ce qui réjouit profondément les physiciens !

Exemple d'application : l'atténuation de l'intensité lumineuse dans un milieu absorbant

On considère de la lumière se déplaçant de façon rectiligne dans un milieu absorbant (semi-transparent) homogène, et on suppose que l'intensité lumineuse décroit au fur et à mesure qu'elle s'y propage . La variable est l'abscisse x où l'on regarde la valeur I(x) de l'intensité lumineuse. Le principe (c) est assez intuitif : si on ajoute des intensités lumineuses en x_0, ce qui reste en x est la somme de ce que chacune serait, indépendamment de l'autre, devenue en x. Les autres principes sont assez naturels. On en déduit que l'intensité à l'endroit d'abscisse x est donnée par $I(x) = I_0 \exp(-k(x - x_0))$, où I_0 est l'intensité lumineuse au point d'abscisse x_0.

En dérivant, la relation $I' = - kI$ permet d'interpréter k comme une caractéristique d'absorption du milieu.

D'autres applications sont possibles : radioactivité, dilution du sel dans un bassin par apport d'eau pure et évacuation du mélange avec débits égaux, loi de Newton de refroidissement des corps…

Appendice 2 : Une régularité impliquant la continuité d'une solution de l'équation fonctionnelle

On se propose de montrer le résultat de régularité suivant :

Théorème. Soit f une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x)f(y)$, $f(0) = 1$. S'il existe un intervalle ouvert sur lequel f est bornée, alors f est continue.

Preuve. Soit $]x_0-a,x_0+a[$ sur lequel f est bornée par M. Si $J =]-a,+a[$, f est bornée sur J par $K = M/f(x_0)$. Supposons que f ne soit pas continue en 0. Alors il existe $\varepsilon > 0$ et une suite y_n **dans J, tendant vers 0**, telle que $|f(y_n)-1| \geq \varepsilon$, c'est-a-dire $f(y_n) \geq 1+\varepsilon$, **ou bien** $f(y_n) \leq 1-\varepsilon$, ce qui est équivalent à $f(-y_n) \geq 1/(1-\varepsilon)$. Soit N un entier tel que $(1+\varepsilon)^N > K$ **et** $[1/(1-\varepsilon)]^N > K$. Soit alors un entier p_N tel que $|y_n| \leq a/N$ si $n \geq p_N$ ($y_n \to 0$). Alors Ny_n et $-Ny_n$ appartiennent à J, donc on a **ou bien** $K < (1+\varepsilon)^N \leq f(y_n)^N = f(Ny_n) \leq K$, **ou bien** $K < [1/(1-\varepsilon)]^N \leq f(-y_n)^N = f(-Ny_n) \leq K$: dans les deux cas on obtient une contradiction. Cqfd

Exercice 8. Réécrire la démonstration précédente sans faire de raisonnement par l'absurde.

Appendice 3. Déduire simplement la dérivabilité d'une solution de l'équation fonctionnelle f(x+y) = f(x)f(y) de sa continuité, mais avec l'aide de la notion de primitive

On s'intéresse à une solution ne s'annulant pas, donc de signe constant. On intègre en t la relation $f(x+t) = f(x)f(t)$, par exemple sur [0,1] :

$$\int_0^1 f(x+t)dt = f(x)\int_0^1 f(t)dt \;;$$

on pose x+t = u dans la première intégrale, et comme $\int_0^1 f(t)dt \neq 0$, on obtient

$$f(x) = \frac{\int_x^{x+1} f(u)du}{\int_0^1 f(t)dt}.$$

Si F est une primitive de f, donc de classe C^1 puisque f est supposée continue, on peut donc écrire la relation

$$f(x) = \frac{F(x+1)-F(x)}{F(1)-F(0)},$$

qui montre que f est de classe C^1.

Cette preuve est plus simple que celle utilisant la convexité, mais *elle suppose qu'on ait vu avant les rudiments du calcul intégral et des primitives des fonctions continues*.

Exercice 9. Démontrer de façon analogue que les solutions continues des 3 équations fonctionnelles suivantes sont de classe C^1 :

$f(xy) = f(x) + f(y)$ sur $]0,+\infty[$; $f(xy) = f(x)f(y)$ sur $]0,+\infty[$; $f(x+y) = f(x) + f(y)$ sur $\mathbb{R}$.

