



Laboratoire de didactique André Revuz
Mathématiques • Physique • Chimie

**Cahiers du laboratoire de didactique
André Revuz
n°12
Avril 2014**

**Sur quoi porte le discours du professeur en
classe de mathématiques ?
Questions méthodologiques et premiers
résultats**

Auteurs : M. Chappet-Pariès, A. Robert, K. Millon-Fauré, J.P. Drouhard

ISSN : 2105-5203

TITRE :

Sur quoi porte le discours du professeur en classe de mathématiques ?
Questions méthodologiques et premiers résultats

AUTEUR/S :

Chappet-Pariès M., Robert A., Millon-Fauré K., Drouhard J.P.

RESUME :

Ce cahier présente trois articles très différents, de rédaction hétérogène, qui peuvent compléter le numéro thématique 54 de *Spirales LANGAGE, APPRENTISSAGE ET ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES*, édité par Thomas Barrier et Anne-Cécile Mathé (2014).

Le premier texte (Chappet-Pariès & Robert) présente une rétrospective de recherches sur le contenu du discours de l'enseignant en classe, étudié dans sa fonction de communication avec les élèves, et plus précisément en relation avec le développement de leurs activités mathématiques. Il s'agit d'analyser ce que peut produire ce discours sur les élèves, en termes de faire, de dire et (peut-être) de penser, la plupart des travaux ayant étudié des séances d'exercices. Suivant en cela l'inscription de ces travaux en théorie de l'activité, spécifiée aux mathématiques en situation scolaire, les dimensions retenues pour cette quête mettent en jeu l'enrôlement et le maintien des élèves dans leur activité sur la tâche proposée, les aides, les explicitations, et plus généralement ce qui peut contribuer à ce que les activités possibles des élèves soient proches des activités attendues (cf. analyse *a priori* des tâches). Les travaux ayant utilisé la pragmatique de ces discours, fonctions langagières et buts illocutoires sont repris, avec les convergences entre ce type d'analyses et les autres.

Le deuxième article (Millon-Fauré) présente une étude des spécificités du discours d'un enseignant dans une classe d'accueil pour élèves migrants : on illustre le fait que les difficultés langagières de ce public amène des choix, dont on peut faire l'hypothèse qu'ils sont réducteurs en matière d'apprentissages même s'ils relèvent d'une logique spontanée d'adaptation à ce public. L'auteur présente une piste pour aider les enseignants à échapper à ce «refoulement didactique».

Le troisième article (Drouhard) présente une étude du langage mathématique spécifique associé aux écritures symboliques – car c'est bien d'un langage qu'il s'agit, ce dont l'auteur esquisse une « démonstration ». Il s'agit de dévoiler et d'explicitier, avec ce préalable aux études du discours des enseignants, la complexité souvent ignorée de cette partie du langage utilisé en classe, en faisant l'hypothèse que cela peut contribuer à repérer certaines difficultés des élèves et à y répondre.

MOTS CLES :

Didactique des mathématiques

- (1) Tâches et activités, aides, explicitations, méta, fonctions langagières, buts illocutoires.
- (2) Activité langagière ; activité mathématique ; élèves migrants ; adaptation de l'enseignement ; ostensifs ; communauté discursive
- (3) Langage, linguistique, morphologie, syntaxe, sémantique, dénotation, pragmatique, énonciation, embrayeur

Sur quoi porte le discours du professeur en classe de mathématiques ? Questions méthodologiques et premiers résultats

Une rétrospective de recherches sur les contenus et les modalités des discours des enseignants de mathématiques dans le secondaire (Chappet-Pariès M., Robert A.)

Le refoulement didactique (K. Millon-Fauré)

Quand écrire c'est faire (J.P. Drouhard)

Ce cahier présente trois articles très différents, qui complètent d'une certaine manière l'ensemble des articles publiés dans le numéro thématique 54 de *Spirales LANGAGE, APPRENTISSAGE ET ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES*, édité par Thomas Barrier et Anne-Cécile Mathé (2014).

Le premier article (M. Chappet-Paries & A. Robert) présente une rétrospective de recherches sur le contenu du discours de l'enseignant en classe, étudié dans sa fonction de communication avec les élèves, et plus précisément en relation avec le développement de leurs activités mathématiques. Il s'agit d'analyser ce que peut produire ce discours sur les élèves, en termes de faire, de dire et (peut-être) de penser, la plupart des travaux ayant étudié des séances d'exercices. Suivant en cela l'inscription de ces travaux en théorie de l'activité, les dimensions retenues pour cette quête mettent en jeu l'enrôlement et le maintien des élèves dans leur activité sur la tâche proposée, les aides, les explicitations, et plus généralement ce qui peut contribuer à ce que les activités possibles des élèves soient proches des activités attendues. Un des auteurs reprend des travaux ayant étudié plus spécifiquement la pragmatique de ces discours, fonctions langagières et buts illocutoires.

Le deuxième article (K. Millon-Fauré) présente une étude des spécificités du discours d'un enseignant dans une classe d'accueil pour élèves migrants : on illustre le fait que les difficultés langagières de ce public amène des choix dont on peut faire l'hypothèse, qu'ils sont réducteurs en matière d'apprentissages même s'ils relèvent d'une logique spontanée d'adaptation à ce public. L'auteur présente une piste pour aider les enseignants à échapper à ce «refoulement didactique ».

Le troisième article (J.P. Drouhard) présente une étude du langage mathématique spécifique associé aux écritures symboliques – car c'est bien d'un langage qu'il s'agit, ce que l'auteur nous « démontre ». Il s'agit de dévoiler et d'explicitier, avec ce préalable aux études du discours des enseignants, la complexité souvent ignorée de cette partie du langage utilisé en classe, en faisant l'hypothèse que cela peut contribuer à repérer certaines difficultés des élèves et à y répondre.

SUR QUOI PORTE LE DISCOURS DU PROFESSEUR EN CLASSE DE MATHEMATIQUES (SECOND DEGRE) - Rétrospective non exhaustive de recherches didactiques faisant intervenir le discours d l'enseignant (1989- 2012) (M. Chappet-Paries et A. Robert)

En préambule, compte tenu des problématiques actuelles et des nouvelles questions en didactique des mathématiques quelles analyses faisant intervenir le langage pourraient contribuer à renouveler les démarches utilisées ?

Plusieurs chercheurs ont éprouvé le besoin, depuis les années 2000, de proposer de nouvelles théories globales, alternatives, sur les apprentissages (et la connaissance mathématique à apprendre) – par exemple Radford et Roth (2011)¹, Sfard (2007), Sensevy (2011) aussi d'une certaine manière, et Bronckart (2007, 2008, 2009, 2011), indépendamment des mathématiques. Les emprunts aux théories sémiotiques ont également renouvelé le paysage de certaines autres recherches, notamment lorsque les usages des logiciels renouvelaient les « *médiateurs visuels* »² offerts aux élèves. Tous soulignent (au moins en creux) l'insuffisance des théories précédentes à comprendre suffisamment ce qui est observé dans les apprentissages, ce qui peut les favoriser. La notion *d'incommensurabilité des théories*, développée par Sfard (2013), est intéressante à ce titre : toutes les théories ne seraient pas complémentaires...Tous insistent aussi, à un moment ou à un autre, sur le fait qu'au final ce sont les élèves et eux seuls qui apprennent.

D'autres chercheurs (Cobb, 2002 par exemple) ont élargi à des recherches quantitatives, mettant en jeu des professeurs « ordinaires » les premiers travaux plus qualitatifs engagés. Cela a amené à dégager éventuellement de nouveaux indicateurs dont on peut se demander dans quelle mesure le langage utilisé en classe intervient.

En France, d'une certaine manière, le développement en cours de la TSD (Théorie des Situations didactiques) et de la TAD (théorie anthropologique du didactique), voire même de la TA (Théorie de l'activité), a peut-être freiné ce type de questions, avec des exceptions³ – dans la mesure où on avait (et on a encore) « quelque chose à chercher », avec de plus en plus

¹Les titres sont significatifs : Knowledge, Knowing and learning – le sens du savoir ... Est-ce que les lessons studies en font partie ?

² Expression de Sfard (2013).

³Cf. double approche, ou théorie de genèse documentaire de Gueudet et Trouche(2010) par exemple qui ont élargi les cadres de la genèse instrumentale et de la TA pour proposer un nouveau cadre pour aborder les ressources (Lagrange, 2012).

de tentatives de croiser les cadres théoriques français, ce qui est un signe qui marque une extension des réflexions. Cependant, de nouvelles questions ont mis sur le tapis avec de plus en plus de force des interrogations nouvelles que les cadres théoriques en usage n'abordaient pas nécessairement comme on en aurait eu besoin, ou qui demandaient à être transposés ce qui n'est pas transparent. Nous pouvons citer, entre autres,

- la question de la différenciation des élèves, posée avec force par la réalité des ZEP⁴, avec les questions de compétences et socle commun (venant de l'institution) et les autres injonctions institutionnelles,
- la question de l'intégration des TICE (technologies de l'information et de la communication pour l'enseignement) avec les mutations des activités mathématiques qui sont pressenties et pas encore maîtrisées⁵,
- les recherches des collègues sociologues et psycho-linguistes (réseau Reseida⁶, Bronckart (ibid.), Jaubert, Rébères & Bernié, 2003)
- la question des cadres théoriques étrangers,
- la question des formations à assumer par les didacticiens et des positions à y développer par rapport aux apprentissages des élèves et à la didactique⁷, avec la possibilité renouvelée de recourir à des vidéos⁸,
- la question des ressources largement (qualitativement et quantitativement) renouvelée par internet.

Soulignons le rôle important joué par Cerme (Congress of European Research in Mathematics Education), pour essayer d'élaborer une réflexion sur les différences théoriques entre chercheurs, souvent liées d'ailleurs aux conditions même (institutionnelles) de la recherche, ce qui ne simplifie pas les choses.

Plus précisément en termes de recherches, il semble qu'il serait utile de passer **des diversités aux régularités, ou plus exactement aux diverses régularités qui apparaissent** – en associant, grâce aux analyses théoriques, de « bonnes » variables, c'est à dire informatives et/ou des variables possibles, c'est-à-dire susceptibles d'être actionnées par les enseignants

⁴ Établissements relevant de Zones d'éducation prioritaires, regroupant beaucoup d'élèves d'origine sociale modeste

⁵ Par exemple faut-il encore enseigner l'algèbre au collège (cf. article de Harper « Is algebra necessary ? » au NYtimes du 28/07/12), les tables de multiplication à l'école primaire, – voire même enseigner à écrire à la main...

⁶ Réseau Reseida : *REcherches sur la Socialisation, l'Enseignement, les Inégalités et les Différenciations dans les Apprentissages* (dir. Jean-Yves Rochex, Université Paris 8)

⁷ Faut-il enseigner les théories didactiques (et lesquelles) ? Faut-il ouvrir la palette des possibles en partant des besoins ressentis ?

⁸ Ce qui est très travaillé chez les anglo-saxons

par exemple. Dans cet ensemble, **les questions de proximités (entre connaissances des élèves déjà-là et connaissances à acquérir**, y compris grâce à des interventions de l'adulte) sont très présentes. On retrouve, sous une forme résumée, des questions posées aujourd'hui qui pourraient être exprimées ainsi : **quels rôles peut (doit) jouer le langage de l'enseignant (en précisant ce dont on parle) dans les apprentissages mathématiques**, y compris comme vecteur éventuel de proximité ? Dans cette perspective, les activités langagières de l'enseignant (et leur formation) ouvrent aussi des nouvelles questions (Bulea 2011, Saillot 2012, Specogna 2010).

Tout cela implique et est impliqué par **l'établissement de corrélations à divers grains** (scénario, tâches, séances ?), **à plus grande échelle** que dans les recherches qualitatives actuelles (nombreuses classes) **et sur un moyen, voire un long terme** (un an, deux ans). Il y a vraisemblablement lieu de réfléchir ainsi à des formes d'évaluation dépassant les comparaisons *a priori/a posteriori* ou prévu/réalisé (comme dans les ingénieries) mais différentes des évaluations nationales ou internationales actuelles, tout en s'appuyant dessus, pour **retrouver, à un autre grain, des relations à tester entre enseignement et apprentissages**, compte tenu des contextes. Cela demande beaucoup de réflexion, ne serait-ce que pour choisir des indicateurs raisonnables propres à ces divers changements d'échelles et pour mener des expérimentations valides et fiables (cf. Goigoux, annexe 3).

Enfin, l'urgence des formations, car l'école n'attend pas nos résultats, amène aussi à poser la question de l'utilisation des résultats actuels de didactique – notamment sur tout ce qui concerne ce qui dépend de l'enseignant et plus encore des activités langagières de ce dernier (même si on sait bien que rien n'est isolé dans ce domaine) – cf. Bulea et Bronckart (2010), Saillot (2012). Les questions langagières sont évidemment centrales à ce titre – et si les contenus véhiculés ont été beaucoup questionnés (cf. Rochex et Crinon, 2011 par exemple), les questions de formes ou de pragmatiques le sont moins (toutefois cf. Saillot 2012) – tout comme les questions de spécificité du langage « mathématique » - en leur temps des chercheurs comme Lacombe (2011) et Adda (1977), puis Laborde (1981) ont déjà essayé.

Dans ces conditions, s'interroger sur la place des recherches sur le langage dans les recherches en didactique est tout à fait légitime – dans quelle mesure est-ce une « bonne » variable ? Mais notre contribution sera modeste et rétrospective : nous n'avons jamais fait une place à part au langage dans nos recherches sauf transitoirement dans les travaux de Chappet-Pariès (cf. la deuxième partie de ce texte), le discours de l'enseignant a toujours été intégré « au reste », mais nous avons beaucoup étudié le langage oral de l'enseignant en classe de

mathématiques comme véhicule de la communication entre ce dernier et les élèves, compte tenu des tâches travaillées. Bien des aspects manquent ainsi à ces recherches, notamment ce qui est lié à la nature spécifique (liée aux mathématiques) du langage utilisé en classe de mathématiques – lié souvent à l’écrit, aux figures et aux différents symbolismes en usage, et en particulier ce qui concerne *le langage écrit du professeur*⁹. Rappelons à ce sujet la thèse de C. Laborde (1981) avec la définition du langage mixte qui est celui de la classe de mathématique. Des recherches actuelles sont menées sur les traces écrites recueillies chez les élèves (Philippot et Niclot, 2011). Rappelons aussi les contributions générales de Bronckart (ibid.) sur le langage et le développement.

Toutefois, dans ce texte, nous avons essentiellement repris un certain nombre de travaux antérieurs (de 1989 à 2012) faisant intervenir de différentes manières le langage de l’enseignant en classe avant de revenir sur des perspectives. Nous avons joint en annexe 1 des résumés de tous les articles cités et en annexe 2, nous présentons brièvement les travaux internationaux de Sfard sur les mêmes questions (Sfard 2013).

Plan du texte

Introduction : le dire du professeur entre le faire, le dire et le penser des élèves

I Analyses du dire du professeur en classe : premières dimensions explorées, évolutions et bilans,

II La pragmatique (fonctions et buts illocutoires)

III Résultats

IV Pistes de recherches- Conclusion

Bibliographie

Annexes (résumés de quelques sources, les travaux de Sfard, un texte de Goigoux sur l’évaluation des pratiques enseignantes).

Introduction : le dire du professeur entre le faire, le dire et le penser des élèves

1) Généralités

⁹ Deux études ont été consacrées au tableau et à l’écrit correspondant – Roditi (1997) et Vandebrouck (2002, 2003)

Dans cet exposé nous avons essayé de reprendre tout ce que nous avons développé lors de rencontres explicites avec le langage de l'enseignant (son discours¹⁰, son dire) dans nos recherches : finalement, à l'exception des travaux de Chappet-Pariès(2004) qui a tenté d'exploiter des éléments de pragmatique, il s'agit *d'analyses du contenu du discours de l'enseignant dans sa fonction de communication avec les élèves en cours de mathématiques, dans le secondaire (et le début de l'université, pas évoqué ici)*. Quelques essais plus syntaxiques ont été tentés sans résultats du tout (Chiocca, 1991). Signalons le travail de Rogalski sur les marqueurs et les formats (2008), un peu intermédiaire. Cependant, indiquons d'emblée aussi que les divers résultats obtenus sont limités, dans la mesure où il a été trouvé, de manière très générale, *des invariants intra-personnels, des grandes diversités inter-personnelles, avec des convergences entre les diverses approches, mais le lien avec les apprentissages n'a pas pu être beaucoup abordé* – il reste là, peut-être, une piste, vraisemblablement à condition d'engager dans l'étude de ce type de relation suffisamment d'éléments de contexte qui sont davantage connus aujourd'hui. Nous concluons par quelques pistes complémentaires, à la lumière de ces nouvelles questions actuelles.

2) Faire penser, faire dire, faire faire ? Une approche partielle

Le discours du professeur en classe a notamment et classiquement (au moins) une double fonction – représentation (cf. énonciation) et communication (difficilement dissociables¹¹): dans la classe nous ne nous sommes intéressées qu'au fait que le langage du professeur est destiné aux élèves.

Il peut les informer, en lien ou non avec leurs productions - y compris les corriger (ce qui est lié à l'aspect sémantique, directement lié au contenu mathématique, par exemple pendant les cours, mais pas seulement) ; on pourrait dire que le langage a une fonction de « *donner à voir et à penser* » d'une certaine manière, en amont et en lien avec le *donner à faire*, par le *dire et le montrer*, –même si on sait bien que cette fonction dépend largement de celui qui reçoit le discours, en relation non seulement avec l'état de ses connaissances et de sa pratique langagière propre mais aussi avec certaines caractéristiques du discours et des tâches demandées. Il s'introduit naturellement la question de savoir si ce « *donner à voir et à*

¹⁰ Nous n'introduisons pas ici de différences entre langage, discours, dire, pratique langagière, activité langagière, ...

¹¹ On communique ce qui est représenté, dès qu'on représente il y a communication...

penser » se produit avant l'action des élèves, pendant, après, comment s'il s'apprend... Question très difficile à aborder, si ce n'est quand on constate des échecs.

Ce même langage peut contribuer à provoquer des actions mathématiques des élèves, matérielles ou discursives (ce qui est lié à un aspect pragmatique et d'étayage mais pas seulement) – « *faire faire* », « *faire dire, faire exprimer* »...

Étudiés dans l'ensemble de l'activité en jeu dans la classe, le discours et le langage associé peuvent ainsi jouer un certain nombre de rôles imbriqués, information, communication de nature diverse, provocation à l'action au sens large, intervenant comme intermédiaire entre la tâche proposée, l'activité des élèves et ce qu'on peut en « tirer », à la fois pour l'apprécier et pour la « dépasser ». Ce discours « **véhicule** » ainsi des informations très variées à partager avec les élèves sur l'action à mener et sur les mathématiques en jeu. De plus le contexte particulier de la classe forme l'ensemble des échanges qui y ont lieu.

3) Discussion et position théorique

Nous dégageons d'abord un certain nombre de questions qui ne sont pas abordées ici.

a) Derrière les mots, l'écoute et la saisie

Dans quelle mesure est-ce que les élèves entendent ce que dit l'enseignant ? Est-ce que tous les élèves écoutent ? Entendent la même chose ? Quand c'est juste un mot ou deux ?

b) Certes les pratiques langagières d'un professeur ont des aspects récurrents – l'étude sur une séance renseigne sur quelque chose qui aura vraisemblablement lieu de la même manière le lendemain (à un certain niveau) et qui a eu lieu avant. Mais dans quelle mesure cette récurrence côté professeur est aussi récurrente pour les élèves ?

c) De plus on sait aussi que le choix des tâches est une variable importante de l'activité des élèves et de son « efficacité » sur les apprentissages. Comment s'organisent les influences respectives du scénario et des tâches précises adoptés en classe, des déroulements organisés jour après jour (cf. Fabre) et des échanges langagiers ?

d) Plus généralement, est-ce légitime de « séparer » l'étude du langage oral de l'enseignant de ce que fait et fait voir le professeur (« langage » écrit) ? Ce qui influence les élèves à un moment précis ne tient pas qu'au dire du professeur mais à tout ce qui est développé en même temps... Ce qui est spécifique au cours de mathématiques tient peut-être à la différence concernant la nature des activités des élèves, amenés à travailler et à raisonner

sur des symboles avec des règles. En quoi le(s) langage(s) de l'enseignant joue(nt)-il(s)spécifiquement sur ces activités particulières ? En cours de physique, d'histoire, de français... le professeur aussi communique avec ses élèves, quelles différences y-a-t-il ?

Nous n'allons pas ici non plus revenir sur les aspects sociaux liés aux discours (tout de même évoqués en II) pas plus que nous n'irons ici questionner les notions de culture commune ou communauté de pratiques accrochées à la classe, voire d'approche discursive développée ailleurs.

Parce que dans le cadre théorique qui nous permet de donner sens à nos recherches, nous avons surtout croisé le langage dans cette fonction *d'accompagnement*, mathématique ou non, *dans ce qui fait que ce qui se passe pendant la classe n'est jamais réductible au contenu du cours qui y est dispensé, la même chose restant vraie pour un cours sur vidéo...* Cela se justifie par le fait que nous étudions les relations entre enseignement et apprentissage, pour mieux les comprendre, et que cela passe par la manière dont l'enseignant provoque les activités mathématiques des élèves – le sens de ce mot « activités » est important, il désigne tout ce qui se passe et ne se passe pas à l'oral, à l'écrit, dans la tête. Cet intérêt théorique que nous portons aux activités effectives des élèves (même si elles sont en partie inaccessibles) vient de l'hypothèse forte que nous les considérons comme maillons nécessaires et fondamentaux de leurs apprentissages, et qu'elles dépendent, en partie, de la manière dont l'enseignant gère la classe, notamment par son discours d'accompagnement, même si le choix des tâches correspondantes est aussi essentiel.

Très schématiquement les références aux théories piagésiennes et à la conceptualisation de Vergnaud (1991) nous amènent à analyser les tâches et la partie « autonome » du travail de l'élève, et les références à Vygotski(1934-1978)ainsi qu'aux diverses théories didactiques développées en France nous amènent à analyser les va-et-vient entre les acteurs de la classe, et notamment la manière dont s'exploitent les passages au collectif et les proximités¹² individuelles entre ce qui est déjà-là et ce qui est visé en termes de connaissances.

Utiliser la notion d'activités ainsi comprise revient à reconnaître dans la cognition le rôle de l'action, mais aussi le rôle de la médiation et de l'information bien ajustées, et aussi le rôle de la conscience – et pas seulement celui des « réflexes » ou de la mémoire.

¹²Une première approche de la notion se trouve dans les travaux de Maurel et Sackur (2010), avec la notion de connaissances locales, stables et cohérentes – sorte de base de la proximité : si des connaissances sont trop proches ou trop loin des connaissances locales, elles risquent de ne pas s'installer...

Cela dit, d'autres catégories importantes sont liées aux études des activités et du langage : la conscience, les affects, et cette fameuse motivation souvent assez mal traitée (à toutes les sauces, sans aucune argumentation) mais quand même préalable à l'engagement.

Conscience et réflexion peuvent être liées – beaucoup d'auteurs ont écrit là-dessus.

4) Bilan : des élèves ... aux professeurs ?

Les analyses du discours¹³ que nous relatons ici ont été faites depuis une vingtaine d'années pour renseigner, partiellement, sur ces diversités dans la manière dont le langage enseignant remplit ces fonctions en classe par rapport aux élèves, en se centrant sur son rôle dans la communication, la provocation à et l'exploitation de l'action (on évoque pour dire cela l'accompagnement de l'enseignant), en référence aux activités mathématiques possibles des élèves. Ces analyses ont presque toujours été menées pendant un travail sur des exercices (recherche ou correction).

Ainsi les recherches plus tardives menées sur les pratiques ont petit à petit eu aussi pour objectif, au sein d'analyses plus complètes rendant compte de la complexité des pratiques, d'accroître une certaine intelligibilité des pratiques effectives, dans leurs diversités et leurs régularités, en relation avec les conditions d'exercice et les contenus à enseigner, et d'envisager des formations à partir d'un travail sur les alternatives « possibles », faisant intervenir de manière imbriquée les choix de contenus et les discours.

Répetons que nous n'analysons pas les choix précis en termes de représentation sémantique des objets mathématiques par exemple, même si des tentatives sont envisagées (cf. Bridoux 2012) qui étudie l'évolution des représentations transitoires utilisées par le professeur), encore moins les notions de genres de discours etc. Nous ne faisons pas non plus entrer en ligne de compte, dans les choix étudiés, des aspects qui pourraient être liés à l'origine sociale des élèves : ceux-là ne peuvent être que lus *a posteriori*, en regard des analyses.

I Des analyses du contenu des dires du professeur en classe : quelques résultats - diversités inter-personnelles et invariance intra-personnelle, en relation étroite avec le contexte.

¹³ L'utilisation systématique du mot discours à la place de langage correspond à l'étude de la restriction des pratiques langagières à ce qui peut être entendu ou vu pendant les extraits analysés.

Plusieurs dimensions ont été explorées au fur et à mesure des recherches, toutes liées à des diagnostics sur des aspects communicationnels repérables par des analyses de contenu.

Cela dit, dans les trois premiers paragraphes où ces aspects sont repris, la méthodologie est en partie empirique. On analyse par exemple le temps des verbes, les sujet, les injonctions, questions, répétitions, ce qui est souligné, la portée et les, durées des réponses, mais aussi les références explicites à la mémoire, aux analogies, aux doutes, aux anticipations, aux erreurs, aux méthodes (Chiocca 1991, Chiocca, Robert & Josse 1992 par exemple), sans que le recours à chacune de ces catégories soit vraiment justifié, hors l'usage qui en est fait dans divers travaux linguistiques.

Dans ce qui suit nous résumons ce qui a été exploré depuis 1985 dans des travaux adoptant, même implicitement, des orientations proches de nos orientations actuelles (inscription en théorie de l'activité et double approche didactique et ergonomique pour étudier les pratiques des enseignants), en dégagant plusieurs étapes – les résumés des articles auxquels nous nous référons et qui sont en annexe sont précédés d'un * dans les références bibliographiques.

1) Dans les premiers travaux, des recherches de dimensions significatives des contenus des discours des enseignants : des différences selon les contextes et les personnes.

Les premières classifications ont porté sur les contenus des discours tenus en classe : on a distingué le strictement mathématique (les textes de définitions, théorèmes, démonstrations,...) et les méthodes, puis, plus généralement, le « méta ». On désigne ainsi les commentaires plus ou moins généraux sur les mathématiques, la nature des notions, leur histoire, leur fonction, le type de travail qu'elles permettent et le « jeu auquel on joue » en mathématiques dans différents domaines, dont aussi les méthodes, voire les difficultés, les pièges, etc... Nous avons distingué plusieurs niveaux de méta pour les méthodes (voir plus loin).

Cela a amené à baliser les discours en référence au strictement mathématique, notamment en termes d'étiquetage et de structuration, et, accompagnant certains développements comme les démonstrations, en termes de réflexion et d'argumentation.

a) Les premiers travaux : Enseigner des méthodes

Une première exploration de cette question a été présentée dans un cahier de didactique (Robert, Rogalski, Samurçay, 1987), proposant une définition de ce qu'on pourrait appeler « méthode » en mathématiques et abordant la question de leur enseignement. Cet article s'inspire en partie de la didactique professionnelle. Il s'agit d'un « procédé applicable à un ensemble de problèmes semblables sous leurs aspects les plus généraux ». Ce n'est pas réductible à un algorithme, cela peut s'appliquer à des problèmes ouverts. Des hypothèses sont formulées : les méthodes sont facilitatrices des résolutions de problèmes, et donc de l'acquisition de connaissances et elles peuvent être enseignées (l'identification d'une méthode relève d'une méconnaissance). Un tel enseignement est associé à une explicitation des procédures de résolution de problèmes représentatifs.

Le travail de thèse d'I. Tenaud(1989), faisant également suite à une réflexion didactique sur les interventions métamathématiques née de recherches sur la convergence des suites et en algèbre linéaire¹⁴, a exploré les possibilités de travail sur les méthodes en géométrie en Terminale Scientifique. Elle a ainsi élaboré et étudié un dispositif long, joignant un discours sur les méthodes en géométrie présentées et travaillées en cours (exposition des connaissances), et des exercices où cela devait servir, travaillés par les élèves en petits groupes, une fois par semaine pendant toute l'année. Certaines évaluations proposées aux élèves reprenaient ce type d'exercices. Pour étudier les transcriptions choisies du travail des élèves en classe, I. Tenaud a distingué un niveau méta général – méta 1 - (il faut chercher des méthodes), un niveau méta intermédiaire, méta 2, relié seulement au type de problèmes détecté¹⁵ (si par exemple les élèves repèrent qu'on a un alignement à trouver, ce niveau est en jeu s'ils développent une réflexion sur les méthodes pour montrer un alignement) et un niveau méta particulier, méta 3, adapté non seulement à la recherche du type de problèmes concerné mais encore aux données précises du problème cherché. L'auteur a mis en évidence une progression de l'utilisation adaptée par des groupes d'élèves au fur et à mesure de l'année (de plus en plus du troisième niveau), avec un certain gain en efficacité. Elle a aussi montré, grâce à des « graphes de démonstration », la non-linéarité des recherches des élèves, qui peut être mise en relation avec la difficulté de mettre en place un travail un peu systématique à partir des méthodes, très éloigné de ce que les élèves font spontanément.

