La dernière conférence de Jean-Louis Ovaert

Anne Michel-Pajus

J'ai retrouvé mes notes prises lors de cette conférence qu'évoque Évelyne Barbin. C'était le 14 mars 2009 au cours d'une journée en hommage à Jean-Luc Verley. Elle s'intitulait « *Le processus historique du développement des mathématiques* ».

Jean-Louis nous a d'abord raconté comment, à la suite de cours sur Althusser donnés à l'École Normale Supérieure par Pierre Raymond, de lectures de Cavaillès et Koyré, de discussions avec Christian Houzel et autres camarades de Normale Sup', il s'était posé ces questions : quelle vision des mathématiques avons-nous ? Quelle vision faut-il promouvoir dans l'enseignement ?

D'abord, quelle est la place des mathématiques parmi les disciplines scientifiques ?

Une réponse classique au début du XXe siècle était : un langage pour les autres disciplines. Cette réponse de nature idéologique était liée à leur intervention en sciences humaines. Les arguments qui la soutenaient étaient que c'était une science sans expérimentation et sans objet réel. *A contrario*, pour Jean-Louis Ovaert, les mathématiques constituaient une science à part entière, organisée autour de concepts, de problèmes, de méthodes, dans une démarche spécifique.

Quels sont les rapports des mathématiques aux autres sciences ?

Certains domaines comme les probabilités entretiennent une certaine ambiguïté avec le concret. Par exemple le « paradoxe » de l'aiguille de Buffon semble renvoyer à des expériences. Il s'agit en fait d'un problème mal posé : une fois défini le « jeté au hasard » le paradoxe se dissout dans l'axiomatique de Kolmogoroff.

Les mathématiques n'interviennent jamais directement sur le concret, mais fournissent des concepts et des méthodes aux autres sciences. Voici un exemple où la diversité des points de vue mathématiques peuvent se révéler féconds : le problème des anniversaires. Combien de personnes faut-il réunir pour avoir au moins une chance sur deux que leur anniversaire tombe le même jour ? Il peut être résolu de deux façons : en regardant les anniversaires d'un groupe donné, ou du point de vue de l'officier d'état-civil qui examine les naissances à une date donnée. Traduit en théorie cinétique des gaz, chaque individu est une particule, possédant un certain niveau d'énergie : c'est la théorie statistique classique de Maxwell –Boltzmann, mais si les particules sont indiscernables et que l'on s'intéresse à leur nombre à chaque niveau, on obtient la théorie quantique de Bohr- Einstein.

D'après Althusser, « les mathématiques s'appliquent à la physique comme la peinture », mais pour J.-M. Levy-Leblond, les concepts mathématiques sont constitutifs de la physique, dont tous les concepts seraient mathématiques. Mais plus on s'écarte des « sciences dures », plus les concepts fondamentaux d'une science deviennent extérieurs aux mathématiques. Un symptôme de ce fait est la prolifération des noms doubles : biophysique, chimie théorique, physico-chimie ...

Bien sûr, les relations entre les mathématiques et les autres sciences ne sont pas à sens unique !

Quels sont les rapports des mathématiques à leur objet d'étude ?

Dans toutes les sciences, le rapport à l'objet d'étude passe par l'expérimentation. En physique, l'expérimentation - à distinguer de l'expérience - est une description des objets de la « réalité physique ». On construit un dispositif que l'on teste. En mathématiques, l'expérimentation porte sur des objets déjà mathématisés. Elle met en jeu l'intuition, l'imagination et le raisonnement dans les idées directrices et l'architecture. La validation se fait avec les critères de rigueur adaptés à la situation.

L'expérimentation dans l'histoire des sciences consiste à dégager les idées, les écrire, les tester. Elle a un effet « cybernétique ». Ce mot vient du grec $\kappa\upsilon\beta\epsilon\rho\nu\grave{\alpha}\omega$, (piloter), dont provient notre « gouvernail ». Et parfois une petite cause produit de grands effets. C'est ce qui arrive quand on se laisse emporter par le calcul, et qu'un grain de sable remet tout en question ...

Trois exemples :

La controverse des logarithmes des nombres imaginaires entre Leibniz et Bernoulli [1]. Elle est analysée par Euler [2] et publiée en 1751.

Premier argument de Bernoulli, (nous noterons comme lui le logarithme simplement par l) Euler écrit que pour prouver que $l(-x) = l(+x)$, quelque nombre qu'on marque par x. Bernoulli recourt aux différentiels, et puisque le différentiel de $l(-x)$ est $\frac{-dx}{-x}$ ou $\frac{dx}{x}$, de même que celui de $l(+x)$, il en conclut que ces quantités mêmes , dont les différentiels sont égaux, doivent être égales entre elles.

Objection de Leibniz : « la règle de différentier le logarithme n'a lieu que pour les nombres positifs. » Donc on se trompe en affirmant que le différentiel de $l(-x)$ est $\frac{-dx}{-x}$ ou $\frac{dx}{x}$.

Objection d'Euler : Le même raisonnement nous donnerait le différentiel $l(2x) = \frac{-2dx}{-2x} = \frac{dx}{x}$, et donc $l(2x) = l(x)$. Nous voyons se profiler le problème de la constante d'intégration, qui correspond aux problèmes de raccordements de solutions en physique.

Proposition de Leibniz : passer dans l'imaginaire. L'idée de connexité contourne le problème de la coupure, et on en arrive à $l(-1) = i\pi$.

Conclusion d'Euler : « Dénouement des difficultés précédentes : [...] On suppose ordinairement, presque sans qu'on s'en aperçoive, qu'à chaque nombre il ne répond qu'un seul logarithme. [...] je dis donc, pour faire disparaitre toutes ces difficultés et contradictions, qu'en vertu même de la définition donnée, il répond à chaque nombre une infinité de logarithmes »

Les fonctions analytiques de Lagrange. Plus une théorie marche, plus les grains de sable sont difficiles à voir ! Lagrange introduit en 1797 [3] les développements en série des fonctions pour se débarrasser des infiniment petits. Mais, en 1821, Cauchy expose à l'Académie des Sciences [4] le « grain de sable » $e^{-\frac{1}{x^2}}$. Tous les coefficients de son déve-

1. Titre de l'article de Jean-Luc Verley, in *Brochure APMEP* n°41, 1981.

2. Euler L., pp. 195-232, Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin, Opera (1) ,17. De larges extraits figurent dans l'article référencé ci-dessus.

3. Lagrange J.L.,Théorie des fonctions analytiques, contenant les principes du calcul différentiel ,dégagés de toute considération d'infiniment petits, d'évanouissants, de limites et de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies.

4. Cauchy A.L., Sur le développement des fonctions en séries et sur l'intégration des équations différentielles et aux différences finies , pp. 276-282,Œuvres complètes, vol. II, Paris Gauthier-Villars. Voir aussi la Préface et la 38e leçon de Cauchy A.L., Résumé des leçons données à l'Ecole Royale Polytechnique sur le

loppement en « série de Taylor » sont nuls, et donc selon Lagrange la fonction devrait être nulle.

Les formes différentielles. Le problème de la relation entre formes différentielles et potentiel a conduit à approfondir la notion d'intégrale curviligne et la nature du chemin parcouru. Ces recherches conduiront aux théories de l'homotopie et de l'homologie.

Mes notes s'arrêtent là…

Jean-Louis a sans doute conclu avec un parallèle sur l'effet cybernétique de l'expérimentation en classe de mathématiques, mais c'était prêcher une convaincue, et j'ai dû me perdre dans mes souvenirs, retourner à ce beau jour de 1979, à Puyricard. Au cours d'un atelier, un inconnu nommé J.-L. Ovaert m'avait mis sous les yeux un texte d'Euler[5] où celui-ci développait la « méthode de Newton ». J'étais prof de Spé comme lui, et j'avais pensé en un éclair : mais c'est génial pour nos élèves ! Les faire en même temps expérimenter sur leur calculatrice, travailler la vitesse de convergence et la méthode de Newton, et leur faire rencontrer un esprit du XVIIIe siècle ! Un (gros) grain de sable avait fissuré ma vision des mathématiques et de leur enseignement, structurée par ma formation « purement moderne ». Par effet cybernétique et pour mon grand plaisir, je n'ai depuis jamais cessé de travailler dans les IREM à l'Histoire des Mathématiques et à leur utilisation dans l'enseignement. Ce texte d'Euler s'est encore retrouvé dans une présentation que j'ai faite à Seoul en 2013 pour ICME 12[6].

---

calcul infinitésimal, Paris, Debure 1823.

5. Euler, Élémens d'algèbre, Ed. Française et notes avec des additions de Lagrange, vol. 1, Lyon-Bruyset an III (disponible sur Gallica). On peut lire ce texte (paragraphes 78–787) avec deux propositions d'activités pour les élèves dans la Brochure 79, IREM Paris 7, 1990, pp. 158-168, en ligne.

6. Texte (en anglais) en ligne sur le site http ://icme12.org/upload/UpFile2/TSG/0874.pdf.