Appendice 4. Extension continue à ℝ de la fonction f vérifiant la relation fonctionnelle f(x+y) = f(x)f(y), f(0) = 1, en utilisant les développements décimaux

Si un réel x s'écrit $x = p,a_1a_2a_3\ldots a_n\ldots$ (ce qu'un élève de terminale peut aisément concevoir après discussion, sans entrer dans la théorie), où p est dans $\mathbb{Z}$ et les $a_n \in [[0,9]]$ (*développement décimal illimité*), on peut montrer comment avec la relation fonctionnelle $f(x+y) = f(x)f(y)$, $f(0) = 1$, on peut calculer f sur les entiers, puis sur les nombres décimaux à 1, puis à 2, puis… à n décimales, et en déduire la valeur de f sur les décimaux à n+1 décimales, et ceci pour tout n par récurrence. Il est alors tentant, si x s'écrit $x = p, a_1a_2a_3\ldots a_n\ldots$, de prendre comme définition de f(x) la limite de la suite de nombres $u_n = f(p, a_1a_2a_3\ldots a_n)$. Cela remplace la procédure du paragraphe 4/ de ce chapitre. Voyons en détails comment cela peut se faire.

On a vu qu'on peut supposer que la fonction f est croissante.

Si $x = p, a_1a_2a_3\ldots a_n$, et si $y = x+10^{-n}$, alors sur le décimal $z = p, a_1a_2a_3\ldots a_na_{n+1}$ on a

$10z = (10-a_{n+1}).x + a_{n+1}.y$, donc $f(z)^{10} = f(x)^{10-a_{n+1}}.f(y)^{a_{n+1}}$.

Il suffit donc d'extraire une racine dixième pour calculer f(z).

Par exemple, si on connaît f(2,39) et f(2,40), on peut calculer $f(2{,}396) = \sqrt[10]{f(2{,}39)^4.f(2{,}40)^6}$.

Remarquer que si on utilise le développement binaire pour les nombres, avec une suite de 0 et de 1, une racine carrée suffirait pour passer des nombres avec n « bimales » à ceux avec n+1 bimales.

Si on note $\mathbb{D}$ les nombres décimaux, et $\mathbb{D}_n$ les nombres décimaux avec n décimales, on a donc calculé par récurrence les valeurs de f sur tous les $\mathbb{D}_n$, et donc sur $\mathbb{D} = \mathrm{U}_n\, \mathbb{D}_n$.

Soit alors x un nombre réel, $x = p,a_1a_2a_3\ldots a_n\ldots$ son développement décimal illimité, et soit $x_n = p,a_1a_2a_3\ldots a_n$ son développement décimal à n décimales. On a calculé les $u_n = f(p,a_1a_2a_3\ldots a_n)$, et il est clair que cette suite est croissante et majorée par $f(p+1) = f(1)^{p+1}$. Donc la suite converge vers un nombre qui va être le prolongement cherché de f au point x si on suppose (et souhaite) ce prolongement continu sur $\mathbb{R}$, et donc croissant.

Bien sûr, il y a certaines vérifications élémentaires à faire, en particulier que la valeur de f(x) ne dépend pas du développement décimal illimité de x choisi (quand il y en a deux possibles, si x est décimal) ; nous laissons ce point au lecteur.

L'avantage de cette présentation est le côté intuitif pour les élèves, car correspondant à toute une pratique (qui devrait sans doute être plus développée qu'aujourd'hui dans l'enseignement) des approximations décimales des nombres.

Références

Choquet G., *Cours de Gustave Choquet*, Ed. Ellipses, Paris, 2002 (p. 93-94).

Fréchet M., Equation différentielle y' = y et fonction exponentielle, *Bulletin de l'APMEP* n° 460, octobre 2005.

Friedelmeyer J.-P., Comment introduire les fonctions logarithmes et exponentielles au lycée ?, *Bulletin de l'APMEP* n° 460, octobre 2005.

Houzel C. *Analyse mathématique*. Ed. Belin. 1998.

Rogalski M. Un scénario pour motiver l'introduction de la fonction exponentielle en terminale S par son équation différentielle, mise en œuvre dans la classe. *Bulletin de l'APMEP* n° 492, p. 17-29, 2011.

Rogalski M. et al. *Carrefour entre analyse algèbre géométrie*. Ed. Ellipses. 2001.

Rudin W. *Analyse réelle et complexe*. Dunod. 1998.