¹⁴ La nature FUG de ces notions – avec un Formalisme nouveau, qui Unifie et Généralise les formulations antérieures, souvent en les simplifiant, a amené à introduire explicitement dans le discours de l'enseignant des éléments méta, associés à l'explicitation de cette nature particulière et aux contrats associés (Robert et Robinet 1996).

¹⁵ Les types de problèmes ont été abordés en cours

b) *Un premier élargissement : apprécier la variété des contenus des discours non strictement mathématiques tenus en classe : classifications et comparaisons (à partir de transcriptions)*

Dans les travaux de Chiocca, Josse, Robert (1991, 1992, 1993), l'idée était de repérer dans les discours non strictement mathématiques des enseignants (discours d'accompagnement, en classe) des différences sur ce que l'enseignant **ajoute** aux discours strictement mathématiques, que ce soit sur les mathématiques ou sur le jeu auquel on joue en mathématiques (méta), en essayant aussi de voir si cela était renforcé par des éléments syntaxiques (formes langagières).

On a effectivement mis en évidence des diversités importantes entre enseignants, sur les indicateurs suivants : l'étiquetage et la structuration des discours (dont l'explicitation des étapes des démonstrations, l'attribution de titres et sous-titres...), et la réflexion et l'argumentation (directe ou méta). Mais l'étude d'éléments syntaxiques n'a pas révélé grand-chose.

Un travail de Josse (1993) a consisté à comparer les discours de deux enseignants de deux établissements différents, devant des classes de niveau différent, pendant une séance préparée ensemble (en géométrie en seconde). Elle note des différences dans le déroulement et, en ce qui nous intéresse ici, des différences dans les discours d'accompagnement. Elle constate qu'il y a davantage de discours de réflexion dans la classe « forte » mais globalement elle trouve des répartitions de discours relativement proches. Sauf que... en ce qui concerne la phase de démonstration, elle trouve beaucoup plus de discours mathématiques et de réflexion dans la classe forte et beaucoup plus de communication non mathématique et d'étiquetage dans l'autre. De plus, et pour le dire vite, le dire du professeur de la classe la meilleure **complète ce qui vient des élèves** beaucoup plus systématiquement que dans l'autre : le discours d'étiquetage est plus développé dans la classe faible mais ne dépasse pas ce qui est présent chez les élèves, alors que dans l'autre classe il est complété, par exemple en plus du nom précis fourni par les élèves, l'enseignant donne une autre caractérisation ou rappelle un fonctionnement ou insiste sur des différences d'utilisation... Les mêmes différences apparaissent pour le discours de réflexion – qui fait place dans la classe forte et seulement là à des anticipations à long terme, voire à des explicitations de méthodes ...

On constate ainsi des dires enseignants différents : répéter d'un côté, ne pas dépasser ce qui est déjà-là, sauf à lui mettre un nom ou à l'évaluer, valoriser tout travail, et de l'autre côté reprendre sélectivement et compléter, de manière très diverse... Signalons qu'on a rencontré

ce dernier « procédé » très présent dans une séance de troisième d'un établissement favorisé, où, dans des phases d'oral collectif destinées à préparer le travail individuel ultérieur, qui sera ainsi balisé, le professeur mutualise et complète systématiquement ce qui vient « des élèves », transforme le dire des élèves en ajoutant ce qui lui permet d'approcher un petit peu plus à chaque fois ce qui l'intéresse.

Le travail de Chaussecourte (1997) et celui de Sayac (1998) ont permis de comparer à deux reprises le discours d'un même enseignant sur la même séance dans deux contextes différents (élèves plus ou moins défavorisés), en sixième et en quatrième dans deux établissements différents. Les auteurs ont mis en évidence des différences, attendues, dans les contenus des discours, mis à part les durées déjà très différentes, qui confirment en partie ce qui précède : **plus de discours enseignant dans les classes défavorisées mais pas le même, plus proche de la tâche effective, et sur plus de choses**, un peu comme si l'enseignant voulait se substituer aux élèves pour aplanir les difficultés mais sans dépasser ce qui est apparu.

Un travail collectif avec des formateurs sur un même texte d'exercice (sur optimisation d'une aire) proposé dans 4 classes de seconde (Beziaud & al. 1999) ne permet que de mettre en évidence des différences, non linguistiques, entre les enseignants qui accélèrent pour arriver à l'étude visée de la fonction et ceux qui laissent les élèves chercher la fonction « aire », la séance se terminant sans avoir alors eu le temps de l'étudier.

2) À partir des années 2000, des analyses de discours donnant accès à des analyses de pratiques individuelles des enseignants.

À partir des années 2000, se sont développées les analyses du discours de l'enseignant pris comme un élément des pratiques individuelles, faisant intervenir les liens entre discours et tâches précises des élèves, puis discours et activités des élèves puis entre discours et métier (à partir de vidéos filmées en classe et transcrites).

a) Les univers croisant types de tâches et types de discours

Un travail intermédiaire a été d'abord mené par Hache (1997, 2001) : il a dégagé des « univers » caractérisant à la fois les choix de tâches et les discours qui les accompagnent,

mettant en jeu contextes et personnalités. Cependant ce sont plutôt les enseignants que les contenus qui semblent la principale variable des choix repérés, ce qui met sur la piste de faire intervenir l'étude des discours au sein des analyses de pratiques, élargissant le point de vue pour mieux comprendre d'où vient ce qu'on constate.

b) Les discours des enseignants en relation avec les activités des élèves, un élément des pratiques

Depuis la prise en compte du discours s'est ainsi élargie à l'étude de la composante médiative des pratiques, à imbriquer aux autres composantes (cf. double approche, Robert & Rogalski, 2002, 2005). On a adopté l'idée que les pratiques des enseignants doivent être étudiées non seulement en référence aux apprentissages mais aussi en référence au métier. Ainsi l'étude du « seul » discours tenu en classe s'est enrichi de la référence systématique non seulement aux tâches proposées mais aussi aux activités des élèves et à tout le contexte, y compris les composantes personnelle, institutionnelle et sociale de l'enseignant.

Cela a coïncidé avec un éclaircissement de notre positionnement théorique : nous avons explicité notre inscription **dans le cadre théorique de la théorie de l'activité** – où le pivot des analyses tient à l'étude des activités des élèves, menée en comparant les activités attendues à partir de l'analyse des tâches et les activités possibles à partir des déroulements effectifs. Cela a amené à travailler davantage sur des vidéos d'exercices que de cours.

Cette imbrication des analyses des discours dans l'étude des pratiques a notamment contribué à établir le résultat suivant : la grande stabilité des pratiques (et des discours) pour des enseignants expérimentés en régime de croisière hors formation, se marque d'abord sur la composante médiative des pratiques. Au sein de la complexité des pratiques, cette stabilité est renforcée et renforce la cohérence des pratiques (Robert, 2007, Chappet-Pariès, Robert, Rogalski, 2008, 2009).

c) Les aides de l'enseignant

Ces élargissements de notre problématique ont aussi conduit à introduire de nouveaux indicateurs à repérer dans les discours, liés aux activités des élèves. Ainsi avons-nous introduit des analyses des aides repérées dans les discours – procédurales, directes ou indirectes, constructives, avec reprise du méta et questions. Les aides à fonction procédurale

(directes ou indirectes¹⁶) engagent plutôt les élèves sur une piste d'action – *Trouve quel théorème utiliser ici, Essaie de reconnaître des identités remarquables....* Les aides à fonction constructive (directes ou indirectes) s'appuient sur le travail des élèves et engagent sur une piste de réflexion, avec une montée en généralité – *Ce théorème a pu être utilisé parce qu'il y avait des droites parallèles, Pourquoi penser à utiliser des identités remarquables ici ?*

Cette sorte de classification, pas toujours évidente à établir, présente une difficulté inhérente au fait que c'est le chercheur qui apprécie le discours de l'enseignant, sans connaître le travail de tous les élèves : pour les élèves il est possible qu'une aide qualifiée d'une certaine façon joue un autre rôle – procédurale peut devenir constructive, de même qu'il est possible que certains élèves n'entendent pas certains types d'aides constructives.

Cela dit, les aides procédurales indirectes proposées au début d'une recherche des élèves, notamment si rien ne se passe en classe, aides où la question posée porte explicitement sur une activité immédiate possible de l'élève (*fais une figure, essaie des calculs, cherche quel théorème ou formule du cours utiliser, traduis les données ou la conclusion autrement...*) semblent intéressantes dans la mesure où elles laissent une part de nouveau aux élèves en lien avec ce qu'ils sont en train de travailler. Ce type d'intervention s'appuie sur des besoins ressentis par les élèves mais non précisés et contribue à réduire le questionnement sans le supprimer. C'est une intervention de type « faire faire », facilitée par une analyse de la tâche, mais avec une partie potentielle, encore ouverte, qui reste à la charge de l'élève. De plus ces aides peuvent être reprises plusieurs fois de la même manière, et même donner lieu à des aides constructives ultérieures.

Une question se pose pour interpréter certaines de ces interventions : faut-il y voir un effet Topaze ou au contraire une aide procédurale qui peut déboucher sur une action de l'élève qui le fait avancer ? Pour quels élèves ?

Les aides constructives en revanche, proposées après un travail de recherche des élèves, peuvent apporter une information à portée générale, décontextualisée, soit en termes de méthodes (entre outil et type de tâches) soit en termes d'adaptation des connaissances (travail de l'objet, de l'outil ou d'organisation). Elles peuvent amener à expliciter les adaptations attendues, à mettre en lumière des éléments jusqu'alors « transparents ». Mais suffit-il de les « dire » ?

¹⁶Directes si l'enseignant donne le théorème à utiliser, indirecte si l'enseignant demande quel théorème on peut utiliser.

La même question se pose pour interpréter certaines de ces interventions : faut-il y voir un effet Jourdain ou au contraire une aide constructive qui peut déboucher sur un apprentissage ? Et pour quels élèves ?

Avant de reprendre l'ensemble des résultats obtenus et de discuter de perspectives, nous présentons un autre volet des analyses de discours, tout à fait différent au début (mais qui a rejoint les autres analyses ensuite) : il s'agit de l'étude de la manière dont les enseignants s'adressent aux élèves.

II Nouvelles analyses intégrant la prise en compte des buts illocutoires et des fonctions langagières (éléments de pragmatique des discours) (Chappet-Pariès¹⁷)

Dès le début de notre travail nous nous sommes intéressées au discours du professeur de mathématiques. En effet il occupe une large place pendant les séances et peut influencer les activités des élèves. En 2006 nous écrivions : « Si on envisage, par exemple, une intervention du professeur correspondant à une aide, non seulement on regardera ce qui est dit, le contenu sémantique du discours mais la manière dont le discours est tenu, ce qu'il pourrait permettre aux élèves, si l'aide est amenée en plusieurs étapes ou non, si l'élève est impliqué, si le prof l'est ... »

Pour procéder à cette analyse du discours, nous avons attribué certaines fonctions aux interventions du professeur, en analogie avec les fonctions du discours repérées par Bruner (1983) dans le processus d'étayage de l'adulte qui vient en aide à l'enfant.

Nous avons emprunté aussi certains outils à la pragmatique pour étudier plus précisément la forme du discours. Notre objectif était d'essayer de comprendre si certaines formes que prend le discours pouvaient traduire comment le professeur s'adresse aux élèves, comment il semble envisager le rôle de chacun, élèves et professeur dans la résolution d'une tâche et, finalement d'en inférer par ce type d'analyse des discours ce qu'il confie réellement aux élèves.

En effet la pragmatique s'occupe de l'influence et des conséquences du langage sur le contexte. C'est-à-dire qu'elle étudie comment on peut « agir sur le monde » en disant quelque chose. Elle étudie aussi l'influence et les conséquences que peuvent avoir le contexte sur le langage.

¹⁷ Ce paragraphe est rédigé spécifiquement par Monique Pariès

1) les premiers travaux : des études « isolées » (à partir de transcriptions de séances)

Les outils que nous avons empruntés reprennent des éléments de la théorie des actes de langage et de la logique interlocutoire. Cette théorie permet l'articulation entre l'objet (contenu) et la forme du langage. L'un des outils nous avons utilisés en particulier est la notion de but illocutoire qui indique par la forme précisée ci-dessous ce que cherche à produire le contenu du discours. Il permet de préciser comment l'enseignant entend « agir » sur les élèves. Nous avons également regardé, dans nos premiers travaux, la forme et la structure des échanges c'est-à-dire comment pouvaient se traduire par des enchaînements différents les tours de parole. Nous avons abandonné l'étude systématique des « petits mots » c'est-à-dire de certains connecteurs logiques ou exclamations utilisés majoritairement par les enseignants, suite à des essais infructueux de trouver des corrélations. Nous avons aussi abandonné l'étude des intonations et de la hauteur de la voix, malgré l'existence de logiciels adaptés à le faire mais encore frustrés.

a) Les fonctions du discours : une première approche (Chappet-Pariès 2004)

Dans l'interaction en classe, le professeur propose à ses élèves des tâches, les découpe, oriente l'activité des élèves, informe, explique, rassure, encourage, mobilise l'attention, évalue. Plus détaillées que les outils précédents¹⁸ et aussi en lien avec le fait qu'il s'agisse de math, les fonctions du discours qualifient le discours de l'adulte en situation d'accompagnement des élèves en classe. Au départ nous en avons introduit 10 : distribution des tâches, introduction d'une sous tâche, bilan, justification, structuration¹⁹, évaluation, engagement, mobilisation de l'attention, encouragement, mutualisation de la réponse des élèves. Elles sont étiquetées grâce au contenu du discours étant entendu que certains éléments peuvent relever de plusieurs fonctions. Le discours joue un double rôle, aider les élèves à acquérir des connaissances mathématiques et établir et maintenir la communication. Pour rendre compte de ce double rôle et dans un souci de recomposition nous avons réparti les fonctions en deux groupes : les **fonctions cognitives** qui sont directement en relation avec la tâche à résoudre (distribution des tâches, introduction d'une sous tâche, bilan, justification, structuration, évaluation) et qui sont souvent des aides pour les élèves, et les **fonctions non cognitives** qui apparemment sont

¹⁸ Les catégories précédentes, plus générales, ne faisaient pas non plus assez de place aux déroulements des accompagnements.

¹⁹ Bilan, justification, structuration : très proches des catégories déjà introduites. On voit l'importance des compléments apportés ici.

indépendantes de la tâche. Nous avons étiqueté « aides » les fonctions cognitives à l'exception de l'évaluation car elles permettent aux élèves d'évoluer dans leur résolution de la tâche mathématique, la fonction « évaluation » telle que nous l'avons considérée, sans commentaires, étant plutôt une forme de pose quant à la résolution (état des lieux). Les différentes aides que nous avons distinguées dans la suite de notre travail, procédurales et constructives sont repérées autrement mais sont retrouvées en partie dans ce premier étiquetage. En effet par exemple la fonction « introduction d'une sous tâche » correspond à une aide procédurale le plus souvent, la fonction bilan, peut être selon le cas, une aide constructive ou procédurale.

Tableau 1 : Des exemples pour illustrer les différentes fonctions

Fonctions	Exemples tirés du discours d'enseignants en classe
distribution des tâches	je voudrais un nombre qui ne soit divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5, ni par 9 mais par autre chose que lui-même et 1.
introduction d'une sous tâche (+ engagement)	49 est divisible par combien Prudence ?
Bilan	c'est à dire 49 n'est pas divisible par 2, n'est pas divisible par 3, n'est pas divisible par 9, n'est pas divisible par 5 mais est divisible par 7 et bien sûr 49 est divisible par 49 et par 1.
Justification	Forcément ce sera un nombre impair puisque tous les nombres pairs vont être divisibles par 2
Structuration (+ bilan + justification)	donc voilà 119, un nombre qui n'est pas divisible par 2, il est impair, qui n'est pas divisible par 5, il se termine ni par 0 ni par 5, il n'est pas divisible par 9 parce que la somme de ses chiffres ça fait 11, il est pas divisible par 3, pour la même raison et pourtant il est bien divisible par autre chose que 2, 3, 5, 9, à savoir 7 et 17
Evaluation	L'exemple de Prudence était très bon.
Engagement (+introduction d'une sous tâche)	Louis ça fait combien, 79 divisé par 79
mobilisation de l'attention	Je repose ma question
Encouragement	Excellent, Prudence

mutualisation de la réponse des élèves	49 est divisible par combien Prudence ? <i>Elève : Par 7 Par 7</i>
--	---

b) Les buts illocutoires : emprunts à la pragmatique (Chappet-Pariès2004)

La théorie des actes de langage propose de distinguer cinq buts illocutoires : assertif (il énonce ce qui est), commissif (il indique ce que le locuteur va faire), déclaratif (il permet de changer le monde par sa seule énonciation), expressif (il traduit un état psychologique du locuteur), directif (il a pour objectif de faire agir ou répondre les élèves). Nous les avons repris et nous avons en plus introduit le but commissif/directif qui associe élèves et professeur dans une action à venir : « on va démontrer que... ».

Pour insister sur la dimension actionnelle du discours telle que la présente Vernant (1997) : « Par un acte de discours, est effectivement et directement produite une action sur le monde. Par une sorte de magie verbale, le dire devient le faire. », nous avons regroupé les buts en deux catégories, ceux qui indiquent une demande directe de mise en activité des élèves (directif et commissif/directif) et les autres qui indiquent plutôt dans nos interprétations ce que le professeur prend en charge.

Tableau 2 : Exemples pour illustrer les différents buts illocutoires

Buts	Exemples tirés de discours en classe
Assertif	Forcément ce sera un nombre impair puisque tous les nombres pairs vont être divisibles par 2
Commissif	Je vais regarder les cahiers
Déclaratif	Je l'écris au tableau
Expressif	Alors vous voyez, moi, je suis persuadé Eyé que vous avez des idées
Commissif/directif	Maintenant je voudrais juste qu'on termine sur CD égale 2 fois $\sqrt{5}$

c) Premiers résultats au niveau du discours

Nous avons analysé six séances d'exercices en classe de mathématiques au collège, dans des classes variées. Les enregistrements ont été étudiés avec une méthodologie linéaire étiquetant pour chaque phrase fonctions et buts. Nous avons pu repérer des régularités :

- La fonction du discours du professeur la plus utilisée dans les séances observées est l'évaluation (dont fait partie la validation) – la recherche est à poursuivre, notamment en relation avec la diversité des corrections et des contextes – peut-on apprendre en ZEP aux élèves à « bénéficier » des fonctions d'évaluation (Wilbois, 2012) ?
- Les moments d'entrôlement sont donc importants et ont donné lieu à des précisions ultérieures selon les classes et les tâches. Néanmoins les fonctions non cognitives occupent globalement au moins le quart du discours des enseignants observés..
- Les aides diverses occupent plus de la moitié des fonctions du discours pour chaque séance.
- Le but dominant pour l'ensemble des discours et pour chacun des profs observés est le but directif. De plus, plus de la moitié des buts utilisés (directif, commissif/directif) visent explicitement à ce que les élèves soient ou restent dans l'action ; il s'agit de les faire réagir, réfléchir, agir seuls ou en collaboration avec l'enseignant au détriment d'un discours relayant uniquement ce que fait ou dit l'enseignant. Le contexte, séance d'exercices y contribue sans doute largement. Par-delà ces régularités, les différences dégagées concernent surtout l'adaptation du professeur au niveau des élèves de sa classe. Il y a encore plus de fonctions d'entrôlement dans les classe faibles, moins de but directif donc de tentatives de mises en activité des élèves et une fonction d'évaluation non accompagnée d'un but directif, donc moins d'évaluation à la charge des élèves dans ces mêmes classes. La forme des échanges nous semble liée au projet du professeur en ce qui concerne la suite de tâches envisagées. L'organisation des tours de parole et la plus ou moins grande initiative des élèves semblent tenir de la composante personnelle de l'enseignant et de la personnalité des élèves.

2) Travaux ultérieurs en relation avec les études de pratiques (Chappet-Pariès 2007, 2008, 2010, Chappet-Pariès et al 2009, 2013), à partir de vidéos et de transcriptions

Des travaux ultérieurs analogues quant aux analyses de discours, menés avec Robert & Rogalski ont montré que plus généralement tout se passe comme si, dans certaines classes difficiles et/ou pour des tâches plus complexes, l'enseignant utilisait davantage des fonctions non cognitives, cependant hors mutualisation. Autrement dit, l'enseignant enrôle les élèves

dans la tâche sans essayer d'organiser des moments collectifs de partage de connaissances ou de démarches... La mutualisation, comme les fonctions cognitives, semblerait réservée davantage aux bonnes classes et/ou aux phases de résolution plus faciles (rôle de la mutualisation, Chappet-Pariès, 2007). De plus, quand on compare un même enseignant dans plusieurs classes, les choix des buts manifestés dans les échanges sont très proches.

a) Méthodologie actuelle (Chappet-Pariès, Robert, Rogalski 2009, Chappet-Pariès 2010)

Dans la suite de notre travail, nous avons cherché à la fois à simplifier, mais aussi à préciser cette analyse du discours de l'enseignant de mathématiques sur des séances d'exercices. En effet la méthodologie est lourde à appliquer et ne renseigne peut-être pas suffisamment sur les influences possibles des choix de mots des enseignants et du type d'information donné sur les activités des élèves. Cela coïncide avec le développement sur les analyses des pratiques des enseignants pilotées par le devenir des activités des élèves en classe. Nous avons laissé de côté la notion générale de but illocutoire pour n'entretenir que les questions posées aux élèves (retrouvant ainsi d'une certaine manière le but directif) et nous avons ajouté une information sur la nature de l'intervention (mathématique, méta ou autre). On peut regretter que le but « commissif/directif » introduit pour rendre compte du « on » ou du « nous » qui associent souvent élèves et professeur dans le discours de l'enseignant n'ait pas été repris. Il est vrai que les analyses précédentes, n'en avaient pas permis une interprétation suffisamment riche. Pourrait-il être une manière d'afficher la volonté de l'enseignant d'indiquer aux élèves son aide ou être un indice qu'il se place dans la ZPD des élèves ? C'est peut-être une piste à suivre.

Nous avons remplacé les termes de fonctions non cognitives (cf. tableau 1), par ceux de **fonctions d' enrôlement** qui sont plus explicites et reprennent les mots utilisés par Bruner. Nous avons ainsi mieux perçu l'importance de ces fonctions et leur variation selon les différentes classes.

Nous avons opté pour le terme **d'actions langagières** comme contribuant à développer les activités des élèves, terme qui suggère une dépendance du langage et du contexte et qui est une réponse à cette question de la relativité qui nous fait attribuer à une phrase une action langagière différente selon le moment où elle est prononcée. Une phrase pouvant aussi relever de plusieurs actions langagières.

Ces actions langagières reprennent certaines fonctions du discours ou les précisent (cf. tableau 1). Comment le professeur enrôle-t-il les élèves et les maintient-il dans l'activité ? Comment

intervient-il, aux différents moments du travail, sur les adaptations attendues des connaissances détectées par les analyses a priori, sur les difficultés rencontrées par les élèves ? Comment tient-il compte de ce qu'ont fait les élèves, notamment pendant la correction ? Les méthodes, les choix éventuels sont-ils repris ? Les étapes sont-elles « recollées » ? Enfin de quoi sont faits les bilans et les liens avec le cours proprement dit ?

Une **action langagière** est donc associée dans nos travaux actuels à un quadruplet renseignant l'épisode, une partie de la syntaxe (question ou non), ce sur quoi porte le discours (mathématique/ méta / autre), la(es) fonction(s) du discours. L'**épisode** est détecté par l'analyse *a priori* des tâches travaillées par les élèves.

Nous repérons les **questions** posées par l'enseignant (cf. but directif : c'est ce qui subsiste des buts illocutoires). Elles contribuent à l'enrôlement des élèves et à préciser leur prise en compte par l'enseignant.

Le **méta** concerne les indications de méthode, certains éléments de structuration dans le temps de la classe, dans la mémoire ou replace le travail dans un ensemble plus vaste. Il peut nous aider, dans certains cas à reconstituer le fil d'une séance ou d'une séquence.

Voici les nouvelles fonctions du discours que nous avons retenues :

Les fonctions d'enrôlement

- Engagement
- Répétition à l'identique
- Mobilisation de l'attention
- Encouragement
- Mutualisation de la réponse d'élèves

Les autres fonctions :

On les a détectées en mettant en relation les adaptations que les élèves ont à faire de leurs connaissances, l'état de leur travail et les interventions de l'enseignant.

- Information : présentation ou demande d'une information brute concernant le savoir en jeu, par exemple la demande ou la donnée de résultats, de théorèmes... « *EFG est un triangle tel que, alors je vous donne ... $EF = 5$, $EG = 7$, $FG = 9$ et l'unité est le centimètre* ».
- Identification : l'enseignant prend en compte les productions ou les questionnements des élèves « *Alors pour répondre à Raphaël tout à l'heure qui me disait ben est-ce qu'on écrit les hypothèses et est-ce qu'on écrit la conclusion* »

- Evaluation (stricte, sans commentaires ni validation explicitée)
- Structuration
- Orientation : l'enseignant sans tout dire oriente le travail des élèves « *On ne connaît pas sa vraie place sur le segment EG, heu autrement dit c'est un point ?* »
- Justification
- Bilan

b) Les analyses

Par épisode, nous utilisons l'étiquetage ainsi obtenu pour caractériser les fonctions mises en jeu dans chaque interaction langagière, puis dans leur ensemble. Nous en déduisons en particulier des éléments sur la prise en compte des élèves – questions, échanges et indications diverses (information, évaluation, orientation), appui sur le travail des élèves (identification). Cela autorise une première approche sur l'extrait de séance analysé, en termes de régularités pour l'enseignant notamment, pouvant donner lieu à d'autres comparaisons.

c) Des résultats

Il y a confirmation des résultats précédents. Le discours de l'enseignant s'adapte à la classe et au type de tâche : on trouve notamment davantage d'entrôlement hors mutualisation dans les classes « faibles ». La mutualisation semble réservée aux classes plus fortes ou aux phases de résolution plus faciles. Pour un même enseignant, on constate de grandes analogies quant aux actions langagières, dans l'utilisation des fonctions du discours, de leurs associations (mutualisation/évaluation/orientation- reprise des réponses des élèves, validation, modifications adaptées à la classe et aux élèves) des questions. Ainsi la stabilité des choix langagiers, pour un même enseignant, dans deux classes différentes sur des tâches proches est confirmée et plusieurs analyses différentes (tâches et déroulements, marqueurs utilisés) convergent vers ce même résultat.

Cela débouche sur un questionnement plus général en cours sur les différenciations entre élèves d'une même classe, prolongeant les analyses de Chappet-Pariès (2007).

d) Autres pistes

Quelques tentatives ont été faites d'études des marqueurs et des formats (Chappet-Pariès, Robert, Rogalski 2008) : une remarquable stabilité est encore une fois constatée.

III Reprise des résultats

Les divers résultats signalés ci-dessus indiquent des diversités inter-personnelles et certaines invariances intra-personnelles. On peut pointer un certain nombre de diversités et de régularités particulièrement intéressantes (*a posteriori*) car liées à la nature des activités que développent –ou non- les élèves.

- Les interventions sur les mathématiques et sur les activités des élèves sont éventuellement assez disjointes : on note une absence de liens, peu de changements (de points de vue), peu d'explicitations sur les mélanges de cadres à faire... Comme si le lien précis tâches /activités/connaissances ne s'explicitait pas toujours. Le discours fait donc plus ou moins part à l'explicitation – voire à la programmation de l'action. On a aussi noté que certaines actions mathématiques étaient comme transparentes pour les enseignants, trop naturalisées pour qu'ils les remarquent, alors qu'elles pourraient rester source de difficulté pour les élèves.
- On note la présence ou non de structuration explicite, d'organisation des contenus, relayée plus globalement par une cohérence plus ou moins explicite du projet – organisation cours/exercices, organisation du cours, bilans exercices/cours...
- De même le repérage et l'appui explicite sur le travail des élèves est plus ou moins évident, prenant des formes diverses, et occasionnant des aides très différentes.

Ainsi ce serait le *dire du professeur qui pourrait être complété soit pour expliquer (aider) le faire, soit pour faciliter le penser à partir du faire – par proximité ou autrement*. La notion de proximité n'est pas susceptible d'une définition précise (Vygotski ne le fait pas d'ailleurs) – c'est plutôt lié à l'affirmation de la nécessité d'un lien, sans doute variable selon les individus et les objets en jeu, entre les connaissances nouvelles et les anciennes pour installer un apprentissage.

IV Pistes de Recherches – Conclusion

1) Le dire des élèves (activités discursives)

On sait que le langage rentre dans la constitution de leur pensée – la communication faisant partie du processus.

Il y a tout un pan de recherches qui pourrait concerner les dires d'élèves entre eux, quand il y en a (cf. Boero et al. 1997).

Le travail de Robotti (2008) en est un exemple. L'ensemble des derniers travaux de Sfard en est un autre (annexe).

2) la spécificité du langage mathématique

On l'a déjà évoquée, il y a encore beaucoup de travail à réaliser à ce sujet dans la mesure où on admet que les mots et plus généralement les signes et symboles sont producteurs de sens.

3) De la maternelle à l'université, langage et ZPD (langage comme vecteur de proximités)

A priori, il est évident que ce ne sont pas les mêmes analyses qui doivent être faites à tous les niveaux de la scolarité. Cependant il nous semble que, à tous les niveaux mais de manière différente, le langage et son utilisation dans les discours ont un rôle spécifique à jouer dans la construction des connaissances, mais aussi dans l'acquisition d'une certaine disponibilité, voire le transfert d'une compétence d'une discipline à l'autre (qui ne vient pas « toute seule »). Les mots aident à penser, à disposer d'eux-mêmes, à leur donner du sens a posteriori (pseudo-concepts), à les dépasser. Le fait de pouvoir utiliser un mot mathématique, que ce soit un élément de vocabulaire descriptif ou un concept amène à préciser son usage, à produire davantage de sens encore. Certes la disponibilité d'une notion est reliée au scénario, à la variété et à la cohérence des tâches en relation avec le cours, mais peut-être aussi au fait de disposer des mots, au sein d'une prise de conscience spécifique qui peut s'accroître par l'usage (Radford & Roth 2011) ?

Ainsi le discours de l'enseignant a un rôle tout à fait particulier à jouer dans l'association des mots, des actions mathématiques et des idées. Une des formes peut en être la proximité à exploiter entre ces actions et idées des élèves et les mots qui sont introduits ou même (in)validés. Au chercheur peut revenir, à travers les analyses, la traque de ces proximités ou du contraire. Plusieurs occurrences sont apparues dans ce qui précède, directement ou non ainsi associées à des proximités-**en-acte** chez beaucoup d'enseignants :

- Explicitation de la relation (ou association avec) avec du connu, déjà fait, déjà-rencontré,

- Jeu de questions : posées ou acceptées – mais combien d’élèves concernés ?
- Répétition, reprise partielle, reprise complétée d’une réponse élève ou de ce qui a été dit
- Travail explicite à partir du repérage du travail des élèves (en aval de l’action élèves)
- Proximités à travers les buts illocutoires ou les actions langagières

Plusieurs recherches abordent ces questions : la reformulation (cf. Marin, 2011), construire des significations (cf. pour le premier degré : Gobert 2010, Mathé 2012 ; Zaragosa 2000)

Des questions de recherche précises peuvent être formulées à ce stade :

- 1) *Dans quelle mesure y-a-t-il, aux yeux des chercheurs, des alternatives significatives dans le maniement du langage avec les élèves (cf. débutants, novices/experts), notamment en termes de proximités ou non-proximités ?*

Cela permet de **traquer les naturalisations** (travail du chercheur facilité par une analyse de tâches a priori) : changements de points de vue ou de cadres non repérés ou non explicités, d’angles droits à droites perpendiculaires, d’inconnu à variable, de milieu à symétrique, ... , cadre algébrique subreptice...

On peut remarquer que les changements de points de vue correspondent à des manières différentes **de dire la même chose mathématique**, à rapprocher peut-être de la fonction étiquetage du langage (Robotti), étiquetage qui peut suggérer, par association de mots, des stratégies ?

- 2) *Dans quelle mesure une proximité due au discours et supposée par les enseignants est-elle partagée par les élèves, leur permet de construire quelque chose ?*

Y-a-t-il des conditions pour qu’elle atteigne son but – quelle place par rapport à l’action, quoi dire et quoi laisser aux élèves et à quel moment ? Sur quoi peut porter la proximité, le faire, le dire, le penser, avec quelles combinaisons ?

L’étude des corrections peut entrer dans ce type de questionnement (Wilbois, 2013), sur la prise en compte par les élèves des commentaires écrits de l’enseignant sur la copie et son efficacité

On peut citer à ce sujet les différences d’interprétation déjà évoquées ci-dessus entre certains chercheurs qui identifient des effets Jourdain ou Topaze dans le discours d’un enseignant, niant toute efficacité à cette proximité qui ne serait que le fait d’une interprétation abusive de ce dernier et ceux qui attribuent aux mêmes interventions des valeurs d’aides constructives ou procédurales.

- 3) *Encore et toujours : entre les élèves et la classe comment se jouent les proximités ? – comment étudier les phases collectives, en faisant intervenir les différences entre élèves ?*

Là encore, l'étude des corrections – écrites, orales – nous semble très intéressante à ce sujet.

4) Comment aborder la question du discours enseignant et de son langage en formation?

Un certain nombre d'analyses préviennent les enseignants des effets différenciateurs de leurs interventions, mais peu s'attachent spécifiquement au langage. Le travail de Million-Fauré fait exception (cf. ce cahier, plus loin), mais il vise des populations d'élèves non-francophones, particulières. Citons un autre travail mettant en jeu des perspectives plus générales pour la formation (Saillot2012). Il s'agit d'une intervention dans un *Colloque du CREN*, intitulée : *Analyse descriptive des ressources langagières des enseignants : quelles perspectives pour la formation ?*

L'auteur résume ainsi son travail : *cette communication présente une recherche descriptive et compréhensive qui vise la caractérisation des ressources professionnelles, essentiellement langagières, des professeurs des écoles en situation d'aide personnalisée à des élèves en difficulté. Menée dans la perspective de la didactique professionnelle (Pastré, Mayen, Vergnaud, 2006) de l'analyse de l'activité d'enseignement basée sur les apports de la pragmatique (Moeschler&Reboul, 1998) et plus spécifiquement sur le traitement des actes de langage (Kerbrat-Orecchioni, 2008) à visée didactique ou pédagogique des professeurs des écoles. L'objectif de cette communication est d'avancer les perspectives de formation pour les enseignants offertes par cette approche empirique d'analyse descriptive des ressources langagières.*

Plus précisément, deux hypothèses fixent les axes de la recherche. La première repose sur les effets illocutoires de chaque acte de langage produit au cours des échanges didactiques et pédagogiques. La seconde repose sur la notion de ressources professionnelles, essentiellement langagières, mobilisées et développées par les enseignants pour atteindre les buts fixés

L'auteur de cet article a filmé les séances filmées de cinq professeurs des écoles de cycle trois, dans trois écoles différentes, à quatre reprises, toutes suivies d'un entretien d'explicitation avec l'enseignant.

Il s'agit pour lui d'approcher dans les séances les dimensions illocutoires des actes de langage produits par les enseignants.

Cette étude a permis la réalisation d'une matrice des principales fonctions didactico-pédagogiques qui classe les différents actes de langage des enseignants et donne la description des principales ressources langagières utilisées afin d'essayer d'atteindre les buts didactiques et pédagogiques qu'ils se fixent dans le feu de l'action, plus ou moins consciemment.

Elle a aussi contribué à une prise de recul des enseignants sur leur pratique grâce aux dimensions réflexives développées au cours des entretiens d'explicitation ou d'auto-confrontation (réflexion sur les buts et les effets de leurs interventions- interrogation sur leurs gestes professionnels en termes de ressources langagières mobilisées ou envisageables)

Enfin, au niveau de la formation, initiale ou continue, la présentation aux enseignants de cette classification des fonctions didactico-pédagogiques et des ressources langagières pourrait les aider à se représenter un champ des possibles.

Nous joignons le tableau récapitulatif de ce que l'auteur utilise.

ANNEXES : Fonctions et ressources didactico-pédagogiques

Registre social-affectif dominant (RSA)	
<u>Mettre en perspective la séance (RSA 1) :</u> Mettre en relation avec les séances précédentes (RSA 1-1) Construire un projet d'apprentissage (RSA 1-2) S'impliquer dans l'activité (RSA 1-3) Présenter la séance (RSA 1-4) Mettre en relation avec le travail à venir (RSA 1-5)	<u>Organiser et réguler (RSA 4) :</u> Établir une relation de confiance maître-élève (RSA 4-1) Instaurer un climat de travail serein (RSA 4-2) Contrôler le rythme de l'activité (RSA 4-3) Endosser la posture du praticien réflexif (RSA 4-4) Disposer les élèves en vue d'optimiser la tutelle (RSA 4-5) Gérer les contingences matérielles (RSA 4-6)
<u>Renforcer le sentiment de compétence (RSA 2) :</u> Encourager / Valoriser (RSA 2-1) Affirmer le postulat d'éducabilité (RSA 2-2) Stimuler l'activité visible de l'élève (RSA 2-3)	<u>Équilibrer la participation langagière des élèves (RSA 5) :</u> Répartir la parole (RSA 5-1)
<u>Construire un statut positif de l'erreur (RSA 3) :</u> Présenter les erreurs comme source de progrès (RSA 3-1) Dédramatiser les erreurs (RSA 3-2)	
Registre cognitif dominant (RC)	
<u>Enrôler dans la tâche (dévolution) (RC 1) :</u> Présenter la tâche à effectuer (RC 1-1) S'appuyer sur une routine pédagogique (RC 1-2) Favoriser l'entrée dans la tâche par les réussites (RC 1-3) Réticence didactique (RC 1-4) Relancer dans la tâche (RC 1-5)	<u>Faire expliciter les procédures (RC 8) :</u> Questionner la raison du choix (RC 8-1) Soumettre à l'élève une hypothèse sur ses procédures (RC 8-2) Faire décrire la difficulté (RC 8-3) Faire décrire une procédure (RC 8-4)
<u>Faciliter la compréhension des consignes (RC 2) :</u> Définir les mots ou expressions difficiles (RC 2-1) Faire identifier les informations clés (RC 2-2) Faire reformuler la consigne (RC 2-3) Reformuler la consigne (RC 2-4) Comparer à une situation connue (RC 2-5)	<u>Formuler des savoirs en construction (RC 9) :</u> Faire le point sur la construction des savoirs (RC 9-1) Formuler des savoirs contextualisés (RC 9-2)

Conclusion

Il manque certainement des éléments d'évaluation sur l'influence des discours sur les activités mathématiques des élèves, pour apprécier les effets possibles, la palette ouverte, d'autant qu'on a affaire à des phénomènes complexes, imbriquant des facteurs difficilement dissociables, avec de grandes diversités.

Cela dit, tout ce qui précède et les évolutions que nous avons dégagées amènent à penser que justement, il n'est plus possible de ne faire que des études isolées, dissociant le langagier du reste, même si la prise en compte de la complexité est un frein à la fois aux études qualitatives et aux évaluations (cf. Goigoux, annexe 3).

Cela étant jusqu'où aller dans les (non)-découpages, ou dans l'utilisation des proximités comme indicateurs de levier d'apprentissage ?

Tout se passe comme si, en réfléchissant aux divers discours analysés dans ce qui précède, **plusieurs champs de proximité** pouvaient être investis (empiriquement) – proximité affective (encouragements), notamment pour des élèves en difficulté, comme si c'était en amont des mathématiques qu'il fallait établir d'abord un lien (confiance, posture à adopter), proximités pour l'action (aides procédurales ou « instrumentales » dans le cas des TICE), analyses « symétriques » de la proximité où élèves et enseignant travaillent conjointement à se rapprocher dans une ZPD – cf. Radford et Roth (2011), pour contribuer à établir une proximité, notamment visuelle entre symboles (ostensifs muets) et action (ostensifs bavards), avec de nouvelles données relatives à l'utilisation des TICE et d'internet, proximités pour la réflexion enfin, notamment par la validation et les aides constructives pouvant accompagner le travail des élèves et les évaluations.

C'est peut-être une meilleure connaissance de la palette des possibles, notamment discursive, adaptées aux différents moments où la nécessité peut s'en faire sentir et aux différents élèves, qui contribuerait à développer les pratiques enseignantes (et envisager les formations) pour affronter les divers problèmes.

Références bibliographiques

Les articles donnant lieu à résumé en annexes 1 et 2 sont marqués d'un *.

Les cahiers Didirem, les cahiers de didactique et les documents de formation sont des publications internes de l'IREM de Paris 7 (Denis Diderot) et sont consultables en ligne sur le site de l'IREM ainsi que les cahiers du LDAR qui leur ont succédé.

Adda J. (1977) Analyse d'une expérience d'enseignement, Ed. APMEP

Boero P., Garuti R., Pedemonte B., Robotti E. (1997): Approaching theoretical knowledge through voices and echoes: a Vygotskian perspective Proceedings of the 21th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education P.M.E-21, Erkki Pehkonen (ed.), University of Helsinki, Lahti, Finland; vol. 2, 81-88.

Bridoux S. (2012). Notions de topologie: élaboration de leviers didactiques à intégrer dans un enseignement pour favoriser les apprentissages des étudiants. Actes du Colloque EMF 2012, Enseignement des mathématiques et contrat social, Enjeux et défis pour le 21ème siècle.

Bronckart J.P. (1985) *Le fonctionnement des discours*. Paris : Delachaux et Niestlé.

Bronckart J.P. (2007) L'activité langagière, la langue et le signe, comme organisateurs du développement humain. *Langage et société* 121-122.

- Bronckart J.P. (2007) De l'activité collective à l'action et à la pensée individuelles pour une psychologie fermement vygotskienne. In M. Merri (Ed.), *Activité humaine et conceptualisation: questions à Gérard Vergnaud*, pp. 103-123. Toulouse, Presses Universitaires du Mirail.
- Bronckart J.P. (2008) Une science du langage pour une science de l'humain in Durand (ed) *Congrès mondial de linguistique française*.
- Bronckart, J.P. (2009) "Le langage au cœur du fonctionnement humain. Un essai d'intégration des apports de Voloshinov, Vygotski et Saussure" - In : *Estudos linguisticos / Linguistic studies*, (Lisbonne), 3, juillet, pp. 31-62.
- Bronckart, J.P. Activité langagière, genres de textes et types de discours, enjeux acquisitionnels (ppt sur internet)
- *Bronckart J.P. (2009) Apprentissage et développement dans la perspective de l'interactionnisme socio-discursif (*conférence de l'AIESEP, Besançon*) sur internet
- Bronckart J.P. (2011) Le rôle de la maîtrise du langage dans le développement psychologique humain, *Nonada*, 17.
- Bronckart J.P. (2011) Un demi-siècle de didactique de l'écrit dans les pays francophones : bilan et perspectives. *Scripta*, 15, 28, 13-36.
- Bruner J. (1983) *Le développement de l'enfant : savoir-faire, savoir dire*. Paris PUF
- *Bulea E., Bronckart, J.P. (2010) Les conditions d'exploitation de l'analyse des pratiques pour la formation des enseignants. *Lingvarv marena* - vol. 1 - n.º 1 43 – 60.
- Bulea E. (2011) Langage comme activité, langage dans l'activité, langage sur l'activité : éléments pour une discussion critique. *Scripta*, 15 28, 58-81.
- *Chappet-Pariès M. (2004) Comparaison de pratiques d'enseignants de mathématiques, Relations entre discours des professeurs et activités potentielles des élèves, *Recherches en didactique des mathématiques* 24 2/3.
- *Chappet-Pariès M. (2007) Enseigner les mathématiques en ZEP et ailleurs, analyses de pratiques d'enseignants expérimentés au collège, *Cahier de didirem* 55.
- Chappet-Pariès M. (2010) Circulation du savoir en classe de mathématiques : quelles variabilités dans les pratiques des enseignants ? Études de cas. *Annales de didactique et de sciences cognitives* nº15.
- *Chappet-Pariès M., Robert A., Rogalski J (2008) Analyses de séances en classe et stabilité des pratiques d'enseignants de mathématiques expérimentés du second degré. *Educational Studies Mathematics*, 68, 55-80.
- *Chappet-Pariès M, Robert A, Rogalski J. (2008) Que font des élèves de troisième et de quatrième avec un même enseignant dans une séance de géométrie ? in Vandebrouck F. : la classe de mathématiques. Toulouse : Octarès.
- *Chappet-Pariès M., Robert A., Rogalski J. (2009) : Comment l'enseignant de mathématiques, en classe, met ses élèves sur le chemin des connaissances : un point de vue méthodologique en didactique des mathématiques *Travail et apprentissages*, nº3.
- * Chappet-Pariès M, Robert A, Rogalski J. (2013) Stability of practices: what 8-th and 9-th grade students do with the same teacher during a geometry class period ?) in Vandebrouck F. (2013) *Mathematics Classroom (Sense Publishers)*.
- * Chaussecourte P. (1999) Mémoire de DEA de didactique des mathématiques, *Cahier de didirem* 32.
- Chiocca C. (1991) Analyse du discours des enseignants, *Cahier de didirem* 10.
- *Chiocca C., Josse E., Robert A. (1992) : Analyse du discours des enseignants, *Cahier de didirem* 16.
- Cobb P. (2002) Reasoning with tools and inscriptions, *Journal of learning sciences*, 11, 187-216

Gilly M., Roux J.P., Trognon A. (1999) *Apprendre dans l'interaction*. Nancy : Presses universitaires de Nancy.

*Gobert S. (2010) Construire des significations, dans et par le langage, in Broner et al. Actes de l'École d'été de didactique des mathématiques (Carcassonne) 16. Grenoble : la pensée sauvage.

Gueudet, G., Trouche L. (2010) *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques*. Rennes : Presses universitaires de Rennes

*Hache C. (2001) L'univers mathématique proposé par le professeur en classe. Observation, description, organisation, *Recherches en didactique des mathématiques* 21/1.

. *Hache C., Robert A. (1997) : Un essai d'analyse de pratiques effectives en classe de seconde, ou comment un enseignant fait « fréquenter » les mathématiques à ses élèves pendant la classe ? *Recherches en didactique des mathématiques* 17/3.

*Jaubert M., Rebières M., Bernié J.P. (2003) L'hypothèse « communauté discursive » : d'où vient-elle ? Où va-t-elle ? *Les cahiers Théodile*, 4, 51-80.

*Josse E., Robert A. (1993) Introduction de l'homothétie en seconde, analyse de deux discours de professeurs. *Recherches en didactique des mathématiques* 13/2.

Kerbrat-Orecchioni C. (Ed) (2008) *Les actes de langage dans le discours : théorie et fonctionnement*. Paris : Armand-Colin.

Laborde C. (1981) *Langue naturelle et écriture symbolique, deux codes en interaction dans l'enseignement mathématique* Thèse d'état, Grenoble.

Lacombe D. (2011) Grandeur et misère de l'implication, *conférence à l'IREM* (sur le site de l'IREM Paris Diderot).

Lagrange JB (Ed) (2013) *Les technologies numériques pour l'enseignement, usages, dispositifs, genèses*. Toulouse : Octares.

*Marin B. (2011) La reformulation en classe : un discours équivoque, in Rochex et Crinon, *La construction des inégalités scolaires*, PUR.

Mathé A.C. (2006) *Jeux et enjeux de langage dans la construction d'un vocabulaire de géométrie spécifique et partagé en cycle 3 analyse de la portée des jeux de langage dans un atelier de géométrie en cycle 3 et modélisation des gestes de l'enseignant en situation*, Thèse de doctorat.

*Mathé A.C. (2012) Jeux et enjeux du langage dans la construction de références partagées en géométrie. *Recherches en didactique des mathématiques* 32/2.

Maurel M., Sackur C. (2010) *Faire l'expérience des mathématiques*. Lyon : Aléas.

Moeschler J., Reboul, A. (1998) *La Pragmatique aujourd'hui ; Une nouvelle science de la communication*, Paris : le Seuil.

Pastré P., Mayen, P. Vergnaud G. (2006) La didactique professionnelle, Note de synthèse, *Revue française de pédagogie*, 154, 145-198

Philipot, Niclot (2011) Analyser le travail des professeurs de collège à partir des « traces écrites » réalisées en classe, *Colloque du CEREPE*

Radford L., Roth (2011) *A cultural-historical perspective on mathematics teaching and learning*, Sense publishers.

*Robert A., Tenaud I. (1989) Une expérience en géométrie en TS, *Recherches en didactique des mathématiques* 9/1 31-70.

Robotti E. (2008) Les rôles du langage dans la recherche d'une démonstration en géométrie plane, *Recherches en didactique des mathématiques* 28/2 183-218.

*Robert A. (2007) Stabilité des pratiques des enseignants de mathématiques (second degré) : une hypothèse, des inférences en formation *Recherches en didactique des mathématiques* 27/3

*Robert A., Robinet J. (1996) Introduire le méta dans les recherches en didactique des math *Recherches en didactique des mathématiques* 16/2

Robert A., Rogalski J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques. Une double approche. *Revue Canadienne de l'Enseignement des Sciences et des Mathématiques*, 2(4), 505-528.

Robert A., Rogalski J. (2005). A cross-analysis of the mathematics teacher's activity. An example in a French 10th-grade class. *Educational studies in mathematics*, 59, 269-298.

Robert A., Rogalski J., Samurçay R. (1987) Enseigner des méthodes, *Cahier de didactique* n°38.

Robert A., Vandebrouck F. (2003) : Des utilisations du tableau par des professeurs de mathématiques en classe de seconde, *Recherches en didactique des mathématiques* 23/3.

*Roditi E. (1997) le tableau noir : un outil pour la classe de mathématiques, *Cahier didirem* 30.

Sackur C., Drouhard JP, Maurel M., Pecal (1997) Comment recueillir des connaissances cachées en algèbre et qu'en faire ? Connaissances locales, dénotation, Entretiens Faire Faux. *Repères IREM* 28.

*Saillot E. (2012) Analyse descriptive des ressources langagières des enseignants : quelles perspectives pour la formation ? *Colloque du CREN*

Sayac N. (1998) DEA de didactique des mathématiques, non publié

Sensevy G. (2011) *Le sens du savoir*. Bruxelles : de Boeck.

Sfard A. (2007) When the rules of discourse change but nobody tells you : making sense of mathematics learning from a commognitive stand point. *The journal of the learning sciences*, 16(4) 567-615.

Sfard A. (2013) Actes de la 17^{ème} école d'été à paraître.

Specogna A. (2010) Travail enseignant, pratiques d'élèves, quels apprentissages in les interactions à l'école où en sommes-nous ? sous la direction de Auriac-Slusarczyk E. *Psychologie de l'interaction* n° 27-28.

Vandebrouck F. (2002) Utilisation du tableau et gestion de la classe de mathématiques : à la recherche d'invariants des pratiques enseignantes. *Cahier didirem* 42.

Vergnaud G. (1991) Langage et pensée dans l'apprentissage des mathématiques, *Revue Française de Pédagogie* 96 79-86.

Vernant D. (1997) *Du discours à l'action*. Paris : Presses Universitaires de France.

Vygotski L. (1934-1978) *Pensée et langage*. Paris : La dispute.

Wilbois S. (2013) Mémoire de master 2 : la correction des écrits (en ZEP)

Zaragoza S. (2000) *Interactions verbales dans le processus de dévolution* Thèse de doctorat, Université Paris 5

Annexe bibliographique (ordre chronologique)

Robert A., Tenaud I. (1989) Une expérience en géométrie en TS, *Recherches en didactique des mathématiques* 9/1.

Dans cet article, nous décrivons une expérience d'enseignement de la géométrie en terminale C basée sur l'hypothèse suivante : l'interaction dialectique d'un enseignement de méthode et d'un travail régulier en petits groupes sur des exercices bien choisis est bénéfique pour l'apprentissage.

Après avoir précisé cette hypothèse, nous relatons les conditions de l'expérience et nous décrivons en particulier l'enseignement méthodologique qui est donné. Puis nous indiquons les premiers résultats tirés des analyses que nous avons faites des enregistrements de quelques séances de travail en petits groupes. Il s'avère qu'on peut constater, dans les petits groupes suivis, une évolution, dans le sens d'une utilisation de plus en plus marquée du méta 3 qui semble s'accompagner d'une plus grande efficacité. On peut attribuer en partie ces évolutions à l'apport combiné du travail en petits groupes et de l'enseignement de méthodes, avec leurs conséquences supposées sur la qualité du travail des élèves.

Chiocca C., Josse E., Robert A. (1992) Analyse du discours des enseignants, Cahier de didirem 16.

Ce travail permet de préciser des régularités dans le discours des enseignants de mathématiques, d'en repérer diverses fonctions et de mettre en évidence des différences. Les auteurs essayent d'élaborer des hypothèses sur les représentations des enseignants observés. Ils s'interrogent sur les liens éventuels entre discours, types de classes et niveau des élèves. Ils ont mis au point une méthode d'analyse dans le but de définir les effets sur les apprentissages des différentes gestions possibles des discours des enseignants de mathématiques. Le repérage des grandes fonctions du discours non mathématique (communication, étiquetage, réflexion) et l'étiquetage des formes langagières sur l'apprentissage sur les mathématiques ont permis de préciser certaines régularités. C'est une recomposition de ces indications qui peut permettre d'élaborer des hypothèses sur les représentations des enseignants.

Josse E., Robert A. (1993) Introduction de l'homothétie en seconde, analyse de deux discours de professeurs, Recherches en didactique des mathématiques 13/2.

Cet article présente la mise en œuvre de la méthode d'analyse de discours du professeur de mathématiques en classe, telle qu'elle est présentée dans le résumé ci-dessus, ici sur les transcriptions des cours de deux professeurs de lycée qui avaient préparé en commun la séance introductive au travail sur l'homothétie, en seconde, avec le programme de 1981.

Il s'agit ici de comparer les discours de ces deux enseignants : malgré la préparation commune, on assiste à des différences de déroulement, mais aussi et surtout à des différences

dans la manière de donner des repères aux élèves, en faisant appel à des références différentes, en développant plus ou moins ce qu'ils ont dit (explicitations) et en s'éloignant plus ou moins (généralisations). C'est cette variabilité, bien réelle, qui pourrait devenir une marge de manœuvre pour les enseignants, si son existence était prise en compte.

Robert A., Robinet J. (1996) Introduire le méta dans les recherches en didactique des math, *Recherches en didactique des mathématiques* 16/2.

Cet article correspond à une conférence donnée à la septième école d'été de « Didactique des Mathématiques » (St. Sauves d'Auvergne, France, Août 1993). Le texte est en trois parties. Dans la première partie, consacrée à un survol bibliographique, les auteurs passent en revue les utilisations de la notion dans d'autres champs scientifiques. La deuxième partie leur permet de préciser leur propre utilisation du terme et l'intérêt éventuel d'introduire en didactique ce niveau d'analyse, à la fois comme moyen de diagnostic et comme moyen d'intervention dans l'enseignement. Dans la troisième partie, les premiers travaux s'appuyant sur les hypothèses précédentes sont résumés. Ainsi met-on en évidence assez généralement chez les enseignants qui font appel à des commentaires méta, un statut imprécis, variable, surtout oral, et on dégage un paradoxe apparent : en dire plus, et plus éloigné des strictes mathématiques visées, pour faire réussir les élèves plus faibles... En conclusion de nombreuses questions ouvertes qui se posent, notamment en termes de choix du « méta » à utiliser en classe, selon les notions et les élèves, sont évoquées.

Roditi E. (1997) Le tableau noir : un outil pour la classe de mathématiques, *Cahier de didirem*30.

L'auteur met en évidence des archétypes qui structurent son activité au tableau : par exemple l'oral et l'écrit sont identiques et simultanés, ou bien les deux messages ont seulement une partie commune ou bien ils sont disjoints et complémentaires. Vraisemblablement ces archétypes sont partagés par de nombreux enseignants.

Chaussecourte P., dans son DEA de didactique des mathématiques (1997) – *cahier de didirem*32, (1999) - compare les discours d'un même enseignant présentant la même séance dans trois classes de sixième. Il examine l'importance du paramètre classe au travers des variations dues à la gestion du temps par rapport au déroulement des séances et les variations d'une phase particulière commune aux trois. Le travail sur cette phase est conduit à partir de l'étude du discours sur la consigne et le contenu mathématique sous des angles quantitatifs et

qualitatifs avec notamment l'utilisation d'un logiciel de lexicométrie. L'auteur met en relief comme première différence la gestion du temps par le professeur selon les classes. La volonté et la manière de solliciter les élèves s'efforcent d'être identiques mais tout se passe comme si le professeur réagissait en fonction de la représentation qu'il se fait de sa classe. Dans la classe « forte », il décontextualise y compris en s'appuyant sur les élèves qu'il sollicite même s'il leur laisse peu de temps pour passer du particulier au général alors que dans la classe la plus « faible », le contenu mathématique reste longtemps contextualisé et les élèves sont très peu associés aux bilans. Chaussecourte conclut néanmoins en disant que c'est peut-être dans la classe la plus faible qu'on fait le plus de mathématiques dans le sens où le professeur laisse plus de temps aux élèves pour que s'installe une dialectique contextualisation/décontextualisation.

Sayac N., dans son DEA de didactique des mathématiques (1998) (non publié) a analysé les pratiques d'une même enseignante, introduisant la même notion à des élèves de deux classes, l'une « faible », l'autre « forte », dans deux cadres différents, géométrique et numérique. Elle dégage une pratique propre à l'enseignante dans le déroulement des séances, marquée par un souci de ne pas différencier son enseignement pour permettre une évaluation commune aux deux classes. En particulier, elle met en évidence que la dynamique mathématiques contextualisées/ mathématiques décontextualisées était gérée de la même manière dans les deux classes pour une séance portant sur le même sujet. Dans la classe la plus faible, le professeur semble davantage intervenir pour régler des problèmes de discipline. Les élèves de la « bonne » classe sont sollicités plus que les autres pour répondre à des questions. Le cours écrit sur le cahier est, dans cette dernière classe, un peu différent des institutionnalisations locales alors qu'il en était proche pour la classe la plus faible. Le professeur a recours à des analogies et des métaphores de la vie courante dans la classe la plus faible.

Hache C., Robert A. (1997) Un essai d'analyse de pratiques effectives en classe de seconde, ou comment un enseignant fait « fréquenter » les mathématiques à ses élèves pendant la classe ? *Recherches en didactique des mathématiques* 17/3.

Dans cet article nous justifions d'abord notre parti pris d'analyser les pratiques des enseignants en classe de seconde: c'est en effet une perspective « mixte » que nous avons adoptée pour étudier les rapports enseignement/apprentissage, à savoir la prise en compte complémentaire

des situations proposées aux élèves et de la manière dont les enseignants les animent localement en classe par leur discours. Notre méthodologie s'en déduit, qui consiste à analyser ce discours pour chaque épisode repéré dans le déroulement de la séance. Les épisodes sont caractérisés par la place qu'ils occupent dans les activités des élèves (point de vue des situations), les discours sont analysés selon trois dimensions, leur fonction (qui permet de rendre compte de la manière dont les mathématiques sont présentées aux élèves, sous forme d'information ou avec plus de commentaires), leur objet (qui précise le degré de décontextualisation des mathématiques concernées), et leur teneur (qui mesure la distance du discours tenu au discours strictement mathématique). Des analyses locales de quatre séances sur l'introduction des vecteurs en seconde que nous présentons, nous pouvons inférer quelques hypothèses: la prédominance de l'information (que nous mettons en rapport avec les contenus précis en cause), la nature prédictive de l'idée que l'enseignant se fait de la tâche concernée dans un épisode (une tâche estimée facile semble autoriser une certaine prise de distance, par exemple dans la teneur du discours utilisé). Cela amène à renforcer l'hypothèse déjà rencontrée dans la littérature de l'importance des prévisions des enseignants sur la nature de leur discours pendant la classe. Enfin nous dégageons, à titre prospectif, des exemples (caricaturaux) de type d'univers que les enseignants peuvent construire dans leurs classes : celui des « mathématiques animées », caractérisé notamment par beaucoup de discours direct, beaucoup d'information.

Collectif (IUFM Versailles) (1999) Les pratiques des enseignants en classe de seconde (avec quelques pages sur le langage), Cahier de didirem 33 – un même exercice, est proposé à 4 professeurs de seconde (optimiser une fonction du second degré qui représente l'aire d'un parallélogramme variable inscrit dans un rectangle). On constate des différences, y compris en termes de vocabulaire, niveau de langage etc... par-delà deux choix de gestion contrastés : ou accélérer en donnant des indications aux élèves pour qu'ils trouvent vite la fonction à optimiser et travail sur cette sous-tâche, ou laisser les élèves trouver la fonction et manquer de temps pour attaquer la dernière sous-tâche. En revanche la tentative de chercher des effets des choix linguistiques a échoué.

Hache C.2001) L'univers mathématique proposé par le professeur en classe. Observation, description, organisation, *Recherches en didactique des mathématiques* 21/1-2.

Cet article porte sur les pratiques en classe des enseignants de mathématiques. La part des pratiques du professeur influençant les apprentissages des élèves est appelé *univers mathématique proposé aux élèves*. Le but du présent travail est d'exposer une méthode de description de ces univers (analyses locales de tâches et d'activités, analyses locales de discours) et de proposer les résultats des premières observations effectuées. L'auteur s'intéresse notamment aux facteurs (notion enseignée, professeur, classe, etc.) qui peuvent entraîner un changement d'univers. Il trouve que les enseignants n'utilisent dans l'ensemble des séances étudiées que 2 ou 3 univers sur les 8, indépendamment des contenus, comme si c'était plutôt un choix personnel.

Vandebrouck F. (2002) : utilisation du tableau et gestion de la classe de mathématiques : à la recherche d'invariants des pratiques enseignantes, *Cahier de didirem* 42.

Nous étudions, à partir de ce qui pour nous caractérise son utilisation du tableau noir, les incidences que peuvent avoir la classe et les contenus enseignés sur les pratiques d'un enseignant de mathématiques. Quatre séances sont analysées. Nous dégageons, par une méthode précise d'étude, des invariants dans la gestion globale qu'il organise et nous mettons en évidence des caractéristiques stables dans sa pratique.

Robert A., Vandebrouck F. (2003) : Des utilisations du tableau par des professeurs de mathématiques en classe de seconde, *Recherches en didactique des mathématiques* 23/3.

Nous étudions ce qui caractérise pour nous l'utilisation du tableau noir en classe de mathématiques du point de vue des apprentissages potentiels des élèves et du point de vue strict du métier d'enseignant. Trois séances d'exercices sur les équations de droites en seconde sont analysées (issues de trois classes de seconde du même établissement avec trois enseignants différents). Nous dégageons, par une méthode précise d'étude, trois types d'utilisation du tableau puis, pour les trois enseignants étudiés, nous montrons comment leur utilisation s'inscrit d'une façon cohérente dans la gestion globale de leur séance. Nous en déduisons, pour chacun des trois enseignants, une certaine logique d'enseignement. Enfin, nous discutons des difficultés d'installer en classe certaines formes de travail, en liaison avec le tableau et nous montrons comment les trois enseignants s'en sortent

Chappet- Pariès M. (2004) Comparaison de pratiques d'enseignants de mathématiques, Relations entre discours des professeurs et activités potentielles des élèves, *Recherches en didactique des mathématiques* 24 2/3.

Cet article présente quelques résultats d'une recherche portant sur l'étude des relations possibles entre le discours de l'enseignant de mathématiques, pendant des séances de résolutions d'exercices, et les activités potentielles des élèves qui sont provoquées. L'objet de ce travail est double : élaborer des outils qui décrivent le discours en lui-même puis utiliser ces outils pour montrer comment ils nous renseignent sur les activités potentielles des élèves.

Robert A. (2007) Stabilité des pratiques des enseignants de mathématiques (second degré) : une hypothèse, des inférences en formation. *Recherches en didactique des mathématiques* 27/3.

A partir de l'analyse de deux extraits de séance d'un même enseignant, à deux niveaux scolaires différents mais dans un même établissement et sur des contenus proches, nous présentons une hypothèse sur la stabilité des pratiques en classe. Les analyses sont faites à partir d'une démarche théorique et méthodologique qui est présentée dans la première partie. C'est la gestion de l'enseignant, à l'échelle de 5 à 10 minutes, qui semble se reproduire, éventuellement au détriment du travail mathématique des élèves : certaines activités qu'on aurait pu attendre à partir des tâches proposées peuvent ne pas être rendues possibles du fait de la stabilité de la gestion. Cela nous amène à définir la notion de robustesse des tâches induites par des énoncés mathématiques : la robustesse d'une tâche caractérise la résistance aux modifications des activités des élèves associées à la tâche, dues aux déroulements organisés en classe.

Chappet-Pariès M. (2007) : Enseigner les mathématiques en ZEP et ailleurs, analyses de pratiques d'enseignants expérimentés au collège, *Cahier didirem* 55.

L'objectif de ce cahier est de chercher les spécificités éventuelles des pratiques de quatre enseignants de mathématiques qui exercent dans des établissements classés ZEP ou dans des classes faibles. Les diverses analyses portent sur les tâches proposées aux élèves dans les énoncés d'exercices, les déroulements et, en partie, le discours des enseignants. Les résultats obtenus sont comparés à d'autres relevés dans des classes « ordinaires ». Cette comparaison amène à faire l'hypothèse que ce qui semble être commun à la gestion de ces classes plus difficiles tient à la combinaison de plusieurs facteurs :

- a) Des tâches qui peuvent rester complexes mais pas trop
- b) Un temps de recherche effectif sans recherche collective de stratégie

- c) Peu de moments collectifs en général
- d) Une structuration pilotée davantage par les actions des élèves que par des idées mathématiques
- e) Un enrôlement important voire très important.

Chappet- Pariès M., Robert A., Rogalski J (2008) : Analyses de séances en classe et stabilité des pratiques d'enseignants de mathématiques expérimentés du second degré *Educational Studies Mathematics*, 68.

Il s'agit dans cet article de chercher dans quelle mesure les déroulements observés, analysés en relation avec les activités mathématiques provoquées chez les élèves sont analogues à ceux d'autres séances ou d'autres classes. On parlera alors de stabilité des pratiques pour qualifier l'existence de telles invariances.

La méthodologie pour analyser les tâches, les déroulements et le discours de l'enseignant y est développée. Suivent deux études de cas : celui d'un professeur enseignant dans trois classes de sixième et celui d'un professeur enseignant en classe de 4° et de 3°.

Les deux cas étudiés illustrent deux occurrences de la stabilité recherchée : un choix de tâches identiques pour des classes de même niveau, ce qui peut être attendu, mais aussi la stabilité des déroulements dans des classes de niveaux différents.

Chappet-Pariès M., Robert A., Rogalski J. (2009) : Comment l'enseignant de mathématiques, en classe, met ses élèves sur le chemin des connaissances : un point de vue méthodologique en didactique des mathématiques, *Travail et apprentissages*, n°3.

Ce travail méthodologique illustre l'élaboration et la mise en œuvre d'indicateurs de différents niveaux pour analyser comment les enseignants de mathématiques mettent, en classe, les élèves sur le chemin des connaissances (au collège et au lycée). Ces indicateurs interviennent dans des transcriptions de discours tenus en classe par les enseignants. Il s'agit de reconstituer les activités possibles des élèves à partir des tâches proposées et des déroulements organisés par l'enseignant. C'est dans un double mouvement de conversion entre théorie et observables que s'élaborent ces indicateurs : ils doivent donner accès, à partir des données, aux dimensions retenues pour caractériser les activités des élèves en relation avec leurs apprentissages ultérieurs éventuels.

Après avoir précisé l'inscription de ces recherches dans la théorie de l'Activité et délimité cette étude, les auteurs exposent leur méthodologie en toute généralité. Elles illustrent le détail de la mise en œuvre sur un exemple. Enfin elle discute du transfert éventuel de cette méthodologie pour l'étude de l'activité didactique des formateurs en formation professionnelle.

Bronckart JP (2009) Apprentissage et développement dans la perspective de l'interactionnisme socio-discursif (conférence de l'AIESEP, Besançon) sur internet

Le langage est l'instrument majeur de la réflexion. Son rôle n'est cependant pas de refléter (comme en miroir) les entités représentées, mais de contribuer à l'élaboration même ou au façonnage de ces entités, et il convient donc d'analyser soigneusement ces effets structurants du langage sur les processus et les produits de la réflexion. Notre intervention visera à développer quelques aspects de cette position, selon le schéma qui suit. Nous expliciterons d'abord les principes généraux de notre cadre théorique, à savoir *l'interactionnisme socio-discursif*, qui est une variante de l'interactionnisme social. Nous examinerons ensuite les diverses conceptions théoriques de l'*action*, en tant qu'objet de la réflexion, et sur cette base nous procéderons à une analyse des dispositifs *d'analyse des pratiques* actuellement utilisés en formation des adultes. Nous évoquerons alors nos travaux ayant trait au langage et au rôle qu'il joue dans les processus réflexifs, et nous terminerons en posant le problème des conditions sous lesquelles la réflexion ou la prise de conscience peut être source d'apprentissage et de développement.

Bulea et Bronckart (2010) Les conditions d'exploitation de l'analyse des pratiques pour la formation des enseignants, *LinguarumArena. Revista do ProgramaDoutoralemDidáctica de Línguas da Universidade do Porto*, vol. 1, n° 1.

Dans le domaine de la formation des enseignants, deux types d'ingénierie sont actuellement mis en œuvre. L'un est constitué des démarches classiques de transmission de savoirs, prenant généralement la forme d'enseignements frontaux. L'autre, plus récent et issu des sciences du travail, est constitué de différents dispositifs d'analyse des pratiques (l'entretien d'explicitation, l'instruction au sosie, les auto-confrontations, etc.), dans le cadre desquels les futurs enseignants sont confrontés à des situations d'activité réelle, et sont conduits à des prises de conscience de certaines caractéristiques du métier auquel ils se destinent.

La première partie de l'article consiste en une analyse des conditions et raisons de l'émergence de l'analyse des pratiques dans la formation des enseignants, à partir de l'exemple de l'évolution récente de la didactique de la langue maternelle. La deuxième partie présente quelques éléments d'évaluation ou de bilan de cette évolution: d'une part la mise en évidence de la nécessité d'une profonde transformation de la «logique» sous-tendant les entreprises de rénovation; d'autre part la formulation de propositions pour une redéfinition des objectifs et des méthodes de la formation des enseignants, préconisant une étroite articulation entre dispositifs classiques de transmission de savoirs et dispositifs d'analyse des pratiques. La troisième partie est consacrée à une analyse des caractéristiques effectives de certains dispositifs d'analyse des pratiques, centrée sur la nature des «objets» qu'ils visent, sur le type d'intelligibilité qu'ils suscitent, et sur le rôle que jouent les prises de conscience qu'ils génèrent dans le développement effectif des formés. Dans la dernière partie est présentée une démarche d'analyse des productions verbales issues de ces dispositifs, visant à mettre en évidence les processus discursifs que les formés mobilisent dans la (re-)construction de significations concernant leur activité, et conduisant à interroger les conditions sous lesquelles l'analyse des pratiques contribue réellement au développement personnel et professionnel des formés.

Chappet-Pariès M. (2010) : Circulation du savoir en classe de mathématiques : quelles variabilités dans les pratiques des enseignants ? Etudes de cas . *Annales de didactique et de sciences cognitives* n°15.

Ce travail permet de comparer comment un même enseignant accompagne dans deux classes différentes le travail des élèves, en mathématiques notamment par son discours et tente d'établir un diagnostic des variabilités. Il suggère que les différences relevées peuvent être source de différenciation dans l'accès des élèves aux connaissances.

Chappet-Pariès M., Robert A., Rogalski J. (2008) Que font des élèves de troisième et de quatrième avec un même enseignant dans une séance de géométrie ?) in Vandebrouck F. : *la classe de mathématiques - (Octarès)*

Stability of practices : what 8-th and 9-th grade students do with the same teacher during a geometry class period ?) in Vandebrouck F. (2013) *Mathematics Classroom (Sense Publishers)*

Dans ce livre (et sa traduction en anglais) nous présentons une étude plurielle portant sur deux extraits de séances de géométrie d'un même enseignant dans deux classes de niveaux

scolaires différents d'un même collège. Il s'agit de pratiques ordinaires d'un établissement relativement favorisé. Ces séances portent sur les premiers exercices non immédiats proposés aux élèves après le cours. Dans les deux cas ces exercices sont cherchés en classe, après correction en classe d'un exercice plus simple qui avait été donné à chercher à la maison.

Notre objectif est d'avancer sur deux questions : la première est relative aux pratiques, à leur stabilité pour un enseignant donné, et plus précisément à ce qui peut être déterminé comme régularité intra-personnelle, « invariant(s) des pratiques ». La deuxième question, que nous ne ferons qu'aborder, est celle des conséquences éventuelles sur les activités des élèves.

La première invariance que nous appréhendons, dans cette étude, est celle de l'organisation globale des déroulements : les formes de travail sont les mêmes, la mise en activité des élèves est déclinée avec des temps analogues dans les deux classes et le discours qui l'accompagne est lui aussi modulé de la même façon.

Une deuxième invariance tient à certaines caractéristiques du discours de l'enseignant pendant les interactions: les fonctions du discours sont relativement stables, quelques-unes, plus variables que d'autres, sont associées aux adaptations que l'enseignant s'autorise à partir de son projet, compte tenu de la tâche et des élèves.

Une troisième invariance se marque dans la similitude de l'utilisation des marqueurs langagiers qui structurent le discours.

Les différences se marquent dans les phases d'interaction avec la classe et traduisent une certaine adaptation de l'enseignant aux réactions des élèves.

Nos analyses ont ainsi permis de mettre en évidence une réelle stabilité de la composante médiative des pratiques de cet enseignant à la fois au niveau le plus global (déroulement) et au niveau le plus micro (marqueurs langagiers). Le local révèle davantage de variations déterminées par les réactions des élèves (aides procédurales et fonctions) sans toutefois modifier la succession des activités prévues associées à des tâches différentes selon les deux classes.

On peut toutefois se demander si la stabilité des pratiques de l'enseignant précisée ici contribue de la même façon aux apprentissages de tous les élèves et surtout si elle ne joue pas toujours de la même façon pour chaque élève.

Gobert S. (2010) Construire des significations, dans et par le langage, *Actes école d'été XVI*

Cet article montre dans quelle mesure et comment le développement et le partage des significations d'objets, de concepts, de discours et de pratiques, de et en mathématiques se construit au sein d'une classe au cours des échanges didactiques.

L'analyse de quelques corpus permet de rendre compte de la nécessité d'une *mise en langage* en mathématiques comme lieu de développement et de déplacements de la pensée des élèves ou de l'action du maître. Ce texte montre à partir de ces différents exemples comment le travail cognitif se double d'un travail langagier, comment les concepts, les savoirs et les pratiques sont travaillés *dans et par le langage*.

La mise en langage, les déplacements et les dénivellations, participent à et d'un processus de secondarisation.

Dans ce texte l'étude de quelques exemples éclaire en quoi les pratiques langagières en mathématiques reflètent, réfléchissent leur imbrication avec les pratiques mathématiciennes scolaires et/ou savantes.

Marin B. (2011) La reformulation en classe : un discours équivoque, in Rochex, Crinon *La construction des inégalités scolaires (Presses Universitaires de Rennes).*

Cet article porte sur l'analyse des reformulations telles qu'elles sont conduites dans la classe fournit un analyseur de l'activité enseignante et un prisme d'observation intéressant si on l'utilise pour établir des comparaisons portant sur les interactions verbales dont elles sont constitutives.

La conduite du cours dialogué obéit à un principe d'alternance entre question posée par le maître, recherche de réponses des élèves et validation. En fonction de la plus ou moins grande adéquation entre réponse obtenue et réponse attendue, la question initiale est relayée par un jeu de reformulations dont il convient d'appréhender les effets différentiels en termes de co-construction de connaissances.

L'auteure montre à travers de nombreux exemples que l'étayage de la reformulation constitue à certaines conditions le lieu privilégié de l'accompagnement individuel, où s'élabore le passage du particulier au général.

La qualité de verbalisation de l'enseignant et plus particulièrement sa capacité à élaborer des reformulations ciblées seraient importantes pour assurer un étayage efficace. Ainsi, conclut l'auteure, la reformulation raisonnée permet de réintroduire- en les unifiant- les fragments du discours instructeur dans un espace cognitivo-langagier où se réduiraient les inégalités entre élèves.

Mathé A.C. (2012) Jeux et enjeux du langage dans la construction de références partagées en géométrie *Recherches en didactique des mathématiques* 32/2.

L'entrée dans la géométrie à l'école primaire peut être vue comme un processus d'*acculturation* consistant, à partir d'activités portant sur des objets matériels choisis, à construire une manière de voir, d'agir, de parler spécifique à la géométrie. Pour accompagner les élèves dans cette évolution du rapport aux objets, l'accent est mis, en Théorie des Situations Didactiques, sur les contraintes posées sur l'action matérielle des élèves. Le travail présenté propose de porter une attention particulière au fait qu'une grande partie des interactions entre les élèves et le milieu s'effectue également par le langage, notamment par le biais d'interactions discursives entre l'élève et le maître ou les élèves entre eux. Dans quelle mesure ces interactions peuvent-elles participer au processus de construction de connaissances en géométrie ? S'appuyant sur le constat d'une forte compatibilité des ancrages épistémologiques de la sémantique logique et de la Théorie des Situations Didactiques, vus comme deux approches anthropologiques de l'activité humaine et de l'apprentissage, cet article explore les possibilités offertes par le recours à des outils théoriques issus de travaux de Wittgenstein ou Quine pour penser l'articulation entre actions matérielles et langagières en classe de géométrie à l'école.

Annexe 2 : un aperçu des positions de Sfard (recherches sur le langage dans des recherches didactiques)

Les théories de Sfard²⁰ prétendent renouveler les paradigmes acquisitionnistes (où, d'une certaine manière le savoir serait « figé », absolu, les acquisitions trop indépendantes du social) et participationnistes (je n'ai pas compris pourquoi !). Elles sont qualifiées de non dualistes, ne mettant pas « à part » le discours.

Il me semble que ces théories ne s'appliquent pas à tous les apprentissages mathématiques, ni peut-être à tous les âges scolaires, et qu'elles ne constituent qu'une approche partielle des questions d'apprentissage mathématique, valable surtout au début de la scolarité (primaire-collège), à mon sens. Cependant, après un regard perplexe négatif, c'est un regard perplexe qui s'est installé chez moi lorsque j'ai lu l'article (2007) intitulé « when the rules of discourse change, but nobody tells you : making sense of mathematics learning from a commognitive stand point ». Notons que les analyses du savoir mathématique qui nous sont chères en amont de tout projet didactique ne sont évoquées que pour l'étude sur les nombres (petits), ce qui ne

²⁰ C. Chambris a contribué à ce résumé, grâce à une discussion permettant d'infléchir certains passages, d'élargir les points de vue et en introduisant des éléments tirés d'autres sources que les miennes. Merci à elle !

signifie pas qu'elles sont absentes des deux autres exemples, dans la mesure où la question de la différence entre développement historique et individuel est posée(?).

En fait on pourrait peut-être approcher son projet avec la formule lapidaire porteuse de deux ou trois idées « *le discours²¹ d'abord pour le penser et l'agir en math* » - *la nécessité d'une amorce conflictuelle collective discursive (commognition) – le rôle de la conscience, de ce dont on peut avoir conscience*. Elle suggère qu'il y a des moments (notions à apprendre) en math où les élèves doivent changer de discours (et de penser) de manière incommensurable avec ce qui précède (cf. FUG ???, méta ???). Pour y arriver, il ne suffirait pas de le dire, il serait nécessaire de les placer dans un conflit entre l'ancien mode de dire et le nouveau, et du conflit naîtrait la prise de conscience de la nouvelle façon de dire et, du coup, de faire et son adoption, par imitation devenue acceptable et acceptée en quelque sorte.

Autrement dit le besoin de connaissance nouvelle est créé et comblé par un conflit de communication et c'est de et par la communication que naît le nouveau espéré. Tout se passe comme si cela jouait d'une certaine façon le rôle d'une situation fondamentale, mais élaborée sur d'autres assises que les nôtres.

Quelque part cela n'est pas sans évoquer chez moi la notion de pseudo-concept utilisée par Vygotski : les enfants s'emparent d'un mot à partir d'un faible indice et en testent l'usage a posteriori, grâce aux réactions des adultes.

Cela résonne aussi avec le travail des collègues de Nice (Sackur et al. 1997) sur les trois niveaux de connaissances... et les questions de dénotation. « pour les connaissances de type II²², l'originalité de notre modèle (Maurel et Sackur, p. 97) tient au fait que nous voyons ici des connaissances **à nommer**, pour pouvoir en parler et les enseigner. ... Il y a des élèves qui ne les possèdent généralement pas... Celles qui concernent la validité des énoncés (il faut démontrer, utiliser les définitions à bon escient,), celles qui sont liées à la logique (respect des règles, implication, négation, tiers exclu) et celles qui concernent l'écriture mathématique (il faut utiliser correctement les diverses représentations symboliques – si x est écrit plusieurs fois dans une même équation, c'est le même).

L'habillage théorique qu'elle met en place part de l'affirmation que **la pensée est une forme de communication (y compris avec soi d'ailleurs)** et qu'à ce titre, apprendre les math est équivalent à modifier et étendre son discours mathématique en en ayant une certaine

²¹ Le discours semble ne pas se restreindre aux mots, cela peut comprendre des gestes accompagnant ce qui est exprimé. Le discours peut être avec soi-même.

²² Les connaissances de type I sont les connaissances locales, valables dans un certain domaine

conscience. *Human thinking can be regarded as the individualized form of the activity of communication (with oneself).*

Le discours mathématique (et donc le penser mathématique) est particulier. **Les mots** sont utilisés autrement. Il y a des **médiateurs visuels** pour identifier ce dont on parle (dont les symboles). **Le récit** peut être refusé ou accepté – cf. juste ou faux. *Deux niveaux : celui des objets, et un méta-niveau*, qui correspond aux histoires sur le discours et sur le comment faire. **Les routines** peuvent englober les actions et *les règles sur les objets, ou les méta-règles* plus cachées, dont certaines habitudes plus que répondant à une nécessité (nécessité de prouver ou de définir) – restent relatives à un contexte. Les routines (comment et quand user du discours) sont y compris le produit de façons de faire culturelles, sociales, elles correspondent à des habitudes, un agir hérité de l'histoire, qui peut évoluer mais auquel il faut adapter les enfants²³.

Apprendre les math : changer de discours, y compris avec soi-même.

Il s'agit pour le chercheur d'identifier les caractéristiques des transformations attendues, sur les mots, les médiateurs, les récits acceptés et les routines.

L'auteur déclare que nous avons besoin d'un changement de discours pour changer nos perspectives et nos visions – un changement sur comment parler avant d'expérimenter, un changement du voir.

Au fond tout se passe comme s'il était plus facile d'avoir conscience de la manière dont les objets sont parlés avant d'avoir conscience des objets eux-mêmes. Les notions émergent des discours, elles sont d'abord des construits discursifs.

Apprendre les math correspond à adopter de manière individuelle le bon discours.

Objectification : réification (remplacer les verbes par des noms), aliénation – enlever le sujet.

Le conflit commognitif comme source d'apprentissage

Deux niveaux de changements, celui des objets (mots, routines, récits) et du niveau méta (méta règles). C'est ce dernier qui est difficile changer seul, mais peut provenir d'une rencontre avec le nouveau discours différente du précédent. On le voit par la production de récits contradictoires et acceptés par les uns ou les autres. Ce n'est pas une histoire de juste ou faux mais une histoire de méta règle dans le mode de communiquer (différent du conflit socio-cognitif).

Ainsi les changements nécessaires à cette extension sont provoqués non pas par une « réalité extradiscursive » (situations, tâches ?) mais par un conflit où les interlocuteurs ne disent pas

²³ C. Chambris signale deux types de routines – rituelles (sociales) et exploratoires (sur le monde), à modifier.

pareil, agissent selon des règles discursives différentes. S'ils n'ont pas lieu, il peut ne rien se passer ! Dans le cas d'un tel conflit, il y a incommensurabilité des discours plutôt que incompatibilité. Il s'agit d'accepter et de rationaliser individuellement le discours de l'expert. (je saute les approches apparentées comme Cobb, 2002, un peu différent toutefois).

Les deux exemples qu'elle donne

La multiplication des nombres négatifs : pourquoi $-$ par $-$ donne $+$?

Quel changement est attendu ? *Accepter une règle mathématique- proche d'une définition (sans modèle concret sur lequel s'appuyer)*. Le professeur espère s'appuyer sur des idées des élèves – échec ! Le professeur ne dévoile pas les règles métadiscursives pour accepter un récit (à savoir accepter la règle) : le conflit qui s'est produit n'est pas exploité.

Reconnaitre des triangles : un triangle très fin est encore un triangle...

Il s'agit de passer, en utilisant les niveaux de Van Hiele, du niveau de l'analyse au niveau de l'abstraction, en insérant une activité discursive dans l'activité d'identification. Après avoir compté, il faut suspendre toute décision spontanée et réfléchir au bon choix des mots, on passe d'une réalité de la nature, externe aux math à un récit du type : on peut appeler cette forme un triangle car il a trois côtés (nommer après l'identification). De plus on remplace les catégorisations en parties disjointes par des inclusions.

Annexe 3 Conception et évaluations d'outils et de dispositifs : Coordonnateurs : Nathalie Gal-Petitfaux et Roland Goigoux (Bulletin de l'IFE) - Enquêter sur les pratiques pédagogiques au cours préparatoire

Roland Goigoux situe ici la méthodologie qui fonde la recherche qu'il coordonne pour ACTé et l'IFÉ, et qu'il aura l'occasion de développer lors de sa conférence au séminaire international de l'IFÉ, le 11 avril.

« Introduction

Nous présentons ici la méthodologie d'enquête que nous sommes en train d'élaborer pour réaliser une étude portant sur l'influence des pratiques d'enseignement de la lecture et de l'écriture sur la qualité des apprentissages au cours préparatoire. Cette étude a pour objectif de produire des connaissances nouvelles sur les caractéristiques des pratiques efficaces d'enseignement, en particulier pour les élèves socialement les moins favorisés, ceux dont les premiers apprentissages sont le plus dépendants de l'intervention pédagogique.

Nos investigations porteront sur les pratiques d'enseignants expérimentés observées in situ selon des grains d'analyse définis en cohérence avec la problématique. Il s'agira d'identifier

les occasions d'apprendre que chaque professeur offre à ses élèves à travers les tâches d'enseignement qu'il conçoit et réalise, et de les mettre en relation avec les progrès des élèves. Nous chercherons donc à identifier quels sont les contenus, les tâches et les formes d'enseignement les plus pertinents à chacune des étapes de l'apprentissage. Nous chercherons aussi à savoir selon quelles progressions, quels dosages et quelles combinaisons ceux-ci bénéficient de manière différenciée aux divers publics d'élèves. Nous étudierons pour cela les pratiques ordinaires d'un vaste échantillon d'enseignants se référant à une grande variété d'approches pédagogiques. Nous faisons l'hypothèse que les pratiques efficaces présentent des traits communs qui ne coïncident pas avec les typologies classiques de «méthodes» et que plusieurs manières de faire (ou configurations de variables didactiques) peuvent aboutir à des effets similaires. En effet, si aucune étude comparative des «méthodes» de lecture n'a permis d'établir la supériorité de tel dispositif méthodologique sur tel autre, ce n'est pas parce que toutes les pratiques se valent mais parce que la variable «méthode», trop grossière et mal définie, n'est pas une variable pertinente pour une telle recherche. Pour comprendre ce qui différencie véritablement les choix pédagogiques opérés par les maîtres et leur impact sur les apprentissages des élèves, il est indispensable de substituer à cette approche une analyse reposant sur l'examen simultané d'une pluralité d'indicateurs et de dépasser les déclarations de principes pour entrer dans le détail des pratiques concrètes. Paradigme écologique versus paradigme expérimental. Dans la recherche qui commence, nous observerons des pratiques pédagogiques en demandant aux enseignants de ne rien changer à leurs habitudes. Voici, par exemple, ce que nous leur avons écrit en prenant contact avec eux: «Notre objectif n'est pas de montrer la supériorité de telle ou telle méthode, nous voulons seulement identifier, sans a priori, des caractéristiques des pratiques qui s'avèrent les plus efficaces et les plus équitables. Pour cela, nous avons besoin de maîtresses et de maîtres expérimentés, exerçant dans des conditions ordinaires et curieux d'en savoir un peu plus sur ce qui fait la qualité des apprentissages de leurs élèves. Nous serions donc heureux si vous acceptiez de participer à notre étude en permettant à un chercheur de notre équipe (le même toute l'année) de dialoguer avec vous, d'analyser les progrès de vos élèves et d'observer vos pratiques d'enseignement. Nous nous engageons en retour à vous convier, sur votre temps de travail, à une journée de présentation des résultats et d'échanges.

Autrement dit, nous souhaitons étudier une réalité que notre dispositif d'enquête perturbe le moins possible. Nous nous distinguons en cela d'autres méthodologies qui provoquent des changements sur le réel pour mieux le comprendre, par exemple les méthodologies

expérimentales privilégiées par le conseil scientifique de la direction des enseignements scolaires (DGESCO, ministère de l'Éducation nationale) et par son département Recherche développement, innovation et expérimentation (DRDIE)... »

DECALAGES ENTRE UNE ACTIVITE MATHEMATIQUE DEMANDEE AUX ELEVES ET LES OUTILS LANGAGIERS¹ DISPONIBLES ET/OU INTRODUITS PAR L'ENSEIGNANT.

REFOULEMENT DIDACTIQUE DE L'ENSEIGNANT

(K. Millon-Fauré)

Résumé

Nous nous intéressons dans cet article à l'activité langagière dans la classe et à ses répercussions éventuelles sur l'activité mathématique des élèves. Pour cela, nous avons comparé les échanges verbaux d'une classe de sixième ordinaire et d'une classe accueillant des élèves migrants de même niveau scolaire sur une même tâche. Nous avons montré que l'enseignant de la classe d'accueil utilisait peu de termes spécifiques aux mathématiques, et nous discutons des conséquences de ce phénomène sur l'activité mathématique de la classe dans son ensemble : nous suggérons qu'à la fois les élèves n'avaient plus les moyens de réaliser la tâche proposée, et que l'enseignant ne pouvait plus définir correctement certains savoirs, les deux se renforçant... Nous avons fait l'hypothèse que ce phénomène résultait essentiellement d'une adaptation de l'enseignant aux difficultés de ses élèves, refoulement didactique supposé, pour l'enseignant, faciliter leurs apprentissages. Toutefois, nous avons pu réduire ce phénomène en présentant à ce professeur nos analyses et en l'aidant à modifier son enseignement de manière à contribuer à développer davantage l'activité mathématique de ses élèves.

Mots clés : Activité langagière ; activité mathématique ; élèves migrants ; adaptation de l'enseignement ; ostensifs ; communauté discursive

Summary

This article seeks to understand the impact of language used in a classroom in which mathematical activities were being undertaken. To do this we compared the verbal exchanges of two classes: a mainstream class and a special needs class composed of immigrant pupils. We show that the teacher in the special needs class rarely used specialised mathematical terms and that this had a significant impact on the mathematical activity of the class as a whole; the pupils didn't have the means to accomplish the tasks undertaken and the teacher could not define certain terms correctly. We observed that this phenomenon mainly resulted from the adaptation of language to the pupils' difficulties, which was intended to help their learning. However, following our observations, the teacher reduced this phenomenon by modifying the teaching language in order to maintain the mathematical activity of the pupils.

Key words: Language activity; mathematical activity; non-native French-speaking pupils; teacher's adaptation; ostensive; discourse community

¹ Nous n'introduisons pas ici de différence entre les expressions 'activité langagière', 'outils langagiers' et 'discours'

Introduction

Plusieurs études sociolinguistiques générales (Bernstein 1971, 1975) ont souligné le lien qui pouvait exister entre la maîtrise de la langue des élèves et leur réussite scolaire. On aurait pu penser que les mathématiques, discipline qui utilise en plus de la langue naturelle, des éléments d'un langage spécifique, échapperaient à cette difficulté. Pourtant, des recherches mettent en évidence le lien qui peut exister entre les difficultés langagières de certains élèves et leurs résultats en mathématiques. Ainsi Wang et Goldschmidt (1999) prouvent que les élèves ayant de faibles capacités dans la maîtrise de la langue réussissent moins bien dans cette discipline. Hofstetter (2003) précise que les étudiants réussissent mieux lorsque la langue de rédaction du test correspond à la langue d'enseignement des savoirs, qu'il s'agisse ou non de la langue maternelle. Ces résultats montrent l'importance que peuvent avoir les échanges et éclaircissements langagiers réalisés durant le cours de mathématiques et soulèvent plusieurs questions : de quelle manière la maîtrise de certaines compétences langagières intervient-elle dans la construction des connaissances mathématiques ? Les professeurs de mathématiques prennent-ils en charge l'enseignement de ces compétences langagières ? Pour approfondir cette problématique, nous nous sommes intéressés dans cet article au lexique employé par l'enseignant et les élèves durant une leçon de mathématiques, et aux conséquences éventuelles des outils langagiers² apportés ou non par le discours² du professeur sur l'activité mathématique de la classe. Dans cette optique, après une évocation de certaines études antérieures en lien avec notre problématique, nous avons comparé dans une première partie une séance de mathématiques en classe d'accueil et en classe ordinaire. Nous avons ensuite regardé le discours de l'enseignant de la classe d'accueil lorsqu'il était confronté à des élèves ordinaires. Enfin, nous avons à nouveau observé cet enseignant dans une classe d'accueil, après avoir discuté avec lui de certaines modifications dans ses pratiques.

Appuis théoriques

a) Des mots pouvant avoir une portée différente sur l'action des élèves – les ostensifs et les autres

Lorsqu'il analyse les techniques nécessaires à la réalisation d'une tâche, Chevallard explique qu'elles reposent sur la manipulation de deux types d'objets³, les ostensifs et les non-ostensifs : « On appelle ostensifs les objets qui ont pour nous une forme matérielle, sensible, au demeurant quelconque. Un objet matériel (un stylo, un compas, etc.) est un ostensif. Mais il en va de même des gestes, des mots, et, plus généralement, du discours (nous parlerons ici d'ostensifs discursifs ou langagiers), des schémas, dessins, graphismes, des écritures et formalismes. Le propre des ostensifs, c'est de pouvoir être manipulés, ce mot étant entendu en un sens large : manipulation au sens strict (celle du compas, ou du stylo, par exemple), mais aussi bien par la voix, le regard, etc. Au contraire des ostensifs, les non-ostensifs – soit ce que l'on nomme usuellement notions, concepts, idées, etc. – ne peuvent pas, à strictement parler, être manipulés : ils peuvent seulement être évoqués, à travers la manipulation d'ostensifs associés. » (Chevallard, 1994 ; p.69). Ostensifs et non-ostensifs sont ainsi intimement liés : d'une part le travail sur les non-ostensifs nécessite la manipulation d'ostensifs mais cette manipulation ne peut s'effectuer que sous le contrôle des non-ostensifs correspondants. Toutefois ces correspondances ostensifs/non-ostensifs ne sont pas intrinsèquement définies. Ainsi un même ostensif peut désigner plusieurs non-ostensifs en fonction du contexte dans lequel il est utilisé (le mot

² Nous n'introduisons pas ici de différence entre les expressions 'activité langagière', 'outils langagiers' et 'discours' – De plus le mot outil n'est pas associé au caractère outil d'un concept comme chez Douady.

³ R. Douady (1986) distingue deux aspects, objet et outil, des concepts – attachés aux utilisations et à la définition. Ce n'est pas dans ce sens que le mot objet est utilisé ici (ni par les enseignants plus tard).

« rayon » ne représente pas le même concept lorsqu'il est employé dans le cours de mathématiques ou dans un grand magasin). Réciproquement un même non-ostensif peut être associé à divers ostensifs (le concept, désigné par le terme 'cercle' en mathématiques sera désigné sous l'appellation 'rond' dans la vie courante). Ces associations ostensifs/non-ostensifs varient en fonction notamment des institutions dans lesquelles elles vivent, du registre utilisé (oral, écrit...), de la technique visée... Ce choix est-il anodin ? Peut-on indifféremment utiliser l'un ou l'autre de ces ostensifs ? On fait ici l'hypothèse que l'étude de l'usage que l'enseignant fait de ces ostensifs informe sur ce qui peut être travaillé par les élèves. Que ce soit pour l'introduction d'objets (à usage de description) ou de concepts (à usage de résolution d'exercices), sont en jeu le lien entre non-ostensifs et ostensifs ainsi que leur introduction et cela peut permettre des comparaisons.

b) L'influence de la classe : une variable incontournable ?

Bernié étudie les variations dans les pratiques langagières en fonction des interlocuteurs, ce qui l'amène à parler de *communautés discursives*. Il appelle ainsi « une communauté constituée sur la base d'une pratique sociale quelconque (productions de biens matériels ou de connaissances scientifiques etc...) [...] Son activité suppose d'abord l'usage partagé d'un certain nombre d'outils puisqu'elle est au premier chef un lieu de stabilisation d'une manière d'agir. » (Bernié, 2002 ; p.78). Une communauté discursive est donc initialement caractérisée par une uniformité dans ses pratiques mais cette uniformité va nécessiter et susciter une communication entre les membres de la communauté qui partageront ainsi à la fois certains types de pratiques sociales et certaines formes de pratiques langagières. A l'école, chaque enseignant essaye d'installer dans sa classe les pratiques propres à la discipline enseignée. Ceci amène Jaubert et Rebière (2000 ; 2003 ; 2012) à parler de communauté discursive disciplinaire scolaire : « Toute classe peut être vue comme une communauté discursive qui apprend à spécialiser son activité et notamment ses pratiques langagières pour chaque discipline. » (Jaubert et Rebière ; 2012, p.4). Chaque communauté discursive disciplinaire scolaire s'est ainsi dotée des outils langagiers nécessaires à son activité, en s'appuyant essentiellement sur les pratiques de la communauté discursive disciplinaire de référence, transposées à l'environnement scolaire. Pour entrer dans une de ces communautés discursives, un élève devra donc acquérir à la fois des savoirs scientifiques mais également des manières d'agir-penser-parler. Ceci nécessitera une série de reformulations pour passer de la langue quotidienne aux pratiques langagières attendues : « C'est en devenant sujet social que l'on devient sujet cognitif, et, vu la nature propre du langage, les apprentissages langagiers sont le 'milieu' indispensable à la dialectique du social et du cognitif. » (Jaubert & Rebière & Bernié ; 2003, p.51).

Prenons comme discipline scolaire les mathématiques : chaque classe de 6^e durant les cours de mathématiques constitue donc une communauté discursive mathématique scolaire (distincte de la communauté discursive constituée par cette même classe durant les cours de français). La « classe », c'est-à-dire à la fois les élèves et l'enseignant, devront donc s'entendre sur des pratiques langagières communes permettant de discuter sur leur activité mathématique. Mais ces communautés discursives mathématiques scolaires ne sont pas totalement fermées. Certaines formes de communication avec l'extérieur s'avèreront nécessaires (utilisation de manuels scolaires, participation aux examens nationaux, passage dans la classe supérieure...), ce qui va nécessiter une certaine uniformisation des pratiques langagières dans toutes les communautés discursives mathématiques scolaires d'un niveau donné. Il ne devrait donc y avoir que peu d'écarts entre les outils langagiers utilisés dans chaque classe de sixième durant le cours de mathématiques. Dans la pratique, est-ce effectivement le cas ? Les pratiques langagières que l'enseignant tente de mettre en place dans sa classe correspondent-elles à des pratiques qu'on retrouve ailleurs ? Quelles conséquences peut-on en inférer ?

c) La formulation des élèves, une variable des apprentissages

Par ailleurs, l'activité langagière de l'enseignant et des élèves durant le cours de mathématiques a récemment constitué l'un des grands thèmes de la 16^e école d'été de didactique intitulée « Problèmes

de la profession d'enseignant, rôle du langage ». Bosh et Perrin-Glorian (2011) soulignent que, à la fois la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998) et la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 2007) ont montré l'importance de l'activité langagière tout au long des processus d'enseignement et d'apprentissage : même en omettant le discours intérieur, intrinsèquement plus difficile à analyser, la formulation s'avère utile pour partager des pistes lors des recherches en groupes, pour valider ou invalider une proposition, puis lors de l'institutionnalisation. Pour transformer ses connaissances en savoir, l'élève, guidé par l'enseignant, est amené à effectuer, plus ou moins rapidement, une dépersonnalisation et une décontextualisation qui rendront ces savoirs réutilisables dans d'autres situations et qui permettront une communication en dehors de la classe. Ainsi, si dans la théorie des situations didactiques une seule phase porte le nom de « Formulation » (phase où les contraintes de la situation rendent incontournable la formulation des différentes stratégies par les élèves), l'activité langagière intervient tout au long du processus d'apprentissage. Les situations seront donc conçues de manière à rendre une certaine expression indispensable (situation de communication avec des pairs ou avec soi-même mais différée dans le temps...). Pour la théorie des situations didactiques, le langage constitue à la fois un objet d'enseignement et un moyen pour l'apprentissage des mathématiques. La théorie anthropologique du didactique analyse les pratiques (notamment celles liées à l'activité mathématique) en termes de praxéologies composées d'un bloc pratique (la praxis) et d'un bloc théorique (le logos). Elle postule l'existence d'un discours nécessaire à la description et à la justification de toutes pratiques. Par conséquent, « les deux approches [...] conçoivent que le langage est pris dans l'activité mathématique, qu'il en fait partie. [...] Les deux théories soulignent le caractère instrumental de la langue en l'intégrant dans le système d'ostensifs activé. » (Bosh, Perrin-Glorian, 2011 ; p.297). Cela renforce l'intérêt dans une comparaison notamment d'apprécier l'usage que fait l'enseignant des ostensifs.

d) La spécificité du langage mathématique, mixte, pas toujours perçue par les enseignants, ajoute de la complexité

Cependant Durand-Guerrier (2011) souligne l'écart qu'il peut y avoir entre la langue usuelle et la langue utilisée lors de l'activité mathématique. Elle montre que certains termes ne recouvrent pas les mêmes concepts en fonction du contexte dans lequel ils sont utilisés comme par exemple les quantificateurs (il existe, quelque soit...), notamment dans certaines phrases négatives. Cette analyse logique révèle certaines ambiguïtés que doivent surmonter les élèves pour entrer dans la communauté discursive scolaire mathématique et met à mal l'illusion de transparence qui enveloppe généralement le langage spécifique aux mathématiques. Rebière (2011) affirme également que les pratiques discursives quotidiennes des élèves sont inefficaces dans le cadre des pratiques disciplinaires. Les pratiques langagières spécifiques à chaque communauté discursive disciplinaire doivent donc faire l'objet d'un apprentissage spécifique et cet apprentissage ne peut se réaliser qu'en lien avec les pratiques qui le motivent : autrement dit, l'enseignement des structures langagières spécifiques à l'activité mathématique doit être pris en charge par l'enseignant de mathématiques. Or, plusieurs études ont montré les difficultés que rencontraient les enseignants pour accompagner les pratiques langagières de leurs élèves (Margolinas, 2003; Bronner et Larguier, 2004; Bucheton, Bronner, Broussal, Jorro et Larguier, 2005).

Ces considérations soulèvent de nouvelles questions : chaque classe dispose-t-elle effectivement des ostensifs nécessaires à son activité ? L'enseignant de mathématiques parvient-il à diffuser les compétences langagières indispensables à l'exercice de sa discipline ? Dans le cas contraire, qu'arrive-t-il ? « On sait que l'absence d'un concept peut bloquer l'évolution de la 'pensée' mathématique, aussi bien au niveau historique d'une communauté qu'au niveau individuel du chercheur ou de l'élève. Or on peut se demander jusqu'à quel point cette absence serait seulement l'absence d'une idéalité, d'une façon de 'penser' ou de 'concevoir' le monde, et non celle d'un complexe d'outils de travail, la plupart de nature matérielle, dont la disponibilité — ou, au contraire, l'absence — pourrait modifier de façon 'catastrophique' le déroulement de l'activité. » (Bosch-

Chevallard ; 1999, p. 9-10). Est-ce que, parmi ces outils de travail nécessaires au « bon » déroulement de l'activité, ne figurent pas certains mots ? Et dans ce cas, sur quels processus de l'activité mathématique, l'absence de ces ostensifs peut-elle avoir des répercussions ?

Dans cet article, pour toutes les raisons théoriques évoquées ci-dessus, nous nous restreignons à l'étude d'ostensifs langagiers et nous formulons l'hypothèse selon laquelle l'enseignant, en relation avec le contexte, n'introduit pas toujours dans la classe les outils langagiers indispensables. Ce constat est important car nous conjecturons que cette absence peut freiner la réalisation par les élèves de l'activité proposée, ce qui impliquerait la nécessité de réfléchir à une modification des pratiques dans les contextes sensibles.

Méthodologie

Nous avons dans un premier temps observé une séance en classe d'accueil (Millon-Fauré ; 2011) : cette classe regroupe tous les élèves d'un collège marseillais, scolarisés en sixième mais qui ont été jugés trop en difficulté pour suivre dans une classe ordinaire (cette appréciation se fonde essentiellement sur le degré de maîtrise de la langue usuelle). Il s'agit d'élèves migrants issus de pays non francophones et scolarisés en France depuis moins de trois ans. Les cours de mathématiques de cette classe sont assurés par M. T, professeur expérimenté qui depuis plusieurs années consacre l'essentiel de son service à l'enseignement dans ce type de classe. Afin de déceler les spécificités des séances d'enseignement dans cette classe, nous l'avons comparée à une classe de sixième ordinaire. Cette dernière est encadrée par Mme M qui exerce depuis plusieurs années dans de telles classes.

Nous avons voulu comparer ces classes au cours de la même séance et nous avons demandé aux enseignants de s'entendre sur le choix d'une activité. La séance choisie introduit la séquence sur l'étude des solides en sixième et vise à réactiver les notions de 'face', 'arête', 'sommet', théoriquement abordées à l'école primaire. Les deux enseignants ont conçu ensemble cette séance : une même collection de solides doit être distribuée à chaque binôme (ici un cube, un pavé droit⁴, un prisme droit hexagonal). Les élèves choisissent l'un d'entre eux et le décrivent de manière à ce que leurs camarades le reconnaissent. Nous joignons en annexe les éléments précis qui nous semblent indispensables pour apprécier la tâche (progression, analyse de la tâche, programmes...) et les déroulements dans les deux classes – prévu et effectifs (fiche de préparation des enseignants, chronologies, extraits de transcriptions). En fait, dans la mesure où la tâche consiste seulement à repérer un solide parmi trois, la description attendue (discriminante et non maximale – cf. annexe) peut se limiter à celle de la nature géométrique des faces mais on peut s'attendre à ce que d'autres éléments de description soient mobilisés, permettant ainsi à l'enseignant d'introduire le vocabulaire visé.

Suite aux résultats obtenus lors de cette étude comparée, nous avons, les années suivantes, observé à nouveau M.T, lors de cette même activité, mais en faisant varier certains paramètres :

- tout d'abord auprès d'une classe ordinaire.
- puis à nouveau en classe d'accueil mais en introduisant certaines modifications dans la séance proposée (cf. annexe 2).

Pour chaque séance, nous nous sommes intéressés aux outils langagiers utilisés par la classe. Nous nous sommes demandé quels ostensifs langagiers l'enseignant et les élèves utilisaient : nous avons listé les expressions employées pour désigner certains concepts (comme notamment celui de « solide ») et nous avons compté le nombre d'occurrences de chacune de ces expressions. Nous avons ensuite recherché les répercussions de l'utilisation de ces expressions sur l'activité mathématique de la classe et nous avons comparé nos observations dans chacune des classes. Dans cet article, nous ne présenterons que les

⁴ Parallélépipède rectangle

analyses portant sur la désignation des solides génériques ou particuliers (parallélépipède rectangle, cube...).

Analyse

a) 1^e année : Comparaison entre la classe d'accueil encadrée par M.T et la classe ordinaire encadrée par Mme M.

La première chose que l'on remarque lorsque l'on compare l'activité langagière dans la classe d'accueil et dans la classe ordinaire concerne l'attitude de l'enseignant quant à l'introduction de nouveaux termes. Ainsi, voici les réactions des deux professeurs qui se trouvent confrontés à la même question d'un de leurs élèves, curieux de connaître le nom d'un des solides manipulés.

Dans la classe d'accueil

P : Non le nom on verra après ça **c'est pas grave c'est pas important**

Dans la classe ordinaire

P : C'est vrai [] si quelqu'un connaît heu le nom de ce solide là mais sinon sinon je vous l'apprendrai plus tard / en levant le doigt

E : ...

P : alors on le verra plus tard

Si le terme exact ne sera finalement présenté dans aucune des deux séances, on note dans la classe ordinaire une invitation faite aux élèves de l'introduire, alors que dans la classe d'accueil, l'intérêt d'un tel savoir est immédiatement nié.

On peut également remarquer la réaction des deux enseignants confrontés au manque de précision dans le lexique employé par un de leurs élèves :

Dans la classe d'accueil

E (à propos d'un hexagone) : C'est un rond

P : Un rond un rond euh c'est rond un rond donc c'est pas un carré en tout cas

Dans la classe ordinaire

E (décrivant un pavé droit) : Si je regarde les faces du solide, ce sont toutes des rectangles, sauf 2. []

P : Y a personne qui a remarqué quelque chose sur cette description []

E' : C'est aussi des rectangles

P : Merci. Ces deux faces là sont des carrés je suis d'accord avec vous, ce sont effectivement des carrés mais on avait vu que les carrés, c'étaient des rectangles particuliers donc on **peut pas** écrire ça **on peut pas** dire que il a deux faces qui ne sont pas des rectangles **c'est pas possible**.

L'enseignant de la classe d'accueil est hésitant face à la remarque de son élève : non seulement, le terme utilisé relève de la langue usuelle, mais de plus il ne correspond pas au bon non-ostensif. Pourtant, il décide de ne pas rectifier cette erreur, évitant ainsi d'avoir à introduire le terme 'hexagone'. Il se contente d'extraire l'information recherchée du discours de l'élève ('c'est pas un carré'), cautionnant tacitement l'expression utilisée. De son côté, l'enseignante de la classe ordinaire se montre particulièrement vigilante à la précision du lexique employé par ses élèves. Elle poussera la classe à corriger la formulation de l'élève interrogé et insistera sur l'aspect totalement inacceptable de l'approximation proposée : 'on ne peut pas dire', 'c'est pas possible'.

Cependant, la différence la plus frappante entre ces deux classes concerne les ostensifs utilisés pour désigner les solides. Chez M.T, sur les 96 allusions qui seront faites aux solides, la classe (essentiellement l'enseignant) utilise 92 fois le terme 'objet' (ce qui représente 96% des allusions aux solides), 1 fois le terme 'truc' (ce qui représente 1% des allusions aux solides), 2 fois le terme solide (ce qui représente 2% des allusions aux solides) et 1 fois la périphrase 'un objet on appelle ça de l'espace' (ce qui représente 1% des allusions aux solides). Autrement dit, dans 97% des cas, les solides ont été désignés par des termes

génériques ('objet' ou 'truc') qui peuvent concerner d'autres non-ostensifs. D'ailleurs, durant la séance, l'enseignant utilise une fois le terme 'objet' pour désigner une figure plane. Quant au terme 'truc', il est utilisé une fois par un élève et une fois par l'enseignant pour désigner une leçon du cahier. Le terme 'solide' n'est utilisé que lors de la lecture de la consigne d'un exercice. L'enseignant ne fournit alors aucune explication à son sujet puis réutilise dans le reste de la séance, le terme 'objet'. En comparaison (en anticipant sur ce qui suit), chez Mme M., pour désigner les solides, la classe utilise 4 fois sur 79 le terme 'objet' (soit 5% des allusions aux solides) et 75 fois sur 79 le terme 'solide' (soit 95% des allusions aux solides), ce qui inverse le rapport entre l'utilisation de termes spécifiques et génériques. Dans cette classe, le terme 'objet' n'est d'ailleurs utilisé qu'en début de séance pour définir le mot 'solide'.

Les conséquences de l'usage dans la classe d'accueil de termes génériques pour désigner les solides peuvent être multiples. Tout d'abord, si l'enseignant s'autorise à substituer au lexique spécifique aux mathématiques des termes du langage usuel, il ne peut ensuite justifier auprès de ses élèves l'apprentissage et l'utilisation des termes idoines (or cette leçon avait justement pour objectif de motiver le recours aux termes 'face', 'arête' et 'sommet'). Il est alors probable que les élèves de la classe d'accueil fassent moins attention à la précision de leur discours, d'autant que les mots leur manquent. On notera d'ailleurs que l'utilisation spontanée par les élèves de termes spécifiques aux mathématiques (employés à bon escient) est nettement plus fréquente dans la classe ordinaire que dans la classe d'accueil. En abandonnant une grande partie des exigences dans la précision du discours (des élèves, mais également de son propre discours), l'enseignant de la classe d'accueil risque d'occulter l'un des aspects fondamentaux de sa discipline : la rigueur. Il faut cependant prendre en compte le temps long et ce qui est fait ultérieurement pour avoir plus d'éléments sur ces points.

De plus, en privant la langue commune de la classe des termes spécifiques aux mathématiques, l'enseignant installe des pratiques langagières différentes de celles en vigueur dans les autres classes de mathématiques de ce niveau et cette communauté discursive va peu à peu s'isoler : comme elle ne partage pas les mêmes pratiques langagières (en grande partie normalisées) que les autres communautés discursives mathématique de 6^e, les formes de communication avec l'extérieur (par l'intermédiaire des manuels de mathématiques, des examens nationaux...) deviendront difficiles.

Il s'agit là de conséquences dues au fait que l'enseignant n'utilise pas les termes spécifiques aux mathématiques. Mais ici un problème supplémentaire se greffe : l'enseignant emploie en fait des termes génériques pour manipuler des non-ostensifs mathématiques. En effet, sans être les termes les plus adaptés, l'usage d'expressions telles que 'objets de l'espace' ou 'formes en trois dimensions' aurait tout au moins permis de désigner sans équivoque les solides alors que le mot 'objet' peut tout aussi bien représenter un pavé droit ou un rectangle. Par conséquent, l'enseignant et les élèves de la classe d'accueil ne disposeront pas d'ostensifs spécifiques pour les solides et les figures planes, ce qui rend toute distinction entre ces deux non-ostensifs difficile à énoncer. On peut d'ailleurs constater que pendant la quasi-totalité de la séance, l'enseignant de la classe d'accueil ne s'y aventurera pas. Ceci explique les assimilations figures planes/solides qui apparaissent dans le discours des élèves :

E (en parlant du pavé droit) : On prend le rectangle [...]

E (en parlant du cube) : le carré [...]

E (en parlant d'une pyramide) : Y'a un triangle

Le professeur sera dans l'impossibilité de corriger ces erreurs ne disposant pas de termes spécifiques pour distinguer les solides et les figures planes et cette assimilation va donc s'ancrer dans la classe au point de donner lieu à plusieurs quiproquos entre enseignant et élèves (six en tout dans la séance. Voir annexe) dont voici deux exemples :

P (à propos d'un pavé droit) : T'm'as dit y'a combien de rectangle t'à-l'heure t'avais dit

E : Quatre

P : Marque-le bè tu m'dis tu m'dis l'objet a quatre rectangle par exemple []

E : Non j'ai compris mais quand j'écris j'sais pas

P : Bè t'peux mar marque moi juste quatre rectangles c'est tout []

E : Faut pas le dire

P : Mais si il faut le dire et après

E : Non j'dis pas qu'c'est un rectangle

Le refus de cette élève d'employer le mot 'rectangle' peut s'expliquer par une assimilation erronée des solides et des figures planes. En effet, convaincue que l'objet qu'elle a choisi est un rectangle (elle précise elle-même 'j'dis pas qu' **c'est un rectangle**'), l'élève refuse d'utiliser ce terme pour le décrire puisqu'il est interdit de nommer le solide choisi. Toutefois l'enseignant, n'ayant pas identifié l'origine de cette méprise, ne sera pas en mesure de la dissiper.

De même, un peu plus loin :

E (en parlant du cube) : Un carré est une figure géométrique qui a 4 euh 8 sommets et

P : Attend 'tend 'tend 'tend tu m'parles du carré ou tu parle d'ton objet

La classe : Il l'a dit il l'a dit

P : 'tendez est ce que là y a un carré quelque part

La classe : Oui oui oui

P : Non non non non non un carré c'est pas ça un carré hein un carré c'est ça // moi j'ai pas d'carré là

La classe : Si

*P : d'accord tout ça c'est **un objet on appelle ça de l'espace** d'accord on arrive pas lui à le faire sur une feuille pour l'instant or que mon carré je l'fais sur une feuille donc c'est pas pareil là y a pas de carré là.*

Cet extrait nous prouve que cette assimilation entre figures planes et solides est partagée par une majorité d'élèves : la quasi-totalité de la classe s'imagine, en attendant l'un des leurs utiliser le mot 'carré', qu'il vient de nommer son solide. Ils maintiendront même leur position en dépit des remarques du professeur. Jusqu'alors, l'enseignant n'ayant pas vraiment perçu la nature ni l'ampleur de ces quiproquos, n'y avait pas remédié. Cette fois, 38 minutes après le début de la séance, il se sentira obligé d'éclaircir ce point, ce qui l'amènera à utiliser une expression spécifique pour désigner les solides et les distinguer des figures planes. On notera toutefois qu'il choisit la périphrase 'objet de l'espace' au lieu du terme appartenant au lexique spécifique aux mathématiques, c'est-à-dire le mot 'solide'. Cette explication, débitée à un rythme particulièrement rapide par l'enseignant, va clore effectivement les protestations de la classe mais on peut se demander si elle a été réellement comprise des élèves.

Quelles pourront être les conséquences de cette assimilation entre figures planes et solides sur l'activité mathématique des élèves ? Ces derniers seront dans l'impossibilité de réaliser la tâche que l'on attend d'eux. Il est en effet difficile en sixième de décrire un pavé droit par exemple sans utiliser le mot 'rectangle'. En conséquence, alors que dans la classe ordinaire tous les binômes parviennent rapidement à produire une description du solide choisi, les élèves de la classe d'accueil ne s'investiront pas vraiment dans la tâche proposée. Ils attendront passivement ou harcèleront l'enseignant en répétant 'je comprends pas' malgré les efforts de ce dernier pour réexpliquer la consigne. Dans cette classe, la phase de recherche des élèves durera alors trois fois plus de temps que dans la classe ordinaire, l'enseignant attendant d'obtenir certaines descriptions satisfaisantes avant de commencer la mise en commun. Finalement, il répondra à certaines sollicitations, allant même jusqu'à produire des effets Jourdain ou Topaze (Brousseau, 1998) : alors qu'il était initialement demandé de décrire un solide, l'enseignant réduira, pour une élève, l'enjeu de l'activité au dénombrement des faces carrées ou rectangulaires de son pavé droit, puis il finira par lui dicter la phrase à écrire. Il l'interrogera ensuite lors de la mise en commun en affirmant que c'est elle qui a fait le meilleur travail.

Cette faible activité mathématique des élèves lors de la phase de recherche, en référence aux activités possibles attendues sur cette tâche, aura des répercussions dans le reste de la séance: ne s'étant pas réellement investis dans l'activité, les élèves n'ont pas vraiment rencontré la problématique visée.

L'enseignant ne parvient donc pas à faire émerger de leurs discours les concepts ou pseudo-concepts⁵ (à défaut des termes) souhaités ce qui l'amène à introduire lui-même le lexique ciblé sous forme d'ostension déguisée :

P : qu'est ce qu'il vous manque comme vocabulaire pour trouver un pour mieux décrire

E : ...

P : est-ce que par exemple si je prends cet objet là ou c'lui-là ou c'lui-là un des trois t'les façons qu'est-ce que vous avez besoin de savoir comme mot pour mieux décrire l'objet

E : *rectangle*

P (*en montrant une face*): par exemple ça comment ç's'appelle ça

Par ailleurs, les outils langagiers nécessaires n'ayant pas été introduits, l'enseignant ne peut définir de manière correcte les savoirs introduits :

P (*en parlant d'une arête*) : oui ça **c'est un côté** aussi **on peut appeler ça côté** mais ça a aussi un autre mot [...] ça **ç's'appelle aussi un côté** mais y a un autre mot pour euh pour dire c' [...] y a un autre mot qui **veut dire aussi côté** mais bon c'est un **mot spécial** qu'on utilise en mathématique.

L'enseignant présente donc le terme 'arête' comme un synonyme du mot 'côté' sans pouvoir préciser leurs domaines d'application respectifs car il ne dispose pas d'ostensifs pour distinguer les solides et les figures planes. Il précise simplement que le terme 'arête' est 'un mot spécial qu'on utilise en mathématiques', sous-entendant que le terme 'côté' ne l'est. Dans ces conditions, la mémorisation des deux termes devient superflue.

Dans la classe ordinaire, la situation est radicalement différente. Dès les premières minutes, l'enseignante explique ce qui distingue les solides et les figures planes en utilisant des ostensifs spécifiques :

P : jusqu'à présent les figures qu'on avait vu /c'était des rectangles, des triangles, des carrés donc des choses qui étaient plates on pouvait facilement les dessiner au tableau ou sur une feuille parce que c'était très plat d'accord donc on avait l'habitude de voir ces figures là et aujourd'hui on va voir des objets qui au contraire sont beaucoup plus difficiles à dessiner parce qu'ils ne sont plus plats ils ont une épaisseur... [] d'accord ils ont

E : *Un volume.*

P : un volume comme tu dis c'est vrai donc on va voir des objets comme ça qui // des objets comme ça qui effectivement ont une épaisseur ou un volume hein et qu'on va appeler les solides

Même si la définition proposée n'est pas très rigoureuse, elle permet d'introduire le terme « solide » et de souligner les différences par rapport aux figures planes. Suite à cette explication de l'enseignante, on n'observe aucune assimilation entre figure plane et solide dans le discours des élèves, si ce n'est cette remarque, immédiatement reprise par un camarade :

E (*en parlant d'un cube*) : *C'est comme un carré*

E' : *Non, c'est pas plat*

Les binômes réalisent en autonomie les descriptions demandées et la phase de recherche est beaucoup moins longue que dans la classe d'accueil. Finalement, la première élève interrogée utilise dans sa description le terme 'face' et le pseudo-concept d'arête (qu'elle nomme alors 'côté'), puis la mise en commun permet de faire émerger les trois termes attendus.

Lors de l'institutionnalisation, l'enseignante a la possibilité de distinguer les termes 'arête' et 'côté' puisqu'elle dispose d'ostensifs spécifiques pour désigner les solides et les figures planes :

P : **dans un solide** ça on appelle pas ça un côté est ce que vous savez comment on appelle ça

⁵ D'après Vygotski, les pseudo-concepts supposent une certaine généralisation sans pour autant impliquer un degré de systématisme suffisant pour parler de concept.

Nous venons donc d'observer que dans la classe d'accueil, l'enseignant introduisait moins de termes spécifiques aux mathématiques que dans la classe ordinaire et que ce phénomène pouvait avoir de graves conséquences, à tel point qu'il empêchait la réalisation de la tâche par les élèves et l'institutionnalisation du vocabulaire visé. Il convient à présent de se demander à quoi ce phénomène est dû. En choisissant d'observer une classe d'accueil avec un enseignant spécialisé dans ce type d'enseignement et une classe ordinaire avec une enseignante n'exerçant que dans ce genre de classes, nous avons fait varier deux paramètres : les élèves et les enseignants. On peut donc se demander si le phénomène observé résulte d'une adaptation de l'enseignement à ce type d'élèves ou d'une spécificité propre à cet enseignant et indépendante du public auquel il s'adresse. Pour cela nous avons demandé l'année suivante à M.T de prendre exceptionnellement en charge pendant une heure une classe de sixième ordinaire et de leur proposer cette même leçon. Afin de ne pas influencer l'enseignant, aucune discussion concernant l'analyse de nos observations n'avait eu lieu entre ces deux séances.

b) 2^e année : Séance en classe ordinaire encadrée par M.T (voir annexe 1, 2 et 3)

Confronté à ce nouveau public, on note des différences dans l'attitude de M.T. Cette fois, il invitera les élèves à introduire le terme 'solide' :

P : (*en montrant un cube*) Comment on appelle ça en mathématiques?

E : Des faces.

E' : Des cubes

P : Alors, je veux pas le nom exact, voilà comment on appelle... le nom de tout ça. Tout ce que j'ai là. On les appelle des...

E : Des **solides**

P : Des **solides**, tout à fait.

Suite à cet échange, l'enseignant utilise majoritairement ce terme pour désigner le pseudo-concept 'solide', même si l'on retrouve plusieurs occurrences du terme 'objet'. Sur les 51 allusions aux solides, la classe utilise 26 fois le terme 'objet' (soit 51% des occurrences), 23 fois le terme 'solide' (soit 45% des occurrences), 1 fois l'expression 'objet dans l'espace' (soit 2% des occurrences) et 1 fois le terme 'volume' (soit 2% des occurrences), ce qui signifie que 49% des ostensifs utilisés sont des termes spécifiques. Si l'on est encore loin du pourcentage obtenu dans la séance en classe ordinaire avec Mme M (95%), le nombre d'occurrences de termes spécifiques est tout de même beaucoup plus important que dans la classe d'accueil (3%).

Par ailleurs, même si la distinction entre figures planes et solides n'est pas aussi clairement posée que dans la séance avec Mme M., l'enseignant rectifie tout de même les assimilations erronées des élèves :

E : (*en parlant d'un prisme droit à base hexagonale*) : un rectangle.

P : Un rectangle. Tout ça, c'est un rectangle?

E : Non, mais pas... juste sa face.

[...]

E (*en parlant d'un pavé droit*) : Le rectangle?

P : [...] Chaque face est un rectangle, ça, c'est vrai! Donc, ça c'est pas un rectangle. C'est fait avec plein de rectangles et c'est un **volume**.

Dans le premier échange, l'enseignant n'a pas besoin de terminer son explication car l'élève corrige lui-même son erreur. Dans le second, par contre, il ira au bout de son raisonnement et sera amené à utiliser un ostensif spécifique pour distinguer le pavé droit du rectangle : 'c'est un **volume**'.

En ce qui concerne l'introduction du terme 'arête', il n'est pas cette fois présenté comme un synonyme du mot 'côté'. Même si l'enseignant ne précise pas son champ d'application et si l'expression n'est pas très rigoureuse, la définition donnée ne peut s'appliquer qu'aux solides, puisqu'il le définit à partir des faces :

P : L'arête, c'est un peu la cassure qu'il y a ici entre la face ici et la face du haut.

Il spécifie d'ailleurs un peu plus loin que les trois termes introduits durant le cours ne peuvent être utilisés que pour la description des solides :

P : Y'a encore un troisième mot qui est important pour décrire **un objet** comme ça **dans l'espace** en mathématiques.

M.T introduit également d'autres termes spécifiques aux mathématiques :

P : Alors, celui-là, par contre, je suis sûr que vous savez le nom de ce solide.

Plusieurs élèves : carré

E : un **cube**

P : Très bien, un cube! D'accord?

De même, un peu plus tard :

P (*en parlant du pavé droit*) : Y'en a qui savent le nom ou pas? D'tout'façons, vous allez le voir juste après.

E : un **paralépipède**

P : Très bien! Il manque même encore un petit mot.

E : **rectangle**

P : Ben, c'est très bien. Un pa-ra-llé-lé-pi-pè-de rectangle. Comme c'est un nom très barbare, on a inventé un autre nom qui s'appelle aussi, un **pavé droit**.

On note ici que le terme attendu ne semble connu que d'une seule élève (elle l'énonce d'ailleurs avec une erreur puisqu'elle prononce 'paralépipède' au lieu de 'parallépipède', mais l'enseignant ne le relève pas). Pourtant M.T le reprend comme une connaissance commune à la classe. Il se montre même particulièrement rigoureux en invitant la classe à ajouter l'adjectif 'rectangle'. Finalement, il présente de sa propre initiative une nouvelle expression dans la langue commune de la classe : 'un pavé droit'.

Ainsi, on note que cette fois, M. T introduit davantage de termes spécifiques aux mathématiques et définit de manière un peu plus rigoureuse les savoirs manipulés. Par conséquent le phénomène observé en classe d'accueil constitue bien une adaptation de l'enseignant aux spécificités de ses élèves. Toutefois, le discours de M.T en classe ordinaire est tout de même moins rigoureux que celui de Mme M. Il s'agit donc également d'une spécificité de l'enseignant mais est-elle propre à M.T ou est-elle partagée par l'ensemble des professeurs qui enseignent depuis longtemps en classe d'accueil ? S'agit-il d'un trait de la personnalité de M.T ou d'une habitude prise au contact d'élèves ayant des difficultés langagières et qui persiste lorsqu'il se retrouve ponctuellement en présence d'élèves ordinaires ?

Une autre question se pose : cette adaptation des méthodes d'enseignement, dont nous avons pu observer les inconvénients sur l'activité mathématique des élèves, est-elle incontournable ? Ou est-il possible d'introduire dans une classe d'accueil les mêmes outils langagiers que dans une classe ordinaire, alors même que ce sera l'enseignant qui devra lui-même introduire presque tous les nouveaux mots ? Afin de répondre à ces questions, nous avons voulu filmer une nouvelle fois M.T dans une classe d'accueil mais en apportant quelques modifications à l'activité proposée.

c) 3 année : Nouvelle séance en classe d'accueil encadrée par M.T (voir annexe 1, 2 et 3)

Nous avons présenté l'année suivante à M.T les résultats de nos analyses et nous lui avons montré pourquoi l'introduction du pseudo-concept de solide était ici inévitable pour permettre aux élèves de réaliser la tâche demandée en autonomie. Nous avons également conçu une activité préparatoire permettant de mieux comprendre la consigne (et notamment le terme décrire), ce qui constituait l'autre grande difficulté à laquelle s'étaient heurtés les élèves de la classe d'accueil. Nous avons alors proposé à l'enseignant de reprendre cette leçon dans une autre classe d'accueil en tenant compte de ces observations. M.T craignait que l'introduction de nouvelles notions ne compromette la mémorisation du lexique visé, mais il a finalement accepté.

L'analyse de cette nouvelle séance fait apparaître des particularités dans le discours de l'enseignant. Même si cela n'avait pas été explicitement abordé lors de l'entretien, on remarque cette fois que l'enseignant invite davantage les élèves à introduire de nouveaux termes. Apparaîtront ainsi les termes de 'cône' et de 'pyramide' :

P (*montrant un cône*) : Regardez ça. Ca vous fait penser à quoi? [...] Ca vous fait pas penser à un cornet de glace? Ou à un cône de glace? Eh ben ça, on appelle ça un **cône**.

Lorsque les élèves utiliseront le mot 'pointe' pour désigner les sommets d'un solide, M. T essaiera également de faire émerger le terme exact, tout en soulignant la spécificité du lexique utilisé en mathématiques par rapport à la langue usuelle :

P : Est-ce que quelqu'un sait comment on appelle pointe en maths, car **en maths on a toujours des mots particuliers**.

E : ...

P : Tant pis, on continue avec pointe pour l'instant.

Par ailleurs, pour désigner le non-ostensif 'solide', M. T utilisera 17 fois sur 31 le terme 'objet' (soit 55% des occurrences), 3 fois sur 31 le termes 'solide' (soit 10% des occurrences), 3 fois sur 31 l'expression 'forme de l'espace' (soit 10% des occurrences), 4 fois sur 31 le terme 'volume' (soit 13% des occurrences), 1 fois sur 31 l'expression 'figure dans l'espace' (soit 3% des occurrences), 1 fois sur 31 l'expression 'objet en mathématique' (soit 3% des occurrences) et 2 fois sur 31 l'expression 'objet dans l'espace' (soit 6% des occurrences), ce qui signifie que l'enseignant a utilisé 45% des fois des termes spécifiques (si l'on considère l'expression 'objet en mathématique' comme une expression spécifique). Ce pourcentage est par conséquent beaucoup plus élevé que lors de la première séance en classe d'accueil. On note toutefois qu'au lieu du terme spécifique théoriquement attendu ('solide') l'enseignant préfère utiliser d'autres termes ou périphrase ('forme de l'espace', 'volume', 'figure de l'espace', 'objet de l'espace').

L'utilisation de ces ostensifs langagiers spécifiques permet à l'enseignant de distinguer les solides des figures planes et de rectifier les assimilations erronées des élèves :

P : ça c'est des formes de l'espace donc **ça a d'autres noms**. Ca ne s'appelle pas des carrés, ça s'appelle autrement. [...]

P : on a dit 3 fois, que ça c'est pas un carré. Un carré se dessine sur une feuille. Est-ce que ça rentre dans une feuille, ça? Non, ça dépasse. C'est une forme de l'espace, ça a un volume.

Dans ce dernier échange, une nouvelle différence apparaît par rapport à la première séance en classe d'accueil. Cette fois, l'enseignant s'appuie sur des éléments de théorie (un solide ne « rentre » pas dans une feuille ; ce n'est donc pas une figure plane) pour justifier l'introduction d'un nouveau lexique.

La distinction entre les solides et les figures planes (au niveau des pseudo-concepts, mais également au niveau de leurs dénominations) va autoriser les élèves à utiliser certains termes de la géométrie plane dans leurs descriptions, ce qui facilitera la réalisation de la tâche. D'ailleurs l'enseignant le précise lui-même, insistant ici sur le fait que l'élève peut utiliser le mot 'carré' dans sa description :

P : ça c'est des formes de l'espace donc ça a d'autres noms. Ca ne s'appelle pas des carrés, ça s'appelle autrement. Mais, **tu peux dire le mot 'carré', ça m'intéresse mot 'carré'**.

Quelles sont les conséquences sur l'activité mathématique de la classe ? On observe tout d'abord une plus grande autonomie des élèves lors de la phase de recherche (même s'il y a tout de même davantage de sollicitations de l'enseignant que dans les classes ordinaires). Cette meilleure dévolution de la tâche est certainement due en partie à l'activité préparatoire qui visait une meilleure compréhension de la consigne, mais également à cette autorisation faite aux élèves de décrire les faces de leur solide en utilisant des termes de la géométrie plane.

On note également des modifications lors de la phase d'institutionnalisation. Le fait de disposer d'ostensifs distincts pour désigner les solides et les figures planes va permettre à l'enseignant de définir de manière beaucoup plus correcte les termes introduits et notamment le terme 'arête' :

P : C'est vrai c'est des côtés / parce que quand on a vu quand on a fait les carrés / les carrés ils ont des côtés // donc les figures mathématiques ont des côtés / mais là comme c'est des **figures dans l'espace** / on a trouvé un nouveau mot pour dire côté // d'accord // [] Eh bien ce mot-là qui remplace côté **quand on parle de volumes** de choses comme ça / le mot ça s'appelle / arête [...]

Le terme 'arête' n'est plus du tout présenté comme un synonyme du mot 'côté'. Le domaine d'application de chacun de ces vocables est clairement défini : le mot 'côté' ne peut être utilisé que pour les 'figures mathématiques', comme les carrés alors que le mot 'arête' s'applique aux 'figures dans l'espace', aux 'volumes'.

L'analyse de cette séance nous montre donc que, suite à l'entretien que nous avons eu avec lui, M.T a introduit davantage de termes spécifiques aux mathématiques et que cela a permis d'améliorer l'activité mathématique de la classe : l'investissement des élèves dans la tâche demandée a été plus important et le discours de l'enseignant s'est révélé plus rigoureux.

Notons toutefois que cette activité a pris davantage de temps, à cause principalement de la mise en place de l'activité préparatoire mais également en raison du discours un peu plus long de l'enseignant. Ce paramètre ne peut être occulté, car les enseignants redoutent tout ce qui pourrait ralentir leur progression. Toutefois, dans la mesure où ils ont permis l'apparition d'une réelle activité mathématique dans la classe, ces aménagements nous paraissent incontournables pour un enseignant qui souhaite mener une telle séance dans une classe d'accueil.

Eléments de discussion

Nous avons pu constater que, dans la classe d'accueil la première année, l'enseignant évitait d'introduire les termes spécifiques aux mathématiques, alors que ce phénomène, quoique persistant, se révélait beaucoup moins fort lorsque l'enseignant était en présence d'élèves ordinaires. Comment expliquer ce changement dans le discours de l'enseignant ? Sensevy et Quilio (2002) précisent que « penser l'action linguistique signifie penser les échanges discursifs au sein des contextes qui structurent profondément la communication ». L'enseignant va plus ou moins consciemment adapter son discours au contexte d'élocution, c'est-à-dire notamment aux spécificités imaginées des récepteurs désignés. Or dans la classe d'accueil, les élèves sont caractérisés par leurs grandes difficultés langagières (c'est le critère qui a permis leur regroupement dans ce dispositif). Dans cette classe il est probable que les élèves n'aient jamais rencontré ces termes et en multipliant la quantité de notions nouvelles abordées, l'enseignant craint de compromettre la mémorisation des savoirs visés. Par conséquent, l'enseignant cherche à rendre son discours intelligible pour ses élèves et pour cela, il essaie de réduire autant que possible les termes qu'il introduit dans la langue commune de la classe. En effet l'introduction de chaque nouveau mot est beaucoup plus délicate en classe d'accueil qu'en classe ordinaire parce qu'elle nécessite une définition, ou tout au moins des explications difficiles à formuler lorsque la langue commune à la classe est lacunaire. Dans les classes ordinaires, au contraire, beaucoup des termes utilisés par l'enseignant lors de cette leçon (face, arête, sommet, solide, cube...) étaient déjà connus au moins d'une partie des élèves et il s'agissait davantage d'une réactivation que d'une véritable introduction.

Toutefois, nous avons pu observer dans la classe d'accueil, les risques que ce choix réducteur impliquait : outre les difficultés que l'enseignant a alors pour institutionnaliser correctement les connaissances abordées en savoirs réutilisables, l'absence dans la classe de certains ostensifs langagiers empêche les élèves d'effectuer les recherches attendues. Les élèves étant incapables de réaliser la tâche proposée en autonomie, l'enseignant s'est senti contraint de prendre en charge une grande part du travail qui leur était théoriquement dévolue, les privant ainsi d'une confrontation supposée bénéfique avec la problématique. En outre, dans ces conditions, la classe (élèves et professeur) ne disposait pas des outils langagiers nécessaires à un discours sur l'action effectuée : si l'on considère la praxéologie associée à la tâche

proposée (Chevallard, 1998), on dira que l'enseignant cantonne l'activité de la classe au niveau 'praxis' de la praxéologie, sans pouvoir aborder le niveau 'logos' qui permettrait de comprendre et de justifier les pratiques. L'enseignant espère que ses élèves vont assimiler les techniques visées sans avoir besoin de leur donner les éléments technologiques (voire théoriques) sur lesquels elles reposent. Les apprentissages ne peuvent alors s'effectuer que par mimétisme et répétition, ce qui compromet leur mémorisation et leur possible réinvestissement dans une autre situation. Ce recul devant l'introduction de ces ostensifs langagiers peut également avoir des répercussions dans les séances suivantes et risque de compromettre les apprentissages ultérieurs : la langue commune à cette classe d'accueil s'enrichit beaucoup moins vite que celle des classes ordinaires de même niveau, ce qui rendra de plus en plus difficile un éventuel discours sur les prochaines techniques abordées et poussera à nouveau l'enseignant à se cantonner au bloc praxis, amplifiant encore le phénomène.

Cette résistance de l'enseignant à l'introduction de nouveaux termes ne peut être assimilée à de la réticence didactique (Brousseau, 1998). En effet, on parle de réticence didactique lorsque l'enseignant s'interdit d'introduire certains savoirs afin de laisser les élèves rencontrer la problématique sous-jacente et construire eux-mêmes ces connaissances. Mais dans la séance observée, l'enseignant n'attend pas de ses élèves qu'ils introduisent la notion de solide et ses spécificités par rapport aux figures planes : lorsque les élèves se trouvent confrontés aux répercussions de l'assimilation 'figures planes'-'solides', loin d'encourager leur discours, il évite cette discussion et écourte ses explications lorsqu'il est finalement contraint de les donner. Il ne s'agit pas non plus de lacunes dans le 'Professional Knowledge Package', décrit par Liping Ma (1999) où l'enseignant ne transmet pas à ses élèves certains savoirs mathématiques parce qu'il en ignore l'intérêt pour la suite de leurs apprentissages. Ici, l'enseignant introduit le terme 'solide' dans la classe ordinaire, ce qui montre qu'il considère cette connaissance utile pour la séquence abordée. Son refus d'agir de même dans la classe d'accueil traduit donc une adaptation de son discours au type de public auquel il s'adresse : il restreint la diversité du lexique utilisé en pensant favoriser ainsi l'assimilation des quelques termes introduits. Nous parlerons alors de *refoulement didactique* pour qualifier ce type d'adaptations du discours de l'enseignant aux spécificités de ses élèves, qu'il s'agisse d'adaptations conscientes ou inconscientes.

On retrouve dans des recherches antérieures des traces de refoulements didactiques, y compris dans des classes ordinaires. Ainsi, Bosch et Perrin-Glorian (2011) décrivent l'attitude d'un professeur qui lors d'une ingénierie portant sur les programmes de calculs refuse d'introduire cette expression, en dépit de son intérêt manifeste lors de la mise en œuvre de ces activités. En effet, cette expression ne faisant pas explicitement partie des attendus institutionnels, l'enseignant préfère ne pas alourdir les apprentissages visés dans sa leçon. Au cours de cette analyse, Bosch et Perrin Glorian soulignent elles aussi l'enjeu que représente le choix des références langagières utilisées par l'enseignant. L'étude de nouvelles praxéologies mathématiques va nécessiter un discours qui risque de faire appel à de nouveaux ostensifs, notamment langagiers. Or le choix de l'ostensif utilisé sera lourd de conséquences : le recours à un terme de la langue usuelle risque de leurrer les élèves en raison des non-ostensifs qui sont habituellement liés à ce terme mais l'introduction d'un nouveau terme qui n'appartiendrait qu'à la langue spécifique aux maths, risque de ne pas être compris par la classe et de compromettre la communication entre professeur et élèves... L'enseignant hésitera donc à utiliser les ostensifs langagiers de la langue spécifique aux mathématiques alors que ces derniers sont les plus adaptés pour la manipulation du non-ostensif visé.

Peut-on éviter ou tout au moins minimiser ce refoulement didactique dont nous avons pu observer les dangers ? Notre dernière observation permet d'entrevoir certaines alternatives. Une sensibilisation à cette problématique ainsi que la donnée explicite des outils langagiers indispensables à la réalisation de cette activité ont notablement modifié le discours de l'enseignant et par suite le déroulement de cette activité : même s'il faut reconnaître que les aménagements effectués ont ralenti la séance, ils ont permis la mise en œuvre d'une réelle activité mathématique des élèves et d'une institutionnalisation plus riche.

Conclusions

L'objectif de cet article était double : d'une part illustrer comment certaines activités mathématiques nécessitent la manipulation d'outils langagiers; d'autre part, souligner le fait que l'enseignant ne permet pas toujours (voire évite) l'introduction de ces outils. Dans les séances analysées, il semble que cette réticence de l'enseignant à introduire des termes spécifiques aux mathématiques constitue une adaptation aux difficultés de ses élèves, ce que nous avons appelé *refoulement didactique*. Nous avons également observé comment cette attitude de l'enseignant, supposée faciliter les apprentissages des élèves, pouvait compromettre l'activité mathématique de la classe.

Pour percevoir l'ampleur de ce phénomène, il conviendrait de procéder à de nouvelles observations dans des classes d'accueil encadrées par d'autres professeurs afin de déterminer s'il s'agit là d'une adaptation fréquente des enseignants. Il serait également intéressant de chercher des manifestations de refoulement didactique dans des classes accueillant des élèves ayant d'autres types de difficultés, voire même dans des classes ordinaires. L'enseignant s'interdit-il également l'usage de certains ostensifs langagiers en dépit de leur intérêt pour la leçon abordée en pensant favoriser ainsi les apprentissages de ses élèves ? Quelles sont les conséquences de ce refoulement ? Si ce phénomène apparaît massivement dans le discours des enseignants, notamment en présence d'élèves ayant de grandes difficultés, il convient de s'interroger sur les possibilités d'enrichir les pratiques afin de préserver l'activité mathématique des classes. Lors de la dernière séance, en discutant avec l'enseignant ayant participé à notre expérimentation, nous avons pu atténuer ce phénomène. Il paraît donc possible de sensibiliser les enseignants à cette problématique et d'influer sur leurs pratiques. Il faudrait pour cela leur proposer une formation permettant l'anticipation des outils langagiers indispensables à la réalisation d'une activité donnée ainsi que les moyens pour introduire ces outils au lieu de chercher à les éviter. Ceci nécessiterait une sensibilisation des enseignants à l'intérêt des analyses a priori et a posteriori comme cela a déjà été proposée dans certaines ressources pour la formation (Robert, Pennincks et Lattuati, 2012). Par ailleurs, on pourrait également créer pour certains élèves des dispositifs qui viendraient s'ajouter aux cours de mathématiques ordinaires et qui viseraient l'accélération de l'apprentissage des compétences langagières indispensables à l'activité mathématique (voir Millon-Fauré, 2013). Sans cela, les enseignants de mathématiques, confrontés à un public en grande difficulté, continueront à actionner le seul levier sur lequel ils pensent pouvoir agir : abaisser le niveau mathématique de l'activité demandée aux élèves.

Bibliographie

Bernstein, B. (1971/ 1975). *Langage et classes sociales, codes sociolinguistiques et contrôle social*, Paris, Minuit.

Bernié, J-P. (2002). L'approche des pratiques langagières scolaires à travers la notion de communauté discursive : un apport à la didactique comparée ? *Revue Française de Pédagogie*. N°141, pp.77-88.

Bosch, M. & Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en didactique des mathématiques*. N°19 (1), pp.77-123.

Bosch, M. & Perrin-Glorian M-J (2011). Le langage dans les situations et les institutions. Actes de la XVI^e école d'été de didactique des mathématiques. Carcassonne. Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage. *La pensée sauvage édition*. Vol 1, pp.267-302.

Bronner A. & Larguier M. (2004). Le rôle du langagier dans la construction des savoirs mathématiques. Actes du 9^e colloque de l'association internationale pour la recherche en didactique du français (AIRDF). Québec.

Brousseau G. (1998). Théorie des situations didactiques. Grenoble : *la pensée sauvage*.

- Bucheton D., Bronner A., Broussal D., Jorro A. & Larguier M. (2005). Les pratiques langagières des enseignants : des savoirs professionnels inédits en formation. *Repères*. N°30.
- Chevallard, Y. (1994). Ostensifs et non-ostensifs dans l'activité mathématique, *Séminaire de l'Associazione Mathesis*, Turin, 3 février 1994, in Actes du Séminaire 1993-1994. Pp.190-200.
- Chevallard, Y. (1998). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. Cours donné à l'université d'été *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques*, La Rochelle, 4-11 juillet 1998 ; paru dans les actes de cette université d'été, IREM de Clermont-Ferrand, pp. 91-120.
- Chevallard, Y. (2007). Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. In L. Ruiz-Higueras, A. Estepa, & F. Javier Garcia (Eds), *Sociedad, Escuela Y Matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de la Didáctica (TAD)*, Actes du 1^{er} congrès international sur la théorie anthropologique du didactique. Baeza, Espagne, pp. 705-746
- Douady R. (1986). Jeu de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques*. N°7 (2), pp.5-31.
- Durand-Guerrier, V. (2011). Quelques apports de l'analyse logique du langage pour les recherches en didactique des mathématiques. Actes de la XVI^e école d'été de didactique des mathématiques. Carcassonne. Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage. *La pensée sauvage édition*. Vol 1, pp.233-265.
- Hofstetter, C. (2003). Contextual and Mathematics accommodation test effects for English- language learners. *Applied measurement in education*. N°16(2), pp.159–188.
- Jaubert M. & Rebière M. (2000). Le rôle des pratiques langagières dans la construction de savoirs en biologie. Comment permettre aux élèves d'entrer dans une communauté discursive scientifique scolaire. Rapport de la recherche INRP 'SCIENSCRIT' – L'écriture en sciences.
- Jaubert M. & Rebière M. & Bernié J-P. (2003). L'hypothèse « communauté discursive » : d'où vient-elle ? où va-t-elle ? *Les cahiers THÉODILE*. N°4, pp. 51 – 80.
- Jaubert M. & Rebière M. (2012). Communautés discursives disciplinaires scolaires et construction de savoirs : l'hypothèse énonciative. *Forum lecture*. N°3.
- Liping, M. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics*. Lawrence Erlbaum Associates.
- Margolinas C. (2003). Un point de vue didactique sur la place du langagier dans les pratiques d'enseignement des mathématiques. Construction des connaissances et langage dans les disciplines d'enseignement, Bordeaux.
- Millon-Fauré K. (2011). Répercussions des difficultés langagières des élèves sur l'activité mathématiques en classe : le cas des élèves migrants. Thèse de doctorat, Université de Provence - Aix-Marseille I.
- Millon-Fauré K. (2013). Enseigner les compétences langagières indispensables à l'activité mathématique. *Repère Irem*. N°90, pp.49-64.
- Rebière, M. (2011). S'intéresser au langage dans l'enseignement des mathématiques, pour quoi faire ? Actes de la XVI^e école d'été de didactique des mathématiques. Carcassonne. Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage. *La pensée sauvage édition*. Vol 1, pp.219-232.
- Robert A., Pennincks J. et Lattuati M. (2012). *Une caméra au fond de la classe, (se) former au métier d'enseignant de mathématiques du second degré à partir d'analyses de vidéos de séances de classe*. Besançon : Presses universitaires de Franche-Comté.

Sensevy G. & Quilio S. (2002). Les discours du professeur. Vers une pragmatique didactique. *Revue française de pédagogie*. N°141.

L.Vygotsky (1934/ 1985). *Pensée et langage*. Paris : Editions sociales.

Wang, J. and Goldschmidt, P. (1999). Opportunity to learn, language proficiency and immigrant status effects on mathematics achievement. *The journal of educational research*. N°93(2).

ANNEXE 1: Fiche de préparation commune des enseignants

OBJECTIFS :

- motiver l'utilisation des mots faces, arêtes, sommets à partir de la description de solides.
- dénombrement des faces, arêtes, sommets sur un solide, mais également sur un dessin en perspective cavalière.

DEROULEMENT :

1) Présentation des solides et de l'activité

Le professeur distribue 3 solides⁶ (un cube, un pavé droit et un prisme à base hexagonale) à chaque binôme. Les solides peuvent être désignés par un numéro collé dessus.

2) Recherche en binôme : description d'un des solides

3) Mise en commun : travail sur une ou deux descriptions

Un élève lit sa description et la classe essaie de deviner le solide ciblé.

Les élèves devraient utiliser certains termes (ou tout au moins certaines notions), parmi ceux visés.

Le professeur présentera alors le vocabulaire adéquat et l'expliquera aux élèves.

4) Recherche en binôme : reformulation de la description en fonction du vocabulaire appris

Les élèves doivent reprendre leur description en utilisant les termes 'faces', 'arêtes' et 'sommets'.

5) Mise en commun : travail sur une ou deux descriptions

Un élève lit sa nouvelle description et la classe tente à nouveau de découvrir le solide concerné.

6) Recherche individuelle : fiche de synthèse

Les 3 solides sont représentés sur une feuille en perspective cavalière. Les élèves doivent dénombrer les faces, arêtes et sommets en s'aidant éventuellement des véritables solides.

7) Correction de la fiche

8) Recherche individuelle : fiche d'exercice

Une feuille contenant de nombreux solides en perspective cavalière est distribuée. Les élèves doivent dénombrer les faces, arêtes et sommets uniquement à partir des représentations.

9) Correction de l'exercice

⁶ Les solides sont analogues pour chaque binôme, mais la taille et la couleur peuvent varier.

⁷ Prisme droit à base hexagonale

ANNEXE 2: Variations entre la première année et les suivantes

Il y a eu 2 changements majeurs entre la 1^e année (2005) et les suivantes :

1) A partir de la seconde année, les enseignants ont acheté de nouvelles collections de solides en remplacement des anciennes. Ces nouvelles collections comprenaient cette fois huit solides (un cube, un pavé droit, un prisme droit à base hexagonale, un prisme droit à base triangulaire, un tétraèdre, une pyramide à base carrée, un cône, un cylindre). Ce changement est totalement indépendant de cette étude, et ne répondait pas vraiment à une prise de conscience d'un défaut majeur de cette activité (qui en ne concernant que trois solides perdait beaucoup de son intérêt). Il fait simplement suite à la disparition de l'ancien matériel qui a motivé l'achat de nouvelles collections.

2) L'autre changement n'est apparu que dans la dernière expérimentation. Cette fois, il fait suite à une intervention du chercheur. En effet, lors de l'analyse de la première séance en classe d'accueil, deux problèmes majeurs étaient apparus : une incompréhension du terme 'décrire' par les élèves (point qui n'a pas été abordé ici) et l'absence du pseudo-concept 'solide' (qui constitue l'objet de cet article). Pour remédier au premier problème, il a été proposé à l'enseignant une activité préliminaire dont l'enjeu résidait dans la compréhension de la consigne. Il était demandé aux élèves de choisir une des sorcières ci-dessous puis de la décrire de manière à ce que leurs camarades la retrouvent :



Les fiches distribuées aux élèves étaient en couleur :

- Les sorcières n°1, 3, 7, 11, 13 et 15 avaient une robe bleue
- Les sorcières n°2, 6, 9, 10, 14 et 17 avaient une robe rouge
- Les sorcières n°4, 5, 8, 12, 16 et 18 avaient une robe verte

ANNEXE 3: Extraits de l'analyse a priori en lien avec les programmes officiels (Voir Millon-Fauré, 2011, p.311-318)

1) Présentation des solides et de l'activité

Le professeur distribue 3 solides (cube, pavé droit et prisme à base hexagonale) à chaque binôme. Les solides peuvent être désignés par un numéro collé dessus.

Les enseignants ont décidé d'introduire leur activité par la manipulation de solides concrets (un pavé droit, un cube et un prisme droit à base hexagonale), suivant en cela les recommandations officielles (« [les travaux] s'appuient sur l'étude de solides, [...] amenant à passer de l'objet à ses représentations et inversement »⁴³)

2) Recherche en binôme : description d'un des solides

❖ Etudions le type de tâche choisi. La '**description d'objets géométriques**' constitue une compétence importante à travailler durant l'année de sixième, notamment pour amener un autre élève à reproduire ('figures téléphonées') ou à identifier une figure ciblée². Elle fait d'ailleurs déjà partie des compétences à travailler au cycle 3 (« décrire un solide en vue de l'identifier dans un lot de solides divers »⁴⁴), même si elle n'appartient pas au socle commun des compétences exigibles à ce niveau.

Pourtant cette consigne est beaucoup plus délicate qu'elle n'y paraît. [...] Il existe en effet plusieurs sortes de descriptions. Citons quelques exemples :

- la description 'maximale' : si obtenir une description réellement exhaustive est bien entendu impossible, on peut essayer de donner tous les renseignements connus sur un objet donné. Il s'agit d'un exercice assez courant dans le cours de français, où l'enseignant invitera les élèves à préciser leurs descriptions.

- La description 'discriminante' : nous nommerons ainsi un recueil d'informations permettant d'isoler un objet donné parmi une collection. La description d'un même objet peut donc totalement varier lorsque l'on change de collections : pour discriminer une pie parmi une collection comprenant une vache, un cochon et une pie, il suffira de préciser qu'elle vole, alors que cette information sera totalement inutile pour isoler cet oiseau dans une collection comprenant une pie, un aigle et un rossignol. Effectuer la description discriminante d'un objet nécessite donc une certaine connaissance des propriétés des autres objets de la collection afin de trouver ce qui les distingue. Pour obtenir une description discriminante minimale d'un objet, il faudrait de plus se contenter des informations indispensables à ce tri. Pour certaines collections, on peut parfois trouver une 'base' de descripteur, c'est-à-dire un ensemble minimal de propriétés dont la donnée suffit à caractériser chaque élément de la collection.

L'enjeu de l'exercice conduit à penser que le professeur attend plutôt une description discriminante (la collection étant ici constituée des trois solides), voire discriminante minimale, mais combien d'élèves auront suffisamment compris la finalité du jeu pour saisir cette subtilité ? Il est d'ailleurs fort probable que les élèves ayant des difficultés langagières aient un peu de mal à appréhender le terme 'décrire', propre au français de scolarisation. [...]

La description des solides mathématiques est d'autant plus délicate qu'elle met en jeu des termes différents de ceux manipulés dans la vie courante pour la description des objets usuels. Ainsi les 'faces' d'une boîte ayant la forme d'un parallélépipède rectangle seront identifiées différemment en fonction de leur taille, de leur position, ou de leur fonction [...]. De même, l'on ne parlera pas d'arrête d'une porte, mais d'angle. Quant au terme 'sommet', l'idée de hauteur à laquelle il est généralement associé ('nous sommes arrivés au sommet de la montagne') éclipse totalement l'idée de forme qui aurait pu rapprocher les notions mathématiques et usuelles qu'il recouvre. Nous voyons ici que le champ lexical de la description des solides mathématiques diffère de celui utilisé dans la vie courante

pour la description des objets usuels si bien que l'on peut se demander à quel registre de langage les élèves auront recours lors de l'activité proposée.

Par ailleurs, si le but du jeu est de faire deviner à la classe un solide particulier, la description n'est certainement pas la méthode la plus efficace, ni la plus naturelle. Dans la vie courante, on essaiera plutôt pour désigner un objet de le montrer ou de donner son nom propre, c'est-à-dire l'appellation qui, telle un résumé d'une description 'caractérisante', permet sans ambiguïté de le distinguer des autres objets. Dans l'activité présente, deux informations peuvent jouer le rôle de nom propre : le nom commun correspondant à chaque solide car il n'existe qu'un représentant de chaque famille (par exemple 'parallélépipède rectangle'), et le numéro collé sur le solide qui a justement pour fonction de le caractériser. Il convient donc de préciser aux élèves qu'ils doivent faire deviner leur solide au reste de la classe, sans donner ni son nom, ni son numéro.

❖ On notera que le déroulement de la séance proposé paraît être conforme à ce qui est pensé en théorie des situations didactiques : après la dévolution de l'activité a-didactique, le professeur laisse aux élèves la responsabilité de l'action et offre à la classe un milieu (Brousseau, 1998) susceptible de leur apporter une validation de leur stratégie sans intervention extérieure. Remarquons toutefois les rétroactions ne viendront pas, ici, d'un milieu matériel, mais des autres camarades de classe qui en découvrant (ou non) le solide visé attesteront de la valeur de la description. Ce critère de validation prête à discussion car les élèves peuvent deviner le solide décrit sans que la description soit convenable (ce cas de figure est d'autant plus probable que le faible effectif de la collection considérée augmente les chances de trouver le bon solide en se fiant uniquement au hasard) ou réciproquement ne pas trouver le solide visé alors que la description est irréprochable (par exemple, s'ils ne la comprennent pas, ce qui, dans une classe d'accueil notamment, ne doit pas être exclus).

3) Mise en commun : travail sur une ou deux descriptions

Un élève lit sa description et la classe essaie de deviner le solide ciblé. [...] Les élèves devraient utiliser certains termes (ou tout au moins certaines notions), parmi ceux visés.

Dans l'optique d'une recherche d'une 'base' de descripteurs pour la caractérisation des solides, l'efficacité du système {nombre de faces, nombre d'arêtes, nombre de sommets}, qui se trouve être la réponse attendue par le professeur, est assez discutable. En effet, pour distinguer les trois solides proposés, il n'est ni nécessaire (le nombre d'arêtes et de sommets est inutile), ni suffisant (le cube et le pavé droit ont le même nombre d'arêtes, de faces et de sommets). Dans ce cas particulier, un système adéquat aurait plutôt été {nature de toutes les faces}. Le fait de pousser les élèves à introduire les trois termes ciblés risque d'entraîner une rupture du contrat didactique lors de la séance de classe. En effet, les élèves s'attendent à ce que la stratégie vers laquelle l'enseignant les mène se révèle la plus pertinente au regard de la tâche proposée. Or, ici, la stratégie attendue (dénombrement des faces, arêtes, sommets) n'est même pas une stratégie gagnante dans la mesure où elle ne permet pas de distinguer le cube et le pavé droit. Les enseignants ont, en fait, cherché un prétexte pour introduire le dénombrement des faces, arêtes et sommets, sans réaliser que cette technique ne répondait pas exactement à la tâche proposée. Cette erreur aurait pu être évitée en effectuant une véritable analyse a priori de la tâche. On peut même se demander si les élèves ne pourront pas remplir leur part de contrat (décrire un solide de manière à le faire deviner au reste de la classe) sans utiliser un seul des termes visés, par exemple en utilisant des critères de ressemblance avec des objets usuels ('mon solide ressemble à un dé' pour le cube, 'mon solide ressemble à une boîte à chaussures' pour le parallélépipède rectangle non cubique et 'mon solide ne ressemble ni à un dé, ni à une boîte à chaussures' pour le prisme à base hexagonale). [...]

Le professeur présentera alors le vocabulaire adéquat et l'expliquera aux élèves.

On pourrait voir là une phase d'institutionnalisation (Brousseau, 1997), permettant de transformer les connaissances construites par les élèves en Savoirs reconnus à l'extérieur de la classe. Mais nous venons de voir qu'il n'était pas sûr que l'activité proposée suffise à provoquer l'émergence de toutes les notions visées. [...]

ANNEXE 4: Progression 6^e (Année scolaire 2006/2007)

		Socle commun	Les autres compétences
Module 1	Les nombres entiers et décimaux	Lecture d'un nombre écrit en chiffre Ecriture en chiffre d'un nombre Demi-droite graduée, abscisse	Unité, dizaine, centaine, milliers, ... Décomposition : $78 = 7 \times 10 + 8$ Partie entière, décimale, dixième,... Fraction décimale : $7,8 = 7 + 8/10 = 78/10$ Comparer, ranger, encadrer des décimaux
	Tracer avec une règle ou une équerre	Droite, segment, milieu Savoir reconnaître et tracer des perpendiculaires, des angles droits	Reconnaître et tracer une demi-droite ; Nommer Tracer des parallèles Tracer carrés et rectangles à partir des côtés
	Additions et soustractions	Addition et soustraction de décimaux, problèmes	Calcul mental, posé, (sur machine) Ordre de grandeur, somme, différence, terme

Toussaint

Module 2	Tracer avec le compas	Vocabulaire du cercle : centre, rayon Nommer, reconnaître (dans un environnement complexe) et tracer des triangles, des triangles rectangles	diamètre, arc de cercle Reporter une longueur $A \in \text{au cercle} \Leftrightarrow OA = R$ Reconnaître et tracer des triangles isocèles ou équilatéraux, des losanges
	Multiplications	Tables de multiplication ; $\times 10, 100...$ Multiplication de décimaux ; Problèmes	Calcul mental, posé, (sur machine) ; $\times 0,1...$ produit, (facteur); Ordre de grandeur
	Les quadrilatères	Nommer, reconnaître et tracer les carrés et les rectangles .	Reconnaître, tracer losanges et cerfs-volants . Propriété des côtés et des diagonales
	Proportionnalité		Compléter un tableau de proportionnalité Agrandissement, réduction, échelle

Noël

Module 3	Espace I	Reconnaître un pavé droit, un cube	Interprétation d'une perspective cavalière Faces, arêtes, sommets Le parallélépipède rectangle
	Division euclidienne	Division euclidienne Coefficient de proportionnalité	Calcul mental, posé, (sur machine); Problèmes dividende, diviseur, quotient, reste Divisibilité par 2, 3, 4, 5, 9 et 10. Conversion sur les heures
	Les angles	Nommer un angle plat, droit, aigu, obtus	Comparer 2 angles avec gabarit (ou compas) Reproduire un angle avec le compas Angles des quadrilatères usuels
	Gestion de donnée I.	Lecture de tableaux Pourcentages . Comparer avec la moitié.	Calculer 50% de 334 et 17% de 200 Construction de tableaux

Hiver

Module 4	Le périmètre	Notion de périmètre	Périmètre du carré et du rectangle Calculer le périmètre du cercle (proportionnalité)
	Division décimale	Division décimale d'un décimal par un entier ; Problème ; division par 10, 100 des décimaux	Valeur approchée par excès ou défaut Reconnaître, compléter un tableau de prop. Conversions de longueur et de masse
	Symétrie axiale	Trouver les axes de symétrie de figures simples : quadrilatères, triangles... Reconnaître l'image d'une figure par une symétrie axiale	Médiatrice : construction et équidistance Compléter une figure ayant un axe de symétrie Tracer le symétrique d'un point, d'un segment, d'une droite, d'un cercle, d'un polygone
	Les fractions	Qu'est-ce qu'une fraction ? parts de gâteau, division. Reconnaître des fractions égales	a/b est le nombre qui multiplié par b est égal à a Passage de l'écriture décimale à fractionnaire Simplifier une fraction Placer une fraction sur une demi-droite graduée

Pâques

Module 5	L'aire	Notion d' aire (par dénombrement d'unités)	Aire du rectangle, du triangle rectangle Découpage en figures simples; Conversions
	Gestion de donnée	Lecture de diagramme bâton	Lecture de diagramme (semi-)circulaire Reconnaître un tableau de proportionnalité Calcul d'horaires et de durée
	Le rapporteur		Mesurer et tracer des angles avec le rapporteur Bissectrice d'un angle
	$\times$ par une fraction	Multiplier par la fraction a/b	Appliquer un pourcentage
	Espace II	Notion de volume (par dénombrement d'unités)	Les patrons Volume du parallélépipède rectangle Conversions; $1l = 1dm^3$

ANNEXE 5: Déroulement des séances en 6^e1 et 6^e6 (2005)

	6 ^e 1	6 ^e 6
Construction du jeu n°1 'description d'un solide choisi'	- Organisation pratique - Définition des règles - Organisation pratique (bis) - Définition des règles (bis) Durée 6 : 00 mn	- Apport des notions mathématiques (distinction plan / espace) Durée 6 : 40 mn
Déroulement du jeu n°1 'description d'un solide choisi'	- Recherche en binôme - Mise en commun : lecture d'une production élève - Validation Durée 17 : 30 mn	- Début de la correction de la production de Victoria Durée 7 : 00 mn
Institutionnalisation n°1 'description d'un solide choisi'	- Introduction du lexique spécifique : 'face' - Introduction du lexique spécifique : 'arête' - Introduction du lexique spécifique : 'sommet' - Rappel du lexique Durée 3 : 15 mn	- Fin de la correction de la production de Victoria Durée 3 : 40 mn
Construction du jeu n°2 'nature et dénombrement des faces etc... du solide choisi'	- Définition des règles Durée 0 : 05 mn	- Dévolution aux élèves - Rappel des notions mathématiques - Rappel des règles Durée 3 : 10 mn
Déroulement du jeu n°2 'nature et dénombrement des faces etc... du solide choisi'	- Recherche en binôme - Mise en commun : lecture d'une production élève - Validation - Apport de notions mathématiques (distinction plan / espace) Durée 13 : 45 mn	- Correction - Lecture d'une seconde production - Correction Durée 14 : 00 mn
Construction du jeu n°3 'Reconnaissance et dénombrement des faces etc... des 3 solides'	- Définition des règles - Rappel des règles Durée 2 : 25 mn	- Apport de notions mathématiques (perspective cavalière) Durée 2 : 40 mn
Déroulement du jeu n°3 'Reconnaissance et dénombrement des faces etc... des 3 solides'	- Recherche individuelle Durée 5 : 50 mn	- Apport de notions mathématiques (arêtes cachées) - Correction de la feuille Durée 5 : 20 mn
Construction du jeu n°4 'Dénombrement sur des perspectives cavalières'		- Définition des règles Durée 2 : 30 mn
Déroulement du jeu n°4 'Dénombrement sur des perspectives cavalières'		- Recherche individuelle - Vérification de l'exercice du jour Durée 3 : 40 mn

ANNEXE 6: Extraits de transcriptions (voir Millon-Fauré, 2011, p.189-264 Annexe)

2005: classe d'accueil avec M.T

P : je vous donne // trois objets à chaque groupe [...] donc je donne à chaque table comme ça un objet comme ça

E : *Et un carré*

P : Et un objet comme ça on dit pas de mots les mots tu les gardes pour ton groupe d'accord c'est bon chaque groupe choisit un objet

[...]

E : *On a l'droit de regarder dans le truc-là ?*

P : T'as le droit de fermer ton cahier non pas d'le fermer mais de pas regarder dans l'truc tu essayes juste avec des mots à toi de le décrire qu'est-ce qui vous manque. Qu'est-ce qui vous manque ?

E : *Rien*

P : Ah le truc un peu bizarre là c'lui-là

[...]

P : tout l'monde voit les objets là

E : *Oui*

P : Ils ont des numéros en plus ces objets voilà ça c'est le trois

[...]

P : Ha c'est quand même pas les mêmes à priori on v'pas les décrire pareil c'est pas les mêmes on essaye de marquer sur la feuille l'objet c'que c'est comment il est fait. d'accord pour tout l'monde ? à la fin Soumia ou Fati va au tableau et ils lisent c'qu'ils ont marqué et vous vous devez normalement trouver quel objet ils ont choisi d'accord ? c'est comme c'est pas l'mêmes Soumia si c'est elle qui vient en disant voilà notre objet nous bè y a avait ça ça ça v'pouvez dire ah donc c'est c'lui-là ah donc c'est c'lui-là d'accord pour tout l'monde ? vous essayez d' décrire bien les choses pour essayer un peu de faire deviner l'objet aux autres groupes.

E : *Monsieur il fallait les faire tous*

P : Non tu choisis un objet et les autres tu laisses tomber les autres hein tu euh t'en prends un et t'essaye de dire c'que c'est et dire comment il est fait pour après le faire deviner aux autres

[...]

P : vous avez pris quel objet dans les trois ?

E (*en montrant le pavé droit*) : *Lui ça c'est le rectangle*

P : Mais c'est où le rectangle

E : *Hum*

P : Où est-ce qu'il y'a un rectangle

E : *Ici*

P : Oui et y'en a que là des rectangles

E : *Non y'en a là*

P : Bè là déjà tiens t'pourrais p'être compter les rectangles

E : *Mais comment on fait*

P : Mais j'chais pas y'a combien de rectangles tu dis qu'y en déjà un ici et ici y en a combien de rectangles

E : *Trois*

P : Regarde

E : *Ah quatre*

P : Et bè marque le

E : *Ah*

P : Tu sais y a quatre rectangles e-et ça c'est quoi ça ?

E : *Un carré*

P : Combien y en a

E : *Deux*

P : Bè voilà marqu'moi déjà ça. Après t'vois si tu leur dis ça p'être qu'ils vont trouver un peu quel objet c'est

1^{er} quiproquo

2^e quiproquo

[...]

E : *On écrit pas rectangle*

P : Ho tu peux écrire c'que tu veux mais faut qu'à la fin les autres puissent deviner lequel quel objet

[...]

P : t'as choisi quel objet ? d'accord il faut que tu m'écrives des choses pour me le décrire dire c'que c'est d'accord ? comment il est fait cet objet donc il faut qu'tu marques quelques phrases quelques mots pour me dire c'que c'est comment il est fait ce truc là à la fin théoriquement tu vas venir au tableau avec ton cahier tu viens ici 'tend j'termine tu lis voilà mon objet que j'ai choisi y a ça y a ça y a ça et les gens doivent dire ah bè c'est facile donc c'est le un le deux ou le trois ils doivent trouver grâce à c'que tu as écrits l'objet que tu as choisi au départ est ce que tu crois que si tu leur lis c'que tu as marqué ils vont trouver l'objet ?

E : *Non*

P : Non j'crois pas non plus pas possible. ça-v-dire qu't'as pas assez bien décrit l'objet

[...]

E : *Monsieur j'ai pas compris*

P : T'm'as dit y'a combien de rectangles ? t'à-l'heure t'avais dit

E : *Quatre*

P : Marque-le bè tu m'dis tu m'dis l'objet a quatre rectangles par exemple et tu m'as dit combien tu m'as dit combien de carrés

E : *Non j'ai compris mais quand j'écris j'sais pas*

P : Bè t'peux mar marque moi juste quatre rectangles c'est tout et puis tu liras au tableau l'objet qu'on a choisi avec Baylé il a quatre rectangles et deux carrés

E : *Faut pas le dire*

P : Mais si il faut le dire et après

E : *Non j'dis pas qu'c'est un rectangle*

P : Mais si parce que tu m'dis qu'y avait a quatre rectangles c'est ça que tu m'as dit

E : *Oui c'est ça*

P : Bè tu tu marques que l'objet a quatre rectangles et deux carrés

E : *J'écris quatre ?*

P : Quatre rectangles et deux carrés [] d'accord et comme ça ils vont peut-être trouver quel objet c'est

[...]

P : Bè Rimane j'v'ais tout redire d'accord vous avez choisi un objet toutes les deux vous êtes d'accord sur un objet [] bon il faut que tu mettes des choses sur ton cahier pour essayer de décrire de dire comment il est fait cet objet d'accord Rimane ? [] Y'a pas besoin de savoir le nom [] Non le nom on verra après ça c'est pas grave c'est pas important d'accord ?

[...]

P : c'est bon ? r'gardez tout l'monde. vous regardez tout l'monde l'objet un deux et trois d'accord c'est bon ? tout l'monde Brahim j'viens dire quoi on r'garde l'objet un deux et trois [...] écoutez ce que Rosa vous dit et vous essayez un peu de voir un peu quel' de quel objet elle parle s'c'est le un deux ou trois. c'est bon on t'écoute

E : *Euh quatre rectangles*

P : Donc elle a pas fait d'phrase hein donc l'objet a d'après elle quatre rectangles

E : *Et deux carrés*

[...]

P : bè apparemment c'est bien c'qu'ell'a fait parce que tout l'monde à compris qu'c'était le un. [...] bon vous voyez en très peu de mots elle a réussi à décrire cet objet là parce que là on est on s'est pas trompé

[...]

P (*montrant la face hexagonale d'un des prismes*) : c'est quoi ça ? alors ça c'est compliqué hein ? c'est un carré ça ?

E : *Non*

P : Hamine

E : *C'est un rond*

P : Un rond... un rond... euh c'est rond... un rond... donc c'est pas un carré en tout cas c'est sûr. donc final'ment grâce à à ces quelques petits mots elle a réussi Rosa à nous faire deviner maint'nant essayez un peu de l'faire vous d'accord mais encore mieux qu'elle avec plus de mots d'accord ? qu'est-ce qu'il vous manque comme vocabulaire pour trouver un ... pour mieux décrire ? est-ce que par exemple si je prend

3^e quiproquo

cet objet là ou c’lui-là ou c’lui-là un des trois t’les façons qu’est-ce que vous avez besoin de savoir comme mot pour mieux décrire l’objet [] par exemple ça comment ç’s’appelle ça Une face Une face très bien ça s’appelle une face d’accord ça ça s’appelle aussi une face après la après la face peut-être un carré ou peut-être aussi un rectangle ou peut-être aussi c’qu’on veut hein [] tout euh tout est possible donc ça c’est un mot qu’on peut utiliser dans votr’ vous dans votre deuuh description on peut utiliser le mot face d’accord par exemple qu’on peut dire le nombre de faces par exemple combien y a de faces dans notre objet y a aussi une face qu’est-ce que c’est une face {}des carrés des rectangles ou autre chose ensuite essayez encore Rosa écoute un peu un peu Rimane. Brahim est ce qu’y a encore des des mots qu’il s’rait bien d’connaître pour décrire l’objet ?

P : Ah il fait ça Brahim. ça la c’ça comment ça s’appelle ça ?

E : *Sommet*

P : Sommet tout à fait les petits points là s’appellent les sommets ça peut être aussi bien p’décrire l’objet de savoir que ça ça s’appelle un sommet parce que du coup on peut faire quoi d’ces sommets on peut les compter on peut d’accord donc il y a deux mots qu’on peut utiliser pour décrire l’objet c’est face c’est face et sommet est-ce qu’y a encore un troisième mot qu’on pourrait utiliser pour décrire l’objet à votre avis

on a parlé de faces de sommet qu’est-ce qu’y a encore de-euh Fazida ?

E : *Angle droit*

P : Angle droit oui on peut utiliser angle droit mais y a pas encore un autre-euh

E : *Côté*

P : Côté c’est quoi un côté ouais c’est ça un côté oui ça c’est un côté aussi on peut appeler ça côté mais ça a aussi un autre mot quelqu’un connaît le mot ? [...] ça ç’s’appelle aussi un côté mais y a un autre mot pour euh pour pour dire c’

E : *Longueur*

E’ : *Largeur*

P : Largeur non y a un autre mot [...] y a un autre mot qui veut dire aussi côté mais bon c’est un mot spécial qu’on utilise en mathématique

E : *Face*

P : J’veus dis un peu le mot ? Ca s’appelle une arête [...] donc maint’nant on peut peut-être décrire nos objets parce que on a compris on a appris trois mots face c’est ça une face [] sommet tout c’qui pique touc touc touc pof pof pof pof pof pof pleins d’sommets et arête c’est un peu comme les côtés t’avais dit. grâce aux trois mots que j’veus vous écrire au tableau j’pense qu’v’pouvez maint’nant bien décrire l’objet qu’veus avez choisi en me disant rien que le nombre par exemple d’accord pour tout l’monde ? bon on refait l’exercice mais là grâce aux mots que je marque ça va pour tout l’monde ? la description c’est très bien Rosa parce que t’as vu grâce à euh à juste quelques mots ils ont compris que c’était le un qu’t’avais choisi al’tu refais la description du un mais avec les mots que je marque d’accord ?

[...]

P (montrant les faces carrés du parallélipède rectangle) : C’est quoi ça ?

E : *Des figures*

P : Oui mais quoi comme figures c’est quoi ça ?

E : *C’est des carrés*

P (montrant les faces rectangles du parallélipède rectangle) : et ça et ça c’est quoi

E : *Ce sont des faces*

P : Oui des faces mais c’est quoi les faces ce sont des tu m’as dit ? // les deux petits ce sont des ? //

E : *Ce sont*

P : Carré tu m’as dit c’toi qui m’a dit carré

E : *Oui*

P : Oui par contre les faces là quoi

E : *Ca et ça*

P : Ca ça c’est aussi des carrés ?

E : *Non*

P : C’est quoi

E : *C’est la longueur*

P : Non c’est quoi comme objet comment ça s’comment ça s’écrit ça c’est quoi ça

E : *La figure*

P : Ca c'est un carré d'accord mais ça c'est pas un carré ça c'est quoi ? // On l'a vu le mot Rima tu t'appelles // tout ça comme figure c'est quoi une figure qui a deux longueurs deux largeurs et quatre angles droits comment ça s'appelle tu m'as dit // bon essayez un peu de euh décrire hein [...] t'essayez un peu de m'dire qu'y a deux carrés et puis les autres faut voir te rappeler le nom d'accord Justine ?

P : il a combien de faces c'lui-là

E : Douze faces

E' : Deux euh douze non six

P : Six est-ce que les faces c'est toutes les mêmes ? c'est quoi exactement la face ? c'est un

E : Carré

P : Et là aussi un

E : Carré

P : Par contre là et là c'est quoi ce sont des

E : Faces

P : Ha mais y a un mot pour décrire ça

E : Des arêtes

E' : Des triangles

E'' : Des faces

E''' : Des arêtes

P : C'est marrant ça. ça c'est un carré et un carré allongé c'est quoi un carré allongé ?

E : Un losange

E'' : Un losange

E''' : Un rectangle

P : AAh un rectangle

[...]

P : Pareil que tout à l'heure les oreilles écoutent ce que raconte Cédic et les yeux sont là objet un objet deux objet trois [...] c'est parti on t'écoute

E : Un carré est une figure géométrique qui a quatre euh huit sommets et

P : Attends 'tends 'tends 'tends tu m'parles du carré ou tu parles d'un objet

La classe : Il l'a dit il l'a dit

P : 'tendez est ce que là y a un carré quelque part

La classe : Oui oui oui

P : Non non non non non un carré c'est pas ça un carré hein un carré c'est ça // moi j'ai pas d'carré là

La classe : Si

P : D'accord tout ça c'est un objet on appelle ça de l'espace d'accord on arrive pas lui à le faire sur une feuille pour l'instant or que mon carré je l'ai fait sur une feuille donc c'est pas pareil là y a pas de carré là

5^e quiproquo

6^e quiproquo

2005 : 6e ordinaire avec Mme M.

P : jusqu'à présent les figures qu'on avait vu /c'était des rectangles, des triangles, des carrés donc des choses qui étaient plates on pouvait facilement les dessiner au tableau ou sur une feuille parce que c'était très plat d'accord donc on avait l'habitude de voir ces figures là et aujourd'hui on va voir des objets qui au contraire sont beaucoup plus difficiles à dessiner parce qu'ils ne sont plus plats ils ont une épaisseur [] d'accord ils ont

E : Un volume.

P : un volume comme tu dis c'est vrai donc on va voir des objets comme ça qui // des objets comme ça qui effectivement ont une épaisseur ou un volume hein et qu'on va appeler les solides [...] bien donc vous regardez ces solides que je viens de vous présenter. normalement vous devez avoir trois solides [...] vous allez choisir un solide vous en avez trois devant les yeux vous en choisirez un tout à l'heure tout à l'heure vous en choisirez un et il va falloir le décrire il va falloir faire une description sur votre cahier chacun écrira la description sur son cahier au crayon à papier de manière à ce qu'après lorsque vous lirez la description les autres élèves puissent savoir de quel solide vous parlez d'accord ? donc il va falloir bien le décrire pour que les autres élèves savent sachent euh de quel solide vous parlez [...]

P : un élève va nous lire la description qu'il a tous les autres vont bien bien écouter pour voir si vous arrivez à deviner le solide dont il parle [...]

E : On peut le voir sur six faces en tout

P : on peut le voir sur six faces en tout //

E : Tous les côtés sont parallèles

P : deux secondes hein six faces // en tout

E : Tous les côtés sont parallèles

[...]

E' : I' sont pas parallèles les côtés là et là.

P : alors regarde Victoria // qu'est ce que tu en penses hein

E : C'est vrai

P : effectivement hein c'est pas parallèle et ensuite dans un solide ça on appelle pas ça un côté est ce que vous savez comment on appelle ça

E : C'est une arête

P : [...]est-ce qu'y a pas plusieurs solides qui peuvent vérifier cette description ? alors Tayeb est-ce qu'y a un autre solide qui pourrait vérifier cette description ? [...] non celle-là non parce qu'il te dit elle te dit qu'il y a six faces [...] ah alors la question c'est qu'est ce qu'une face ?

[...]

P : alors après victoria m'a parlé d'angle droit bonjour // [] bien donc effectivement victoria je pense que tu n'me parlais quand on regarde admettons cette face on voit qu'y a des angles droits c'est c'est ça qui t'intéressait là dedans bon en fait on [] en fait on va pas parler vraiment d'angle droit dans les solides enfè c'est pas heuu spécialement les angles droits qui vont nous permettre de le décrire c'est plutôt ce qu'y a là ce point là qu'y a et qui se trouve à l'intersection de deux arêtes qui piquent un peu quand on le touche qu'est ce que c'est ?

E : Un sommet

[...]

E' : C'est un cube

P : ha c'est un cube tu as raison tu as raison effectivement ce solide là s'appelle un cube hein donc qu'est ce que c'est comment tu le reconnais qu'est ce qu'un cube ? [] alors comment est-ce qu'on reconnaît qu'est ce qu'un cube ? Absa []

E : C'est comme un carré

E' : Non, c'est pas plat

P : c'est comme un carré attention un carré c'est plat comme te dis Christopher c'est quelque chose qu'on dessine d'accord là ça a une épaisseur donc ça s'appelle plus un carré [] Karima

E : Il a des faces

E' : Il a un volume

P : oui alors c'est pour ça qu'il n'est pas un carré qu'il est un cube parce que c'est c'est hê ce solide là a un volume hein donc on peut plus pas appeler ça un carré on appelle ça un cube [...] donc ces mots nouveaux qu'on vient de voir hein face arête sommet c'est vraiment le vocabulaire qu'il faut utiliser quand on parle des solides il faudra s'a s'habituer à utiliser les termes exacts et pour les solides bè voilà c'est ça face arête et sommet hein oui [] ha alors maintenant c'que vous allez faire v'allez relire la description que vous aviez faites de votre solide et vous avez vous allez regarder si vous avez utilisé les bons termes si par hasard ça serait pas bien de corriger en utilisant face arête et sommet et dans c'cas là vous corrigez sur votre description.

[...]

P : j'v'prendre la description de Marwen

E : Si je regarde les faces du solide, ce sont toutes des rectangles, sauf deux.

E' : C'est aussi des rectangles

P : merci Zoé. ces deux faces là sont des carrés je suis d'accord avec vous ce sont effectivement des carrés mais on avait vu que les carrées c'étaient des rectangles particuliers donc on peut pas écrire ça on peut pas dire que il a deux faces qui ne sont pas des rectangles c'est pas possible parce que ces faces là aussi ce sont des rectangles particuliers ce sont des carrés c'est tout hein ? alors comment est-ce qu'on pourrait tourner la phrase pour qu'ça soit correct ? Tayeb

E : Toutes ses faces sont des rectangles

E' : Deux sont des rectangles particuliers

P : alors et deux sont des rectangles particuliers c'est-à-dire comment on les appelle ces rectangles particuliers

E : Des carrés

P : des carrés et deux // c'est bon là d'sus alors vous recopiez cette description parce que maintenant elle est correcte // on va même mettre deux seulement sont des carrés pour différencier du cube.

E : C'est quoi le nom du solide, là

P : c'est vrai si quelqu'un [] chu si quelqu'un connaît heu le nom de de ce solide là mais sinon sinon je vous l'apprendrai plus tard est-ce que quelqu'un le connaît en levant le doigt [] en levant le doigt [] alors on le verra plus tard

[...]

P : vous allez tous le regarder pendant que Zina nous donne la description pour voir si ça correspond

E : Il a huit faces et douze sommets. Toutes ces faces sont des rectangles]

[...]

E' (en montrant une des faces hexagonales d'un des prismes) : Là, c'est pas des rectangles

[...]

E : Y'a des faces parallèles

P : alors tu as effectivement certaines faces qui sont parallèles tu as raison

E' : Mais y'en a qui sont pas parallèles

P : y'a en qui ne sont pas parallèles [] voilà exactement bien //

2006 : 6e ordinaire avec M. T.

P : Je vais vous montrer un peu des, des...un objet, 'fin quelques objets et puis après vous allez un peu en prendre à votre table et puis on va parler un peu de ça. [...]Qu'est-ce que c'est que cet objet? Comment on pourrait éventuellement le décrire? Ça va, décrire, ça va pour tout le monde? Dire ce que c'est. Oui?

E : *un hexagone.*

P : Un hexagone. J'écoute un peu pour l'instant, j'écoute un peu tout ce que vous dites. Vous pouvez me dire ce que vous voulez. Bon, si vous me dites que c'est une voiture, je vais pas vous croire, mais... j'écoute un peu. Rébecca.

E : *je crois que c'est un paralépipède, je crois.*

P : Un paralépipède, c'est ça? D'accord. J'écoute. Yanis.

E : *c'est pas un quintilatère*

P : Un quoi?

E : *Un quintilatère*

P : Quintilatère. C'est joli. Je sais pas, j'écoute, pour l'instant, donc... Un quintilatère, oui. Vous avez pas d'autres idées, je sais pas pour le... Comment on pourrait le décrire cet objet?

[...]

E : *un rectangle.*

P : Un rectangle. Tout ça, c'est un rectangle?

E : *Non, mais pas... juste sa face.*

P : Ah, y'a un mot qui arrive. C'est quoi, une face?

E : *J'sais pas l'expliquer, mais...*

E' : *c'est comme nous [...] c'est comme nous, comme ça, on est de face et quand on est comme ça, on est de droit.*

P : Et là, donc, y'a quoi ... y'a une face dans cet objet?

E : *Non. Y'en a plusieurs.*

[...]

P : Pour voir un peu si tout le monde sait c'qu'est une face, vous pouvez me dire si l'objet que j'ai ici dans la main, regardez un peu que tout le monde voit. C'est comme une boîte à chaussure, sauf que c'est plus petit, c'est une boîte en fait. Y'a combien de faces dans cet objet? J't'écoute. Plutôt que de me regarder à moi, regarde plutôt l'objet.

[...]

P : Donc un objet, c'est vrai qu'il a des faces. Qu'est-ce qu'on pourrait dire encore d'autre sur cet objet. Est-ce qu'il a que des faces, cet objet? Ou est-ce qu'il a encore d'autres choses, des mots qui serviraient à expliquer un peu ce que c'est que cet objet et à voir comment il est fait. Gwendoline. Je t'ai pas entendu.

E : *il a des arêtes.*

P : Il a des arêtes! Tout le monde connaît ou pas le mot "arêtes"? A part celles du poisson. Il a des arêtes, tout à fait. C'est quoi, une arête? On essaie un peu de décrire, de dire un peu ce que c'est qu'une arête? Juste une phrase, on essaie un peu de construire ce... ce qu'on vient de dire. On peut parler hein, y'a pas de soucis. Yanis.

E : *c'est quelque chose qui stoppe la... la continuité de ... j'arrive pas à le dire euh*

P : C'est une phrase compliquée, t'as commencé par une phrase compliquée.

E : *Un arrêt, c'est entre 2 faces.*

P : Un arrêt, tu dis?

E : *Une arête*

P : Une arête!

E : *Une arête, c'est entre 2 faces, y'a... Entre les 2 côtés, y'a un trait et c'est une arête.*

P : Ca, c'est très bien. [...] Entre deux faces, ça fait... c'est un peu comme si y'avait une cassure entre les faces. Vous avez vu? La face, par exemple, par rapport à vous, la face de droite et la face du haut, voyez, comme si on avait pris une face, un carton qu'on avait plié en deux, ça fait une arête.

[...]

P : Bon, tu vois c'est un peu... ça c'est une arête. C'est un segment une arête, hein, d'accord? Y'a combien d'arête dans cet objet?

[...]

P : Donc, trois mots à retenir : face, arête et sommet. D'accord pour tout le monde? Alors, maintenant, voilà un peu... Comment on appelle ça en mathématiques?

E : Des faces.

E' : Des cubes

P : Alors, je veux pas le nom exact, voilà comment on appelle... le nom de tout ça. Tout ce que j'ai là. On les appelle des...

E : Des solides

P : Des solides, tout à fait. Ce sont des solides, d'accord? Et après bien sûr, chacun a un nom particulier, on verra pas les noms, nous en 6^e, quelques-uns mais pas tous, mais après vous verrez dans le collège [...], ça vous le verrez bientôt, ça aussi, donc après, vous verrez chaque année un peu des nouveaux solides.

[...]

P : Ils ont tous un numéro qui est collé dessus, sur une des ... Chaque numéro est collé sur une des ...

E : Solides

P : Non. Sur une des ...

E : Faces

P : Faces.

[...]

P : Alors, voilà, je vous donne une feuille avec forcément plein de solides sur la feuille. Vous regardez tout de suite vers la partie haute de la feuille. Yanis, je viens de dire quoi? Je viens de dire qu'il fallait pas empiler. Je m'occupe pour l'instant de la partie ici, d'accord? Tout ce qui est marqué avant exercice numéro 1, ici. Il y a 8 solides qui sont faits sur la feuille. D'accord? Et vous, vous avez sur la table 8 solides également. Faut faire quoi à votre avis, ben reconnaître qui va où, d'accord? Donc, à chaque solide...

[...]

P : Donc les 8 objets que vous avez devant vous, ils sont forcément... c'est les 8 mêmes.

[...]

P : Les arêtes, c'est... Voilà, ça c'est une arête. Ça, c'est une arête. Entre deux faces.

[...]

P : alors là, on commence par celui qui est en haut à gauche, de solide, donc elle me marque le numéro de ce solide

[...]

P : O.K. Alors, celui-là, par contre, je suis sûr que vous savez le nom de ce solide.

La classe : carré

E : un cube

P : Très bien, un cube!

[...]

P : Donc, on en est au dernier... enfin au solide de la dernière ligne.

[...]

P : Il ressemble auquel le numéro 7?

E : C'est comme avant.

P : Oui, à celui qui est juste avant. Vous avez : 6-6, 12-12, 8-8.

E : Au cube!

E' : Ah oui, c'est les mêmes

P : Ca ressemble au cube. D'accord? Est-ce qu'il y en a qui savent le nom de ce... de cette... ce solide.

E : *Le rectangle?*

P : Non. Rectangle, c'est quoi? Chaque face est un ...? Chaque face est un...

E : *Carré*

E' : *Rectangle*

P : Oui. Chaque face est un rectangle, ça, c'est vrai! Donc, ça c'est pas un rectangle. C'est fait avec plein de rectangles et c'est un volume. Y'en a qui savent le nom ou pas? D'tout'façons, vous allez le voir juste après.

E : *un paralépipède*

P : Très bien! Il manque même encore un petit mot.

E : *rectangle*

[...]

P : Donc là on en est un peu à un autre solide, c'lui qui est à côté. Ça, j'crois que vous savez le nom de c'lui-là, on vous demandera après le nom.

[...]

P : on a fait plein de solides, y'en a 12 des solides, [...] de 1 à 12, c'est le numéro des solides, tout le monde voit un peu? Vous marquez par exemple pour le solide 1, y'a combien de faces, combien d'arêtes, et combien de sommets, d'accord pour tout le monde? [...]Et moi, je vais pouvoir ramasser tous les petits objets. [...]C'est quel objet c'ui-là?

2008 : 6e d'accueil avec M. T.

P : je vais vous donner / après / en mathématiques / des petits objets // [...]

E : *qu'est-ce que c'est ces trucs*

E' : *un cube*

[...]

P : Vous avez tous devant vous huit objets / d'accord pour tout le monde / ils sont tous numérotés [...] chaque groupe va choisir un objet parmi les huit / celui que vous voulez / le un le deux le trois jusqu'au huit / et après / les autres élèves doivent découvrir quel objet vous avez choisi /

[...]

P : donc il faut trouver quoi // eh ben / les différences entre ces objets-là

[...]

P : euhm // t'es sûr qu'avec ces questions-là tu vas réussir à trouver les objets qu'ils ont choisis.

[...]

E (en montrant le parallélépipède rectangle) : *triangle monsieur*

P : triangle / où ça triangle

E (en montrant le parallélépipède rectangle) : *rectangle monsieur // et lui c'est un carré (en montrant le cube)*

[...]

E : *est-ce que c'est un carré*

P : est-ce que // alors le problème / Myriam / c'est que un carré // c'est un carré (il dessine un carré au tableau) / d'accord // et ça est-ce que c'est des carrés / ça

E : *non // c'est des cubes*

P : ça c'est des formes on appelle ça

E : *des cubes*

P : des formes dans l'espace / donc c'est pas un carré // [...] là y'a aucun carré là pour l'instant // tous les objets ici n'ont pas le nom de carré / [...] est-ce que quelqu'un sait / comme ça hein // elle me dit que c'est des pointes / on comprend que les pointes / eh ben / c'est ça / évidemment que les pointes c'est ça // est-ce que quelqu'un saurait / par hasard // comment ça s'appelle en mathématiques des pointes // vous savez qu'en mathématiques ils ont toujours des vocabulaires / on a toujours des mots qu'on utilise c'est un peu / c'est un peu à nous ces mots-là [...] on imagine un autre jeu // il nous reste que deux objets dans la main / et on sait pas lequel a été choisi / donc quand on a plus que ces deux-là d'objets / vous voyez / numéro 4 et numéro 7 / [...] quelle question peut-on trouver pour savoir de quel objet on parle

[...]

E : *est-ce qu'il a la forme d'un carré*

P : est-ce qu'il a la forme d'un carré / on a redit déjà trois fois que le carré / c'est ça un carré / ça se fait / ça se fait sur une feuille le carré // d'accord / donc est-ce qu'il a la forme d'un carré / non / un carré c'est un carré

E : *cube / cube*

P : tu peux le faire sur une feuille sur une table // là si tu veux / tu peux faire ça sur une feuille // non / ça dépasse // ça ça s'appelle un volume c'est dans l'espace // [...] est-ce que l'objet forme // alors l'objet / il forme rien l'objet / l'objet il a des choses mais il forme rien // est-ce que l'objet a un angle droit [...]

P : On a dit que ça c'est déjà des pointes // on va garder mot 'pointe' / y'avait huit pointes // donc tu m'parle de côtés // d'accord / vous regardez un peu tout le monde [...] on a parlé des pointes pour l'instant / les pointes c'était bien / après on verra peut-être qu'il y aura un autre mot pour pointe / par exemple au numéro 4 y'a huit pointe / un, deux trois quatre cinq six sept huit. D'accord pour les pointes tout le monde

[...]

E : *ça c'est un carré.*

P : oui // ça c'est un carré / d'accord / Alors attention / attention hein // tout ça c'est pas un carré / mais / dans ça / qu'est-ce qu'on trouve des

E : carrés

P : on trouve combien de carrés

E : six carrés

[...]

P : dites-moi le solide / ça s'appelle un solide / numéro 5 [...] combien il a / j'vous rappelle on est toujours à pointes / combien il a / de / pointes [...] alors maintenant écoutez un peu / je vous apprend un mot / je reprends : le numéro six / c'est écrit un cône c'est le nom / c'est le nom de la forme mathématique ça s'appelle un cône / ça rappelle un peu / ben quoi

E : un rond

P : le cône // ça vous rappelle rien l'été / quand on a très chaud / quand on mange // quand on a très chaud qu'est-ce qu'on mange des //

E : des glaces

[...]

P : [...] quand on voit une montagne / quand on parle d'une montagne / qu'on veut décrire une montagne // le haut là le haut / on dit pas que c'est la pointe de la montagne / on pourrait le dire on comprendrait que c'est la pointe / y'a un mot qu'on utilise pour décrire le haut la pointe

E : c'est / c'est / c'est / le pic

P : le pic // y'a un autre mot qui m'intéresse plus

E : angle droit

P : attends / je te parle du haut de la montagne // qu'est-ce que tu me parles d'angle droit // t'as écouté la question [...] les gens là ils marchent peut-être qu'ils vont arriver après au //

E : sommet

P : sommet [...] sommet / c'est un mot qu'on va utiliser à la place de pointe [...] maintenant je vous apprend un deuxième mot // on a dit que lui / il était fait avec un carré / un carré / un carré / un carré / un carré / un carré / donc il était constitué avec six carrés d'accord // [...] // y'a aussi un mot // les carrés ici / d'accord // quand on décrit un objet on parle de / Amine / on parle de face / d'accord // là ici la face de l'objet ici / c'est un carré la face / alors qu'ici c'est un rectangle // donc on compte dans l'objet combien il a de faces [...] c'est quoi une figure qu'a six côtés //

E : égaux

E' : losange

E'' : parallèle

P : 3 côtés / triangle // 4 côtés on l'a vu / quadrilatère // 5 côtés / pentagone // 6 côtés des fois on le voit vous avez la France / ça a un peu cette forme-là // un hexagone

[...]

P : y'a un troisième mot important à savoir [...] Nassim / tu m'avais parlé tout à l'heure de // côté // [...] c'est vrai / c'est des côtés / parce que quand on a vu quand on a fait les carrés / les carrés ils ont des côtés // donc les figures mathématiques ont des côtés / mais là comme c'est des figures dans l'espace / on a trouvé un nouveau mot pour dire côté // d'accord // [...] Eh bien ce mot-là qui remplace côté quand on parle de volumes de choses comme ça / le mot ça s'appelle / arête // [...] et le troisième mot à utiliser pour dire c'est un objet en mathématiques / un objet dans l'espace / un volume / c'est le mot 'arête' // tu vois // arête / c'est comme le poisson / c'est quoi une arête de poisson / c'est un truc long / c'est un peu comme une pointe hein // voilà / c'est pointu / c'est un peu comme un // c'est quoi finalement c'est quoi / c'est un segment / oui / c'est quoi / c'est un trait / qui s'arrête sur un sommet.

QUAND ÉCRIRE C'EST FAIRE

Jean-Philippe DROUHARD

CeFIEC, FCEyN, Universidad de Buenos Aires

ERA 6308 I3DL, Université Nice Sophia Antipolis

Résumé :

Nous nous proposons de mettre en évidence le rôle que peut jouer le langage mathématique écrit dans la classe de mathématiques. Nous proposons des définitions provisoires de nombreux termes, en premier lieu de celui de « langage ». