Brochure IREM

n°96

Mai 2015

Autour des Problèmes Ouverts en classe de mathématiques

Par Fabrice Vandebrouck, Dominique Baroux-Raymond, Géraldine Bonal, Charlotte Derouet, Ruis Dos Santos, Françoise Hérault, Cécile Prouteau et Gaëlle Temam

INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES
UNIVERSITE PARIS DIDEROT

Cette brochure fait suite à celle intitulée « démarche expérimentale et TICE en classe de mathématiques au lycée », parue en mai 2010. Le groupe IREM qui l'avait produite a évolué, perdant des membres mais en réunissant de nouveaux et a souhaité faire évoluer son thème de recherche, à la fois au-delà des situations mettant en jeu les TICE et au-delà de situations mathématiques amenant les élèves à adopter une démarche expérimentale. C'est ainsi que le groupe s'est centré sur les problèmes ouverts, en un sens à circonscrire, et s'est baptisé « POLIREM ».

La structure de la brochure est la même que la structure de la précédente. Il s'agira dans un premier temps, à travers ce que disent les programmes, des références bibliographiques, des comptes rendus de lectures et des exemples de situations bien choisies de développer ce que le groupe a souhaité entendre sous la dénomination « problèmes ouverts ». Ensuite vient un panorama de situations qui ont toutes été testées en classe par un ou plusieurs membres du groupe, avec les comptes rendus d'expériences et améliorations possibles ou apportées aux situations.

Les membres du groupe IREM POLIREM

Table des matières

1. Autour des problèmes ouverts

1. Ce que disent les programmes et les instructions

Dans les programmes du collège (2008) et du lycée (2009 à 2011) n'apparait pas directement l'expression « problème ouvert ». Néanmoins, dans le plan « Stratégie mathématiques » annoncé en décembre 2014 par la ministre de l'éducation nationale, l'utilisation de problèmes ouverts est explicitement mentionnée en vue de rendre « la pratique des mathématiques plus attractive, de mobiliser davantage de compétences transversales et de stimuler le plaisir de chercher, de choisir ou de construire une méthode, de persévérer et l'envie de trouver ».

Dès l'école primaire, il est mis en avant l'importance de la résolution de problèmes dans l'apprentissage des mathématiques. Dans l'introduction commune des différentes disciplines au collège, il est dit que « faire des mathématiques, c'est se les approprier par l'imagination, la recherche, le tâtonnement et la résolution de problèmes, dans la rigueur de la logique et le plaisir de la découverte ». Dans le préambule pour le collège, en mathématiques, nous retrouvons l'insistance sur la place centrale de la résolution de problèmes. On parle aussi du rôle important des « situations plus ouvertes, dans lesquelles les élèves doivent solliciter en autonomie les connaissances acquises ». Le traitement de ces situations « nécessitent initiative et imagination et peut être réalisé en faisant appel à différentes stratégies qui doivent être explicitées et confrontées, sans nécessairement que soient privilégiées l'une ou l'autre ». Le programme de mathématiques de lycée (BO n°30 du 23 juillet 2009) repose sur l'objectif de former les élèves à la démarche scientifique sous toutes ses formes et ainsi de leur faire travailler sept « compétences » :

- Modéliser et s'engager dans une activité de recherche ;
- Conduire un raisonnement, une démonstration ;
- Pratiquer une activité expérimentale ou algorithmique ;
- Faire une analyse critique d'un résultat, d'une démarche ;
- Pratiquer une lecture active de l'information ;
- Utiliser les outils logiciels (ordinateur ou calculatrice) adaptés à la résolution d'un problème ;
- Communiquer à l'écrit et à l'oral.

Il est aussi mentionné le fait de « laisser dans [la] résolution [des problèmes] une place à l'autonomie et à l'initiative des élèves ». Bien que ne se retrouve pas de manière explicite la résolution de problèmes ouverts, nous pensons que toutes ces indications présentes dans les programmes peuvent coïncider avec ce type de problèmes. De plus, sur le site Eduscol, on trouve de nombreuses informations, voire ressources, sur les problèmes ouverts.

2. Les problèmes en didactique : article de Robert et Rogalski

Dans leur article de 2004 dans Repère IREM, Aline Robert et Marc Rogalski (2004) étudient la question des différents types de problèmes : les problèmes d'introduction, les problèmes transversaux et les problèmes de recherche. Même avec des objectifs différents ces problèmes gardent des caractéristiques didactiques communes : la difficulté à les mener dans le temps de la classe, mais aussi le fait qu'ils font sens pour les élèves et favorisent leur engagement dans la résolution avec une activité qui ne se limite pas à appliquer des connaissances de façon plus ou moins directe : la ou les solutions sont à la portée des élèves mais ne sont pas évidentes, les activités à mener ne sont pas immédiates, il y a des étapes, des intermédiaires à introduire, en un mot des adaptations au sens de Robert (1998). Ce sont là et pour tous ces problèmes les caractéristiques d'une tâche complexe dans la terminologie du didacticien (par opposition à une tâche d'application immédiate de connaissances).

Les auteurs rappellent et développent dans l'article les liens qu'ils voient entre problèmes, activités et apprentissages. Apprendre est associé à conceptualiser, cela signifie une prise de sens de la notion mathématique à la fois comme outil et comme objet, dans ses divers registres de représentations et une capacité à la mettre en fonctionnement dans divers cadres, à bon escient, sans forcément des indices qui appellent explicitement cette connaissance (on parle de disponibilité de la connaissance ou de la notion). Apprendre résulte des activités des élèves et notamment de la mise en fonctionnement des connaissances dans beaucoup de situations, et même sans que la notion à apprendre ait toujours été indiquée. Vergnaud (1990) dit « le problème est source et critère de connaissance » ; les auteurs disent ici « c'est en forgeant que l'on devient forgeron ». Plusieurs dynamiques dans la classe contribuent aux apprentissages : les dynamiques entre les phases d'exercices et les phases d'exposition des connaissances (institutionnalisation mais dans un sens plus général) ; le degré de formalisation entre les exemples particuliers et les généricités ; les dialectiques outils / objets ; les différents cadres d'apparition de la notion ; les dynamiques entre registres de représentations de la notion…

Les problèmes d'introduction semblent pouvoir se ramener à ce que d'autres appellent des situations problèmes : c'est une situation d'apprentissage d'une connaissance nouvelle à travers un problème qui par sa construction requiert que les élèves doivent surmonter un obstacle par la mise en fonctionnement d'une connaissance qui ne leur est pas encore familière (ou même totalement nouvelle). On trouve typiquement ces situations problèmes au cœur de la théorie des situations didactiques de Brousseau (1998).

Les problèmes transversaux et les problèmes de recherche sont des problèmes qui vont permettre aux élèves d'autres types d'apprentissages : il s'agit d'approfondir les connaissances déjà acquises par les élèves ou en cours d'acquisition, en les adaptant ou en les réorganisant pour pouvoir résoudre ces problèmes. Les auteurs de l'article regrettent en effet qu'il y a souvent dans l'enseignement une absence de lien entre les connaissances anciennes et les connaissances nouvelles, avec une insuffisante organisation des connaissances chez les élèves : la pratique des problèmes transversaux et de recherche doit aider à combler ces lacunes. Même s'ils n'amènent pas à strictement parler de connaissances mathématiques nouvelles, ces problèmes participent de la conceptualisation des connaissances anciennes ou en cours d'acquisition par les élèves. C'est un aspect tout aussi important des apprentissages mathématiques et qui manque trop souvent actuellement aux élèves. Les programmes d'enseignement et les contraintes horaires actuels obligent trop les professeurs à faire visiter à tout va des connaissances nouvelles que les élèves ne sauraient emmagasiner faute de temps didactique et notamment faute de suffisamment d'activités mettant en fonctionnement ces connaissances. Il faut donc accepter l'idée qu'avec ces problèmes, on perd du temps à court terme pour que les élèves en gagnent peut-être, à moyen ou long terme. Les auteurs signalent également que les exercices classiques provoquent souvent une orientation univoque de l'activité des élèves avec une prise en main rapide par le professeur. Les moments de recherche de problèmes peuvent permettre de laisser plus d'autonomie aux élèves dans leurs activités. Les problèmes « ouverts » ne sont pas explicitement mentionnés dans cet article mais on peut penser qu'ils couvrent ces deux catégories, à la fois problèmes transversaux – en termes de connaissances multiples à mettre en fonctionnement – et problèmes de recherche.

3. Les pratiques du problème ouvert : article de Arsac et Mantes

Nous rendons compte maintenant d'un ouvrage écrit par Gilbert Arsac et Michel Mante (2007), après 20 ans de pratique et d'analyse sur le problème ouvert.

D'après J. Brun, « Un problème est généralement défini comme une situation initiale, avec un but à atteindre, demandant au sujet d'élaborer une suite d'actions ou d'opérations pour atteindre ce but. Il n'y a problème, dans un rapport sujet/situation, que si la solution n'est pas disponible d'emblée, mais possible à construire. C'est à dire aussi qu'un problème pour un sujet donné peut ne pas être un problème pour un autre sujet, en fonction de leur niveau de développement intellectuel par exemple. »

L'objectif des problèmes ouverts, d'après les auteurs, est de mettre les élèves dans la situation du chercheur en mathématiques. C'est aussi placer les élèves dans une situation d'apprentissage qui les amène à :

- essayer
- conjecturer
- tester
- prouver

C'est à dire à mener une démarche scientifique.

Les caractéristiques du problème ouvert

Pour mener à bien un problème ouvert dans une classe, quels que soient le niveau ou la série, le problème ouvert doit avoir les caractéristiques suivantes :

- l'énoncé est court.
- l'énoncé n'induit ni la méthode, ni la solution (pas de question intermédiaire, ni de question du type « montrer que »). En aucun cas, cette solution ne doit se réduire à l'utilisation ou l'application immédiate des derniers résultats présentés en cours.
- Le problème se trouve dans un domaine conceptuel avec lequel les élèves ont assez de familiarité. Ainsi, ils peuvent prendre facilement « possession » de la situation et s'engager dans des essais, des conjectures, des projets de résolution, des contre-exemples.

Il est souhaitable (souhaitable mais non crucial) qu'il y ait :

- plusieurs procédures possibles pour atteindre le résultat
- ou éventuellement plusieurs expressions de la solution
- ou plusieurs solutions
- ou plusieurs possibilités de trouver des solutions partielles.

Pour obtenir des effets importants sur les élèves et les enseignants, la recherche du problème ouvert doit se faire ponctuellement en classe soit 3 à 4 fois par an.

Ainsi les questions à se poser pour guider le choix d'un problème ouvert sont :

- Les élèves peuvent-ils facilement s'approprier l'énoncé ?
- Les élèves peuvent-ils se construire une représentation correcte des données, des contraintes et du but à atteindre ?
- Les élèves peuvent-ils faire des essais sans difficulté ?
- Peuvent-ils trouver des résultats partiels ?
- Les élèves vont-ils trouver des résultats différents (certains pouvant être faux) ?
- Les élèves disposent-ils d'outils de preuve ?
- La preuve est-elle importante ?

Les effets de la pratique du problème ouvert seraient selon les auteurs

- Elèves très motivés
- Elèves ayant plein d'imagination
- Elèves obtenant des résultats surprenants
- Elèves apprenant à travailler en groupe
- Elèves apprenant à débattre
- Elèves plus autonomes
- Elèves modifiant leur rapport aux mathématiques
- Elèves en grande difficulté s'investissant plus….

La gestion d'une séance de problème ouvert en classe.

La recherche du problème ouvert comporte deux phases d'après les auteurs :

- Une phase de recherche proprement dite qui se termine par une rédaction par groupe (sur une affiche, sur un transparent, …) des solutions, des solutions partielles, des conjectures trouvées ;
- Une phase de mise en commun des productions et de débat sur leur validité (savoir argumenter, énoncer des contre-exemples,…).

Phase n° 1 : temps de recherche	
Consignes initiales	
Professeur	Distribution de l’énoncé Matériel nécessaire Rappel des consignes : « vous allez jouer au « chercheur en mathématiques » « vous allez chercher des problèmes différents des problèmes traditionnels »…. Recherche individuelle d’une durée de 5 à 10 min Recherche en groupe (2 ou 4) Groupes hétérogènes Groupes constitués par le professeur ou groupes « spontanés » Attention aux incompatibilités d’humeur.
Recherche proprement dite	
Elèves	Recherche individuelle 5 à 10 min. Recherche par groupe
Professeur	Vérifier que chaque groupe cherche le même problème, que l’énoncé a bien été assimilé (définition des mots, contresens, contrainte de l’énoncé, …) Intervention ponctuelle auprès des élèves ou intervention collective. Intervenir pour éviter de laisser des élèves bloqués ou engagés dans des représentations erronées de l’énoncé. Ces interventions peuvent nuire à l’autonomie des élèves en phase de recherche. Il est donc préférable d’anticiper les difficultés de compréhension de l’énoncé. Eviter que les interventions du professeur n’aboutissent à fermer le problème ou à supprimer toute autonomie de l’élève. Répondre à une question par une autre Pratiquer une pédagogie de l’encouragement… Eviter l’excès d’interventions, observer les groupes pour analyser les erreurs, leur démarche…
Rédaction des propositions de solutions	
Professeur	10 à 15 min avant la fin de la séance, le professeur distribue une affiche et un marqueur.
Elèves	Chaque groupe rédige une proposition de solution partielle ou totale ou le bilan de ses travaux.

4. Une catégorisation issue de Kosyvas

Georgios Kosyvas (2010) propose dans son article « Problèmes ouverts : notion, catégories et difficultés » une classification des problèmes ouverts. Voici un résumé de cet article paru dans les Annales de Didactique et de Sciences Cognitives.

1. La notion de problème ouvert

En science des mathématiques le terme problème ouvert se réfère habituellement aux problèmes qui pendant longtemps restaient non résolus, tel le dernier Théorème de Fermat. En didactique des mathématiques le terme « problème ouvert » renvoie à un problème de recherche pour lequel l’élève ne dispose d’aucune procédure de résolution éprouvée.

L’introduction du terme « problème ouvert » est d’origine japonaise (Shimada, 1977, Becker et al. 1997), il est apparu durant les années 70 et avait pour but de réformer l’enseignement des mathématiques avec des approches ouvertes en pratique de l’enseignement. Chez les didacticiens des mathématiques, il n’y a pas de définition commune du problème ouvert.

Voici une explication possible : si la situation initiale ou la situation finale est ouverte, nous avons un problème ouvert. Dans un problème ouvert la question est claire au niveau sémantique, mais sa formulation implique les élèves. Il s’agit d’un problème avec de nombreuses directions ouvertes.

Une étude du « problème ouvert » a été réalisée par un groupe de l’IREM de Lyon en collège et au lycée. Elle vise au développement d’attitudes de recherche et de capacités de méthodologie scientifique (Arsac, et Mante 2007 ; Arsac, et *al*. 1992 ; Arsac, et *al*. 1991 ; Bouvier, 1986 ; Arsac, et *al*. 1985a ; Arsac, et *al*. 1985b).

Le « Problem Posing » (Silver, 1994 ; Crespo, 2003 ; Cunningham, 2004) permet à l’élève de créer des problèmes sur la base d’une « situation-cadre ». Les enfants suivent leurs propres motivations.

Des expérimentations de problèmes ouverts ont eu lieu en Australie, au Japon, en Angleterre, en Finlande, et aux Pays Bas. En France, des activités de problème ouvert ont été proposées dans les programmes officiels d’éducation préscolaire (ERMEL 1990) et d’enseignement primaire (ERMEL de 1991 à 1999) et nommés : problèmes de recherche ou problèmes pour chercher (Artigue et Houdement, 2007 ; Coppé et Houdement, 2002 ; Houdement, 1998).

Les problèmes ouverts restent une activité marginale dans les pratiques de classe car ils incluent des difficultés de compréhension pour les élèves et de gestion de classe pour les enseignants.

On note également un autre article plus récent de Georgios Kosyvas dans Repères IREM N°91 avril 2013, article ayant pour titre « *pratiques pédagogiques de problèmes ouverts dans un collège expérimental à Athènes* ».

2. Exemples de problèmes ouverts classés en catégories

On peut distinguer quatre catégories de problèmes ouverts :

2.1 Variété de stratégies de résolutions

Les stratégies sont les démarches d’approche que les élèves inventent.

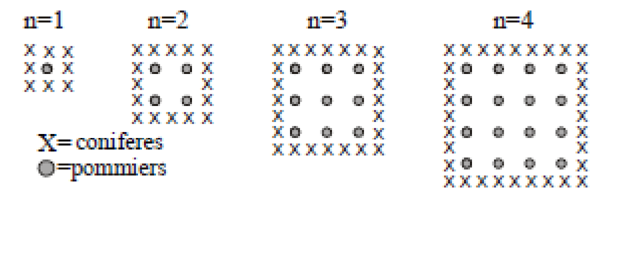
Premier exemple (problème traditionnel) : *Quelqu’un a une bouteille de 8 litres d’eau et veut donner à son ami 4 litres de cette quantité. Pour la mesurer, il dispose seulement de deux récipients vides : un de 5 litres et un de 3 litres. Quelles sont les actions à faire pour verser les 4 litres d’eau dans le récipient de 5 litres ?*

Deuxième exemple (**Les arabes,** problème traditionnel) **:** *Deux arabes A et B qui voyageaient dans le désert, avaient avec eux l’un 2 pains et l’autre 3. Durant la route ils ont rencontré un voyageur riche C, qui avait faim. Après ils ont mangé tous ensemble et le voyageur leur a laissé 15 livres. Comment faudrait-il faire le partage de l’argent ?*

Troisième exemple : *Pour 6 jus d'orange et 3 sandwichs nous avons payé 21 €, mais le groupe voisin a payé pour 4 jus d'orange et 3 sandwichs 17 €. Combien coûte le sandwich et combien le jus d'orange ?*

C'est un bon problème de recherche pour la sixième. Les élèves peuvent faire des hypothèses sur le prix du jus d'orange et du sandwich. Ils peuvent aussi faire un dessin.

Quatrième exemple : (Concours international *PISA* 2000) : *Un fermier plante des pommiers en carré. Afin de protéger ces arbres contre le vent, il plante des conifères tout autour du verger. Compléter un tableau donnant le nombre de pommiers et le nombre de conifères. Puis généraliser le problème donnant le nombre de* pommiers *et le nombre de conifères pour n séries de pommiers.*



n	Nombre de pommiers	Nombre de conifères
1	1	8
2	4	
3		
4		
5		

2.2 Résultats multiples

Exemple (Nodha, 1995) **:** *Melina fête son anniversaire et veut fabriquer des invitations en papier qu'elle distribuera à ses invités. Chaque carte est un rectangle de 15 cm de longueur et 10 cm de largeur. Nous supposons qu'elle dispose d'un grand carton rectangulaire de dimensions : 45 cm de longueur sur 35 cm de largeur. Combien d'invitations pourra-t-elle fabriquer avec ce carton ?*
Pouvez-vous les dessiner sur une diapositive ? Attention ! Il est interdit d'unir deux morceaux pour fabriquer une invitation.

2.3 Interprétation ouverte de l'énoncé

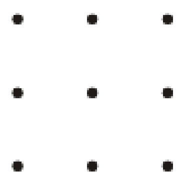
Habituellement il n'y a pas de données arithmétiques.
− *À la fin de l'année scolaire votre classe a décidé d'organiser une beachparty. Pouvez-vous prévoir combien cela va coûter ?*
− *Combien coûte-t-il d'avoir un chien à la maison?*
− *Quelles dépenses aurai-je pour conserver un vélo?*
− *150 litres d'eau sont-ils suffisants pour les besoins d'un jour d'une famille moderne?*
− *Une barque commence à traverser une rivière. À quel point de la rive opposée va-t-elle arriver ?* (Lycée)

La solution dépend du choix des données. Ces problèmes pourraient s'intégrer à la catégorie du Problem-Posing.

2.4 Problèmes ouverts-énigmes

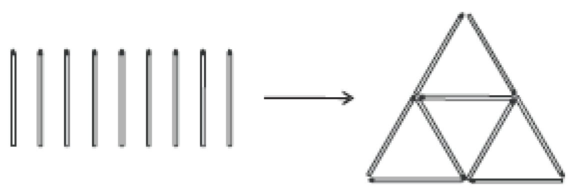
Ces problèmes exigent une dissociation de la première perception et un changement d'optique. L'état actuel et l'état désiré peuvent être définis ou non.

Exemple 1 : *Relier les 9 points par 4 traits ininterrompus sans lever le crayon.* (CM 1)



La résolution de ce problème exige de sortir de la structure du carré et d'élargir le champ de vision dans le plan.

Exemple 2 : *Avec 9 allumettes, on a construit 4 triangles équilatéraux. Peux-tu avec 6 allumettes, construire 4 triangles équilatéraux ?* (CM 2)



Le fait de concevoir la résolution du problème en seulement deux dimensions, plutôt qu'en trois, empêche la résolution du problème.

3. Une nouvelle tentative de détermination du problème ouvert

Le groupe de l'IREM de Lyon considère comme nécessaire l'adoption des caractéristiques suivantes :

- *L'énoncé est court.*
- *L'énoncé n'induit ni la méthode, ni la solution (pas de questions intermédiaires ni de questions "montrer que"). En aucun cas, cette solution ne doit se réduire à l'utilisation ou à l'application immédiate des derniers résultats présentés en cours.*
- *Le problème ouvert se trouve dans un domaine conceptuel avec lequel les élèves ont assez de familiarité. Ainsi, peuvent-ils prendre facilement « possession » de la situation et s'engager dans des essais, des conjectures, des projets de résolution, des contre-exemples. (Arsac et al, 1991, p. 7)*

Pour Geogios Kosyvas, la première et la troisième caractéristique, bien qu'elles contribuent favorablement à la gestion pédagogique de la classe, ne sont pas indispensables à chaque problème ouvert. En effet, il n'est pas certain que seule la formulation laconique facilite la compréhension et une notion non déjà enseignée constitue toujours un problème ouvert. De plus tout problème ouvert n'est pas forcément approprié à la recherche dans la classe. Par exemple :

LE PROBLEME DES CHEVEUX BLONDS :

Après de longues années, se rencontrent deux anciens camarades de classe qui avaient un intérêt particulier pour les mathématiques et le dialogue suivant a lieu :

PYTHAGORE : As-tu été marié ? As-tu des enfants ? Combien ? De quel âge ?
HYPATIE : Oui. Trois et le produit de leurs âges est 36. (Bien sûr, il s'agit de nombres entiers d'années.)
PYTHAGORE : (Après réflexion). *Je ne peux pas trouver leurs âges. Les données sont insuffisantes.*
HYPATIE : Très juste. Et si je te dis que la somme des trois nombres est égale au numéro de ta maison?
PYTHAGORE : (Après y avoir pensé un peu). *Ni même maintenant peuvent être déterminés les trois âges.*
HYPATIE : Bravo ! Donc, je t'informe que le plus grand enfant a des cheveux blonds !
PYTHAGORE : Maintenant, bien sûr ! Je peux te dire les âges de tes enfants sans aucune hésitation. Et les dit.
Ce dialogue incite plus à la recherche que la demande de la liste des diviseurs de 36.

Nous pourrions dire que ce qui rend un problème ouvert ou fermé est la manière dont il est posé, sa fécondité pour la recherche et son caractère vécu.

3.1 La fécondité de la recherche

Il y a de purs énoncés mathématiques qui peuvent sembler très secs, mais constituent d'efficaces moteurs de recherche.

Exemples qui s'adressent aux dernières classes du collège et au lycée :

Méthode de l'organisation d'un inventaire (Le maraîcher et les quatre poids, problème traditionnel) **:** *Un maraîcher a dans son magasin une balance et 4 poids avec lesquels il peut peser des objets de n'importe quelle masse entière de 1 jusqu'à 40 kilos. Quels sont les poids dont il dispose et comment pourra-il peser ses produits ? Répétez le problème pour 5 poids et pour des masses de 1 jusqu'à 121 kilos.*

Méthode du contre-exemple : *Dans l'expression n^2+n+41, si on remplace le n par n'importe quel nombre naturel trouvons-nous toujours un nombre premier naturel ?*

Méthode de la réduction à l'absurde : *Les 15 élèves d'une classe ont au total dans leurs sacs 115 cahiers. Si chaque élève a au moins un cahier, prouvez que deux au moins des élèves ont le même nombre de cahiers.*

Méthode de cas : *Prouvez que le produit de trois entiers successifs est divisible par 6.*

Combinaison des méthodes (démonstration directe, examen des cas) : *Est-ce qu'il y a un nombre positif entier k tel que k^2-4 soit premier ?*

Combinaison des méthodes (examen des cas, démonstration directe) : *Si p est un nombre premier, examiner si le nombre $A=27p+1$ est premier ou non*

Le caractère fécond peut ne pas se réduire au champ mathématique et constituer de l'oxygène pour des efforts d'acquisition de connaissances en liant les mathématiques au monde.

3.2 L'énoncé ouvert

L'énoncé ouvert permet la recherche, la construction, l'utilisation de l'outil mathématique utile à la résolution du problème.

Est-ce qu'il existe un triangle équilatéral et rectangulaire ?
Est-ce qu'il existe un triangle avec des côtés de 3 cm, 4 cm et 8 cm ?
Est-il possible que des angles soient opposées et complémentaires ?
La somme de deux impairs est paire ? Pourquoi ?

Énoncé ouvert : *On a un carré avec un côté de 2 centimètres et nous voulons en construire un autre avec une surface double. Peux-tu trouver une méthode de construction ?*

Énoncé fermé : *On a un carré avec un côté de 2 centimètres et nous voulons en construire un autre avec une surface double. Peux-tu constater (ou prouver) que la solution est trouvée si nous prenons comme côté du deuxième carré demandé la diagonale du premier* ?

Transformer un problème fermé en problème ouvert est une activité créative mais difficile.

3.3 Le caractère vécu

Le type de problème et son mode de formulation ne suffisent pas à rendre un problème ouvert. Il faudra en outre qu'il soit relié avec les expériences personnelles de l'élève afin de favoriser son engagement et sa persistance dans la tâche.

Le problème ouvert des poignées de main : *Les 7 filles de la classe lorsqu' elles se sont rencontrées après les vacances d'été, se sont toutes donné une poignée de main (l'une à l'autre). Si chaque fille a serré la main à chacune des autres une fois seulement, pourriez-vous calculer combien de poignées de main y a-t-il eu au total ? Répétez le problème pour les 16 enfants d'une classe et pour les1 000 enfants d'une école.*

Ce problème est ouvert en ce qui concerne la richesse des stratégies de résolution On peut l'aborder dans le cadre numérique, graphique, géométrique, dramatique,…

4. Difficultés de la gestion des problèmes ouverts dans la classe et recherche de propositions de traitement

4.1 La peur de la liberté.

Les particularités du problème ouvert (pas de méthode donné dans l'énoncé, des résultats et des stratégies différents, validité du processus dévolue aux élèves) créent chez les élèves un climat d'incertitude qui les empêche de s'engager. Cependant, une pratique fréquente du problème ouvert leur permet, grâce à leurs succès, d'acquérir une confiance en soi.

4.2 Les restrictions du programme officiel.

Un obstacle à la pratique du problème ouvert est qu'une importance fondamentale est attribuée aux activités de mémorisation des connaissances et des techniques de calculs exigées par les critères d'évaluation, les divers contrôles et examens. Une proposition, dans ces conditions, serait **l'adoption de semaines de problèmes ouverts** dans le programme, durant lesquelles les élèves s'occuperaient de la recherche de problèmes ouverts.

4.3. Les difficultés des représentations et du transfert de la connaissance

Le transfert de la connaissance signifie la possibilité d'utiliser à bon escient un savoir ou un savoir-faire dans un contexte différent de celui où il a été acquis. Le problème ouvert crée des difficultés de reconnaissance d'informations existantes.

4.4. Les difficultés de contrôle

Le contrôle intervient aux différents moments de l'activité. Il est donc utile que l'enseignant développe chez les élèves des outils d'autocontrôle en l'incitant à se questionner. Cependant les élèves sont peu enclins à se lancer spontanément dans une démarche d'autorégulation de leur travail.

4.5. Les meilleurs, les moyens et les faibles et leurs erreurs respectives

Les erreurs commises par les élèves ont un caractère formateur et sont pour l'enseignant une source précieuse d'informations. Les discussions collectives sur l'analyse des erreurs permettent aux élèves de constater que les erreurs sont source de progrès.

Les meilleurs élèves en mathématique, lorsqu'ils sont confrontés aux problèmes ouverts, constatent que les algorithmes tout prêts dont ils disposaient ne les aident pas beaucoup. Leur confiance en soi est ébranlée, ils s'énervent et parfois contestent les problèmes ouverts. Cette attitude pousse les élèves moyens ou faibles, habitués aux difficultés, à entreprendre des tentatives audacieuses, à se valoriser au sein de la communauté.

4.6. La gestion du temps

Les observations ont démontré que le travail trop bref en groupe rend impossible la coopération, la recherche en profondeur, l'examen complexe du problème ouvert et la formulation par écrit de la solution du problème ouvert. Pour cela les bons élèves comme les plus faibles ont besoin de temps qui n'est pas gaspillé puisque l'élève acquiert une compréhension plus profonde des mathématiques.

En fait, il n'existe pas de solutions toutes prêtes face à la gestion de la répartition du temps. Les décisions de l'enseignant sont liées au degré de difficulté du problème ouvert et aux particularités de la classe.

4.7. D'autres difficultés

Lorsque la classe est divisée en groupes, il est difficile à l'enseignant de répartir son attention sur 5 ou 6 groupes. Il existe encore des difficultés à percevoir les erreurs. Ce type d'activité peut être plus bruyant qu'un cours traditionnel, et cela peut conduire à des commentaires négatifs de la part des collègues, des parents, et des élèves eux-mêmes. Pour limiter ces difficultés il faudra donc cultiver chez l'élève un climat agréable dans lequel la résolution d'un problème ouvert est une joie et un jeu.

5. Conclusion

En dehors des connaissances qui sont considérées indispensables pour l'homme moderne, l'école devra viser à la formation d'élèves qui disposent de certaines caractéristiques qualitatives : pour formuler des arguments personnels cohérents, pour juger des activités personnelles rationnelles et indifférenciées, pour examiner, pour discuter, pour développer des initiatives créatives, pour apprendre collectivement, pour "apprendre à apprendre". Avec le développement de ces facultés l'élève pourra sans doute devenir un **participant actif, critique et créatif face au changement du monde contemporain**. Dans cette perspective, sa relation vivante avec le problème ouvert constitue une préparation pertinente. Ce n'est pas important si les solutions proposées par des élèves ne répondent pas aux exigences précises des mathématiques. L'essentiel est de donner la priorité à l'auto-épanouissement individuel et/ou collectif.

5. Quelques travaux de groupes ayant déjà travaillé sur la question

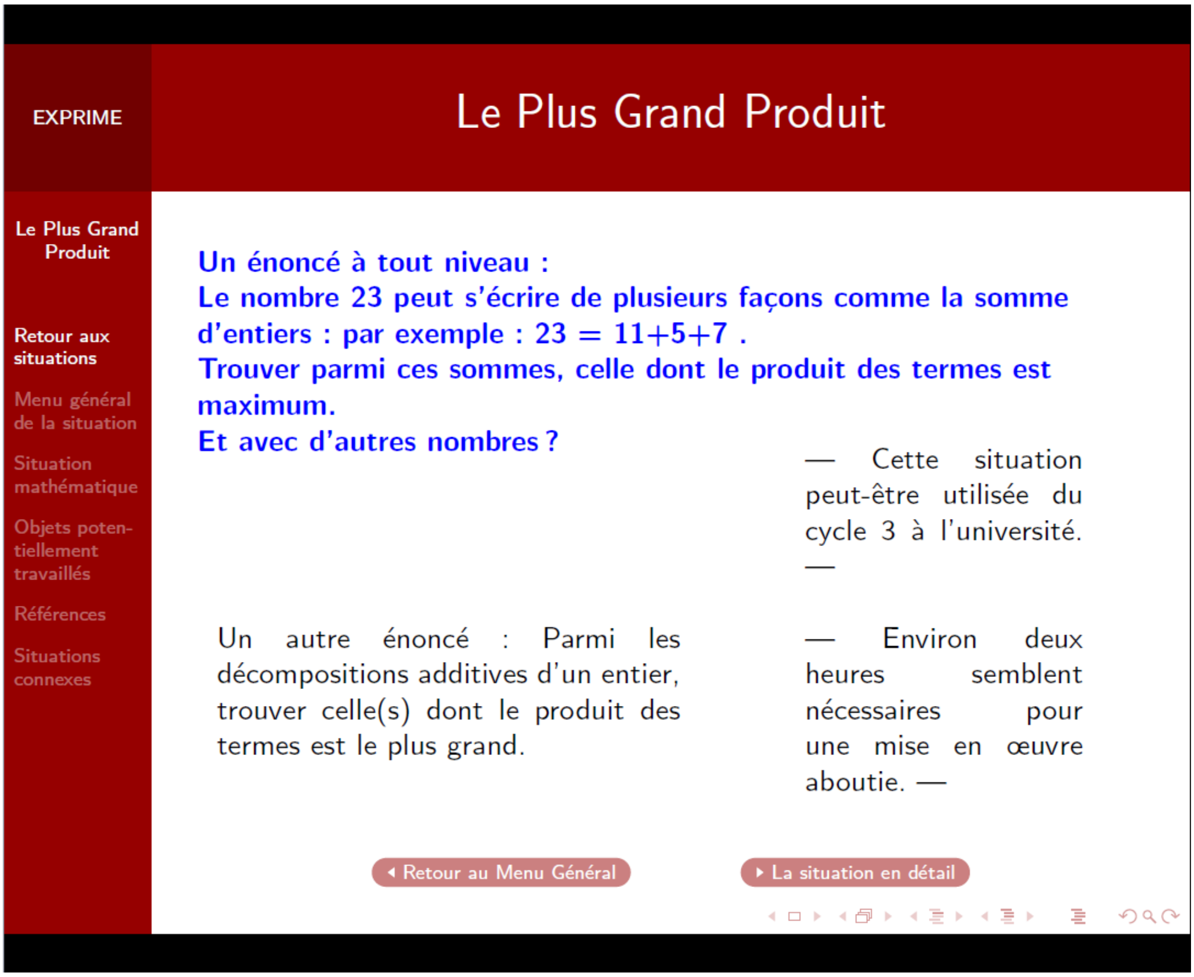
Un certain nombre de groupes (IREM ou non) ont déjà travaillé cette question des problèmes ouverts dans la classe de mathématique.

A Lyon, le groupe EXPRIME a créé une ressource très complète

http://educmath.ens-lyon.fr/applet/exprime/index.pdf

Nous nous inspirons fortement de leur travail, par exemple « Le plus grand produit »

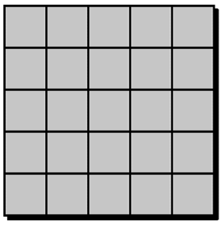
http://educmath.ens-lyon.fr/applet/exprime/plgrprge.pdf



A Grenoble, les SiRC (Situations de Recherche pour la Classe) ont été développées, essentiellement à partir de situation de mathématiques discrètes. Nous en retenons aussi certaines comme par exemple La Chasse à la bête

http://www.institut.math.jussieu.fr/FS2009/fs2008_fichiers/Chasse_Bete_Resultats.pdf

Aucune *bête* ne doit pouvoir pénétrer sur le *territoire*. On dispose de *pièges*, pour empêcher les bêtes de se poser. Une bête est un *polymino* formé de quelques cases.



Piège : 

Des bêtes : domino ou  trimino  

Un territoire

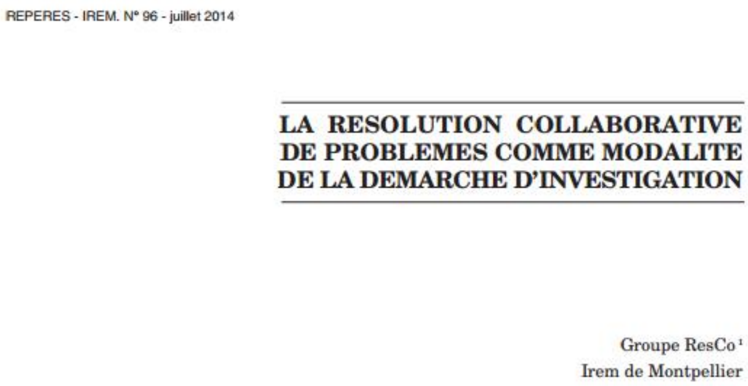
L'enjeu est de disposer le plus petit nombre de pièges sur le territoire.

A Montpellier encore, nous retenons les travaux du groupe RESCO (RESolution COllaborative de problèmes) de l'IREM de Montpellier. En particulier le problème des œufs proposé par M Paul Hayet.

http://www.irem.univ-montp2.fr/

Histoire d'œufs
Monsieur Paul Hayet fabrique des œufs en céramique qui sont tous identiques. Il voudrait tester la solidité des œufs. Pour cela, il dispose d'une échelle de 100 barreaux. Pour tester la résistance d'un œuf, il le laisse tomber de la hauteur d'un barreau et il regarde s'il s'est cassé ou non. Il voudrait déterminer le barreau le plus haut où les œufs ne se cassent pas. Quelle est la meilleure stratégie pour faire le moins de tests possibles ?

Les travaux du groupe RESCO sont également présentés dans le REPERES-IREM n° 96 : http://www.univ-irem.fr/reperes/articles/96_article_642.pdf


REPERES - IREM. N° 96 - juillet 2014

LA RESOLUTION COLLABORATIVE DE PROBLEMES COMME MODALITE DE LA DEMARCHE D'INVESTIGATION

Groupe ResCo[1]
Irem de Montpellier

Enfin, nous retenons les travaux du groupe TRAAM de l'académie de Paris

http://www.ac-paris.fr/portail/jcms/p2_803609/travaux-academiques-mutualises-2013?onglet=onglet1&portal=d_5413&cid=p2_879551

Nous retenons spécialement l'activité sur les pièces proposées par Ruis Dos Santos et dont le sujet est le suivant

On trace un cercle de 1m de rayon au sol, quel est le nombre maximal de pièces de 5 centimes que l'on peut disposer à plat (sans chevauchement) à l'intérieur de ce cercle ?

Cet exercice a également été présenté aux élèves à l'aide d'une vidéo vue sur le site de Dan Meyer

6. Une classification des problèmes ouverts plus proche des pratiques des enseignants

Il nous (notre groupe) a semblé qu'il était pertinent dans cette brochure d'avoir une classification plus proche des pratiques et plus parlante pour les lecteurs…

Il est bien sûr entendu que les caractéristiques d'un problème ouvert peuvent varier d'un niveau d'enseignement à l'autre et que le même problème peut parfois être proposé à différents niveaux avec des objectifs d'apprentissages identiques ou non. Nous avons tout de même tenté une classification :

Des problèmes ouverts pour commencer :

Les élèves doivent avoir les connaissances mathématiques nécessaires à la résolution du problème. Le contenu mathématique ne doit pas être un obstacle pour les élèves dans ce genre de problèmes. On donne des exemples à différents niveaux d'enseignement. Ces problèmes visent essentiellement à développer la ou les compétences des élèves à chercher.

- Au collège : le plus grand produit
- En classe de seconde : une série de petits problèmes pour commencer
- Poignées de main : avec plusieurs possibilités de résolutions
- Pétition

Des problèmes ouverts pour réinvestir des connaissances déjà apprises

Cette fois les élèves ont déjà une certaine familiarité des problèmes ouverts et ces problèmes sont alors l'occasion de réinvestir des connaissances.

- Le cube bicolore
- La poursuite
- Les jauges
- Suites logistiques

Des problèmes ouverts pour introduire des notions mathématiques nouvelles auprès des élèves

Ces problèmes sont appelés problèmes d'introduction ou situation-problèmes plus haut dans la brochure. Les élèves doivent déjà avoir une forte habitude de la pratique des problèmes ouverts.

- Récipients (arithmétique et algorithmique)
- Tour de Hanoï (algorithmique, suites numériques)

2. Des problèmes ouverts pour commencer

1. Au collège : le plus grand produit

Il s'agit d'une activité proposée par le groupe Exprime de Lyon.

Le plus grand produit On peut écrire le nombre 23 sous forme de somme de nombres entiers, par exemple : 23 = 20 + 3 ou encore 23 = 7 + 8 + 8 En multipliant tous les termes de chaque somme, on trouve 60 pour la première et 448 pour la seconde. Parmi toutes les sommes possibles, quelle est celle qui donne le plus grand produit ? Même question pour le nombre 100. Y-a-t-il une règle ?

Plusieurs expérimentations ont été menées à différents niveaux d'un collège ZEP parisien par la même enseignante. La calculatrice est autorisée. Le travail est proposé à des groupes de 3 ou 4 élèves. L'énoncé est projeté au tableau. Les élèves disposent de 15 minutes de travail personnel puis ils travaillent en groupe avec leurs brouillons personnels. Il est demandé un compte rendu écrit par groupe au bout de deux heures et tous les élèves doivent rendre leur brouillon. Pour chaque groupe est désigné un secrétaire et un gardien du temps.

Classe de $6^{ème}$

Il s'agit d'une classe d'un bon niveau, où tous les élèves sont bi-langue Anglais-Allemand. Le travail s'est ici déroulé en 2 séances d'une heure le même jour (vendredi) et une séance supplémentaire le lundi suivant.

Il faut assez rapidement reformuler l'énoncé ensemble. Les élèves demandent rapidement si on peut utiliser des nombres décimaux et si on peut utiliser des soustractions. L'enseignante leur fait remarquer l'aspect infini du problème dans ce cas et fait émerger le problème de l'absence de maximum dans le cas des soustractions. Ils doivent donc se limiter aux nombres entiers.

Sur les brouillons, différentes manières de présenter les calculs apparaissent. L'enseignante fait encore corriger les égalités fausses du type 23=10+10+3=300.

Une élève suggère de décomposer une décomposition. Par exemple comme 23=15+8 on peut chercher à décomposer 15 et 8…

Au bout de 40 minutes, l'enseignante met les records de produits trouvés au tableau. L'idée de décomposer la somme en 2 et en 3 arrive assez vite.

En travaillant avec la somme de 100, les élèves rencontrent ici aussi le problème de l'écriture scientifique. La plupart demandent ce que cela veut dire (seul un élève connait déjà la réponse). L'enseignante leur explique et insiste sur les limites de la calculatrice. Les élèves finissent par dire que la valeur donnée par la calculatrice n'est pas exacte. La classe évoque les ordres de grandeur.

Les élèves ont beaucoup de mal à formuler une règle. En général, dans la formulation, les élèves confondent les mots chiffres et nombres. L'enseignante essaye de les guider vers l'idée de tester des nombres plus raisonnables mais l'idée a du mal à émerger.

Comme après 2h il n'y a pas vraiment de règle formulée, l'enseignante demande aux élèves de refaire le travail avec des « petits » nombres puis de chercher à établir une règle en justifiant leurs réponses. L'utilisation du Zéro et du 1 dans la somme est rapidement écartée.

A nouveau la séance semble extrêmement positive : les élèves se sont pris au jeu, en prenant beaucoup de plaisir, et même les plus faibles se sont mis en activité. Ils ont sursauté au moment de la sonnerie, regrettant que cela ne dure pas plus longtemps et ont demandé à la séance suivante s'ils devaient se remettre en groupe, regrettant que cela ne soit pas le cas.

Il est proposé une séance supplémentaire de correction. Le problème est repris selon la chronologie de la recherche.

L'étude de 23 est refaite de la même façon que les élèves l'ont faite. Pour l'étude de 100, l'enseignante retrouve quelques conclusions des élèves, le fait que le problème est plus compliqué et qu'il est difficile de faire une conjecture. Elle propose de repartir des nombres entiers à partir de 1. Dès le nombre 1 on peut dire que 0 n'a pas d'intérêt comme terme car le produit est nul. Après 4, on fait remarquer que 1 non plus n'a pas d'intérêt comme terme car multiplier par un ne change rien. Quand on a un 1, on a toujours intérêt à ajouter 1 à l'un des autres termes. Tout cela permet de limiter le nombre de décompositions à chercher.

A 4, on remarque que 2+2=4=2×2… A 5, une élève fait remarquer que c'est maintenant que ça va devenir intéressant. On cherche les décompositions de façon exhaustive jusqu'à une somme de 9. On finit par établir qu'à partir de 5, il faut mettre un maximum de 3 et que quand cela fait apparaître un 1, il faut le rajouter à un des 3 ce qui donne 3+1=4=2+2…

L'enseignante explique sur un exemple (42) que si un nombre *n* est plus grand que 5, on a intérêt à le décomposer en *(n-2)+2*. On aborde rapidement la distributivité avec les aires pour justifier la réponse. A l'aide de la décomposition de 6, on montre que si on a trois 2, on a intérêt de les transformer en deux 3.

Classe de 5ème :

Cette classe n'est que pour moitié bi-langue anglais-allemand, avec quelques élèves en très grande difficulté.

L'enseignante demande à un élève de lire l'énoncé à voix haute. A peine l'énoncé lu, les questions fusent : « je ne comprends rien » ; « qu'est-ce qu'un produit ». L'un des élèves répond que « le produit c'est le résultat de l'addition »… Pourtant c'est un « bon » élève…

Comme pour les élèves de 6ème, pour éviter une grosse perte de temps l'enseignante décide d'intervenir. Une élève redéfinit alors correctement les mots somme et produit pour le reste de la classe. Les élèves se mettent au travail en silence pendant une dizaine de minutes.

Une élève poste une question « est-ce que la question porte sur le nombre 23 ? ». Un autre demande « est-ce qu'il faut comparer 60 et 448 ? ». L'enseignante doit intervenir à nouveau et de faire clarifier ce que « toutes les sommes possibles » veut dire.

Les élèves commencent à écrire des sommes différentes et à calculer les produits. Sur les brouillons on voit apparaître des choses du genre : « 23=10+10+3=300 ». L'enseignante doit à nouveau préciser le sens du signe « = » à ces élèves. Elle autorise les élèves à communiquer au sein de leur groupe car ils commencent à s'agiter.

Certains élèves introduisent des décimaux dans la somme. L'enseignante leur fait remarquer que l'énoncé précise « nombres entiers ».

Cela tourne vite au concours. Des questions fusent entre les groupes : « vous avez trouvé combien ??? Moi j'ai trouvé plus grand »…

Une élève passe vite au nombre 100 mais trouve que le nombre est trop grand. L'enseignante lui fait remarquer qu'effectivement, il est difficile de trouver une règle avec des grands nombres et elle lui suggère de trouver une idée pour régler ce problème. L'élève continue à travailler sur le nombre 100 et découvre l'écriture scientifique avec sa calculatrice. Elle me demande ce que cela signifie. Pourquoi ce nombre à virgule alors que nous travaillons avec des nombres entier ? Que veut dire 10^{14} ? L'enseignante doit alors expliquer aux élèves qui le demandent les limites de leur calculatrice et ce que veulent dire les puissances positives et en particulier les puissances de 10.

Un autre élève n'écrit rien sur son brouillon, il se contente de faire des essais avec la calculatrice. L'enseignante lui explique que le brouillon est important quand on cherche à résoudre un problème. Cela permet d'avoir une trace de ce qui a été essayé et une vue d'ensemble.

Un élève en très grande difficulté tente de trouver des sommes possibles. Un autre entend une élève parler du nombre 13 000. Il s'exclame : « c'est impossible, elle n'a pas pu trouver ça, c'est trop grand ».

L'idée de décomposer en une somme de beaucoup de « petits nombres » surgit. Les 2 et les 3 apparaissent.

L'un des élèves fait remarquer que remplacer un 5 par 2+3 est plus intéressant car multiplier par 2 fois 3 c'est multiplier par 6 qui est plus grand que 5.

50 minutes se sont écoulées et un élève en difficulté - problème de langage - déclare que « plus la somme est petite, plus le produit est grand ». L'enseignante lui fait reformuler car il parle alors des termes de la somme et non de la somme…

Au bout d'une heure, il y a la pause et la mise en commun. L'idée de petits termes a germé mais l'enseignante dit que cette proposition est imprécise. Elle organise une mise en commun en demandant à certains de donner leur idée et aux plus avancés de faire part à tous de leurs remarques. L'enseignante dit qu'il faut prouver les assertions et essaye de les guider sur le chemin de nombres plus petits sur lesquels ils devraient expérimenter. Un élève propose de tester une somme de 5, un autre une somme de 10. Comme l'idée ne vient toujours pas l'enseignante explique qu'il faut essayer de résoudre le problème avec des petits nombres qui rendent le travail raisonnable et de voir s'ils peuvent faire émerger une conjecture qu'ils pourraient alors tenter de démontrer. Elle leur propose de tester les sommes pour 2, 3, 4 …

Les élèves se remettent au travail. L'enseignante insiste auprès de certains élèves très faibles pour leur donner du grain à moudre. Les élèves ne tiennent pas compte des remarques de l'enseignante et s'acharnent sur le nombre 100. Le problème de l'écriture scientifique et des puissances se pose pour de nouveaux élèves.

Les élèves sont très actifs. A 30 minutes de la fin, l'enseignante insiste sur le fait qu'il y a aussi une copie à rendre…

La règle qui émerge chez les élèves est de prendre les nombres les plus petits possibles comme terme de la somme. Elle leur demande ce qu'il se passe si on met zéro ??? Et si on ne met que des 1 dans la décomposition avec comme exemple 25 comme somme de uns ? Ensuite, ils précisent le plus petit possible à partir de 2. Alors l'enseignante leur demande de décomposer 6 en 2+2+2 qui donne 8 et en 3+3 qui donne 9…

Une élève parle alors de somme de 2 et de 3… L'enseignante lui demande de préciser sa règle…

L'impression est qu'il s'agit d'une séance très positive. Les élèves se sont pris au jeu. Même les plus faibles se sont mis en activité. Il est très difficile en classe 5ème de leur demander de justifier quoi que ce soit… Les élèves ont pourtant pris du plaisir à chercher et ont demandé quand ils feraient une autre séance sous la même forme… L'enseignante prévoit une heure pour la construction en commun d'une correction.

Contrairement à la classe de 6ème, l'enseignante propose ici, lors d'une séance informatique (en demi groupes), une heure de plus aux différents groupes pour continuer le travail. Certains ont continué sérieusement mais pour d'autres la remise en route a été difficile. L'enseignante a moins d'attention car elle a deux groupes différents à gérer.

En classe de 3ème

Il s'agit d'une bonne classe, très scolaire, et bi-langue anglais-chinois. Cette fois la séance dure 2h en incluant une correction.

Il est encore nécessaire d'expliquer l'énoncé pendant 15 minutes. Certains élèves écrivent toujours des égalités fausses du type 1+1+1+1+1+1=1. Au bout de 20 minutes, une élève trouve la meilleure décomposition pour 23.

Un élève, excellent et assez intuitif en maths d'habitude, est un peu perdu car le professeur vient de traiter le chapitre sur le PGCD et qu'il n'en est pas fait usage. En fait plusieurs élèves sont perturbés par ça et tentent de réutiliser le PGCD. L'enseignante leur fait remarquer que pour utiliser un outil mathématique, il faut que ça ait un sens.

Au bout de 30 min, l'élève la plus rapide a presque trouvé la décomposition pour 100 (3×33+1). L'enseignante lui conseille de formuler une conjecture et de la démontrer ou de l'infirmer.

Au bout de 35 min, un autre groupe a presque trouvé la décomposition pour 100. Une élève veut changer de groupe et boude dans son coin, elle refuse de s'y mettre.

Au bout de 40 min il faut clarifier avec deux élèves de la pertinence des valeurs données par la calculatrice (limites, valeurs approchées et écriture scientifique). Au bout d'une 1h25, l'enseignante donne une indication : tester des petits nombres pour la somme et décomposer le problème.

2. En classe de seconde, une série de petits problèmes pour commencer

La séquence présentée ci-dessous a été proposée à des élèves de seconde en début d'année. Elle a été construite afin de répondre à deux objectifs : la prise en main du tableur et l'introduction à la démarche du problème ouvert.

En ce qui concerne les mathématiques cette activité s'appuie sur des connaissances en arithmétique, en particulier les nombres premiers et les multiples. En algèbre, c'est l'occasion pour les élèves d'approfondir leurs connaissances sur les développements et les factorisations.

Voici les trois exercices qui ont été proposés aux élèves.

Exercice 1.
Utiliser le tableur pour remplir le tableau suivant et faire une remarque sur les nombres obtenus. Peut-on généraliser cette remarque à tout entier n ?

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
n^2-n+41									

Exercice 2.
« Si je multiplie ensemble quatre entiers consécutifs et que j'ajoute un, je trouve un carré parfait. »
C'est vrai ou faux ?

Exercice 3.
Calculer en utilisant le tableur 1x2x3+2, puis 2x3x4+3, puis 3x4x5+4, et ainsi de suite jusqu'à 19x20x21+20.
Quelle conjecture peut être émise ?
Cette conjecture est-elle vraie ?

Dans le premier exercice, une seule question est posée. Elle est ouverte et simple. Pour répondre à la question, les élèves sont obligés d'effectuer plus de calculs que ceux qui sont proposés. Ils doivent réinvestir les récentes connaissances sur tableur en copiant - glissant une formule qui est donnée. Pour mener la démonstration, les élèves sont invités à aller consulter la table des nombres premiers dans leur livre. La démonstration est simple car un contre-exemple est facilement observable.

Pour résoudre le deuxième exercice, les élèves doivent avoir l'initiative des calculs à effectuer et organiser une feuille de calcul. La conjecture est facile à émettre. En revanche les élèves sont amenés à introduire une stratégie pour la vérifier et ils doivent la démontrer. A ce niveau, on peut s'attendre à des difficultés pour mener les calculs algébriques.