Annexe 1. Rapports entre logarithme et exponentielle

I. De l'exponentielle au logarithme (terminales S et ES)

Classiquement, en particulier dans les terminales S et ES, la fonction logarithme est introduite comme *fonction réciproque de la fonction exponentielle*. Mais le concept même de fonction réciproque n'est plus au programme, on procède donc de façon *ad hoc*, sur la fonction particulière exponentielle, en montrant que celle-ci est strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]0,+\infty[$. Donc pour tout $x > 0$ il existe un nombre réel unique y tel que $e^y = x$; ce nombre y est le logarithme népérien de x, noté $\ln(x)$ ou $\ln x$. On a donc l'équivalence, pour $y \in \mathbb{R}$ et $x > 0$

$$y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y.$$

On en déduit facilement les propriétés suivantes de la fonction logarithme :

* pour x réel, $\ln(e^x) = x$; pour $x > 0$, $e^{\ln x} = x$; $\ln 1 = 0$;
* $\forall\ a > 0$, $\forall\ b > 0$, $\ln ab = \ln a + \ln b$; c'est *l'équation fonctionnelle du logarithme*, cette fonction transforme les produits en somme ; $\ln(1/x) = - \ln x$;
* si $x > 0$ et $p \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $\ln(x^p) = p \ln x$, et $\ln(x^{1/p}) = (1/p) \ln x$;
* $\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$;
* la fonction logarithme est continue sur $]0,+\infty[$;
* la fonction logarithme est dérivable et sa dérivée au point $x > 0$ est $1/x$; donc $\boxed{\int_1^x \frac{dt}{t} = \ln x}$;
* si $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $\lim_{x\to+\infty} \ln(x)/x^{1/n} = 0$.

La propriété du logarithme de transformer les produits en somme et donc de ramener les calculs de multiplications de grands nombres en additions, via des tables de logarithmes, a été à l'origine de l'invention directe du logarithme par Neper, et a longtemps été utilisée en calcul numérique, en particulier pour l'astronomie.

La relation $\int_1^x \frac{dt}{t} = \ln x$ n'a été établie que vers 1645, par Grégoire de Saint Vincent. C'était l'ancienne définition du logarithme en terminale S, et c'est toujours celle qui, en terminales TSTI2D et STL, spécialité STPC, apparaît rapidement à partir de l'équation fonctionnelle ; on y introduit donc le logarithme *avant* l'exponentielle.

II. Du logarithme à l'exponentielle (terminales TSTI2D et STL)

Voici ce qu'on trouve dans les programmes, où il est explicitement dit que l'exponentielle est construite à partir du logarithme (c'en est donc la fonction réciproque).

Fonctions exponentielles Fonction $x \mapsto \exp(x)$.	• Connaître les variations, les limites et la représentation graphique de la fonction exponentielle.	Pour tout nombre réel a, le réel $\exp(a)$ est défini comme unique solution de l'équation d'inconnue b : $\ln b = a$.
Relation fonctionnelle. Notation e^x.	• Utiliser la relation fonctionnelle pour transformer une écriture. • Passer de $\ln x = a$ à $x = e^a$ et inversement, a étant un réel et x un réel strictement positif.	On justifie la notation e^x.

Voici ce que proposent les programmes pour la fonction logarithme.

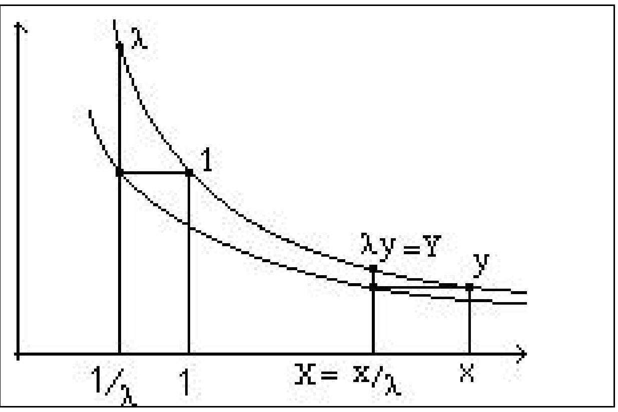
Fonctions logarithmes Fonction logarithme népérien. Relation fonctionnelle. Nombre e.	• Utiliser la relation fonctionnelle pour transformer une écriture. • Connaître les variations, les limites et la représentation graphique de la fonction logarithme népérien. • Résoudre une inéquation d'inconnue n entier naturel, de la forme $q^n \geq a$ ou $q^n \leq a$, avec q et a deux réels strictement positifs.	En s'appuyant sur des situations technologiques ou historiques, on justifie la pertinence de la recherche d'une solution à l'équation fonctionnelle suivante, notée (E) : pour tous réels a et b strictement positifs, $f(ab) = f(a) + f(b)$. On s'intéresse aux solutions de l'équation (E) dérivables sur $]0,+\infty[$ (existence admise). On montre que la fonction dérivée d'une telle solution est de la forme $x \mapsto \frac{\alpha}{x}$, où α est un nombre réel. La fonction logarithme népérien est alors présentée comme la seule solution de l'équation (E) dérivable sur $]0,+\infty[$ dont la fonction dérivée est $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Il faut remarquer que dans cette présentation, on *admet l'existence* du logarithme comme fonction *dérivable* vérifiant son *équation fonctionnelle*. Ce n'est qu'après qu'on montre que c'est la primitive de la fonction t→1/t nulle en 1.

Il peut être intéressant de montrer directement que *l'aire* sous la courbe t→1/t entre les points d'abscisses 1 et x > 0 est bien solution de l'équation fonctionnelle. Il faut évidemment *admettre la notion d'aire*, ainsi que certaines de ses propriétés intuitives. Voyons comment on peut faire cela.

La propriété essentielle est l'effet d'une affinité verticale ou horizontale sur l'aire S(a,b) entre deux verticales d'abscisses a et b sous la courbe t→1/t et l'axe horizontal :

Soit $H_{1/\lambda}$: (x,y)→(x/λ,y) *l'affinité horizontale* de rapport 1/λ, et V_μ : (x,y)→ (x,μy) *l'affinité verticale* de rapport μ (qu'on peut interpréter comme des changements d'échelles sur chacun des axes). Alors l'aire S(a,b) est multipliée par 1/λ par $H_{1/\lambda}$ et par μ par V_μ (on suppose λ et μ positifs).
De plus la courbe d'équation xy = 1 est conservée par la double affinité $V_\lambda o H_{1/\lambda}$ qui à (x,y) fait correspondre (X,Y) = (x/λ, λ y),



ainsi que la région située entre elle et l'axe horizontal.	

Alors, si on pose ln x = S(1, x) (c.-à.-d. $\int_1^x \frac{dt}{t}$), et si on regarde l'effet de $V_\lambda o H_{1/\lambda}$ sur cette aire, elle est inchangée : S(1,x) = S(1/λ, x/λ). Mais S(a,b) = ln b – ln a, donc on obtient la relation ln(x/λ) = ln x + ln(1/λ), soit en posant 1/λ = y : ln(xy) = ln x + ln y. Ainsi, moyennant la notion d'aire, qu'on peut admettre, la fonction x→S(1,x) = $\int_1^x \frac{dt}{t}$ vérifie l'équation fonctionnelle désirée pour le logarithme. A partir de là, on peut retrouver toutes les propriétés de cette fonction.

Annexe 2. L'exponentielle solution d'une équation intégrale : le câble d'ascenseur

Cela pourrait aussi servir à l'introduction de l'équation différentielle de la fonction exponentielle grâce à la notion d'intégrale ou de primitive.

Voici l'énoncé.

Un câble d'ascenseur dans une mine est très long, donc il doit supporter à tout niveau, non seulement le poids P de la cage d'ascenseur, mais aussi tout le poids du câble qui est au dessous de ce niveau. On se donne :

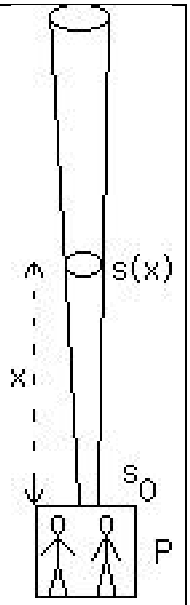
- la masse volumique ρ du câble (supposée la même en tous ses points) ;
- le poids P de la cage d'ascenseur ;
- la loi de résistance du câble : à tout niveau x, l'aire s(x) de la section du câble (supposée circulaire) doit être proportionnelle au poids qu'elle a à soutenir, avec un coefficient k (qui dépend du matériau avec lequel le câble est fabriqué).

On veut trouver le profil du câble, c'est-à-dire la fonction s(x) (ou le rayon r(x) = $\sqrt{[s(x)/\pi]}$). On suppose que le câble est tronconique d'axe vertical.

On prend comme origine des niveaux du câble celui de sa fixation à la cage, x sera donc l'altitude au dessus de la cage, qui est à l'altitude 0. Si s_0 est la section à cet endroit x = 0, on a donc $s_0 = kP$.
Jusqu'à l'altitude x au dessus de la cage, le poids du câble jusqu'à ce niveau et de la cage est $P + \rho\int_0^x s(t)dt$. [*Donner ici comment établir cela, car V =∫ (surface) n'est plus au programme de terminale ; on peut chercher à encadrer le poids d'une tranche du câble entre les altitudes x et x +Δx au moyen de s(x) et s(x +Δx)*]
Donc on doit avoir $\boxed{s(x) = k(P + \rho\int_0^x s(t)dt)}$. C'est une *équation intégrale* que doit vérifier la fonction inconnue s. Pour se débarrasser de l'intégrale dans cette formule, le plus simple est de dériver en x (si s est continue, elle est dérivable) ; on obtient $s'(x) = k\rho s(x)$, et on a $s(0) = s_0$. C'est donc la fonction exponentielle qu'on obtient :

$$\boxed{s(x) = s_0 e^{k\rho x}}, \text{ et } r(x) = \sqrt{s_0/\pi}\ \boxed{e^{(k\rho/2)x}}.$$

Reste à voir que cette fonction s est bien solution de l'équation intégrale (en dérivant, on n'a travaillé qu'en condition *nécessaire*) ; on l'y reporte, on fait le calcul (élémentaire) et cela marche.



Exercice 1. (a) Qu'obtient-on si P = 0 ?

(b) Que se passe-t-il pour un câble de longueur infinie ? [prendre cette fois l'origine des altitudes en haut, avec une section S(0) donnée].

Exercice 2. Faire le lien de façon générale entre l'équation différentielle $f' = kf$, $f(x_0) = a$, et l'équation intégrale $f(x) = a + k\int_{x_0}^{x} f(t)dt$.

Quelle est la solution de l'équation intégrale $f(x) = ax + b + c\int_0^x f(t)dt$?

TITRE :

L'introduction de la fonction exponentielle examinée sous plusieurs aspects : diverses classes de terminales, la licence, la formation des maîtres, différentes définitions mathématiques, des liens avec la physique

AUTEURS: Groupe Analyse de l'IREM de Paris

Sylvie Alory, Renaud Chorlay, Charlotte Derouet, Dominique Pasquerault, Marc Rogalski, Sophie Rousse, Fabrice Vandebrouck, Laurent Vivier, Mohamed Habib Zorai

RESUMÉ :

Cette brochure fait suite à la celle sur l'introduction de la dérivée en classe de première (Brochure IREM numéro 97, 2015). Il s'agit cette fois de travailler l'introduction de la fonction exponentielle qui est peut-être le deuxième « vrai » moment dans l'enseignement secondaire où les élèves commencent à entrevoir des problématiques de l'analyse (après la dérivée). Une autre raison qui nous a poussés à nous intéresser à cette notion est le fait que la fonction exponentielle est abordée dans de nombreuses filières en terminale, et aussi en licence et en formation des maîtres, mais avec des préconisations différentes dans les programmes ou les pratiques, quant à son introduction. En terminale S, il est demandé d'introduire la fonction exponentielle avec la relation f'=f, tandis qu'en terminale ES-L, il est demandé d'étendre les suites géométriques q^n à q^x (pour x un nombre réel). En terminale STI2D, la fonction exponentielle est introduite comme réciproque de la fonction logarithme, qui elle-même est amenée par la relation fonctionnelle f(xy)=f(x)+f(y). Cette multitude d'approches nous a semblé riche et intéressante à étudier. L'idée du groupe a donc été de travailler en parallèle sur différentes approches pour introduire la fonction exponentielle en suivant les indications des programmes tout en essayant de pallier les manques ou les maladresses des propositions de certains manuels. Nous n'avons pas ici comme ambition de juger les choix des programmes mais de partir de ceux-ci et faire des propositions concrètes qui essaient de pointer les limites et les difficultés des différentes approches.
Dans cette brochure, nous présentons des propositions d'introduction suivant les différentes approches, mais aussi nous proposons d'éclairer sur les liens entre les différentes approches. Même si les liens ne sont pas tous à expliciter aux élèves, il est intéressant en tant qu'enseignant de les comprendre et d'avoir conscience des avantages et des inconvénients de chacune de ces approches.

MOTS- CLÉS :

Analyse, exponentielle, suite géométrique, logarithme

Éditeur: IREM de Paris
Responsable de la publication: F. Vandebrouck
IREM de Paris 7 – Case 7018
Université Paris Diderot
75205 Paris cedex 13
irem_de_paris@univ-paris-diderot.fr
http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/

Dépôt légal : 2017
ISBN : 978-2-86612-384-0