

**Cahiers du laboratoire de didactique
André Revuz
n°14
Juillet 2015**

**Les moments d'exposition des connaissances en
mathématiques**

(secondaire et début de l'université)

Par Stéphanie Bridoux, Monique Chappet-Pariès, Nicolas Grenier-Boley,
Christophe Hache et Aline Robert

Avec la collaboration de Marie-Christine Lévi et Françoise Pilorge

ISSN : 2105-5203

Imprimé par l'IREM de Paris – Université Denis Diderot Paris 7

Exemplaire **téléchargeable** sur notre site dans la section Publication

<http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/>

Coordonnées de l'IREM

Pour venir à l'IREM (il est possible de consulter et d'acheter les publications sur place):

Université Paris-Diderot, Bâtiment Sophie-Germain,
8 place Aurélie Nemours (sur l'avenue de France), huitième étage,
75013 Paris 13ème arrondissement
(métro Bibliothèque François Mitterrand ou tramway ligne)

Nous Contacter

Pour téléphoner: 01 57 27 91 93

Pour écrire à l'IREM concernant les publications:

par voie postale:

Locufier Nadine
IREM de Paris – Case 7018
Université Paris Diderot
75205 Paris cedex 13

par voie électronique:

nlocufier@irem.univ-paris-diderot.fr

La liste des publications de l'IREM est mise à jour sur notre site web :

<http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/> (en bas à gauche de la page d'accueil)

Pour rester informé:

inscription à la liste de diffusion de l'IREM de Paris également sur le site de l'IREM

Les moments d'exposition des connaissances en classe

De nombreuses questions se posent sur l'élaboration et le déroulement des moments où l'enseignant expose, en classe, les connaissances¹ qui constituent « le cours », par opposition aux exercices. Nous nous sommes restreints ici à l'enseignement secondaire et aux débuts de l'enseignement universitaire scientifique². En introduction nous rappelons un certain nombre d'éléments connus sur les cours et précisons le questionnement adopté dans ce texte. Nous développons en première partie les points de vue d'enseignants, débutants et confirmés, et de formateurs sur ces moments de cours, en ajoutant quelques éléments sur des points de vue d'élèves. Dans les deux parties suivantes nous présentons des analyses, partielles, de ces moments de cours, faites par des chercheurs en didactique des mathématiques. Dans la deuxième partie nous essayons de dégager certaines fonctions, notamment cognitives, que peut remplir ce moment d'exposition des connaissances au sein d'un scénario complet sur une notion à enseigner. Nous dégageons des tensions, sans doute incontournables et des palettes de déroulements possibles. Leur étude amène à analyser des leviers souvent utilisés pendant les cours. En particulier nous avons précisé ce qui peut être en jeu dans l'utilisation d'exemples avant ou après l'énoncé précis hors-contexte auxquels ils s'appliquent. Cette partie de l'étude est illustrée par des extraits de cours sur les fonctions en troisième. Dans la troisième partie, nous nous appuyons sur une comparaison de cours de première année d'université scientifique sur les limites de suites ou de fonctions : cours d'un manuel, cours en amphi filmé, vidéo de type FAD (formation à distance). Des caractéristiques de chaque support sont dégagées. En particulier il semble que seul le cours en amphi soit l'occasion de développer les liens ancien/nouveau et d'aborder les structures logiques globale et locale, sur des démonstrations précises. En conclusion nous revenons sur les moments d'exposition des connaissances étudiés : finalement de quoi sont-ils faits, quel apport spécifique peut-on leur attribuer ? L'interrogation est d'autant plus importante qu'en ce moment les cours sont mis en question, et qu'il faut bien apprécier ce à quoi on pourrait renoncer, ce dont on priverait les élèves si les cours étaient relégués à leur seule étude « à la maison ». Nous évoquerons ainsi des perspectives de recherches ultérieures, en suggérant une liste d'indicateurs méthodologiques à enrichir, résultant de ce qui précède.

La bibliographie est présentée en deux parties (à la fin des deux premières parties et à la fin de la troisième partie)

Introduction

1) Divers points de vue et questionnements à prendre en compte

On peut préciser des points de vue, besoins et questionnements différents qui se manifestent au sujet des moments d'exposition des connaissances selon la position des acteurs :

a) Côté enseignants et élèves : un certain nombre d'interrogations banales concernent ces moments de cours. Les enseignants peuvent se demander à quoi ça peut servir aux élèves et s'interroger sur leurs propres attentes vis-à-vis des élèves à ce sujet. Cela renvoie éventuellement aux difficultés rencontrées avec ce moment particulier des séances, que ce soit au niveau de l'élaboration (préalable), ou du déroulement – (choix de durée, fréquence, contenus, improvisations...).

Cela peut aussi mettre en question le point de vue des élèves, leur perception des attentes de l'enseignant, leurs activités effectives pendant et après les cours, et finalement leur mode de fréquentation et leur utilisation des cours. Le mot activité est pris ici dans un sens large, individuel, il désigne dans tout ce texte ce que les élèves pensent, écrivent ou non, disent ou non à partir d'une

¹ Le savoir mathématique à apprendre. Nous introduisons peu de différences entre le savoir, plutôt associé à un texte relativement complet, adopté par tous, et les connaissances, plutôt associées aux traces individuelles de ce savoir chez les élèves. Nous parlons d'exposition des connaissances à cause de ce qui est visé dans les cours étudiés, nous aurions pu utiliser « exposition du savoir visé ».

² Il existe un travail actuel sur l'institutionnalisation en primaire (Allard).

tâche. Comment les élèves identifient et caractérisent ces moments (ce peut être par exemple – caricaturalement – on prend un cahier spécial, ou alors ce sont des choses générales qui sont exposées) ? Pendant le cours : ils pensent à quoi, ils font quoi ? D'après eux qu'est-ce que le prof attend d'eux pendant les cours et surtout après (quelle utilisation) ? Et après le cours : quels textes "regardent-ils" éventuellement (leur cahier, le manuel, autres), quelles activités ont-ils à ce moment-là (lire ? ficher ? autre...), sur quels cours (tous ou selon le contenu), à quels moments (à l'occasion d'exercices à la maison, de contrôles, régulièrement...), pendant combien de temps ? Que représente pour eux le « général » ? Comment identifient-ils les connaissances qu'ils auront à « emprunter », à faire fonctionner, comment les adaptent-ils ? Par exemple dans un théorème ou une définition comment substituent-ils ce qu'il faut pour résoudre un exercice particulier ?

b) *Côté formation initiale*, les formateurs ont besoin d'aider les débutants à penser leurs cours, et sont sollicités pour leur donner des repères, à la fois pour l'élaboration des cours et pour le déroulement en classe (dont l'appropriation du cours par l'enseignant). Dans la mesure où il existe beaucoup de questionnements, de diversités de points de vue chez les enseignants (jusqu'à la classe inversée !), il y a toujours besoin d'aider les débutants à ce sujet. Cela renvoie évidemment aux points de vue des enseignants.

c) *Côté chercheurs*, divers questionnements s'ajoutent – internes, liés par exemple à la spécificité du langage utilisé dans les moments de cours de mathématiques : en termes de généralité, de logique, de formalisme et de symbolique et/ou, plus externes, liés aux niveaux de langage mis en jeu, en relation avec la recherche de proximités avec les élèves ; cela a un rapport avec l'appréciation différentielle des rôles de ces moments dans les apprentissages des différents élèves, notamment en lien avec leurs origines sociales. Or on constate un certain manque d'analyses didactiques précises, en classe, de ce moment pourtant spécifique – lié à la difficulté de recueillir des indicateurs côté élèves (à la différence de ce qui se passe pour les exercices), et à la difficulté d'en isoler l'étude, vu l'importance des exercices dans l'apprentissage du cours.

d) *Une démarche revendiquée* : la mise en regard de différents points de vue

On voit bien les différences entre les objectifs des recherches (analyses selon des dimensions « théoriques » en relation avec les effets, diversités), les besoins en formation et ceux des enseignants (palette de possibles). Notre démarche a été de mettre en regard différentes interventions, pour enrichir les recherches par des questionnements relevant des acteurs du terrain, et même issues des élèves, et enrichir ces questionnements par des résultats de recherches en partie en lien avec les besoins exprimés, qui ont été pris en compte. Les interventions ci-dessous illustrent ainsi des positions de formateurs et d'enseignants, plus ou moins expérimentés, et des exemples de recherches.

2) Limites et portée des acquis sur le sujet, nouveaux outils et mise en place de la démarche utilisée

a) *L'institutionnalisation – élargissements au moment d'exposition des connaissances (cf. types de notion)*

Initialement l'institutionnalisation, introduite en TSD³ (Brousseau, 1998) et dans les travaux de Douady (1987) sur les dialectiques outil/objet⁴, correspond à la fin de toute une séquence basée sur la réalisation d'une situation fondamentale. Celle-là modélise le fonctionnement du savoir visé. Les chercheurs ayant développé cette théorie ont des attendus théoriques sur la fin du processus au sein de l'ensemble de la séquence. L'enseignant doit dégager avec un certain degré de généralité, à partir d'une synthèse des activités des élèves, ce qui est à retenir et sera à réutiliser. Il reste cependant des interrogations sur la manière précise et la possibilité de mener à bien cette phase finale (Mounier, 2010). D'autres questions se posent sur l'extension de cette démarche pour faire cours à tous les contenus à enseigner. Cela peut être lié à la nature de ces contenus, à leur place dans les programmes,

³Théorie des Situations Didactiques.

⁴ Puis travaillée dans diverses recherches (Perrin, 1992 par exemple).

et à leur statut par rapport aux connaissances antérieures des élèves, ou même aux contraintes de temps. Et cela se pose tout particulièrement lorsque les connaissances visées sont reliées de manière partielle aux activités précédentes des élèves, voire peu reliées⁵ : la question est alors entière de l'inscription du cours dans les apprentissages et des variables pouvant intervenir à ce sujet. De fait le mot institutionnalisation, emprunté à la TSD, est peut-être trop restrictif pour rendre compte de ce qui se fait ou de ce qui peut être fait en cours – c'est pourquoi nous évoquons l'exposition des connaissances (ou s'il n'y a pas d'ambiguïté, le cours).

Nous élargissons le point de vue précédent de plusieurs manières : en postulant qu'il existe des types de notions pour lesquelles il est difficile de trouver des situations menant à une institutionnalisation au sens de la TSD. Ce peut être le cas par exemple pour des notions dites FUG⁶, portées par un formalisme nouveau, généralisateur, unifiant des connaissances antérieures des élèves dont elles sont de fait éloignées, ce qui les rend peu accessibles par l'intermédiaire d'une situation fondamentale ; en postulant que pour certaines connaissances qui apparaissent dans la scolarité, il est nécessaire de tenir compte d'emblée des aspects techniques qui ne mettent pas nécessairement non plus en jeu la réalisation de situations fondamentales – on admet ainsi qu'il peut y avoir une certaine indépendance entre le travail du sens et celui de la technique qui se recomposent petit à petit, mais dans des activités différentes, donnant lieu à des cours différents ; en postulant enfin qu'il peut exister des paragraphes du cours qui ne relèvent pas d'activités (par exemple la règle des signes pour la multiplication des nombres négatifs), ou qui ne donnent pas directement lieu à des activités (ou à des évaluations) : par exemple sur la différence entre discret et continu, sur la notion d'équation, sur les ensembles de nombres... Cela met en jeu ce que Pouyanne (Robert et Pouyanne 2004) appelle des notions non encore formalisées, voire non encore formalisables ; les notions para-mathématiques et proto-mathématiques définies par Chevallard (1991) s'inscrivent aussi dans cette catégorie.

Il est alors raisonnable de penser que les formes que prend le cours dépendent directement des contenus et qu'il n'y a donc peut-être pas de proposition générale à faire. Il est aussi possible que le rôle de ces moments dépende des élèves – on a déjà constaté que certains sont aidés par des interventions méta⁷ avant une intervention strictement mathématique et d'autres non... les conséquences de cette dernière variabilité ne sont pas évidentes.

b) Décontextualisations ou hors-contexte ?

La TSD (Brousseau, *ibid.*) a amené à travailler les idées d'institutionnalisation à partir de la décontextualisation⁸ elle-même faite à partir des activités des élèves, notamment pour le primaire. Ainsi, après un travail des élèves sur une situation potentiellement porteuse d'apprentissages, où la mise en œuvre du savoir visé par les élèves est incontournable, voire si possible contrôlable par les seuls élèves, les enseignants dégagent le savoir décontextualisé, légitime, général, à retenir et réutiliser.

Le mot décontextualisé a alors son sens propre, « abstrait d'un contexte », généralisé, ce qui induit des limites à son usage. Il est souvent utilisé de manière plus large, comme synonyme de général – nous utiliserons cependant le cas échéant le mot « hors contexte » pour nous démarquer de l'indication implicite, portée par le mot, d'un travail contextualisé antérieur à l'énonciation du savoir. Il peut y avoir des éléments du cours qui ne sont pas reliés à des tâches accessibles aux élèves, et/ou qui ne peuvent pas donner lieu rapidement à des tâches pour les élèves...

c) Déroulements, vision globale...

⁵ Notamment s'il n'y a pas de connaissances fondamentales dont s'inspirer.

⁶ On distingue aussi les notions extensions de notions déjà introduites, plus facilement introduites par la réalisation d'une ingénierie qui s'appuie sur une situation fondamentale ou des notions qui peuvent être présentées comme Réponse à un problème (RAP), là encore susceptibles d'être introduites par un « bon » problème travaillé par les élèves (Robert 1998).

⁷ Commentaires sur ce qui est en jeu.

⁸ Et de dépersonnalisation – nous mettons les deux qualités dans le seul mot « hors contexte ».

Notre inscription en théorie de l'activité et l'importance que nous accordons aux activités effectives dans les apprentissages nous amènent à donner autant d'importance aux déroulements en classe qu'aux contenus travaillés. Nous postulons que si l'autonomie des élèves⁹ pendant les activités est une condition d'apprentissage (Piaget), la qualité des discours de l'enseignant pendant les déroulements en est une autre, tout aussi nécessaire (Vygostki).

Cela dit, à un niveau plus global, faire cours, y compris si on n'est pas dans un schéma d'institutionnalisation stricte, engage des choix incontournables, plus ou moins prévisibles, en tension, entre la présentation d'un exposé cohérent, général, donnant à voir le jeu mathématique, et celle d'un exposé, plus directement applicable et mémorisable et peut être plus utile aux élèves, donnant à voir les aspects procéduraux. On peut ainsi se demander, plus généralement et de manière globale, si faire cours ne nécessite pas des compromis permanents, incontournables, plus ou moins prévisibles, entre la présentation d'un exposé cohérent, donnant à voir le jeu mathématique et la généralité de ce qui est proposé, ou celle d'un exposé utile aux élèves, plus directement applicable et mémorisable... Autrement dit, plus que pendant les exercices, il y a deux logiques de production et de lecture des cours – une locale, qui tient à la suite des énoncés et des discours d'accompagnement, à la portée opérationnelle du cours, et une plus globale, qui traduit davantage le mode de présentation du savoir faite par l'enseignant.

Finalement, on peut se demander quels sont les choix à la disposition des enseignants dans ces moments d'exposition des connaissances. La première alternative tient à l'adoption ou non de situations propices à une certaine décontextualisation ou au moins d'activités préparant le cours. Sont en jeu, ensuite, la manière dont l'enseignant s'appuie sur ces activités et le degré de généralité adopté dans la présentation des savoirs, en relation éventuelle avec ce qui précède. Les activités suivant le cours et l'explicitation des liens entre eux sont alors des variables, dépendant aussi des déroulements adoptés. Puis interviennent les choix de logique globale du cours.

L'objet du présent travail est l'étude généralisée des moments d'exposition des connaissances tant en termes de contenu (hors-contexte), qu'en termes de déroulements, potentiels et effectifs. Il s'agit à la fois d'apprécier ces moments et d'interroger leur rôle dans le processus d'apprentissage.

d) Un outil pour étudier les déroulements : les proximités-en-acte mises en jeu par les enseignants – le cas des moments d'exposition des connaissances

Les moments d'exposition des connaissances ne sont pas les moments où les élèves sont le plus en activité, même si les enseignants essaient de les animer autant que possible, même si quelquefois, par exemple, les élèves peuvent eux-mêmes commencer à décontextualiser¹⁰. Il peut même y avoir des éléments du cours qui ne se prêtent pas directement à des activités d'élèves mais, par exemple, plus à des réflexions – un cours sur la nature des différents nombres par exemple. Or il est important pour les enseignants de garder les élèves plus ou moins attentifs et même si possible de faire progresser certaines de leurs connaissances, ou au moins d'amorcer ce progrès, pendant ces moments-là. Nous faisons l'hypothèse qu'une des manières développées par les enseignants pour y arriver est de rester aussi « proche » que possible des élèves. Nous allons revenir sur ce mot « proche » ci-dessous. C'est sans doute une caractéristique constante de ce que font les professeurs en classe, à tout moment, mais elle est d'autant plus importante pendant les cours qu'ils ne peuvent pas s'appuyer autant qu'à d'autres moments sur les activités des élèves.

Nous (Robert et Vandebrouck, 2014) avons ainsi introduit la notion de proximité-en-acte pour qualifier ce qui, dans les discours ou même dans les décisions des enseignants pendant les déroulements des séances, peut être interprété par les chercheurs comme une tentative de rapprochement avec les élèves. Nous les avons étudiées dans des phases de recherche d'exercices en classe et, dans le travail présenté ici, nous allons les spécifier et les repérer dans les moments de cours.

⁹En termes d'a-didacticité et de travail en petits groupes par exemple.

¹⁰C'est de moins en moins possible au fur et à mesure de la scolarité.

Les proximités-en-acte traduisent ainsi une activité de l'enseignant (souvent discursive mais pas seulement) visant à provoquer et/ou à exploiter une proximité avec les réflexions ou les connaissances des élèves ; cela est sans doute voulu par l'enseignant, mais plus ou moins explicitement, peut-être même automatiquement¹¹, cette proximité est d'ordre cognitif ou non, et concerne ou non tous les élèves. Même si l'enseignant a explicitement conçu une activité préalable à un cours, pour préparer l'introduction de certaines connaissances visées, ce n'est pas pour autant que le passage de l'activité aux connaissances qui vont être dégagées soit automatiquement perçu comme proche par (tous) les élèves. Ainsi ce complément « en-actes » spécifie, dans notre idée, une qualité de l'activité de l'enseignant en classe qui accompagne le développement des contenus, ni nécessairement consciente ni exprimable, tout comme chez Vergnaud (1990), dans l'expression concept-en-actes, où ce complément qualifie une connaissance qui se manifeste dans l'activité d'un sujet sans être toujours consciente ni exprimable.

De manière générale, nous reconstituons ces proximités (ou non-proximités) à détecter chez les enseignants à partir de divers indicateurs, les enrôlements et certains arguments employés pour mettre et maintenir les élèves au travail, la durée du travail des élèves et de ce qui amène à l'arrêter, la nature des questions ou les types d'aides avec leur relation au travail des élèves, mais aussi notre appréciation de ce qui est supposé connu des élèves et de ce qui est nouveau, voire difficile. C'est un travail préalable sur le relief¹² des notions concernées qui permet au chercheur de repérer ces dernières caractéristiques (supposées) des connaissances des élèves... Quoi qu'il en soit, il y a cependant toujours une part d'appréciation subjective du chercheur dans l'interprétation de ce que dit l'enseignant, et ce qui est étiqueté comme proximité-en-actes reste dans une certaine mesure « potentiel » : d'une part il n'est pas certain que l'enseignant l'ait conçue comme telle, mais, notamment si cela se répète, nous pensons que c'est quand même digne d'être relevé, d'autre part il n'est pas certain que cela soit efficace pour les élèves, que la proximité soit reconnue et que ce soit source de progrès. Ce serait par des entretiens a posteriori qu'on pourrait vérifier la concordance entre l'attribution par le chercheur d'une intention de rapprochement et l'intention réelle de l'enseignant. Ce serait sans doute un enrichissement important si on étudiait les pratiques des enseignants pour elles-mêmes, mais ça l'est moins dans notre visée actuelle d'analyse des moments d'exposition des connaissances et de ce qui les constitue.

Il y a des proximités non strictement mathématiques : affectives (encouragements), langagières (jouant sur divers niveaux de langue, du familier au symbolique, ou sur des images, etc.), de type « carotte/bâton » (jouant sur des motivations liées à la scolarité) ; cela peut se faire par le biais de répétitions (avec ou sans ajouts), de reprises (du prof, des élèves) – ces interventions témoignent et sont repérées par une attention ou un intérêt de l'enseignant pour les élèves en relation directe avec ce qui est en jeu, ou par le fait de (tenter de) se mettre au niveau des élèves, ou même à la place des élèves, en les reprenant, en répétant, en utilisant le « nous » ou le « je »¹³, en complétant ce qu'ils disent, ou encore par un essai d'aider leur mémorisation ; des proximités interactives, comme l'appui sur des réponses d'élèves (souvent locales), les questions venant ou non de l'enseignant, permettant de préciser, de continuer, de vérifier que les élèves suivent. Ce peut être avec ou sans changement dans le niveau de langue ou le niveau de généralité adopté dans le discours.

D'autres proximités peuvent avoir une portée plus directement cognitive, mettant en jeu des liens portant sur des contenus (par l'intermédiaire de commentaires méta mais pas seulement), ou révélant des relations portant sur diverses tâches, ou sur diverses sous-activités entre elles, ou leurs liens avec le cours... Ce sont ces dernières proximités supposées cognitives que nous étudions plus particulièrement, même si les diverses caractéristiques énumérées ci-dessus ne sont souvent pas exclusives les unes des autres.

C'est évidemment l'importance que nous donnons au travail des élèves sur des connaissances proches de celles qu'ils ont déjà, connaissances déjà-là ou presque déjà-là, qui nous amène à repérer les

¹¹ Si un élève semble perdu, on lui pose une question.

¹² Cf. Pariès et al. (2007).

¹³ Pariès (2004).

occasions que les enseignants donnent (ou non) à leurs élèves d'entendre, voire d'éprouver de telles proximités avec les connaissances nouvelles qui sont visées par l'enseignement. Autrement dit c'est en appréciant ce qui est dit ou décidé par l'enseignant en relation avec les ZPD supposées des élèves sur les connaissances en jeu (cf. Robert et Vandebrouck, 2014) que nous détectons ce type de proximités.

On a montré par exemple (ibidem), pour des recherches d'exercices en classe, que tous les élèves ne sont pas concernés de la même façon par les décisions des enseignants. Celles-ci « collent » aux réponses d'élèves (mais ce peut être de certains élèves seulement) et les engagent dans la suite des sous-activités sur une tâche complexe sans que tous les élèves aient participé aux premières réponses. Des régularités ont été inférées dans les types de sous-activités peut-être « manquantes » pour les élèves qui ne se sont ainsi pas engagés dans les premières réponses : ils sont de fait souvent exclus des sous-activités de reconnaissance des connaissances à mettre en fonctionnement et d'organisation des raisonnements, dont ils ne font qu'adopter les résultats donnés par d'autres élèves plus rapides ou plus habitués à répondre. L'enseignant prend des décisions proches du travail de ces derniers mais éloignées du travail des autres élèves. Par ailleurs, un certain nombre d'illusions de la transparence, déjà signalées, peuvent aussi être associées à des non-proximités pour certains élèves. « Avoir déjà vu » par exemple signale souvent quelque chose qui a été « traité » en cours, mais cela n'implique pas, pour les élèves, se rappeler, ni savoir appliquer... D'autres non-proximités peuvent être liées à des naturalisations chez l'enseignant, c'est-à-dire à des connaissances devenues tellement évidentes pour lui que le professeur ne remarque plus qu'il peut y avoir quelque chose à expliquer. Par exemple tel enseignant remplace directement, pendant un raisonnement, la propriété d'un triangle rectangle d'avoir un angle droit par le fait que ses côtés sont perpendiculaires, sans signaler ce changement de point de vue qui peut engendrer pourtant un « trou » dans le suivi de tel ou tel élève. On est passé d'une mesure d'angle à une propriété géométrique des droites supports des côtés...

Dans le cas particulier des moments d'exposition des connaissances qui nous intéressent ici, vu la définition que nous allons en donner en termes d'éléments et de connexions provisoires à transformer en nouvelles connaissances, il nous semble particulièrement intéressant de traquer ce type d'interventions visant les rapprochements, puis de s'interroger sur les effets possibles sur les élèves des différentes proximités repérées (ici surtout dans les discours). Cela peut concerner notamment ce qui se passe entre du contextualisé et du hors-contexte, que ce soit entre exemples ou activités avant le cours et développement de ce cours, ou entre le cours et les exemples ou premiers exercices qui l'illustrent ensuite.

Cela étant, encore une fois, on ne sait pas encore bien étudier ces rapprochements, leur détection par le chercheur reste subjective et on sait encore moins en apprécier des effets sur les élèves, potentiels ou réels. On hésite sur les traces à relever pour observer et repérer des candidats proximités dans les cours, même si on propose une première liste d'indicateurs à cet effet ; mais on n'imagine même pas d'indicateurs pour apprécier les effets. Faut-il interroger les élèves tout de suite après un cours ? À l'oral, à l'écrit ? En séance d'exercices ? Comment approcher ce qui « reste » d'un cours ?

C'est la piste des déroulements, en relation avec la nature des contenus travaillés, que nous suivons en partie dans ce texte : on essaie de repérer les occasions de proximités offertes par les contenus, et de les étudier le plus précisément possible, avec en ligne de mire leur inscription dans les ZPD de tous les élèves. Cela met en jeu à la fois leur explicitation, ce qu'elles mettent en lien, notamment entre particulier et général, et « l'état » des élèves sur les connaissances visées, elles-mêmes analysées au préalable (relief).

Une dernière remarque s'impose sur la différence entre les proximités étudiées ici et les « petits pas » préconisés par certaines pédagogies, même si cette dernière expression n'est pas très précise. Les petits pas engagent les élèves dans une forme de proximité très limitée, locale, souvent sans changement ni de point de vue ni de degré de généralité ni de cadre ou registre, et souvent ils peuvent effectuer seuls une partie du chemin. En revanche, les proximités sur lesquelles nous travaillons peuvent concerner un changement de niveau de connaissances, une généralisation importante, que les élèves pourront accepter parce que l'enseignant va leur expliquer ce qui dans leurs connaissances est proche de ce qui est mobilisé, mais qu'ils auraient eu du mal à faire seuls, voire à concevoir seuls.

e) La difficulté des observations des moments de cours et des interprétations à divers niveaux des « effets » des cours

La question de l'observation et des « effets potentiels » des moments d'exposition des connaissances sur les élèves est posée à tous, enseignants et chercheurs. On doit à la fois analyser les contenus et les déroulements, au fur et à mesure puis en dégagant quelques éléments plus globaux (récurrents).

Or, autant pour les analyses de séances d'exercices un certain outillage a été mis au point pour repérer et étudier les activités des enseignants en relation avec celles des élèves, autant pour les cours on est beaucoup moins armé. En effet ce sont les activités des élèves qui pilotent les analyses de séances d'exercices, et leurs traces sont observables. Elles servent à la fois à décoder les interventions des enseignants et aussi à apprécier, au moins partiellement, les apprentissages (potentiels), en dégagant les activités possibles des élèves à partir des tâches attendues et des déroulements effectifs. Or pendant les cours c'est beaucoup plus difficile d'accéder à ces activités d'élèves, il y a beaucoup moins d'observables, et par ailleurs il est plus difficile « théoriquement » d'apprécier la contribution de ces moments aux apprentissages et donc de déterminer et de relier les observables éventuels à quelque chose. On peut voir si les élèves notent, voire acquiescent, ou participent – mais écoutent-ils ? Ont-ils vraiment compris ? Quelle est la portée de la question à laquelle ils répondent, vont-ils intégrer cette réponse au reste ? Est-ce en fonction d'un contrat qu'ils répondent (cette dernière question vaut aussi pour les exercices, mais nous semble plus prégnante quand il n'y a pas d'activité effective proposée) ? Dans quelle mesure les élèves ont accès à autre chose qu'à la suite linéaire de ce qui est développé par l'enseignant ?

f) le questionnaire actuel

Finalement, on retient de l'institutionnalisation – élargie aux moments d'exposition (cf. différents types de notion) – l'idée de l'importance des proximités entre cours et activités ou exercices préalables et celle de l'importance des liens entre ce qui est présenté de général et le travail ultérieur des élèves. Sont en jeu la qualité des activités préalables, la synthèse qui en est faite, la transformation visée de ce qui est exposé par l'enseignant de manière décontextualisée et dépersonnalisée (hors-contexte) en connaissances individuelles. Les extensions nécessaires déjà évoquées amènent à chercher à accéder à une autre temporalité, y compris longue, mettant en jeu le global développé dans les cours, mais aussi à étudier finement les déroulements, liés aux contenus, et liés aux langages utilisés (du symbolisme au méta en passant par la logique) au niveau de généralité investi et aux proximités – entre ancien et nouveau, exercices et cours, outils et objets, sens et technique spécifiques aux mathématiques en jeu...

La perspective serait de repérer les éléments hors contexte pouvant servir aux élèves de « connexions » entre leurs activités et des connaissances plus générales et d'analyser des occasions données par l'enseignant de les transformer en connaissances individuelles grâce à des rapprochements avec ce qu'ils savent déjà. Ces connexions seraient travaillées grâce à des tâches bien choisies – mais pas seulement, tout ce que l'enseignant peut ajouter au fur et à mesure, en s'adaptant aux élèves peut y contribuer aussi. Une exposition des connaissances aurait d'autant plus de chance d'être appropriée par les élèves qu'elle est proche, ou rendue proche, de leurs connaissances (presque) déjà-là. Avec l'idée que si l'exposé général doit suffisamment s'appuyer sur le déjà-là des élèves, un enjeu en est d'étendre, voire de faire dépasser ce déjà-là ; ce peut être quitte à utiliser le levier méta ou d'autres leviers, mais avec la nécessité, encore et toujours, d'un repérage par l'enseignant des connaissances des élèves et d'un ajustement (cf. moment de synthèse en TSD).

On conçoit qu'une étude isolée des moments de cours est difficile, voire impossible ! On conçoit aussi l'intérêt de préciser ce qui peut constituer ce général, ce hors-contexte, et d'étudier les différentes formes de proximités afférentes.

Finalement le nouveau questionnaire que nous adoptons est le suivant, en termes de diversités, de régularités intra et inter-individuelles, voire de manques éventuels et de palettes de possibles, enrichi par les différents points de vue qui se renvoient l'un à l'autre, à partir d'une étude préalable du relief :

Qu'est-ce qu'il y a dans un cours donné (éléments hors contexte¹⁴, exemples, activités préalables et exercices) ? Quelles en sont les variables significatives en relation avec les programmes, les types de notions, les difficultés connues des élèves ?

Pendant les cours, comment l'enseignant remplace les leviers autonomie et aide utilisés dans les exercices (cf. étude des proximités potentielles, possibles, impossibles, manquées¹⁵) ? Quel type de discours est mobilisé ? Avec quel niveau de généralité, quels commentaires méta ? À quelles questions implicites ou non répond-il ? Quelles logiques locale et globale met-il en œuvre ?

Quel peut être le rôle des cours dans les apprentissages, avec quelles diversités selon les contenus et les élèves ? En particulier, pour le chercheur, par quoi remplacer l'analyse des activités possibles des élèves en relation avec la qualité des tâches et les apprentissages ?

Tout ce qui précède nous amène à étudier les contenus de cours précis, filmés ou non, à étudier leurs déroulements et à mettre en évidence des proximités-en-acte supposées cognitives ou des non-proximités. La confrontation des pratiques possibles et des réflexions didactiques sur les apprentissages, pourrait nous permettre d'élaborer des variabilités en termes de palettes de contenus et de déroulements possibles des cours. On peut espérer alors une problématique plus complète en termes d'effets sur les élèves.

¹⁴ Définition, théorème, propriété, démonstration, éventuellement méthode, éléments sur la démarche, théorie...

¹⁵ Les proximités impossibles se repèrent plutôt à partir des contenus et les proximités manquées à partir des déroulements. Cependant on peut se demander si certaines proximités impossibles ne sont pas quand même tentées par les enseignants.

I Première partie : points de vue d'enseignants du secondaire, de formateurs et d'élèves

1) Points de vue d'enseignants et de formateurs

Pour mettre en regard les interrogations sur les moments de cours côté enseignants et formateurs d'une part et côté chercheurs d'autre part, nous avons choisi de privilégier deux pistes permettant de faire une « jonction » enrichissante : la question des contenus des cours, du niveau de généralité et de rigueur adoptés, de ce que cela peut recouvrir, de ce qu'on va choisir comme hors-contexte à un moment donné¹⁶, et la question des déroulements pour ne pas perdre les élèves (abordées en termes de proximités en acte¹⁷). En toile de fond tout le monde partage la préoccupation de la possibilité pour les élèves de reconnaître et de retenir le général (hors contexte), de lui donner du sens, de pouvoir bien l'utiliser, chacun apportant des réponses partielles, basées sur l'expérience et/ou sur des hypothèses théoriques.

Dans cette première partie, c'est le point de vue d'enseignants et de formateurs qui est présenté à partir d'un recueil d'opinions dont une partie est jointe en annexe 1.

Le découpage selon les deux pistes retenues n'est pas toujours évident. Dans la pratique, l'anticipation des déroulements participe en effet de l'élaboration du cours et on en retrouve des traces dans les propos des enseignants et des formateurs. Nous essayons de donner à voir cette imbrication dans les extraits de commentaires retenus ci-dessous en mettant en italique les éléments autres que ceux du point de vue considéré.

Première piste : la question des contenus

Qu'est-ce qu'on choisit de mettre dans le cours ? Sous quelle forme ? Justifiée ou seulement exemplifiée ? Selon les chapitres ? Une question qui n'est jamais réglée définitivement...

Citons un professeur expérimenté qui accompagne une stagiaire :

« Qu'on soit débutant ou expérimenté, la question de savoir ce qu'on va mettre dans le cours se repose régulièrement : une année, on a l'impression qu'il vaut mieux raccourcir pour se limiter à l'essentiel et la suivante on rajoute des exemples, contre-exemples et conseils de méthode... »

Cette définition a-t-elle un sens pour un élève de 4^{ème} ? Peut-on la formuler autrement ? Un élève peut-il la trouver par lui-même (en étant guidé) ? Faudra-t-il la faire apprendre par cœur ?

Certaines définitions méritent d'être introduites avec précaution. Le sens de variation d'une fonction par exemple est bien plus difficile qu'il n'y paraît et beaucoup d'enseignants débutants pensent qu'il suffit, en 2^{nde}, de donner la définition : or même si des élèves ont appris par cœur la définition d'une fonction croissante « si $a < b$ alors $f(a) \leq f(b)$ », nombreux sont ceux qui donnent comme définition d'une fonction décroissante « si $a > b$ alors $f(a) \geq f(b)$ », ce qui montre que des définitions intermédiaires ("quand les nombres augmentent, leurs images augmentent" par exemple) sont nécessaires à la compréhension de cette notion. Mais peut-on écrire dans le cours et faire apprendre aux élèves une définition qui est provisoire et qui n'est pas la « vraie » définition ?

De même avec la définition de la racine carrée (a étant un nombre positif, $\sqrt{a}$ est le nombre positif dont le carré est a). A quel niveau cette définition est-elle vraiment comprise ? En effet, en 1^{ère}S encore, près d'un tiers de la classe affirme que $\sqrt{4}$, c'est 2 ou -2 et que $f(x) = \sqrt{x-1}$ est définie lorsque $\sqrt{x-1}$ est positif car « une racine carrée est toujours positive ». Ont-ils bien compris pourquoi figure deux fois le mot « positif » dans cette définition ? Bien qu'elle soit introduite très

¹⁶ La partie 3 sur les cours sur les limites s'inscrit tout à fait dans cette direction, ainsi que les analyses de certains extraits de cours sur les fonctions.

¹⁷ La partie 2 illustre ces questions avec des exemples tirés de cours sur les fonctions.

progressivement (depuis le collège), cette définition continue longtemps à poser problème. Être capable de la réciter ne signifie pas qu'on se l'est appropriée...

Cette propriété est-elle utile? En quoi ? Faut-il la démontrer ou se contenter d'un exemple générique ?

Quelles démonstrations dans le cours ? Cela dépend bien sûr du chapitre concerné : par exemple en statistiques, le cours se limite à un catalogue de définitions mais aucune démonstration n'est au programme avant la classe de 1^{ère} ; en géométrie au contraire, les démonstrations tiennent une place très importante et les débutants souhaitent parfois faire un cours sur leur apprentissage, déconnecté des exemples, ce qui est souvent hors de portée de leurs élèves.

De plus, lorsque les élèves ont « conjecturé » une propriété grâce à des exemples bien choisis, ils ne voient pas l'intérêt de la démontrer et il est bien difficile, surtout au collège, de les persuader de la nécessité de cette démarche. »

Le vocabulaire : est-il légitime de donner des « définitions intermédiaires » ? Quelle place au méta ? Quels niveaux de rigueur, de généralité ?

Citons une formatrice (formation initiale) :

« En particulier pour les débutants, la question de la rigueur à observer est une grande préoccupation comme le montrent certains témoignages de stagiaires : le professeur débutant prend soudainement conscience que son écrit devient une référence pour les élèves, qu'une trace écrite, qui va rester dans les cahiers des élèves et peut être lue par ses parents ou d'autres professeurs de mathématiques doit être très rigoureuse ».

Voici ce que dit un débutant : « Au cours de ma préparation, je me suis posé beaucoup de questions sur la rigueur mathématique à adopter, que ce soit au niveau des mots à utiliser (ou à ne pas utiliser) ou au niveau de la rédaction. »

Les liens ancien/nouveau...

Redonnons la parole au premier enseignant : « La nécessité de regarder le programme de l'année n-1 et de s'appuyer sur les connaissances (pour la classe de 2^{nde} particulièrement, de plus en plus déconnectée de la 3^{ème}) doit être rappelée : *questionner les élèves dès le début du chapitre, proposer des activités qui permettent de savoir précisément ce qu'ils savent déjà favoriserait le lien ancien/nouveau.*

La notion de fonction, par exemple a été vue au collège mais les élèves de 2^{nde} n'ont, pour la plupart retenu que la lecture graphique, les programmes de calcul et les notions d'image et d'antécédent (au mieux). La construction du cours est alors complexe puisqu'il faut, à partir de connaissances parcellaires, les amener progressivement à comprendre l'idée de fonction, à résoudre graphiquement des équations, inéquations, à étudier le sens de variation, à dresser un catalogue de fonctions de référence... Plusieurs scénarios sont à envisager (commencer par les fonctions affines et dé-zoomer sur les fonctions en général ou au contraire partir de généralités et zoomer sur les fonctions affines ? Commencer par le sens de variation parce que c'est difficile et qu'il faut du temps pour l'assimiler ou le voir plus tard parce que c'est difficile et qu'ils ne sont pas prêts au 1^{er} trimestre ?). Il n'a jamais été possible, dans l'établissement où j'enseigne depuis une vingtaine d'années et qui compte 10 classes de 2^{nde} de se mettre d'accord sur une progression commune !

Deuxième piste : les déroulements

Quand faut-il utiliser le cours ? Les élèves doivent-ils apprendre par cœur certains énoncés ?

La parole est au premier enseignant : « une stagiaire demande en 4^{ème} de réciter la leçon $10^a \times 10^b = 10^{a+b}$ (formule « devinée » la veille par les collégiens à partir de plusieurs exemples introductifs). Elle propose ensuite des exercices d'application : parmi eux $10^3 \times 10^4 = \dots$ Lors de la correction, l'élève interrogé écrit :

$10^3 \times 10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^7$. L'enseignante précise qu'il faut utiliser la propriété vue en cours et impose à l'élève d'écrire 10^{3+4} .

Après le cours, à la question pourquoi elle n'a pas accepté la méthode de l'élève qui était pourtant pertinente, elle répond qu'elle veut montrer que cette propriété est utile... Dans ce cas, un autre calcul, par exemple $10^{25} \times 10^{89}$ aurait été plus convaincant : sinon, pourquoi ne pas continuer à procéder comme dans les exemples introductifs ? D'ailleurs plusieurs élèves de la classe ne sont peut-être pas prêts à utiliser cette méthode et vont préférer « compter » les 10. Il vaut sans doute mieux qu'ils continuent ainsi plutôt que d'utiliser cette propriété à contresens. Au lieu de multiplier les exemples du même type, il suffira de proposer un calcul comme $10^3 + 10^4 = \dots$ pour s'en rendre compte.

Comment intégrer les élèves à ces moments de cours? Le cours recopiage, un moment pour « souffler » pour l'enseignant... Comment apprécier les effets d'un cours ?

Reprenons les commentaires du premier enseignant : « Pour beaucoup d'enseignants, il est très important que le cours soit « propre » et bien présenté (décaler d'un carreau, passer une ligne, souligner, mettre des couleurs...). Noter quelques lignes de cours peut parfois prendre presque toute une séance au collège et l'on peut alors se demander ce que les élèves ont appris... Il faut pourtant bien faire écrire les résultats à retenir et qu'on sache (l'élève mais aussi ses parents) ce qu'il faut mémoriser. Comment donc impliquer les élèves dans l'institutionnalisation, sans y passer trop de temps ? Beaucoup utilisent le cours « à trous » qui permet d'avancer et d'obtenir plus d'attention de la part de la classe mais encore faut-il laisser assez de souplesse pour s'adapter aux interventions des élèves (écrire une autre formulation que celle prévue parce que quelqu'un l'a suggérée, ajouter un exemple pour répondre à une question, ou un contre-exemple suite à une erreur intéressante...).

Il est vrai que ces moments où on écrit le cours permettent, en particulier au collège, de revenir au calme puisque les élèves sont occupés à copier. Mais comment faire en sorte que, même en copiant, ils participent, réfléchissent, demandent des explications, contestent...etc. afin que le travail d'appropriation des connaissances commence en classe ? Le cours « dialogué » consiste souvent à faire intervenir quelques élèves, toujours les mêmes mais les autres demeurent passifs. Comment « mesurer » ce que les élèves ont vraiment appris pendant la séance de cours ? Certains enseignants gardent quelques minutes à la fin des séances pour interroger oralement quelques élèves sur ce qui vient d'être traité. Vérifier les cahiers, faire réciter, questionner ne suffit pas à apprécier les effets du cours et ce n'est souvent qu'à la fin du chapitre ou même plus tard que l'on se rend compte que telle ou telle notion n'est pas acquise. »

2) Le questionnaire élèves : un bilan succinct des réponses déjà obtenues

Nous avons proposé à deux enseignants de faire passer à leurs élèves dans leurs classes de première S (deux classes) et seconde (une classe) un questionnaire sur ces moments d'exposition des connaissances (appelés cours). Le texte est joint en annexe 2.

Un dépouillement a été fait sur Excel et un premier bilan succinct est présenté ici, n'étudiant pas par exemple la cohérence des réponses de chaque élève, mais basé seulement sur les résultats par classe. Cela permet déjà de dégager notamment les quelques constats suivants, choisis en relation avec l'ensemble de notre questionnement. Selon les cas les totaux sont les effectifs de la classe ou les exprimés.

Il y a des différences et des similarités entre les trois classes.

Par exemple si tous les élèves déclarent très bien identifier les cours, par-delà l'ambiguïté entre cours et séances, dans une classe de 1^{re} ces moments sont jugés majoritairement plus ennuyeux que ceux consacrés aux exercices (19/32 exprimés) alors que c'est différent dans l'autre classe de 1^{re} (13/30 exprimés). Est-ce que cela a un rapport avec les élèves, avec les pratiques, voire les goûts ou les convictions de l'enseignant, ou avec tout à la fois ? En revanche dans les trois classes les cours sont jugés majoritairement moins difficiles. Ce pourrait être lié à la moindre implication (effort) correspondante des élèves.

Le vidéo-projecteur non plus ne fait pas l'unanimité – et c'est dans la classe de seconde qu'il est le plus apprécié, comme changeant positivement les choses (62%). Alors que dans une des premières S l'usage en est carrément considéré à 81% comme ne changeant rien.

En revanche peu d'élèves donnent des caractérisations des cours en relation avec le type de contenus (expliquer des notions, ...) et quasiment tous ont du mal à trouver des mots pour différencier définitions, théorèmes et propriétés – on trouve cependant quelques expressions plus ou moins pertinentes comme

Ça n'explique pas les mêmes choses : propriété : formule, définition : un mot

Une définition ça définit, un théorème c'est une sorte de loi...

Dans une définition on explique les mots importants, dans un théorème ce sont des personnes connues ou pas qui l'ont créé et une propriété c'est le professeur qui l'a fait

La définition explique le sens de quelque chose, le théorème indique une règle générale, la propriété est une particularité de quelque chose

La définition sert à expliquer un terme, le théorème définit une règle toujours valable, une propriété expose une loi valable pour quelque chose en particulier

Lorsque la question est abordée, les élèves associent donc à juste titre plutôt définition et explication d'un mot, et théorème et loi.

Ils ont encore plus de mal à identifier dans le cours ce que nous avons appelé dans le questionnaire « des choses générales » – seuls quelques élèves par classe au plus s'y risquent dont certains confondent générales et basiques. On a trouvé :

Des formules que l'on peut utiliser dans des cas différents, méthodes pour calculer ou autres,

Quelque chose qui marche pour tout

Les propriétés sont générales : elles peuvent s'appliquer pour tous les nombres.

On peut se demander dans quelle mesure une certaine explicitation de la nature générale des théorèmes ou de la différence entre définition et théorèmes pourrait profiter ou non profiter à certains élèves. Autrement dit s'il y a lieu d'introduire une réflexion ou une discussion sur la nature même de ce qui constitue le « hors-contexte », avec la question de ce qui est variable dans un énoncé général.

Les questions sur leurs difficultés ont donné lieu à des réponses d'élèves assez imprécises, dispersées, dépassant le cours proprement dit, que nous ne reprenons pas dans cette première vue générale. Disons juste qu'ils n'ont pas de mal à retrouver les éléments du cours qui servent, plus ou moins de mal à mémoriser, et que les difficultés mentionnées sont souvent relatives aux applications du cours (ce qui est attendu), à sa compréhension (moins fréquent) ou à des facteurs plus personnels (concentration,...). Un certain nombre d'élèves avouent ne pas aimer les cours (ils indiquent que ce qu'ils préfèrent, c'est ... la fin !).

Il est important de souligner qu'autant les exercices corrigés sont plébiscités dans les trois classes (30/32, 18/21, 27/31 élèves disent qu'ils sont – souvent absolument – indispensables), autant les exemples sont bien appréciés (par 23/31, 27/32, 15/21 élèves respectivement), autant les activités avant les cours sont plus diversement appréciées : considérées comme utiles par une petite moitié des élèves qui s'expriment dans une des 1^{re} et une grosse moitié dans l'autre et par 12 élèves sur 21 en seconde. Il y a même en première des élèves qui disent qu'il n'y a pas de telles activités...

Enfin en ce qui concerne leurs manières d'apprendre le cours (avec l'ambiguïté déjà signalée sur le mot), les items les plus cités sont :

Regarder le livre (dans les trois classes – 25/32, 18/31, 8/21)

Faire des exercices supplémentaires (dont on peut penser qu'ils sont tirés du livre) (21/32, 18/31, 7/21)

Relire le cours seulement avant les contrôles (moins vrai dans une des premières) (13/32, 18/31, 7/21).

Si on étudie les items les moins cités, on déduit que les élèves regardent leurs cours mais pas pour apprendre par cœur ni se faire réciter.

Un tiers des élèves de chaque classe déclare cependant se faire aider.

Si on regroupe les réponses qui impliquent une utilisation du cours directement liée aux résolutions d'exercices et celles qui impliquent un apprentissage un peu « indépendant » (items 9 et 4, 12 et 13), on constate une grande différence entre les deux classes de première :

Items 9 + 4	26 fois cités	14 fois cités
Items 12 + 13	13 fois cités	29 fois cités

Y aurait-il l'indice de différences entre élèves, ou de différences de pratiques ou de contrat ? Les différences entre les appréciations du cours (plus ou moins ennuyeux) et des activités (plus ou moins « utiles ») vont dans le même sens entre ces deux classes.

On peut alors se demander quel temps les enseignants consacrent à ces moments, comment ils présentent les activités avant le cours, quel rôle ils donnent aux cours (par exemple dans les DS ou les DM). Et plus généralement s'interroger sur les proximités qu'ils font vivre en classe.

3) Un bilan des divers points de vue exprimés

Certaines questions émanant des acteurs de terrain peuvent enrichir celles des chercheurs et être enrichies par eux. C'est le cas des interrogations sur les proximités avec les élèves, dont nous tenterons de décliner différents types et de dégager des conditions, pas toujours complètement « naturelles », pour qu'elles remplissent leur rôle pendant les moments de cours. Cela amène à détailler des leviers mis en jeu dans les proximités-en-actes repérables dans les déroulements des cours. Par exemple, une question abordée par les chercheurs est la recherche de conditions auxquelles l'appui sur un exemple peut aider l'enseignant à induire du général et réciproquement

C'est aussi le cas des interrogations sur le degré de généralité et de rigueur, sur la logique globale à adopter, voire sur la nécessité de faire cours, repris lorsque nous essayons de préciser des possibles, de dégager des tensions peut-être incontournables. Cela oriente les descriptions des cours, avec une grande attention à ce que recouvre le général dans les cours, et à la manière dont il est constitué (cf. langage, symbolisme...). En particulier se pose la question de la possibilité de repérer les variables à contextualiser dans les énoncés généraux. Cela précise le dilemme incontournable, pas toujours explicité en ces termes chez les enseignants, entre les deux logiques globales d'exposition possibles, celle liée aux mathématiques et à leur développement consistant, ou celle liée aux applications visées. Autrement dit, les palettes de possibles dégagées dans les recherches peuvent servir de réponse aux questions des enseignants, charge à eux de les adapter ensuite.

D'autres questions, pourtant très importantes, ne sont pas reprises ici, comme celles des ressources (reprises ailleurs) : « le choix des ressources et leur utilisation est une vraie question pour les étudiants. En formation, nous avons tendance à leur conseiller de s'appuyer sur les programmes puis de consulter différents manuels. Certains débutants demandent les cours de leurs tuteurs, qui, pensant les aider leur fournissent tandis que d'autres reprennent intégralement les cours de manuels, des cours en ligne ou même leurs propres cours lorsqu'ils étaient eux-mêmes élèves (cf. formatrice) ».

Se pose aussi la question des supports et de la forme du cours : « actuellement, la plupart des stagiaires présentent un cours au format numérique ce qui permet facilement les transformations, ajouts, corrections mais aussi facilite sa transmission à des collègues ou à des élèves absents ou handicapés qui ne peuvent pas prendre de notes (cf.formatrice) ».

Une très grande préoccupation des débutants reste celle de l'appropriation des cours : « on pourrait imaginer que les étudiants puissent dominer facilement leur sujet compte-tenu de leur niveau en mathématiques mais c'est justement ce point qui semble poser problème : l'écart entre les mathématiques « à enseigner » et leurs propres connaissances semble grand (ZPD). L'improvisation semble inenvisageable pour certain débutants, de peur de ne pas faire un cours parfait. Par exemple, Y., étudiant agrégatif, en parle dans son rapport de stage filé : « Pour la première séance, je n'ai fait que du cours « magistral ». Par peur de mal faire, je suis resté assez distant des élèves lors de cette séance, étant trop concentré sur le contenu. Forcément, la participation des élèves a été presque inexistante » (cité par la formatrice ci-dessus).

Enfin sur la question de savoir comment faire approprier et utiliser les cours aux élèves et du rôle spécifique de ces moments dans les apprentissages, nous restons tous sur des interrogations, ou au mieux des hypothèses, sur lesquelles nous ne savons pas encore travailler. Par exemple la question de déterminer dans quelle mesure les élèves vont reconnaître, donner du sens, s'approprier le général (hors contexte), et dans quelle mesure ils réussiront à l'utiliser à bon escient, reste hors de portée.

Deuxième partie (Robert, Chappet-Pariès)

I Analyser les moments d'exposition des connaissances

1) Une reprise des généralités admises en introduction

Nous allons développer plusieurs éléments qui précisent certaines parties du questionnement dégagé à la fin de l'introduction.

Questionner les contenus des cours : En fait le rôle et le contenu de ces moments dépendent de manière importante de ce qu'on vise dans l'enseignement – selon qu'on ne vise que l'installation de techniques, ou au contraire l'installation de connaissances un peu disponibles ou au contraire non évaluables, le cours sera complètement différent par exemple. Selon les notions aussi il peut y avoir des différences, on peut tenter ou non une institutionnalisation partielle qui suit une activité adéquate¹⁸... Selon les classes aussi il peut y avoir des différences notamment sur ce qu'on attend des élèves. Il est donc difficile d'émettre des généralités, il faut prendre en compte les savoirs et connaissances concernés et les contextes. Le « relief » sur la notion (programmes, nature des notions, difficultés des élèves) facilite le choix du mode d'introduction aux élèves, le choix d'un ordre entre cours et exercices et le choix des activités attachées aux cours, il est donc nécessaire de l'étudier pour analyser le cours et apprécier ces différents choix de l'enseignant.

Travailler une hypothèse sur le rôle du cours, comme moment constitutif de l'appropriation par les élèves des concepts visés. Pour l'installation de connaissances notamment, le cours contribuerait au tissage des liens dans les têtes des élèves entre des connaissances contextualisées (exercices, activités) et du savoir décontextualisé ou hors contexte (texte général du savoir). Ces liens sont constitutifs de la construction visée des connaissances (nous parlerons de connexions provisoires). Ces liens, amorcés dans le cours, voire préparés avant le cours, se renforcent dans les mises en fonctionnement, d'autant « mieux » que sont activées des proximités entre ce que les élèves savent ou ont fait ou doivent faire et ce qui est nouveau. Ce peut être des applications ou des éléments de discours. C'est donc l'ensemble cours-activités qui est en jeu. C'est notre hypothèse, inspirée à la fois des idées de ZPD (Vygotski, Vergnaud *ibid.*), de pseudo-concepts et des idées d'institutionnalisation suivant l'activité autonome, voire la précédant (cf. Piaget, Brousseau *ibid.*, Douady *ibid.*, autres didacticiens).

Questionner les déroulements : ils dépendent certes en partie de tout ce qui a été fait avant et qui sera fait après, des choix de ce qui figurent dans le cours, mais aussi des proximités, potentielles, que l'enseignant dégage, suggère, introduit pendant le cours (ou non). Il est donc intéressant de s'y attarder. Ces proximités favoriseraient la construction transitoire attendue, que ce soit par des reprises, des applications ou des explications... À ce titre, on peut penser que les passages contextualisés-hors contexte sont spécifiques des cours¹⁹ et sont des occasions particulièrement propices à développer des proximités cognitives, mettant en jeu connaissances déjà-là, presque déjà-là et visées. Cependant ces proximités dépendent à la fois des contenus hors-contexte concernés, et notamment du degré de généralité de ce qui est exposé, des exemples choisis, et notamment de la visibilité de ce qui est illustré ou généralisé, et des liens entre contexte et hors-contexte²⁰ qui sont explicités, voire systématisés (cf. passages du déclaratif au procédural). De plus, des éléments explicites sur les parties hors-contexte peuvent participer à maintenir les élèves dans l'activité : ils peuvent dégager la structuration de l'exposition des connaissances en cours, ou ponctuer son organisation globale, ils peuvent souligner les objectifs à atteindre pour les élèves. Même si leur apport n'est pas directement cognitif, il est sans doute utile, voire indispensable. Et, dans la mesure où il n'y a pas beaucoup d'activités d'élèves pendant ces temps-là, on peut s'attendre à ce qu'un certain nombre d'échanges enseignant-élèves jouent aussi un rôle dans le maintien de ces derniers dans l'écoute, servant également à renseigner l'enseignant sur cette écoute, et que ces interactions entretiennent une certaine proximité entre les

¹⁸ Si ce n'est inspirée d'une situation fondamentale.

¹⁹ Même s'il y en a aussi dans les moments d'exercices, mais plus dispersés, et toujours initiés par le contextualisé, alors que dans les cours les passages peuvent être activés dans les deux sens.

²⁰ En général de l'ordre des commentaires méta, plus ou moins généraux eux-aussi.

acteurs, peut-être pas directement cognitive, mais nécessaire. Enfin le cours est le seul moment où l'enseignant peut donner des éléments liés à une vue globale de ce qui est en jeu, où il peut dégager des relations entre notions, revenir sur les démarches à l'œuvre, sur l'organisation ou même la genèse du savoir, par-delà les proximités locales évoquées. Reste à savoir dans quelle mesure ce niveau d'intervention s'inscrit dans le reste, et participe de la compréhension des élèves visée. Ainsi il pourrait y avoir des proximités engagées par des questions de l'enseignant, en cours, sur des besoins théoriques (ou technologiques) supposés ou des besoins procéduraux, ou alors pas de questions et des réponses sans questions préalables, comme si l'enseignant pensait que les élèves se les posent « seuls »...

Nous présentons d'abord ce qu'il y a dans les cours, par-delà les diversités et réfléchissons à ce qu'on peut attendre des élèves. Cela nous conduit à dégager des enjeux spécifiques (quel savoir est concerné) et à cerner les variables et les différences à introduire (selon les notions par exemple) ? Nous reprenons et développons notre hypothèse théorique, en référence à Vygostki et aux pseudo-concepts. Nous nous attardons sur les déroulements effectifs et sur les différentes proximités qui peuvent être repérées, en exemplifiant par des extraits de cours de troisième sur les fonctions. Enfin nous revenons à une lecture globale, en exhibant des tensions inhérentes à ce type de contenu. C'est davantage dans la partie suivante que sera développée l'étude du hors-contexte lui-même, avec des exemples précis. La conclusion permet de développer des perspectives, notamment côté recherches.

2) Qu'est-ce qu'il y a dans les cours ? Qu'est-ce qu'on attend des élèves ?

a) Texte du savoir : un réservoir...

D'un côté, pour une notion²¹ au programme, l'enseignant dispose ou établit un texte du savoir, qui donne souvent lieu à un écrit du professeur (effectif ou non). Ce texte sera à donner d'une façon ou d'une autre aux élèves, il est en général accompagné d'une présentation orale, fractionnée, éventuellement précédée, souvent truffée et suivie d'exercices ou d'activités. C'est ce qui sert à la classe de référence, décontextualisée ou générale mais exemplifiée, pour les définitions, les théorèmes, les démonstrations, le niveau de rigueur et le symbolisme attendus, les exercices types et les méthodes, voire les commentaires méta, quelquefois écrits. C'est une réserve et une référence pour puiser les objets et outils utilisés ensuite mais c'est aussi le lieu où peuvent être décrits le statut des connaissances (admis, démontré, méthode...), les liens et mises en relation entre connaissances anciennes et nouvelles et entre diverses parties du cours (mise en évidence de l'organisation des connaissances).

b) Mise en forme : en partie nouvelle

Le cours est ainsi une mise en forme – il introduit des mots, des formulations, des propriétés, des justifications, il a une fonction d'étiquetage, il participe à la décontextualisation ou à la présentation « hors contexte ». Mais que recouvre la généralité associée à ce hors-contexte ? Pour l'enseignant jusqu'où aller dans le général ? Qu'est-ce que les élèves auront à faire de ce général, qu'est-ce qu'ils auront à « remplacer » ou à substituer par exemple ?

Notre étude va dégager différents niveaux possibles notamment selon ce qui reste du contexte. À partir d'une même activité on peut exprimer une généralisation à tous les contextes qui reste évoquée, par exemple une fonction est un programme de calcul quelconque. On peut aussi exprimer une généralité où les contextes précédents ne sont plus cités, par exemple une fonction est une correspondance entre ensembles dans un cours où aucun exemple n'a parlé d'ensemble.

Il est attendu que les élèves empruntent ces mots, ces formulations, ces notions (sans qu'il y ait nécessairement modèle, on y insiste).

²¹ Au sens large.

Cependant, d'une certaine manière, les contenus des cours c'est ce qui ne peut pas être élaboré (dans son ensemble) par les élèves... D'où d'ailleurs l'idée, véhiculée par les débutants, de légitimité de l'enseignant dispensant le cours, attachée à ce moment.

En ce qui concerne la présentation des objets (définitions, théorèmes ...), les élèves seuls, peuvent, pour certaines notions, être associés à un début de décontextualisation mais c'est très partiel. On peut plus souvent faire travailler avant le cours sur des exercices proposant l'utilisation, dans un contexte, de ce qui sera ensuite généralisé, sans que les élèves puissent « deviner » ce qui sera l'objet de cette généralisation, dont ils n'ont, de fait, pas besoin dans l'exercice. Cela servira d'exemple à reprendre après la décontextualisation.

c) Quel travail du cours est attendu des élèves ?

Ce qui est dans le cours oral (et écrit) doit être ainsi en partie retenu (mémorisé), mais aussi être utilisé correctement en y faisant référence, que ce soit comme objet ou comme outil puis être reconnu et adapté dans la résolution des tâches donnant lieu à leur utilisation, avec flexibilité, et organisé avec les autres connaissances. Dans le cas des fonctions, les définitions d'image, d'antécédent, de sens de variation devront être ainsi retenues, utilisées et adaptées dans les cadres algébriques et analytiques. Cela amène notamment à résoudre des équations.

Une question se pose au didacticien : comment jouent les diversités entre élèves (par exemple, par quoi ils commencent, le cours ou les exercices) ?

Il est important d'étudier ce qu'en disent les professeurs : quelle utilisation du cours est attendue (implicite, rappelée à certains moments). Les élèves doivent-ils apprendre par cœur ou seulement savoir retrouver ce dont ils ont besoin ? Comment s'y prennent-ils ? On aura à se questionner sur ce qui pourrait manquer dans un cours et aussi sur la valeur ajoutée par le cours en classe.

Les premiers éléments obtenus (cf. ci-dessus et les opinions d'une des enseignantes dont les élèves ont rempli le questionnaire, jointes en annexe 3) indiquent en tous cas une certaine diversité, même pour un seul enseignant, et beaucoup de questionnements. Ils sont liés à la durée consentie et à la « lassitude » redoutée des élèves, voire à l'ennui de ces moment-là au regard des moments de découverte ou de résolution d'exercices, à la difficulté pour certains élèves d'écrire. Les enseignants s'interrogent aussi sur les activités introductives à mettre en place et sur les illustrations du cours à trouver entre applications immédiates et tâches complexes.

d) Positionnement du manuel

Le manuel est un exemple de texte du savoir et de mise en forme, mais sans fractionnement entre leçons ni beaucoup d'explications ni d'usage de certains ostensifs, ni de réponses adaptées aux questions d'élèves ni beaucoup de liens entre chapitres. Le manuel délivre un texte relativement homogène, alors qu'un cours écrit peut davantage fluctuer, être adapté à ce qui se devine chez les élèves, à ce qui a été fait, aux difficultés qu'on connaît et qu'on anticipe.

C'est justement l'étude des différences entre manuel et cours qui fait l'objet d'une partie de nos travaux, avec l'introduction des déroulements et des proximités.

e) Le point de vue des élèves

Le peu dont nous disposons révèle de grandes diversités liées aussi aux pratiques effectives des enseignants et à leurs attentes. Les élèves peuvent avoir recours aux manuels, surtout pour trouver d'autres exercices que ceux du cours (au lycée). Cependant l'identification précise des savoirs en jeu qu'ils évoquent reste floue même s'ils pensent souvent qu'en termes de mises en fonctionnement attendues du cours, ce dernier semble satisfaisant.

3) Une hypothèse « théorique » sur un rôle possible des cours

Nous avons envie d'assimiler les cours à la présentation aux élèves de "pseudo-concepts" (ce sont évidemment des concepts pour les professeurs du secondaire). Il s'initialiserait pendant les cours quelque chose qui ressemble à ce qui fait passer d'un pseudo-concept à un concept chez le jeune enfant : à partir du mot utilisé par un adulte en contexte, l'avancée vers le concept est rendue possible pour l'enfant par un début de manipulation, notamment grâce aux mots, sans cesse ajustée grâce aux effets de son utilisation sur ses interlocuteurs, jusqu'à la transformation attendue en concept et à son intériorisation. Il y aurait ainsi chez les élèves une familiarisation avec ce que présente le cours, souvent anticipant l'appropriation complète, familiarisation à partir des mots et de mise(s) en contexte adaptée(s). On espère que cela servira de motivation, facilitera l'écoute, servira d'accroche, voire d'écho. La qualité d'un cours dépendrait des connexions, qui peuvent être variées, entre les mots et les mises en contexte, à court terme et à moyen terme.

Autrement dit les « pseudo-concepts » (pour les élèves) introduits dans le cours avec des mots, porteurs d'idées et de techniques, peuvent (devraient) se transformer en concepts, les leviers étant les exercices proposés et les liens explicités entre exercices et cours ... Dans cette acception, un cours n'est pas un modèle à appliquer dès qu'il a été dispensé mais une source porteuse de construction de concepts à partir de mots et d'idées. Ce n'est pas immédiat. Une fois qu'ils ont le cours, les élèves peuvent quand même revenir à d'autres procédures²², il s'agit pour l'enseignant de signaler que le cours permet de faire autrement... C'est l'ensemble de ce qui est proposé aux élèves qui est à apprécier. Notons une différence avec les pseudo-concepts non mathématiques, associés souvent seulement à des mots et des idées : le concept mathématique associé aux mots (définitions, propriétés...) est porteur de sens, de techniques, il peut faire intervenir du symbolisme, il y a même souvent plusieurs représentations associées. Cela justifierait la considération de proximités à plusieurs niveaux exprimées dans différents registres pour illustrer les différents aspects du concept.

Le travail de conceptualisation serait ainsi lié à la transformation individuelle de ces pseudo-concepts en concepts, grâce à des allers retours « cours »/activités. On conçoit le rôle du choix des tâches et du travail des élèves dessus, le rôle du professeur à l'affût des proximités qui peuvent apparaître, le rôle de l'« exploitation » qu'il peut en faire pour que les élèves en profitent.

Cela dit, il est vraisemblable qu'il y ait des différences entre les élèves concernant les processus d'apprentissage liés aux allers-retours en question, même si tous peuvent apprendre au final, grâce à l'ensemble de ce qui leur est proposé. Par exemple certains élèves ont du mal à entrer directement dans un cours décontextualisé, d'autres ont du mal à s'intéresser à un exercice dont ils ne comprennent pas (encore) la finalité.

Enfin tout ne sert peut-être pas à la même chose dans un cours. Certains éléments alimentent les connaissances techniques, à la fois du côté des détails des cours et des exercices immédiats, notamment lorsqu'on travaille sur le caractère objet ou lorsqu'on fait du traitement interne. D'autres éléments alimentent le sens donné aux notions, notamment par et pour des tâches de reconnaissance ou d'organisation, mettant en jeu le caractère outil des notions. Encore une fois, l'acquisition des caractères objet et outil et flexibilité résulte de l'ensemble de ce qui est proposé aux élèves.

4) Des variables sur les contenus des cours : les notions concernées, la place dans le scénario sur la notion, les mots pour le dire ?

a) Quel hors-contexte, quel lien avec le contexte, quelle généralité ?

Se posent alors plusieurs questions – cette présentation faite en cours est générale, hors-contexte, mais, selon les notions, ce qui précède ce cours est plus ou moins « décontextualisable ». Une question serait de préciser à chaque fois dans quelle mesure il peut y avoir une part de décontextualisation, d'appui possible sur quelque chose de déjà fait, et de préciser cet appui. C'est notamment le type de la notion qui est en cause. Selon les cas, on peut s'appuyer ou non sur des aspects outils (extension, RAP) – grâce à un problème. Les élèves peuvent aller plus ou moins loin dans la résolution, au pire ils

²² Cf. l'utilisation de la règle sur les exposants citée dans la première partie.

réalisent qu'il leur manque quelque chose. Pour d'autres notions (FUG) on peut s'appuyer sur ce qui va être unifié par le concept – en le faisant détecter, deviner aux élèves à partir d'exemples questionnés à cette fin (cf. thèse de C. Constantin). Ce sont alors plutôt des objets qui sont en cause. On peut enfin ne s'appuyer que sur un exemple dont on exhibe une généralisation, hors-contexte – l'explication de ce qui va être généralisé est ou non donnée. Mais cette question de présentation hors-contexte concerne aussi certains éléments de théorie non encore formalisables qui peuvent ou non affleurer dans certaines activités et dans le cours (notions de discret et de continu par exemple).

Une question proche tient au choix de ce qu'on retient pour le cours, à chaque moment, en relation avec les tâches supposées « adéquates ».

b) Quel vocabulaire ?

Une autre question encore est le rôle des mots dans ces processus. Si on n'était pas en mathématique il serait très grand – en mathématique il y a en plus un intermédiaire de taille, le symbolisme. Il semble y avoir plusieurs catégories de mots et phrases, mélangés avec le symbolisme – des étiquettes et énoncés (définitions et propriétés), déclaratifs, donnés par l'enseignant, avec une part de symbolisme. On trouve aussi des raisonnements également en langage mixte, donnés par l'enseignant, avec éventuellement « des petits bouts » faisables par les élèves. L'enseignant peut donner des mots pour dire le quoi ou le comment (*on élève au carré*, ou *on poursuit la démonstration ...*), qui explicitent notamment les aspects procéduraux, accompagnant des exercices ou des reprises. Lorsque les commentaires sont directement liés au contexte on parle de méta 1. L'enseignant utilise aussi des mots associés au « pour quoi » (les tâches en jeu) et au pourquoi, là encore souvent sous forme de commentaires sur le sens et les relations entre tâches et outils. On parle de méta 2 et méta 3 selon le niveau de généralité de ces commentaires (voire plus loin).

5) Les déroulements des cours : comment faire pour développer ces proximités qui permettent aux élèves de suivre, de s'approprier quelque chose ?

Pour les élèves, l'apprentissage est assimilé au processus de conceptualisation visé²³ – qui a pour but l'appropriation des notions et qui est provoqué (ou au moins amorcé) par tout ce qui se passe en classe. Pour nous le moment oral d'exposition des connaissances qui figurent dans le texte écrit y participe pleinement, mais ne peut pas être apprécié de manière isolée.

Il nous semble ainsi que la disponibilité visée pour les élèves (état des connaissances « après conceptualisation ») vient d'un travail sur le long terme, d'allers retours entre activités (mises en fonctionnement des connaissances) et concepts présentés dans le cours (outils et objets), avec des interventions visant à pointer ces relations. Nous parlons de « connexions provisoires », établies à partir du cours, que les élèves doivent « consolider », pour s'approprier les connaissances. L'efficacité de ces allers retours est liée notamment aux proximités qui sont activées chez les élèves, en particulier pendant les activités proposées. Toutes les activités ne donnent pas lieu à de telles mises en relation, tous les éléments du cours ne donnent pas lieu à activités – il y a des proximités « impossibles », mais aussi des proximités potentielles, voire manquées. L'étude des proximités contribue à éclairer le rôle que peut avoir le cours dans les apprentissages.

Il y a évidemment des proximités affectives, socialo-culturelles, liées aux contrats, à côté de celles qui pourraient avoir une portée cognitive plus directe, localement, ou plus généralement.

Nous restreignant aux proximités « cognitives », nous cherchons à analyser les occasions où l'enseignant peut élaborer (et élabore ou non) une certaine *proximité* chez les élèves, liée à son choix d'activités, entre celles-ci, les mots et les éléments mathématiques du cours (définitions, ou propriétés ou...). Cela se produit dans les deux sens, soit pour anticiper (ou préparer la reconnaissance), soit pour être repris, adapté, justifié, formulé. Sont en jeu les signaux donnés aux élèves dans le cours pour reconnaître la demande d'utiliser l'élément – ostensifs (mots, dessins, ...) et non ostensifs (discours, idées, mettant en relation hors-contexte, général et contexte). On vise à ce que les élèves puissent

²³ En termes de disponibilités d'un certain nombre de notions, associées à un ensemble de tâches.

reconnaître et faire une restitution suffisamment précise des connaissances du cours à utiliser, pour pouvoir travailler à partir d'elles. Les mots « pour le dire » jouent un rôle important dans ce processus, pouvant contribuer à la dépersonnalisation, parce qu'ils sont partagés par tous²⁴ et à la décontextualisation parce qu'ils ont une certaine portée générale.

Mais de quelle nature précise sont ces relations ? Sont-elles claires pour les élèves ? Dans quelle mesure établissent-elles des proximités entre ce que les élèves savent et ce qui est en jeu ? Pour étudier de plus près leur nature, leur potentiel, et réfléchir à des conditions pour qu'elles jouent leur rôle de proximités, nous allons donner des grands types de proximités qu'on peut rencontrer. Cela permet de réfléchir spécifiquement sur chaque type. C'est ce qui est illustré dans le II par des exemples tirés d'extraits de cours sur les fonctions.

6) Trois types de proximités en acte pendant les cours

Nous suggérons qu'il y a, dans les cours, plusieurs grands types de proximités, qui se déclinent en relation avec les contenus précis. Elles sont soit le fait de l'enseignant soit se jouent dans des échanges questions/réponses avec les élèves. Nous pensons qu'elles peuvent avoir des finalités différentes, mais qu'elles n'atteignent leurs objectifs qu'à certaines conditions, liées à la nature du hors-contexte en jeu et notamment à son degré de généralité, et aussi à la nature des exemples et activités proposés et au travail que les élèves ont eu ou ont encore à faire dessus. C'est leur place par rapport aux moments d'exposition des connaissances et les liens qu'elles supposent entre contextualisé et hors-contexte qui déterminent ces types. Pour chaque cas, nous donnons la caractérisation retenue puis nous indiquons des questions qui résultent de nos interrogations générales, en relation avec les connaissances des élèves. Soulignons qu'un passage du cours ou une activité introductive ou illustrative peuvent activer plusieurs types de proximités successivement. Rappelons que des exemples seront donnés en II.

a) Les proximités inductives, ascendantes

Elles se placent entre ce qu'ont pu déjà faire les élèves et du nouveau (mots, définitions, propriétés) – il y a généralisation, décontextualisation ou hors-contexte, soit d'un caractère outil qui donne naissance à un « nouvel » objet ou à un « nouvel » outil, soit directement d'un nouvel objet, définition ou propriété. Ce qui varie, c'est ce qui est décontextualisable à partir de ce que peuvent savoir ou faire les élèves et la distance entre ancien et nouveau. Les élèves peuvent être associés, par la mémoire ou autrement. Mais... sans doute le « transfert » ne se fait pas pour tous sans commentaires et dépend peut-être aussi de l'empan de la généralisation.

Ce type de proximités se trouve dans beaucoup d'ingénieries ou de problèmes développant une dialectique outil-objet (Brousseau, Douady, Butlen, *ibid.*). Nous en avons moins d'exemples au collège. Il n'est pas exclu qu'il y a là une source de différences entre primaire et secondaire, liées à un degré de généralité adopté dans les passages hors-contexte, à leur place dans l'ensemble des séances (et aux dynamiques avec les exercices qui les accompagnent). Néanmoins nous illustrerons ci-dessous en ces termes des activités introductives sur des extraits de cours sur les généralités sur les fonctions en troisième au collège.

b) Les proximités déductives, descendantes

Elles se placent entre ce qui a été exposé et des exemples ou exercices à faire ensuite avec ou par les élèves (contextualisation, voire re-contextualisation différente des anciennes). Les élèves peuvent être associés plus ou moins directement. Ce sont des illustrations. Mais... ce qui est à contextualiser n'est pas toujours transparent, comme toutes les substitutions, voire les non-substitutions – souvent c'est très naturalisé chez les enseignants. De plus il ne s'agit pas d'obliger les élèves à appliquer le cours tout de suite !

²⁴ En primaire ils permettent en même temps une mise à distance de l'action individuelle.

Des exemples sont donnés ci-dessous sur les cours déjà cités.

c) *Les proximités horizontales*

Elles ne font pas changer de niveau de discours. Cela peut porter sur le cours en train de se faire (demandes de compléments, de réponses) ou sur la structuration du cours (*on en est où ?*) ou même sur des discours plus méta, mises en évidence de relations, d'analogies, statuts des éléments en jeu, voire questions sur le savoir concerné, selon ce qui est en jeu. C'est l'enseignant qui les gère, même s'il peut poser des questions. C'est sans doute difficile à faire vivre à tous les élèves. Il y a différentes manières de les présenter, avant ou après ce sur quoi elles portent... Il y en aurait davantage à l'oral que dans un texte écrit. Souvent tout se passe comme si cela servait plus à maintenir des interactions qu'à des objectifs purement cognitifs.

Un exemple est donné à partir d'un extrait de cours sur les fonctions, en classe de seconde.

d) *Un bilan*

Nous retenons qu'il s'agit de traquer le fil rouge suivant : entre hors-contexte, décontextualisation et contextualisations auxquelles sont associés les élèves, entre discours général, non strictement mathématique et mathématique (y compris symbolique), entre interventions du seul professeur et interventions partagées avec et par les élèves, quelles proximités sont activées chez les élèves et comment ? Comment interviennent dans ces proximités, l'ancien et le nouveau – et la mémoire, les activités passées et présentes, le texte du savoir hors-contexte (à l'oral, à l'écrit, dicté, recopié...) ?

Ces proximités dans le « dit » de l'enseignant font partie des proximités-en-actes déjà travaillées (Robert et Vandebrouck, *ibid.*). Avec cette notion, rappelons qu'il s'agit d'interpréter certaines pratiques en classe en termes de proximités potentielles avec les activités des élèves, et on a montré, pour les recherches d'exercices en classe, que tous les élèves ne sont finalement pas concernés de la même façon, avec des régularités dans les types de sous-activités « manquantes » pour ceux qui sont moins proches... ce peut être dans les dits ou dans d'autres décisions en actes (durée par exemple, conséquences de questions ou de types d'aides). Dans le cas des moments d'exposition des connaissances, il serait intéressant d'étudier de la même façon les effets possibles des différents types de proximités sur les élèves. En les interrogeant tout de suite après le cours ? En séances d'exercices ? Plus tard, pour voir ce qui « reste » ?

7) **Visions globales des cours**

On peut se demander s'il n'y a pas, de manière caricaturée, deux logiques « en tension » (associées à des niveaux de langage) qui traversent les manières d'exposer les cours devant les élèves, activant deux niveaux de pensées :

- une logique un peu globale, liée au sens, à l'organisation des idées entre elles, à l'adoption plus ou moins implicite d'un mode de validation et même de travail mathématiques (cf. épistémologie), qui peut se traduire par l'utilisation d'un langage non strictement mathématique, de commentaires méta, etc. On pourrait évoquer une logique épistémologique, voire heuristique, qui mettrait en jeu des réponses à des questionnements d'ordre théorique ou technologiques (justifications de différents niveaux).

- et une autre plus « scolaire », plus locale, plus liée aux contrats, liée à la volonté de faire mémoriser les mots et les phrases, de faire suivre localement les justifications, d'armer les futures utilisations (y compris techniques, mais inscrites dans l'épistémologie spécifique des mathématiques), voire d'obliger à les faire même s'il y a d'autres voies. On pourrait évoquer une logique « procédurale » qui mettrait en jeu des réponses à des questions techniques.

Il peut y avoir tension car suivre la deuxième logique peut faire perdre le fil aux élèves, voire être (très) ennuyeux²⁵, tout en les rassurant en partie, privilégiant un apprentissage procédural, mais suivre la première peut « larguer » les élèves, notamment au moment du retour aux applications strictement mathématiques, tout en « séduisant » certains et en dépassant d'autres élèves, notamment par le recours à des éléments externes aux math, faisant intervenir l'intelligence « ordinaire » à laquelle des élèves ne s'attendent pas.

Il y aurait sans doute à étudier les traces de ces deux logiques qui se combinent dans les cours, y compris pour traquer dans chacune les naturalisations²⁶ éventuelles côté enseignants qui feraient difficultés aux élèves. Ce peuvent être des naturalisations langagières, notamment sur des mots, ou des passages implicites entre deux idées, qu'ils soient d'ordre logique (mathématique) ou simples changements de points de vue, ou des acceptations ou refus de procédures ou d'arguments d'élèves, supposés clairs, mais qui restent obscurs...

Ainsi la pédagogie inversée peut avoir comme but 1) de se débarrasser un peu de ce qui relève de la deuxième logique, laissée aux élèves « à la maison », pour récupérer en classe la première logique, plus difficile à cerner pour les élèves seuls, mais en quelque sorte ainsi « préparée » ou au contraire 2) de travailler les exercices avec les élèves en reprenant les éléments indispensables du cours et en laissant de côté ce qui relève de la première logique.

Cependant, on peut au contraire penser que c'est dans des allers-retours permanents pendant les cours entre les deux « niveaux » que s'élaborent les futurs concepts, dans leur épaisseur. Dans quelle mesure est-ce que cela peut être dangereux de couper les moments réservés au sens et ceux réservés aux techniques ? C'est d'une certaine manière le sens global des apprentissages qui est en cause – on n'apprend pas seulement pour utiliser... Mais les limites sont floues... Dans quelle mesure le rythme suivi peut-il contribuer à rendre vivants ces allers-retours ?

Ce qui pourrait différencier les cours à cet égard, serait justement les proximités mises en œuvre, leur ordre, leurs accroches, voire leur durée : les développer beaucoup entre du général et du décontextualisé, par exemple, signale peut-être plutôt la première logique ; les développer beaucoup entre du contextualisé et du décontextualisé, s'inscrirait plutôt dans la deuxième ? Il y a sans doute des procédés un peu systématiques pour faire entrer les élèves dans les deux logiques – à exhiber ?

8) Un bilan et un premier aperçu méthodologique

Reprenons les questions proposées dans l'introduction, quitte à nous répéter.

Il s'agit d'abord d'étudier divers cours, et de dégager des diversités, des régularités intra et interindividuelles, voire de manques éventuels et de palettes de contenus et de déroulements possibles.

Pour cela la première question concerne les contenus : **qu'est-ce qu'il y a dans un cours** (éléments hors-contexte²⁷, exemples, activités préalables et exercices)? Quelles en sont les variables significatives (programme, type de notions, difficultés d'élèves) ?

Une étude préalable du relief est nécessaire pour identifier ces éléments, suivie de la description de l'amont du cours. Puis il s'agit de décrire les contenus précis du cours et de le découper en épisodes.

Une étude de l'ordre suivi dans le cours, des alternances entre activités proposées aux élèves et cours proprement dit, du rythme suivi peut commencer à baliser ce découpage. On dégage les présentations du texte du savoir, les commentaires, exemples, applications immédiates – avec qui parle et ce qu'ont à faire les élèves (rôle dévolu aux élèves).

²⁵ À quand la création d'un « ennuiomètre » pour mesurer cela dans les cours et en mieux comprendre les genèses ?

²⁶ Éléments transparents pour les enseignants, non explicités, alors que pour les élèves il peut y avoir non transparence.

²⁷ Définition, théorème, propriété, démonstration, éventuellement méthode...

Le vocabulaire entre langage courant et langage mathématique, avec ou sans rupture, avec ou sans implicite, les rappels, répétitions, reprises (actives ou non), sont précisés ainsi que **l'écrit en jeu** : les traces visibles de l'histoire racontée, les liens et différences oral/écrit et l'usage des ostensifs, et des diverses représentations.

Quel degré de formalisation, de généralisation est-il retenu ? Quel niveau de généralité est mobilisé dans les énoncés ? On distingue plusieurs niveaux selon ce qui est considéré comme variable, à commencer par le générique (pour lequel il n'y a pas de variable explicite).

Quels commentaires « méta » ? Le travail sur **l'usage du méta** et de ses différents niveaux (Tenaud 1991) met en jeu les questionnements suivants : sur quoi ça porte et à quel moment c'est donné ? Ce peuvent être des commentaires, des exemples non strictement mathématiques, des métaphores, images, illustrations, explications, méthodes, contrat, enjeux, attendus d'un cours (en acte, explicites). Rappelons qu'on distingue le méta 3, au niveau le plus général : par exemple les connaissances sont-elles présentées en référence à des besoins, internes aux mathématiques ou non ? Aborde-t-on le pourquoi, le comment, le quoi des choses ? A quoi ça sert ? Le méta 2 aborde des questions de structuration globale (explicite ou non), des idées générales sur le comment, par exemple les méthodes à utiliser face à un type de problème, sans tenir compte de l'énoncé particulier du problème ; le méta 1 est le plus adapté au contexte, il permet de parler des liens précis déclaratif/procédural ; sur des exercices il est associé à la prise en compte de la conclusion, et des données (des hypothèses) : le choix des méthodes est discuté pour l'exercice particulier.

Cela donne à voir de quoi est constitué globalement le cours (cf. description des épisodes), avec le texte du « savoir » retenu, la nature des énoncés mathématiques, le statut des démonstrations présentées, et le rythme global.

La question des déroulements se pose ensuite : Comment l'enseignant remplace les leviers autonomie et aide utilisés dans les exercices (cf. étude des proximités) ? Quelles logiques locale et globale met-il en œuvre ? Tout cela participe des différences entre un cours de livre ou de cahier et un cours en classe.

Les activités des élèves au fur et à mesure (écrire, répondre, appliquer, énoncer du cours (élaborer)...) sont détaillées, avec la place et les contenus des questions et des réponses : qu'est-ce qui est demandé aux élèves (rappels, actions, démonstrations, questions...), sur quoi ils sont impliqués, qu'est-ce qui est fait de leurs réponses ou questions – évaluées, mutualisées, complétées... A maxima ou a minima ?

On analyse alors **les proximités en acte**. Il s'agit de caractériser les liens hors-contexte/contextualisé, contextualisé/hors-contexte, croisés avec les liens Ancien/Nouveau, Nouveau/Ancien, à partir du degré de généralité adopté, du vocabulaire utilisé, des commentaires. Dans le cas des proximités inductives, on essaie de comprendre ce qui est ajouté à l'exemple traité. Dans le cas des proximités déductives on traque le repérage (explicite) de ce qui est (encore) variable dans le hors-contexte et de ce qui ne l'est pas, ainsi que les remplacements et substitutions à faire dans l'expression générale (avec éventuellement des transitivités et des changements de registres ou de points de vue cachés). Un des rôles clefs de l'enseignant en cours est en effet, à nos yeux, soit d'expliquer comment se dégage ce qui est général du particulier, soit d'explicitier les activités attendues des élèves dans les applications du cours, alors même qu'elles peuvent paraître évidentes.

On étudie alors à partir de tout ce qui précède les **différentes logiques** globales présentes dans le cours (épistémologique ou procédurale), ainsi que les candidats à constituer des **connexions provisoires**.

La dernière question ne sera pas abordée ici : Quel peut être le rôle des cours dans les apprentissages, avec quelles diversités selon les contenus et les élèves ? En particulier, pour le chercheur, par quoi remplacer l'analyse des activités possibles des élèves en relation avec la qualité des tâches et les apprentissages ?

II Des exemples de proximités-en-acte dans les cours

Avant de les développer, nous présentons les éléments de relief, notamment liés au programme de chaque niveau, qui permettent de comprendre les proximités possibles, leurs enjeux et les difficultés éventuelles.

1) Un peu de relief sur l'introduction des fonctions au collège (et au début du lycée)

Pour bien cerner notre propos, revenons sur ce qui est à enseigner au collège, en quatrième et en troisième surtout. En quatrième on introduit les représentations graphiques de la proportionnalité et on travaille sur le calcul littéral jusqu'aux résolutions d'équations du premier degré. En troisième on aborde des généralités sur les fonctions et les fonctions affines. En seconde on ajoute d'autres généralités et on enrichit l'herbier des fonctions. Les extraits des programmes qui nous concernent sont joints en annexe 7. Notre propos ici est de préciser les nouveaux enjeux en termes de connaissances et de réfléchir à leur distance avec ce qui est déjà plus ou moins connu des élèves ainsi qu'aux proximités possibles. L'analyse est un peu différente pour les aspects algébriques et graphiques, ce qui explique que ce n'est pas tout à fait le même plan qui est suivi.

a) côté algébrique

Nous postulons qu'il s'agit en troisième d'introduire un formalisme généralisateur (noté f , ou $x \rightarrow f(x)$), unifiant notamment les processus de calcul explicites déjà vus²⁸, mais en retenant à la fois la correspondance (le processus ou le programme de calcul, certains évoquent une « machine ») et l'ensemble des valeurs concernées, qui devient important, ainsi que l'ensemble des valeurs obtenues. Soulignons que cette correspondance, relation, ... est commune à tous les programmes de calcul mais que ce n'est pas ce qui est mis en valeur avant l'introduction des fonctions, où chaque programme est étudié pour lui-même. Certains enseignants introduisent aussi, avec la notion algébrique de fonction, l'idée de dépendance, ou même l'idée de variation, jusque-là réservées plutôt au travail sur des représentations graphiques, mais non explicitement fonctionnelles. Selon les cas, on peut encore généraliser l'objet mathématique visé, en se débarrassant ou non d'une expression algébrique à expliciter. Dans tous les cas, on ajoute une clause d'unicité de l'image dont on n'avait pas besoin jusqu'ici, car elle était réalisée automatiquement dans les exemples travaillés.

Il y a donc un nouvel objet mathématique, qui a un nom, une notation, f , et un symbole, une flèche, avec des notations et des noms pour les valeurs en entrée et en sortie (le plus souvent x , antécédent ; $f(x)$, image). Cet objet n'est pas introduit pour résoudre quelque chose, dont les élèves auraient vraiment besoin, mais il peut être associé à des formulations en français courant du style « en fonction de ». Cet objet va être associé (servir) à des descriptions en contexte, mais, nouveauté complète, il sera travaillé dans différents cadres et/ou registres, comme nous allons le voir. La description initiale (côté algébrique) porte donc sur trois composants, la relation [correspondance, machine, programme], les éléments de départ, souvent résumés avec un intervalle, et ceux d'arrivée.

Les connaissances anciennes auxquelles on pourrait rapprocher cet objet nouveau sous cette première forme sont essentiellement les programmes de calcul, mais ce qui est généralisé, unifié (et dépassé s'il n'y a pas de relation algébrique explicite), c'est l'intérêt porté à l'ensemble de départ et à la donnée de la correspondance hors explicitation ; seule l'existence de cette correspondance est demandée maintenant, assortie de l'ajout de la condition d'unicité de l'image.

Ce que le nouvel objet dans cet aspect permet de faire travailler, quand la fonction est donnée explicitement, reste de l'ordre des révisions algébriques, notamment les résolutions d'équations pour trouver les antécédents (le travail algébrique antérieur est alors mobilisé, comme outil intermédiaire). On retrouve ce constat sur les FUG²⁹ (Bridoux 2011) – il n'y a pas de vraies tâches simples et isolées

²⁸ Souvent ils ne sont pas « notés », on donne $x \rightarrow$ l'expression algébrique précise ; quelquefois on trouve $E(x)$ pour cette dernière expression.

²⁹ Voir page 3.

au début du travail sur des FUG car on est obligé de revenir aux connaissances antérieures, seules disponibles ou mobilisables, pour faire travailler les élèves...

b) côté graphique

On ajoute un autre aspect lié au registre graphique, la représentation graphique des fonctions, dont on peut penser qu'il est d'une certaine manière non congruent à l'aspect algébrique, qu'il soit ou non explicite. En effet l'expression algébrique n'est pas directement accessible sur la courbe, c'est seulement le lien, unifié par le passage algébrique par la même fonction, « illisible » en général, entre abscisse et ordonnée de tous les points de la courbe.

Les connaissances anciennes auxquelles on pourrait rapprocher cet objet nouveau sont donc les courbes déjà étudiées depuis longtemps, mais exclusivement graphiquement. Les élèves sont habitués depuis le primaire, à travailler avec des graphiques, mais non associés, jusqu'en quatrième, à autre chose qu'à eux-mêmes ou à la réalité non mathématique ou géométrique qu'ils représentent : ils savent³⁰ placer des points dont les coordonnées sont données, lire des coordonnées si ce sont des valeurs numériques particulières. Ils savent repérer des variations des grandeurs³¹ en jeu sur chaque axe. Ils savent aussi passer d'une abscisse numérique à une ordonnée numérique et réciproquement. Ce travail met en jeu deux étapes, qu'on peut représenter par des traits sur le graphe, partir d'un nombre voire d'un nombre généralisé sur un des axes, et arriver à un autre nombre (éventuellement généralisé) sur l'autre axe, en passant par la courbe. Il n'y a pas besoin d'explicitier les deux coordonnées du point de la courbe concerné, de les interpréter ensemble. Les tâches et techniques antérieures ne nécessitent pas de justification faisant intervenir les couples (x, y) alors que cela devient nécessaire si on travaille sur la fonction représentée, car alors $y = f(x)$. Autrement dit les élèves interprètent déjà beaucoup de choses sur des graphiques mais pas associés à une représentation graphique de fonction, ou sans que cette propriété serve, et l'enjeu va être le transfert de ce qu'ils savent faire sans faire allusion à f à des propriétés mettant en jeu f – transfert invisible, qui ne peut pas se deviner, comme nous allons encore le préciser.

En quatrième on étudie la proportionnalité et à partir d'un tableau de valeurs discrètes et numériques, on trace des points dans le plan muni d'un repère que l'on joint par une droite. Cet alignement, ainsi que sa réciproque – si des points sont alignés avec l'origine ils représentent une situation de proportionnalité, sont des propriétés admises. Il faut souligner que les points de la droite différents de ceux qui ont servi à la tracer ne sont l'objet d'aucune attention, explication ou interprétation du moins dans les programmes actuels³². La droite ne sert qu'à traduire l'alignement des points initiaux, le fait que les autres points de la droite ont des coordonnées proportionnelles est passé sous silence, ignoré. Si des courbes non droites sont tracées c'est juste pour signaler que les points de la courbe qui ont été joints pour ce tracé ne sont pas en situation de proportionnalité. Cependant l'utilisation du théorème de Thalès, au programme, peut permettre, notamment en troisième, de démontrer pour une droite donnée, au moins lorsque son coefficient directeur a est positif, que les coordonnées (x, y) de tous les points de la droite vérifient $y = ax$.

Autrement dit, côté construction de courbes, les élèves peuvent construire des points isolés mais ils n'ont pas de moyen de tracer eux-mêmes une courbe qui passerait par ces points : rien ne peut les aider à joindre les points, sauf l'habitude de voir des courbes et l'envie de le faire, ou sauf si c'est une droite dont ils connaissent deux points. Il leur manque le fait de s'intéresser à tous les points et l'idée que, sur les courbes associées à des fonctions, tous les points sont obtenus de la même façon à partir de la fonction, l'ordonnée valant « f de l'abscisse »...

Pourtant les élèves disposent de courbes tracées par un logiciel, ou données dans un document, mais on peut se demander s'ils questionnent sur la manière de les obtenir. Y a-t-il des mathématiques là-

³⁰ On peut le supposer.

³¹ Au sens large, elles peuvent être discrètes ou continues

³² Mais il peut rester des traces des programmes antérieurs, dans certains manuels (c'est le cas dans le manuel Phare de 2008) ou dans les pratiques de certains enseignants.

dedans ? On retrouve la question plus générale de ce qui est « embarqué » comme propriétés dans les logiciels. De manière générale le logiciel peut placer de très nombreux points de coordonnées (x, y) , suffisamment nombreux pour qu'on ait l'impression visuelle de continuité dans le cas de graphes de fonctions. Ou bien les valeurs numériques utilisées s'obtiennent à partir d'une fonctionnalité calculatoire du logiciel, avec l'une des options *trace* ou *lieu* – par exemple le calcul d'une aire associée à une figure géométrique, qui est mesurée (approximée) sans qu'on le voit, puis dont les différentes valeurs sont représentées directement sur une courbe. On gagne le fait de s'intéresser à beaucoup de valeurs de x , mais pas la relation entre x et y pour un point. Qu'est-ce que la donnée de telles courbes produit chez les élèves ? Qu'est-ce qui peut être dit aux élèves ? Ils peuvent déduire que si on trace beaucoup de points, cela finit par « se toucher », mais il nous semble que la dépendance systématique entre x et y de tous les points de la courbe représentative de f peut encore rester lointaine. Autrement dit, comme nous l'avons déjà suggéré ci-dessus, l'interprétation d'une représentation graphique nécessite de mettre en œuvre implicitement le fait que la courbe de f est l'ensemble des points $(x, f(x))$: il y a utilisation d'une réciproque qui est passée sous silence.

Si on peut donc s'appuyer sur une certaine habitude de lecture graphique de transfert de propriétés des abscisses aux ordonnées ou réciproquement, il faut tenir compte du fait que ce qui est nouveau c'est l'irruption de propriétés de f dans l'affaire. Encore une fois, une courbe permet d'associer visuellement des propriétés des abscisses et des ordonnées des points, permet de lire les variations, mais le transfert des propriétés à f , si fonction il y a, n'est pas automatique, f « ne se voit pas » et ce transfert ne peut se faire qu'à condition de savoir et d'interpréter le fait que toute ordonnée d'un point de la courbe représente f de l'abscisse de ce point. Il y a là un changement de point de vue résultant de la substitution de $f(x)$ à y puis d'un passage à la fonction f . Ce qu'ajoute le travail sur sa représentation graphique à l'étude d'une fonction est la possibilité de transfert visuel immédiat entre des propriétés de x et $f(x)$ par l'intermédiaire de la courbe. Le passage au registre fonctionnel dans le cadre graphique est complètement nouveau.

De fait une courbe est tracée dans un espace bi-dimensionnel, faisant intervenir des points (avec deux coordonnées) et non des nombres, mais elle est de dimension 1 à cause de la dépendance entre les coordonnées de ses points. C'est parce qu'il y a cette relation entre les deux coordonnées (x, y) des points de la courbe qu'il y a ce type de courbe. Pour travailler sur cet aspect, on doit réaliser en actes *une transitivité liée à une substitution* très difficile, très éloignée de ce que les élèves savent faire – on connaît l'image de x par f et on remplace y (l'ordonnée d'un point de la courbe) par cette image de x (son abscisse).

En résumé, l'étude des représentations graphiques des fonctions en troisième met en jeu une grande généralisation, voire un enrichissement, et une unification de ce qui précède, accompagnés cependant d'une restriction aux seules courbes associées à des fonctions, toutes choses que les élèves ne nous semblent pas prêts à deviner seuls. En particulier c'est lié au fait qu'on va s'intéresser non seulement à « tous les points » des courbes, remplacer des valeurs numériques de départ, discrètes, par des nombres généralisés, x , en introduisant en plus l'ensemble que décrivent ce(s) nombre(s), devenus la « variable », mais encore qu'on doit interpréter les ordonnées comme des valeurs de $f(x)$, si la courbe représente f . De plus l'expression « tous les nombres » réfère aux nombres réels. Du coup toutes les propriétés déjà travaillées, lecture de valeurs de coordonnées, lecture d'intervalles sur les axes, lecture de résolution d'équation ou d'inéquation, lecture de variation ont une traduction en terme de fonctions (quand c'est une courbe représentative) vont être modifiées, enrichies par l'interprétation $y = f(x)$.

Finalement, ce que ces aspects des fonctions permettent de faire travailler est lié d'une part aux passages algébriques-graphiques, en partie nouveaux, par l'intermédiaire des traductions ordonnées→images, nouvelles d'autre part.

En terme de proximité peut-être pourrait-on ainsi rechercher ce qui est explicité sur tout ce qui est ajouté à ce qu'on connaît déjà : le fait de chercher les images de tous les x , de représenter tous les points correspondants et surtout la possibilité que cela donne de transférer des informations non seulement sur $f(x)$ mais aussi sur f . L'image remplace l'ordonnée, l'antécédent remplace x ; si on se donne un intervalle de l'axe des x , cela permet d'accéder à des informations sur la portion de courbe

correspondante (par exemple elle monte) et sur les ordonnées associées (leur croissance éventuelle) mais ce qui est nouveau c'est la traduction de ces dernières informations sur f (par exemple f croît).

c) Outil ou objet ?

Enfin on peut souligner que c'est surtout l'objet fonction qui est étudié au collège – il y a peu d'exercices dont la résolution demanderait aux élèves d'introduire des fonctions pour les utiliser comme outil. Cela est lié au peu de propriétés qui sont introduites à ce niveau, il y a surtout des descriptions attachées à l'objet dans ses différents aspects – notamment les notions d'image et d'antécédent à travailler dans les différents registres, qui peuvent amener à résoudre des équations, comme déjà signalé. Les courbes représentatives sur lesquelles les élèves travaillent sont en général données ou obtenues sur écran sauf dans le cas des fonctions linéaires et affines, au programme, que les élèves doivent (re)connaître sous leur forme algébrique et dont ils doivent pouvoir tracer ou identifier la représentation graphique. Ce deuxième chapitre donne lieu à des tâches assez peu variées, reprenant les notions introduites généralement, avec cependant quelques modélisations de situations géométriques notamment, pour lesquelles l'étude des fonctions affines obtenues peut renseigner sur des variations ou des comparaisons.

Tout cela va être approfondi en seconde, avec reprise des généralités complétées par une étude systématique du sens de variation, des maxima et minima et la reprise des fonctions affines, complétée pour grossir le stock des fonctions connues (carrées, inverses, homographiques). Il y a davantage de problèmes où les fonctions peuvent être utilisées comme outil.

2) Des exemples de proximités dans des activités introductives.

a) la première activité de découverte dans une classe de troisième avec l'enseignante A (sans vidéo)

Le texte distribué aux élèves est joint en annexe 4. En annexe 5 figure la même activité complétée par l'enseignante. En utilisant cette version du professeur (que nous a donnée l'enseignante), on constate que toutes les réponses que peuvent donner les élèves seuls sont liées au contexte et reprennent des éléments déjà vus notamment sur les graphiques (colonne de gauche du document). L'enseignante s'appuie sur ces réponses en les traduisant « d'un point de vue mathématique ».

Cela consiste d'abord à remplacer les expressions « en langage courant » en utilisant un vocabulaire et des notations mathématiques. Ainsi on introduit le mot fonction et la notation $f(t)$ à la place des mots « dépend » et « varie ». Ce faisant, on désigne par t le temps écoulé en s'intéressant à chaque valeur de ce temps, ce qui nous semble nouveau même si les élèves ont pu parler de « chaque instant écoulé » et en ajoutant qu'il lui correspond une valeur unique du taux, ce qui n'est pas présent dans les réponses des élèves.

Les cinq questions suivantes mettent en jeu une lecture graphique en termes d'abscisses et d'ordonnées que l'enseignante traduit en remplaçant les valeurs numériques des coordonnées données par les élèves par leur interprétation directe en une égalité du type $f(\text{un nombre}) = \text{un nombre}$. Cette interprétation est assortie des mots « image » et « antécédent ».

Enfin, l'enseignante traduit l'expression d'augmentation vue sur la courbe à la croissance de la fonction.

La proximité ascendante consiste ici à reprendre une partie de ce qui a été dit par les élèves et à en remplacer une autre partie par le vocabulaire mathématique et la notation introduits à cet effet. Le formalisme est évidemment nouveau mais en relation directe avec ce qu'ont dit ou lu les élèves. Si la proximité est exhibée, on ne peut pas savoir dans quelle mesure elle est précisée par l'enseignant (sur quoi porte exactement le transfert graphique→fonction ?).

Cela dit, il n'y a aucun besoin de ces « traductions » ni aucune résolution de problème en jeu pour les élèves. On ne peut pas justifier autrement que formellement ce jeu entre mots et signes. Cela correspond à ce que seul le caractère objet des fonctions est présent. Cela questionne sur l'efficacité a

priori d'une telle proximité et sur le contenu des programmes. Cependant le degré de généralité de la notation et du vocabulaire reste en suspens dans la mesure où un seul exemple est traité. C'est ce qui va être l'objet du cours.

La proximité mobilisée dans cet exemple joue ainsi sur une certaine généralisation des objets mathématiques en jeu limitée à l'exemple, portant surtout sur le formalisme et sur la lecture fonctionnelle d'un graphe de fonction, mais rien n'est abordé de l'unification que peut apporter la notion de fonction ou des différents aspects mobilisables. Ce qui manquerait tient à ce qui dans une situation donnée permet de décider qu'elle relève de la notion fonction, ou de choisir une description propice à la situation envisagée. Généralisation et formalisme sont préparés par une certaine proximité mais pas unification ni caractère outil. Cela ne veut pas dire que c'est possible de le faire.

b) des activités de découvertes sur les représentations graphiques dans une classe de troisième avec l'enseignant de collège, B, (avec vidéo)

Il y a trois activités successives avant le cours pour préparer la définition des représentations graphiques des fonctions. Nous allons les résumer en indiquant à chaque fois les proximités qui nous semblent activées et ce qui peut rester éloigné.

La première activité consiste à associer à une liste de couples d'entiers la fonction $x \rightarrow 2x$ et à identifier une situation de proportionnalité que l'on représente dans un repère. Le fait que les points sont alignés sur une droite passant par l'origine du repère est rappelé. La droite est tracée. Rien n'est dit sur les points intermédiaires. Il n'y a rien de nouveau, ce sont des révisions (cf. relief ci-dessus). On peut remarquer l'association explicite d'un couple de nombres (a, b) aux coordonnées (a, b) d'un point. Il n'y a pas de fonction dans l'affaire sauf dans deux allusions de l'enseignant. Il cite une fois la fonction $x \rightarrow 2x$ et une fois la représentation graphique de la situation donc de la fonction. En réponse à une question d'élève il annonce une généralisation de la représentation graphique à d'autres fonctions ($x \rightarrow 2x + 3$). L'enjeu des représentations graphiques, à savoir l'interprétation des coordonnées de tout point d'une courbe représentative de f comme $(x, f(x))$ n'est pas préparée.

Dans la deuxième activité, il s'agit de deviner que les couples de nombres proposés sont associés à la fonction qui à un nombre fait correspondre son carré. L'enseignant demande ensuite de compléter un tableau de valeurs de ce qui sera la fonction $x \rightarrow x^2$ puis de placer les points dont les coordonnées sont les colonnes du tableau dans un repère. L'enseignant continue en traçant grâce à un logiciel « tous » les points de coordonnées (le nombre de départ x , le nombre d'arrivée x^2) mais le lien entre ce que les élèves ont tracé et ce qui est demandé au logiciel n'est pas fait. On peut se demander si la question de la signification d'un tracé joignant les points déjà obtenus n'aurait pas rapproché les élèves de ce qui est visé. Là, l'enseignant insiste sur la construction de la courbe par le logiciel grâce au placement de très nombreux points de coordonnées (x, x^2) ; il affiche les coordonnées d'un point au hasard et indique que l'ordonnée est le carré de l'abscisse. La question se pose peut être pour les élèves entre la construction de la courbe à partir de points nombreux et son interprétation : ce n'est pas parce que la courbe est obtenue à partir de points (x, x^2) que les coordonnées de tous ses points vérifient la même relation. Autant généraliser une construction de courbe point par point en remplaçant y par $f(x)$ peut sembler à la portée des élèves, autant, à l'envers, interpréter les coordonnées de n'importe quel point de la courbe comme $(x, f(x))$ met en jeu quelque chose de nouveau qui n'est plus proche du tout de ce qu'ont déjà fait les élèves (cf. ci-dessus). Tout se passe comme s'il manquait un « réciproquement ». L'utilisation du mot ensemble justifie ce que dit l'enseignant sans avoir vraisemblablement de signification pour les élèves.

La troisième activité reprend la même chose pour la fonction $x \rightarrow \sqrt{x}$. Les élèves complètent un tableau de valeurs numériques puis pour le représenter autrement, les élèves placent les points dans un repère. L'enseignant demande s'il est légitime de les joindre, comme certains élèves l'ont fait cette fois-ci. Il laisse la réponse en suspens. Ensuite il trace devant les élèves la courbe sur ordinateur en commandant de placer les points (abscisse x , ordonnée $\sqrt{x}$). Il fait varier l'abscisse, x , déclarée comme variable, et redit que l'ordonnée du point correspondant de la courbe est $\sqrt{x}$. La courbe

s'affiche. L'enseignant choisit un point de la courbe et l'ordinateur affiche les coordonnées numériques. L'enseignant demande la signification des deux nombres ainsi affichés. Pas de réponses jusqu'à ce qu'un élève reprenne le $(x, \sqrt{x})$. On constate à nouveau à la fois l'appui sur les constructions précédentes et la difficulté d'interpréter la courbe ce qui est éloigné de ce que les élèves ont déjà pu faire. Enfin l'enseignant donne la définition : une représentation graphique est un ensemble de points, l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$, – il précise qu'une droite est une courbe... Il demande enfin de tracer une courbe non représentation graphique d'une fonction.

On peut se demander quelle proximité avec tous les élèves est engagée. Peut-on parler de proximité ascendante ? L'enseignant s'appuie sur une interprétation des coordonnées mais il n'explique pas pourquoi on choisit justement ces coordonnées pour chaque point ; les élèves peuvent encore moins le deviner seuls.

De plus l'enseignant insiste sur le fait que x prend toutes les valeurs, que tous les points sont concernés (comme s'ils se touchaient, qu'ils avaient une épaisseur) mais il ne dit rien sur le fait que tout point de la courbe a comme ordonnée $f(x)$. Il n'évoque pas non plus ce qu'on connaît de plus sur la fonction grâce à cette représentation, il dit seulement que c'est une autre façon de l'aborder.

Comme d'habitude, en dire trop aux élèves peut aussi bien les noyer que n'en dire pas assez. Il s'agit d'adapter à chaque classe les informations qu'on juge adéquates

3) Deux exemples de proximité descendante (pour faire travailler les premières définitions des fonctions)

a) Le début du cours de l'enseignant A

Après trois activités préliminaires, un peu anciennes, que les élèves avaient à relire (dont la première étudiée ci-dessus), l'enseignante A propose d'emblée la définition suivante, écrite, « *Une fonction peut être abordée sous différents aspects. On peut concevoir une fonction comme un objet mathématique qui décrit une relation entre deux grandeurs dépendantes c'est-à-dire entre deux grandeurs telles que toute variation de l'une entraîne une variation de l'autre. La deuxième grandeur s'appelle son image* ».

S'ensuivent les deux exemples contextualisés qui nous intéressent ici.

Rappelons qu'il s'agit pour nous d'identifier ce qui est à reconnaître en contexte à partir de ce qui est général, lors de mises en fonctionnement demandées : ici, les grandeurs, la relation, la dépendance, l'image... Est-ce au même niveau de généralité ? La dépendance est-elle une condition nécessaire ? Que veut dire variable, et qu'est-ce qui est variable dans la définition ? Qu'est-ce qu'on doit « remplacer » pour vérifier qu'un exemple particulier est une fonction ? Dans quelle mesure cela peut mettre en jeu des connaissances proches de celles qu'ont déjà les élèves (notamment sur les programmes de calcul et sur les graphiques) ?

Quoi qu'il en soit, nous proposons comme étude de la proximité descendante en jeu ici, la manière dont l'enseignante organise la reconnaissance en contexte de ce qui constitue une fonction, pour rapprocher les élèves de ce que recouvre la définition. Il est artificiel de couper complètement l'étude de ce qui a lieu en classe après la donnée de la définition de ce qui a précédé celle-ci, il ne faut y voir que l'occasion d'exposer notre manière d'analyser ces moments de cours et de les questionner. Comme nous l'avons déjà signalé, on ne peut en effet pas isoler l'étude des cours de l'ensemble...

Ce que dit l'enseignant est indiqué en italique. La partie soulignée est ce qui est écrit sur le papier dont les élèves disposent.

Première occurrence, l'enseignante évoque elle-même une des activités préliminaires en faisant coller la définition dont elle ne retient que l'aspect « grandeurs », le mot fonction étant déjà dans l'énoncé : « *Bien ça c'était l'objet de la première activité, vous vous souvenez, avec les histoires de taux* »

d'alcoolémie dans le sang en fonction du temps. Les deux grandeurs c'était donc le temps et le taux d'alcoolémie. »

Deuxième occurrence : *Et donc on va prendre un exemple pour illustrer tout ça. Alors je vais prendre un exemple qui vous est très familier enfin que vous avez déjà travaillé depuis longtemps donc [...] Un élève sollicité lit : L'aire d'un carré dépend de la longueur de son côté. Le professeur reprend : D'accord. L'aire d'un carré dépend de la longueur de son côté. Donc cette phrase-là enfin vous l'entendez depuis de nombreuses années on l'a déjà travaillée mais effectivement on n'a jamais travaillé ça sous la forme de fonction, dans le cadre des fonctions. Donc c'est ce qu'on va faire maintenant. Alors quand on dit l'aire d'un carré dépend de la longueur de son côté, quelles sont les grandeurs qui sont mises en jeu dans cette situation-là ? Quelles sont les deux grandeurs ?*

On voit bien la volonté de relier l'ancien et le nouveau sur un exemple, mais c'est l'enseignante qui décortique ce qu'il y a à reconnaître dans l'expression générale donnée, en soulignant qu'il y a un changement de point de vue (non motivé³³), et en privilégiant au début, comme précédemment, l'énoncé de ce que sont les grandeurs. De fait les élèves ne comprennent pas cette restriction, un dit même : *Ben y a longueur fois largeur...* n'aurait-il pas pensé à la relation d'abord ?

Alors l'enseignant reprend :

Quand on dit l'aire d'un carré dépend de la longueur de son côté je voudrais qu'on réexplique ça à l'aide du paragraphe qu'on vient de lire. Donc ça veut dire que quand dans cette phrase là il me semble qu'il y a des grandeurs en jeu, je voudrais que vous me disiez simplement quelles sont les grandeurs en jeu. Il n'est toujours pas question de dépendance ni de relation...

Les élèves répondent comme attendu. L'enseignante reprend encore

Il y a bien deux grandeurs en jeu, y a la longueur du côté et y a l'aire du carré. Quelle est parmi ces deux grandeurs, celle qui arrive en premier et donc celle qu'on va considérer comme la variable ? Toujours pas de dépendance explicite mais introduction d'un « ordre », on reste dans une mise en correspondance formelle, guidée par l'enseignante, entre l'énoncé général et le cas choisi. On peut relier cela au fait qu'il n'y a aucun besoin mathématique pour les élèves d'introduire l'objet fonction ; il reste donc une part d'arbitraire !

Après une réponse d'élève jugée conforme, reprise de l'enseignante : *la longueur du carré, quand on a un carré on a d'abord la longueur et ensuite à partir de cette longueur l'aire, qu'on va considérer comme deuxième grandeur, et donc comme l'image de la variable. D'accord ?*

Enfin l'enseignante introduit l'idée de variation d'abord affaiblie : *Alors, et est-ce que vous comprenez que, quand on prend un carré que l'on transforme, c'est-à-dire que, pour lequel le côté change, ben est-ce que vous êtes d'accord que son aire va changer ? Et donc quand on fait varier la première grandeur, le côté du carré, eh bien la deuxième grandeur varie ? C'est ce qu'on a expliqué de façon générale juste au-dessus. Donc il s'agit bien d'une histoire de fonction, il y a bien là-dessous une histoire de fonction... Une proximité langagière est faite ensuite (entre « en fonction de » et « être fonction de »...).*

Puis l'enseignante exprime encore la même chose avec le mot fonction, après plusieurs reformulations (qu'on ne recopie pas ici, pas plus qu'on ne recopie les répétitions à l'identique liées au fait que l'enseignante dicte) et continue le cours dans la foulée, à partir de *. Elle reprendra l'exemple de l'aire pour contextualiser ce paragraphe.

Lorsque le côté du carré varie virgule l'aire varie. Pour décrire ces variations on utilise une fonction pour laquelle pour laquelle la longueur du côté est la variable et l'aire son image. Donc avec cet exemple-là en fait on traduit en langage fonctionnel ce qu'on connaissait déjà.

³³Et difficilement motivable !

**On peut décrire une fonction à l'aide d'une phrase ou d'une expression algébrique celle qui exprime l'image à l'aide de la variable. On nomme f la fonction, x la variable, $f(x)$ l'image de la variable. On dit que f est une fonction qui à tout nombre x fait correspondre le nombre $f(x)$ [...].*

Un commentaire méta (type méta 2 ou 3) est encore donné à la suite : *Donc effectivement de façon générale, c'est-à-dire, qu'est-ce que ça veut dire de façon générale, c'est quand on n'est pas dans une situation, par exemple quand on parle du temps, ben souvent la variable on l'appelle pas x , la variable, on l'appelle t , t comme temps. D'accord. Mais de façon générale, hors contexte particulier, et bien effectivement une fonction³⁴ c'est f comme fonction, la variable c'est x , et puis son image, eh bien, je vous rappelle, son image hein c'est donc un nombre qui dépend de x , c'est donc f qui dépend de x .*

On voit donc un grand niveau de généralité dans la définition³⁵, généralité associée au seul formalisme dans le commentaire ci-dessus, et une contextualisation très guidée par l'enseignante ; elle donne la première place à la reconnaissance des grandeurs en jeu (dans les deux exemples) ; elle n'explicite pas tous les liens, ne revient pas sur la dépendance, ni sur la relation mais directement sur la variation – sauf que le mot variable, attaché à grandeur, est pris dans un sens un peu particulier.

Qu'est-ce qui peut résonner avec des connaissances déjà-là des élèves, qu'est-ce qui peut se constituer en connaissances proches de la définition, voire en connaissance de la définition ? Il est difficile de répondre, certes certains élèves suivent localement l'enseignante (réponses attendues), mais comme c'est un changement de point de vue qui est développé, sans motivation autre qu'interne (vu les programmes en particulier), la question demeure de la mise en relation de la définition abstraite et de ce qui peut s'en rapprocher, même imparfaitement, les programmes de calcul déjà vus par exemple. Justement ce n'est pas un programme de calcul que l'enseignante a choisi mais un exemple encore plus ancien, sans doute familier, mais sur lequel le caractère formel du passage apparaît peut-être encore plus. Il n'y a ainsi pas vraiment de traces de ce que les fonctions peuvent généraliser ou unifier, de ce qui pourrait faire écho à des connaissances déjà-là, seul est en jeu le caractère formel d'une définition qui reste en quelque sorte relativement isolée des connaissances précédentes.

Dans la suite du cours l'enseignante reprend, comme dernier aspect, la représentation graphique des fonctions. On peut se demander si elle modifie la proximité en jeu. En fait elle donne la définition suivante : la courbe représentative est formée des points de coordonnées $(x, f(x))$ – ce qui est complètement nouveau – et fait vérifier sur l'exemple que certains points, dont les élèves ont calculé les coordonnées de cette manière, sont sur la courbe qu'elle leur a donnée. Dans ce cas les élèves peuvent appliquer à leur exemple contextualisé un procédé technique, peut-être un peu obscur dans le cas général. Ils savent calculer $f(x)$ et ils savent placer les points de coordonnées connues. Est-ce pour autant qu'ils vont retenir la définition de la courbe représentative ? Y a-t-il une proximité avec les courbes qu'ils connaissent déjà ?

b) un deuxième exemple dans la classe de B (un dernier exemple figure en annexe 6)

Là encore après des activités sur des processus de calcul précis, repris en début d'heure, l'enseignant propose la définition suivante, précédée des commentaires généraux que nous indiquons. Ce que dit l'enseignant est indiqué en italique. La partie soulignée est ce qui est écrit au tableau en même temps. « ... *On écrit un programme de calcul sous la forme d'une fonction. C'est une écriture particulière d'un programme de fonction.* »

La première idée est lancée : on généralise les programmes de calcul...

Les programmes de calcul ça peut servir à beaucoup de choses notamment après à faire des représentations graphiques et ça vous permet de faire des calculs. Alors en 3° on ne va pas aller très

³⁴L'enseignante écrit en même temps au tableau les symboles cités.

³⁵Fonction définie par étapes.

loin dans les calculs et on va pas aller très loin dans le type de fonctions. Les fonctions c'est très utilisé en économie par exemple, dans plein de domaines.

Deuxième idée : ça sert (mais c'est seulement une affirmation !)

Au départ j'ai un nombre à l'arrivée j'en ai un nombre. Là on voit des généralités c'est-à-dire des bases. Bon donc I Définition- Vocabulaire. Tout ce qu'on a dit là en français on va l'écrire maintenant sous forme mathématique donc ça va être toujours le problème de traduire la langue par les notations mathématiques. C'est la partie presque plus difficile.

Troisième idée : la définition est une traduction en notation mathématique.

Donc définition On appelle fonction numérique on appelle fonction numérique f notée f une fonction numérique c'est un processus de calcul c'est la machine, donc on appelle fonction numérique f un processus de calcul processus de calcul qui qu'est-ce qu'il fait ce processus de calcul qui prend un nombre x à un nombre x qui associe un unique nombre. Alors pour être précis je devrais dire au plus un nombre mais pour l'instant je dis un unique nombre. J'ai un nombre en entrée, à la sortie j'en ai un seul, je pourrais ne pas en avoir donc c'est un processus de calcul qui à un nombre x associe c'est ce qui sort de la machine un unique nombre noté ce nombre on le note f parenthèse x ($f(x)$) parenthèse et ça se lit se lit, cette notation ça se lit (f de x). Donc ici c'est juste une notation.

On voit que la généralité ne porte d'abord que sur le fait de mettre tous les programmes de calcul « dans le même sac » (celui des fonctions), avec le mot « un » (remplaçant le mot quelconque), et de donner une nouvelle notation et un nouveau nom à cette chose générale. Tout de suite après l'enseignant associe à ce programme de calcul non précisé ce qu'on sait déjà sur les exemples déjà vus, ce qui est commun à tous même si ce n'est pas exprimé ainsi, en rappelant l'association à un nombre (là encore le « un » remplace le quelconque) un autre nombre. Il ajoute cependant que ce nouveau nombre, à la sortie du processus, doit être unique, ce qui n'était pas précisé les années précédentes (car vérifié automatiquement). Mais l'enseignant introduit assez subrepticement une autre généralisation, à savoir qu'on peut ne pas connaître explicitement le programme, ce qui est nouveau, et reprend les notations.

Vous avez souvent énormément de mal avec ça. Le nombre d'arrivée parce que je ne sais pas exactement, en général, je ne sais pas ce que fait la machine. Là j'ai écrit une définition générale. Je ne sais pas exactement quelles sont les opérations de la machine. Quand je ne connais pas les opérations c'est-à-dire quand moi je ne peux pas vous dire ce qui va sortir, le nombre d'arrivée il faut bien que je le note. J'aurais pu l'appeler y , j'aurais pu l'appeler z . On le note f pourquoi on le note f , f ben c'est le nom de la machine et puis l'arrivée le nombre d'arrivée il est bien fonction de x .

Première contextualisation :

Rappelez-vous tout à l'heure $2x + 3$ c'était une expression qui dépendait du nombre de départ. Donc le f c'est juste pour nommer la machine et le x parce que je suis en relation avec ce que j'avais au départ. C'est juste une notation. D'accord ?

Suit une digression sur l'unicité de l'image et la non unicité de l'antécédent. (Alors antécédent par contre je peux avoir je peux avoir effectivement... . Je vais l'écrire dans les remarques. Je peux très bien avoir aussi 3 et aussi l'envoyer sur 7. C'est-à-dire qu'un nombre peut avoir 2 antécédents). Puis digression sur les fonctions de deux variables à partir d'une question d'élève peu claire.

Reprise : Donc fonction numérique d'une variable, j'aurais pu préciser d'une variable, je ne l'ai pas fait donc au départ je prends un nombre x et j'associe un unique nombre que je note $f(x)$. D'accord ? Tout cela on le remplace par cette notation f : f c'est le nom de la machine x c'est le nombre de départ, qu'est ce qui se passe dans la machine et à l'arrivée j'ai quoi ?

E : le résultat.

P : et le résultat comment on l'a noté

E : $f(x)$

P : f de x . Très bien. Donc on a un résultat qui dépend du nombre de départ. Cette notation c'est quand je ne sais pas les opérations que je fais au milieu, sinon j'aurais écrit $2x + 3$ mais évidemment c'est un cas particulier $2x + 3$.

Ici le cas particulier est signalé explicitement, en regard du général qu'il illustre.

Bon vocabulaire toujours ... fonction $f(x)$ s'appelle image de x nombre d'arrivée par f donc je précise toujours le nom du processus. Le processus il peut s'appeler h , il peut s'appeler g . Les processus c'est souvent c'est généralement des lettres minuscules. $f(x)$ c'est l'image de x par la fonction f et x c'est quoi ? C'est l'antécédent. C'est l'antécédent de qui ? très bien c'est l'antécédent de $f(x)$ par f . Là je parle de nombres quand je quand j'écris $f(x)$ c'est un nombre hein; Ça peut être 3, ça peut être 4, ça peut être 7. Rappelez-vous ce qu'on a fait ce matin, x est l'antécédent de $f(x)$ par f .

Digression : $f2x$... l'enseignant explique le « de » de $f(x)$ qu'un élève avait entendu comme 2.

Ensuite l'enseignant explique qu'un nombre peut n'avoir pas d'image et prend un exemple, rencontré le matin (avec une racine).

La définition est donc moins générale que dans le premier exemple, la contextualisation ne porte que sur la notation et le calcul de l'image.

Qu'est-ce qui peut résonner avec des connaissances déjà-là des élèves, qu'est-ce qui peut se constituer en connaissances proches de la définition, voire en connaissance de la définition ?

4) Un exemple de proximités horizontales

Il s'agit, dans cette partie de séance en classe de seconde, de réintroduire les fonctions affines. L'enseignante C écrit au tableau les définitions en ajoutant des commentaires oraux et en questionnant les élèves sur le détail de ce qui est travaillé.

On constate, en effet, dans ce cours beaucoup de petites « questions-réponses » professeur/ élèves, qui permettent d'animer le cours, en associant les élèves – qui répondent effectivement (d'où l'idée de proximité). Cependant les élèves ne demandent pas tout la parole. Les questions, dont souvent la réponse ne demande que quelques mots, portent sur un petit calcul formel ou du vocabulaire ancien, mais toujours hors contexte, et placent ainsi les élèves au même niveau de généralité que ce qui est travaillé par l'enseignant. Cela peut permettre de vérifier que les élèves suivent ce qui est développé, ou de les réveiller, mais de manière « interne », locale, isolée, voire limitée, c'est toujours validé et repris, mais sans aucune référence aux exemples.

Dans les extraits de transcriptions qui suivent, nous mettons en italique ce qui est transcrit, nous soulignons ce qui est écrit au tableau en même temps et ajoutons entre parenthèses nos commentaires et notre interprétation éventuelle en termes de proximités de ces interventions –p.h. remplace proximité horizontale.

Donc maintenant nos fonctions on va les définir par leurs expressions algébriques.

a et b deux réels donnés, la fonction affine est la fonction définie par, donc c'est « à x associe » donc c'est l'image de x par f donc $f(x) = ax + b$.

(Explicitation interne) *Donc mon, ma variable x va être multipliée par le réel a et on va lui ajouter le réel b . Alors il y a deux cas particuliers que vous avez sûrement vus les années précédentes, l'année précédente, le cas où le réel a vaut 0 (elle écrit $a = 0$) ça fait 0 fois ma variable, (question de calcul*

sur une formule générale, proximité horizontale – p.h.) *ça fait toujours....* (reprise de la question : p.h.) *Quand on multiplie par 0*

E : 0

P : Ça fait toujours 0 (validation et reprise du résultat demandé : p.h.) *et il va me rester donc* (suite de la question : p.h.)

E : b

P : b donc $f(x) = b$ (validation reprise et nouvelle question, de vocabulaire ancien : p.h.) *comment ça s'appelle ? Une fonction ? C'est une fonction affine mais c'est une fonction affine particulière* (elle écrit on dit que f est)

E : Pas linéaire

P : effectivement pas linéaire oui

E : je crois qu'elle est parallèle à l'axe des

P : à l'axe des (nouvelle question de vocabulaire ancien : p.h.)

E : des abscisses

P : des abscisses (validation et reprise : p.h.) *Vous savez Sa courbe représentative est parallèle à l'axe des abscisses. On dit que la fonction est* (reprise de la question de vocabulaire : p.h.) *C'est une fonction qui pour toute valeur de x donne toujours b* (explicitation, avec le mot « toujours »). *On appelle ça une fonction* (reprise de la question de vocabulaire ancien : p.h.)

E : Constante.

P : constante (validation et reprise : p.h.) (P écrit f est une constante) *maintenant si b vaut 0* (elle écrit si b vaut 0) *on dit que f est* (nouvelle question, non précisée : p.h.)

E : linéaire

P : Oui. Voilà ça c'est ma fonction linéaire (elle écrit linéaire) (en écho à un dire d'élève). *Elle passe par rien du tout ma fonction par contre sa courbe représentative va passer par* (nouvelle question sur les représentations graphiques des fonctions linéaires – ancien : p.h.)

E : ...

P : par l'origine du repère (validation et reprise : p.h.) *Donc ça voyez c'est deux cas particuliers du cas affine. Alors maintenant notre plan d'étude pour la fonction. On a dit, quand on a une fonction on a son expression. On pose toujours en premier la question. Quelle est la première question* (nouvelle question liée à la démarche générale en cours d'acquisition à savoir par cœur : p.h.) ?

E : ensemble de définition....

Conclusion de la deuxième partie

Du côté des élèves, tout ce que nous avons développé suggère d'abord que ce qui est dans le cours et son rôle possible varient selon les contenus mathématiques visés. Le cours serait un réservoir de pseudo-concepts à retenir, et/ou de modèles de démonstrations à comprendre, et/ou d'exercices-types à imiter, et/ou de méthodes à appliquer mais aussi, quelquefois, l'occasion d'évoquer des aspects de la démarche scientifique globale associée, de provoquer des interrogations théoriques ou en termes de justifications (technologiques) et d'y répondre. Les élèves utiliseraient d'abord le cours pour retenir des mots ou idées-clefs, d'où l'importance des proximités horizontales, avant de construire, grâce à l'ensemble du scénario (et aux exercices ou TD), les connaissances attendues, mettant en jeu

davantage les autres proximités. Selon le niveau de conceptualisation en jeu, on peut viser des connaissances mobilisables ou disponibles, que ce soit en termes d'outils et/ou d'objets.

Plusieurs conditions joueraient, selon les cas, pour que ces éléments puissent être appropriés, transformés par chaque élève en connaissances individuelles (éventuellement disponibles) :

- l'inscription des moments d'exposition dans le reste du scénario, en termes de cohérence, de liens et de dynamiques, mettant notamment en jeu les activités des élèves, avant ou après, et les relations que peut faire à cette occasion l'enseignant avec le savoir,
- le déroulement choisi et les explicitations des passages du contextualisé au décontextualisé ainsi que les reformulations, reprises, répétitions et commentaires sur le décontextualisé, impliquant plus ou moins les élèves,
- les logiques globales récurrentes, imbriquées, procédurale ou épistémologique, développées à l'oral, sur l'ensemble d'un chapitre, voire sur l'année.

En particulier ce serait de la qualité et des variétés du jeu des proximités que dépendrait la richesse de ce qui peut être mis en mémoire et la possibilité de mobiliser correctement les savoirs correspondants. Les logiques globales ainsi que les reformulations et les autres commentaires, pourraient contribuer à des formes de motivation pour certains élèves, donnant sens à une démarche d'ensemble, impliquant des liens et des aspects heuristiques ou épistémologiques, ou facilitant les mises en fonctionnement en rassurant certains élèves, côté procédural. Cela dit les différences entre les élèves amènent sans doute à choisir des équilibres adaptés à une classe donnée – ce qui n'implique pas de renoncer complètement à une des deux logiques.

Soulignons que les évaluations peuvent ne porter que sur certains aspects travaillés au cours du scénario, ce qui ne veut pas dire que l'ensemble n'ait pas contribué à la construction des connaissances, notamment dans une visée à moyen terme – mais ce qui peut peser sur l'écoute des cours, par une minoration de fait, côté élèves, de ce qui ne saurait être évalué. Cela peut retentir, à force, sur les choix de l'enseignant.

Côté enseignant, l'efficacité d'un cours dépendrait ainsi à la fois

- de la clarté des objectifs côté enseignant et de leur mise en actes plurielle choisie pour le scénario, en relation avec le relief sur la notion (nature des notions et activités d'introduction possibles, difficultés des élèves et ordre entre exercices et cours)
- et des ajustements conjoncturels aux réactions des élèves, sources des proximités développées pendant le cours...

Nous avons distingué des proximités ascendantes, entre des activités avant un cours et ce cours, souvent reliant des connaissances anciennes et des éléments nouveaux ; descendantes, entre cours et activités ; et horizontales, sans changement de niveau de généralité ou de décontextualisation, souvent « méta ».

Les quelques exemples que nous avons donnés montrent une diversité certaine, à la fois des cours et des déroulements, même si dans les deux classes de collège, le cours est précédé d'activités assez semblables. Notre étude du relief de la notion de fonction au collège nous avait amené à pointer la difficulté d'introduire les courbes représentatives des fonctions à partir des connaissances déjà-là sur les graphiques, pour amener les élèves à transférer sur les fonctions les propriétés connues des graphiques. Nous avons constaté que l'enseignant B a du mal à établir la proximité graphes/représentations graphiques, à rapprocher des connaissances anciennes des élèves le fait que les courbes sont l'ensemble des points $(x, f(x))$ – nous sommes peut-être en présence d'une proximité relativement « impossible » d'où la difficulté de l'enseignant, d'autant que les élèves sont habitués à cette démarche de rapprochement. En revanche cette habitude fait que les enseignants créent ou s'emparent de toutes les occasions de proximités ascendantes ou descendantes. Les questions que nous nous sommes posées relèvent de la portée (et des limites) de ces proximités pour les élèves. Dans quelle mesure peut-on faire apparaître, au cours du rapprochement, ce qui est généralisé ? Dans quelle mesure, quand on part du cours, peut-on faire apparaître ce qui doit être contextualisé ?

Il manque ainsi à la fois une étude de davantage de cours, et une mise en relation directe avec des effets sur les élèves – ou au moins des hypothèses à ce sujet. Des recherches plus précises seraient à mener, en faisant varier les contenus étudiés, les élèves, les enseignants, en interrogeant les élèves à la sortie d'un cours, en comparant des productions d'élèves et leur cours...

Restent encore bien des questions et notamment celles-ci : Quel statut donner aux différents savoirs dans la scolarité obligatoire ? Peut-on organiser différemment dans la forme et dans le temps la transmission des savoirs sans dénaturer ce statut, voire en l'améliorant ?

Références des deux premières parties

C. Allard Thèse en cours sur l'institutionnalisation dans le primaire (fractions)

S. Bridoux (2011). *Enseignement des premières notions de topologie à l'université - Une étude de cas*. Thèse de doctorat de l'Université Paris Diderot (Paris 7).

G. Brousseau (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La pensée sauvage.

D. Butlen, M. Pezard (2003). Étapes intermédiaires dans le processus de conceptualisation. *Recherche en Didactique des mathématiques*, 23.1, 41-78, Grenoble, La Pensée sauvage

Y. Chevallard (1991). Sur la déconcertation cognitive. *Interactions didactiques*, 12, 27-51.

C. Constantin (1994). *Quelles alternatives pour l'enseignement du calcul algébrique au collège ?*, Thèse de doctorat de l'Université Aix-Marseille

R. Douady (1987). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques*, 7/2, 5-31.

E. Mounier (2010). *Une analyse de l'enseignement de la numération au CP. Vers de nouvelles pistes*. Thèse de doctorat de l'Université Paris-Diderot (Paris7).

M. Pariès (2004). Comparaison de pratiques d'enseignants de mathématiques. Relations entre discours des professeurs et activités potentielles des élèves. *Recherches en didactique des mathématiques* 24, 2-3, 251-284.

M. Pariès, N. Pouyanne, A. Robert, M. Rogalski, E. Roditi (2007) Mettre du relief sur les mathématiques à enseigner au collège et au lycée - quelques exemples. *Document pour la formation d'enseignants de mathématiques (bleu) n°9*, IREM Paris-Diderot.

M.J. Perrin (1992) *Aires de surfaces planes et nombres décimaux. Questions didactiques liées aux élèves en difficulté aux niveaux CM-6ème*. Thèse d'état université Paris 7.

A. Robert, N. Pouyanne (2004) Formateurs d'enseignants de mathématiques du second degré : éléments pour une formation. *Document pour la formation d'enseignants de mathématiques (bleu) n°5*, IREM Paris-Diderot.

A. Robert (1998). Outils d'analyses des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université, *Recherches en didactique des mathématiques*, 18/2, 139-190.

A. Robert, F. Vandebrouck (2014) Proximités-en-acte mises en jeu en classe par les enseignants du secondaire et ZPD des élèves : analyses de séances sur des tâches complexes. *Recherches en didactique des mathématiques* 34 2-3 239-285.

I. Tenaud (1991) *Une expérience d'enseignement de la géométrie en Terminale C : enseignement de méthode et travail en petits groupes*. Thèse de doctorat, Université Paris 7.

G. Vergnaud (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, 10.2 , 133-170.

Troisième partie : en première année d'université dans des cursus scientifiques (L1) (Bridoux, Grenier-Boley, Hache)

Introduction

Les analyses qui suivent permettent d'illustrer et de prolonger le développement théorique précédent grâce à la comparaison de cours de première année d'université scientifique sur les limites de suites et de fonctions (réelles) : on met en regard le cours d'un manuel, un cours en amphi filmé, et une vidéo de type FAD (formation à distance). Des caractéristiques de chaque support sont dégagées. En particulier il semble que seul le cours en amphi soit l'occasion de développer les liens ancien/nouveau et d'aborder les structures logiques globale et locale, sur des démonstrations précises. Dans la suite et sauf mention contraire, quand nous parlerons de la notion de « limite » de suite ou de fonction, cela signifiera la « notion mathématisée formelle quantifiée de limite ».

1) Contexte du travail

Dans le cadre de nos recherches sur l'enseignement supérieur³⁶, nous nous sommes demandés à quoi pouvait servir le cours magistral, donné en amphi, pour les étudiants. En particulier, comment s'insère le cours magistral dans le travail et l'apprentissage des étudiants ? Ce questionnement très général est motivé par plusieurs éléments. Tout d'abord, le cours en amphi engendre probablement encore moins d'interactions entre l'enseignant et les étudiants qu'au lycée ou au collège, notamment en raison du nombre important d'étudiants qui sont en général présents au cours. Au niveau universitaire, les étudiants peuvent également avoir accès à de nombreuses ressources qui leur donnent directement accès au texte du savoir, comme des livres, des photocopiés, des vidéos de cours en ligne... La présence au cours magistral n'étant, de plus, pas obligatoire, il nous a semblé pertinent de nous intéresser à ce que les étudiants peuvent retirer de ce type de cours.

De manière à préciser ce questionnement, nous nous sommes centrés sur la notion de limite (suite et fonction) qui est une notion clé de l'enseignement de l'Analyse à l'université. Elle est en effet introduite en L1 dans de nombreux pays et son enseignement est source de difficultés récurrentes chez les étudiants en première année universitaire (par exemple, Bridoux (2015), Robert (1982) Przenioslo (2005)). Nous revenons tout d'abord sur l'enseignement de la notion de limite au lycée et à l'université (en France et en Belgique) pour mieux comprendre quels en sont les enjeux et quelles sont les difficultés des étudiants. Ce travail nous permet de dégager, *a priori*, des occasions de développer des proximités dans les cours.

2) Quelques éléments de relief sur les notions de limites formalisées

La notion de limite d'une suite numérique apparaît pour la première fois dans la classe de première au lycée (programme de l'année 2010 en France). Les programmes précisent bien que la définition formelle n'est pas donnée à ce stade de l'enseignement. La notion est donc introduite de manière empirique à partir d'exemples d'expérimentations logicielles, d'études d'algorithmes, etc. Les suites arithmétiques et les suites géométriques sont étudiées, pour lesquelles la convergence est aussi abordée de manière intuitive, dans le cas d'une suite croissante non majorée, on peut déterminer un rang à partir duquel tout terme de la suite est supérieur à un nombre donné. La notion de limite de fonction apparaît aussi en classe de première au lycée dans le chapitre « Dérivation » : comme dans le cas des suites, le programme stipule qu'« on se contente d'une approche intuitive de la notion de limite finie en un point » et qu'on n'en donne pas de définition formelle.

³⁶ La recherche présentée ici trouve son origine dans les travaux du groupe « Enseignement supérieur » du LDAR (Université Paris Diderot-Paris 7).

Dans la classe de terminale de la série scientifique, les notions de limite sont quelque peu approfondies. D'une part, pour définir le fait qu'une suite (u_n) tend vers un réel l quand n tend vers $+\infty$, le programme autorise par exemple la formulation « tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang » ; le fait que (u_n) tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ s'exprime par « tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang ». D'autre part, les notions de limite finie ou infinie d'une fonction en un point ou en l'infini sont introduites avant d'en venir à la notion de continuité. Cependant, que ce soit pour la notion de limite de suite ou celle de limite de fonction, les tâches proposées aux élèves relèvent en général de l'application de techniques algébriques opératoires. D'ailleurs, cet aspect est confirmé dans les programmes où on peut lire que « le travail réalisé sur les suites est étendu aux fonctions, sans formalisation excessive. L'objectif essentiel est de permettre aux élèves de s'approprier le concept de limite, tout en leur donnant les techniques de base pour déterminer les limites dans les exemples rencontrés en terminale ». Soulignons qu'il n'y a pas besoin d'utiliser la définition formalisée pour résoudre ces exercices.

À l'université, en revanche, la définition formelle en $\varepsilon - N$ de la notion de limite de suite et celle en $\varepsilon - \alpha$ de la notion de limite de fonction apparaissent rapidement dans les cours. Même si plusieurs caractérisations sont possibles (écrire les quantifications dans la langue naturelle ou avec des symboles, présence explicite ou non d'une implication,...), c'est souvent en termes d'inégalité que la définition est donnée, comme dans les exemples suivants. Une suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel l si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon) \text{ (Analyse MPSI, Monier, 2006)}$$

Une fonction f admet une limite finie l en $a \in \mathbb{R}$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \forall x \in Df, |x - a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon \text{ (Mathématiques Tout-en-Un, Dunod, 2007)}$$

Les quantifications présentes dans ces caractérisations, l'usage (ou non) des parenthèses et du symbole d'implication, tout comme l'emploi d'une inégalité avec une valeur absolue, font que ces définitions sont porteuses d'un formalisme complexe à ce niveau d'enseignement. De plus, il semble difficile de les introduire en s'appuyant sur les connaissances anciennes (même intuitives) des étudiants acquises au lycée puisque les notions formelles de limite n'y ont pas ou peu été travaillées, que le besoin de telles définitions ne s'est pas fait sentir, et que, si on se réfère aux programmes, lorsqu'une définition est donnée, elle n'est pas formulée de la même manière dans les deux institutions (lycée et université). En ce sens, ces deux notions de limite sont porteuses d'un nouveau formalisme qui généralise les exemples étudiés au lycée tout en unifiant la notion de limite dans un cadre général. Les notions de limite de suite et de fonction sont donc des notions formalisatrices, unificatrices et généralisatrices (notions FUG) au sens de Robert (1998)³⁷. Comme Robert l'explique, ce type de notion est difficile à introduire car la distance ancien-nouveau est grande. Elle souligne ainsi la difficulté à trouver un problème initial à proposer aux étudiants où la notion de limite apparaîtrait comme l'outil de résolution optimal, les amenant ainsi à écrire de manière autonome la (nouvelle) définition formelle tout en lui donnant du sens. Il y a peu d'espoir de mettre en place des proximités ascendantes naturelles.

Une fois la définition formelle introduite à l'université, elle est en général utilisée pour étudier les premiers exemples, puis pour démontrer quelques résultats classiques comme l'unicité de la limite ou les règles de calculs (en partie déjà connues) sur les limites. Compte tenu de la complexité de la structure logique de la définition, ce type de travail nécessite d'utiliser à bon escient des connaissances en logique élémentaire mais aussi sur l'ordre dans les réels pour manipuler les inégalités. Nous savons que ces connaissances sont souvent peu disponibles en première année d'université (Dieudonné et al., 2011). Les étudiants sont donc d'emblée confrontés à des tâches complexes pour eux. Cela nous amène à penser qu'il est difficile de trouver des premières tâches qui seraient simples et isolées³⁸,

³⁷ Voir aussi à ce sujet l'introduction de ce cahier.

³⁸ Ces tâches sont des applications immédiates (définition, propriété...) des connaissances des étudiants.

permettant aux étudiants de se familiariser avec l'usage de la notion formalisée donnée en cours. Même les exercices d'application immédiate de la définition ne sont pas immédiats pour les étudiants (on retrouve un résultat de Bridoux (2011) qui semble spécifique de certaines notions FUG). Ainsi s'il y a proximité descendante, entre cours et exercices, elle devra mettre en jeu des explicitations à réfléchir.

Restent aussi les proximités plutôt horizontales...

3) Nature des analyses réalisées et méthodologie

Compte tenu des spécificités de la notion de limite qui viennent d'être mises en évidence, nous avons fait l'hypothèse que le rôle de l'enseignant est particulièrement important au moment de l'introduction de la notion, notamment pour amener les étudiants à lui donner du sens, c'est-à-dire en comprenant ce qu'elle traduit et ce dont il y a besoin pour l'utiliser. Cela comprend aussi l'appropriation du nouveau formalisme que la définition contient.

Nous nous sommes donc demandés d'abord ce qui était explicité par l'enseignant, dans le cours magistral, lorsqu'il introduit la définition en tant qu'objet. Quelles sont les occasions, pour les étudiants, de donner son sens à la nouvelle notion, c'est-à-dire comprendre ce que la définition formelle traduit et ce dont il y a besoin pour l'appliquer ? En particulier, qu'est-ce qui est explicité par l'enseignant ? Reformule-t-il la définition avec d'autres mots pour rester « proche » des connaissances approximatives des étudiants et toucher un public plus nombreux ? Donne-t-il des commentaires méta-mathématiques (au sens de Robert et Robinet, 1996) sur son utilisation ? Illustre-t-il la définition avec un dessin ? Ces premières questions sont selon nous l'occasion de dégager des premiers exemples de proximités (plutôt horizontales) dans le discours de l'enseignant.

Pour ne pas nous restreindre au moment de l'introduction de la notion et avoir une vue plus globale sur le scénario choisi par l'enseignant, nous nous intéressons aussi aux premières utilisations de la définition qui sont d'autres moments du cours où des proximités peuvent être mises en évidence. Cela concerne donc les premiers exemples présentés par l'enseignant, puis les premiers résultats et leurs démonstrations. Dans ces moments-là, nous nous demandons plus précisément comment l'enseignant prend en compte, à travers son discours, la structure logique de la définition et comment il prend en charge la reprise des connaissances anciennes, y compris sur les réels ou la logique élémentaire, sollicitées dans ces tâches. Dans quelle mesure peut-on développer, malgré la difficulté déjà signalée, des proximités descendantes ?

Nous proposons ici une comparaison de trois types de supports : un manuel de niveau L1, une vidéo de cours magistral en L1 et une vidéo de type FAD. Cette diversité est un moyen de mieux mettre en évidence les spécificités propres au cours magistral.

Pour étudier les occasions de créer des proximités avec les connaissances des étudiants, nous étudions, pour chaque média, la présence de reformulations de la définition, la prise en compte des connaissances anciennes des étudiants et la prise en compte de la structure globale de la définition, en nous demandant en particulier quels sont les implicites entre écrit et oral dans ce qui est fait : qu'est-ce qui est écrit et pas dit, qu'est-ce qui est dit et pas écrit ?

Nous allons maintenant présenter les analyses relatives à chaque type de média.

4) Étude de manuels et occasions de proximités

Ce qui est recherché

Pour mieux comprendre le rôle des échanges entre l'enseignant et les élèves dans la classe, il nous a semblé pertinent d'étudier un média, ici le manuel, où le professeur est absent. Dans cette situation, le savoir n'est pas présenté oralement par l'enseignant et il n'y a pas non plus d'échanges verbaux comme dans une classe entre l'enseignant et les élèves. Le lecteur est seul face au livre. Dans ce cas, se pose donc la question de la transformation des « connexions » réalisées entre le lecteur et le texte du

savoir en connaissances. Et quelles sont, *a priori*, les occasions de tisser des liens entre l'ancien et le nouveau ? En ce sens, nous pensons pouvoir dégager de la lecture du manuel des occasions de proximités qui pourraient se créer avec le lecteur. Ces proximités, que nous qualifions de « proximités potentielles », peuvent alors devenir, en classe, des proximités qui pourraient être développées par l'enseignant, à étudier. Par exemple, lorsqu'une définition est donnée dans un manuel et qu'elle est ensuite illustrée sur un exemple, il pourrait y avoir une occasion de voir émerger une proximité descendante dans le discours de l'enseignant.

Nous regardons ici le manuel *Mathématiques Tout-en-Un* (Dunod, 2007). Ce manuel couvre le programme de mathématiques de la première année des classes préparatoires économiques et commerciales et concerne principalement la filière scientifique.

Nous nous sommes centrés sur l'étude du chapitre concernant la convergence d'une suite numérique. Nous commençons par une présentation générale du manuel pour situer le chapitre visé dans la progression suivie dans le livre. Comme nous l'avons précédemment expliqué, nous regardons ensuite trois moments clés de l'enseignement de cette notion, compte tenu de sa nature FUG. Le premier moment est l'introduction de sa définition formelle puisque nous savons que d'une part le formalisme qu'elle contient est tel qu'il est difficile de lui donner du sens et que d'autre part il est également difficile de s'appuyer sur les connaissances anciennes des étudiants pour amener la nouvelle définition. Le deuxième moment est la présentation des premiers exemples pour illustrer la notion. Cela nous permet d'étudier les premières utilisations de la notion en tant qu'objet. Le troisième moment concerne les premiers résultats et leurs démonstrations sur la convergence des suites. La définition peut alors être utilisée en tant qu'outil de démonstration. Dans chaque moment, nous essayons de repérer des proximités potentielles avec les connaissances anciennes des étudiants à ce niveau d'enseignement (L1) tout en regardant si la complexité logique de la définition (spécifique de cette notion) est aussi prise en compte.

Présentation générale du manuel

La partie « Analyse » du manuel commence par l'étude des suites et des nombres réels (chapitre 15) puis vient celle de la notion de limite d'une fonction (chapitre 16). La progression suivie dans le chapitre 15 est la suivante : définition de la notion de suite, étude de certains comportements globaux des suites (monotonie, suite majorée/minorée/bornée), définition de la convergence d'une suite et unicité de la limite (avec démonstration). Quelques exemples sont alors donnés. Viennent ensuite les premiers résultats de convergence, comme par exemple la convergence de deux suites qui ne diffèrent que par un nombre fini de termes, le lien entre la convergence des suites (u_n) , (u_{2n}) et (u_{2n+1}) et le fait que toute suite convergente est bornée (la question de la réciproque de cette propriété n'est pas évoquée). Les limites infinies sont ensuite étudiées, puis les opérations sur les limites.

Une remarque importante est à formuler à propos de la section sur les nombres réels. Celle-ci étant abordée après les suites, le livre se prive d'utiliser des notions telles que la partie entière d'un réel dans la section sur les suites, puisque ces notions ne seront définies qu'après. Ce choix peut avoir des conséquences sur la manière de manipuler la définition de convergence. Nous revenons sur cet aspect dans la suite du texte.

La définition de convergence

La section qui traite des suites convergentes démarre par la définition suivante et fixe ensuite les notations (p.322):

Une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite convergente s'il existe un réel l tel que

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} (n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon).$$

On dit que l est la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l .

On note $l = \lim u$ ou $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Une suite qui ne converge pas est dite divergente.

La caractérisation choisie pour définir la notion de convergence vers un réel n'utilise que des symboles mathématiques. Elle n'est accompagnée d'aucun commentaire explicatif, n'est pas illustrée par un dessin. Telle qu'elle est présentée, il nous semble difficile d'établir ici un rapprochement avec les connaissances « déjà-là » d'un étudiant de L1 qui tenterait de s'approprier seul la notion en lisant ce manuel. Celui-ci aurait en effet complètement à sa charge de donner du sens au formalisme utilisé dans la définition. En anticipant sur ce qui va suivre, on peut déjà se dire que dans un amphithéâtre, en cours magistral, l'enseignant qui introduirait cette définition l'exprimerait sans doute à voix haute tout en l'écrivant. L'étudiant aurait alors au moins l'occasion d'entendre comment le professeur prononce cette phrase mathématique uniquement constituée de symboles. Nous avons également pu visionner des vidéos (cf. section suivante) où l'enseignant commente la définition en mettant en évidence l'ordre des quantificateurs par exemple, ou en la reformulant (souvent ces commentaires sont dits et pas écrits), développant ainsi une proximité horizontale.

Remarquons aussi que la notation « $\lim$ » est utilisée avant de démontrer l'unicité de la limite alors qu'un enseignant pourrait très bien amener la question de choisir une notation pour exprimer qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel l en relation avec l'unicité de la limite lorsqu'une suite est convergente.

Deux remarques suivent la définition dans le manuel. La première consiste à reformuler la définition précédente en termes d'intervalles (comme le préconisent les programmes du lycée) :

La définition signifie que, pour tout $\varepsilon > 0$, tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, ou encore tous les termes de la suite sauf un nombre fini, sont dans l'intervalle $[l - \varepsilon; l + \varepsilon]$.

Dans cette nouvelle formulation, seul le quantificateur universel sur ε apparaît explicitement avec des mots (et non plus en utilisant le symbole mathématique du « pour tout »). Cette reformulation est une occasion de donner un certain sens à la définition précédente. Cependant, aucune explication n'est donnée sur le passage des symboles présents dans la définition aux expressions utilisées ici, comme « tous les termes de la suite à partir d'un certain rang », ni sur le passage de l'inégalité à la notion d'intervalle. De nouveau, il n'y a ici aucune trace d'une tentative de connexion avec les connaissances du lecteur, c'est à lui de puiser dans ses connaissances ce qui permet de passer d'une caractérisation à une autre. Dans un cours effectif, le passage de la définition à la caractérisation en termes d'intervalles pourrait être accompagné de commentaires explicatifs de l'enseignant, notamment de rappels sur la manipulation d'inégalités avec valeur absolue, voire d'un dessin³⁹ pour les illustrer et serait ainsi l'occasion d'une proximité horizontale.

La deuxième remarque concerne le fait que la caractérisation en termes d'intervalles est aussi vérifiée pour des intervalles ouverts, avec une tentative de justification :

Comme tout intervalle ouvert contenant l contient un intervalle de la forme $[l - \varepsilon, l + \varepsilon]$, la propriété est vérifiée pour tout intervalle ouvert contenant l : la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l si, pour tout intervalle ouvert I contenant l , tous les termes de la suite à partir d'un certain rang sont dans I .

Remarquons que la justification ne porte que sur la transformation des intervalles, la question de savoir si le même entier n_0 convient selon qu'on travaille avec un intervalle ouvert ou un intervalle fermé n'est pas abordée. Elle est de nouveau laissée à la charge du lecteur.

Ainsi, ce moment de première rencontre avec la définition formelle de convergence offre sans doute des occasions de proximités horizontales à travers les reformulations qui sont présentées, les symboles

³⁹ Robert (1983) a élaboré une ingénierie didactique visant à introduire la définition de convergence à partir d'un travail sur la représentation graphique de certaines suites. Une première représentation de la notion en terme de bande autour de la limite dans laquelle les éléments de la suite rentrent à partir d'un certain rang peut émerger de ce travail avec l'aide l'enseignant.

utilisés et les notations introduites mais le manuel ne donne aucun commentaire explicatif sur ces différents passages.

Les premiers exemples

Il s'agit ici d'utiliser la définition pour montrer qu'une suite donnée converge vers un réel l ou est divergente (en montrant que la négation de la définition est vraie). C'est donc en tant qu'objet que la définition est ici utilisée.

Les trois exemples traités (p. 323) sont les suivants : « une suite u constante converge vers u_0 », « la suite $(\frac{1}{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 » et « la suite $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente ».

Nous étudions ici les deux premiers exemples. Pour ce faire, nous recopions tel quel et en italique ce qui est présenté dans le manuel.

Une suite u constante converge vers u_0 . En effet, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout entier n , on a $|u_n - u_0| = 0 \leq \varepsilon$.

Dans la justification, remarquons que les quantifications sont écrites avec des mots et non plus avec des symboles, comme dans la définition. Ce premier exemple pourrait être une occasion de proximité descendante en montrant comment la définition précédente est utilisée pour démontrer le résultat annoncé. Cependant, telle qu'elle est formulée, la justification ne suit pas, à strictement parler, la syntaxe logique de la définition puisque le choix de l'entier n_0 est complètement passé sous silence. C'est donc au lecteur de comprendre en quoi cette justification montre que la définition est bien satisfaite pour les suites constantes. Dans un cours, il est par exemple fréquent que l'enseignant commence par écrire ce qu'il faut montrer avec l'expression « À prouver », permettant ainsi de revenir au fil du raisonnement sur ce qu'on fait. De même, l'enseignant pourrait revenir à la fin sur le travail réalisé et conclure par « on a donc montré que... ». Ici, la justification est d'emblée donnée et aucun retour n'est fait sur le raisonnement qui a été développé pour montrer en quoi il permet de démontrer ce qu'on voulait.

La suite $(\frac{1}{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Nous découpons la présentation du livre :

En effet, soient $\varepsilon > 0$ et n_0 tel que $n_0 \geq \frac{1}{\varepsilon}$.

Cette première ligne soulève selon nous une ambiguïté. En effet, l'expression « soi(en)t » fait classiquement référence à la présence d'un (de) quantificateur(s) universel(s) dans la proposition quantifiée que l'on doit montrer. Or, dans la définition de convergence, c'est un quantificateur existentiel qui précède l'entier n_0 . Le fait de considérer un entier quelconque parmi tous ceux qui sont supérieurs à $\frac{1}{\varepsilon}$ ne met donc pas en évidence la quantification existentielle portant sur cet entier dans la définition puisque cet entier n'est pas explicitement donné. On se contente d'affirmer (implicitement) la possibilité d'en construire un qui satisfait l'inégalité donnée. Cela tient peut-être au fait que pour définir facilement un tel entier positif, il faudrait utiliser la partie entière d'un réel. Or, comme nous l'avons précédemment expliqué, cette notion n'est définie que plus tard, dans la section sur les nombres réels. Nous y revenons juste après.

On a alors, pour tout entier $n \geq n_0$, $0 \leq \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n_0+1} \leq \varepsilon$.

Tout d'abord, remarquons que l'expression « pour tout entier $n \geq n_0$ » ne respecte pas la structure logique choisie dans la définition dans laquelle il y a une implication liant les indices n et n_0 . Ensuite, les inégalités ne sont pas justifiées, de nouveau c'est au lecteur de le faire lui-même. Comme dans l'exemple précédent, on ne revient pas sur ce qu'on a finalement montré.

Nous trouvons enfin une remarque en lien avec la construction de l'indice n_0 (qui renforce ce qui précède) :

L'existence, pour tout réel x d'un entier $n \geq x$, utilisée constamment ici, sera justifiée dans la section 6 sur la partie entière.

Telle qu'elle est proposée, la rédaction de cet exemple ne montre pas une utilisation de la définition qui met en évidence sa syntaxe logique. Dans un cours, l'enseignant pourrait revenir sur l'organisation du raisonnement pour montrer que la définition est satisfaite dans cet exemple, insister sur le vocabulaire à utiliser (par exemple le quantificateur universel donne lieu au mot « soit ») ou encore donner des commentaires explicatifs sur la manière de trouver un entier n_0 qui convient et pourquoi il dépend de ε . Le passage de la définition à l'exemple serait ainsi une occasion de développer une proximité descendante.

Il nous semble de plus que la rédaction proposée ici pourrait ne pas être acceptée par tous les enseignants universitaires s'il s'agissait de la production écrite d'un étudiant de L1, puisque l'entier n_0 n'est pas explicitement donné et que les inégalités ne sont pas justifiées. Dans un cours, l'enseignant peut signaler qu'il ne justifie pas tout, que certaines choses doivent être complétées dans les notes prises par les étudiants, faisant peut-être ainsi aussi allusion au travail personnel attendu de l'étudiant. Sur un plan plus transversal, le manuel ne montre finalement pas le niveau de rigueur attendu, même si nous pouvons comprendre que ce n'est sans doute pas son rôle.

La progression choisie par le manuel est de donner la définition puis de l'illustrer sur des exemples, offrant ainsi une occasion de proximité descendante. Cependant, cette occasion est selon nous manquée ici puisque rien n'est dit sur l'utilisation de la définition, ni sur la prise en compte de sa syntaxe logique dans les exemples traités. De plus, toutes les justifications sollicitant des connaissances anciennes sur les inégalités et sur l'ordre des réels sont laissées à la charge du lecteur.

Les premiers résultats et leurs démonstrations

Nous analysons ici un résultat et sa démonstration (p.325) décrivant une propriété des suites convergentes :

Proposition 5

Si une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $l \neq 0$, il existe un entier n_0 tel que u_n soit non nul pour $n \geq n_0$. Plus précisément, u_n a le signe de l pour $n \geq n_0$ et la suite $(|u_n|)_{n \geq n_0}$ est minorée par une constante strictement positive.

La définition de convergence va cette fois être utilisée comme un outil de démonstration. Cela engendre une manipulation, sur le plan de la logique, différente par rapport aux exemples. En particulier, on peut donner une valeur à ε pour obtenir un indice n_0 à partir duquel l'inégalité sera vérifiée. On ne cherche donc plus ici à construire un tel indice.

Preuve :

Nous découpons la présentation du livre :

En prenant $\varepsilon = \frac{|l|}{2}$ dans la définition, on obtient l'existence de n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, on ait

$$|u_n - l| \leq \frac{|l|}{2}.$$

La première étape de la démonstration consiste à utiliser la définition de convergence. Le fait que la valeur donnée à ε est bien strictement positive n'est pas justifié. Pas plus que la légitimité de choisir un ε particulier.

Si $l > 0$, on en déduit, pour $n \geq n_0$,

$$u_n \geq l - \frac{l}{2} \geq \frac{l}{2} > 0.$$

La présence de la valeur absolue dans la valeur choisie pour ε amène à traiter deux cas : $l > 0$ et $l < 0$.

Dans le premier cas, développé ci-dessus, le traitement de l'inégalité $|u_n - l| \leq \frac{|l|}{2}$ s'appuie sur l'utilisation de connaissances anciennes qui ne sont pas explicitées. Il s'agit d'utiliser le fait qu'une inégalité de la forme $|x| \leq \alpha$ est équivalente à $-\alpha \leq x \leq \alpha$. On a donc $-\frac{l}{2} \leq u_n - l \leq \frac{l}{2}$ car $l > 0$, ou encore $l - \frac{l}{2} \leq u_n \leq l + \frac{l}{2}$. Cependant seule la première inégalité est intéressante par rapport à ce qu'on veut prouver. La transformation de l'inégalité $|u_n - l| \leq \frac{|l|}{2}$ et la succession de calculs sont donc laissées à la charge du lecteur.

De même si $l < 0$, on obtient $u_n \leq \frac{l}{2} < 0$ pour $n \geq n_0$. Dans les deux cas, u_n a le signe de l et $|u_n| \geq \frac{|l|}{2}$ pour $n \geq n_0$.

Dans l'énoncé, on annonce tout d'abord que u_n est non nul et on reformule cette propriété en disant que u_n a le même signe que l . Cette reformulation n'est pas expliquée et la démonstration ne revient pas sur le fait que u_n est non nul. Le lecteur a à sa charge de déduire des deux cas traités qu'on a finalement $|u_n| \geq \frac{|l|}{2}$ pour $n \geq n_0$ et de faire le lien avec la définition de « suite minorée » pour interpréter cette inégalité en « la suite $(|u_n|)_{n \geq n_0}$ est minorée par une constante strictement positive ».

Il n'y a donc ici aucune tentative de rapprochement avec les connaissances anciennes d'un étudiant. Présentée par un enseignant, cette démonstration pourrait être l'occasion de rappeler des connaissances sur la valeur absolue. Celui-ci pourrait également donner des commentaires sur l'utilisation de la définition qui est faite ici et mettre en évidence que celle-ci est manipulée différemment, d'un point de vue logique, selon qu'elle est un objet pour travailler sur des exemples ou un outil de démonstration. Dans un cours oral, le travail requis dans cette preuve serait donc l'occasion de développer de nombreuses proximités avec les connaissances des étudiants.

Bilan

Revenons sur nos résultats en termes de proximités potentielles, qui pourraient s'introduire dans les déroulements.

Dans ce manuel, la présentation des contenus est très réduite au minimum puisqu'on ne sort pas du canevas strict « définition-propriété-exemple ». En ce qui concerne la notion de convergence d'une suite numérique, celle-ci est présentée sans motivation, la nécessité de la nouvelle définition tout comme celle des premiers théorèmes n'apparaît pas. Dans un cours magistral, l'enseignant commenterait en général, même brièvement, l'introduction d'une nouvelle notion, même si la motivation est justifiée par l'évocation du savoir mathématique. Il arrive aussi qu'une nouvelle définition émerge du travail fait dans une démonstration, du besoin d'un lien entre deux arguments,...

Dans un cours, l'enseignant peut rappeler aussi plus volontiers les connaissances anciennes, ne fut-ce qu'oralement, ce qui n'est pas du tout fait dans le manuel... En ce sens, il y a donc potentiellement dans le cours magistral plus de « mouvement », de dynamiques entre connaissances mathématiques, cadres, registres, points de vue, de possibilités d'adaptation à un public particulier, que dans la lecture (probablement passive chez un certain nombre d'étudiants de L1) d'un manuel. De manière générale, rien n'est justifié dans le manuel, on avance dans les contenus sans retour en arrière et sans projection vers où on va. Nous avons montré que la majorité des explications complémentaires permettant de justifier les étapes des raisonnements est absente, ainsi laissée à la charge du lecteur. Il en est de même pour tout ce qui relève des reformulations : nous avons par exemple vu que dans les reformulations de

la notion de convergence d'une suite, le fait que la propriété puisse s'écrire en termes d'intervalles n'est pas expliqué.

Dans les exemples et dans les démonstrations, nous avons montré que la rédaction des arguments est d'une certaine manière très « directe » : on n'écrit pas ce qu'il faut prouver, on n'explique pas comment on manipule les hypothèses, et on ne trouve au final aucun retour sur le fait qu'on a effectivement prouvé ce qu'il cherchait à démontrer. Nous avons expliqué que cette manière de rédiger engendre des raisonnements qui ne seraient peut-être pas acceptés dans une copie d'étudiant de L1. Durand-Guerrier et Arsac (2003) ont étudié à ce sujet la rédaction dans un manuel d'une démonstration de la limite d'une somme de deux fonctions dans laquelle des raccourcis sont utilisés pour manipuler les quantificateurs, alors qu'ils ne vont probablement pas de soi pour un certain nombre d'étudiants de L1 et qu'ils seraient pénalisés dans une copie.

Plus généralement, nous n'avons trouvé que très peu de commentaires explicatifs dans le manuel. Par exemple, l'un concerne une allusion à la méthode utilisée pour démontrer l'unicité de la limite (p.323) et une remarque (p.324) est donnée sur le fait qu'on ne modifie pas la nature (convergente ou divergente) d'une suite en modifiant un nombre fini de termes, ce qui explique l'usage de l'expression « à partir d'un certain rang ». Il est difficile ici de s'engager dans une comparaison en anticipant avec ce qui se passe en amphithéâtre où la présence de tels commentaires varie d'un l'enseignant à l'autre.

En conclusion, l'étude partielle que nous avons menée du manuel confirme l'absence prévue de proximité ascendante et la faible part des proximités descendantes – non immédiates avions-nous dit. Le manuel ne développe pas de discours sur les contenus, qui serait le seul support de proximités, dans le cas qui nous occupe (FUG). D'une certaine manière, dans un manuel, la construction du sens est alors complètement laissée à la charge du lecteur. Dit autrement, dans un manuel, un tel savoir reste « objet » puisqu'on n'a pas de commentaire sur « à quoi il sert » et comment, même s'il est utilisé ; tous les liens sont à construire par le lecteur (dont le manuel ne préjuge pas les connaissances déjà-là). Une hypothèse (que nous allons pouvoir en partie tester) serait peut-être qu'en cours magistral, l'enseignant peut mettre davantage en valeur le formalisme (symboles et mots), y compris avec des formulations intermédiaires, transitoires (et des proximités horizontales) ainsi que les connaissances en logique (structure des propriétés, attention donnée aux quantificateurs, fil conducteur d'un raisonnement). En cours magistral, l'enseignant peut aussi apporter une certaine cohérence au savoir, ancien et/ou nouveau. L'enseignant enfin peut, par ses commentaires, anticiper sur la dimension outil et la préciser, en donnant même des méthodes. En ce sens, et tout particulièrement pour l'enseignement d'une notion FUG, pour laquelle les proximités ne sont pas immédiates, un cours oral animerait davantage le texte du savoir. C'est ce qu'il s'agit de commencer à vérifier maintenant. Reste aussi à étudier la portée et les limites de ces ajouts – dans quelle mesure, à quelles conditions tous les étudiants y gagnent ? Cela rejoint les interrogations déjà posées ci-dessus, qui demandent de poursuivre l'étude si on veut commencer à s'y attaquer.

Bien entendu, cette première étude se limite actuellement à l'analyse d'un manuel et doit être complétée par l'analyse d'autres manuels pour voir dans quelle mesure les constats faits ici se confirment ou non. Reste aussi que nous n'avons aucun élément sur ce que retirerait effectivement un étudiant d'une lecture autonome d'un manuel. Rien ne dit que certaines proximités avec ses connaissances ne pourraient effectivement pas se développer (par exemple s'il s'agit d'un très bon étudiant) et mener à la construction de certaines connaissances. Cet aspect pourrait être approché en réalisant des interviews d'étudiants à qui on aurait fait lire le chapitre étudié ici.

5) Des exemples de proximités dans le cours magistral

Ce qui est recherché

Pour mesurer l'importance du rôle de l'enseignant lors de l'introduction de la notion de limite, nous étudions une vidéo de cours magistral en L1 sur la limite de fonction. Notre objectif est toujours de mettre en valeur les occasions qu'il a de créer des proximités avec les connaissances des étudiants. Pour ce faire, nous procédons à une analyse au niveau global comme dans le cas des manuels et

étudions trois moments du déroulement de ce cours (introduction de la définition formelle, présentation des premiers exemples, premiers résultats et démonstrations) en tentant d'y repérer des liens explicites entre ancien et nouveau pilotés par l'enseignant ; en particulier, nous nous intéressons à la présence de reformulations de la définition, à la prise en compte des connaissances anciennes des étudiants et de la structure logique (globale ou locale) de la définition de limite. À un niveau plus fin, nous prenons en compte le fait que dans un cours magistral le texte du savoir (qu'il soit écrit au tableau et/ou écrit dans un polycopié et/ou vidéo-projeté) est accompagné du discours oral de l'enseignant, de ses gestes et d'interactions éventuelles avec certains étudiants⁴⁰ qui lui permettent possiblement de donner une certaine cohérence au savoir, de tisser des liens et de tenter de se « rapprocher des étudiants ».

Nous analysons donc ce qui dans l'activité de l'enseignant (et notamment dans son activité discursive, orale et écrite) peut être vu comme un rapprochement potentiel (conscient ou pas) avec les connaissances des étudiants. La nature FUG de la notion de limite de fonction⁴¹ amène à poser qu'il n'y a pas d'activités préalables qui permettraient aux étudiants d'élaborer quelque chose se rapprochant de la définition visée et que, de ce fait, les seules occasions de proximités sont horizontales ou descendantes. Cela nous amène à prendre en compte tout ce que l'enseignant explicite, les différentes reformulations ou illustrations qu'il utilise, les commentaires méta qu'il fait. Nous gardons aussi en tête l'hypothèse formulée à la section précédente selon laquelle, l'enseignant du cours magistral mettrait davantage en valeur qu'un manuel les spécificités du formalisme utilisé et les connaissances en logique élémentaire mises en œuvre. Cela amène à s'intéresser en particulier à la distance entre ce qu'il dit et ce qu'il écrit, à la formulation orale associée au formalisme écrit. On se donne ainsi les moyens de repérer plusieurs types de passage dans cette association entre écrit et oral, quel qu'en soit l'ordre : la lecture orale des symboles écrits, avec ou non des ajouts de liaisons implicites (*tel que* par exemple) ; la traduction de certaines parties formalisées en mots (les inégalités lues en termes de distance par exemple). Cela peut prendre la forme de paraphrases, avec peut-être des changements dans l'ordre de ce qui est repris. Mais il peut aussi y avoir des commentaires plus éloignés de la lettre de ce qui est écrit : par exemple l'abandon d'une expression intuitive dynamique, qui introduit le temps comme variable fictive, amène à remplacer « se rapproche de » par « proche de » ; de plus, les mathématiciens ont choisi une définition adaptée à leurs besoins et aux propriétés de l'ensemble des réels : pour un intervalle donné, il s'agit d'être assuré que toutes les images par f (et pas seulement quelques-unes), pour x dans un certain intervalle à déterminer, sont dans cet intervalle donné, et, en plus, que cela est vrai pour tout intervalle que l'on peut se donner, aussi petit soit-il. Enfin ce qui concerne les distances est traduit en termes d'inégalités (car on utilise ici une topologie qui peut être associée à l'ordre des réels), et ce qui concerne les exigences ensemblistes et topologiques en quantificateurs et implication. Il y a de fait une « inversion » entre l'idée intuitive que si x se rapproche de x_0 alors $f(x)$ est proche de l , et la traduction formalisée qui garantit que cela est vrai « sans trou » pour peu qu'on soit « près de x_0 »⁴². Cette analyse est ainsi l'occasion de voir sur cet exemple si certaines des proximités potentielles pointées dans l'analyse de la section précédente apparaissent dans le déroulement de ce cours.

Présentation générale du cours étudié

Le cours magistral dont il est question est une séance de 1h30 donnée au second semestre devant environ 200 étudiants d'une année de L1⁴³ et portant sur l'introduction de la définition mathématisée formelle de la notion de limite de fonction (en un point ou en l'infini). Cette séance en amphithéâtre constitue la première rencontre des étudiants avec cette définition formelle et l'enseignant est habitué à

⁴⁰ Même si l'on peut raisonnablement penser qu'il y a plutôt moins d'interactions entre enseignant et élèves que dans l'enseignement secondaire.

⁴¹ Voir à ce sujet la section 3 de cette troisième partie.

⁴² Il nous semble en effet que la formulation intuitive pourrait être porteuse à la fois d'une inversion de l'ordre et de la nature des quantificateurs impliqués dans la définition formelle quantifiée.

⁴³ Les étudiants dont il est question sont en première année d'université (L1) et se destinent à des études en informatique ou en mathématiques.

enseigner les mathématiques à ce niveau-là. Hormis les interactions des étudiants, nous n'avons pas d'indice sur leur attention à ce cours ni sur ce qu'ils écrivent.

Même s'il y a des différences notables entre la définition de limite de fonctions et celle de limite de suites, nous faisons l'hypothèse qu'elles restent comparables au regard de nos objectifs parce que les moments que l'on étudie dans les manuels et que l'on analyse dans ce cours magistral sont des moments de première rencontre avec la définition mathématisée formelle associée à une notion FUG (voir section 3 de cette partie).

Afin de pouvoir analyser cette séance⁴⁴, nous avons procédé à la transcription intégrale des écrits de l'enseignant au tableau ainsi que de son discours puis nous les avons mis en regard. Pour avoir une vue globale du déroulement de ce cours magistral et pour le confort du lecteur, nous présentons dans le tableau ci-dessous l'ordre chronologique, la durée et le contenu des différentes phases organisées par l'enseignant. Nous avons pour cela respecté le découpage de l'enseignant en différentes « unités » au sein du plan de son cours et les étiquettes qu'il a choisies (introduction, définitions, propriété, exemples...).

Numéro de la phase	Durée de la phase	Nature de la phase
1	7'50''	introduction intuitive à la définition formelle de limite finie d'une fonction en un point de $\mathbb{R}$
2	2'50''	traitement d'un exemple pour montrer les limites de la définition intuitive
3	4'55''	écriture de la définition formelle de limite finie d'une fonction en un point de $\mathbb{R}$
4	1'	exemple graphique pour motiver l'introduction des voisinages
5	8'32''	définition de voisinage (à droite, à gauche) et de voisinage épointé (à droite, à gauche) en x_0 , $\pm\infty$
6	6'33''	traductions de la définition en termes de voisinages et d'intervalles
7	3'08''	réponses à des questions d'étudiants au sujet de la définition
8	12'05''	« Propriété : si f admet pour limite l en x_0 et est définie en x_0 alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ » et démonstration
9	1'24''	« Remarque : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - l = 0$ »
10	1'34''	« Propriété : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ »
11	8'18''	définition de limite finie d'une fonction en $\pm\infty$
12	7'02''	« Application : démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ »
13	5'48''	définition de limite infinie d'une fonction en un point de $\mathbb{R}$
14	5'20''	définition de limite infinie d'une fonction en $\pm\infty$
15	4'48''	« Théorème : si f admet une limite (finie ou infinie) en a (fini ou infini) alors cette limite est unique »

Tableau 1 : déroulement du cours magistral

Si on compare ce déroulement au scénario organisé par le manuel étudié pour les limites de suites, on remarque des différences dans la progression choisie par l'enseignant ainsi que dans la fonction des exemples utilisés. D'une part, il choisit de tenter de faire une introduction intuitive de la définition formelle (phase 1) puis de la reformuler de différentes manières : en mots (phase 1), en mettant en parallèle mots et écriture formelle en termes d'inégalités ou de distances (phase 3) puis en termes de voisinages (phase 6). D'autre part, il se sert de deux exemples (phases 2 et 4) pour tenter de montrer les limites⁴⁵ d'une approche intuitive puis pour tenter de mettre en valeur l'apport des voisinages.

⁴⁴ Pour cela, nous avons utilisé librement certains éléments méthodologiques issus d'une méthodologie générale d'analyse des activités des élèves et des enseignants, voir Pariès et al. (2007) ou Vandebrouck (2008).

⁴⁵ C'est le cas de le dire !

Les reformulations mises en valeur ici sont absentes du manuel étudié. Cela dit, il y a réciproquement dans le manuel un autre usage des exemples utilisés. Dans la suite de cette section, nous revenons sur l'analyse de ces phases ainsi que sur les phases 8 (premier résultat) et 12 (première application) qui nous semblent pertinentes à aborder à l'aune de notre problématique. Dans la suite, nous mettons systématiquement en italique dans le corps des paragraphes les paroles transcrites.

Introduction intuitive (phase 1)

L'enseignant débute la phase 1 en demandant aux étudiants : *qui parmi vous a rencontré une définition de la notion de limite ? Oui, alors est ce que vous pouvez me donner la définition ?* Il écrit au tableau sous la dictée d'un étudiant visiblement un peu avancé :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \alpha > 0 |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Bien qu'assez proche de la définition attendue, cette expression formelle de limite n'est pas exempte de défauts, puisqu'il manque par exemple une information sur x . Sans sembler en tenir compte, l'enseignant enchaîne en disant : *On va commencer par une notion intuitive de limite, celle que vous avez vue, vous connaissez pas cette définition-là. Comment vous définiriez une notion intuitive de limite ?* Un étudiant répond « $f(x)$ se rapproche autant que l'on veut de l » puis ajoute après quelques commentaires « *quand x se rapproche de x_0* » et l'enseignant reprend « *OK, $f(x)$ doit se rapprocher autant que l'on veut de l mais quand x se rapproche de x_0 . OK, on pourrait partir de ça comme notion intuitive* » (reformulation 1). Ensuite, l'enseignant choisit de faire un graphique sur lequel il trace une fonction continue qu'il commente : *On essaie de regarder un schéma pour approfondir cette notion. Donc x se rapproche de x_0 , le point M se rapproche du point M_0 , $f(x)$ est l'ordonnée de M se rapproche de l là, d'accord ?* Puis il écrit en même temps qu'il dit : *$f(x)$ est aussi proche que l'on veut de l si x est suffisamment proche de x_0* (reformulation 2).

Après avoir ainsi écrit sous la dictée d'un étudiant un candidat « définition » formelle de la notion de limite ne contenant que des symboles mathématiques (que l'enseignant ait prévu l'intervention de cet étudiant « avancé » ou pas), l'enseignant obtient auprès d'un autre étudiant une « définition » plus intuitive, en mots, qu'il reformule une première fois (reformulation 1). Il s'appuie ensuite sur un graphique sur lequel il traduit « se rapprocher/se rapproche » par des symboles « flèches » qu'il illustre par le geste avant de les reformuler en « aussi proche/suffisamment proche » ; dans le même temps, la locution « quand » devient « si » (reformulation 2). Pour nous il y a là une volonté de l'enseignant de tenter de partir des représentations intuitives d'un étudiant pour en arriver à une reformulation qui contient déjà en germe certains éléments logiques et formels de la définition habituelle. Cependant, la seconde reformulation nous semble encore éloignée de la définition formelle quantifiée : d'une part, si les deux propositions qui la composent sont formulées de façon similaire (« $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de l » et « si x est suffisamment proche de x_0 »), elles ne seront pas quantifiées de la même manière (respectivement par une quantification universelle et par une quantification existentielle) ; d'autre part – nous l'avons déjà évoqué plus haut – cette reformulation est porteuse d'une inversion possible de l'ordre des quantificateurs qui rend *a posteriori* difficile la justification de l'ordre choisi dans la définition formelle quantifiée. Cette tentative s'appuie-t-elle sur des connaissances ou représentations déjà-là de tous les étudiants ? Relais-t-elle des besoins ou une réelle motivation ? La question se pose.

Premières définitions (phases 3 et 6)

Lors de la phase 3, l'enseignant tente d'écrire la définition de limite d'une fonction en un point en respectant une chronologie qu'il base sur la reformulation 2 obtenue lors de la phase 1. Le tableau ci-dessous explique ligne par ligne et de haut en bas la suite des activités de l'enseignant, en respectant

l'ordre de ce qu'il fait ; la colonne de gauche rendant compte de ce qui est écrit au tableau, celle de droite des commentaires de l'enseignant en parallèle⁴⁶.

Ce qui est écrit au tableau				Ce qui est dit par l'enseignant (extraits)
$ f(x) - l < \varepsilon$				<i>Qu'est-ce que c'est que la distance de $f(x)$ à l ? [réponse d'un étudiant] Oui c'est la valeur absolue de $f(x) - l$ d'accord. Alors on veut que $f(x) - l$ soit aussi petit qu'on veut, $f(x)$ va se rapprocher autant qu'on veut de l, qu'est-ce que ça veut dire ? Ça veut dire que valeur absolue de $f(x) - l$ est inférieur à epsilon, pour epsilon aussi petit qu'on veut, on est d'accord.</i>
$\forall \varepsilon > 0 \quad f(x) - l < \varepsilon$				<i>On veut que epsilon soit aussi petit qu'on veut, ça veut dire que ça va être vrai pour tout epsilon positif donc on va avoir :</i>
$\forall \varepsilon > 0$	$ x - x_0 < \alpha$	$ f(x) - l < \varepsilon$		<i>Et on doit avoir ça si x est suffisamment proche de x_0, c'est-à-dire si la distance de x à x_0 est inférieure à une certaine valeur alpha.</i>
$\forall \varepsilon > 0$	$ x - x_0 < \alpha \Rightarrow f(x) - l < \varepsilon$			<i>Donc le si alors c'est l'implication donc aussi petit que soit epsilon, si $x - x_0$ est inférieur à alpha, on doit avoir $f(x) - l$ est inférieur à epsilon, ça commence à ressembler à la définition qu'a donnée votre camarade.</i>
$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0,$	$ x - x_0 < \alpha \Rightarrow f(x) - l < \varepsilon$			<i>Alors alpha, comment on l'introduit, parce que là on introduit une notation, ça veut dire qu'il faut que ça soit dans quel ensemble alpha ? Il doit majorer une distance donc... [réponse étudiant] positif, voilà. Quel que soit epsilon, dès que x sera suffisamment proche de x_0 c'est-à-dire si la distance de x à x_0 est inférieure à alpha donc derrière c'est la notion « il existe alpha tel que ». Donc notre définition, si on veut l'écrire dans une manière rigoureuse, ça ressemble à quelque chose comme ça d'accord ?</i>
$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in Df, x - x_0 < \alpha \Rightarrow f(x) - l < \varepsilon$				<i>Alors là, il manque encore quelque chose, c'est x appartient à quel ensemble, pour quelles valeurs de x on a cette implication. C'est pour les x appartenant à l'ensemble de définition donc je dois avoir...</i>
$\forall \varepsilon > 0$ que l'on veut	$\exists \alpha > 0$ $\forall x \in Df$ Suffisamment	$ x - x_0 < \alpha$ $\Rightarrow$ Proche	$ f(x) - l < \varepsilon$ proche	<i>Donc ici c'est la notion aussi proche que l'on veut, ça ce serait que l'on veut. Ici, ça serait suffisamment, là on a la notion</i>

⁴⁶ Nous avons parfois « mathématisé » certaines expressions qu'il a dites pour des raisons de confort de lecture.

				<i>de proche et là on a à nouveau la notion de proche, d'accord ?</i>
--	--	--	--	---

Tableau 2 : discours de l'enseignant dans la phase 3

L'enseignant ajoute ensuite : *Alors je sais pas si cette introduction vous convainc tous mais j'essaie par-là de vous montrer que cette définition, elle tombe pas du ciel, en fait c'est une manière assez naturelle entre guillemets de définir cette notion intuitive qu'on avait là-haut.*

Lors de la phase 6, l'enseignant écrit la définition suivante :

Définition : soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un voisinage de x_0 . f a pour limite $l \in \mathbb{R}$ en x_0 ($\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$) si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x \in Df, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Lorsqu'il écrit cette définition, l'enseignant lit les valeurs absolues en termes de distances puis il écrit au tableau : *autrement dit, aussi petit que soit ε on peut trouver un intervalle suffisamment petit autour de x_0 sur lequel la distance de $f(x)$ à l est inférieure à ε .* Cette mention au tableau est suivie du discours suivant de l'enseignant : *D'accord, le « quel que soit » c'est « aussi petit que soit ε », « $\exists \alpha > 0$ tel que $\forall x \in Df, |x - x_0| < \alpha$ » ça c'est un intervalle en fait donc il existe un intervalle suffisamment petit autour de x sur lequel la distance de $f(x)$ à l est inférieure à ε .* Il interroge ensuite les étudiants pour savoir s'il est clair que [il écrit au tableau] : $|x - x_0| < \alpha \Leftrightarrow x \in]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[$ (suite à la question d'un étudiant, il expliquera finalement cette équivalence en phase 7, voir ci-dessous).

Nous avons volontairement détaillé l'émergence de la définition de limite pour montrer la manière dont l'enseignant organise un cheminement complexe entre intuitif et formel et pour insister sur l'intrication des différentes reformulations qu'il utilise dans son discours oral et écrit. A minima, les étudiants ont donc l'occasion d'entendre et de voir l'enseignant commenter et reformuler la définition de limite de différentes manières : en mots (oral et écrit), par le biais d'un graphique (oral et écrit), en termes de distance (oral) et d'inégalités strictes impliquant des valeurs absolues (écrit), en termes d'intervalles et de voisinages (oral et écrit). Parallèlement, l'enseignant tente de prendre en compte en partie la structure et l'ordre de la phrase logique, notamment l'ordre d'introduction des quantificateurs, dans ses commentaires écrits et oraux comme le montre le découpage qu'il fait de cette phrase dans le tableau 2. On remarque cependant un fort décalage entre ce que l'enseignant dit (sans l'écrire) et ce qu'il écrit durant cette phase : plus précisément, à chaque étape, l'enseignant traduit oralement certains éléments obtenus dans la reformulation 2 (colonne de droite) puis écrit la partie de la phrase logique à laquelle il aboutit (colonne de gauche).

Tout ce travail témoigne d'une volonté de sa part d'introduire la définition de limite de fonction en travaillant sur son formalisme et sa structure logique par le biais d'un réseau de proximités horizontales qu'il appuie sur de nombreuses reformulations : nous interprétons par exemple l'emploi des conjonctions « donc » ou « c'est-à-dire » dans son discours (en gras dans le tableau 2) comme des marqueurs de son activité de traduction à destination des étudiants. Cependant, cette tentative de rapprochement est à relativiser car elle reste orale et non écrite et que la distance dit/écrit est grande : l'enseignant n'est sans doute pas dupe et l'emploi qu'il fait de l'interjection « d'accord » (toujours en gras dans le tableau 2) semble faire état d'une recherche d'adhésion des étudiants pour pallier à l'absence de réelle motivation de cette définition.

L'enseignant revient aussi sur l'équivalence $|x - x_0| < \alpha \Leftrightarrow x \in]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[$ suite à la question d'un étudiant (phase 7). Les explications orales qu'il fournit sont de deux ordres et s'appuient toutes deux sur une représentation faite au tableau. D'une part, il représente l'intervalle considéré sur la droite réelle et revient sur le lien entre distance et valeur absolue. D'autre part, il met cette équivalence en perspective avec son analogue dans $\mathbb{R}^2$ (disques ouverts). Ici encore, l'enseignant tente de justifier cette reformulation en partant de connaissances supposées anciennes des étudiants, ce qui témoigne un essai d'établir une proximité horizontale.

Cependant, nous pensons que la nature de la définition formalisée quantifiée de la notion de limite rend la démarche de l'enseignant en partie artificielle et l'oblige (sans doute de manière consciente) à laisser implicites un certain nombre de difficultés qui relativisent potentiellement la portée de ses commentaires vis-à-vis des étudiants.

Le passage de « aussi proche que l'on veut » à « la différence $f(x) - l$ doit être aussi petite que l'on veut n'est pas explicite, la traduction de « la différence $f(x) - l$ doit être aussi petite que l'on veut » à « cette différence est inférieure à epsilon pour epsilon aussi petit que l'on veut » non plus.

Même s'il se base sur la réponse d'un étudiant, l'enseignant essaie de bâtir la définition de limite à partir d'un ancien intuitif qu'il contribue à recréer et dont on ne sait pas s'il est réellement basé sur les connaissances ou représentations antérieures des étudiants.

Même s'il prend en charge une partie de la structure logique de la définition de limite au cours de ses différentes reformulations (voir aussi phase 1 ci-dessus), l'ordre de celle-ci et l'apparition des quantificateurs sont entièrement à sa charge et sans lien avec les connaissances des étudiants. Par exemple, l'introduction de « $\exists \alpha > 0$ » dans cette phrase logique semble retardée puis forcée par l'enseignant (cf. tableau 2), ce qui n'est pas étonnant étant donné qu'aucun élément de ses différentes reformulations ne permet de la motiver réellement. Ce sont des choix de mathématiciens motivés par des exigences hors de portée des étudiants, ensemblistes ou topologiques et par l'efficacité qui ont présidé à l'émergence de cette expression...

On remarque que dans la définition donnée, l'enseignant choisit de ne pas débiter sa phrase logique par « $\exists l \in \mathbb{R}$ ». Lors de la phase 7, un étudiant l'interroge aussi à ce sujet et l'enseignant fait un commentaire méta : *Ce serait la définition de l'existence d'une limite donc là ce que j'ai défini c'est le fait que la limite ça soit l. Ça c'est important et c'est intéressant comme question car si vous voulez démontrer qu'une fonction n'a pas de limite, il faut partir de la définition de l'existence d'une limite.* Même si c'est une remarque qui sera importante dans la suite notamment lorsqu'il s'agit de nier la définition, l'enseignant ne choisit pas d'en garder une trace écrite.

Tout comme dans le manuel, l'enseignant parle de « la limite » et utilise la notation « lim » avant d'en justifier l'unicité (ce qu'il fera quand même à la toute fin du cours en phase 15).

Les premiers exemples (phases 2 et 4)

Nous revenons maintenant sur l'usage que l'enseignant fait des exemples dans ce cours.

Lors de la phase 2 après avoir amené la reformulation 2, l'enseignant commence par dire : *Là c'est avec des phrases, ce qu'on voudrait c'est avoir une formulation entre guillemets mathématisée. Parce que ces phrases, elles laissent une large part à l'ambiguïté.* Pour illustrer sa phrase, il propose l'exemple suivant : *on définit une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par*

$$f(x) = 0 \text{ si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}^*, f(x) = \frac{1}{q} \text{ si } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \text{ où } \frac{p}{q} \text{ est irréductible.}$$

L'enseignant ajoute ensuite : *Là, la notion intuitive, ça devient compliqué, parce que tracer cette courbe, vous allez avoir du mal. Donc on va pas pouvoir utiliser une notion géométrique de la notion de limite. Donc on a bien besoin pour résoudre un certain nombre de problèmes d'une définition plus mathématisée, plus rigoureuse.*

Lors de la phase 4, après avoir écrit la définition de limite et mis en parallèle ses différentes reformulations, il dit : *J'ai besoin d'introduire une notion de voisinage. En effet, est ce qu'on peut étudier la limite d'une fonction n'importe où ?* Il prend alors un exemple graphique (une fonction définie en 2 et pas définie « autour de » 2) puis demande : *Est-ce que la notion x tend vers 2 a un sens pour $f(x)$? Eh non, on a un saut en fait : autour de 2, il n'y a pas de valeurs qui appartiennent à l'ensemble de définition.*

Contrairement au manuel, cet enseignant n'illustre pas les définitions sur des exemples (du moins dans ce cours), mais se sert des exemples pour tenter de créer le besoin du passage à une définition mathématisée plus formelle dans le premier cas, l'intérêt à porter aux voisinages dans le second cas. Dans les deux cas, on peut cependant noter l'artificialité des exemples choisis. Le premier exemple pourrait être qualifié de « pathologique » voire de « tératologique » et à tout le moins ne constitue pas une réelle motivation pour les étudiants à passer d'une formulation en mots à une formulation logique mathématisée. Le second exemple est même abusif puisque pour la fonction définie par l'enseignant, on pourra tout de même parler de la limite de la fonction en 2, étant donné que 2 est un point adhérent à son ensemble de définition. En écho à la nature FUG de cette notion, nous interprétons ces choix de l'enseignant comme une manière de pallier à l'existence d'une réelle motivation pour passer d'une notion intuitive à une notion plus satisfaisante mathématiquement. L'usage que l'enseignant fait des exemples ne met donc pas en valeur des proximités (en particulier descendantes) puisqu'il tente de s'appuyer sur ces exemples pour légitimer les reformulations qu'il fait de la définition de limite sans les mettre en œuvre. Il use donc à ce moment-là d'une motivation interne aux mathématiques mais qui a le mérite d'exister.

Le premier résultat et sa démonstration

Nous n'analysons ici que le premier résultat énoncé par l'enseignant à la suite de la définition de limite (phase 8) et n'insistons pas sur les résultats qui suivent (phases 12 et 15). On peut trouver l'énoncé de ce résultat dans le tableau 1. Nous en découpons la présentation pour faire des commentaires.

L'enseignant débute la démonstration en traçant une droite réelle et en disant : *On fait une démonstration par l'absurde, sur mon schéma, je suppose l inférieur à $f(x_0)$. Qu'est-ce que dit la définition ?* Il écrit : *la définition de $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ est*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in Df, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Puis il reprend : *Alors moi je voudrais que l différent de $f(x_0)$ est contradictoire avec cette définition, je voudrais montrer que ça, ça conduit à la négation de cette définition. Alors quelle est la négation de cette définition ?* Un étudiant répond et comme sa réponse est incorrecte, l'enseignant revient sur la négation d'une implication « $A \Rightarrow B$ » avant d'écrire au tableau : *la négation :*

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \alpha > 0, \exists x \in Df \text{ tel que } |x - x_0| < \alpha \text{ et } |f(x) - l| \geq \varepsilon$$

Ensuite : *Alors comment, on peut montrer une existence ? Qu'est-ce qu'on a comme possibilité ? Il y a des cas où on peut pas en produire. Le plus simple c'est de donner un exemple : on montre que pour un certain nombre, ça marche. Là, c'est ce qu'on va faire, on va montrer qu'il y a un epsilon pour lequel on a la propriété.*

Notons tout d'abord que l'usage de la définition mathématique formelle est obligatoire pour mener à bien cette démonstration. Dans cette première partie de la preuve, l'enseignant expose donc la stratégie globale de la démonstration et profite de l'opportunité de la première utilisation de la définition de limite pour revenir sur certains éléments de logique (la manière de nier une implication) avant de faire un commentaire méta sur une méthode possible pour prouver l'existence d'un élément. Toutes choses que ne fait pas le manuel. Notons toutefois qu'il n'écrit pas clairement les hypothèses, ni l'entame du raisonnement par l'absurde.

L'enseignant travaille ensuite localement sur le schéma en traçant des flèches pour symboliser les distances et en utilisant des gestes⁴⁷ : *Je vais prendre epsilon égal à la moitié de la distance. Qu'est-ce que c'est que cette distance, c'est $f(x_0) - l$, elle est non nulle cette distance car on a dit que ce sont deux nombres différents. C'est la valeur absolue de $f(x_0) - l$, là c'est $f(x_0) - l$ parce que j'ai*

⁴⁷ Ajoutons qu'ici l'enseignant prend l'initiative de la démonstration indépendamment des étudiants qu'il ne questionne plus comme lors des phases précédentes.

considéré que l était inférieur mais il peut être supérieur [...] Je prends la moitié de cette valeur absolue donc epsilon c'est cette distance-là. Après avoir ainsi choisi ε , l'enseignant écrit au tableau

$$\forall \alpha > 0 \quad |x - x_0| < \alpha$$

et dit : *Alors qu'est-ce qu'on pourrait dire pour montrer que pour tout alpha, il y a un x dans l'ensemble de définition tel qu'on ait la propriété qui suit ? À votre avis, qu'est-ce que ça va être le x qui va poser problème ?* Un étudiant donne la bonne réponse mais l'enseignant continue à commenter : *Alors qu'est-ce que ça veut dire que $\forall \alpha > 0 \quad |x - x_0| < \alpha$, qu'est-ce qu'il y a comme nombres qui vérifient ça ? La distance de x à x_0 est aussi petite que je veux, c'est ça que ça veut dire [...] Si on veut trouver un x qui marche ça sera forcément x_0 , oui ? [...]* Il montre ensuite la phrase logique qu'il a niée : *Alors qu'est-ce qui se passe pour les deux propositions pour x_0 ? La distance de x_0 à x_0 , ça c'est nul donc inférieur à n'importe quel alpha, ça marche.* Il écrit au tableau $|x_0 - x_0| = 0 < \alpha$ puis

$|f(x_0) - l| < \varepsilon = \frac{|f(x_0) - l|}{2}$ et commente : *Alors est-ce qu'on peut avoir la deuxième propriété ? Epsilon, on l'a défini comme étant... Donc on a toujours cette propriété donc on a bien les deux propriétés de droite d'accord.*

On peut considérer que l'enseignant use d'une proximité horizontale pour légitimer le choix de ε en appuyant son discours sur une représentation et en utilisant la notion de « distance », plus facile pour les étudiants. Il continue aussi à décortiquer logiquement la négation de la phrase initiale mais son propos est, nous semble-t-il, peu compréhensible pour plusieurs raisons : d'une part les phrases logiques qu'il écrit ne contiennent pas tous les quantificateurs nécessaires à la compréhension des étudiants (auxquels ils sont de toute façon peu habitués), d'autre part la compréhension de la véracité de la phrase logique semble être décalée par rapport aux connaissances des étudiants à ce moment-là :

$$\forall \alpha > 0, \exists x \in Df \text{ tel que } |x - x_0| < \alpha \text{ et } |f(x) - l| \geq \varepsilon$$

Enfin, l'enseignant déclare « *Notre démonstration c'est la suivante* » puis il écrit au tableau :

On pose $\varepsilon = \frac{|f(x_0) - l|}{2}$. Pour tout $\alpha > 0$, on a $|x_0 - x_0| = 0 < \alpha$ et $|f(x_0) - l| = 2\varepsilon > \varepsilon$. Conclusion : $l \neq f(x_0)$ est contradictoire avec $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$.

Après cela, il dit : *OK alors pourquoi ça marche, où est-ce que f définie en x_0 est intervenu, c'est ici [Il montre $|x_0 - x_0| = 0 < \alpha$] dans le choix de x appartenant à l'ensemble de définition égal à x_0 , ça c'est possible que si x_0 appartient à l'ensemble de définition.*

Même si l'enseignant n'explicite pas totalement la démonstration (notamment sur le raisonnement par l'absurde et sur la conclusion) et qu'on peut penser que la rédaction qu'il propose pourrait ne pas être acceptée par exemple lors d'un contrôle, l'enseignant a montré ici un exemple de manipulation de la définition de limite qui utilise quelques reformulations qu'il a utilisées précédemment, ainsi qu'un « fil conducteur » pour cette démonstration qui sont autant de tentatives de liens avec les connaissances qui viennent d'être vues. En toute fin, contrairement à ce que nous avons constaté dans le manuel, l'enseignant procède à un retour sur ce qu'il a démontré en disant « *Notre démonstration c'est la suivante* ». Même si ce retour est partiel, cela lui permet de présenter une méthode féconde de démonstration dans ce cadre, qu'on pourrait qualifier d'analyse/synthèse.

Un exemple d'application de la définition

Nous terminons par une analyse de la phase 12 du déroulement. Durant la phase 11, l'enseignant a défini la limite finie d'une fonction en $+\infty$ de la façon suivante :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists r > 0 \forall x \in Df, x > r \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

qu'il a reformulée oralement en terme de distance avant d'écrire au tableau : autrement dit, aussi petit que soit $\varepsilon > 0$, on peut trouver un intervalle $]r; +\infty[$ sur lequel la distance de $f(x)$ à l est inférieure à ε . Il ajoute : *Alors ce qui nous intéresse c'est les petites valeurs de ε , là c'est petit dans le sens proche de 0* avant de faire un commentaire méta sur la généralisation de ces définitions en topologie.

On remarque donc que l'enseignant utilise dans cette définition la plupart des reformulations qu'il a introduites dans les phases 1, 3 et 6 ce qu'on peut voir comme une tentative de mise en cohérence des proximités horizontales qui y ont été mises en valeur. On peut penser aussi que cette mise en cohérence anticipe l'usage « outil » que l'enseignant va faire de cette définition dans la démonstration du résultat de la phase 12.

L'énoncé du résultat est rappelé dans le tableau 1. L'enseignant commence par dire : *Donc on applique notre définition pour $f(x) = \frac{1}{x}$ et $l = 0$, alors écrivons ce que donne notre définition, s'il vous plaît, regardez bien ce qu'on va faire car c'est une méthode qui est systématique. Je remplace f par sa valeur et l par 0, j'ai pris un exemple très simple, on peut difficilement faire plus simple.* Parallèlement, il a écrit au tableau : on veut montrer que

$$\forall \varepsilon > 0 \exists r > 0 \forall x \in Df, x > r \Rightarrow \left| \frac{1}{x} \right| < \varepsilon.$$

Il poursuit : *On veut montrer la propriété pour tout epsilon, donc la manière la plus simple c'est de commencer par dire, je prends un epsilon et j'essaie de montrer ce qui suit. Donc on considère epsilon positif quelconque, alors qu'est-ce qu'on veut ? On veut montrer qu'il existe un r vérifiant... et il écrit au tableau : Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. On cherche $r > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ si $x > r$ alors $\left| \frac{1}{x} \right| < \varepsilon$. Il a ajouté parallèlement : *C'est quoi l'ensemble de définition ? C'est $\mathbb{R}^*$ on va l'écrire. J'écris donc si alors plutôt que l'implication. Alors est ce que ça vous semble possible et pour quelles valeurs de r ça marche ?* [réponse d'un étudiant] *Eh oui, voilà $\frac{1}{\varepsilon}$ très bien. Alors la bonne manière de faire c'est de regarder la conclusion qu'on veut obtenir, on veut avoir cette propriété alors regardons à quelle condition on peut avoir ça, $\left| \frac{1}{x} \right| < \varepsilon$, comment on peut l'écrire ? Moi je voudrais avoir une condition qui s'écrit $x > r$ donc on a des nombres positifs donc qu'est ce qui se passe si on prend l'inverse ? La fonction inverse elle est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$ donc c'est dire que* [Il écrit]*

$\left| \frac{1}{x} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < x$. Je cherche une implication, j'ai une équivalence donc si maintenant j'impose que x soit positif, ça, ça s'écrit [Il écrit au tableau] Donc a fortiori $x > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \left| \frac{1}{x} \right| < \varepsilon$. Alors est ce que je peux écrire ça, là on avait une équivalence et puis je rajoute une condition x positif. Donc j'ai plus une équivalence mais j'ai une inclusion de gauche à droite. Alors une fois qu'on a écrit les choses comme ça, qu'est qu'on prend pour r ? On cherche un r tel que si $x > r$ alors $\left| \frac{1}{x} \right| < \varepsilon$ et bien $r = \frac{1}{\varepsilon}$ ça marche d'accord ? Il écrit : On pose $r = \frac{1}{\varepsilon}$ et on a bien $\forall x \in \mathbb{R}^*, x > r$ alors $\left| \frac{1}{x} \right| < \varepsilon$.

Puis : *Donc qu'est-ce qu'il y a de général dans cette démarche ? C'est déjà de partir d'un epsilon positif quelconque et après d'avoir pour attitude de chercher r vérifiant cette propriété. Donc pour ça vous écrivez, vous tentez de réécrire la conclusion à laquelle vous voulez arriver de manière à trouver une condition suffisante sur x , une condition de la forme $x > r$ pour avoir cette conclusion, d'accord ?*

Pour cette démonstration, l'enseignant met en valeur le formalisme et la logique locale de cette définition qu'il reformule en utilisant les connaissances supposées anciennes des étudiants sur les valeurs absolues et sur la fonction inverse. Ce faisant, il parvient à créer une proximité descendante vis-à-vis de la définition formelle. En fin de démonstration, il revient explicitement mais à nouveau juste oralement sur une méthode générale et féconde pour prouver ce type de résultat : en quelque sorte, il tente de rendre la définition « procédurale », il faut se donner un epsilon et réaliser quelque chose ensuite qui est de l'ordre de la recherche d'une condition suffisante d'une forme souhaitée. En d'autres termes, il a introduit l'activité de définition formelle par le biais de reformulations (proximités horizontales) et la preuve d'un tel résultat demande une démonstration formelle qu'il tente de

rapprocher (proximité descendante) d'une utilisation procédurale de la définition au sens où les étudiants peuvent traduire ce qu'il faut réaliser en termes de procédures associées à des connaissances qu'ils sont supposés maîtriser. Comme toujours, ces commentaires ne sont qu'oraux et on peut penser qu'ils seront proches des connaissances d'un nombre restreint d'étudiants : sans doute faudra-t-il attendre les cours suivants ou les travaux dirigés pour rendre ces commentaires opérationnels. Toute la question est là !

Bilan

L'absence de proximités ascendantes dans ce cadre n'est pas étonnante justement parce que les notions sous-jacentes ont été identifiées comme FUG. En guise de bilan, nous pouvons dire au travers de l'étude des premiers moments en lien avec la définition de limite qu'il y a des différences sensibles entre le manuel et le cours magistral étudiés. Si le caractère FUG de cette définition semble interdire à l'enseignant des liens complets avec les connaissances des étudiants, de nombreux indicateurs au sein de son activité discursive montrent des essais de proximités horizontales avec les connaissances ou représentations anciennes des étudiants (que ce soit par le biais de reformulations des définitions ou par la traduction de phrases logiques) mais aussi de proximités descendantes dans les démonstrations. Un certain nombre de proximités potentielles pointées dans la section précédente apparaissent donc effectivement dans le déroulement de ce cours. Pour établir ces proximités, l'enseignant se base sur un formalisme progressif des diverses reformulations utilisées (mots, graphique, distances et valeurs absolues, voisinages...) et sur une certaine mise en valeur de connaissances en logique (quantificateurs, méthodes de raisonnement, condition suffisante...) : en outre, ces reformulations et mises en valeur sont en général accompagnées de commentaires explicatifs de l'enseignant, contrairement au manuel où certains passages étaient laissés à la charge du lecteur. On a cependant noté un certain nombre de paraphrases, qui ne permettent pas d'aborder des difficultés importantes, liées aux choix faits par les mathématiciens pour fixer cette définition de limite et pas à la traduction « mot à mot » de l'idée intuitive dynamique des étudiants. D'autre part, la plupart de ces tentatives de proximités sont dites et non écrites (grande distance en général entre le dit et l'écrit chez cet enseignant) ce qui peut relativiser leur portée : parmi ceux qui participent (puisque – c'est à noter – il y a quand même quelques interactions au sein de ce cours magistral) on peut se demander qui est susceptible de profiter de ces commentaires.

6) Des exemples de proximités dans des vidéos de cours en ligne

Nous abordons ici un troisième exemple concernant l'enseignement au début de l'Université, en travaillant sur des ressources en ligne. Nous avons choisi d'analyser des vidéos mises en ligne sur le site <http://exo7.emath.fr/>. Les vidéos et les documents sont élaborés par des enseignants universitaires (Université Lille1, Rennes1 et Marne la vallée). Nous souhaitons à travers ce support étudier un média que nous classions *a priori* comme intermédiaire entre le manuel écrit et le cours magistral. Intermédiaire car un l'enseignant s'exprime en l'absence d'étudiant (comme dans un livre), mais oralement. La forme orale peut permettre des proximités plus difficiles à mettre en place à l'écrit, elle permet aussi plus facilement de s'éloigner du strict formalisme (reformulations, discours méta, structuration etc.).

Le site propose un enseignement abordant tous les thèmes mathématiques classiquement enseignés dans les trois années de licence. Les contenus sont organisés en trois années, puis en chapitres. Chaque chapitre contient un cours écrit, un cours oral (vidéo en ligne, un enseignant parle devant un diaporama dont le contenu est très proche de celui du cours écrit), des séries d'énoncés d'exercices dont certains sont corrigés (corrigé rédigé, et corrigé oral, un enseignant parle et écrit sur un tableau).

Nous nous centrerons ici, comme annoncé globalement, sur les chapitres concernant les limites (de suites et de fonctions). Nous avons décidé de « suivre » un enseignant qui présente le cours sur les limites de suites (il continue par des exercices sur les limites de fonction que nous n'étudions pas ici). Nous présentons en annexe la retranscription du premier quart d'heure du cours sur les limites de suites (retranscription, copies d'écran et premiers commentaires).

Le cours commence classiquement par l'énoncé de la définition de la limite, il se poursuit avec l'énoncé de propriétés et de preuves de certaines de ces propriétés. L'objectif ici est, entre autre, d'analyser la façon dont l'enseignant aborde ces définitions très formelles, la façon dont il met en mot le formalisme bien sûr, mais, au-delà, ce que portent ses formulations en termes de proximités avec les étudiants¹.

Les commentaires proposés en annexe (annexe 8) prennent en compte différentes dimensions : les mots et tournures de phrases que l'enseignant dit (colonne de gauche dans l'annexe), les mots et tournures de phrases choisis sur le diaporama (colonne de droite dans l'annexe), la gestuelle et le déplacement de l'enseignant (qui vient parfois appuyer et donner du relief ou des nuances à ce qui est dit ou écrit, inséré dans la retranscription, colonne de gauche). Ces diverses formulations sont analysées à l'aide de différents outils, notamment en prenant un référent formel logique² : le calcul des prédicats pour ce qui est de la formulation des propositions, la déduction naturelle³ et la logique dialogique⁴ pour ce qui est de la formulation des preuves. Ce type de modélisation structure nos commentaires, mais ceux-ci sont rédigés de façon à ce qu'il ne soit pas nécessaire d'en avoir une connaissance particulière pour suivre le propos. La colonne centrale de l'annexe indique certains éléments ou pistes d'analyses, et détaille certains autres.

Pour organiser le présent compte rendu d'analyse, nous nous centrerons sur plusieurs points, en étudiant en particulier ce qu'ajoute l'enseignant au formalisme des définitions (voir introduction de la partie 3), les proximités éventuelles et l'usage du méta, en lien avec les connaissances des étudiants :

- les diverses reformulations de la définition au début du cours et dans la suite du travail,
- l'introduction progressive du mot "rang" (pour dire le n de u_n , mais aussi certains éléments relatifs aux quantifications, "à partir d'un certain rang")

¹ Nous appellerons étudiants les personnes visionnant les vidéos, nous analysons en effet ces vidéos comme des cours à des étudiants.

² Voir aussi Hache 2015.

³ Présentation rapide : modélisation logique des preuves en distinguant pour chaque connecteur logique (essentiellement ET, OU et implication) et chaque quantificateur ($\forall$, $\exists$) une règle d'introduction et une règle d'élimination (un raisonnement par disjonction des cas est par exemple une élimination du OU, le *modus ponens* est une élimination de l'implication, prouver une proposition universellement quantifiée c'est introduire un connecteur « $\forall$ », utiliser une propriété affirmant d'existence d'un élément c'est éliminer un connecteur « $\exists$ »).

⁴ Présentation rapide : modélisation logique des preuves ayant une approche très pragmatique (prise en compte des acteurs, ou d'acteurs virtuels) : la preuve est vue comme un dialogue, une confrontation entre un proposant et un opposant. Pour prouver la quantification universelle d'une proposition, je dois montrer que je sais la prouver pour tout élément que l'on m'imposerait, pour utiliser une proposition précédée d'une quantification universelle, c'est moi qui ai le choix de l'élément.

- un passage intéressant sur la complémentarité entre écrit et oral (formulations orales de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$)

Formulations et reformulations de la définition

La formulation de la définition de la limite des suites, ou plutôt de la définition du fait qu'une suite donnée a pour limite un nombre réel donné, est formulée sept fois en une minute au début du cours (annexe 8 pp 22-23) :

- (1) Écrit La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a pour limite $l \in \mathbb{R}$
- (2) Oral La suite u_n a pour limite l appartenant à $\mathbb{R}$
- (3) Écrit Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que si $n \geq N$ alors $|u_n - l| \leq \varepsilon$
- (4) Oral Pour tout epsilon positif il existe un entier grand N tel que dès que l'entier petit n est plus grand que grand N alors valeur absolue de u_n moins l est plus petit que epsilon
- (5) Écrit $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq N \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon)$
- (6) Oral et gestes Pour tout epsilon [main sur $\forall$] il existe un entier [un pas, main sur $\exists$] naturel grand N , tel que [deux pas, main sur « $n \geq N$ »] si petit n est plus grand que N alors [un pas, main sur « $\Rightarrow$ »] valeur absolue de [recule] u_n moins l est plus petit que epsilon [positionnement loin de l'écrit].
- (7) Oral Autrement dit u_n est aussi proche que l'on veut de l à partir d'un certain rang.

Mis à part pour la dernière formulation il s'agit de formulations écrites ou de lectures de ces formulations. Mis à part dans la formulation (5) exprimée uniquement dans un formalisme symbolique (formulation classique que l'on retrouve dans le manuel étudié ci-dessus), toutes les formulations utilisent la langue naturelle. Les formulations écrites (2) et (4) mélangent langue naturelle et symbolisme de façon complexe⁵, le passage à l'oral le montre bien : par exemple l'utilisation de « appartenant » pour « $\in$ » montre bien que « a pour limite $l \in \mathbb{R}$ » est en fait un regroupement de plusieurs informations : la limite existe, s'appelle l , la limite est un nombre réel. On pourrait même considérer que cette formulation (2) contient une trace de présentation de variable : à la fois on dit que l'on va définir le fait que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a pour limite l , mais en même temps on introduit les variables qui seront utilisées dans la suite (une suite, sans autre précision, une variable l prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}$).

L'oral (surtout quand il est accompagné d'un écrit) permet de ne pas donner toutes les précisions qui pourrait être données, de faire des choix de ce qui est (non) dit, certaines formulations laissent ainsi une interprétation possible : « positif » pour « $>$ », « plus grand » pour « $\geq$ » et « plus petit » pour « $\leq$ », sans précision du caractère strict ou large des inégalités ; simplification de « $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ » en « u_n » (quitte à engendrer des ambiguïtés, on le verra). Le cas de la quantification de n est ainsi un cas intéressant de balance entre l'oral et l'écrit, l'un complétant l'autre. Dans la formulation (3) la quantification universelle de n est classiquement omise (implicite lié à l'implication), dans la formulation (4) on peut voir une trace de la quantification de n dans le « dès que » (« dès que n plus grand que N » pouvant être entendu comme contenant un indice de « $\forall n \geq N$ », même si ce n'est pas le texte qui est effectivement lu), dans la formulation (5) elle apparaît très explicitement, dans la formulation (6) elle disparaît à nouveau complètement. Il est intéressant de constater que pour la formulation (6) l'enseignant se sert de sa main, d'une certaine façon, comme d'un prompteur : elle indique la partie de la proposition qu'il est en train de dire. Sa main montre donc, d'une certaine façon, l'omission (elle passe devant le « $\forall n \in \mathbb{N}$ » pour aller directement à l'implication, sans que rien ne soit dit).

Mais l'oral peut aussi apporter des précisions sur l'écrit : ici c'est à l'oral que l'enseignant précise que n est un entier par exemple (formulations (2) et (3)). Ou apporter des nuances de sens, c'est ainsi que l'on peut comprendre la nuance entre le « si » de la formulation (3) et le « dès que » de la formulation (4) : l'enseignant introduit une lecture pragmatique, on voit apparaître une chronologie, peut-être une intention (voir plus loin les points de vue « démonstrateur »).

On voit donc dans cet extrait durant environ une minute une grande richesse dans le déroulement du cours : en quelques instants l'enseignant propose de nombreuses formulations autour d'une définition très formelle. On peut se demander cependant si la densité et la rapidité des nuances apportées n'est pas contreproductive en l'état. Le fait d'oraliser ainsi un énoncé écrit n'est pas spécifique à cette forme de travail (vidéo FAD), un enseignant peut, pendant une séance être amené à dire un texte qu'il écrit (ou qui est écrit s'il utilise un diaporama). On peut souligner cependant ici l'absence de recherche de proximité : certains éléments de ces reformulations (implications, inégalités etc.), ou même le fait de reformuler, ou les non formulations

⁵ L'étude de ces mélanges est un des objets de la thèse de Colette Laborde (Laborde 1982).

(quantifications de n) auraient par exemple pu faire l'objet de commentaires. Dans une mise en perspective plus large, on peut considérer ce cours comme une reformulation des définitions vues en terminale (ou comme la formalisation de définitions vues alors en acte). Les liens avec ces connaissances anciennes ne sont pas proposés. Toutes ces proximités sont visiblement difficiles à faire vivre en dehors d'une proximité, physique, visuelle, des acteurs (l'enseignant et les étudiants). La proximité n'existe pas non plus à l'occasion d'exemples : il n'y en a pas. Le premier exemple apparaît à la minute 7 environ à propos des opérations sur les limites (exemple d'utilisation).

La formulation (7) a un statut particulier, tout d'abord parce qu'il s'agit d'être plus informel (« autrement dit », forme plus concise), mais aussi par l'usage du « on veut » : le point de vue est très pragmatique, l'enseignant introduit un ou des acteurs (« on ») qui ont une volonté. On peut avoir une lecture dans laquelle on veut démontrer qu'une suite u tend vers l (je veux prouver que la suite a pour limite l , je dois pouvoir prouver qu'il existe un N qui convient quel que soit le choix de ε que je/on m'impose) ou utiliser le fait qu'une suite u a pour limite l (je sais que la limite de u est l , je choisis un ε qui me convient, je sais alors qu'il existe un certain N qui convient). La formulation est riche, mais elle est dense et est dite sans qu'il soit facile de faire le lien avec les précédentes, ou de la travailler. L'enseignant reprend cette posture pragmatique quelques instants après, en quelque sorte, avec le travail sur le graphique.

Avant cela, la vidéo se poursuit avec l'introduction de nouvelles formalisations du fait qu'une suite u a pour limite un réel l : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ (8) et $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$ (9). Les formulations orales correspondantes sont (annexe 8, p23) :

(10) Oral limite de u n égale à l lorsque n tend vers plus l'infini,

(11) Oral u n tend vers l lorsque n tend vers plus l'infini

Dans ces deux formulations orales, on voit apparaître plus clairement un phénomène nouveau (présent de façon moins visible dans (7)) : on énonce la définition en commençant par parler des termes de la suite et de sa limite, on parle ensuite de n (ordre d'énonciation inverse de l'ordre logique⁶). Le phénomène a déjà été évoqué plus haut dans l'analyse du cours d'amphithéâtre à propos de limite de fonction (« $f(x)$ est proche de l si x est suffisamment proche de x_0 »).

L'enseignant introduit alors un travail dans le registre graphique : « pour vous aider à comprendre et retenir la définition de u n tend vers l lorsque n tend vers plus l'infini ». Seule fois de l'extrait vidéo où l'enseignant s'adresse directement à son auditoire. L'enseignement décrit la situation de quelqu'un qui souhaite montrer qu'une suite u tend vers un réel l , on lui impose un ε (c'est-à-dire la largeur de la bande, ε est moralement petit, on peut aussi l'imposer plus petit), il doit trouver un N . Il ne signale pas ce positionnement, plus loin il prendra par contre explicitement l'autre position (« on applique la définition de limite finie », plus loin encore « On applique la définition de limite à la suite v n »), il prendra alors une valeur ε moralement non petite (« une précision arbitraire, par exemple epsilon est égal à un », « pour la précision epsilon prime est égale à epsilon sur M », notons que ce sont les deux seules fois où l'enseignant appelle ε la « précision »). Toute cette séquence centrée sur la définition se termine par une dernière reformulation (13) résumant ce point de vue pragmatique de démonstrateur : « si pour tous les epsilon je peux trouver un tel grand N alors, par définition, u n tend vers l ».

Toute cette séquence aura duré environ 4 minutes. Soulignons encore ici la densité du contenu. Ce d'autant plus que les temps morts sont quasi absents (environ 5 secondes entre chaque diapo, c'est à dire pour ces quatre minutes : 5 secondes entre l'introduction du cours et la définition, 5 secondes entre les premières formulations de la définition et le travail sur le graphique et 5 secondes avant la suite du cours). Il n'est pas possible pour un étudiant de profiter d'une petite interruption pour souffler (question d'un autre étudiant, ou

⁶ Voir par exemple Hache (à paraître) : Un des questionnements récurrents sur l'expression des [quantifications] concerne l'ordre de ces [quantifications] : [Rakotovoavi] distingue l'ordre logique et l'ordre d'écriture. (...) retenons qu'en présence de deux [quantifications] on dit en général que la première des deux, selon l'ordre logique, est celle dont le champ (c'est-à-dire la portion de l'énoncé où la [quantifications] s'applique) englobe le champ de l'autre. L'ordre d'écriture ne correspond pas toujours à l'ordre logique. Donnons ici un exemple (...) : « Il existe un plan, et un seul, contenant un point donné et parallèle à un plan donné ». La quantification « il existe un plan » arrive la première dans la phrase, alors qu'elle est dans le champ des quantifications universelles portant sur « un point » et « un plan ». L'inversion nécessaire pour rétablir l'ordre logique des quantifications est soulignée par la présence du marqueur « donné ».

temps d'effaçage du tableau, ou questions "de ponctuation" de l'enseignant : « d'accord ? », « vous avez des questions ? » etc.). Un tel rythme est peu probable en amphithéâtre, reste à supposer que la mise en scène autour des changements de diapo (l'enseignant sort du champ, l'écran devient blanc une seconde) suggère à l'étudiant de faire une pause (arrêter la lecture de la vidéo est toujours possible bien sûr).

« À partir d'un certain rang »

Nous avons choisi comme seconde entrée dans ce corpus d'analyser l'usage du mot « rang » et de l'expression « à partir d'un certain rang ». Cette expression est en effet très liée à la notion de limite de suites et joue un rôle important dans l'usage de ces définitions, « à partir d'un certain rang » exprimant dans une expression proche des pratiques langagières quotidiennes une part de la définition formelle. La définition donnée :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq N \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon)$$

peut aussi s'exprimer ainsi (la quantification universelle relativisée « $\forall n \geq N \quad P(n)$ » ayant exactement le sens de « $\forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq N \Rightarrow P(n))$ », en rendant implicite le fait que n est un entier) :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |u_n - l| \leq \varepsilon.$$

L'expression « à partir d'un certain rang » renvoie à la double quantification « $\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N$ », et la cache. Elle permet un usage plus souple : l'expression, courante, permet des combinaisons et des organisations de phrases plus variées (et, en contrepartie, plus éloignées de l'expression formelle bien sûr). On parle ainsi de suite constante à partir d'un certain rang, croissante à partir d'un certain rang, périodique à partir d'un certain rang, majorée à partir d'un certain rang, etc. Notons enfin que l'usage classique de cette expression inverse l'ordre des quantifications : elles sont en fin de phrase (alors qu'elles sont premières au sens logique, voir ci-dessus).

L'utilisation de cette expression fait par ailleurs disparaître la variable N (ce qui peut poser des difficultés pour un usage fin, par exemple dans une preuve, ou pour nier une proposition), et la quantification explicite de la variable n (n est parfois présent dans le reste de la phrase « $u_n = v_n$ à partir d'un certain rang »). Il existe d'autres expressions usuelles proches utilisant la variable n (mais pas N) comme « pour n assez grand », ou utilisant la variable N (mais pas n) comme « il existe un rang N à partir duquel ».

Dans le cours précédent (premier chapitre sur les suites, même enseignant, non retranscrit ici) le mot « rang » est déjà utilisé :

- « Notez que cette suite n'est définie que pour les rangs n supérieurs ou égaux à 1 » (*début du cours, exemples de suites, ici à propos de la suite $(1/n^2)_{n \geq 1}$*)
- « Pour vous aider à assimiler toutes ces définitions il est temps de vous exercer à l'aide de ces énoncés » (*la diapo affiche cinq « mini-exercices », ils ne sont pas corrigés. Le 3^e exercice est : « Réécrire les phrases suivantes en une phrase mathématique, écrire ensuite la négation mathématique de chacune des phrases. (...) (c) la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement négative à partir d'un certain rang », le 5^e exercice demande de prouver qu'une suite est décroissante à partir d'un certain rang.*)

Dans le cours étudié ici le mot rang est utilisé six fois :

- Annexe 8, p23 : « Autrement dit u_n est aussi proche que l'on veut de l à partir d'un certain rang » (*en conclusion de la présentation des définitions de la limite, la définition est toujours sur la diapo, dans le cours écrit, rarement évoqué ici car extrêmement proche des diapos utilisées la phrase prononcée est écrite « Autrement dit : u_n est proche d'aussi près que l'on veut de l , à partir d'un certain rang »*)
- Annexe 8, p24 : « Nous devons alors trouver un rang grand N tel que pour tous les indices petits n supérieurs à ce grand N alors u_n indice petit n est dans la bande » (*pendant le commentaire sur le graphique présentant une suite convergente*)
- Annexe 8, p25 : « Autrement dit, u_n est aussi grand que l'on veut à partir d'un certain rang » (*en conclusion de la présentation de la définition de la limite infinie, la définition est toujours sur la diapo*)
- Annexe 8, p25 : « On doit trouver un rang grand N tel que pour des indices plus grand que grand N alors les termes sont supérieurs à A » (*commentaire du graphique présentant une suite dont la limite est $+\infty$*)
- Annexe 8, p26 : « Soit maintenant une suite u_n qui a une limite non nulle alors, premièrement, à partir d'un certain rang la suite u_n ne s'annule pas, et deuxièmement la suite des termes un sur u_n tend vers un sur l » (*le texte correspondant sur la diapo est « $u_n \neq 0$ pour n assez grand »*) *

- Annexe 8, p28 : « Donc à partir d'un certain rang grand N la suite u_n est à distance au plus un de la limite » (texte sur la diapo : « il existe N tel que pour $n \geq N$ on a $|u_n - l| \leq 1$ ») *
- Annexe 8, p29 : « On vient de prouver que la suite est bornée à partir d'un certain rang » (texte diapo ci-dessous)

- Soit (u_n) une suite convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$
- Définition de limite avec $\varepsilon = 1$: il existe N t.q. pour $n \geq N$ on a $|u_n - \ell| \leq 1$
- Pour $n \geq N$ on a

$$|u_n| = |\ell + (u_n - \ell)| \leq |\ell| + |u_n - \ell| \leq |\ell| + 1$$

Le mot « rang » est finalement utilisé soit comme synonyme d'« indice » (dans « [la suite] est définie pour les rangs n supérieurs ou égaux à 1 », « Nous devons alors trouver un rang grand N » par exemple) soit dans des expressions utilisant « un certain rang ». Seules deux utilisations (*) permettent, par le jeu du lien entre oral et écrit, de relier explicitement ces expressions et d'autres formulations : d'abord « pour n assez grand » (lien avec n explicite, le lien avec N étant dans « assez grand »), puis la formulation symbolique « il existe N tel que pour $n \geq N$ » (une ambiguïté dans cette expression : « pour » pouvant vouloir dire « pour tout » ou « pour un »). Toutefois, et cela doit être souligné, cet usage du mot n'est pas explicité et ce travail de mise en relation d'expressions est à la charge de l'étudiant (ici implicitement, explicitement dans les « mini-exercices » du premier chapitre).

On voit donc qu'il n'y a pas de travail de l'enseignant en direction des étudiants sur l'usage de ces formulations (un travail utilisant l'expression est suggéré à la fin du premier cours, mais n'est pas corrigé).

Oral / écrit : comment prononcer $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

La formulation écrite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut pas être lue simplement⁷ : la lecture des parenthèse n'a pas beaucoup de sens, une partie peut être dite « u indice n », on dit parfois « pour $n \in \mathbb{N}$ », mais pas « indice $n \in \mathbb{N}$ »... On lit souvent cette formulation en commençant par « la suite... » : « la suite u », « la suite u indice n » (en ajoutant éventuellement « pour n dans $\mathbb{N}$ »), « la suite u_n » (idem), « la suite de terme général u indice n » (idem) etc. Il arrive qu'on utilise des formulations plus concises : « u_n » pour « la suite u_n », ou « u », celles-ci permettant de simplifier les formulations de propositions ou de preuves complexes.

La formulation écrite u_n est lue « u indice n » ou plus simplement « u_n », on peut parfois préciser en disant « le terme u_n » (ou « le nombre u_n » par exemple).

On voit donc ici que deux objets très différents mais liés (une suite de nombres et un nombre par exemple, ce dernier étant un des termes de la suite) peuvent être désignés par la même formulation orale (« u_n »). Les relations entre ces deux objets sont au centre de la définition de limite : la convergence est une propriété de la suite, définie par une propriété quantifiée de façon complexe de ses termes (et de la limite). La compréhension de la notion de limite est très liée à la compréhension de cet emboîtement (propriété de la suite, propriétés de ses termes), de ces deux niveaux de lecture.

L'enseignant désigne ici presque systématiquement les suites par les expressions « suite u_n » ou « u_n », il est intéressant d'analyser ce que permet cette proximité, la façon dont cela fait parler le formalisme, mais aussi les difficultés que cela peut engendrer (plus une formulation est concise, plus elle est porteuse d'implicites), et la façon dont l'enseignant gère ces difficultés potentielles.

L'enseignant prononce classiquement u_n en disant « u_n ». Il ne désigne qu'une fois une suite par « la suite des termes » (« la suite des termes un sur u_n » pour $(1/u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, avec, ici, l'expression « u_n » qui désigne un élément de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$), il désigne les suites par les expressions plus courtes « la suite » ou « la suite u ». Par exemple dans : « Si une suite est convergente, sa limite est unique », « la suite u_n a pour limite l appartenant à $\mathbb{R}$ », « une suite u_n est dite convergente si elle admet une limite finie », « à partir d'un certain rang grand N la suite u_n est à distance au plus un de la limite ».

⁷ La thèse de Jean Philippe Drouhard (Drouhard 1992) étudie entre autre ces notations mathématiques utilisant deux dimensions (notation intégrale ou série, racines n -ièmes, limites de suites etc.).

On dénombre aussi quelques formulations dans lesquelles la suite est désignée par « la suite » suivie d'une expression plus complexe que la donnée d'un terme de la forme u_n : « c'est aussi le cas pour la suite u_n moins l fois v_n » (annexe 8, p31, on parle de la suite $((u_n - l)v_n)_{n \in \mathbb{N}}$), ou « la suite u_n facteur de un moins trois u_n moins un sur u_n carré moins un » (annexe 8, p27, pour désigner $(u_n(1 - 3u_n) - 1/(u_n^2 - 1))_{n \in \mathbb{N}}$). On voit quelques formulations où une suite est désignée par un terme ayant une forme plus complexe que u_n , mais sans préciser « la suite » : par exemple, dans « si une suite u_n tend vers un réel l alors λ fois u_n où chaque terme est multiplié par le réel λ a pour limite λ fois l » (annexe 8 p26), « λ fois u_n » désigne $(\lambda u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (comme en témoigne la suite de la phrase « où chaque terme »).

Certaines formulations jouent sur les deux niveaux (suite ou termes de la suite).

Un premier exemple (annexe 8, p27) avec « si u_n tend vers plus l'infini [la suite tend vers $+\infty$] alors la suite des un sur u_n tend vers zéro [la suite tend vers 0]. Réciproquement, si u_n tend vers zéro [la suite tend vers zéro] et si les u_n sont strictement positifs [$u_n > 0$ pour chaque n], alors un sur u_n tend vers plus l'infini [à nouveau la suite] ». La formulation écrite (diapo) utilise des notations qui ne laissent aucune ambiguïté sur le statut des objets.

Un second exemple (annexe 8, p30) : « la suite u_n est égal(e) à cosinus n [difficile de décider si l'enseignant parle de la suite $(\cos n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou de la suite et d'une égalité de termes $u_n = \cos n$ de façon mixte]. Et v_n est égal(e) à un sur racine de n [même remarque que la précédente, l'absence de « la suite » fait pencher ici pour une égalité de termes... et pousse à relire la première partie dans ce sens aussi]. Alors la suite cosinus n divisé par racine de n [voir le paragraphe précédent, $(\cos n / \sqrt{n})_{n \in \mathbb{N}}$] tend vers zéro lorsque n tend vers plus l'infini ». Sur cet exemple le texte de la diapo correspondant à ce que dit l'enseignant est « Exemple : $u_n = \cos n$, $v_n = 1/\sqrt{n}$, alors $u_n v_n \rightarrow 0$ », la formulation orale ajoute deux fois sur trois « la suite » devant les termes dont il est questions. Le statut des objets n'est donc pas clair, ni dans la formulation écrite, ni dans la formulation orale.

Autres exemples « pour tout epsilon tel que dès que petit n est plus grand que grand N alors valeur absolue de u_n fois v_n est plus petit que epsilon [on parle clairement de nombres], on a bien montré que la limite de u_n fois v_n est nulle [« limite de » concerne une suite... la suite $(u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}}$?] » (annexe 8, p31, cette phrase est un bilan qui n'est pas écrit sur la diapo), « u_n est aussi grand que l'on veut à partir d'un certain rang » (annexe 8, p25, cette phrase est un bilan qui n'est pas écrit sur la diapo, on a vu que les propriétés vraies « à partir d'un certain rang » concernaient les suites, le masculin de « grand » semble cependant montrer que la propriété est ici celle des termes).

Ces exemples montrent bien la souplesse que permettent les expressions orales. Et les difficultés de compréhension ou d'apprentissages que cela pourrait engendrer. On glisse en tout cas petit à petit vers des formulations où l'on énonce les propriétés d'une suite en les formulant à propos des termes de la suite (ou de formules précisant ce que sont ces termes, par exemple « 1 sur racine de n tend vers 0 »). Comme pour l'utilisation du mot « rang », les formulations orales sont souvent complétées ici par une formulation écrite. Celles-ci lèvent parfois l'ambiguïté, et donnent donc implicitement des éléments des pratiques langagières concernant les suites. Parfois les formulations écrites intègrent, elles aussi, des raccourcis (que les formulations orales précisent ou non). Dans tous les cas, rien n'est explicité sur ces points. Nous ne pensons pas nécessairement qu'il faudrait évoquer des questions de langage et de formulation, mais qu'il serait intéressant de faire réfléchir ou d'apporter des éléments sur la nature des objets manipulés. Même les exemples ne permettent pas de proximité à ce sujet.

Bilan

L'approche est ici centrée sur les pratiques langagières, on observe la diversité et la complexité de ces pratiques et la façon dont la parole et l'écrit se complètent et se répondent. L'enseignant, même dans cette forme très contrainte d'expression (vidéo de cours à distance), apporte oralement une palette de reformulations très riche. L'appropriation par l'étudiant de ces pratiques langagières et de leurs subtilités, et l'appropriation des connaissances liées et de leurs relations, se ferait en quelque sorte petit à petit, presque par « imprégnation ». On peut interroger ce constat : dans quelle mesure le manque de lien ou de proximité avec les connaissances des auditeurs peut rendre difficile cette imprégnation ? Dans quelle mesure les nombreux implicites, notamment dans le jeu entre écrit et oral, ou à propos de certains mots comme le mot « rang », même s'ils ne sont pas repérés par les étudiants destinataires, joueront comme frein, voire obstacle, à une utilisation autonome ultérieure ? Au contraire, ces simplifications aident-elles ? Dans quelle mesure le

côté « impossible », déjà évoqué, d'une continuité parfaite entre l'intuition (avec le modèle en « se rapproche de ») et la définition formelle, qui est absent du cours ici, fait-il obstacle à la compréhension de la définition ?

Ainsi finalement, en termes de proximités, ce cours semblerait plus proche du manuel que du cours en amphi, même s'il y a beaucoup plus de reformulations que dans le manuel, qui sont des formes élémentaires de proximités horizontales, et même si l'oralisation porte en elle-même des éventuelles proximités portées par l'usage du langage courant – proximités horizontales, encore une fois, du type traduction, dont on ne peut pas garantir qu'elles jouent leur rôle, faute de méta par exemple. Cependant ces proximités langagières nécessairement imparfaites n'étant pas explicitées pourraient aussi s'avérer délicates lors de l'utilisation effective des formules symboliques par les étudiants (confusions entre suite, expression algébrique d'un terme de la suite et terme sont par exemple des difficultés connues, très proches des diverses formulations relevées ci-dessus et non commentées).

D'une certaine manière, tout ce qui précède participe du questionnement, spécifiquement lié aux mathématiques en jeu ici, que le chercheur en didactique peut poser sur les liens qu'entretiennent, pour cette définition de limite, sens et « technique » (ici technique est associée à l'usage attendu du formalisme adéquat, comprenant une part de strict symbolisme). Cela comprend un certain « diagnostic » de ces liens, dans les pratiques usuelles des mathématiciens et des enseignants, qui amène le chercheur à introduire des références logiques à l'appui des techniques, en partie indépendantes du sens global, mais cela soulève aussi, bien entendu, des questions sur les apprentissages. Le sens que porte la notion de limite ne peut être dissocié des situations où la définition sert, que ce soit dans un travail des étudiants sur l'aspect objet (démonstrateur) ou sur l'aspect outil – utilisateur (avec les proximités ascendantes et descendantes potentielles correspondantes). Mais ce travail engage en même temps un degré élevé de formalisme, qui a, nous y insistons, une certaine indépendance par rapport au sens – et ce qui précède l'illustre amplement. L'enjeu est donc de faire avancer plus ou moins simultanément les deux types d'acquisitions : technique - sans perdre le sens, et aussi sur le sens, sans négliger la technique et ses impératifs, qui permettent une expression efficace du sens. On peut prévoir que les proximités potentielles, plutôt horizontales, à essayer d'introduire à ce sujet gagnent à ne pas être totalement improvisées, et à s'appuyer à la fois sur le diagnostic évoqué ci-dessus, notamment en termes de formalisme, et sur les connaissances exprimées et les questions des étudiants.

Il est de plus probable que d'autres domaines des mathématiques peuvent donner lieu à des approches analogues – mais il est indispensable d'aller y voir de très près !

Références de la troisième partie

- S. Bridoux (2015). Introduire la notion de convergence avec une ingénierie des années 1980 : rêve ou réalité didactique ? *Texte soumis au GT7 du Colloque EMF 2015*.
- S. Bridoux (2011). *Enseignement des premières notions de topologie à l'université - Une étude de cas*. Thèse de doctorat de l'Université Paris Diderot (Paris 7).
- M. Dieudonné, J. Droniou, V. Durand-Guerrier, B. Ray, D. Théret (2011). Bilan de praticiens sur la transition lycée-université, *Repères-IREM*, 85, 5-30.
- J.P. Drouhard (1992), *Les écritures symboliques de l'algèbre élémentaire*, Université Paris Diderot
- V. Durand-Guerrier et G. Arsac (2003). Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Spécificités de l'analyse. Quelles implications didactiques ? *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 23.3, 295-342, Grenoble, La Pensée Sauvage.
- C. Gautier, A. Warusfel, B. Caminade, H. Fontaine et S. Nicolas, *Mathématiques Tout-En-Un, ECS 1^{re} année*, Éditions Dunod.
- C. Hache (à paraître) Logique, langage. Énoncés et preuves en mathématiques, in *Actes du 21^e colloque de la CORFEM, juin 2014*, Grenoble
- C. Hache (2015), Pratiques langagières des mathématiciens, une étude de cas avec « avec », *Petit x* n°97, IREM de Grenoble, Grenoble
- C. Laborde (1982) *Langue naturelle et écriture symbolique, deux codes en interaction dans l'enseignement des mathématiques*, Université de Grenoble
- J.-M. Monier (2006). *Analyse MPSI*, Éditions Dunod.
- M. Przenioslo (2005). Introducing the Concept of Convergence of a Sequence in Secondary School, *Educational Studies in Mathematics*, 60, 1, 71-93.
- A. Robert (1983). L'enseignement de la convergence des suites numériques en DEUG, *Bulletin de l'APMEP*, 340, 431-449.
- A. Robert (1982). L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur, *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 3.3, 307-341, Grenoble, La Pensée Sauvage.
- A. Robert et J. Robinet (1996). Prise en compte du méta en didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 16.2, 145-176, Grenoble, La Pensée Sauvage.
- A. Robert (1998). Outils d'analyses des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18.2, 139-190, Grenoble, La Pensée Sauvage.

Annexes

Annexe 1 **Point de vue d'une formatrice (M.C. Lévi)**

Annexe 2 **Le questionnaire élève (F. Pilorge)**

Annexe 3 **L'opinion d'une enseignante (dont une des classes a rempli le questionnaire)**

Annexe 4 **L'activité de l'enseignante A (version proposée à ses élèves)**

Annexe 5 **L'activité de l'enseignante A (version complétée)**

Annexe 6 **Un deuxième exemple de proximité descendante de l'enseignant B**

Annexe 7 **Extraits des programmes encours en 2015 concernant les fonctions**

Annexe 8 **Retranscriptions, captures d'écran et commentaires de cours d'Exo7 sur les limites**

Annexe 1 **Point de vue d'une formatrice (M.C. Lévi)**

Partir d'un constat autour des pratiques débutantes des étudiants de M1, M2 MEEF stagiaires, analyser ce qui se passe autour de ces pratiques pourrait permettre d'alimenter la réflexion des formateurs en vue de former les étudiants à « faire du ou un cours ? ».

Les formateurs peuvent observer très fréquemment lors des visites des étudiants stagiaires en classe la difficulté de l'appropriation d'un cours par les étudiants et de l'exposition de celui-ci aux élèves.

De la construction du cours à son appropriation.

On peut s'interroger sur la manière dont les étudiants construisent leurs cours et se l'approprient. On peut imaginer que l'appropriation va dépendre de la façon dont le cours a été construit. Sur ce point, il est difficile d'observer des éléments de ce travail qui se fait hors de la classe. Nous nous sommes donc attachés à noter des commentaires des étudiants en stage ou en responsabilité de classe lors de séances de formation, d'entretiens en visites ou bien à reprendre des écrits issus de leurs rapports de stage.

I) Quelles ressources pour la construction du cours ?

Le choix des ressources et leur utilisation est une vraie question pour les étudiants. En formation, nous avons tendance à leur conseiller de s'appuyer sur les programmes puis de consulter différents manuels. Nous constatons régulièrement lors des visites que l'appui sur les programmes n'est pas naturel dans les faits, ni systématique et que de nombreuses erreurs d'interprétation ou de sens à donner aux notions auraient pu être évitées par simple lecture du programme officiel.

De fait comment procèdent-ils ?

Certains demandent les cours de leurs tuteurs, qui, pensant les aider leur fournissent tandis que d'autres reprennent intégralement les cours de manuels, des cours en ligne ou même leurs propres cours lorsqu'ils étaient eux-mêmes élèves.

En effet voici comment C. M. étudiante agrégative en stage a procédé :

*« Pour la rédaction des définitions et propriétés, pour le choix des exemples et pour structurer mon cours, je me suis inspirée de trois supports : le cours sur les fonctions logarithme népérien que le tuteur avait préparé pour l'année précédente, le livre de terminale S que nous a prêté l'établissement et mon propre cours de terminale ».*¹

Sa co-stagiaire, N. M. avec le souci de respecter du programme actuel mais aussi d'utiliser son propre cours lorsqu'elle était élève a écrit : *« Pour préparer ce cours, je me suis inspirée du cours du manuel et de mon cours en tant qu'élève, tout en respectant les exigences du programme ».*²

J'ai aussi en mémoire un étudiant de M2 en stage filé en collège (B. C.) qui disait ouvertement ne pas se sentir capable de construire lui-même son cours. Il avait d'abord testé l'utilisation intégrale du cours d'un manuel, n'en était pas satisfait, ni sa tutrice et avait alors demandé le cours de sa tutrice. En visite, nous avons pu constater avec sa tutrice le manque de recul sur ce cours, non construit par lui-même, qui n'a permis aucune interaction avec la classe. L'année suivante, cet étudiant devenu fonctionnaire stagiaire m'avoua que le manque de temps durant l'année universitaire et la forme du stage (filé) l'avait en partie poussé à n'utiliser que ces ressources pour construire ses cours.

Ainsi, peut-on imaginer aussi que certains étudiants pourraient sous-estimer le temps de travail consacré à la construction de cours car c'est un travail qui ne se « voit » pas ? Et par voie de conséquence, ceux-là ne prendraient pas le temps nécessaire pour ce travail invisible ?

¹ Extrait du rapport de stage de C. M. , 2014

² Extrait du rapport de stage de N. M. , 2014

Par ailleurs, on peut aussi s'interroger sur la façon dont est décrit le métier d'enseignant aujourd'hui et si le travail de préparation d'un cours n'est pas d'une certaine manière occulté au profit d'autres aspects du métier.

En effet, étudiant agrégatif en stage filé dit dans son rapport de stage : « *En tant qu'étudiant, lorsqu'on vous parle du métier d'enseignant, on vous prévient que c'est une profession difficile notamment à cause de la discipline, du périscolaire, de la pression des chefs d'établissements etc... personne ne m'avait jamais cité « préparer un cours » dans la liste des difficultés majeures rencontrées par les enseignants[...]. La discipline et l'humain ne me poseront toujours probablement beaucoup moins de problèmes que la préparation et la concentration nécessaire pour présenter un cours de qualité.* »³

II) La rédaction d'un cours et la rigueur

Faut-il rédiger un cours ? Peut-on s'en dispenser en partant d'un cours déjà prêt ?

Tout d'abord, on peut remarquer que cette rédaction va peut-être laisser une trace écrite manuscrite ou bien tapée à l'ordinateur. Actuellement, la plupart des stagiaires présentent un cours au format numérique ce qui permet facilement les transformations, ajouts, corrections mais aussi facilite sa transmission à des collègues ou à des élèves absents ou handicapés qui ne peuvent pas prendre de notes. Ces traces de cours vont pouvoir être conservées au cours du temps, adaptées, transformées en cours à compléter par les élèves ou bien projetées à l'aide d'un vidéoprojecteur.

Une étudiante en stage filé en M1 qui avait l'habitude d'écrire son cours de façon manuscrite explique dans son rapport :

*« Pour ce chapitre, notre tutrice préfère les photocopiés pour que les figures soient propres : nous avons donc dû les faire ainsi et voir que la préparation d'un cours photocopié est beaucoup plus importante qu'un cours qui sera écrit au tableau. Même si ce temps passé en plus pour le professeur est du temps gagné en classe. »*⁴

On peut alors se demander si ce temps supplémentaire à passer sur la trace écrite, peut inciter certains à se tourner vers des cours « tous prêts ».

Une autre idée venant de la tutrice de S. D. est de projeter un cours à compléter au tableau en faisant participer les élèves. Le travail de préparation et de rédaction peut-être plus contraignant, pourrait alors augmenter les exigences en termes de rigueur dans la rédaction.

Ce passage à l'écriture du cours, difficile parfois, va aussi permettre son appropriation et faciliter l'expression orale lors de la phase de mise en œuvre. En effet « **dire le cours** » est également une étape importante et donc un objectif de formation. Les étudiants y sont peu entraînés excepté les préparations aux oraux CAPES.

C. M. décrit dans son rapport de stage la rédaction de son cours puis la rédaction du cours au tableau qui peut être différente. En effet, que doit-on écrire dans un cours, doit-on tout écrire, même ce que l'on va dire ? Le niveau de détail nécessaire pour un bon déroulement du cours est-il le même pour tous les enseignants ? Certains enseignants prévoient deux versions pour le cours écrit : l'un pour le professeur avec des commentaires sur ce que l'on va dire, questionnement des élèves et des repères pour la mise en œuvre, ce document se rapprochant d'une « fiche de préparation », l'autre à fournir aux élèves.

En ce qui concerne la rigueur, le mot n'a pas le même sens pour tous. Certains l'interprètent comme se rapprocher le plus possible des maths formelles d'un cours universitaire.

³ Extrait rapport de stage de Augustin. D., 2015

⁴ Extrait du rapport de stage de S. D. , 2014

« Au cours de ma préparation, je me suis posée beaucoup de questions sur la rigueur mathématique à adopter, que ce soit au niveau des mots à utiliser (ou à ne pas utiliser) ou au niveau de la rédaction. »⁵

Effectivement, ce sont de bonnes questions concernant le vocabulaire et l'expression car il n'y a pas vraiment de référence en matière de rigueur, les programmes ne le précisent pas explicitement en général et les manuels peuvent apporter des réponses différentes à ce propos. La formation par le tuteur ou les formateurs peuvent jouer sur ce point un rôle important.

« Le tuteur, lors des semaines d'observation, nous a bien montré l'importance de la rédaction au tableau. En effet, le cahier des élèves est le reflet du tableau et leur référence. Si en tant que professeur, nous voulons exiger une bonne rédaction des élèves, il faut leur « montrer le bon exemple » et leur donner des rédactions correctes.

Il faut notamment éviter d'utiliser trop de symboles mathématiques (car les élèves en sont friands mais ils ont tendance à mal les utiliser) et faire attention au sens des phrases. J'ai donc essayé d'être la plus rigoureuse possible dans la rédaction de mon cours. Le tuteur a quand même remarqué quelques erreurs et notamment une erreur importante (car c'est une erreur souvent commise par les élèves que le tuteur essaie de corriger : j'ai écrit une suite d'égalités de limites en partant de la limite que l'on voulait démontrer, ce qui suppose qu'elle existe alors que l'on ne le sait pas encore. Il m'a conseillé d'écrire chaque limite indépendamment et d'utiliser les connecteurs logiques...)]⁶

Le professeur débutant prend soudainement conscience que son écrit devient une référence pour les élèves, qu'une trace écrite, qui va rester dans les cahiers des élèves et peut être lue par ses parents ou d'autres professeurs de mathématiques doit être très rigoureuse. Il peut également comprendre que si l'élève copie son cours puis le travaille à partir de son cahier, d'une façon symétrique par rapport au professeur, l'appropriation sera facilitée.

Les erreurs du professeur débutant peuvent être mal vécues par lui-même ainsi que les critiques du tuteur ou co-stagiaire surtout si ce sont les mêmes que celles des élèves. Cela peut être si décourageant pour certains qu'ils préfèrent utiliser des supports tous prêts comme des cours de manuels ou cours en ligne.

La rigueur du vocabulaire employé est vraiment essentielle dans la rédaction du cours comme le décrit Arthur, étudiant agrégatif en stage filé : *« Mon premier cours avec les terminales ES, il s'agissait d'un cours de probabilités sur lequel je devais parler de la loi binomiale. Pour ce cours, Mme W. avait déjà distribué les photocopies du cours et j'ai donc suivi son cours. J'ai décidé de parler de ce cours car il a été assez difficile pour moi malgré qu'il ait duré moins longtemps que mon premier. En effet, je n'avais pas assez pris de recul sur les méthodes exactes que j'attendais des élèves et du vocabulaire, je me suis donc retrouvé à ne pas utiliser les bons mots pour décrire les bonnes choses, ou à présenter les choses avec un manque de rigueur, ce qui pouvait poser problème dû au fait que les élèves allaient adopter ma rédaction pour faire leurs propres exercices. »⁷*

Il s'agit encore ici d'un manque d'appropriation du cours qui n'a pas été conçu par l'étudiant lui-même mais par sa tutrice ainsi que peut-être d'une sous-estimation de la difficulté d'appropriation du vocabulaire et méthodes des probabilités, en réalité une question de distance entre savoirs universitaires et savoirs à enseigner dont ils n'avaient pas pris la mesure.

III) La mise en œuvre : dire le cours

Plusieurs stratégies peuvent être là encore envisagées : garder ses notes à la main ou essayer de s'en détacher pour rendre le cours plus vivant.

⁵ Extrait du rapport de stage de C. M. , 2014

⁶ Extrait du rapport de stage de C. M. , 2014

⁷ Extrait du rapport de stage d'Arthur, 2014

La plupart des étudiants ont beaucoup de difficultés à ne pas tenir leurs notes à la main pendant qu'ils énoncent ou écrivent le cours au tableau. Cela est valable pour les définitions, théorème, démonstrations et remarques ainsi que pour les exemples. Si on peut comprendre qu'un professeur puisse regarder ses notes à propos d'un exemple qu'il a judicieusement choisi à l'avance et ne souhaite pas en changer, en revanche une prise de distance par rapport aux notes peut apporter beaucoup par l'improvisation qu'elle nécessite peut-être et par le fait que le cours est « dit » et non « lu ».

On pourrait imaginer aussi que les étudiants puissent dominer facilement leur sujet compte-tenu de leur niveau en mathématiques mais c'est justement ce point qui semble poser problème : l'écart entre les mathématiques « à enseigner » et leurs propres connaissances semble grand (ZPD).

C. M. décrit cela dans son rapport : « *La co-stagiaire m'a également fait remarquer que je tenais, tout au long du cours, mes feuilles à la main. Je pense que le fait de penser à la rédaction m'a empêché de me détacher de feuilles sur lesquelles je savais que la rédaction était bonne, ou du moins meilleure qu'une rédaction improvisée* ».⁸ Ici, on peut remarquer que l'étudiante n'envisage pas de phase d'appropriation du cours, de prise de recul par rapport à celui-ci, après sa rédaction comme si le travail du professeur était terminé une fois qu'un écrit du cours était finalisé. De même l'improvisation semble inenvisageable pour elle, de peur de ne pas faire un cours « parfait ». Elle pourrait également considérer ses notes comme une « bouée de sauvetage » et ne les consulter qu'en cas de besoin mais il semble que ce soit plutôt dans son cas un appui constant tout au long de cours.

Ensuite, elle reprend : « *J'ai également essayé de me détacher de mes notes mais c'est la remarque que j'ai eu le plus de mal à mettre en application. Je pense cependant que cela est vraiment important car les élèves accordent surement plus de crédit à un professeur qui sait de quoi il parle qu'à un professeur qui a besoin de ses notes et semble donc ne pas maîtriser le sujet abordé. Je pense que cela ne se réglera pas tout de suite mais avec le temps et avec l'assurance et l'habitude acquises par quelques semaines ou mois d'enseignement.* »⁹

En effet, cette étudiante est très consciente du chemin à parcourir pour prendre de la distance par rapport aux notes mais aussi que cela constitue un objectif majeur pour être reconnue en tant que professeur. Il est très difficile actuellement de faire progresser les étudiants sur ce point et les résistances sont nombreuses. Même les tuteurs emploient parfois aussi des méthodes leur évitant une appropriation complète du cours et cela n'incite pas bien évidemment les étudiants à se détacher de leur écrit, les tuteurs ayant valeur de modèles..

On peut comprendre également que dans une pratique débutante, il est difficile de gérer à la fois la classe et le contenu du cours et que d'une certaine façon, le fait de garder les notes à la main puisse être sécurisant pour un étudiant.

Par exemple, Younès, étudiant agrégatif, en parle dans son rapport de stage filé : « *Pour la première séance, je n'ai fait que du cours « magistral ». Par peur de mal faire, je suis resté assez distant des élèves lors de cette séance, étant trop concentré sur le contenu. Forcément, la participation des élèves a été presque inexistante* »

Dans ce cas, de concentration du professeur sur le contenu prend le dessus sur la gestion des élèves et on peut dire qu'une bonne prise de recul par rapport aux notes ne pourrait que faciliter une meilleure interaction avec les élèves.

On peut noter aussi que pour éviter de garder les notes à la main, quelques étudiants affichent leur cours sur leur ordinateur placé sur le bureau et l'utilise comme un prompteur en faisant défiler les pages (L. G.). Dans ce cas, en restant concentrés sur l'écran, même placés face aux élèves, ils ne peuvent les gérer de façon efficace puisqu'ils écrivent ensuite leur cours au tableau.

⁸ Extrait du rapport de stage de C. M. , 2014

⁹ Extrait du rapport de stage de C. M. , 2014

Reste à étudier dans la mise en œuvre avec les modalités, l'organisation du déroulement, les supports.

Avec l'arrivée dans les classes de matériels informatiques tels que les vidéoprojecteurs ou tableaux numériques, nombreux sont ceux qui projettent leur cours intégralement, de façon fractionnée ou non, ou bien des cours à « trous ».

Annexe 2 Le questionnaire élève (F. Pilorge)

Ce questionnaire est destiné à des chercheurs qui étudient les habitudes des élèves vis-à-vis du cours de mathématiques. Vous n'êtes pas obligé d'indiquer votre nom, ni de répondre à toutes les questions mais répondez avec honnêteté s'il vous plaît. Merci pour votre aide.

1) Les moments de « cours »

Comment savez-vous à quel moment le professeur « fait du cours » pendant une séance de mathématiques ?

.....

Que faites-vous pendant ces moments ? A quoi pensez-vous ? Est-ce que vous ne faites qu'écrire (noter, recopier ...) ?

.....

D'après-vous, qu'est-ce que le professeur attend de vous pendant ces moments ?

.....

Pensez-vous répondre à cette attente jamais/parfois/toujours ? Pourquoi ?

.....

Trouvez-vous le « cours » plus/moins ennuyeux que les exercices ?

.....

Trouvez-vous le « cours » plus/moins difficile que les exercices ?

.....

Est-ce que l'utilisation d'un vidéoprojecteur change quelque chose ?

.....

Avez-vous des difficultés particulières ? Lesquelles ?

.....

Est-ce qu'il y a des moments, dans le cours, que vous préférez ?

.....

2) Qu'est-ce qu'il y a dans ce qu'on appelle « du cours » ?

.....

.....

Faites-vous une différence entre une définition, un théorème, une propriété ? Laquelle ?

.....

.....

Y-a-t-il des démonstrations dans le cours ? A quoi servent-elles à votre avis ? Pour vous, sont-elles utiles ?

.....

.....

Diriez-vous qu'il y a dans le cours des choses « générales » ? Si oui, qu'est-ce que cela veut dire ?

.....

.....

Les exemples vous aident-ils à comprendre le cours ? A le retenir ? Lesquels en particulier ?

.....

.....

.....

Les activités qui précèdent le cours vous sont-elles utiles ?

.....

Les exercices corrigés en classe sont-ils une aide ?

.....

Dans l'ensemble, trouvez-vous qu'il y a trop/juste assez/pas assez de choses dans le cours ?

.....
.....

Après le « cours » : quelle utilisation ?

Avez-vous des difficultés à utiliser vos cours, lesquelles ? Donnez des exemples si vous voulez. Avez-vous parfois l'impression qu'il vous manque quelque chose ?

.....
.....
.....

Savez-vous retrouver dans le « cours » ce qui va vous servir ? Comment ?

.....

Pour apprendre le cours :

Soulignez la ou les phrases qui vous correspondent et complétez avec d'autres si nécessaire :

Je ne regarde jamais mon cours et ça ne me manque pas

Je ne regarde jamais mon cours et ça me manque

Je relis le cours une fois avant chaque contrôle et c'est tout

Je relis le cours régulièrement une/ deux/trois/..... fois par semaine

Je reprends seul les exemples du cours

J'apprends par cœur certains résultats (préciser :)

Je regarde dans le livre (préciser)

Je fais des exercices supplémentaires

Je fais une fiche résumé de chaque chapitre

Je demande à un parent/ami/professeur particulier de me réexpliquer le « cours »

Je demande à un parent/ami/professeur particulier de me faire réciter le « cours »

Je regarde le cours à chaque fois que je dois faire un exercice à la maison / un devoir à la maison

Je regarde le cours seulement lorsque je bloque sur un exercice

.....

*Finale*ment :

Faites-vous la même chose pour chaque cours ou selon le contenu ?

À quels moments (à l'occasion d'exercices, de contrôles, régulièrement...) ? Pendant combien de temps ?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Avez-vous des difficultés à mémoriser le « cours » ? tout de suite ou au bout de quelque temps ?
Comment vous y prenez-vous pour mémoriser ?

.....

.....

.....

.....

Annexe 3 L'opinion d'une enseignante (dont une des classes a rempli le questionnaire)

La question du cours « plus ennuyeux » me semble en effet dépendre de plusieurs facteurs : du goût et des convictions de l'enseignant certainement ! C'est vrai que le cours me paraît souvent ennuyeux, surtout quand on a passé beaucoup de temps sur des activités avec le plaisir de découvrir, de trouver, de deviner... Même si j'essaie d'illustrer le cours avec des exemples et contre-exemples variés, j'ai toujours peur de les lasser et je me demande si c'est vraiment utile d'écrire tout cela, d'autant que c'est dans le livre ! Pour certains chapitres, j'opte d'ailleurs pour le cours « à trous » mais ils ont plus de mal à se l'approprier. Pas étonnant donc que mes élèves ressentent mon manque d'enthousiasme lors des moments d'exposition du cours ! J'ai parfois l'impression d'apporter des réponses à des questions que personne ne pose.

Cependant, si la classe est constituée d'une majorité d'élèves dits « scolaires », qui aiment copier, avoir un cahier bien tenu, les moments de cours vont se dérouler de façon sereine : le professeur a la main, les élèves sont dociles. Mais s'il y a beaucoup d'élèves qui n'aiment pas écrire (des garçons surtout) et qui se mettent à bavarder dès qu'ils ne sont plus occupés à chercher (c'est le cas de mes 1ères cette année, des esprits « vifs » sympa mais bouillonnants), le professeur va devoir s'interrompre pour obtenir le silence, poser plusieurs fois une question, etc. et finalement abréger pour leur redonner la main avec des exercices.

Le temps consacré en moyenne : aux activités d'intro 20%, au cours 20%, aux exos 50% à l'évaluation 10%.

J'essaie de présenter les activités d'introduction comme des questions qui vont permettre de comprendre tout le chapitre et qui sont donc essentielles (voir introduction suites par exemple) parfois on y passe plus de temps que prévu mais je laisse faire (ils sont par 2 et échangent ; je circule et fais des bilans partiels) et ceux qui se sont vraiment investis trouvent la suite « naturelle » il me semble.

Le rôle du cours :

Pendant l'exposé du cours,

Soit on repart des activités : « on a vu dans la liste 1 (introduction des suites) qu'on passe d'un nombre au suivant en multipliant par 2, on l'appellera une suite géométrique, qui peut donner la définition d'une suite géométrique ? »

Soit on donne brutalement la définition car ils ne pourront pas la trouver et on l'illustre ensuite abondamment (par ex sinus en 3^{ème}, je leur ai fait écrire la définition et ils l'ont appliquée, ce qui ne semble pas les gêner finalement)

Après le cours, j'essaie de les interroger sur la leçon en début de séance, avant la correction des exercices maison, mais souvent j'oublie...

Je fais des interrogations de cours (sur 10, une par trimestre au moins au lycée) et je mets une question de cours au début de chaque contrôle (sur 2 ou 3 points, souvent redémontrer un résultat : par ex le théorème de la médiane ou redonner simplement la définition du nombre dérivé)

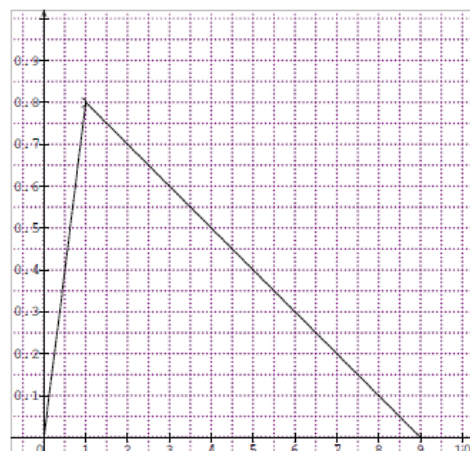
Pendant les corrections d'exercices, on va voir dans le cours ce qui est utile, j'essaie de leur apprendre à utiliser le cours.

Annexe 4 L'activité de l'enseignante A (version proposée à ses élèves)

Les fonctions : activité de découverte – 1

La courbe ci-contre représente l'évolution du taux d'alcoolémie (en gramme par litre de sang) d'un homme en fonction du temps écoulé (en heure), après absorption d'une boisson alcoolisée au cours d'un repas.

d'après *Sécurité routière – Éduscol*



- 1) Mettre une légende sur les axes.
- 2) Que signifie l'expression « en fonction de » dans le paragraphe ci-dessus ?

Réponse liée au contexte	La même réponse d'un point de vue mathématique
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

- 3) Quel est le taux d'alcoolémie au bout de 3 heures ?

Réponse liée au contexte	La même réponse d'un point de vue mathématique
.....	
.....	
.....	
.....	

- 4) Quand le taux d'alcoolémie vaut-il 0,5 g/L ?

Réponse liée au contexte	La même réponse d'un point de vue mathématique
.....	
.....	
.....	
.....	

5) Au bout de combien de temps, le taux d'alcoolémie est-il maximal ?

<i>Réponse liée au contexte</i>	<i>La même réponse d'un point de vue mathématique</i>
.....	
.....	
.....	
.....	

6) Au bout de combien de temps, n'y a-t-il plus de trace d'alcool dans le sang ?

<i>Réponse liée au contexte</i>	<i>La même réponse d'un point de vue mathématique</i>
.....	
.....	
.....	

7) Sachant qu'en France, selon la législation en vigueur, le taux d'alcoolémie autorisé pour conduire un véhicule ne doit pas dépasser 0,5 gramme par litre de sang (soit environ 2 verres de vin), à partir de quand cet homme pourrait-il prendre le volant sans être en infraction ?

<i>Réponse liée au contexte</i>	<i>La même réponse d'un point de vue mathématique</i>
.....	
.....	
.....	

8) Décrire comment varie le taux d'alcoolémie de cet homme en fonction du temps.

<i>Réponse liée au contexte</i>	<i>La même réponse d'un point de vue mathématique</i>
.....	
.....	
.....	
.....	

À retenir :

.....

.....

.....

.....

.....

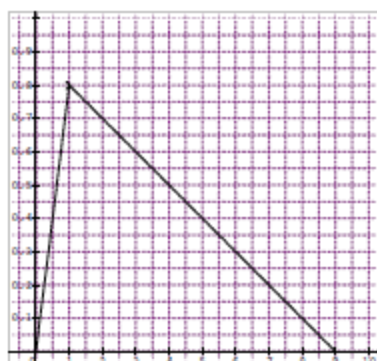
.....

Annexe 5 L'activité de l'enseignante A (version complétée)

Les fonctions : activité de découverte – 1

La courbe ci-contre représente l'évolution du taux d'alcoolémie (en gramme par litre de sang) d'un homme en fonction du temps écoulé (en heure), après absorption d'une boisson alcoolisée au cours d'un repas.

d'après Sécurité routière – Éducol



- 1) Mettre une légende sur les axes.
- 2) Que signifie l'expression « en fonction de » dans le paragraphe ci-dessus ?

Réponse liée au contexte	La même réponse d'un point de vue mathématique
Le taux d'alcoolémie dépend du temps écoulé : quand le temps varie, le taux varie. Plus précisément, à chaque instant écoulé correspond un taux d'alcoolémie déterminé. par rapport à, selon, correspondance, lien, dépendance, relation,...	Le taux d'alcoolémie est une fonction du temps écoulé. On note : $A = f(t)$. On lit : « A est une fonction de t » ou en abrégé : « A égal f de t » À chaque valeur t du temps écoulé correspond une valeur A unique du taux d'alcoolémie. On note : $f : t \rightarrow A$

- 3) Quel est le taux d'alcoolémie au bout de 3 heures ?

Réponse liée au contexte	La même réponse d'un point de vue mathématique
On lit graphiquement qu'après 3 h, le taux vaut 0,6 g/L de sang.	On lit graphiquement que : $f(3) = 0,6$ On peut aussi écrire : $f : 3 \rightarrow 0,6$ On dit que 0,6 est l' <u>image</u> de 3 par la fonction f.

- 4) Quand le taux d'alcoolémie vaut-il 0,5 g/L ?

Réponse liée au contexte	La même réponse d'un point de vue mathématique
On lit graphiquement que le taux vaut 0,5 g/L de sang au bout d'environ une demi-heure puis au bout de 4 heures.	On lit graphiquement que : $f(0,5) = 0,5$ et $f(4) = 0,5$. On dit que 4 est un <u>antécédent</u> de 0,5 par la fonction f.

5) Au bout de combien de temps, le taux d'alcoolémie est-il maximal ?

Réponse liée au contexte	La même réponse d'un point de vue mathématique
On lit graphiquement que le taux est maximal au bout d'une heure, il vaut alors 0,8 g/L de sang.	On lit : $f(1) = 0,8$.

6) Au bout de combien de temps, n'y a-t-il plus de trace d'alcool dans le sang ?

Réponse liée au contexte	La même réponse d'un point de vue mathématique
On lit graphiquement que le taux est nul au bout de 9 heures.	On lit : $f(9) = 0$.

7) Sachant qu'en France, selon la législation en vigueur, le taux d'alcoolémie autorisé pour conduire un véhicule ne doit pas dépasser 0,5 gramme par litre de sang (soit environ 2 verres de vin), à partir de quand cet homme pourrait-il prendre le volant sans être en infraction ?

Réponse liée au contexte	La même réponse d'un point de vue mathématique
On lit graphiquement qu'après 4 heures, le taux redescend en dessous de 0,5 g/L de sang.	La condition $A < 0,5$ est réalisée lorsque $t < 0,5$ ou $t > 4$.

8) Décrire comment varie le taux d'alcoolémie de cet homme en fonction du temps.

Réponse liée au contexte	La même réponse d'un point de vue mathématique
Le taux d'alcoolémie augmente rapidement au cours de la 1 ^{ère} heure pour atteindre son maximum puis il diminue lentement pendant les 8 heures suivantes.	Le taux d'alcoolémie est une fonction croissante du temps au cours de la 1 ^{ère} heure puis c'est une fonction décroissante pendant les 8 heures suivantes.

À retenir :

Une fonction est un objet mathématique qui permet de décrire un lien de dépendance entre deux grandeurs : à chaque valeur de la 1^{ère} grandeur appelée la variable correspond une valeur unique de la 2^{ème} grandeur appelée son image.

Définition du *Petit Robert* : relation qui existe entre deux quantités, telle que toute variation de la première entraîne une variation correspondante de la seconde.

On peut représenter une fonction à l'aide d'un graphique : la 1^{ère} grandeur est placée en abscisse et la 2^{ème}, celle qui dépend de la 1^{ère}, en ordonnée. Pour chaque valeur de l'abscisse, on associe une valeur unique de l'ordonnée.

On note : $f : x \rightarrow y$ avec $y = f(x)$

Ou, plus brièvement : $f : x \rightarrow f(x)$

On lit : « f est une fonction qui, à tout nombre x , fait correspondre le nombre $f(x)$ ».

Annexe 6 Un deuxième exemple de proximité descendante de l'enseignant B

Enfin, il propose un exercice (**deuxième contextualisation**) : *Bon un exemple là je vous laisse travailler. Je considère une fonction h , j'ai changé le nom exprès donc là c'est ce qu'on appelle la forme générale de la fonction. Donc la fonction h qu'est-ce qu'elle fait ? Elle prend un nombre x elle met x dans la machine et dans la machine la machine elle fait quoi on l'a déjà vu ?... [arrive à $h : x \rightarrow 2x+3$ l'image de x par h est $2x+3$]*

Il continue et enchaîne pour contextualiser le calcul de l'image par un exemple numérique.

Voilà. Quelle est l'autre façon de noter l'image de x l'image de x par par h ?... quelle est la manière de noter l'image de x , comment je note l'image de x ? Attention le nom de la fonction s'appelle comment ? E Ah oui $h(x)$.

P : Voilà. Comment je fais pour calculer l'image de 4 ?

*P : donc je remplace x par combien ? x c'est combien, 4. D'où la notation vous allez voir c'est super simple. Le nombre à l'entrée c'est 4, ça veut dire que je remplace x par ... 4 ... 4 L'image c'est tout ça, on est d'accord ? Ça c'est aussi l'image, ce que j'entoure en rouge c'est l'image et ce que je mets en vert c'est l'antécédent. Donc finalement l'image de 4 ça fait combien après calcul ? E : $8+3$, 11. Le prof écrit $h(4)=2*4+3$*

P : Donc là qu'est-ce que j'ai fait ? Je suis passé d'une phrase en français c'est-à-dire tout ce que vous avez fait ce matin et au lieu d'utiliser du vocabulaire ce matin vous vous rappelez à 1on a associé je faisais tout en français. Là je passe du français aux maths. Donc quand je passe aux maths j'utilise notations mathématiques signe égal, multiplié, plus etc en français ça donne. En français tous les premiers exercices que je vais vous donner ça va être des exercices de traduction. En français cela donne que vous sachiez passer d'une phrase en français à l'égalité mathématique correspondante. En français cela donne l'image de 4 par h vaut, vaut quoi ? l'image de 4 vaut 11... Et ça continue avec antécédent...

Annexe 7 Extraits des programmes encours en 2015 concernant les fonctions

Programme sixième

1. Organisation et gestion de données. Fonctions

La résolution de problèmes de proportionnalité est déjà travaillée à l'école primaire. Elle se poursuit en Sixième, avec des outils nouveaux. La proportionnalité fait l'objet d'un apprentissage continu et progressif sur les quatre années du collège et permet de comprendre et de traiter de nombreuses notions du programme.

À l'école primaire, les élèves ont été mis en situation de prendre de l'information à partir de tableaux, de diagrammes ou de graphiques. Ce travail se poursuit au collège, notamment avec l'objectif de rendre les élèves capables de faire une interprétation critique de l'information apportée par ces types de présentation des données, aux natures très diverses, en liaison avec d'autres disciplines (géographie, sciences de la vie et de la terre, technologie...).

Connaissances	Capacités	Commentaires
1.1. Proportionnalité Propriété de linéarité. Tableau de proportionnalité. Pourcentages.	- Reconnaître les situations qui relèvent de la proportionnalité et les traiter en choisissant un moyen adapté : - utilisation d'un rapport de linéarité, entier ou décimal, - utilisation du coefficient de proportionnalité, entier ou décimal, - passage par l'image de l'unité (ou « règle de trois »), - <i>* utilisation d'un rapport de linéarité, d'un coefficient de proportionnalité exprimé sous forme de quotient.</i> - Appliquer un taux de pourcentage	Les problèmes à proposer (qui relèvent aussi bien de la proportionnalité que de la non proportionnalité) se situent dans le cadre des grandeurs (quantités, mesures). Ils doivent relever de domaines familiers des élèves et rester d'une complexité modérée, en particulier au niveau des nombres mis en œuvre. Les rapports utilisés sont, soit des rapports entiers ou décimaux simples <i>* soit des rapports exprimés sous forme de quotient.</i> Les élèves doivent connaître le sens de l'expression « ...% de » et savoir l'utiliser dans des cas simples où aucune technique n'est nécessaire.
1.2. Organisation et représentation de données Représentations usuelles : tableaux. Repérage sur un axe. Représentations usuelles : - diagrammes en bâtons, - <i>* diagrammes circulaires ou demi-circulaires,</i> - graphiques cartésiens.	- Lire, utiliser et interpréter des données à partir d'un tableau. - Lire interpréter et compléter un tableau à double entrée. - <i>* Organiser des données en choisissant un mode de présentation adapté :</i> - <i>tableaux en deux ou plusieurs colonnes,</i> - <i>tableaux à double entrée.</i> - Lire et compléter une graduation sur une demi droite graduée, à l'aide d'entiers naturels, de décimaux, de fractions simples $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ <i>* ou de quotients (placement exact ou approché).</i> - Lire, utiliser et interpréter des informations à partir d'une représentation graphique simple.	Il s'agit d'un premier pas vers la capacité à recueillir des données et à les présenter sous forme de tableau. Ce travail doit être l'occasion de manier les instruments de tracé et de mesure. La capacité visée concerne l'aptitude à faire une interprétation globale et qualitative de la représentation étudiée (évolution d'une grandeur en fonction d'une autre). Dès la classe de 6e, l'utilisation de calculatrices et de logiciels permet de familiariser les élèves avec le passage d'un type d'organisation, d'un type de présentation à un autre.

Classe de cinquième

1. Organisation et gestion de données, fonctions

En classe de cinquième, la proportionnalité occupe toujours une place centrale. Les méthodes de résolution des problèmes de proportionnalité évoluent avec les connaissances des élèves, notamment avec une meilleure maîtrise de la notion de quotient. La partie relative au traitement et à la représentation de données a pour objectif d'initier à la lecture, à l'interprétation, à la réalisation et à l'utilisation de diagrammes, tableaux et graphiques et de mettre en évidence la relativité de l'information représentée. Les travaux correspondants sont conduits à partir d'exemples et en liaison, chaque fois qu'il est possible, avec l'enseignement des autres disciplines et l'étude des thèmes de convergence.

Connaissances	Capacités	Commentaires
---------------	-----------	--------------

- Proportionnalité • Propriété de linéarité. • Tableau de proportionnalité. • Passage à l'unité ou « règle de trois ».	Compléter un tableau de nombres représentant une • relation de proportionnalité, en particulier déterminer une quatrième proportionnelle. • - Reconnaître si un tableau complet de nombres est ou non un tableau de proportionnalité.	• Le travail sur des tableaux de nombres sans lien avec un contexte doit occuper une place limitée. Les activités numériques et graphiques font le plus • souvent appel à des situations mettant en relation deux grandeurs. • Il est possible d'envisager, dans une formule, des variations d'une grandeur en fonction d'une autre grandeur mais toute définition de la notion de • fonction est exclue. • Les procédures utilisées pour traiter une situation de proportionnalité sont de même nature qu'en classe de sixième. • L'usage du « produit en croix » est exclu en classe de cinquième. • Pour les coefficients de proportionnalité ou les rapports de linéarité exprimés sous forme de • quotient, on choisira des nombres qui évitent des difficultés techniques inutiles. En particulier les quotients de nombres décimaux ne sont pas exigibles.
1.2. Expressions littérales	Utiliser une expression littérale. <i>Produire une expression littérale.</i>	De nombreux thèmes du programme, notamment dans le domaine grandeurs et mesures, conduisent à utiliser des expressions littérales (formules).
1.3. Activités graphiques Repérage sur une droite graduée. Repérage dans le plan. Tableau de données, représentations graphiques de données.	Sur une droite graduée : - lire l'abscisse d'un point donné, - placer un point d'abscisse donnée (exactement ou approximativement, en fonction du contexte), - <i>déterminer la distance de deux points d'abscisses données.</i> Dans le plan muni d'un repère orthogonal : - lire les coordonnées d'un point donné, - placer un point de coordonnées données, <i>Connaître et utiliser le vocabulaire : origine, coordonnées, abscisse, ordonnée.</i> - Lire et interpréter des informations à partir d'un tableau ou d'une représentation graphique (diagrammes divers, histogramme). - Présenter des données sous la forme d'un tableau, les représenter sous la forme d'un diagramme ou d'un histogramme (dans ce cas les classes sont toujours de même amplitude).	Les nombres utilisés dans ces activités peuvent être des entiers, des décimaux ou des quotients simples. Les activités graphiques conduisent : - à établir la correspondance entre nombres et points d'une droite graduée (une même droite peut être graduée de plusieurs façons), - à interpréter l'abscisse d'un point d'une droite graduée en termes de distance et de position par rapport à l'origine, - à choisir l'échelle permettant de nombres sur une portion de droite graduée. Le repérage est à relier avec des situations de la vie quotidienne, le vocabulaire n'est pas un objet d'apprentissage pour lui-même. <i>Des activités dans lesquelles les élèves ont eux-mêmes à graduer une droite ou à produire un graphique sont proposées.</i> Le choix de la représentation est lié à la nature de la situation étudiée. L'utilisation d'un tableur permet d'enrichir ce travail en le prolongeant à des situations plus complexes que celles qui peuvent être traitées « à la main ».

Connaissances	Capacités	Commentaires
1.1. Notion de fonction Image, antécédent, notations $f(x)$, $x \rightarrow f(x)$.	- Déterminer l'image d'un nombre par une fonction déterminée par une courbe, un tableau de données ou une formule. - Déterminer un antécédent par lecture directe dans un tableau ou sur une représentation graphique.	Toute définition générale de la notion de fonction et la notion d'ensemble de définition sont hors programme. La détermination d'un antécédent à partir de l'expression algébrique d'une fonction n'est exigible que dans le cas des fonctions linéaires ou affines.
1.2 Fonction linéaire, fonction affine. Proportionnalité. Fonction linéaire. Coefficient directeur de la droite représentant une fonction linéaire. Fonction affine. Coefficient directeur et ordonnée à l'origine d'une droite représentant une fonction affine.	- Déterminer par le calcul l'image d'un nombre donné et l'antécédent d'un nombre donné. - Déterminer l'expression algébrique d'une fonction linéaire à partir de la donnée d'un nombre non nul et de son image. - Représenter graphiquement une fonction linéaire. - Connaître et utiliser la relation $y=ax$ entre les coordonnées (x,y) d'un point M qui est caractéristique de son appartenance à la droite représentative de la fonction linéaire $x \rightarrow ax$. - Lire et interpréter graphiquement le coefficient d'une fonction linéaire représentée par une droite - Déterminer par le calcul l'image d'un nombre donné et l'antécédent d'un nombre donné. - Représenter graphiquement une fonction affine. - Lire et interpréter graphiquement les coefficients d'une fonction affine représentée par une droite. - Déterminer la fonction affine associée à une droite donnée dans un repère.	En classe de troisième, il s'agit de compléter l'étude de la proportionnalité par une synthèse d'un apprentissage commencé à l'école primaire. L'utilisation de tableaux de proportionnalité permet de mettre en place le fait que le processus de correspondance est décrit par une formulation du type « je multiplie par a ». Cette formulation est reliée à $x \rightarrow ax$. Pour des pourcentages d'augmentation ou de diminution, le fait que, par exemple, augmenter de 5 % c'est multiplier par 1,05 et diminuer de 5 % c'est multiplier par 0,95 est établi. Certains traitements des situations de proportionnalité utilisés dans les classes précédentes sont reliés aux propriétés d'additivité et d'homogénéité de la fonction linéaire. Parmi les situations qui ne relèvent pas de la proportionnalité, certaines sont cependant modélisables par une fonction dont la représentation graphique est une droite. Cette remarque peut constituer un point de départ à l'étude des fonctions affines. Pour les fonctions affines, la proportionnalité des accroissements de x et y est mise en évidence.

Classe de seconde

1. Fonctions

L'objectif est de rendre les élèves capables d'étudier :

- un problème se ramenant à une équation du type $f(x) = k$ et de le résoudre dans le cas où la fonction est donnée (définie par une courbe, un tableau de données, une formule) et aussi lorsque toute autonomie est laissée pour associer au problème divers aspects d'une fonction ;

- un problème d'optimisation ou un problème du type $f(x) > k$ et de le résoudre, selon les cas, en exploitant les potentialités de logiciels, graphiquement ou algébriquement, toute autonomie pouvant être laissée pour associer au problème une fonction.

Les situations proposées dans ce cadre sont issues de domaines très variés : géométrie plane ou dans l'espace, biologie, économie, physique, actualité etc. Les logiciels mis à la disposition des élèves (tableur, traceur de courbes, logiciels de géométrie dynamique, de calcul numérique, de calcul formel, etc.) peuvent être utilement exploités.

Par ailleurs, la résolution de problèmes vise aussi à progresser dans la maîtrise du calcul algébrique et à approfondir la connaissance des différents types de nombres, en particulier pour la distinction d'un nombre de ses valeurs approchées.

Il s'agit également d'apprendre aux élèves à distinguer la courbe représentative d'une fonction des dessins obtenus avec un traceur de courbe ou comme représentation de quelques données. Autrement dit, il s'agit de faire comprendre que des dessins peuvent suffire pour répondre de façon satisfaisante à un problème concret mais qu'ils ne suffisent pas à démontrer des propriétés de la fonction.

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Fonctions Image, antécédent, courbe représentative.	- quantités par une formule. Pour une fonction définie par une courbe, un tableau de données ou une formule : - identifier la variable et, éventuellement, l'ensemble de définition ; -déterminer l'image d'un nombre - rechercher des antécédents d'un nombre.	Les fonctions abordées sont généralement des fonctions numériques d'une variable réelle pour lesquelles l'ensemble de définition est donné. Quelques exemples de fonctions définies sur un ensemble fini ou sur $\mathbb{N}$, voire de fonctions de deux variables (aire en fonction des dimensions) sont à donner.
Étude qualitative de fonctions Fonction croissante, fonction décroissante ; maximum, minimum d'une fonction sur un intervalle.	-Décrire, avec un vocabulaire adapté ou un tableau de variations, le comportement d'une fonction définie par une courbe. -Dessiner une représentation graphique compatible avec un tableau de variations. Lorsque le sens de variation est donné, par une phrase ou un tableau de variations : -comparer les images de deux nombres d'un intervalle ; -déterminer tous les nombres dont l'image est supérieure (ou inférieure) à une image donnée.	Les élèves doivent distinguer les courbes pour lesquelles l'information sur les variations est exhaustive, de celles obtenues sur un écran graphique. Les définitions formelles d'une fonction croissante, d'une fonction décroissante, sont progressivement dégagées. Leur maîtrise est un objectif de fin d'année. - Même si les logiciels traceurs de courbes permettent d'obtenir rapidement la représentation graphique d'une fonction définie par une formule algébrique, il est intéressant, notamment pour les fonctions définies par morceaux, de faire écrire aux élèves un algorithme de tracé de courbe.
Équations Résolution graphique et algébrique d'équations.	- Mettre un problème en équation. -Résoudre une équation se ramenant au premier degré. -Encadrer une racine d'une équation grâce à un algorithme de dichotomie.	Pour un même problème, combiner résolution graphique et contrôle algébrique. Utiliser, en particulier, les représentations graphiques données sur écran par une calculatrice, un logiciel.
Fonctions de référence Fonctions linéaires et fonctions affines Variations de la fonction carré, de la fonction inverse.	-Donner le sens de variation d'une fonction affine. - Donner le tableau de signes de $ax + b$ pour des valeurs numériques données de a et b . -Connaître les variations des fonctions carré et inverse. -Représenter graphiquement les fonctions carré et inverse.	On fait le lien entre le signe de $ax + b$, le sens de variation de la fonction et sa courbe représentative. Exemples de non-linéarité. En particulier, faire remarquer que les fonctions carré et inverse ne sont pas linéaires.

Études de fonctions Fonctions polynômes de degré 2. Fonctions homographiques.	- Connaître les variations des fonctions polynômes de degré 2 (monotonie, extremum) et la propriété de symétrie de leurs courbes. - Identifier l'ensemble de définition d'une fonction homographique.	Les résultats concernant les variations des fonctions polynômes de degré 2 (monotonie, extremum) et la propriété de symétrie de leurs courbes sont donnés en classe et connus des élèves, mais peuvent être partiellement ou totalement admis. Savoir mettre sous forme canonique un polynôme de degré 2 n'est pas un attendu du programme. Hormis le cas de la fonction inverse, la connaissance générale des variations d'une fonction homographique et sa mise sous forme réduite ne sont pas des attendus du programme.
Inéquations Résolution graphique et algébrique d'inéquations.	- Modéliser un problème par une inéquation. - Résoudre graphiquement des inéquations de la forme : $f(x) < k$; $f(x) < g(x)$. - Résoudre une inéquation à partir de l'étude du signe d'une expression produit ou quotient de facteurs du premier degré. - Résoudre algébriquement les inéquations nécessaires à la résolution d'un problème.	Pour un même problème, il s'agit de : - combiner les apports de l'utilisation d'un graphique et d'une résolution algébrique, - mettre en relief les limites de l'information donnée par une représentation graphique. Les fonctions utilisables sont les fonctions polynômes de degré 2 ou homographiques.

Annexe 8 – Retranscriptions et commentaires du cours d'Exo7 sur les limites de suites

Exo7 – LI – Limites de suite – Cours 2
<http://youtu.be/253AEiNBvGw>

Cette retranscription est utilisée dans troisième partie de la présente brochure.

On trouvera ci-dessous la retranscription des 14 premières minutes du cours sur les limites de suites. Le début du cours d'analyse de première année d'université d'Exo7 est organisé ainsi :

Chapitre 1 : Les nombres réels

L'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$

Propriétés de $\mathbb{R}$

Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Borne supérieure

Chapitre 2 : Les suites

Définitions

Limites (cours analysé ci-dessous)

Exemples remarquables

Théorème de convergence

Suites récurrentes

Un premier cours sur les suites traite donc de la définition des suites, mais aussi des suites majorées, minorées, bornées, des suites croissantes et décroissantes.

Dans les retranscriptions, les remarques sur le déroulement, la gestuelle de l'enseignant, le diaporama... sont indiquées entre crochets : [commentaire]. Les formulations de symboles ou de formules sont retranscrites le plus

phonétiquement possible (par exemple « u_n » quand la personne lit « u_n », ou « $\mathbb{R}$ » quand la personne lit « $\mathbb{R}$ »). Le déroulement du temps est indiqué à chaque changement de diapositive dans le cours, environ toutes les minutes dans les corrections d'exercices.

Pour faciliter la lecture de la retranscription ci-dessous, nous avons découpé les 14 minutes en épisodes, nous indiquons ici une indication de leurs contenus et leurs durées :

- Limite finie, premières définitions (divers formulations et registres) [3"]
- Limite infinie, premières définitions, limite finie et unicité de la limite [1"50]
- Opérations sur les limites finies, opération sur les limites infinies [2"45]
- Preuve d'une des propriétés (limite du produit de deux suites convergentes) :
 - . lemme 1 (convergente $\Rightarrow$ bornée) [2"30]
 - . lemme 2 (produit d'une suite bornée et d'une suite tendant vers zéro. [2"]
 - . utilisation des deux lemmes et conclusion. [1"40]

Informations sur Exo7

Site : <http://exo7.emath.fr>

Le site et les vidéos sont produits par Arnaud Bodin (Université Lille 1), Léa Blanc-Centi (Université Lille 1), Niels Borne (Université Lille 1), Benjamin Boutin (Université Rennes 1) Laura Desideri (Université Lille 1) et Pascal Romon (Université Marne la Vallée). Le site Exo7 et les vidéos sont soutenus financièrement par l'université Lille 1 et Unisciel ; le site est hébergé par la SMAI et la SMF.



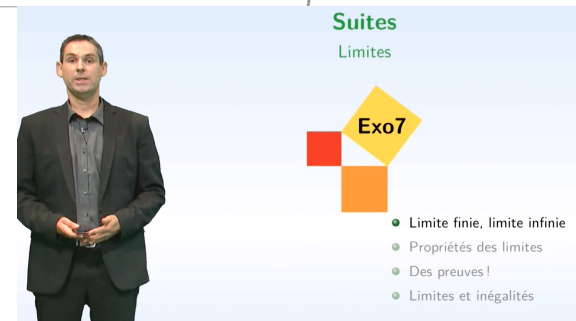
Retranscription et [déroulement]

Dans cette partie sur les suites, nous donnons la définition précise de la limite (finie ou infinie) pour une suite de réels. Après quoi nous discuterons des propriétés des limites. Et après avoir donné quelques preuves, nous concluons en précisant les liens entre limites et inégalités [l'enseignant sort du champ]

Commentaires

« définition précise » ici, puis « définition mathématique » (formulation en langue naturelle), « phrase mathématique » ensuite (formulation symbolique).

Captures d'écran



Limite finie, premières définitions (diverses formulations et registres)

[0:40, nouvelle diapo, arrivée de l'enseignant]

Voici la définition mathématique de limite. La suite u_n a pour limite l appartenant à $\mathbb{R}$ si pour tout epsilon positif il existe un entier grand N tel que dès que l'entier petit n est plus grand que grand N alors valeur absolue de u_n moins l est plus petit que epsilon.

Voici la phrase mathématique [nouvelle ligne sur la diapo]. Pour tout epsilon [main gauche sur $\forall$] il existe un entier [un pas, main gauche sur $\exists$] naturel grand N , tel que [deux pas, main gauche sur « $(n \geq N)$ »] si petit n est plus grand que N alors [un pas, main gauche sur « $\Rightarrow$ »] valeur absolue de [recule] u_n moins l est plus petit que epsilon [est à gauche des phrases].

Autrement dit u_n est aussi proche que l'on veut de l à partir d'un certain rang.

[Nouvelle ligne sur la diapo] Si elle existe, on note limite [main gauche devant « lim »] de u_n égale à l lorsque n tend vers plus l'infini ou aussi [main gauche entre « ou » et « u_n »] u_n tend vers l lorsque n tend vers plus l'infini. [nouvelle ligne sur la diapo] L'inégalité valeur absolue de u_n moins l inférieur à epsilon équivaut [avance, main gauche sur « $\Leftrightarrow$ »] à l'encadrement [se recule] u_n compris entre l moins epsilon et l plus epsilon [sort du champ]

[2:10, nouvelle diapo, une ligne avec la définition sous forme symbolique, arrivée de l'enseignant] Voici une figure

Formulation 1 et 2 : « u a pour limite l » (oral et écrit). Oralisation de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par « u_n ».

Formulation 3, écrite (« $\in$ » comme abréviation ou crase, « si » de définition, quantification implicite de n en lien avec l'implication).

Formulation 4, orale (très proche de la précédente, « si ... alors ... » est lu « dès que ... alors ... »).

Formulation 5, écrite (symbolique).

Formulation 6, orale (dans la quantification de ε « >0 » n'est pas verbalisé. La quantification sur n n'est pas verbalisée. Les quantifications de ε et de N , et l'implication sont verbalisées classiquement : « pour tout », « il existe ... tel que », « si ... alors ... »).

Formulation 7, orale. Le point de vue est très différent, il fait intervenir des acteurs (virtuels) : l'usage de « on » permet se placer à la fois comme démonstrateur (je veux prouver que la suite a pour limite l , je dois pouvoir prouver qu'il existe N quel que soit le choix de ε que je m'impose) ou d'utilisateur (je sais que la limite de u est l , je choisis un ε qui me convient).

Première utilisation de « à partir d'un certain rang »).

Apparition de deux notations qui deviendront des formulations écrites (8 et 9), et de la formulation « tendre vers », qui n'est pas écrite (qui s'applique ici à n puis à u_n , formulation 10 et 11). Apparition de la problématique de l'existence de la limite.

La présence de cette équivalence ici n'est pas commentée. L'utilisation de « l'encadrement » et « compris entre » dépasse la simple lecture des inégalités (idée de segment etc.)

Ceci quelque que soit u, n, l et ε (implicite).

Dans cette introduction de la figure et le commentaire qui suit, rien n'est dit sur les axes.

Définition

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a pour **limite** $\ell \in \mathbb{R}$ si : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que si $n \geq N$ alors $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$

Définition

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a pour **limite** $\ell \in \mathbb{R}$ si : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que si $n \geq N$ alors $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon)$$

Définition

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a pour **limite** $\ell \in \mathbb{R}$ si : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que si $n \geq N$ alors $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon)$$

• On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ ou $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$

• $|u_n - \ell| \leq \varepsilon \iff \ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon)$$

Retranscription et [déroulement]

[apparition de la figure] pour vous aider à comprendre et retenir la définition [main gauche devant la ligne de la définition] de u_n tend vers l lorsque n tend vers plus l'infini.

La suite est représentée en bleu [mouvement de la main entre « $l+\varepsilon$ » et « $l-\varepsilon$ »] et tout choix de epsilon, qui moralement est très petit, définit une bande horizontale [main gauche suivant la ligne orange du haut, puis celle du bas] entre ces deux traits rouges qui correspondent aux ordonnées comprises entre l moins epsilon [jeux de main] et l plus epsilon.

Nous devons alors trouver un rang grand N tel que pour tous les indices petits n supérieurs à ce grand N alors u_n indice petit n est dans la bande, c'est-à-dire [aller et retours de la main gauche entre les deux lignes au niveau de l'axe] compris entre l moins epsilon et l plus epsilon.

Sur cet exemple [s'avance vers la droite] j'ai choisi cette valeur de grand N [main désignant N , puis se recule] et effectivement toutes les valeurs suivantes sont dans la bande [s'avance] c'est le cas en particulier pour cette valeur de u indice petit n [se recule à gauche de la figure]

Bien sûr si on me donne un epsilon plus petit la bande [geste des deux mains partant de l'écartement entre « $l+\varepsilon$ » et « $l-\varepsilon$ » pour se resserrer vers le pointillé] sera plus fine [recule à gauche de la figure] alors ce grand N ne convient plus et je dois en trouver un beaucoup plus grand. Si pour tous les epsilon [mouvement des deux mains vers la gauche et intonation] je peux trouver un tel grand N [mouvement des deux mains vers la droite] alors, par définition, u_n tend vers l . [sort du champ]

Commentaires

Seule apparition du « vous ». Méta3.
Répétition du lien entre la formulation symbolique et la formulation « tendre vers ». Annonce du lien avec le point de vue graphique.
L'enseignant se positionne comme démonstrateur (« qui moralement est très petit », c'est-à-dire que l'on peut m'imposer comme très petit). Rq : « moralement » est un peu fort, ε pourrait aussi être grand (positionnement comme utilisateur de la définition, cf. plus bas ε est choisis égal à 1).
Développe le parallélisme formule / graphique (insertion des ordonnées, des traits...).

Confirmation de la position du démonstrateur (« nous devons trouver un »). Expression étrange : « Pour tous les ... alors ... ». La quantification sur n est ici exprimée.
Formulation 12, graphique, orale (lecture comme démonstrateur).

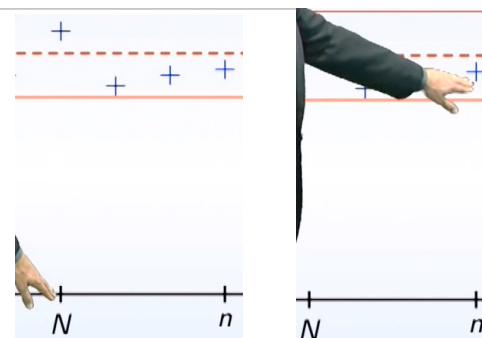
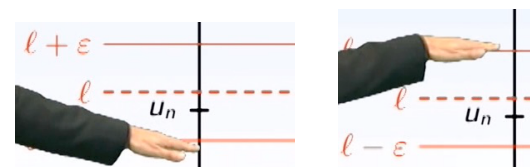
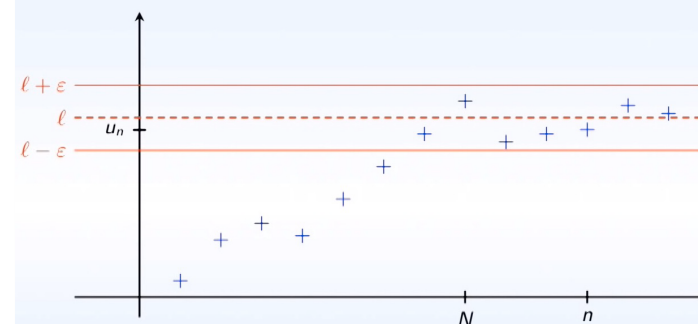
Toutes les valeurs / toutes les valeurs dessinées.

Démonstrateur : ε peut m'être imposé plus petit, je devrais alors trouver un autre N (plus grand).

Formulation 13, orale (démontrer qu'une suite tend vers l).

Captures d'écran

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq N \implies |u_n - l| \leq \varepsilon)$$



Limite infinie, premières définitions, limite finie et unicité de la limite

[3:40, nouvelle diapo, arrivée de l'enseignant] La suite u_n tend vers plus l'infini si [se tourne vers la diapo] pour tout A strictement positif [montre « $\forall$ »] il existe un entier naturel [montre « $\exists$ »] grand N tel que si petit n [avance d'un pas, montre la parenthèse gauche] est plus grand que grand N alors u_n [montre « u_n »] est plus grand que A [se recule à gauche].

Autrement dit, u_n est aussi grand que l'on veut à partir d'un certain rang.

[Ajout du graphique sur la diapo] Sur ce graphique, pour chaque A [se tourne vers le graphique, main à plat au dessus du « A »] qui moralement est très grand, on doit trouver un rang grand N [se baisse pour montrer « N »] tel que [se recule à gauche] pour des indices plus grand que grand N alors les termes sont supérieurs à A .

On obtient la définition de u_n tend vers moins l'infini en inversant le signe et le sens de l'inégalité pour la constante grand A . Ce qui revient à dire pour faire bref que la suite moins u_n tend vers plus l'infini [sort du champ].

Limites infinies : « tend vers » est ici écrit (et dit). Une formulation écrite symbolique et une formulation orale (lecture). Passe la main devant « $\forall n \in \mathbb{N}$ », ne verbalise (classiquement) pas cette quantification.

3^e formulation. Rôle du « on », voir ci-dessus (formulation 7).

Axes toujours non précisés.

Position de démonstrateur : « Pour chaque A on doit trouver etc. », « moralement est très grand » soulignant le fait que l'on peut me l'imposer très grand.

Ambiguïté : A apparaît dans deux inégalités.

Définition

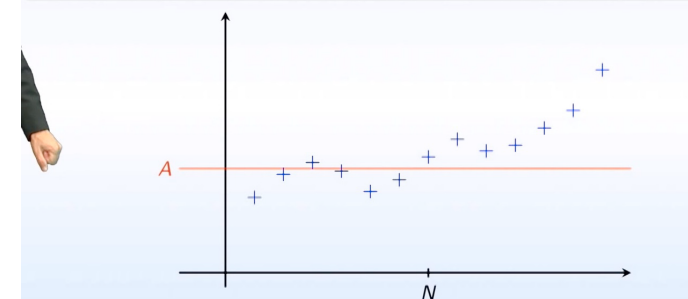
La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **tend vers** $+\infty$ si :

$$\forall A > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq N \implies u_n \geq A)$$

Définition

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **tend vers** $+\infty$ si :

$$\forall A > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq N \implies u_n \geq A)$$



[4:43, nouvelle diapo, arrivée de l'enseignant] Enfin, une suite u_n est dite convergente si elle admet une limite finie [petit signe de la main gauche pouvant vouloir dire « attention »]. Sinon on dit que la suite est divergente, c'est-à-dire soit la suite tend vers plus l'infini ou moins l'infini soit elle n'admet pas de limite.

[Nouvelle ligne sur la diapo] Voici une proposition importante [geste de la main]. Si une suite est convergente, sa limite est unique. Il y a donc unicité de la limite [index levé] d'une suite. Autrement dit, si une limite existe elle est unique et on parle de la [intonation] limite [sort du champ].

1^{re} phrase : lecture du texte (mis à part le « Enfin », la notation de la suite, les couleurs et la gestuelle...).

2^e phrase : l'enseignant complète et explicite ce qui est écrit (qui déjà explicitait une partie du « sinon »), notamment la parenthèse.

Méta3 : « important ».

Lecture puis trois reformulations orales (« il y a unicité », « si elle existe elle est unique », « la limite ») de la propriété écrite.

Définition

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **convergente** si elle admet une limite **finie**. Elle est **divergente** sinon (y compris donc lorsqu'elle tend vers $\pm\infty$).

Définition

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **convergente** si elle admet une limite **finie**. Elle est **divergente** sinon (y compris donc lorsqu'elle tend vers $\pm\infty$).

Proposition

Si une suite est convergente, sa limite est unique

Opérations sur les limites finies, opérations sur les limites infinies

[5:30, nouvelle diapo, arrivée de l'enseignant] On rassemble ici quelques opérations usuelles sur les limites. On commence par les limites finies.

Si une suite u_n tend vers un réel l alors [se déplace vers la droite] λ [désigne « on a »] fois u_n où chaque terme est multiplié par le réel λ [se recule vers la gauche] a pour limite λ fois l .

[Nouvelle ligne sur la diapo] Si on a une suite qui tend vers l et une autre qui tend vers l' , alors la somme tend vers l plus l' [montre la troisième ligne]. Autrement dit la limite d'une somme est la somme des limites [retire sa main, ajout de la formule sur les produits].

C'est pareil pour les produits [se déplace vers la droite, montre le « et »], la limite d'un produit est le produit des limites. Si u_n tend vers l et v_n tend vers l' alors la suite dont le terme général est u_n fois v_n tend vers l fois l' [se recule, les deux égalités sont encadrées].

Ces deux propriétés [se recule vers la gauche] sont utiles continuellement.

[Nouvelle ligne sur la diapo] Soit maintenant une suite u_n qui a une limite non nulle [index levé] alors, premièrement, à partir d'un certain rang la suite u_n ne s'annule pas, et deuxièmement la suite des termes $1/u_n$ tend vers un sur l .

Méta2 : « quelques », « usuelles », moins valorisant que « important » précédent. Structuration : « on commence par » (la suite viendra à la diapo suivante, 2 minutes plus tard).

Remarques sur ces propriétés : aucune quantification n'est explicitée (sur la diapo comme oralement), l'existence de la limite n'est pas évoquée explicitement (« tend vers » semble le sous entendre), l'oral « la suite u_n » correspond à $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Ne verbalise pas « $n \rightarrow +\infty$ », « vers un réel l » condense plusieurs parties du formalisme. L'enseignant dit « alors $(\lambda u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a pour limite λl » en précisant les termes de la suite. Ambiguïté de la formulation (suite / terme de la suite).

Les deux formulations orales ne parlent plus de u ou v , ni de n (et pas de l pour la 2^e reformulation), on voit là notamment une trace du fait que ces propriétés sont implicitement universellement quantifiées (u, v et l sont des variables muettes). « Si...alors... » non contraposable : le « si » introduit une condition de sens et non seulement une condition pour que la conclusion soit vraie.

De même deux reformulations orales de la propriété concernant les produits : l'une condensée en écho à celle de la somme, l'autre est plus proche de la diapo (avec une lecture diagonale : il relit les hypothèses communes puis saute la propriété de la somme), expression « la suite dont le terme général est ... » non utilisée pour la somme.

Méta2 (le cadre de la diapo apparaît et « utiles continuellement »). Les hypothèses ne sont pas encadrées.

Nouvelle expression : « la suite des termes ». Toutes ces propriétés présupposent l'existence des limites. On peut noter que l'expressions « qui a une limite non nulle » souligne sans doute l'hypothèse d'existence de la limite (elle contient « a une limite »).

L'expression « Si on a une suite qui tend vers l » utilisée pour la somme, met plus l'accent sur le fait que la limite est l que sur le fait que l'on est aussi en train de supposer qu'elle existe).

Proposition Opérations sur les limites

① Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$, où $\ell \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda u_n = \lambda \ell$

$$\lambda \in \mathbb{R} \text{ on a } \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda u_n = \lambda \ell$$

Proposition Opérations sur les limites

① Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$, où $\ell \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda u_n = \lambda \ell$

② Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell'$, où $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = \ell + \ell'$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = \ell + \ell' \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n) = \ell \times \ell'$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = \ell + \ell' \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n) = \ell \times \ell'$$

Proposition Opérations sur les limites

① Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$, où $\ell \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda u_n = \lambda \ell$

② Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell'$, où $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = \ell + \ell' \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n) = \ell \times \ell'$$

③ Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ où $\ell \in \mathbb{R}^*$ alors $u_n \neq 0$ pour n assez grand et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{\ell}$$

[Nouvelle ligne sur la diapo] Nous utilisons cette propriété le plus souvent sans nous en rendre compte, par exemple [se penche pour montrer « Si »] si u_n tend vers l avec l qui vaut ni plus un ni moins un, alors la suite u_n facteur de un moins trois u_n moins un sur [petit silence] u_n carré moins un tend [se penche pour désigne « $\rightarrow$ »] tout simplement vers l facteur de un moins trois l moins un sur [petit silence] l carré moins un [sort du champ].

[7:20, nouvelle diapo, arrivée de l'enseignant. Les quatre propriétés apparaissent une à une, la verbalisation est accompagnée d'un geste de la main vers le numéro de la propriété qui vient d'apparaître, moins d'une minute en tout] Passons maintenant aux limites infinies, Si u_n tend vers plus l'infini alors la suite des un sur u_n tend vers zéro. Réciproquement, si u_n tend vers zéro et [intonation et index levé] si les u_n sont strictement positifs, alors un sur u_n tend vers plus l'infini. Une somme de suites, dont l'une tend vers plus l'infini et l'autre est minorée, tend vers plus l'infini. La même propriété a lieu avec le produit, si l'une des suites tend vers plus l'infini et que l'autre est minorée par un nombre strictement positif [sort du champ].

Preuve d'une des propriétés (limite du produit de deux suites convergentes) : lemme 1 (convergente $\Rightarrow$ bornée)
[8:15, nouvelle diapo, arrivée de l'enseignant] On va maintenant prouver complètement l'affirmation la limite d'un produit est le produit des limites. On commence par l'affirmation suivante : qui affirme qu'une suite convergente est nécessairement bornée.

[nouvelle ligne sur la diapo] Soit donc u_n une suite qui converge et on note petit l sa limite.

Méta2 : « sans nous en rendre compte », « tout simplement ».
« $n \rightarrow +\infty$ » n'est pas écrit dans l'hypothèse (et pas dit).
L'exemple développé est complexe. Proximité manquée ?

Structuration : « Passons maintenant aux... » fait écho à « On commence par les... » (minute 5:30).
« Si u_n tend vers plus l'infini alors la suite des un sur u_n tend vers zéro »... usage délicat de « u_n » pour $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et pour u_n .
« Réciproquement » ?
Lectures très condensées des phrases écrites.

Deux formulations en « u_n tend vers » et deux formulations en « une suite tend vers » plus décontextualisées



$$\text{Exemple : Si } u_n \rightarrow \ell \text{ avec } \ell \neq \pm 1, \text{ alors}$$

$$u_n(1 - 3u_n) - \frac{1}{u_n^2 - 1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell(1 - 3\ell) - \frac{1}{\ell^2 - 1}$$

Proposition Opérations sur les limites infinies

- ① Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} = 0$
- ② Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ et $u_n > 0$ pour n assez grand alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} = +\infty$
- ③ Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = +\infty$
- ④ Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par un nombre $\lambda > 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n) = +\infty$

Proposition

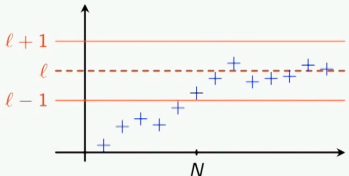
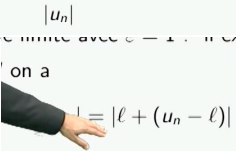
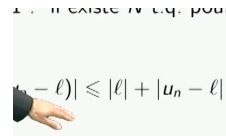
Toute suite convergente est bornée

Proposition

Toute suite convergente est bornée

Démonstration

● Soit (u_n) une suite convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$

Retranscription et [déroulement]	Commentaires	Captures d'écran
[nouvelle ligne et graphique sur la diapo] Pour montrer cette proposition on applique la définition de limite finie en prenant une précision arbitraire, par exemple epsilon est égal à un. Et voici une représentation graphique [montre le graphique]	L'enseignant se place comme utilisateur de la définition : il impose le choix de ε ($\varepsilon=1$). Première utilisation de la définition comme utilisateur.	Proposition Toute suite convergente est bornée Démonstration • Soit (u_n) une suite convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$ • Définition de limite avec $\varepsilon = 1$: 
[fin de ligne sur la diapo] Donc à partir d'un certain rang grand N la suite u_n est à distance au plus un de la limite [s'avance et montre la valeur absolue]. C'est-à-dire valeur absolue de u_n moins l [se recule sur la gauche] est plus petit que un.	« Donc » ? « à partir d'un certain rang N » (oral) « il existe N tel que pour $n > N$ » affirment l'existence d'un nombre N, annoncent le choix d'un tel nombre et nomme ce nombre (élimination d'une proposition existentiellement quantifiée). Cette expression inclut aussi l'introduction de la variable n (qui pourrait être : Soit $n > N$). « C'est-à-dire » introduit la proposition non quantifiée obtenue.	• Soit (u_n) une suite convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$ • Définition de limite avec $\varepsilon = 1$: il existe N t.q. pour $n \geq N$ on a $u_n - \ell \leq 1$
[nouvelle incise sur la diapo] Nous allons majorer u_n en valeur absolue.	Ne précise pas l'organisation de la preuve : la majoration sera dans un premier temps pour $n > N$, et ensuite sur $\mathbb{N}$.	• Soit (u_n) une suite convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$ • Définition de limite avec $\varepsilon = 1$: il existe N t.q. pour $n \geq N$ on a $u_n - \ell \leq 1$ • Pour $n \geq N$ on a
Tout d'abord [montre « $ u_n $ », nouvelle incise] on réécrit u_n comme étant l plus [petite pause] u_n moins l .	Proximité manquée : pas d'explication, pas de lien avec du déjà connu.	
[nouvelle incise, s'avance et montre la fin de la ligne] En appliquant l'inégalité triangulaire, on majore la valeur absolue de u_n par celle de l plus celle de u_n moins l [se recule sur la gauche, petite pause, nouvelle incise].	Reformulation—explication du calcul algébrique et des manipulations de valeurs absolues et d'inégalité.	

Mais comme valeur absolue de u_n moins l est plus petit que un on obtient que valeur absolue de u_n [montre « $|u_n|$ », petite pause, s'avance] est plus petit que [petite pause, montre « $|l|$ »] valeur absolue de l [petite pause] plus un [se recule sur la gauche]. On vient de prouver que la suite est bornée à partir d'un certain rang.

[nouvelle ligne sur la diapo] Mais comme les premiers termes [mouvement de la main autour de « On pose »] de la suite u zéro, u un et caetera [se recule] jusqu'à u grand N moins un sont en nombre finis, alors ils forment un ensemble également borné. On pose [main au dessus de « On pose »] grand M le maximum de la valeur absolue des premiers termes [parcourt de la main au dessus de la ligne] et [s'avance et montre « $|l|$ »] de la valeur absolue de l plus un, obtenu pour les autres [se recule sur la gauche].

[nouvelle ligne sur la diapo] On obtient un majorant pour valeur absolue de u_n . Quel que soit petit n . Ce qui prouve exactement que la suite est bornée [sort du champ].

Conclusion explicitant la proposition prouvée (dans la formulation orale n et N n'apparaissent plus : ce qui pourrait laisser penser qu'elles sont quantifiées : il existe un N , quel que soit n etc.).

L'existence du maximum est justifiée oralement.

Réapparition de N (disparu ponctuellement dans la conclusion intermédiaire précédente)

Jeu sur « u_n »—suite (« majorant pour valeur absolue de u_n ») et « u_n »—terme (« quel que soit petit n »).

Aucune allusion au graphique de la diapo pendant cette preuve (mis à part pour signaler son apparition au début).

On peut penser que le petit carré vert en bas à droite de la diapo marque la fin de la preuve.

- Soit (u_n) une suite convergente vers $\ell \in \mathbb{R}$
- Définition de limite avec $\varepsilon = 1$: il existe N t.q. pour $n \geq N$ on a $|u_n - \ell| \leq 1$
- Pour $n \geq N$ on a

$$|u_n| = |\ell + (u_n - \ell)| \leq |\ell| + |u_n - \ell| \leq |\ell| + 1$$

- Soit (u_n) une suite convergente vers $\ell \in \mathbb{R}$
- Définition de limite avec $\varepsilon = 1$: il existe N t.q. pour $n \geq N$ on a $|u_n - \ell| \leq 1$
- Pour $n \geq N$ on a

$$|u_n| = |\ell + (u_n - \ell)| \leq |\ell| + |u_n - \ell| \leq |\ell| + 1$$

- On pose $M = \max(|u_0|, |u_1|, \dots, |u_{N-1}|, |\ell| + 1)$

Proposition

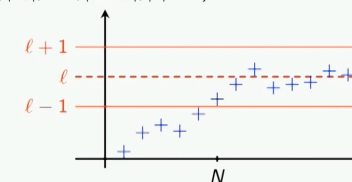
Toute suite convergente est bornée

Démonstration

- Soit (u_n) une suite convergente vers $\ell \in \mathbb{R}$
- Définition de limite avec $\varepsilon = 1$: il existe N t.q. pour $n \geq N$ on a $|u_n - \ell| \leq 1$
- Pour $n \geq N$ on a

$$|u_n| = |\ell + (u_n - \ell)| \leq |\ell| + |u_n - \ell| \leq |\ell| + 1$$

- On pose $M = \max(|u_0|, |u_1|, \dots, |u_{N-1}|, |\ell| + 1)$
- $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n| \leq M$



Preuve d'une des propriétés (limite du produit de deux suites convergentes) : lemme 2 (produit d'une suite bornée et d'une suite tendant vers zéro.

[10:45, nouvelle diapo, arrivée de l'enseignant] Dans une deuxième étape on prouve une nouvelle proposition.

[montre la gauche du texte] Le produit d'une suite bornée et d'une suite qui tend vers zéro est une suite qui tend vers zéro.

Reformulation orale sans aucune variable.

Proposition

Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n) = 0$$

Retranscription et [déroulement]	Commentaires	Captures d'écran
[nouvelle ligne sur la diapo] Comme application directe, on peut prendre par exemple, la suite [montre « u_n »] u_n est égale à $\cos n$. Et v_n [montre « v_n »] est égale à un sur racine de n . Alors la suite [montre « $u_n v_n$ »] $\cos n$ divisé par racine de n tend vers zéro lorsque n tend vers plus l'infini.	Oral : jeu sur « u_n »-suite et « u_n »-terme (« la suite u_n est égale à $\cos n$ » etc.). Écrit : même jeu entre les égalités « $u_n = \dots$ » et l'expression de la limite « $u_n v_n \rightarrow 0$ ». Les formulations orales et écrites se font écho (lecture de « u_n » par « $\cos n$ », absence du « n tend vers plus l'infini » sur la diapo etc.).	Proposition Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n) = 0$ Exemple : $u_n = \cos n$ et $v_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, alors $u_n v_n \rightarrow 0$
[nouvelle ligne sur la diapo] Donnons la preuve de cette proposition. [montre le début de la ligne] Comme la suite u_n est bornée, on peut trouver [s'avance] par définition un réel grand M tel que pour tout n on a valeur absolue de u_n [se recule] plus petit que grand M .	« On peut trouver » : utilisation d'une proposition quantifiée universellement, introduction de la variable M .	Proposition Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n) = 0$ Exemple : $u_n = \cos n$ et $v_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, alors $u_n v_n \rightarrow 0$ Démonstration  • (u_n) est bornée, il existe $M > 0$ tel que $ u_n \leq M$
[nouvelle ligne sur la diapo] On nous donne un epsilon strictement positif et on doit montrer que pour n assez grand on a valeur absolue de u_n fois v_n plus petit que epsilon.	Présentation d'une variable (ϵ) en vue de la preuve d'une propriété universellement quantifiée (limite). Explication de la position de démonstrateur.	Démonstration • (u_n) est bornée, il existe $M > 0$ tel que $ u_n \leq M$ • Fixons $\epsilon > 0$
[nouvelle ligne sur la diapo] On applique la définition de limite à la suite v_n pour [nouvelle ligne] la précision [montre « Pour »] epsilon prime est égale à epsilon sur M .	Bascule sur une position d'utilisateur de la définition de la limite de la suite v : le ϵ' , choisi, dépend de celui, subi en tant que démonstrateur, de la preuve de la limite de la suite u .	Démonstration • (u_n) est bornée, il existe $M > 0$ tel que $ u_n \leq M$ • Fixons $\epsilon > 0$ ▶ Définition de limite à la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Définition de l Pour $\epsilon' = \frac{\epsilon}{M}$
[nouvelle ligne] Il existe donc un entier naturel grand N tel que si n est plus grand que grand N alors valeur absolue de v_n est plus petit que epsilon prime.	Utilisateur de la définition pour v . Élimination d'une quantification existentielle, introduction d'une variable N .	• Fixons $\epsilon > 0$ ▶ Définition de limite à la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ▶ Pour $\epsilon' = \frac{\epsilon}{M}$ ▶ Il existe N tel que $n \geq N$ implique $ v_n \leq \epsilon'$
[deux nouvelles lignes sur la diapo] On en déduit que pour petit n plus grand que grand N on a [montre le début de la dernière ligne] valeur absolue de u_n fois v_n est égal à valeur absolue de u_n fois valeur absolue de v_n , [s'avance] est plus petit que M fois epsilon prime ce qui est égal à epsilon [se recule sur la gauche].	Quasi lecture de la formulation symbolique de la diapo.	Démonstration • (u_n) est bornée, il existe $M > 0$ tel que $ u_n \leq M$ • Fixons $\epsilon > 0$ ▶ Définition de limite à la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ▶ Pour $\epsilon' = \frac{\epsilon}{M}$ ▶ Il existe N tel que $n \geq N$ implique $ v_n \leq \epsilon'$ • Pour $n \geq N$ on a : $ u_n v_n = u_n v_n \leq M \times \epsilon' = M \times \frac{\epsilon}{M} = \epsilon$

Retranscription et [déroulement]	Commentaires	Captures d'écran
Pour tout epsilon tel que dès que petit n est plus grand que grand N alors valeur absolue de u_n fois v_n est plus petit que epsilon, on a bien montré que la limite de u_n fois v_n est nulle [sort du champ]	Fin de preuve uniquement oralement : réintroduction d'un quantificateur universel. La quantification existentielle de N est oubliée. À nouveau le jeu difficile sur « u_n »—suite et « u_n »—terme.	
Preuve d'une des propriétés (limite du produit de deux suites convergentes) : utilisation des deux lemmes et conclusion.		
[12:45, nouvelle diapo, arrivée de l'enseignant] On peut maintenant prouver le résultat. [montre la gauche de la ligne] La limite d'un produit de suites convergentes existe et est le produit des limites.	Proposition écrite non quantifiée.	Proposition Si $\lim u_n = \ell$ et $\lim v_n = \ell'$ alors $\lim u_n v_n = \ell \ell'$
[nouvelle ligne sur la diapo] On commence par écrire [montre la gauche de la 2 ^e ligne] $u_n v_n$ moins ℓ fois ℓ prime est égale à u_n moins ℓ fois v_n [s'avance et montre « + »], plus ℓ fois v_n moins ℓ prime [se recule sur la gauche].	Variables non introduites. « u_n »—terme	Proposition Si $\lim u_n = \ell$ et $\lim v_n = \ell'$ alors $\lim u_n v_n = \ell \ell'$ Démonstration $u_n v_n - \ell \ell' = (u_n - \ell) v_n + \ell (v_n - \ell')$
[nouvelle ligne sur la diapo, main au début de la ligne] La suite ℓ fois v_n moins ℓ prime tend vers zéro car ℓ est une constante et v_n tend vers ℓ prime.	Les justifications sont dites et ne sont pas écrites. « u_n »—suite	Démonstration $u_n v_n - \ell \ell' = (u_n - \ell) v_n + \ell (v_n - \ell')$ $\ell (v_n - \ell') \rightarrow 0$
[nouvelle ligne sur la diapo, main au début de la ligne] D'après la proposition précédente c'est aussi le cas pour la suite u_n moins ℓ fois v_n . [nouvelle ligne, main] Tout d'abord u_n tend vers ℓ . u_n moins ℓ tend vers zéro.	« u_n »—suite	$\ell (v_n - \ell') \rightarrow 0$ $(u_n - \ell) v_n \rightarrow 0$ $u_n - \ell \rightarrow 0$ $v_n \rightarrow \ell'$ donc (v_n) est bornée
[nouvelle ligne, main] La suite v_n est bornée car v_n est une suite convergente.		
Donc [nouvelle ligne] par la proposition de la page précédente [s'avance et montre « : »] u_n moins ℓ fois v_n tend vers zéro [se recule sur la gauche]. Ainsi chacun des deux termes [montre alternativement les deux termes de l'addition de la première ligne de la preuve] tendent vers zéro, on en déduit que [montre « Conclusion »] $u_n v_n$ moins ℓ fois ℓ prime [se recule sur la gauche] tend vers zéro, ce qui n'est rien d'autre que le résultat voulu, la limite de u_n fois v_n est égale à ℓ fois ℓ prime lorsque n tend vers plus l'infini [sort du champ].	Ici aussi un petit carré vert (en bas à droite de la diapo) marque la fin de la preuve. Cette dernière partie de la preuve est la première démonstration sur les limites utilisant des résultats "macro" (liens majorations / limites, produits de limites), sans utiliser la définition "avec les epsilon".	Démonstration $u_n v_n - \ell \ell' = (u_n - \ell) v_n + \ell (v_n - \ell')$ $\ell (v_n - \ell') \rightarrow 0$ $(u_n - \ell) v_n \rightarrow 0$ $u_n - \ell \rightarrow 0$ $v_n \rightarrow \ell'$ donc (v_n) est bornée - par la proposition précédente : $(u_n - \ell) v_n \rightarrow 0$ - Conclusion : $u_n v_n - \ell \ell' \rightarrow 0$

Fin de la vidéo :

[14:25, nouvelle diapo sur les formes indéterminées]

[16:28, nouvelle diapo sur limites et inégalités]

[17:20, nouvelle diapo sur le théorème des gendarmes]

[18:40, nouvelle diapo, liste de mini exercices]

[18:45, fin]

TITRE :

Les moments d'exposition des connaissances en mathématiques (secondaire et début de l'université)

AUTEUR:

Stéphanie Bridoux, Monique Chappet-Pariès, Nicolas Grenier-Boley, Christophe Hache et Aline Robert

Avec la collaboration de Marie-Christine Lévi et Françoise Pilorge

RESUME :

De nombreuses questions se posent sur l'élaboration et le déroulement des moments où l'enseignant expose, en classe, les connaissances (savoirs) qui constituent « le cours », par opposition aux exercices. Nous nous sommes restreints ici à l'enseignement secondaire et aux débuts de l'enseignement universitaire scientifique. En introduction nous rappelons un certain nombre d'éléments connus sur les cours et précisons le questionnement adopté dans ce texte. Nous présentons en première partie des points de vue d'enseignants, débutants et confirmés, et de formateurs, en ajoutant quelques éléments sur des points de vue d'élèves. Dans les parties suivantes nous développons des analyses de ces cours, faites par des chercheurs en didactique des mathématiques. Nous dégagons ainsi d'abord certaines fonctions, notamment cognitives, que peut remplir ce moment au sein d'un scénario complet sur une notion à enseigner. En particulier nous précisons des proximités qui peuvent ou non être en jeu, pendant les déroulements, entre le travail des élèves sur des exemples ou des activités, et l'énoncé précis hors-contexte concerné, qui peut suivre ou précéder ce travail. Nous suggérons aussi une lecture globale des cours, révélant des tensions, sans doute incontournables. Ces analyses sont illustrées par des exemples tirés d'extraits de cours sur les fonctions au collège et au début du lycée. Puis, dans la dernière partie, c'est la comparaison de cours de première année d'université scientifique sur les limites de suites ou de fonctions qui permet d'illustrer et de prolonger le développement théorique : on met en regard le cours d'un manuel, un cours en amphi filmé, et une vidéo de type FAD (formation à distance). Des caractéristiques de chaque support sont dégagées. En particulier il semble que seul le cours en amphi soit l'occasion de développer les liens ancien/nouveau et d'aborder les structures logiques globale et locale, sur des démonstrations précises. En conclusion nous revenons sur les moments d'exposition des connaissances étudiés et sur les questions qui demeurent, notamment sur leur apport spécifique dans les apprentissages.

MOTS- CLES :

Exposition des connaissances, cours, contenus des cours, déroulements des cours, proximités

Éditeur: IREM de Paris

Responsable de la publication: F. Vandebrouck

IREM de Paris 7 – Case 7018

Université Paris Diderot

75205 Paris cedex 13

irem_de_paris@univ-paris-diderot.fr

<http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/>

Dépôt légal : 2015

ISBN : 978-2-86612-366-6