Dans le troisième exercice, les élèves auront à organiser une feuille de calcul. La conjecture n'est pas évidente ; des allers retours entre conjecture et tableur sont nécessaires à son élaboration.

Cette séquence a nécessité trois séances consécutives au mois d'octobre. Les élèves ont eu un travail de recherche à faire à la maison entre la deuxième et troisième séance. Une production écrite, détaillant la recherche des exercices 2 et 3, et le fichier Excel associé, ont été ramassés à la fin de la troisième séance.

La première séance se déroule en module. Les élèves travaillent en binômes en salle informatique et doivent utiliser le logiciel Excel. Ils sont autonomes et répondent aux questions sur la fiche élève qui est distribuée. La première partie de cette séance concerne uniquement la prise en main du tableur qui est très guidée. L'exercice proposé en première partie n'est pas présenté ici. Le travail de recherche est abordé uniquement dans la deuxième partie de la séance et durera 30 minutes. Dix minutes avant la fin de la séance, les élèves abandonnent les ordinateurs. Ils participent alors à une synthèse collective. La première partie et le premier exercice de recherche sont corrigés. L'enseignant ramasse les feuilles sur lesquelles les élèves ont travaillé. Pendant cette séance, il a surtout apporté des aides instrumentales. En particulier, les élèves n'introduisent pas spontanément de formule lorsqu'ils utilisent le tableur. Sans aide de la part de l'enseignant, ils organisent très mal leur feuille de calcul. Dans l'exercice 2, aucune stratégie n'est mise en place pour se convaincre de la réponse donnée après un seul calcul. Il n'y a aucune tentative de démonstration. Quant au troisième exercice un seul groupe a émis une conjecture correcte. C'est aussi le seul groupe qui a présenté les calculs en colonne et non en ligne.

La séance suivante se déroule en classe entière. Pour inciter les élèves à prendre des notes, l'enseignant annonce en début de séance que le prochain module portera sur les exercices 2 et 3. Durant ce module ils auront à rédiger une narration détaillée de leur recherche des exercices 2 et 3. A la fin de ce module, cette narration et les fichiers Excel seront ramassés et notés. L'enseignant orchestre une synthèse collective des exercices 2 et 3 en utilisant le vidéoprojecteur. Il projette la feuille de tableur d'un groupe enregistrée à la fin de la séance précédente. On modifie collectivement cette feuille de calcul afin de faire apparaître une page lisible (on met les données en colonnes et non en ligne) et on entre des formules qui utilisent les cellules, ce que certains groupes n'avaient pas fait.

Les élèves travaillent ensuite sur les conjectures. C'est l'enseignant qui pose la question : comment utiliser le tableur pour ancrer la conviction que le résultat trouvé est un carré ? L'idée de faire une colonne où la racine carrée est affichée est retenue. Pour l'exercice 3, les élèves décident de procéder comme à l'exercice précédent. L'enseignant est questionné sur l'existence d'une telle fonction. Il est donc amené à introduire la racine cubique et à donner sa syntaxe sur le tableur. Il pose alors la question : « cette conjecture est-elle vraie ? ». Une discussion s'engage sur le fait qu'une feuille de tableur comporte un nombre fini de nombre d'entiers. Que se passe-t-il pour les entiers qui ne figurent pas sur la feuille ? Les élèves comprennent bien la question posée. C'est un élève qui a l'idée d'introduire une lettre pour sortir de ce dilemme. Il propose d'effectuer le calcul $x(x+1)(x+2)+(x+1)$. Mais comment prouver que c'est un cube ? Un élève affirme que c'est x^3. L'enseignant fais apparaître la colonne x^3 sur le tableur. On n'obtient pas le résultat escompté. Un autre élève propose d'entrer la formule $(x+1)^3$. Au vu des résultats sur le tableur, tout le monde est convaincu qu'il s'agit du résultat cherché. Les élèves sont alors invités à démontrer que pour tout x, $x(x+1)(x+2)+(x+1)$ est égal à $(x+1)^3$. Après une phase de recherche individuelle, deux démonstrations sont proposées. L'une consiste à développer et montrer que les deux expressions sont égales. L'autre consiste à factoriser $x(x+1)(x+2)+(x+1)$.

Une discussion s'engage à propos de la démonstration de l'exercice 2. D'emblée les élèves voient que le problème se ramène à prouver qu'une expression du type $x(x+1)(x+2)(x+3)+1$ est un carré. Il est demandé aux élèves de chercher pour la prochaine séance une expression algébrique dont $x(x+1)(x+2)(x+3)+1$ serait le carré.

La troisième séance se déroule en module. Elle commence par la correction de l'exercice demandé. Les élèves ont développé $x(x+1)(x+2)(x+3)+1$ et n'ont pas pu répondre à la question. Certains ont développé $(x^2+1)^2$. On reprend cette idée et on observe qu'il manque un terme en

x^3. Un élève propose alors de développer $(x^2+3x+1)^2$. On corrige au tableau et l'enseignant efface. Les élèves travaillent ensuite en binôme devant les ordinateurs. Ils doivent rédiger un compte-rendu détaillé de la recherche des exercices 2 et 3. Ce compte-rendu est ramassé à la fin de l'heure et le fichier Excel associé est enregistré sur une clé.

En conclusion, le déroulement des séquences montre que l'enseignant a pris en charge toutes les démarches. Cela tient essentiellement à ce plusieurs apprentissages nouveaux étaient en jeu : entre autres, prendre en main le tableur et pratiquer une démarche expérimentale. On peut noter aussi que le temps de travail en autonomie était insuffisant pour un tel problème de recherche.

3. Poignées de main : avec plusieurs possibilités de résolutions

Les poignées de main Si toutes les personnes qui se trouvent dans la classe se serrent tous la main une fois et une seule, combien de poignées de main y aura-t-il ? Même question pour un groupe de 112 personnes. Même question pour un groupe de 3 500 personnes. Y-a-t il une règle ?

Il y a plusieurs possibilités de solutions accessibles aux élèves, utilisant l'algorithmique, les suites ou les graphes. Cette multiplicité de stratégie rend ce problème d'autant plus intéressant qu'il s'agit d'un problème pour commencer. Les élèves prennent alors conscience qu'un problème n'a pas forcément une voie unique de résolution.

Les stratégies présentées ci-dessous ont été développées par des élèves de 6ème-5éme sous des formes plus ou moins approchantes.

<u>Pour un groupe de n personnes</u> :

Somme des n premiers entiers :

On initialise le nombre total de poignées de main à 0
Tant qu'il y a strictement plus d'une personne dans le groupe :
    On choisit une personne
    On lui fait serrer la main à tous les autres qui restent et on note le nombre de poignés de mains que l'on ajoute au total déjà obtenu
    On la retire du groupe
Fin de tant que
On retourne le total obtenu

Il est logique de retirer du groupe une personne qui a déjà serré la main à tous les autres puisqu'il ne peut serrer la main 2 fois à quelqu'un. On fait remarquer aux élèves qu'à force de retirer les personnes du groupe il finira par rester une seule personne donc on finira bien par sortir de la boucle « Tant que ». Comme on retire une personne à chaque fois, le nombre de personnes du groupe et donc le nombre de poignées de mains diminuent de 1 à chaque fois.

Suite récurrente :

u_n = le nombre de poignées de main pour un groupe de n personnes ($n > 1$).
$u_2 = 1$
pour $n > 1$, $u_{n+1} = u_n + n$

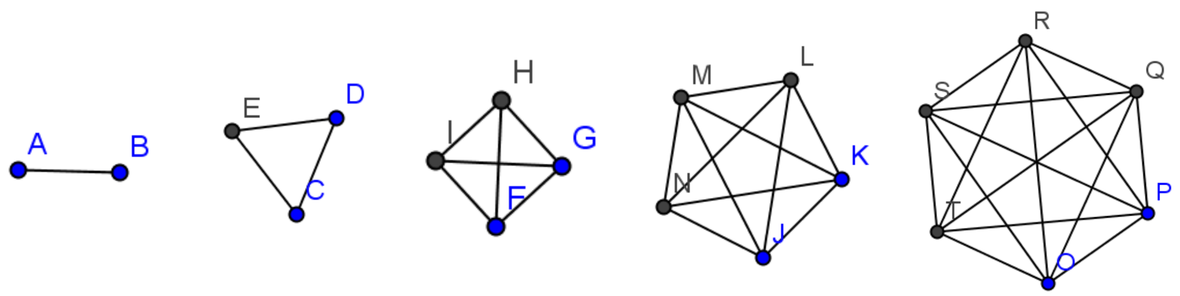
En effet, s'il n y a que 2 personnes il n'y a qu'une poignée de main. Si pour n personnes le nombre de poignées est u_n, quand on ajoute une n+1ème personne, c'est la seule à n'avoir pas encore serré la main à tous les autres qui sont au nombre de n donc en plus des u_n poignées de main déjà réalisées, il faut ajouter les n poignées de mains faites par la dernière personne.

On peut aussi écrire l'algorithme suivant :

J'initialise le groupe à une personne et le nombre total de poignée de mains à 0.
Tant que le nombre de personnes est strictement inférieur à n :
Ajouter une personne dans le groupe
Lui faire serrer la main de tous les autres et autres et ajouter le nombre correspondant au total.
Fin de Tant que
Retourner le total obtenu

Comme à chaque étape on ajoute une personne on finira par arriver à n donc on sortira bien de la boucle Tant que. Le raisonnement précédent sur la suite récurrente justifie la validité de l'algorithme.

Enfin on peut mobiliser des graphes :



On pourrait se dire assez naturellement que si n personnes serrent la main à n-1 personnes, le total devrait être de n(n-1) (c'est d'ailleurs la 1ère idée émise par les élèves en général). Le test sur des petits nombres de personnes permet de conjecturer qu'il faut en fait diviser ce résultat par 2. En effet, si on numérote les personnes, une fois que la 1ère a serré la main à tous les autres, chaque personne qui passe après elle serrant également la main à tous les autres lui resserrera la main une 2ème fois. n(n-1) est donc le double du nombre de poignées de mains cherché.

Les séances relatées durent 1h. Le collège est un collège ZEP parisien. L'énoncé est projeté au tableau. Les calculatrices sont autorisées. Les élèves travaillent par groupes de 3 ou 4 dès le début des séances. Il est demandé un compte rendu écrit par groupe mais tous les élèvent rendent leur brouillon.

Les séances sont suivies d'une séance de bilan axée sur la méthodologie et sur la preuve. L'enseignante fait un point sur les différents algorithmes rencontrés et donne une démonstration géométrique de l'égalité 1+2+…+n=n(n+1)/2 .

Classe de 6ème :

C'est la classe de 6ème bi-langue anglais-allemand de bon niveau.

Au bout de 10 minutes, un binôme a trouvé 2 des solutions signalées ci-dessus.

La solution du n(n-1) est souvent proposée. L'enseignante doit intervenir dans plusieurs groupes pour dire aux élèves de vérifier leur hypothèse sur des petits nombres. Ce réflexe n'est pas encore acquis malgré le problème donné plus haut du plus grand produit… La représentation du problème par des schémas et en particulier par des graphes revient assez souvent. Dans certains cas, l'enseignante doit le suggérer…

En 1h, tous les groupes ont trouvé une ou 2 méthodes, la somme des n-1 premiers entiers et directement n(n-1)/2 par les graphes, mais ils n'ont pas réussi à justifier la 2ème formule. Le fait d'écrire (n/2)×(n-1) ne leur permet pas d'aboutir. Aux élèves qui ont trouvé et expliqué correctement la méthode « somme des n-1 premiers entiers », l'enseignante demande si l'utilisation de cette méthode est viable avec 3500 personnes ? A leur réponse négative elle suggère de chercher une autre méthode de calcul ou une formule équivalente.

Un élève de NSA (primo arrivant non scolarisé antérieurement) intégré dans la classe (et qui ne parle que chinois) tente une manière astucieuse de calculer les 27 premiers entiers (on est 28 dans la classe ce jour-là). Il fait des liens entre 27 et 3, 26 et 4, 25 et 5… L'idée est intéressante mais le problème est qu'il se limite aux compléments à 10. L'enseignante essaye d'expliquer que la méthode est intéressante mais pourrait être améliorée en apportant une petite modification. Cela ne semble pas inspirer les élèves.

L'enseignante conclut toutefois à une séance très positive : les élèves aiment les séances de problèmes ouverts et en réclament. En disant aux élèves qui ont deux fois une heure de mathématiques le vendredi « si on avance suffisamment ce matin, cet après -midi on fera un problème », l'enseignante a eu droit à un enthousiasme général et la séance du matin a été très efficace. L'étape de justification n'est pas toujours évidente à obtenir mais certains y arrivent. Sur cette séance, l'enseignante prévoit une demi-heure pour la construction en commun d'une correction et un point sur les algorithmes rencontrés.

Classe de 5ème

En dehors de 3 élèves le niveau est moyen, voire faible. Le déroulement est le même qu'en 6ème mais l'enseignante avait prévu des groupes de 2. Des groupes fusionnent cependant rapidement en groupes de 4. L’enseignante ne s’y oppose pas vu le niveau général des élèves. Les élèves ont plus de mal que les élèves de 6ème à émettre une conjecture. La somme des n-1 premiers entiers finit par émerger. Elle doit insister pour leur faire faire des schémas ce qui n’est pas naturel en général chez eux. Elle insiste également pour qu’ils vérifient leurs conjectures avec des « petits nombres » ou pour qu’ils expérimentent puisqu’après tout ils sont en groupe… Elle n’a pas trop de mal à ce que chacun ait un brouillon. Une des élèves en difficulté (son groupe a trouvé la solution par somme des n entiers) parle d’algorithme. Il en avait été question lors du cours sur la proportionnalité. Un des groupes avec une excellente élève, compile les essais dans un tableau et parle de proportionnalité, l’enseignante leur suggère de vérifier…

Dans cette classe, seul le groupe de la « meilleure élève de la classe » trouve la méthode du n(n-1)/2. Mais cette élève justifie le 2 par le fait que chacun a 2 mains. L’enseignante fait prendre conscience de l’erreur et le groupe fini par trouver la bonne argumentation.

A nouveau la séance est vécue comme très positive. Les élèves se sont pris au jeu. Les plus faibles se sont mis en activité, ont réfléchi et sont intervenus. Il est très difficile en 5ème de leur demander de justifier quoi que ce soit… Si l’idée de représenter les essais obtenus dans un tableau est positive, le fait d’être dans le chapitre sur la proportionnalité les a perturbés. Ceci dit il faut considérer les choses plutôt de manière positive. En effet, l’idée de vérifier si par hasard ce n’était pas une situation de proportionnalité même sans éléments de raisonnement tangibles n’est pas absurde. Il est difficile de dire cependant si cette idée aurait germé si le chapitre en cours avait été différent. A nouveau, l’enseignante prévoit une demi-heure pour la construction en commun d’une correction.

4. Pétition

Le 25 avril 2006, le parti d’opposition espagnol a présenté au congrès 4 000 000 de signatures contre un projet de loi du gouvernement.
Tous les journaux espagnols ont publié ces photos avec les grands cartons et les dix camions pour transporter les feuilles signées. Pensez-vous qu’il y avait une intention derrière cette mise en scène ou que tous ces cartons et camions étaient vraiment nécessaires pour transporter ces 4 000 000 de signatures ?

Cette situation a été proposée une première fois pendant l'année scolaire 2009-2010 à des élèves d'une classe de seconde de la région parisienne.

L'enseignante a réparti le travail sur deux séances. Les élèves ont d'abord travaillé pendant l'heure de module. Quinze minutes ont été nécessaires pour enrôler les élèves dans ce type de recherche. Ils ont commencé par manifester beaucoup de surprise devant ce travail proposé par un professeur de mathématiques dans lequel les mathématiques étaient apparemment absentes. Le professeur a expliqué ce qu'il attendait : une réponse argumentée qui s'appuierait sur des données mathématiques qu'il fallait faire apparaître. Une discussion collective a permis de dégager quelques données fondatrices du modèle, ainsi que les incertitudes à prendre en compte et à gérer. Cette séance ayant lieu en salle informatique, les élèves avaient accès à internet. Au bout d'une heure, le travail n'était pas terminé. Le professeur a demandé pour la séance suivante une réponse par groupe, argumentée et soigneusement rédigée. Après correction des copies, un bilan collectif a eu lieu.

Le bilan de cette première expérimentation est assez mitigé. Quatre groupes ont rendu des devoirs non terminés : les élèves ont expliqué qu'ils n'avaient pas réussi à travailler en groupe en dehors des heures de cours (l'enseignant n'avait pas anticipé ce manque d'habitude ou ce manque de possibilité). La moitié des élèves seulement a réussi à donner une réponse correctement argumentée, alors qu'arriver à résoudre un problème de cette nature pourrait être un objectif atteignable en fin de troisième. Le professeur a remarqué qu'aucun groupe n'avait pensé à tester la validité de sa réponse. Après réflexion, il semble ambitieux de s'attendre à ce que les élèves aient une démarche complète de modélisation. En revanche, le professeur qui s'était lancé avec réticence dans cette expérimentation en ayant la sensation que les mathématiques passaient au second plan, a observé que, pour la première fois, les élèves avaient été réellement autonomes dans leur démarche ; on peut faire l'hypothèse que le niveau maîtrisé de mathématiques les a mis en confiance et leur a permis de communiquer. En outre, ils ont réinvesti des notions mathématiques vues récemment, comme les encadrements et les fonctions et ont utilisé spontanément les valeurs approchées.

Cette situation a été proposée de nouveau l'année suivante en classe de seconde par la même enseignante, mais dans un cadre différent ; celui de l'heure d'accompagnement personnalisée. Les élèves travaillaient en demi-groupe et n'avaient pas accès à internet (ce qui n'est pas gênant). Deux séances ont été nécessaires. La première s'est déroulée identique à celle de la première expérimentation : discussion collective et recherche en groupe de trois ou de quatre. En revanche, se rappelant les difficultés rencontrées par les élèves pour travailler en groupe en dehors du cours, le professeur n'a pas demandé de travail maison, et a organisé la deuxième séance de la manière suivante: quinze minutes ont été consacrées au travail en groupe et trente-cinq minutes à une rédaction individuelle de la solution.

Cette fois-ci le bilan est nettement positif. Tous les groupes sont arrivés à une conclusion correcte dans le temps imparti. Tous les élèves ont ainsi pu remettre une solution satisfaisante plus ou moins bien argumentée selon les capacités de chacun à rédiger. On peut faire l'hypothèse que le changement de contexte a été un facteur favorisant cette réussite. En effet, les professeurs de mathématiques et de français, travaillant en parallèle sur l'heure d’accompagnement personnalisé, s’étaient concertés et avaient annoncé aux élèves que cette heure serait consacrée à des exercices visant à travailler l’esprit critique, l’argumentation, l’autonomie. Les élèves, préparés à participer à un cours différent, ont donc accueilli ce problème sans manifester la moindre surprise et se sont lancés dans le travail sans la moindre réticence. Il est à noter que certains d’entre eux, peut-être stimulés par le contexte et le discours associé exprimant clairement que l’on attendait d’eux invention et prise d’initiative, ont pensé à entrer dans le problème en considérant des contraintes de poids, alors que lors de l’expérience précédente tous les élèves n’avaient pris en compte que des contraintes sur les volumes.

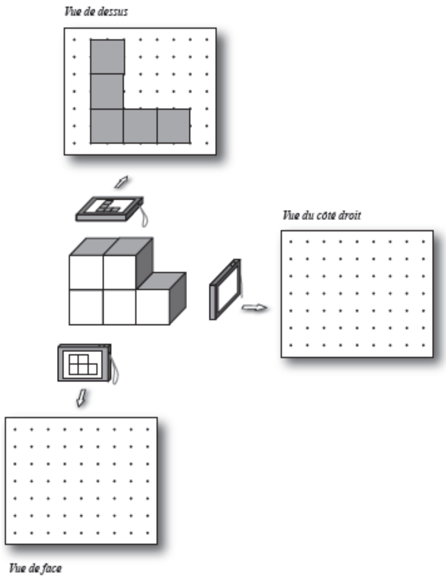
3. Problèmes ouverts pour réinvestir des connaissances déjà apprises

1. Le cube bicolore

On réalise un grand cube en assemblant 27 petits cubes de même dimension. Certains sont en verre transparent, d'autres, en bois, sont peints en bleu. On ne veut voir que du bleu en regardant perpendiculairement chaque face du cube. Quel est le plus petit nombre de cubes bleus nécessaires et comment sont-ils disposés?

Il nous semblait que ce problème relevait de la catégorie « problèmes pour commencer » car il nécessite peu de connaissances. Nous l’avions donc expérimenté dans une classe de 3ème qui n’avait pas pratiqué ce genre d’exercice. Le compte rendu ci-dessous va montrer que nos pratiques d’enseignement de la géométrie dans l’espace n’ont pas permis aux élèves de rentrer facilement dans ce problème. Il a été également proposé à des classes de niveau inférieur ayant l’habitude des problèmes ouverts.

Plusieurs expérimentations ont été menées sur différents niveaux d’un collège ZEP parisien par la même enseignante. La calculatrice est autorisée. Le travail est proposé à des groupes de 3 ou 4 élèves. L’énoncé est distribué aux élèves. Les élèves disposent de 15 minutes de travail personnel puis ils travaillent en groupe avec leurs brouillons. Pour chaque groupe est désigné un secrétaire et un gardien du temps personnels en 5ème. L‘organisation est libre en 4ème -3ème. Les 4ème -3ème passent en premier et ont 1h pour chercher. Les difficultés rencontrées avec ces niveaux conduisent d’enseignante à donner 2h en 5ème. Elle abandonne l’idée de la proposer en 6ème. De plus, il est proposé aux élèves de 5ème des activités préliminaires extraites de la brochure « La troisième dimension » de l'IREM Paris nord (http://www-irem.univ-paris13.fr/site_spip/spip.php?article348 fiches sur les "différents points de vue").



Ces activités durent 1h en classe en plus d’exercices à chercher à la maison.

L’énoncé proposé aux élèves est le suivant :

On réalise un grand cube en assemblant 27 petits cubes de même dimension. Certains sont en verre transparent, d’autres, en bois, sont peints en bleu. On ne veut voir que du bleu en regardant perpendiculairement chaque face du cube. Quel est le plus petit nombre de cubes bleus nécessaires et comment sont-ils disposés. Y-a-t-il plusieurs solutions possibles ?
Même question pour un grand cube formé de 64 petits cubes.

Il est demandé un compte rendu écrit par groupe et tous les élèves doivent rendre leur brouillon. Dans chaque classe, un groupe est enregistré.

Classe de 4ème :

Cette classe, moitié bi-langue anglais-allemand, a été suivie par l’enseignante en 6ème et $5^{\text{ème}}$. Quelques élèves sont en très grande difficulté. Ces élèves ont bénéficié l'année précédente d’un projet Universcience avec 3 séances de récréations mathématiques au Palais de la Découverte et un projet suivi sur l'un des jeux proposés : la chasse à la bête, les cylindres colorés, les planches à clous et les dominos. Ils avaient également travaillé sur les problèmes du "plus grand produit" et sur celui des "poignées de mains" en $5^{\text{ème}}$.

Notamment, une des élèves a travaillé sur les cylindres colorés (le problème qui s'apparente au problème du cube bicolore).

Deux enseignants animent la séance : l’enseignant de la classe et une collègue du même établissement.

Les enseignants distribuent les énoncés et les copies, indiquant juste aux élèves qu'il y a un compte rendu par groupe et que les brouillons individuels doivent être rendus. Cette classe a déjà travaillé avec l’enseignant sur ce mode. Il leur annonce qu'ils auront une note de "recherche", qui ne dépendra pas du fait que le problème a été résolu ou non.

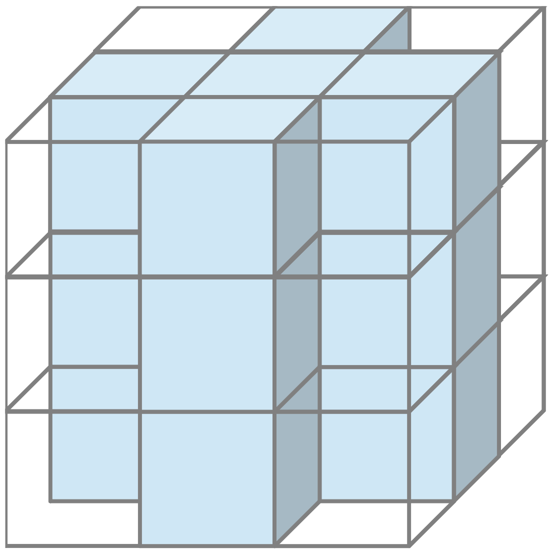
Les élèves se mettent au travail. Dans plusieurs groupes, une question fuse : "qu'est-ce que ça veut dire perpendiculairement". Comme il n'y a qu'une heure de recherche de prévue avec cette classe, les enseignants décident de répondre à la question pour ne pas perdre de temps.

Quelques questions sont posées quant à l'histoire de la transparence des cubes.

Les élèves buttent sur la question de la constitution du cube.

Le groupe enregistré est constitué de 4 garçons parmi lesquels 3 élèves plutôt "bons". Ils passent cependant plus de 25 minutes sur cette question (et font les pitres avec le dictaphone). Ils demandent si les petits cubes en bois avec lesquels nous avons travaillé les autres années sont disponibles. La réponse est non.

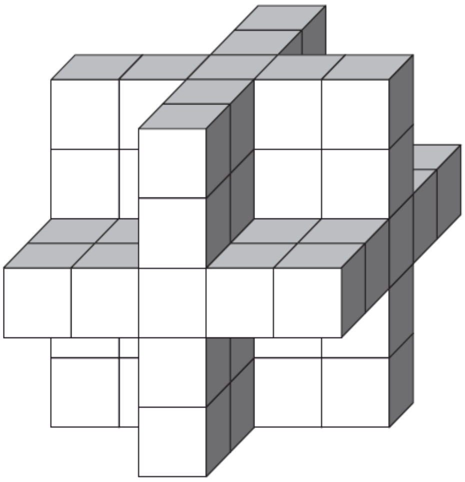
Le groupe 2 est constitué de 4 filles parmi lesquelles 2 sont de niveau correct, une est excellente (élève 1) et la dernière est en très grande difficulté (élève 2). Une élève pose la question de l'unité de longueur à utiliser. L'élève 1 répond que cela n'a pas d'importance. Que cela ne change rien que le problème soit posé en mm, en cm, en m ou autre. L'élève 2, en très grande difficulté, s'implique sérieusement pour la 1ère fois dans un problème. Les élèves partent d'une configuration en croix. Cette idée apparait dans plusieurs groupes.



Au bout de 20 minutes, le groupe a une solution non optimale. Au bout de 34, il a une solution à 13 cubes, au bout de 37, une solution à 11 et à 39, une solution à 10. Les élèves ont du mal à trouver moins. Je leur pose la question du minimum nécessaire. L'élève 2 répond : 9 comme sur la face du cube. Aucune justification de cette réponse n'est donnée.

Dans le groupe 3, un élève de niveau plutôt correct mais qui a tendance à parler avant de penser demande : "êtes-vous sûr qu'il y a 27 cubes, cela devrait être un multiple de 6" (référence aux 6 faces). Une autre (la 2ème de la classe en 5ème) dit qu'il devrait y avoir 4,5 cubes par face (27:6). L'idée de la représentation 3D vient assez vite. Il faut 35 minutes au premier élève pour proposer une représentation 2D des différentes faces mais les autres membres du groupe se moquent de lui et il abandonne. Ici aussi, l'idée de la "croix" apparaît.

La séance est positive. Les élèves les plus faibles se sont impliqués. Par contre les enseignants ont pu noter les carences des élèves en matière de visualisation des volumes et la perte de temps liée à ce problème. Ceci suggère de faire dans les années antérieures plus d'exercices de comptage des volumes du type de celles proposées par l'IREM de Paris Nord dans la la brochure « La Troisième Dimension ».



2

Combien de petits cubes faut-il pour construire cet objet ?

Nota : Quelle que soit la façon dont on pose cet objet sur une table, on le voit toujours ainsi.

Il aurait fallu prévoir une séance de 2h. Aucun groupe n'a eu le temps de rédiger quoi que ce soit.

Classe de 3ème :

Les deux mêmes enseignants animent la séance : l'enseignant de la classe et sa collègue.

Les enseignants distribuent les énoncés et les copies, indiquant juste aux élèves qu'il y a un compte rendu par groupe et que les brouillons individuels doivent être rendus. Ce mode de fonctionnement est inhabituel pour eux.

Le groupe enregistré (4 garçons) ne se laisse pas perturber par le dictaphone. Ils posent la question sur le "perpendiculairement" et l'enseignant leur répond. Ils évoquent l'idée du Rubik's cube. Ils partent sur l'idée de 3 types de cubes, en bois, bleu et transparents. L'un des 4 fait remarquer que le titre est "le cube bicolore" et qu'il y a donc 2 couleurs. Au bout de 20 minutes, toujours pas de représentation 3D. L'un d'entre eux voudrait couper les cubes en 2, un autre dit que ce n'est pas possible. Le cube de côté 3 finit par apparaitre et au bout de 25 minutes ils font une représentation 3D.

Le groupe 2 fait une référence rapide au Rubik's. La représentation 3D apparait vite. Ils trouvent une solution à 17. Pour baisser le nombre de cubes, ils se lancent dans les essais 3D.

Le groupe 3 a une compréhension du problème et représentation 3D assez rapide. Quelqu'un suggère 27:6=4,5 cubes. Un élève dit que ce n'est pas possible et dessine le cube en 3D pour expliquer le problème aux autres.

Le groupe 4 rencontre un problème avec le mot perpendiculairement. Les élèves sont sûrs qu'il y a plusieurs solutions. Ils commencent par diviser 27 par 6...

Le groupe 5 est constitué de 4 filles. Ce groupe adopte la stratégie de travailler individuellement dans un premier temps. Quand l'une propose de mettre 27:6=4,5 cubes, l'autre dit que cela n'est pas possible. Une des élèves se lance dans la fabrication d'un patron de cube pour une réalisation 3D qu'elle met sur la table.

Le groupe 6 part sur le 27:6. Le groupe a du mal à visualiser le problème.

Les enseignants ont trouvé la séance positive dans la mesure où tous les élèves se sont mis au travail. Les élèves n'ont cependant pas eu assez de temps pour chercher et comme les 4$^{\text{èmes}}$, les 3$^{\text{èmes}}$ ne sont pas très à l'aise avec la visualisation des problèmes en 3D.

Classe de 5ème :

Il y a pour cette séance l'enseignante de la classe et une observatrice d'un groupe qui est enregistré (cf paragraphe suivant). Les problèmes rencontrés en 4$^{\text{èmes}}$ - 3$^{\text{èmes}}$ ont conduit l'enseignante à proposer au préalable des exercices de visualisation en 3D extraits de la brochure « La troisième dimension ». Ils savent que c'est pour préparer le problème du « cube ». Ils l'attendent avec impatience. L'enseignante distribue les énoncés et les copies, indiquant juste aux élèves qu'il y a un compte rendu par groupe et que les brouillons, individuels, doivent être rendus. Ce mode de fonctionnement est habituel pour eux puisque l'enseignante travaille ainsi depuis l'année précédente.

Le groupe enregistré, constitué de 4 filles est observé. Elles ne se laissent pas perturber par le dictaphone et se mettent au travail. Par contre, elles sont attentives à émettre à l'oral toutes leurs idées à cause de l'enregistrement et parce que l'enseignante a dit qu'elle voulait le détail de leur démarche (voir le rapport de groupe ci-après)... Cela leur fait perdre du temps...

Le groupe 2 : l'élève 1 se pose la question du « perpendiculairement ». L'élève 2 explique... Les élèves n'ont pas encore déterminé la fabrication du cube mais émettent déjà des conjectures sur le nombre de cubes bleus. L'élève 1 propose 1, ou 4... L'élève 3 dit qu'il y en a plusieurs... Elles parlent de l'impossibilité d'avoir 27:6 = 4,5 cubes. Au bout de 30 minutes elles ne visualisent toujours pas le cube. L'enseignante leur donne un conseil : essayer de fabriquer des cubes de plus en plus gros avec des petits cubes. Il faut 1 heure pour qu'elles finissent par le visualiser… Elles proposent 2 tranches centrées en croix... et comptent 2×9=18 cubes. L'enseignante leur conseille de vérifier leur calcul... Elles corrigent et trouvent 15 cubes. Se pose ensuite le problème de la 3ème vue : elles ajoutent 2 faces... L'élève 3 remarque qu'une seule suffit. Elles se posent la question de la taille des cubes...

Le groupe 3 : les filles se posent aussi la question du « perpendiculairement ». Une des élèves trouve le volume tout de suite. Lors du problème de la cuve, c'est la seule élève sur 2 classes de 5ème à avoir calculé la valeur approchée du rayon d'un disque connaissant son aire. A 45 minutes elles ré-explicitent l'énoncé : perpendiculairement, et cube bleu derrière un transparent se voit bleu...

Le groupe 4 (Marc) : un des élèves voit tout de suite que 3×3×3=27. Deux autres ne veulent pas y croire. Il a du mal à les convaincre... Le 4$^{\text{ème}}$ fini par comprendre qu'il y a 2 sortes de cubes.

Il suggère d'arrêter de dessiner et de réfléchir.... Le premier a l'idée de la configuration en croix. Au bout de 40 minutes ils sont enfin en route pour des essais de remplissage.

Le groupe 5 : l'élève 1 se pose la question de la dimension des faces du cube. L'élève 2 dit qu'elle n'en a pas besoin. L'élève 1 pense qu'il y a aussi des cubes marron. Les autres la corrigent. L'élève 3 propose de compter 3 fois les cubes en coins. Au bout de 40 minutes l'enseignante leur conseille de déterminer la taille du cube car elles réfléchissent dans le vide. L'élève 2 propose la bonne configuration avec 3×9=27. Elles proposent une solution avec 9 cubes, tous sur la même face. Au bout d'une heure l'enseignante les fait réfléchir au fait qu'avec les autres vues que la vue de face, cela ne marche pas. Elles modifient leur proposition pour proposer une solution non minimale.

Les élèves du groupe 6 parlent des 6 faces. Ils tentent de représenter en 3D un cube de côté 4. Les élèves pensent qu'un cube de côté 2 est composé de 24 cubes ce qui leur pose problème... L'enseignante leur suggère alors d'imaginer qu'ils tronçonnent le cube. Ils arrivent à 4+4=8 petits cubes dans un cube de côté 2. Le schéma d'un parallélépipède rectangle de 2 par 2 par 3 qui donne 12. L'enseignante leur conseille de passer à des cubes... Avec un cube de coté 4, par découpage ils trouvent 64. Donc le cube de côté 2 est trop petit et celui de côté 4 est trop grand. Un élève suggère d'essayer 3... Au bout d'une heure ils ont trouvé le cube de côté 3. Un des élèves pense à la représentation en tranche.

Le groupe 7 pose une question : « est ce que le cube est creux ? ». L'enseignante répond non... Les élèves discutent autour de la proposition de l'un d'entre eux qui est de mettre un cube bleu au centre de chaque face. Ils représentent en tranches des cubes de côté 3 et de côté 4. Ils proposent un coloriage des faces : 9×6 … Ils proposent une solution à 19 mais sans représentation papier... L'enseignante utilise sa lunch-box pour expliquer la vue perpendiculaire et la transparence. Un des élèves propose de faire 3 faces bleues en laissant transparents les centres des faces et d'ajouter un cube bleu au centre du cube. Cela leur donne 8+3+5+1=17 cubes.

L'enseignante a trouvé ce sujet difficile pour des élèves de 5ème. Elle a été déçue par les difficultés rencontrées... Elle a renoncé à l'expérience dans ses autres classes qui s'avéraient être plus faible que celle-ci. Les défauts de notre pédagogie en ce qui concerne la vision dans l'espace sont apparus très clairement : nous privilégions la perspective cavalière et les patrons mais que se passe-t-il « à l'intérieur » ??? L'enseignante décompose pourtant les cubes lors des calculs de volumes et les conversions. Tout cela a empêché la plupart des élèves d'entrer dans le cœur du problème rapidement. Des exercices de remédiation avec comptage de volumes constitués de cubes ont étés proposés aux élèves (voir la brochure « La Troisième dimension » de l'IREM Paris nord).

Observation précise d'un groupe de la classe de 5ème

Le professeur distribue l'énoncé à chaque groupe. Les élèves visiblement habitués à ces types de séances ne sont pas désarçonnés par l'énoncé ouvert et se mettent immédiatement au travail. L'enseignant tournera dans la classe et viendra voir le travail de chaque groupe. Les élèves chercheront pendant 2 heures en autonomie, et la mise en commun ainsi que le bilan seront effectués lors d'une séance ultérieure.

Groupe observé :

Lucile	**Annah**
Léna	**Dalva**

10h 45 : Chaque élève lit l'énoncé pendant 5 minutes.

Les élèves essaient de dessiner les 27 cubes.
Lu explique : il faut chercher combien de cubes par face
A, Lé et D ont dessiné des faces avec 4x4 ou 4x5 carrés. Lu en a mis 9.
Lu : je ne sais pas pourquoi j'ai divisé par 3
Les autres : pourquoi pas diviser par 4 ou 6 ? Il peut y en avoir 4 par face
Lu : on doit trouver un nombre entier. 27 n'est divisible que par 3 ou 9
Au bout de 7 minutes les élèves se mettent d'accord pour 9 cubes par face

10h57 : s'intéressent de nouveau à l'énoncé et s'interrogent sur « perpendiculairement »
Lé remet en question 9 cubes par face. Il y a 6 faces, cela fait 6x9, 54 cubes.
Réalisent que le verre est transparent.

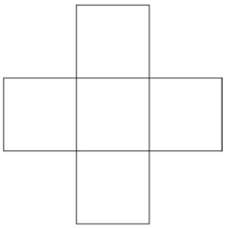
11h : Donnent une réponse : 24 c.b. et 3 c.v. Se demandent si c'est le plus petit.

11h01 : Lu : « il faut visualiser avec un objet ». Sortent l'emballage d'une gomme.

10h02 : beaucoup de discussion
Donnent une autre réponse : il y a 12 cubes bleus minimum car 24/2=12. Tapent à la calculatrice 27-12, donc 15 cubes en verre. « Maintenant on a trouvé la solution, mais il faut l'expliquer. On a trouvé 24 en enlevant les 3 du milieu, et après on explique comment on est arrivé à 12. On enlève 3 faces et on trouve 12. »

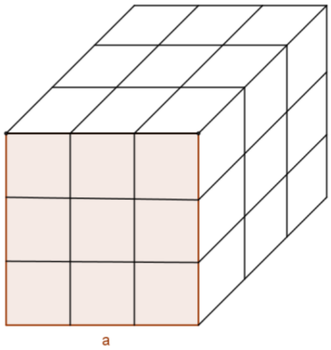
11h09 : début de la rédaction pour justifier. Lu dicte à Lé. « Comment on a trouvé le nombre de cubes par face ». Rencontrent des difficultés pour la justification. « Est-ce qu'on dit qu'on a trouvé au hasard ? Mme P nous a dit de tout justifier. Le hasard n'est pas une justification ». D vérifie à la calculatrice que 64 n'est pas divisible par 3. A rappelle les règles de divisibilité. D continue les divisions.

11h15 : discussion sur la représentation en perspective cavalière. Déformation ou pas de la face de devant.
A et D reviennent sur 64. 8 cubes par face ?
Lu : un schéma aide à résoudre un problème.
A construit un patron de cube.
D est en train de chercher pour 64
Résultat pour A.



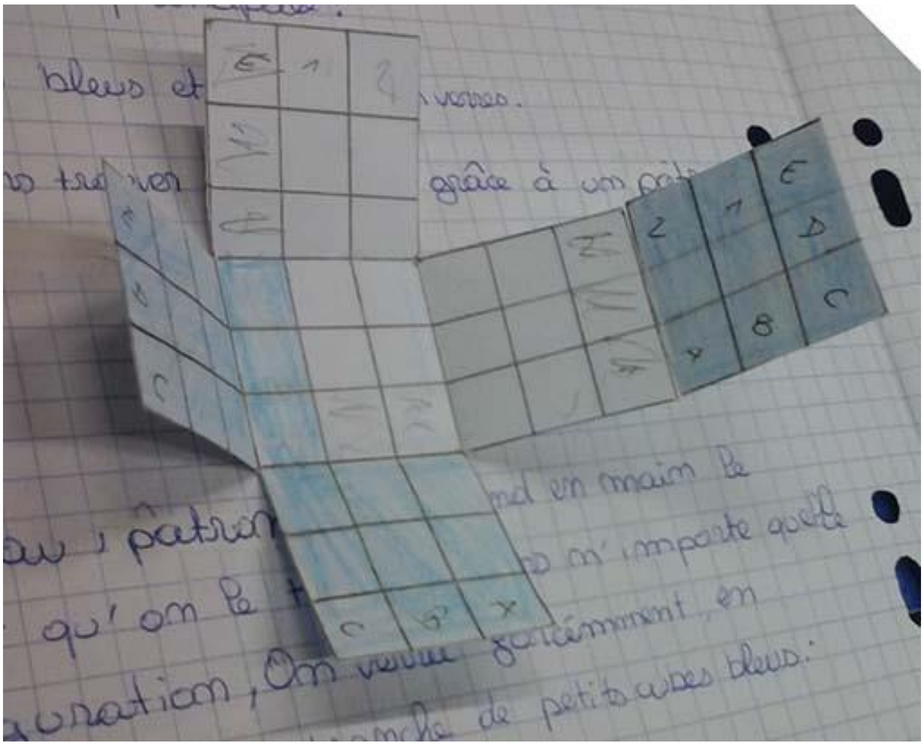
Les autres : tu t’es trompée.

Lé a fini la perspective cavalière.



Lu veut mettre du volume sur les petits cubes. Les autres lui disent d’abandonner.
A découpe un petit cube pour ajouter à son patron.

11h22 : Lu dicte à Lé. « Comment expliquer que les cubes se partagent entre les faces ? »
A demande où coller son petit carré. Elle l’ajoute avec du scotch.
Comment voir à l’intérieur ?
Lu et Lé essaient toujours de rédiger le début.
Discussion : est-ce qu’on parle de nos erreurs ?
A entreprend de dessiner des petits carrés de 1 cm sur chaque face de son patron.



11h27 : discussion sur face et volume.
A réalise qu’un carré ne fait pas 3 cm.

Le professeur intervient pour les débloquer sur ce terme de face.

11h32 : D revient sur les 64 petits cubes. A montre son patron avec 27 petits carrés dessinés d’un côté. Les autres lui disent de les dessiner aussi de l’autre côté.
L’observateur leur dit de laisser le problème des 64 cubes.

11h40 : fin de la rédaction sur le nombre de cubes par face. Début de la rédaction de la suite.
« Le verre est transparent, on voit le bleu à travers. Ça intéresse le prof ce à quoi on a pensé »

11h45 : D et A veulent relire.
Le verre ne pose pas de problème. Se mettent d’accord pour écrire la première solution. Discussion : hypothèse convient mieux que solution.
Lu explique le tour d’une tranche

x	x	x
x		x
x	x	x

Lé : le tour du cube fait 8 petits cubes. On fait 8x3, puisqu’il y a 3 tranches. Ça fait 24, d’où 24 carrés bleus, plus 3 cubes de verre à l’intérieur.
Lé : c’est une solution, ce n’est pas une hypothèse. On peut réduire

11h55 : A et D commencent à colorier.

Discussion : démarche d’abord ou solution d’abord ? Optent pour donner la solution.

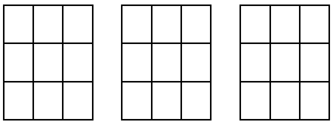
Lu dicte : grâce à un schéma en volume, corrigent « un patron »…
A et D sont parties chercher des crayons de couleur.
12h : A et D colorient 3 faces du patron. Elles perdent du temps à se chipoter.

12h05 : l'observateur leur demande de vérifier. « On s'est gourées sur le schéma »
Lu dit à A : « pour un carré qui est le même cube sur une autre face ». Les 3 autres ne comprennent pas. Elles commencent à donner des signes de fatigue.
Seule Lu cherche. Entreprend d'inscrire la même lettre sur les faces du même petit cube ;

12h10 : « il n'y en a pas 27 ». Discussion sur le nombre de cubes représentés sur le patron.
Lé compte les carrés.
L'observateur intervient pour leur rappeler qu'il y a 27 cubes.

D a l'idée de représenter les tranches. L'observateur l'aide pour son schéma.

12h20 : D dessine ses 3 tranches.

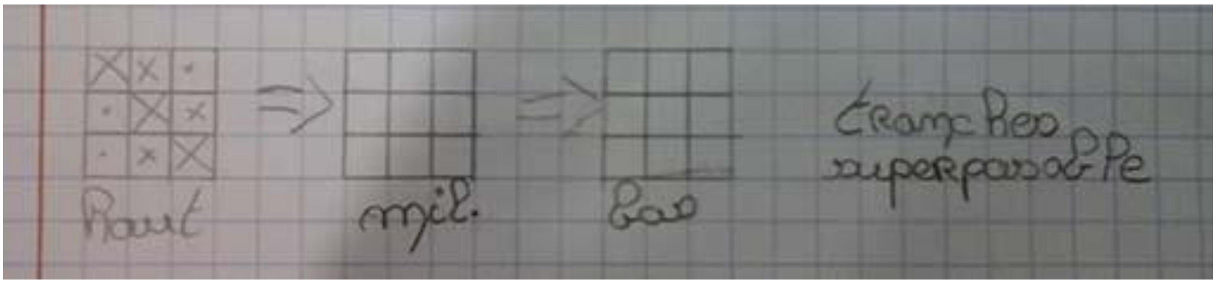


Haut milieu bas

Lu pense 21 cubes bleus. On a trouvé la solution, il faut expliquer.

12h25 : Lu dessine un cube en perspective. Elles ne font rien des tranches dessinées par D

12h30 : D « je pense qu'il faut utiliser les tranches »



2. La poursuite (collège, seconde)

Sur l'autoroute, une voiture se trouve juste derrière un camion au moment où elle décide de s'arrêter sur une aire de repos. Le conducteur prend une pause de 10 minutes puis repart et règle son régulateur de vitesse sur 110 km/h. Le camion, quant à lui, roule à une vitesse constante de 90 km/h tout au long de son trajet. Au bout de combien de temps (et de combien de kilomètres) la voiture rattrapera-t-elle le camion ?

L'analyse a priori qui suit a été extraite d'un article de l'un des auteurs dans la revue Recherches en Didactique des Mathématiques (numéro 34 2/3).

On admet que la voiture roule tout de suite à la vitesse 110 km/h et que les vitesses restent vraiment constantes. Il y a en fait plusieurs démarches possibles pour les élèves et une seule met réellement en jeu les fonctions comme outils. Il se trouve que toutes les autres méthodes sont beaucoup plus faciles. Les élèves peuvent donc faire un choix (en ce qui concerne la reconnaissance des connaissances à mettre en fonctionnement) si plusieurs de ces méthodes leur sont disponibles mais ils peuvent simplement s'engager sur la méthode la plus proche de leurs connaissances déjà-là. Nous détaillons ces méthodes, en partant des plus simples jusqu'à la plus experte – au sens où c'est elle qui se généraliserait le mieux dans d'autres contextes, avec d'autres variables didactiques etc

a) Une première méthode est la recherche numérique des distances parcourues (indépendamment) par les deux véhicules en fonction du temps, avec des comparaisons (point de vue du dépassement du camion par la voiture). Lorsque la distance parcourue par la voiture dépasse celle du camion, à un moment donné, et à partir de la même origine des distances, cela signifie qu'il y a eu dépassement du camion par la voiture. Les élèves qui raisonnent ainsi peuvent en déduire un encadrement du temps recherché avec les distances correspondantes. Cette méthode peut s'organiser de différentes façons. On peut utiliser ou non un tableur et, par exemple, calculer les distances parcourues toutes les 10 minutes, après la 10ième minute :

Temps	10'	20'	30'	40'	50'	60'
Distance parcourue par le camion (à partir de là où il est quand la voiture s'arrête)	15km	30km	45km	60km	75km	90km
Distance parcourue par la voiture (idem)	0	110/6 =18,3 km	110/3 =36,7 km	110/2 = 55 km	2/3 x 110 = 73,3 km	5/6 x 110 = 91,7 km

Illustration de la première méthode de résolution

Il y a dépassement entre 50 et 60 minutes, temps calculé à partir du moment où la voiture s'est arrêtée. On peut affiner : en 55 minutes le camion a parcouru 82,5 km et la voiture qui a roulé 45 minutes a parcouru 82,5 km. C'est déjà gagné ! La dichotomie en acte permet de trouver tout de suite le résultat, mais une tabulation par minute entre 50 et 60 est aussi efficace. Le fait d'avoir un nombre entier de minutes comme solution permet de rendre cette approche tout à fait efficace.

Les connaissances mises en fonctionnement ne relèvent pas de la classe de seconde : il s'agit essentiellement de calculs de distances quand on a les vitesses (application de la formule avec comme seule adaptation la conversion de km/h en km/minute), des comparaisons et des encadrements. Un tableur suffit sans qu'aucune autre connaissance ne soit mise en fonctionnement. Il n'y a que du traitement interne. Implicitement, il y a le théorème des valeurs intermédiaires, hors programme. Il est d'autant plus implicite que la valeur cherchée est exacte.

b) Une deuxième méthode est encore purement numérique. Elle relève d'un point de vue « poursuite », comme dans le paradoxe de Zénon dans le champ de l'Analyse. Quand la voiture démarre, elle parcourt les 15 km d'avance du camion, ceci en 8,18… minutes car elle roule à 110 km en 60 minutes. Pendant ce même temps, le camion a avancé, d'une distance égale à 12,27 km etc. La suite des distances parcourues par le camion décroit vers 0 et donc en ajoutant les temps mis par la voiture à chaque étape (8,18+…), la suite doit converger vers une durée finie.

Cette méthode met en jeu la notion de proportionnalité. Les activités correspondantes relève de la reconnaissance d'une situation de proportionnalité comme outil, sans adaptations. Il n'y a plus non plus vraiment d'étape de raisonnement, seulement du traitement interne. Il y a cependant implicitement des connaissances hors programme sur la convergence de suites numériques. Le processus ne s'arrête pas *a priori* et l'élève doit décider d'arrêter à un certain degré de précision.

c) Une troisième méthode, toujours numérique, relève d'un point de vue de rattrapage par annulation de la différence de distance. Les deux véhicules ont 15 km d'écart et des vitesses constantes. La différence entre les deux vitesses est de 20 km/h. Tout se passe comme si le camion était immobile et si la voiture avançait à 20 km/h. On se place en fait dans le référentiel du camion. Pour rattraper 15 km, il faut que la voiture roule pendant 45 minutes.

Cette fois, il y a un seul calcul de temps. C'est une adaptation de l'application de la formule distance = vitesse * temps. On pourrait aussi calculer algébriquement la distance séparant les deux véhicules à chaque instant $D(t)=15-20/60*t$. Les activités correspondantes relèvent encore de l'adaptation de la formule à utiliser. Le traitement interne est très réduit (un seul calcul de temps ou une seule équation à résoudre $D(t)=0$).

d) Une quatrième méthode numérique est enfin plus complexe et relève cette fois d'une modélisation mathématique dans le cadre graphique : les élèves doivent en effet introduire des droites comme modèles de la situation. Il y a reconnaissance et adaptations de deux situations de proportionnalité ainsi qu'une étape. Les élèves modélisent plus précisément la distance parcourue par chacun des deux véhicules avec un graphe, en devant choisir une même origine des temps, assez naturellement le moment où la voiture s'arrête. Le camion parcourt 90/60 km chaque minute, à vitesse constante, d'où une demi-droite représentant le graphe sur R^+ d'une fonction linéaire. La voiture n'avance pas pendant 10 minutes (segment sur l'axe des abscisses entre 0 et 10) puis parcourt 110/60 km chaque minute, d'où une demi-droite d'origine le point (10;0) et de pente 110/60. L'intersection des deux demi-droites donne le temps recherché.

Les connaissances mises en fonctionnement relèvent donc essentiellement d'adaptation de la proportionnalité et les fonctions ne sont pas explicitement présentes ; mais il y a des reconnaissances d'outils mathématiques à utiliser (les droites), des choix (les origines), des adaptations (liées aux changements de registre numérique / graphique) et une étape : on modélise dans un premier temps les distances parcourues par les deux véhicules avec des demi-droites, puis dans un second temps on fait une lecture graphique de l'intersection des demi-droites. Cette méthode peut s'articuler avec la première méthode mais on doit bien s'interroger sur le fait qu'on a des droites.

e) Une cinquième méthode met cette fois directement en jeu les fonctions – connaissance visée par l'enseignant - avec une traduction du problème dans le cadre algébrique. Les élèves modélisent le problème en donnant les positions ou les distances parcourues du camion et de la voiture en fonction du temps. Si on prend pour origine du temps, comme pour la précédente méthode, le moment où la voiture s'est arrêtée, les expressions algébriques des deux fonctions sont ainsi $C(t)=90/60\ t$ et $V(t)=110/60\ t - 110/6$ pour le camion et la voiture respectivement. Elles correspondent selon l'interprétation qu'on en fait aux distances parcourues par les deux véhicules ou à leurs positions à partir de l'endroit où la voiture s'était arrêtée. L'interprétation de V sur l'intervalle [0,10] n'a cependant pas de sens physique, de sorte que l'expression de V peut se révéler complexe à trouver. Prendre cette origine des temps n'est donc pas le plus facile.

Les élèves peuvent choisir une autre origine plus naturelle, en donnant comme origine des temps le moment où la voiture redémarre : alors les distances parcourues sont données par $C(t)=15+1{,}5t$ et $V(t)=110/60t$ ici il est plus facile d'interpréter la fonction C dans les temps négatifs. Mais à chaque fois il y a des intermédiaires à calculer, la distance parcourue par le camion pendant les 10 minutes d'arrêt de la voiture (15 km) ou bien la distance (virtuelle, d'où la difficulté) qui aurait été celle de la voiture si elle ne s'était pas arrêtée pendant 10 minutes (10*110/60 km, d'où le 110/6). En dernière étape, la résolution algébrique $C(t)=V(t)$ donne t=45 minutes ou t=55 minutes selon l'origine du temps choisie.

Cette méthode, quelle que soit sa mise en œuvre, met en fonctionnement l'établissement des formules algébriques donnant des distances en fonction du temps, connaissant des vitesses, avec des choix de repères difficiles, puis une résolution d'équation algébrique. Les activités correspondantes sont des activités de reconnaissance des formules à utiliser, d'organisation du raisonnement (une étape comme dans la quatrième méthode) et de traitement interne (calculs intermédiaires, adaptations des formules, résolution d'une équation…).

Il y a des propriétés des objets mathématiques utilisés qui n'ont pas d'interprétation physique, ce qui peut expliquer que cette modélisation algébrique est aussi la plus difficile. Il y a aussi des changements de point de vue difficiles, d'une part entre distances et positions comme on l'a vu dans la résolution, mais aussi entre temps et durée, au moment du passage des fonctions $C(t)$ et $V(t)$ à la résolution de $C(t)=V(t)$ où l'on cherche une durée. C'est peut-être aussi un point délicat pour des élèves.

Observation de la correction en classe de seconde

Le professeur commence par donner des généralités sur ce type de situation (poursuite) dont un exemple a déjà été rencontré. Il enclenche le travail des élèves avec un rappel : il dit qu'on a affaire à un problème de variations, de distances en fonctions de temps, espérant susciter un travail avec des fonctions. Il reprend des données du problème, évoque dès le début les problèmes de méthodes. Il fait à la fin un bilan de satisfaction (seule ombre : les élèves ne sont pas assez rapides pour rédiger…). Puis il corrige en deux phases - une synthèse des travaux de groupes et un bilan.

Pour ce problème, il est *a priori* difficile de savoir ce qui doit être institutionnalisé : on peut le résoudre sans utiliser de mathématiques (avec le tableur notamment et c'est nettement le plus facile) ou en cherchant à introduire les fonctions qui donnent les distances parcourues par chaque véhicule en fonction du temps. Dans ce dernier cas, plusieurs difficultés guettent les élèves : le choix d'origine (origine de temps mais aussi origine d'espace), l'établissement de la fonction pour la distance parcourue par la voiture, l'interprétation du problème en terme de résolution d'équation (qui impose le choix d'origines communes). Ce qui est délicat pour le professeur est que toutes les méthodes présentées plus haut sont présentes dans la classe.

Le professeur va alors choisir de présenter deux de ces méthodes – successivement la première solution en utilisant un tableur puis la solution algébrique attendue (fonctions). Le tableur permet d'introduire l'idée d'encadrement et de graphe, ce qui amène à se poser a postériori la question des fonctions représentant la distance en fonction du temps. La présentation de la solution algébrique amène à la résolution algébrique mais aussi au tracé des courbes, ce qui permet de la relier à la première solution.

Le professeur reprend, en citant ce que tout le monde a fait (conversion de la vitesse en km/minute, approchée ou non pour la voiture, calcul des distances). Il valide ensuite la réflexion d'un élève : c'est le fait que les vitesses sont constantes qui autorise l'écriture fonctionnelle (pas de paliers). Puis il fait reprendre à partir du travail d'un groupe, le tableur : tous les élèves doivent reprendre et compléter (jusqu'à 60 pour le temps) – de 10 en 10 ou même de 5 en 5. Le professeur insiste sur le fait qu'il y a différentes méthodes pour faire ça, et sur le fait que le groupe au tableau a utilisé une méthode additive – le double de temps associé au double de distance (basée sur la linéarité de la proportionnalité) – alors que souvent on utilise une méthode multiplicative 1,8 fois… (tout autant basée sur la proportionnalité, mais écrite *a fois x*). Il légitime le fait de ne pas passer aux fonctions : « *ce n'est pas grave car le passage à l'algébrique est difficile…* ». Tout se passe comme si l'enseignant essayait, à partir des activités *a maxima* du groupe ayant choisi la méthode, de faire développer des activités *a minima* pour tous les autres élèves sur cette démarche.

Ensuite il corrige (quand même) la démarche graphique et fonctionnelle (avec la question : « *comment faire sans tableur ni graphique ?* »). Le calcul à partir de la résolution de l'équation obtenue en égalant les deux expressions algébriques des distances en fonction du temps est mené jusqu'au bout. L'enseignant insiste beaucoup sur la difficulté technique de ce calcul, à cause de la fraction et de la réduction nécessaire au même dénominateur. Il reprend pas à pas la résolution de l'équation, avec des aides procédurales (le fait d'isoler x…) et constructives (le statut des nombres…) etc… Là encore tout se passe comme si l'association des élèves à la correction détaillée, lente, leur permettait de développer des activités *a minima* mais cette fois-ci seulement sur la partie « traitement interne », ne reprenant pas la globalité de la tâche complexe (laissant de côté reconnaissance et organisation).

L'enseignant se doit de reconnaître le travail de chaque groupe. Du coup, pendant la correction, il ordonne les prises de parole, de manière à reprendre les derniers qui ont parlé et à continuer sur la piste fonctions. Mais il ne peut pas « forcer » les élèves à cette démarche, déclarée plus difficile, ce qui réduit la portée de son bilan, qui finalement ne porte que sur les aspects techniques de la résolution attendue. Tout se passe comme si il y avait là un prétexte à faire revoir aux élèves ce type de calcul algébrique, presque indépendamment du problème initial.

3. Les jauges

L'expérimentation a été menée en classe de seconde dans un lycée classé zone prévention violence en fin d'année. Les élèves avaient déjà cherché des problèmes ouverts.

L'objectif de ce problème ouvert est de mobiliser des connaissances sur les fonctions et leur sens de variation.

Chaque groupe doit rendre une affiche expliquant leur démarche et leurs résultats.

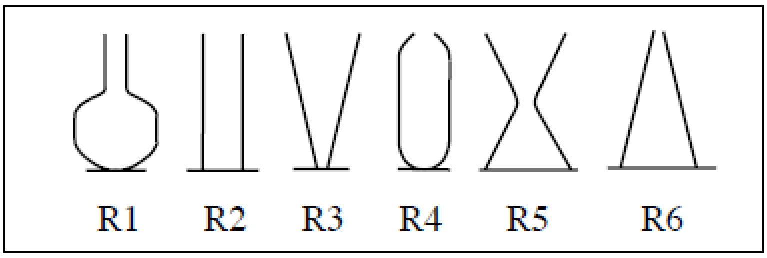
L'énoncé est le suivant :

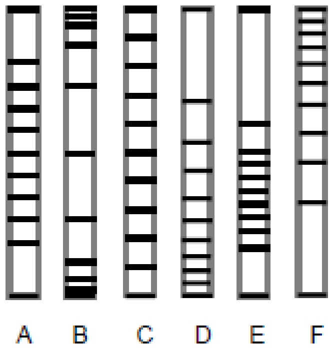
Vu à la Cité des Sciences et de l'Industrie à Paris.

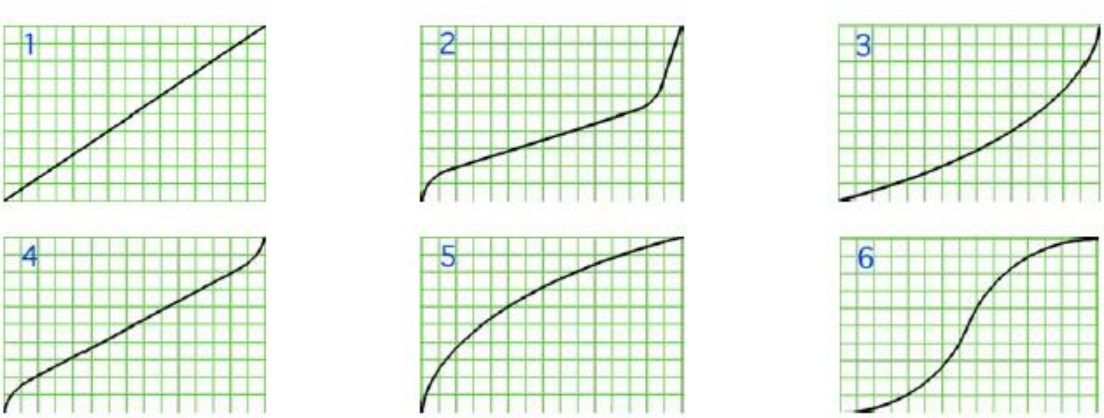
« Plusieurs réservoirs de formes différentes, de même volume, de même hauteur se remplissent dans le même temps. A chaque forme de récipient on associe une jauge et une courbe indiquant la hauteur du liquide en fonction du temps. »

Les récipients ont tous le même volume 10 litres et la même hauteur. Leurs formes sont représentées grossièrement par les dessins ci-dessous. Pendant le remplissage, le débit de l'eau est constant et identique d'un récipient à l'autre. Ainsi, à un instant donné, le volume d'eau contenu dans chaque récipient est le même mais la hauteur d'eau n'est pas nécessairement la même.

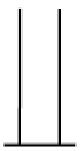
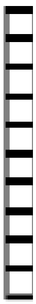
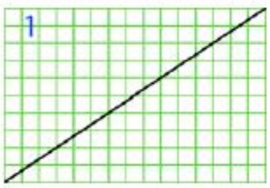
Les graduations des jauges indiquent les hauteurs de liquide correspondant à 1 litre, 2 litres dans les réservoirs. Les courbes indiquent la hauteur atteinte par le liquide en fonction du temps lorsque les réservoirs se remplissent.

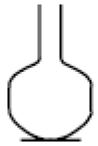
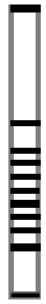
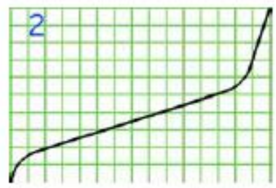






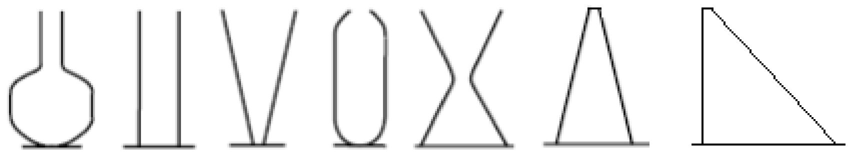
On considère les deux réservoirs suivants :

Reservoirs	Jauges	Courbe indiquant la hauteur de liquide en fonction du temps
 R2	 C	

 R1	 E	

De la même manière associer à chacun des réservoirs restants sa jauge et sa courbe. Expliquer vos choix.

Construire l'allure de la jauge et de la courbe du récipient R7 :



R1 R2 R3 R4 R5 R6 R7

Les compétences étudiées sont les suivantes :

Ce que je sais faire	Oui	Non
Prendre des initiatives (faire des tests)		
Prendre des initiatives (faire des schémas)		
Prendre des initiatives (faire des expériences)		
Elaborer une démarche		
Emettre des conjectures		
Vérifier les conjectures		
Rédiger une synthèse de la recherche		
Etudier les variations d'une fonction		

MISE EN PLACE

Lecture individuelle du sujet pendant 5 minutes, puis travail des élèves par groupe de 4.

Les élèves se prennent au jeu et essayent d’associer les différents récipients aux jauges et aux représentations graphiques. Les discussions à l’intérieur des groupes sont animées et de nombreux élèves sont en complet désaccord.

Un groupe fait des essais en remplissant une bouteille d’eau.

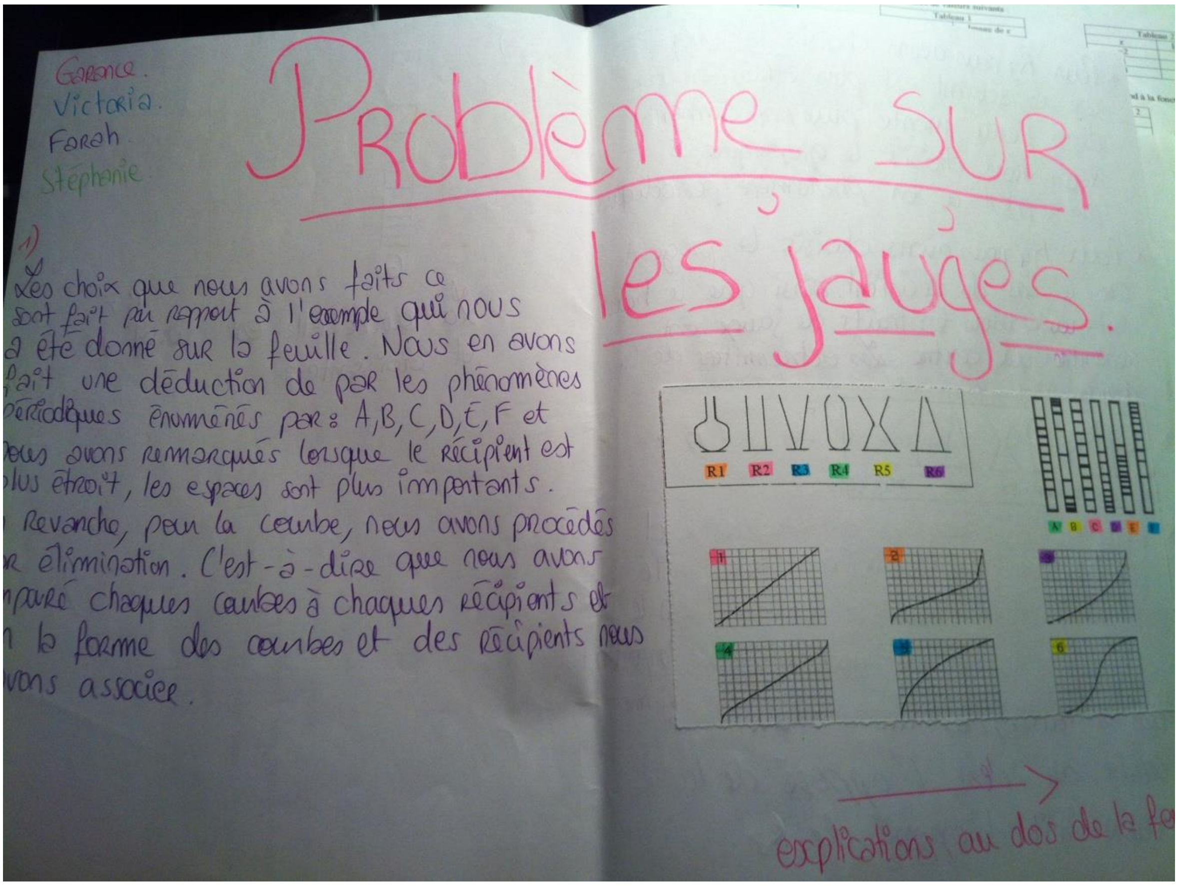
L’ensemble des groupes trouvent plus ou moins rapidement les associations : (de 20 min à 50 min)

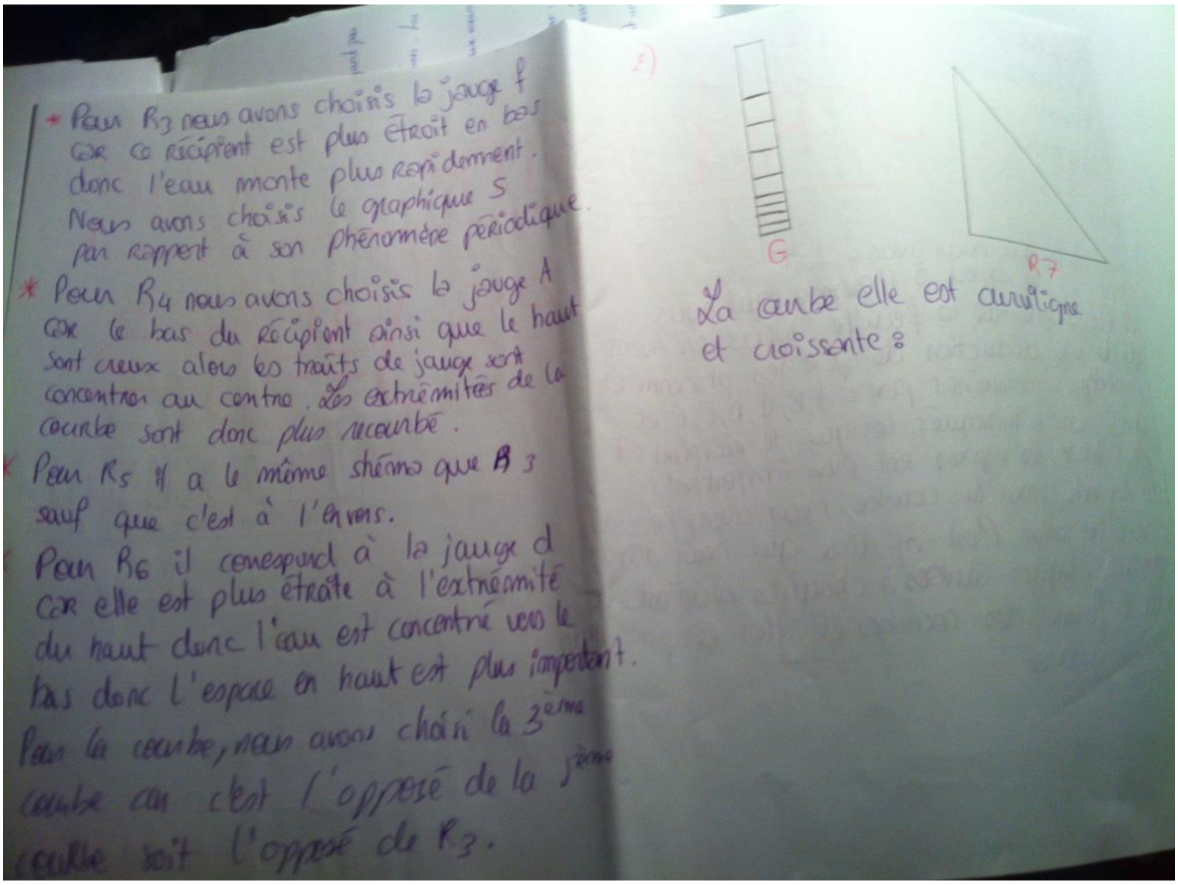
Plusieurs tactiques apparaissent :

- association récipient jauge puis récipient courbe
- association récipient jauge puis jauge courbe
- association récipient courbe puis courbe jauge

Dans la plupart des groupes, les élèves n’ont pas fait le lien entre le nombre de graduation et la quantité totale, ainsi pour la dernière question portant sur la création d’une jauge pour un nouveau récipient, ils ont réfléchi en terme d’espacement des traits mais n’ont pas compté les traits pour arriver à la quantité de 10 litres demandée.

Ils ont été motivés par la recherche du problème, cependant la réalisation d’une affiche expliquant leur démarche ne les motive pas et leur pose des problèmes de rédaction.


Garance.
Victoria.
Farah.
Stéphanie
Problème sur les jauges.
1)
Les choix que nous avons faits ce sont fait par rapport à l'exemple qui nous a été donné sur la feuille. Nous en avons fait une déduction de par les phénomènes périodiques énumérés par : A, B, C, D, E, F et nous avons remarqués lorsque le récipient est plus étroit, les espaces sont plus impontants.
Revanche, pour la courbe, nous avons procédés r élimination. C'est-à-dire que nous avons paré chaques courbes à chaques récipients et n la forme des courbes et des récipients nous vons associer.
R1
R2
R3
R4
R5
R6
A
B
C
D
E
F
1
2
3
4
5
6
explications au dos de la fe


* Pour R3 nous avons choisis la jauge F car ce récipient est plus étroit en bas donc l'eau monte plus rapidement. Nous avons choisis le graphique 5 par rapport à son phénomène périodique.
* Pour R4 nous avons choisis la jauge A car le bas du récipient ainsi que le haut sont creux alors les traits de jauge sont concentrer au centre. Les extrémités de la courbe sont donc plus recourbé.
* Pour R5 il a le même shéma que R3 sauf que c'est à l'envers.
* Pour R6 il correspond à la jauge d car elle est plus étroite à l'extrémité du haut donc l'eau est concentré vers le bas donc l'espace en haut est plus impontant.
Pour la courbe, nous avons choisi la 3ème courbe car c'est l'opposé de la 3ème courbe soit l'opposé de R3.
2)
G
R7
La courbe elle est curviligne et croissante :

4. Suites logistiques

Ces suites sont apparues historiquement comme modèles d'évolution de populations.

$U_{n+1}=k\ U_n(1-U_n)$ $\qquad\qquad$ $U_0=\alpha$ dans $[0,1]$

Modèle malthusien :

Ce modèle, très rudimentaire, a été proposé par Thomas Malthus en 1798. Il suppose que la population possède un taux de reproduction r constant, simple différence du taux de natalité et du taux de mortalité car la population est supposée isolée c'est-à-dire qu'aucune migration n'est envisagée. Si Y_n désigne la taille de la population étudiée à l'instant n et Y_{n+1} sa taille après une génération, on a donc pour l'accroissement de la population entre les instants n et n + 1 la formule : $Y_{n+1} - Y_n = rY_n$.

On peut réécrire cette formule en exprimant l'effectif à l'instant n+1 en fonction de l'effectif à l'instant n sous la forme d'une relation de récurrence : $Y_{n+1} = (1+r)Y_n$.

On a pour tout n la formule $Y_n = Y_0(1+r)^n$. La suite des valeurs de Y_n est une suite géométrique de raison (1+r) qui est donc supérieure à 1 si $r > 0$. Ce modèle correspond à une croissance exponentielle de la population lorsque $r > 0$ d'où son nom de modèle exponentiel parfois utilisé à la place de modèle malthusien (il pourrait aussi modéliser une décroissance exponentielle si r était dans]-1 ; 0[).

Modèle logistique :

L'un des points les plus discutables du modèle malthusien est qu'il prévoit que la population modélisée croisse indéfiniment. Il est certainement plus raisonnable de prendre en compte, comme le suggéra Verhulst en 1836, qu'au-delà d'une certaine taille, des facteurs environnementaux (limitation des ressources, limitation de l'espace disponible, ...) viennent freiner cette croissance.

Pour cela on suppose que le taux de reproduction de la population r, n'est plus le même quel que soit la taille Y_n de la population mais qu'au contraire il dépend de la taille de la population. On supposera que ce taux de reproduction est grand lorsque la taille de la population est petite car dans ce cas les ressources disponibles permettent cette forte croissance mais qu'il est plus petit quand la taille devient plus grande et que les individus commencent à entrer en compétition concernant la nourriture ou l'espace, voir même qu'il devienne négatif pour de très grandes tailles, ce qui signifierait un déclin de la population.

La plus simple des fonctions de Y_n ayant ces propriétés est une fonction affine (de la forme $aY_n + b$) de pente a négative et dont l'ordonnée à l'origine b est positive et correspond au taux de reproduction d'une population suffisamment petite pour ne pas souffrir des limitations environnementales.

Pour cela, on remplace dans le modèle précédent le taux constant r par un taux dépendant de Y_n que l'on écrit $r(K-Y_n)/K$, ou encore $r(1 - Y_n/K)$. Cela conduit au modèle logistique :

$Y_{n+1} – Y_n = r(1 – Y_n/K)Y_n$.

On peut, comme dans le cas du modèle malthusien, écrire une formule de récurrence donnant la valeur de Y_{n+1} en fonction de la valeur de Y_n :

$Y_{n+1} =(1+r) Y_n –(r/K)Y_n^{2}$

Les deux paramètres r et K du modèle logistique ont des interprétations biologiques faciles à comprendre. En effet, le facteur $r(1 – Y_n/K)$ (qui a remplacé le taux de reproduction constant r du modèle malthusien) vaut pratiquement r lorsque la taille de la population Y_n est petite et tend par contre vers 0 lorsqu'elle se rapproche de K. La constante r, appelée taux de croissance intrinsèque, est le taux de reproduction de la population lorsque sa taille est petite et donc qu'il n'y a pas de limitation. La constante K, appelée capacité biotique, est une taille limite de la population étudiée vers laquelle elle tend (si $r > 0$) lorsque n augmente indéfiniment. C'est une sorte d'effectif d'équilibre dont la valeur dépend des ressources disponibles pour cette population.

En réalité, l'étude mathématique de cette suite révèle que ce modèle est plus compliqué qu'il y paraît et que certaines solutions présentent des comportements bien différents d'une simple croissance logistique (y compris certains comportements chaotiques suivant les valeurs de r et de K).

Une observation en classe de terminale S

L'observation a lieu dans un établissement de banlieue parisienne de milieu non défavorisé. La classe est hétérogène et le niveau des élèves est moyen correct. La séance de 2 heures a lieu en demi-groupe, avec 15 élèves. Les élèves travaillent en petits groupes. L'énoncé distribué est le suivant :

Une suite récurrente particulière

Soit une suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = ku_n(1 - u_n)$

I Première approche -rappels

- Quels sont les paramètres sur lesquels on peut intervenir ?
- Quelle est la fonction « associée » à cette suite ?
- Quels sont les cas particuliers ?
- Démontrer que si la suite (u_n) converge, alors sa limite l vérifie $f(l)= l$

II **Première étape. On fixe k= 1**

- Etudier la suite (u_n) selon les valeurs de u_0.
- Que pouvez-vous conjecturer ?
- Représenter graphiquement une suite (u_n) correspondant à votre conjecture (voir feuille annexe)

III. 2^{ième} étape- On pose pour toute la suite de l'activité u_0 dans [0 ; 1] et k positif

- Quelles sont les valeurs de k pour lesquelles la suite un semble toujours converger vers 0 ?
- Démontrer cette conjecture.

IV. 3^{ième} étape k >1

1. Quelles sont les valeurs de k pour lesquelles la suite (u_n) semble converger ? vers quelle limite ? (Organisez votre recherche)
2. **étude du cas particulier : k = 2**
   - Que pouvez-vous conjecturer ? (croissance-décroissance-influence du premier terme-valeur de la limite …
   - Choisir une valeur de u_0 et représenter graphiquement la suite (un) correspondante (voir feuille annexe)
3. **k dans]1 ;2[(voir feuille annexe k = 1,8)**
   - Pour quelle valeur de u_0 la suite (un) est-elle constante ?
   - Démontrer cette conjecture
   - Conjecturer les variations de la suite (un) selon la valeur du premier terme

4. k dans]2 ;3[(voir feuille annexe k = 2,4)

- Quelles conjectures pouvez-vous faire selon les valeurs du premier terme ?

5. k>3 (voir feuille annexe k = 3,2 et u_0= 0,8)

- Quelle conjecture pouvez-vous faire ?

L'observation est retracée ici chronologiquement. F est le professeur, O est l'observateur.

15h10 : F demande aux élèves comment on étudie une suite.

15h15 : F demande aux élèves comment on se sert de Excel pour calculer les termes d'une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$
Exemple : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = {u_n}^2$
F montre le fonctionnement avec le vidéoprojecteur.

15h20 : on regarde la fiche élèves. F distribue juste le I.
F demande une rédaction type narration de recherche. Les élèves doivent l'appeler une fois la conjecture faite. F précise qu'ils ont le choix des outils. Les groupes se forment librement : 3 groupes de 4 et un groupe de 3.

Observation du groupe 1 (4 élèves)

15h30 : début observation groupe.

Gabriel	Clémentine
Thomas	Marion

C : on peut intervenir sur les paramètres n et k
Quelle est la fonction associée ?
C rédige
C : remplacer u_{n+1} par $f(x)+1$ ou ($f(x+1)$, ce n'est pas clair même pour eux). Remplacer n par x
T : la fonction est supérieure à 0 car n positif

F intervient
C : il faut le premier terme
F : quand on travaille sur les suites, il y a 2 cas. Ici récurrence, donc u_{n+1} est égal à quelque chose avec u_n.
F part
G : on n'a pas du tout avancé !
C : regardons la question suivante cela pourrait nous aider (Il s'agit de la question II)
C lit le texte « première étape, on fixe $k = 1$ ». Ici, on pourrait fixer u_n.
T : on pourrait mettre $ku_n - k{u_n}^2$
Ils bloquent sur la signification de « fonction associée »
M : c'est genre carré, inverse
T : si on développe on a $k{u_n}^2$, il y a un carré. Donc $kx - kx^2$
Ils tournent en rond, leur discussion ne fait pas avancer le problème car ne comprennent ce qu'on leur demande. O intervient en reprenant le vocabulaire de F « u_{n+1} est égal à quelque chose avec u_n ». C'est quoi ce quelque chose ? Ils ne comprennent pas ce que O dit. La notion n'est visiblement pas disponible.

15h35 F intervient et revient à l'exemple pour les débloquer.
F : $u_{n+1} = f(u_n)$ et $f(x) = x^2$ et $u_1 = {u_0}^2$ $u_{n+1} = {u_n}^2$. Ici c'est la fonction carrée qui est la fonction associée.
Ici $u_{n+1} = ku_n(1-u_n)$ce n'est pas compliqué de trouver $f(x)$. Comme tu passes de $u_{n+1} = f(u_n)$ à $f(x) = x^2$, ici tu fais pareil.
Les élèves écrivent $f(x) = kx(1-x)$, mais n'ont pas l'air très convaincus.
F demande alors de vérifier que cette fonction marche en remplaçant x par1. Les élèves le font.
G : Ah !, c'est ça ? Je pensais qu'il fallait trouver une fonction carrée.

F : maintenant, il faut s'intéresser aux cas particuliers, et elle s'en va
G : $k = 0$
M : $0 \times 0 = 0,\ 0 \times 1 = 0$. On a le droit de multiplier par un négatif ?
C écrit : $k = 0$ cas particulier
T : j'écoute les autres groupes pour de petites solutions
C : si $u_0 = 0$, c'est aussi un cas particulier (ils ne vont pas plus loin)
M : si $u_n = 1$, alors cas particulier
T : $k < 0$
C : on s'arrête ici pour les cas particuliers
T : on bloque, on ajoutera après si on en voit d'autres

15h45 : ils abordent la question I d
C : il faut trouver si elle est bornée
T : trouver si elle est croissante ou décroissante
C : faire $u_{n+1} - u_n$
T : $k > 0$ ou $k < 0$, tout va changer
C écrit : on étudie le sens de variation. Posons $k > 0$
M : on fixe u_0
T : on doit démontrer par récurrence donc on fixe $u_0 = 2$

15h50 : F arrive
F : si un tend vers l alors u_{n+1} tend vers le même l. Par passage à la limite $f(l) = l$. Cette question, c'est juste un rappel pour vous aider pour la question suivante.
Je vais vous aider pour II.
$k = 1$. Etudier (u_n). Comment procéder ?
u_0 donne u_1, u_1 donne u_2 et ainsi de suite. Comment faire les calculs ? (silence des élèves)
On prend Excel ! Allez secouez-vous ! Qu'allez-vous mettre sur Excel ?
Réponse des élèves: n, u_n (puis silence)
F : Et après quelle formule ? (silence). Rappelez-vous, c'était au tableau au début du cours !
Mettez-vous 2 par 2 et faites-le sur 2 ordinateurs.
M et G se mettent sur ordi. C et G ensemble, M et T ensemble.

n	u_n	$u_0 = 2$
0	1	

C : on met quoi pour u_0?
G : je mets 1
C change le 2 en 1
C : c'est bizarre, t'as mis quoi dans ta cellule ? Où est le k ?
G : $k = 1$. Il fait ensuite le nuage de points
C et G comparent leur courbe avec celle trouvée par les 2 autres. Ils trouvent la même allure.
Ils essaient $u_0 = 2$
Ils essaient de trouver une régularité dans leurs résultats. Les autres ont aussi pris $u_0 = 1$ et leurs résultats sont les mêmes.

16h05 : O les alerte en leur demandant s'ils ne voient pas une incohérence dans leurs résultats. Non, ils ne voient rien. O leur dit qu'ils ont oublié d'étudier le cas particulier $u_0 = 1$. les élèves font les calculs avec O, et ils constatent que tous les termes sont nuls.
Ils regardent ce qu'il y a dans la cellule pour $n = 1$, c'est la bonne formule. Pour $n = 2$, ils voient le nombre 2 et pas de formule, O n'intervient pas plus. Les élèves se rendent compte que ça ne va pas et corrigent. Maintenant, ils ne voient apparaître que des 0.

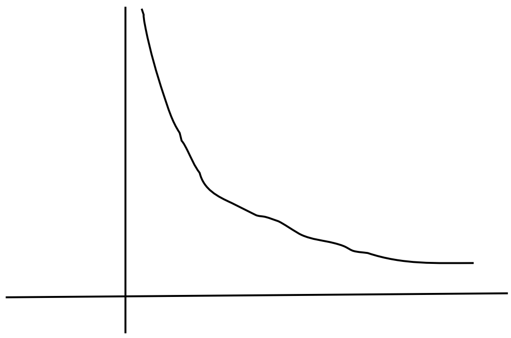
M et T essaient $u_0 = -2$, en disposant 2 colonnes plus loin comme ils l'avaient fait pour $u_0 = 1$. Ils font le graphique et voient des points alignés horizontalement, sauf le dernier qui est plus bas. Ne regardent pas la graduation sur l'axe des ordonnées et ne savent pas interpréter ce qu'ils voient.
G et C : sont toujours avec leur cas $u_0 = 1$, et n'ont pas avancé. Visiblement, ne savent plus où ils en sont. O leur dit de prendre une autre valeur pour u_0. Ils demandent aux autres et prennent eux aussi $u_0 = -2$, et font le graphique.
Ne savent pas interpréter le graphique. O leur dit de regarder la graduation sur l'axe des ordonnées. Pas de réaction. O leur dit alors de regarder les termes u_n qu'ils ont calculé grâce au tableur. Cela leur parle.
M : c'est décroissant.
O : C'est tout ?
M et les autres : oui
O: est-ce que c'est tout ce qu'on peut dire lorsqu'on étudie une suite ?
M : on peut dire que sa limite est moins l'infini.
Maintenant, ils semblent tous fatigués.
M essaie $u_0 = 10$. Même conjecture.
Ils s'embarquent pour d'autres nombres entiers. O leur demande d'observer les nombres qu'ils ont pris : qu'ont-ils en commun ? N'y-a-t-il pas d'autres sortes de nombres ?
T : oui, des nombres avec des virgules
Les voilà partis pour 2,8, etc…
O signale qu'il existe des nombres entre 0 et 1.
G essaie 0,5 et voit que la suite tend vers 0

16h20 : F arrive
F : on résume la situation, on fait la conjecture pour u_0 dans [0 ; 1], et pour u_0 n'appartenant pas à cet intervalle.
Pour la démonstration je vous demande uniquement pour u_0 dans [0 ;1]. Que savez-vous ?
Les élèves : suite minorée, décroissante
F : rappelez-vous, elle tend vers l tel que $l = f(l)$.
Ecrivez la conjecture et faites la démonstration. F part.
G remercie O. Il est tout content d'avoir pu montrer quelque chose qui satisfaisait son professeur.
G et C cherchent la démonstration
M et T se mettent sur le graphique que F vient de leur fournir (annexe).

O observe M et T. Ils se mettent sur le tableur.

0	0,7	u_0
0,1	0,21	u_1
0,2		u_2
…		
…		
0,9		

Regardent ensuite le graphique.
M : il faut le tracer
Visiblement, ils ne voient pas le rapport entre la courbe sous leurs yeux (de l'annexe) et le problème. Ils espèrent retrouver la parabole en mettant des points, avec en abscisse 0 ; 0,1 ; 0,2 etc. et en ordonnée les termes de (u_n) qui s'affichent sur le tableur. Mais ils sont déroutés car pour eux ils devraient avoir quelque chose comme le schéma ci-dessous :



T : je ne comprends pas quelle courbe elle nous a donnée.

16h30 : F intervient
F : « place u_0. Comment tu lis $f(u_0)$ sur le dessin ? » F le montre : « on reporte u_1 sur l'axe des abscisses et on recommence. (M s'y met lentement).
On se dépêche !
Maintenant on passe à la 2$^{\text{ème}}$ étape ». Elle part.

Les élèves font le dessin, mais il semble que c'est en reproduisant la procédure donnée par l'enseignant, sans en comprendre le sens. O veut s'en assurer vérifier et leur demande : finalement, c'est quoi cette courbe dessinée sur l'annexe? Ils ne savent pas répondre.
O : mais pourquoi vous obtenez les termes de la suite sur l'axe des abscisses ?
M : parce qu'on fait comme ça.
O : c'est la représentation graphique de la fonction $f(x) = x(1 - x)$
Ils sont très étonnés de la retrouver ici. Ne voient pas le rapport avec la question, ni pourquoi on dessine cette fonction. O leur donne une brève explication.
16h40 : ils abordent le III la 2$^{\text{ème}}$ étape
Réponse : $k = 1 \; et \; k = 0{,}5$

F intervient et aide G et C à faire la démonstration du II. Demande de prouver que si u_n est dans [0 ; 1], alors $f(u_n)$ appartient à [0 ; 1].
M donne réponse k appartient à [0 ;1]
M et T fixent $k = 0$, et entreprennent la démonstration de la décroissance par récurrence.
Constatent $u_1 < u_0$ sur le tableur
Ecrivent P_n: $u_{n+1} < u_n$
P_{n+1}: $u_{n+2} - u_{n+1} < 0$
Ecrivent ensuite $u_{n+1} - u_n = 0.$ O rectifie.

G et C essaient d'utiliser l'aide donnée par F qui était : en étudiant la fonction
$f(x) = x(x-1),$ montrer que si u_n est dans [0 ; 1], alors $f(u_n)$ appartient à [0 ; 1].
Ils ne comprennent pas, coincent toujours sur le rapport entre la fonction et la suite.

16h55 F intervient. Elle demande de laisser les démonstrations et de s'intéresser uniquement aux conjectures.
Les élèves abordent la question IV, 3ème étape.
Essaient $k = 4$. Ils disent (u_n) converge vers 0 et décroissante, alors qu'il ne s'affiche que des 0.
O leur demande de faire attention à la valeur de u_0 prise et qui n'apparaît pas sur le tableur.
Ils répondent : mais 0,5 est bien compris entre 0 et 1 !
Ils prennent $k = 2$. S'embrouillent sur le tableur.
F intervient : prenez $k = 3{,}9$. Votre tableur est mal disposé. Il faudrait mettre une valeur de k quelque part.
Fin de la séance

Observation du groupe 2 (4 élèves)
E1 : Quels paramètres peuvent changer ? u_0, k.
E2 : Et n peut pas changer ?
E1 : si, mais ça change tout le temps. Si n change, c'est un nombre différent mais c'est la même suite.

15h30 :
Question I.b. faite
E1 : (question I.c) Cas particuliers : u_0=0, u_0=1, k=0
E3 : Comment on justifie ?
E1 : car c'est des paramètres.
E1 : (question I.d) Ça c'est du cours.
E3 : Je ne peux pas écrire et suivre
E2 : Il faut montrer qu'elle converge.
E1 : Non, on sait qu'elle converge. Si elle converge, il faut montrer que sa limite...

15h37 :
Ils bloquent sur la question I.d
E1 : C'est un truc du cours : si une suite est continue...
E2 : Euh une suite ne peut pas être continue. Si on prenait la fonction associée.
E1 : On a le droit d'avoir le cours ?

E2 : On suppose que (Un) converge... Qu'est-ce qu'on sait sur f ? Dérivable ?
E3 : On ne sait pas que la suite converge, faut le démontrer.
E1 : Non... La limite d'une suite, c'est toujours en +infini... ou en -infini... Non pas en -infini, ça n'existe pas.
E1 écrit : lim u_n=l
u(n+1) ?

15h45 : Intervention de C : C'est quoi le lien entre f et u_n.
F arrive et leur explique la démonstration.

Partie II – Première étape. On fixe k=1
E1 et E2 sont tous les deux devant un ordinateur (tableur).
Tableur de E1 :

k		n	u_n
1		0	1
u_0		1	0
		2	= A2*D2*(1-D2)

E1 se rend compte qu'il a oublié $
E1 va voir E2
E1 : Tu n'as pas mis k.
E2 : Oui mais il vaut 1.
E1 : ok. (puis modifie les formules de E2)
E3/E4 : pas au tableur
E1 : Maintenant il faut essayer pour des u_0 différents (essais : 0; 1 ; 1/3 ;-1/3 ; 0,4; 0,25 ;...)
Entre 0 et 1, toujours positif il me semble mais j'ai fait que 2 valeurs pour le moment.
E1 ajoute une colonne pour faire apparaître le signe des termes =SI(D2<0 ; « - » ; « + »)
16h :
F leur dit de faire les représentations graphiques sur tableur.
F : Organiser vos informations... Allez...
E3 : Tu peux pas changer les axes.
E1 : Entre 0 et 1, toujours positif. Entre 1 et 2, tu as toujours négatif.
E2 : Oui
Pendant ce temps, F discute avec E2/E3/E4 sur les graphiques. Ça c'est une valeur de u_0.
F : Et après vous m'appelez et vous me dites ce qui se passe.
[Les élèves s'intéressent au signe et non à la limite éventuelle]
E1 fait la représentation graphique sur tableur.
E1 : On voit que quand u_0>2, ça prend des valeurs hors des trucs... Entre 0 et 1, elle converge vers 0 mais toujours positive.
E1 teste 0,8 ; 1/8 ;...
E1 : Pour 2, ça semble aller vers -infini. Si tu prends 20 valeurs, dès la 6ème valeur entre 0 et 1, ça tend vers 0. Sinon : -infini et négatif.
E2/E3/E4 travaille ensemble sur tableur. Problème de la représentation : un point tout seul en bas
E1 explique à l'oral ces idées pour démontrer les conjectures.
E1 : Pour la limite, c'est de plus en plus petit donc c'est bon mais c'est pas très mathématique.
16h15 :
F : Pour u_0 appartient à [0;1], qu'est-ce qu'elle est cette suite ?

E2 : Elle est décroissante et minorée par 0, donc elle converge [avec l'aide de F].
F : Et comment on fait pour trouver sa limite ?
Partage du travail : E1 fait la démonstration et E2/E3/E4 font la représentation graphique (en escargot)
E3 : Faut qu'on trace la suite, tu fais ça, tu fais ça, et après tu reportes.
Pas de problème particulier pour la représentation graphique. (u_0=0,5)
16h25 : Pendant que E1 fait la démonstration, vous réfléchissez à la suite (partie III)
E2 travaille maintenant sur l'ordinateur de E1 car il a déjà mis k en paramètre.
Essais de k différents pour E2/E3/E4.
16h35 :
E2 : Pour que ça converge vers 0, il faut que k appartienne à [0;1]. Maintenant, il faut juste qu'on trouve comment le démontrer.
E1 reprend sa démonstration pour ce nouveau cas.
Partie IV
E2/E3/E4 sur tableur.
E2 : Pour k=2,6, c'est bizarre mais ça converge toujours. Pour k=3, il y a deux limites. Ça se rapproche en + infini.
16h40 :
E3 : Ça varie entre 0,6 et 0,7...
E2 : Moi je dis ça converge vers 0,66 – 0,67. Je ne comprends pas pourquoi elle dit que ça ne converge pas.
E3 : Ça c'était pour k=3.
F : entre 0 et 1, ok. Entre 1 et 2, ça change à chaque valeur mais ça converge. Supérieur à 3, ça fait ça : plusieurs limites...
Observation pour k=4 : chaos
16h45 :
F : Organisez ce que vous avez trouvé.
E2/E3/E4 : ça converge vers des valeurs mais entre 0,6 et 0,7.
E1 n'arrive pas la démonstration de la partie III.
F aide E1 et E2 pour la démonstration : étudier la fonction f pour montrer que si u_0 appartient à [0;1], alors u_n appartient à [0;1].
E1/E2 étudient f mais après ils ne voient pas pourquoi ils ont fait ça.
E1 : Je sais plus ce que je voulais démontrer.
E3/E4 regarde à nouveau les graphiques pour voir les différents cas.

Bilan :
La remarque principale est que le problème est beaucoup trop ouvert pour des élèves. En effet, les premières questions (voir ci-dessous) prennent beaucoup de temps à être traitées, la plupart des élèves n'abordant que très peu la suite. On voit en particulier que la première question est trop ambigüe (voir copies des groupes 1 à 3). Seul un groupe (le groupe 4) la traite correctement

I Première approche -rappels
Quels sont les paramètres sur lesquels on peut intervenir ?
Quelle est la fonction « associée » à cette suite ?
Quels sont les cas particuliers ?
Démontrer que si la suite (u_n) converge, alors sa limite l vérifie f(l)=l

Groupe 1

I°) Première approche :

a) On peut intervenir sur n, k, U_n

$\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = k U_n (1 - U_n)$

car U_{n+1} est exprimée en fonction de U_n.

b) – La fonction sera toujours > 0 car

– Développer la suite

$\Rightarrow U_{n+1} = k U_n - (U_n)^2$) Idée → résultats insatisfaisant

Groupe 2

(I) a) Nous pouvons intervenir sur le premier terme de la suite et sur la constante k, car ce sont les éléments manquants pour travailler sur cette suite.

b) La fonction associée à cette suite est :

$f(x) = kx(1-x)$.

Groupe 3 :

I Premier approche. – rappels

a. Dans la suite (U_n) definie par $U_{n+1} = kU_n(1-U_n)$

on peut intervenir sur le paramètre k car c'est une variable que l'on peut modifier. et U_0 car le premier terme n'est pas donné

b. La fonction que l'on peut "associer" à cette suite est la fonction $f(x) = kx(1-x)$

Groupe 4 :

I. Première approche - rappels

Les paramètres sur lesquels on peut intervenir sont k et U_0.

$U_{n+1} = f(U_n)$. Donc la fonction « associée » à cette suite est $f(x) = kx(1-x)$.

Les cas particuliers sont lorsque $k = 0$, $U_0 = 1$ ou $U_0 = 0$.

En effet, pour $k = 0$, $U_{n+1} = 0 \times U_n(1-U_n) = 0$. On a donc une suite stationnaire $U_{n+1} = 0$.

Pour $U_0 = 0$; $U_{n+1} = k \times 0(1-0) = 0$. On a donc une suite stationnaire $U_{n+1} = 0$

Pour $U_0 = 1$; $U_1 = k \times 1(1-1) = 0$. Cette suite va être stationnaire à partir de U_1 telle que $U_{n+1} = 0$ pour $n \geqslant 1$.

Si la suite (U_n) converge, $\lim\limits_{n \to +\infty} U_{n+1} = \ell$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \ell$. Or $U_{n+1} = f(U_n)$.

Donc $f(\ell) = \ell$.

Une deuxième remarque a posteriori concerne la longueur de ce problème. Si tous les groupes ont traité plus ou moins bien le cas k = 1 seul un groupe a pu continuer (voir ci-dessous)

IV 3e étape $k > 1$.

1. Pour $k \in [1 ; 2[$, la suite (U_n) semble converger vers 0,5 quand k se rapproche de 2.
Pour k $]2 ; 3]$, la suite (U_n) semble converger vers 0,68 quand k se rapproche de 3.
Au delà de $k = 3$, on ne peut pas déterminer la limite de (U_n).

2. Pour $k = 2$, la suite converge vers 0,5 quelque soit $U_0 \in [0 ; 1]$
Elle semble constante.
limite de $U_n = 0,5$

Au vu de cette analyse, plusieurs axes ont été retravaillés durant les séances suivantes :

- les différents statuts des lettres : inconnues, paramètres, variables
- le lien, dans le cas d'une suite récurrente, entre la fonction et la suite.

En effet, dans le groupe observé, même avec les aides ponctuelles de l'enseignante, les élèves ne font jamais le lien entre la fonction et la suite.

Pour ne pas rester sur ce « demi-échec », le devoir maison suivant a été donné. Pour le premier groupe, il a permis de synthétiser les recherches faites et d'en donner une application. Pour le second groupe, le devoir a été traité en collectif et a servi de travail préparatoire pour un TD machine dont l'énoncé était plus fermé et moins long que le précédent. Il s'agissait essentiellement dans ce dernier TD de faire visualiser des situations avec un ou plusieurs points fixes et des situations « chaotiques ».

Devoir maison

Source : exemples d'exercices de mathématiques série S année 2003-2004

http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Lycee/80/5/exmathsS_111805.pdf

Exercice n° 18 (enseignement obligatoire)

On sait tous qu'il y a des années à coccinelles et d'autres sans !

On se propose d'étudier l'évolution d'une population de coccinelles à l'aide d'un modèle utilisant la fonction numérique f définie par $f(x) = kx(1-x)$, k étant un paramètre qui dépend de l'environnement ($k \in \mathbf{R}$).

Dans le modèle choisi, on admet que le nombre des coccinelles reste inférieur à un million. L'effectif des coccinelles, exprimé en millions d'individus, est approché pour l'année n par un nombre réel u_n, avec u_n compris entre 0 et 1. Par exemple, si pour l'année zéro il y a 300 000 coccinelles, on prendra $u_0 = 0{,}3$.

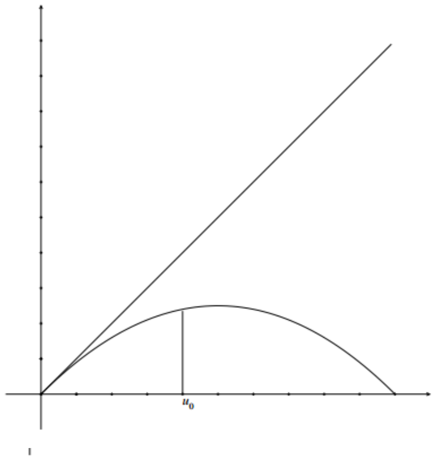
On admet que l'évolution d'une année sur l'autre obéit à la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, f étant la fonction définie ci-dessus.

Le but de l'exercice est d'étudier le comportement de la suite (u_n) pour différentes valeurs de la population initiale u_0 et du paramètre k.

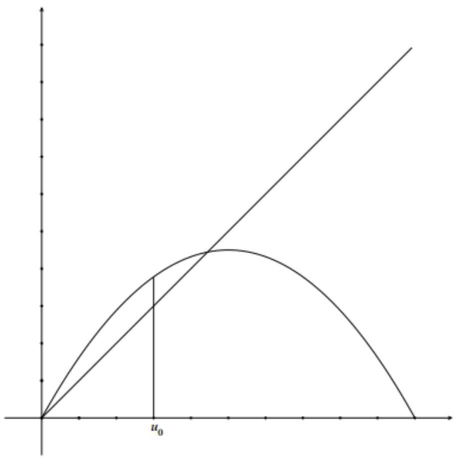
1. Démontrer que si la suite (u_n) converge, alors sa limite ℓ vérifie la relation $f(\ell) = \ell$.
2. Supposons $u_0 = 0{,}4$ et $k = 1$.
   (a) Étudier le sens de variation de la suite (u_n).
   (b) Montrer par récurrence que, pour tout entier n, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
   (c) La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?
   (d) Que peut-on dire de l'évolution à long terme de la population de coccinelles avec ces hypothèses ?
3. Supposons maintenant $u_0 = 0{,}3$ et $k = 1{,}8$.
   (a) Étudier les variations de la fonction f sur $[0, 1]$ et montrer que $f\left(\frac{1}{2}\right) \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.
   (b) En utilisant éventuellement un raisonnement par récurrence,
      - montrer que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2}$;
      - établir que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \geqslant u_n$.
   (c) La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?
   (d) Que peut-on dire de l'évolution à long terme de la population de coccinelles avec ces hypothèses ?
4. On a représenté sur les feuilles annexes la fonction f dans les deux cas étudiés ci-dessus ainsi que la droite d'équation $y = x$. Le troisième graphique correspond au cas où $u_0 = 0{,}8$ et $k = 3{,}2$.
   Illustrer sur les deux premiers graphiques les résultats trouvés en 1. et 2. en laissant les traits de construction et en faisant apparaître en abscisse les valeurs successives u_0, u_1, $u_2, \ldots$
   En utilisant la même méthode, formuler une conjecture sur l'évolution de la population dans le troisième cas.

Feuilles annexes

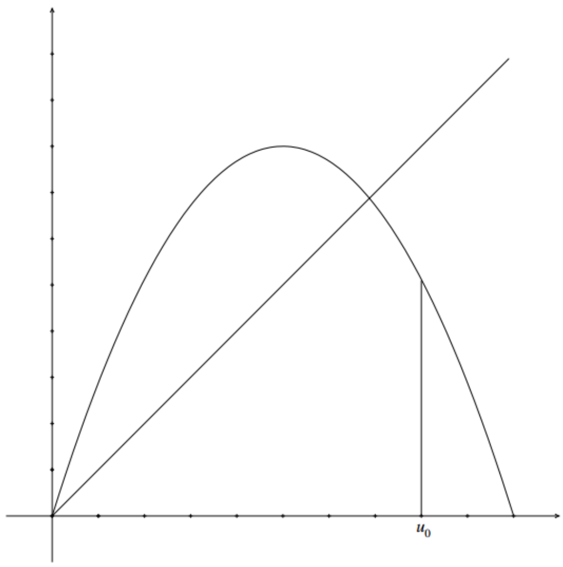
1er cas : $u_0 = 0{,}4$ et $k = 1$.



2e cas : $u_0 = 0{,}3$ et $k = 1{,}8$.



3e cas : $u_0 = 0{,}8$ et $k = 3{,}2$.



4. Problèmes ouverts pour introduire des notions mathématiques nouvelles auprès des élèves

1. Récipients (arithmétique et algorithmique)

Léa a d'un récipient de 8L d'eau et veut en donner 4L à son ami Tom. Pour mesurer, elle dispose en plus de 2 récipients, non gradués, vides : un de 5L et l'autre de 3L. Quelles sont les actions à faire pour verser les 4l d'eau dans le récipient de 5L?

Première observation en classe de seconde

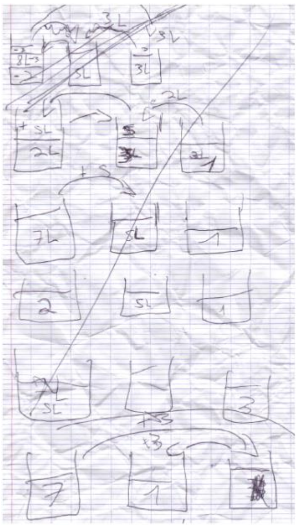
Ce problème a d'abord été expérimenté en classe de seconde dans un établissement APV (prévention violence). La classe était constituée d'élèves en difficultés en mathématiques, pour l'ensemble. Les élèves ont travaillé par groupe de 4 pendant 1 heure.

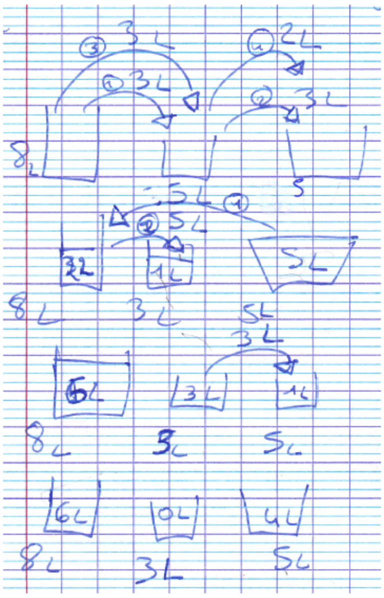
Les élèves comprennent rapidement le problème. Tous les groupes se sont mis à chercher rapidement mais pour certains, il y a eu une dispersion après plusieurs échecs dans les essais. Tout le monde a cependant « réussi » au bout d'une heure, mais avec plus ou moins de difficultés et la rédaction finale n'était pas complète pour chaque groupe. Un groupe a terminé en 20 minutes et a donc cherché les différentes quantités qui pouvaient être versées avec ces récipients (extension du problème).

En effet, ce problème peut être étendu de différentes façons : quels sont les différents volumes qu'elle peut donner à son ami ? Comment cela se passe-t-il si on changer les volumes des deux récipients disponibles ?

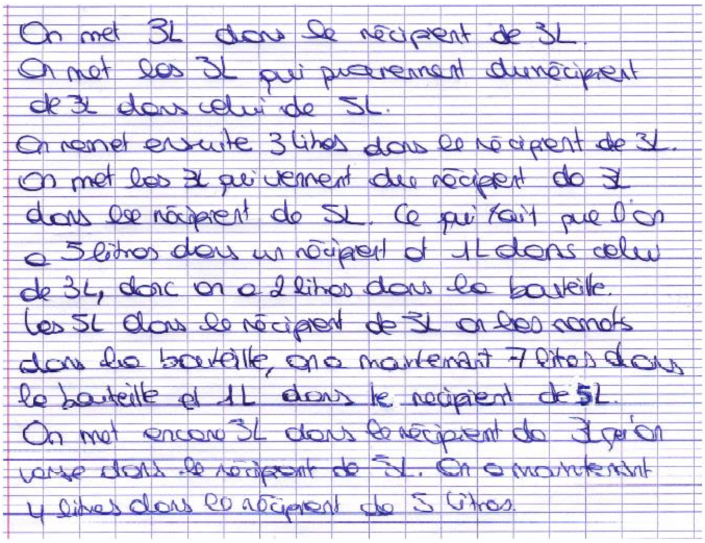
Voici plusieurs exemples de copies d'élèves :

Des dessins des bouteilles avec les volumes correspondants (à chaque étape) et avec les flèches pour les transvasements (2 groupes)



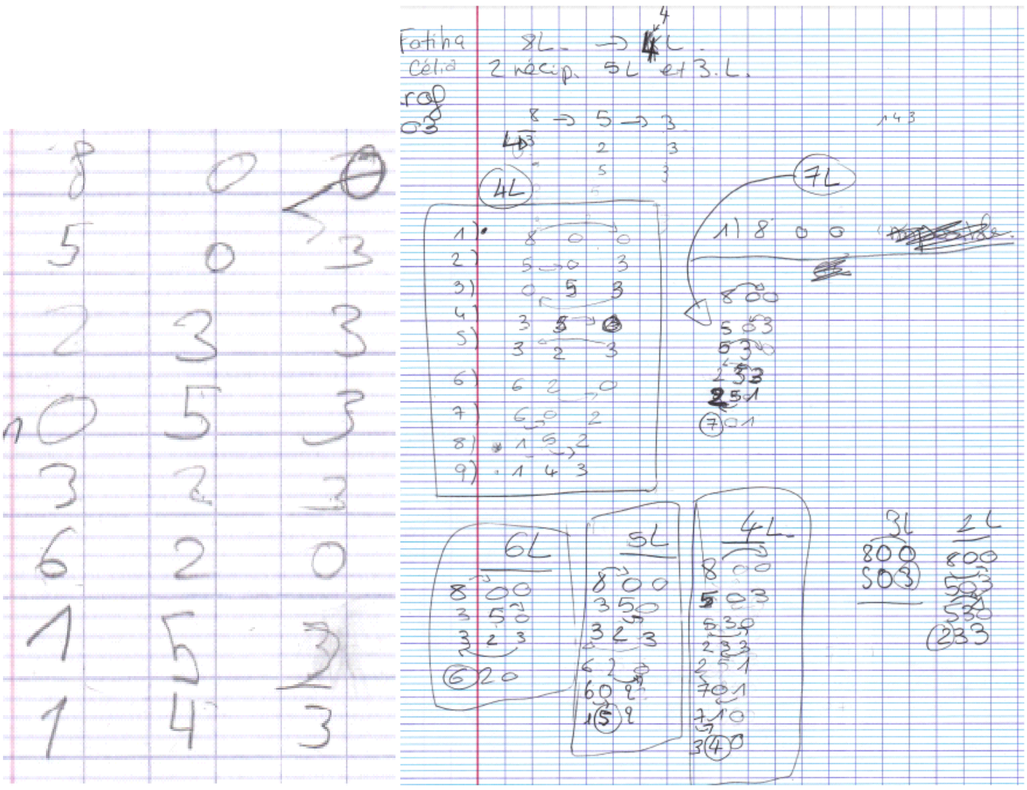


Une solution rédigée en français (1 groupe)

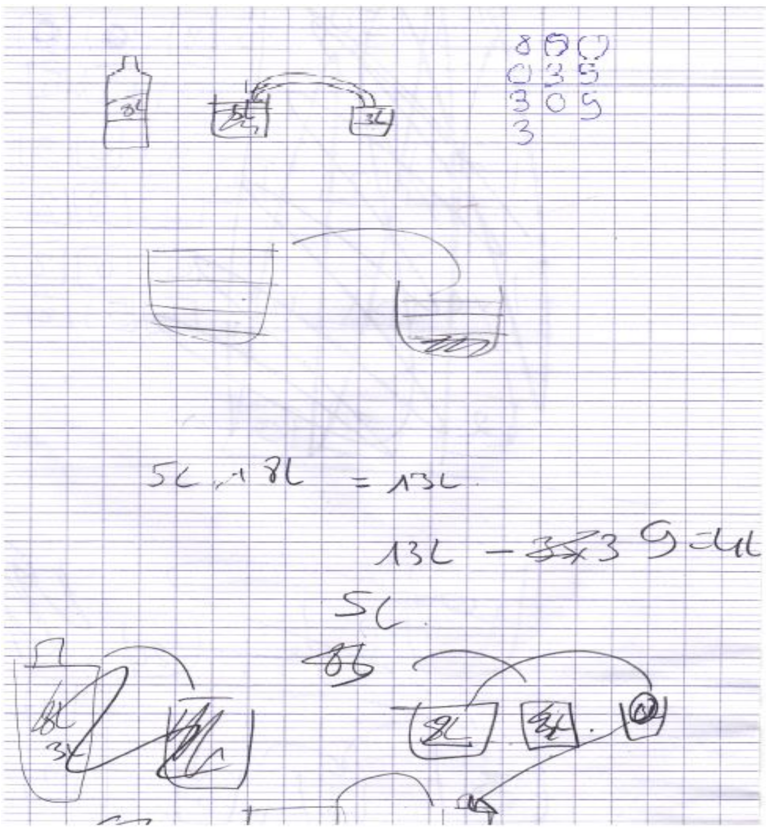


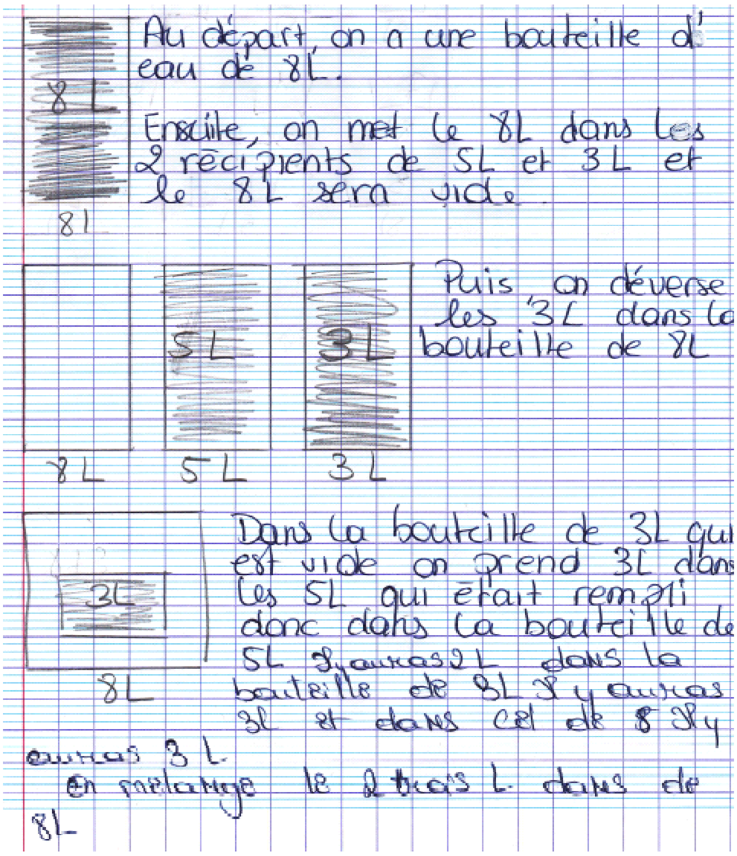
On met 3L dans le récipient de 3L.
On met les 3L qui proviennent du récipient de 3L dans celui de 5L.
On remet ensuite 3 litres dans le récipient de 3L.
On met les 3L qui viennent du récipient de 3L dans le récipient de 5L. Ce qui fait que l'on a 5 litres dans un récipient et 1L dans celui de 3L, donc on a 2 litres dans la bouteille.
Les 5L dans le récipient de 3L on les remets dans la bouteille, on a maintenant 7 litres dans la bouteille et 1L dans le récipient de 5L.
On met encore 3L dans le récipient de 3L qu'on verse dans le récipient de 5L. On a maintenant 4 litres dans le récipient de 5 litres.

A chaque étape, 3 nombres correspondants au contenu de chaque récipient (2 groupes)



Et des mélanges de plusieurs « représentations » (2 groupes)





Deuxième observation en classe de seconde

La deuxième expérimentation a eu lieu aussi en classe de seconde d'un lycée classé zone prévention violence de niveau très hétérogène.

Les élèves ont tout d'abord visionné un extrait du film « Une journée en enfer (Die Hard with a vengeance) ». Il met en scène l'inspecteur John McClane (Bruce Willis) qui doit malgré lui affronter des terroristes, en se trouvant au mauvais endroit au mauvais moment. John McClane est cette fois-ci aux prises avec un maître chanteur, facétieux et dangereux, qui dépose des bombes dans New York. Cette homme, appelé Simon dans le film, est en réalité le frère d'un des terroristes que John a tué dans le 1er épisode de la saga. Simon exige que l'inspecteur McClane réponde à des énigmes sinon il tuera à nouveau.

La nouvelle énigme proposée dans le film est la suivante : « Sur la fontaine, il doit y avoir 2 bidons, l'un a une contenance de 5 gallons, l'autre de 3 gallons. Remplissez l'un des bidons de 4 gallons d'eau exactement et placez-le sur la balance. La minuterie s'arrêtera, soyez extrêmement précis, un gramme de plus ou de moins c'est l'explosion » .

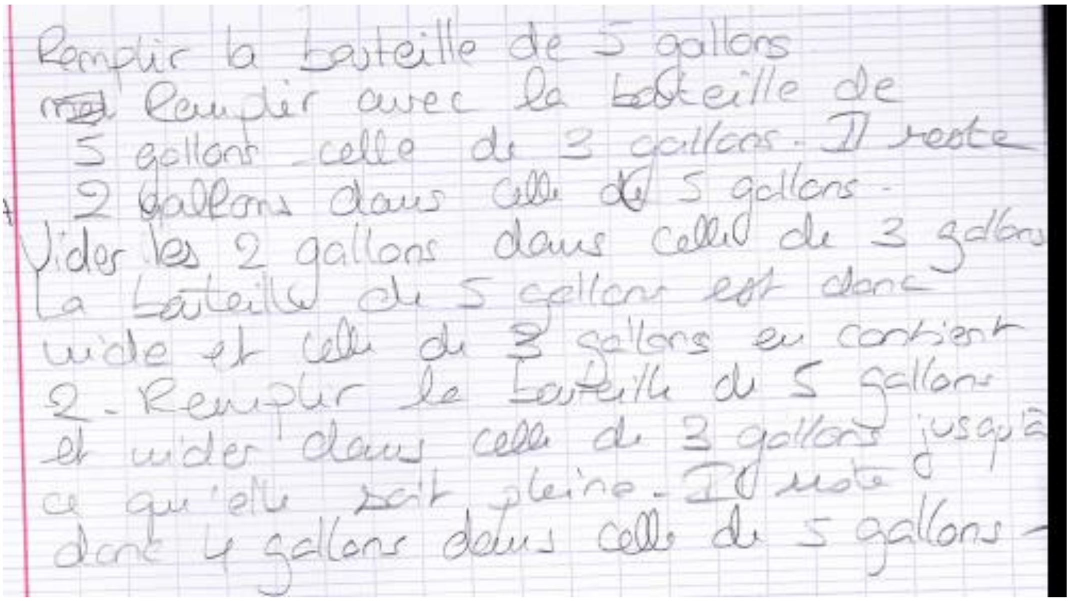
Les compétences évaluées sont les suivantes :

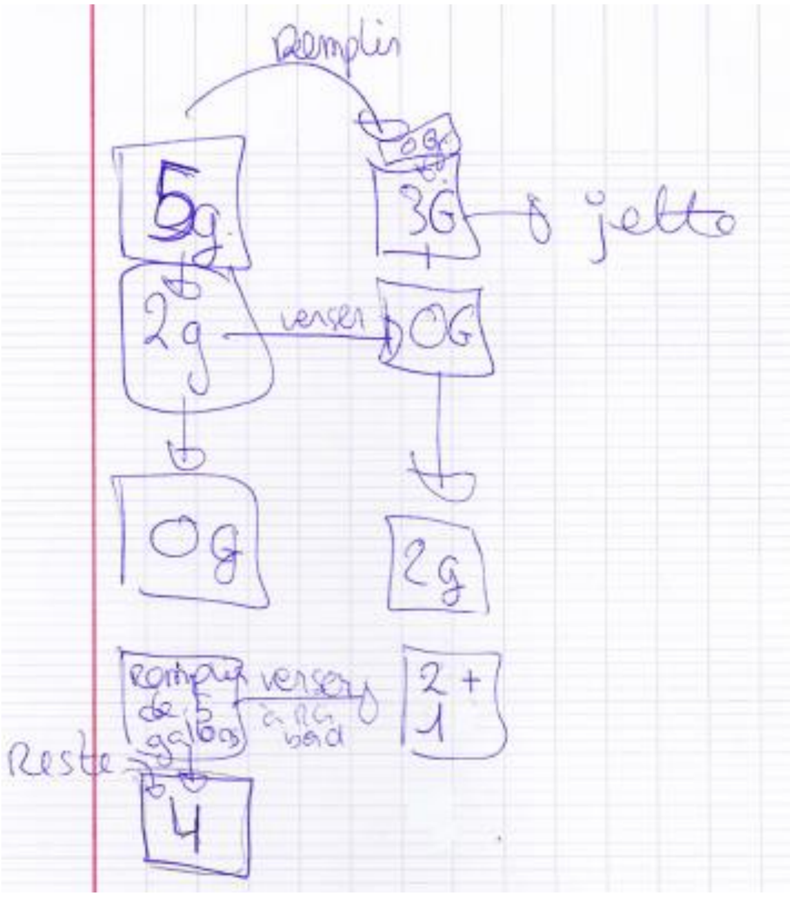
Prendre des initiatives faire des tests numériques
Prendre des initiatives faire des schémas
Elaborer une démarche
Emettre des conjectures
Vérifier les différentes conjectures proposées
Développer son esprit critique en confrontant différents résultats
Rédiger une synthèse de la recherche

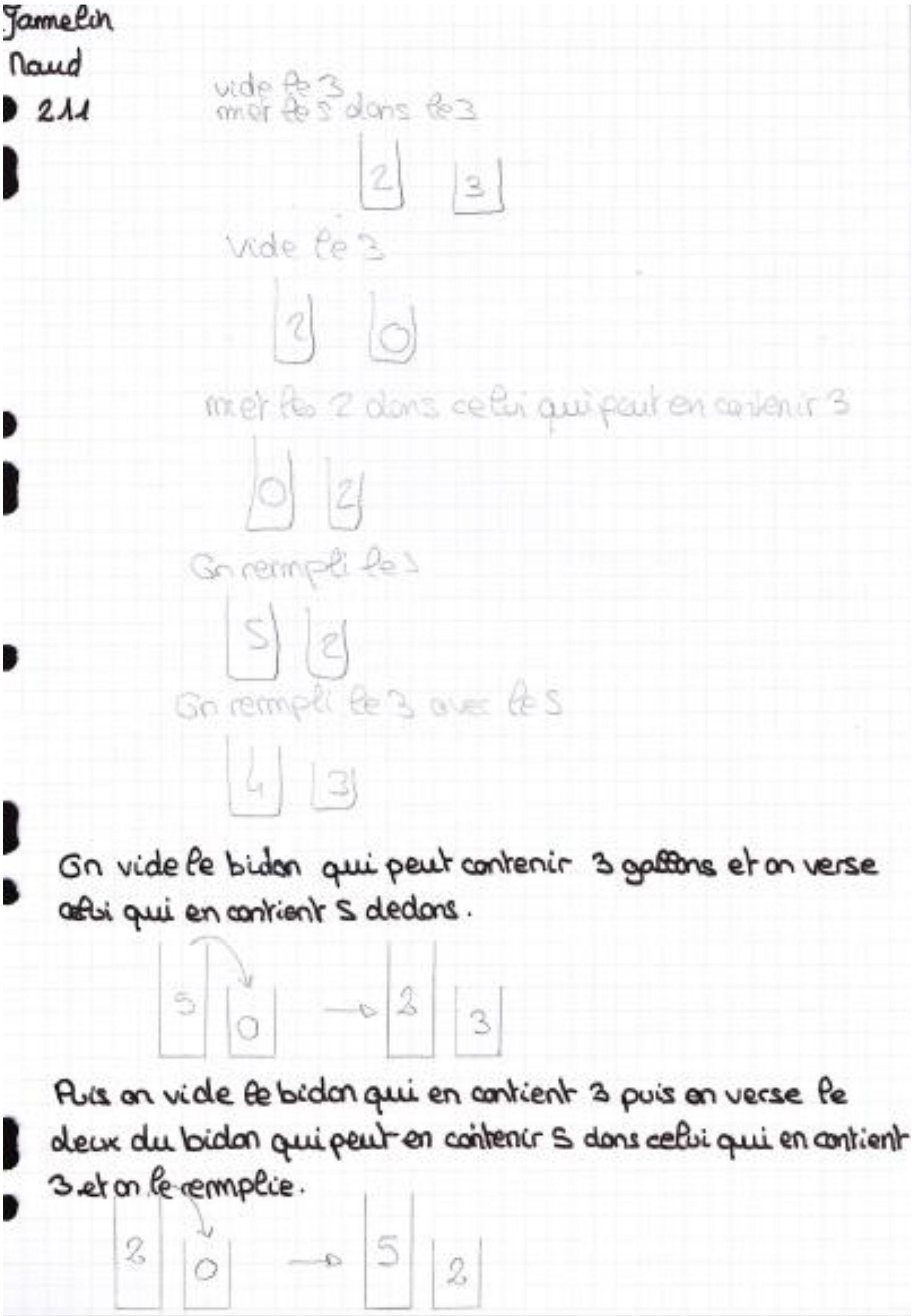
Les élèves visionnent l'extrait du film « Die hard 3 » et recherchent individuellement la réponse au problème posé pendant 5 minutes. Ensuite, le travail est organisé par groupes de 4. Les élèves se prennent rapidement au jeu. Ils cherchent des solutions assez farfelues en faisant intervenir d'autres instruments non disponibles. Ensuite certains font des schémas, des essais. Les groupes qui ne font pas de schémas mais qui essayent de résoudre « de tête » ont du mal à avancer dans leur recherche.

Plusieurs solutions émergent mais la rédaction de ces solutions pose problème aux élèves. Certains passent par des schémas avec des flèches, d'autres essayent de rédiger un texte ce qui est difficile pour eux. De plus ils n'en voient pas la nécessité.

Un groupe ne voit pas du tout comment faire et en fin de séance utilise l'application du site « Matou Matheux » qui permet de visualiser les transvasements en temps réel ainsi que les quantités d'eau dans les bidons. Ils parviennent ainsi à trouver la solution.


Remplir la bouteille de 5 gallons
Remplir avec la bouteille de 5 gallons celle de 3 gallons. Il reste 2 gallons dans celle de 5 gallons.
Vider les 2 gallons dans celle de 3 gallons
La bouteille de 5 gallons est donc vide et celle de 3 gallons en contient 2. Remplir la bouteille de 5 gallons et vider dans celle de 3 gallons jusqu'à ce qu'elle soit pleine. Il reste donc 4 gallons dans celle de 5 gallons.


Remplir
5g
3G
jetto
2g
verser
OG
Og
2g
remplir de 5 gallons
verser
2 + 1
Reste
4


Jamelin
Naud
211

vide le 3
met le 5 dans le 3

vide le 3

met les 2 dans celui qui peut en contenir 3

On rempli le 5

On rempli le 3 avec le 5

On vide le bidon qui peut contenir 3 gallons et on verse celui qui en contient 5 dedans.

Puis on vide le bidon qui en contient 3 puis en verse le deux du bidon qui peut en contenir 5 dans celui qui en contient 3 et on le remplie.

Signalons que ce problème avait aussi été proposé à l'école primaire en narration de recherche. Dans un article (lien ci-dessous), la PE revient sur cette narration de recherche et Roland Charnay donne quelques pistes :

http://www-irem.ujf-grenoble.fr/revues/revue_n/fic/60/60n5.pdf

Cet article est issu d'un travail réalisé en 1995 par deux professeurs d'école stagiaire dans le cadre de la formation professionnelle des professeurs d'école à l'IUFM de Clermont-Ferrand, en vue de l'évaluation du module de mathématiques. IQuelques réflexions de Roland Charnay prolongent l'analyse de l'activité.

TOUT PROBLÈME OUVERT N'ENGAGE PAS NÉCESSAIREMENT UNE BONNE RECHERCHE

Laurence LEPINE,
Professeur d'école stagiaire, Clermont-Ferrand

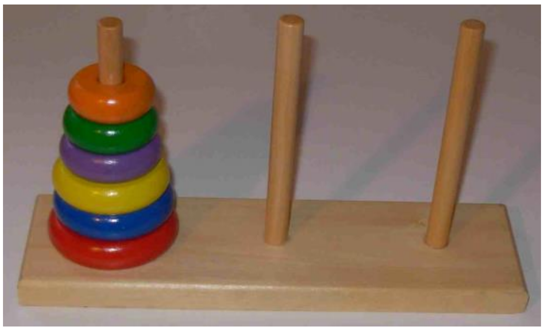
2. Tours de Hanoï

Le problème fait à nouveau travailler l'algorithmique. Il s'agit d'un casse-tête célèbre d'après http://fr.openclassrooms.com/informatique/cours/les-tours-de-hanoi/formalisation. On dispose de trois "tours" A, B et C formées d'un empilement plus ou moins grand d'anneaux de telle sorte que chaque anneau ait un diamètre inférieur à son prédécesseur. Ainsi, le plus grand anneau de chaque tour se situe à leur base et le plus petit sur leur sommet. Au départ, tous les anneaux se trouvent empilés suivant les règles précédemment décrites sur la tour A. L'objectif est de déplacer tous les disques de la tour A vers la tour C en s'aidant uniquement de la tour B, tout en respectant les règles suivantes :

On ne peut bouger qu'un seul anneau par étape et cela doit toujours être le plus petit (celui qui se trouve au sommet) ;

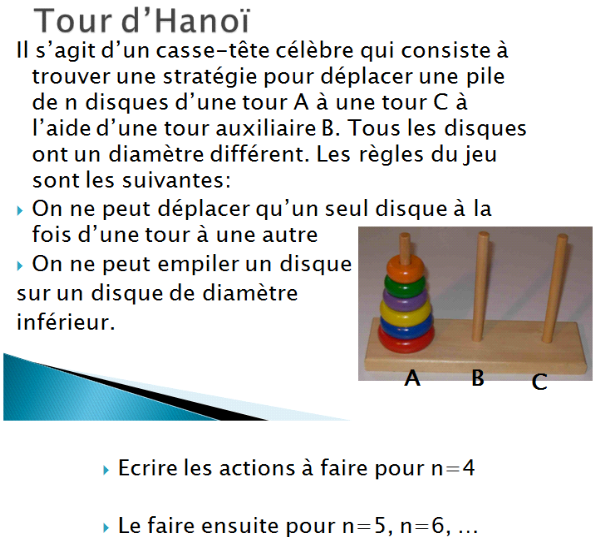
A chaque étape, la règle d'organisation des tours décrite précédemment doit être respectée.

Combien de déplacements minimum faut-il effectuer ?



Observation en classe de première

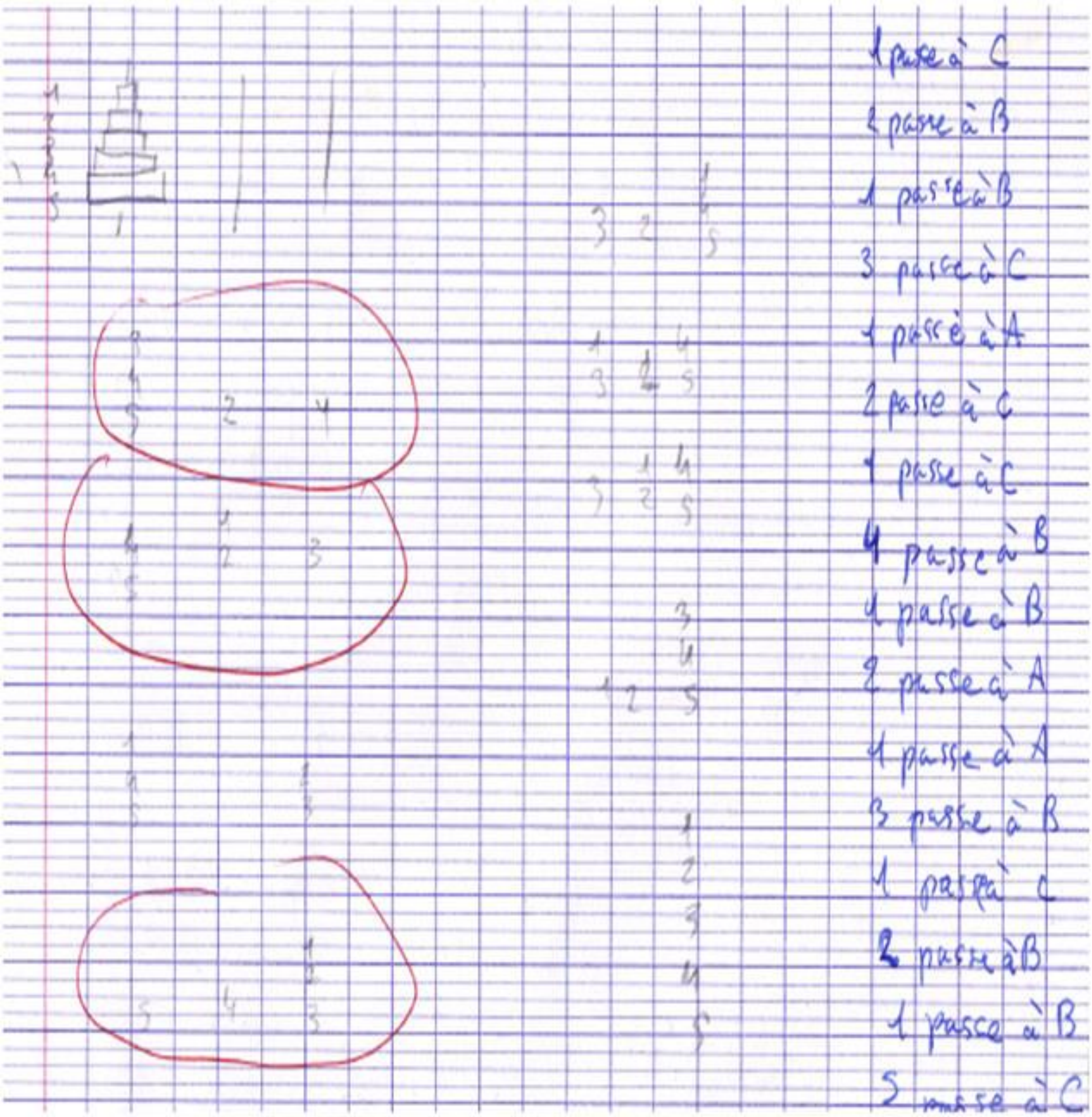
La première expérimentation a été menée en classe de 1ère STMG qui était assez hétérogène. L'établissement était classé APV (prévention violence). Les élèves ont travaillé par groupe de 2 ou de 3 pendant 1h. L'énoncé donné était le suivant :



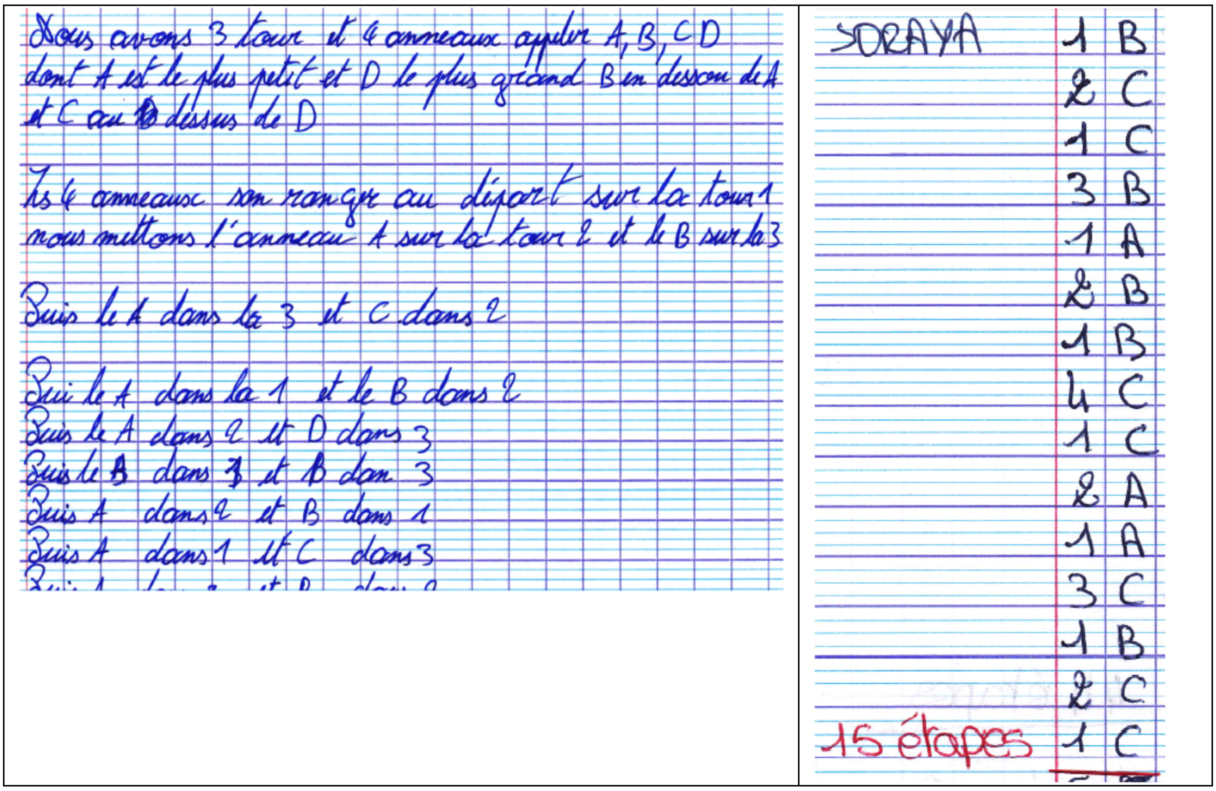
Certains groupes ont découpé des disques de diamètres différents pour le faire en vrai, d'autres ont dessiné le jeu et ont fait étape par étape avec des couleurs. Au départ, un groupe était bloqué. Ils ne savaient pas comment commencer. Pour le groupe « bloqué », l'enseignante a proposé de découper des disques comme certains groupes et de commencer avec 3 anneaux. Ensuite ils ont poursuivi seuls. La difficulté a ensuite été d'écrire leurs actions. Les autres élèves n'ont pas eu besoin de cette étape.

Voici des exemples de « rédactions » :

Le groupe 1 a dessiné le jeu au départ puis donné des numéros aux anneaux dans trois colonnes correspondantes aux différentes tours. Chaque étape est décrite par une ligne et une phrase.



Des groupes ont élaboré des représentations plus schématiques et des discours plus avancés comme les deux groupes suivants :


Nous avons 3 tour et 4 anneaux appeler A, B, C D
dont A est le plus petit et D le plus grand B en dessous de A
et C au dessus de D

les 4 anneaux son ranger au départ sur la tour 1
nous mettons l'anneau A sur la tour 2 et le B sur la 3

Puis le A dans la 3 et C dans 2

Puis le A dans la 1 et le B dans 2
Puis le A dans 2 et D dans 3
Puis le B dans 3 et B dan 3
Puis A dans 2 et B dans 1
Puis A dans 1 et C dans 3

SORAYA

1	B
2	C
1	C
3	B
1	A
2	B
1	B
4	C
1	C
2	A
1	A
3	C
1	B
2	C
1	C

15 étapes

Observation en classe de terminale

La deuxième expérimentation a été menée en classe de Terminale S dans un lycée classé zone prévention violence avec 30 élèves dont la moitié suit la spécialité maths. La plupart des élèves a déjà travaillé sur des problèmes ouverts depuis la seconde. La séance dure 2 heures. L'expérimentation a été suivie par deux enseignantes. Cette séance a eu lieu fin décembre, le cours sur les suites avait déjà été traité en début d'année scolaire.

Les élèves regardent d'abord un extrait du film *La planète des singes les origines* dans lequel un singe résout le problème de la tour de Hanoi avec 4 disques. Un sujet leur est distribué leur présentant le problème avec *n* disques, ils commencent une recherche individuelle pendant 5 minutes.

Le jeu des tours de Hanoï

On dispose de trois piquets avec socle, numérotés 1, 2 et 3, et de n disques troués qui sont deux à deux de tailles différentes.

Au départ, les n disques sont empilés par ordre croissant de taille sur le piquet n°1.

Le but du jeu est de déplacer ces n disques du piquet n°1 sur le piquet n°3, en respectant les règles suivantes :

- On ne déplace qu'un seul disque à la fois et le disque déplacé doit être sur l'un des deux autres piquets; c'est ce que l'on appelle un déplacement.

- Un disque ne doit jamais être placé au-dessus d'un disque plus petit que lui.

1) Déterminer le nombre minimal de déplacements nécessaires pour résoudre le problème en fonction de n (le nombre de disques).

2) On suppose qu'il faut 5 secondes pour déplacer un disque, combien de temps le jeu durera-t-il avec trente disques en travaillant jour et nuit ?

Les élèves commencent rapidement à travailler en binômes avec leur voisin. Les enseignantes les laissent organiser leur recherche ainsi. Elles préviennent qu'elles relèveront les feuilles à la fin de la séance.

Les élèves se prennent rapidement au jeu et cherchent le nombre de déplacement minimal pour 4 disques comme dans le film.

Différentes tactiques apparaissent :

Un groupe écrit directement $f(x)$ = … puis au bout de 15 minutes il cherche les déplacements minium pour 4 disques, puis pour 2 et 3 disques.

Un groupe de « bons élèves » cherche à résoudre directement le problème avec *n* disques, ils resteront bloqués pendant les deux heures

+52

on choisit une suite auxiliaire $V_n = U_n - 1$

$$V_{n+1} = U_{n+1} - 1$$

$$V_{n+1} = 2U_n$$

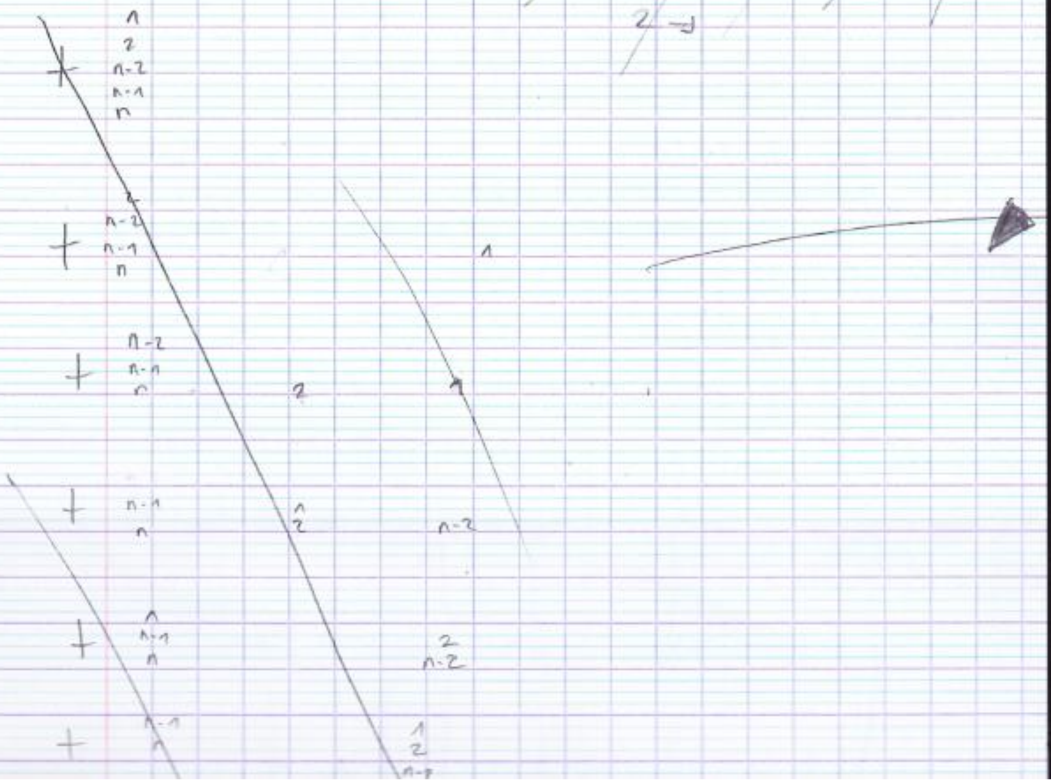
$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{2U_n}{U_n - 1} = \frac{2U_n}{U_n\left(1 - \frac{1}{U_n}\right)} = \frac{2}{1 - \frac{1}{U_n}}$$

recherche de la formule explicite.

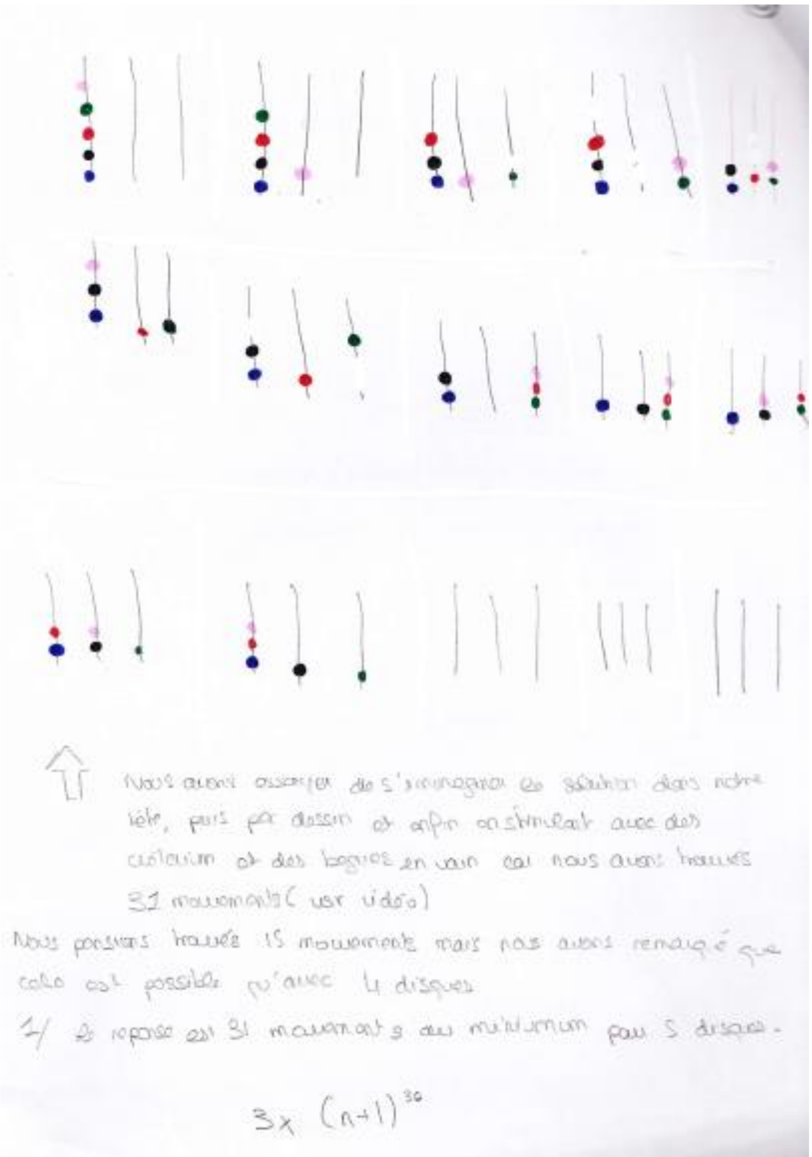
On numérote les disques de 1 à n $\{1; 2; 3, 4; n\}$ en partant du haut

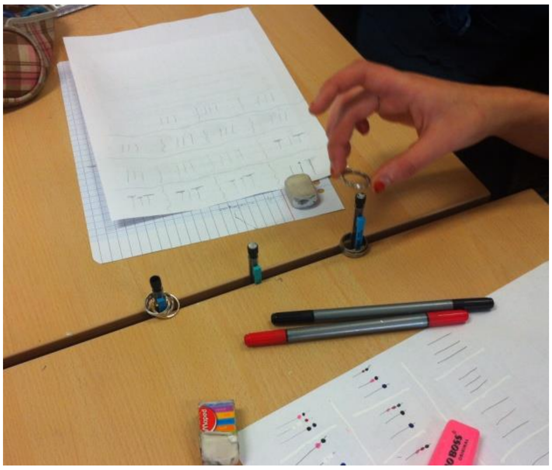
1 → 10 deplacement

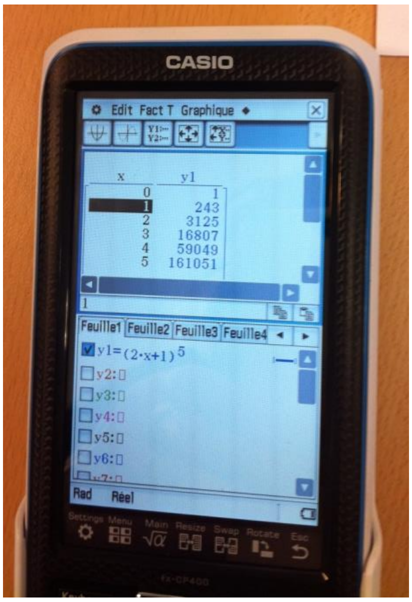
2 →



Un groupe trouve le nombre de déplacement minimal pour 4 mais pas pour 5. Il modélise le jeu avec des stylos et des bagues et « joue » pour trouver le nombre de déplacements minimal à 5 disques.







Après 1h30 de travail environ, un groupe d’élèves en difficulté trouve la formule de récurrence. Un sentiment de défi se crée entre les différents groupes. Plusieurs groupes ont trouvé la formule de récurrence et tâtonne pour la formule explicite.

Certains cherchent la formule à l’aide de la calculatrice et des fonctions.

L’évaluation de la séance est couplée avec la grille d’évaluation des compétences. Les compétences évaluées semblent être :

Compétences	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	
Chercher						Extraire, organiser et traiter l'information utile
Modéliser						Traduire en langage mathématique une situation réelle
Représenter						Choisir un cadre adapté pour traiter le problème Changer de registre
Calculer						
Raisonner						Effectuer des inférences pour obtenir de nouveaux résultats, Confirmer ou infirmer une conjecture Prendre une décision
Communiquer						Développer une argumentation mathématique correcte à l'écrit ou à l'oral Critiquer une démarche ou un résultat S'exprimer avec clarté et précision à l'oral et à l'écrit

En bilan, la vidéo motive les élèves même ceux en situation « d'échec ». L'énoncé était accessible à tous. Il a permis une mise en activité rapide des élèves dans la phase de recherche.

Les élèves habituellement en difficulté trouvent là une occasion de se motiver car ils perçoivent bien que chacun peut avoir quelque chose à apporter, quelles que soient ses compétences ou ses connaissances mathématiques.

L'utilisation du brouillon a été naturelle contrairement à leurs habitudes de travail. Les élèves ont finalement bien remobilisé leurs notions sur les suites.

Les élèves étaient pour la plupart ravis de cette séance, ce travail étant plus concret que d'habitude, ils ont eu la réelle sensation de « chercher » un problème différent des exercices « classiques » de terminale. Ils souhaitent réitérer cette expérience. Ils ont réinvesti leurs connaissances sur les suites et se sont entrainer à chercher !

Conclusion

Voici pour conclure un tableau récapitulatif des problèmes exposés dans la brochure et pour chacun d'eux les connaissances mises en œuvre à chacun des niveaux d'enseignement.

Problème	**6ème**	**5ème**	**4ème**	**3ème**	**2nde**	**1ère**	**Terminale**
Plus grand produit	Calcul avec les entiers, limites de la calculatrice, conjecture		Puissances de 10 sur la calculatrice	Écriture scientifique			
Petits problèmes pour commencer				Calcul littéral	Factorisation, développement		
Poignées de mains	Calcul avec les entiers, conjectures (établir une formule) et démonstration, algorithmique. Au moins 3 approches, somme des entiers de 1 à n					Algorithmique, suites	Récurrence, graphes
Pétition			Grandeurs proportionnalité	Grandeurs proportionnalité	Fonctions		
Cube bicolore	Géométrie dans l'espace – optimisation-min à 9+solution						

Poursuite		Proportionnalité, vitesses		Graphique (fonctions linéaires et affine)	équations		
Jauges				Fonction/Volumes			
Suite logistique							Suites Limites
Récipients	Calcul, Logique, raisonnement						
Tour de Hanoï	Recherche, conjecture, Algorithme						Intro récurrence
Chasse à la bête	Aires. Problème d'Optimisation (il faut et il suffit). Logique raisonnement						
Histoire d'œufs							Dichotomie, algorithmes
Les pièces		Aire du disque, proportionnalité				statistiques, second degré, dérivation	

Bibliographie :

ARSAC, G., CHAPIRON, G., COLONNA, A., GERMAIN, G., GUICHARD, Y., MANTE, M. (1992), *Initiation au raisonnement déductif au collège*, Presses Universitaires de Lyon.

ARSAC, G., GERMAIN, G., MANTE, M. (1991), *Problème ouvert et situation problème*, IREM de Lyon.

ARSAC, G., GERMAIN, G., MANTE, M., PICHOT, D. (1985a), *La pratique du problème ouvert*, IREM de Lyon.

ARSAC, G., GERMAIN, G., MANTE, M., PICHOT, D. (1985b), *Varions notre enseignement avec les problèmes ouverts*, IREM de Lyon.

ARSAC, G., MANTE, M. (2007), *Les pratiques du problème ouvert*, IREM de Lyon, CRDP, Villeurbanne.

ARTIGUE, M., HOUDEMENT, C. (2007), Problem solving in France: didactic and curricular perspectives, *ZDM*, **39(5-6)**, 365–382.

BECKER, J., SHIMADA, S. (1997), *The open-ended approach: a new proposal for teaching mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

BOUVIER, B. (1986), *Didactique des Mathématiques : le lire et le faire*, CEDIC.

BROUSSEAU G. (1998), *Théorie des situations didactiques*, Grenoble : La pensée sauvage.

COPPE, S., HOUDEMENT, C. (2002), Réflexions sur les activités concernant la résolution de problèmes à l'école primaire. *Grand N*, **69**, 53–63.

CRESPO, S. (2003) Learning to pose mathematical problems: Exploring changes in preservice teachers' practices, *Educational Studies in Mathematics*, **52**, 243–270.

CUNNINGHAM, R. (2004), Problem posing: an opportunity for increasing student responsibility, *Mathematics and Computer Education*, **38**, 83–89.

ERMEL (1990), *Apprentissages numériques en grande section de maternelle*, Paris, HATIER.

ERMEL (de 1991 à 1999), *Apprentissages numériques et résolution de problèmes :* CP, CE1, CE2, CM1 et CM2, Paris, HATIER.

HOUDEMENT, C. (1998), Le choix des problèmes pour la résolution de problèmes. *Grand N*, **63**, 59–77.

KOSYVAS, G. (2010) Problèmes ouverts : notion, catégories et difficultés. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, volume15, p.45-73.

KOSYVAS, G. (2013) Pratiques pédagogiques de problèmes ouverts dans un collège expérimental à Athènes. *Repères IREM*, Numéro 91

NOHDA, N. (1995), Teaching and evaluating using «open-ended problems» in classroom, *ZDM*, **95(2)**, 57–61.

SHIMADA, S. (1977), Open-ended approach in arithmetic and mathematics. A new proposal towards teaching improvement,Tokyo, Mizuumishobo
.
SILVER, E.A. (1994), On Mathematical Problem Posing, *For the Learning of Mathematics*, **14(1)**, 19–28.

ROBERT A., (1998), Outil d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. Recherches en Didactique des Mathématiques. Vol 18 (2) pp 139-190.

ROBERT A., ROGALSKI, M. (2004) Problèmes d’introduction et autres problems de recherché au lycée, *Repère IREM*, 54, 77-103

VERGNAUD G. (1990), La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*. Vol 10 (2.3) pp 133-170.

TITRE :

Autour des Problèmes Ouverts en classe de mathématiques

AUTEURS:

Fabrice Vandebrouck, Dominique Baroux-Raymond, Géraldine Bonal, Charlotte Derouet, Ruis Dos Santos, Françoise Hérault, Cécile Prouteau et Gaëlle Temam

RESUME :

Cette brochure fait suite à celle intitulée « démarche expérimentale et TICE en classe de mathématiques au lycée », parue en mai 2010. Le groupe IREM qui l'avait produite a évolué, perdant des membres mais en réunissant de nouveaux et a souhaité faire évoluer son thème de recherche, à la fois au-delà des situations mettant en jeu les TICE et au-delà de situations mathématiques amenant les élèves à adopter une démarche expérimentale. C'est ainsi que le groupe s'est centré sur les problèmes ouverts, en un sens à circonscrire, et s'est baptisé « POLIREM ».

La structure de la brochure est la même que la structure de la précédente. Il s'agira dans un premier temps, à travers ce que disent les programmes, des références bibliographiques, des comptes rendus de lectures et des exemples de situations bien choisies de développer ce que le groupe a souhaité entendre sous la dénomination « problèmes ouverts ». Ensuite vient un panorama de situations qui ont toutes été testées en classe par un ou plusieurs membres du groupe, avec les comptes rendus d'expériences et améliorations possibles ou apportées aux situations.

MOTS- CLES :

activité des élèves, problèmes ouverts, recherche en classe, démarche expérimentale

Éditeur: IREM de Paris
Responsable de la publication: F. Vandebrouck
IREM de Paris 7 – Case 7018
Université Paris Diderot
75205 Paris cedex 13
irem_de_paris@univ-paris-diderot.fr
http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/

Dépôt légal : 2015
ISBN : 978-2-86612-359-8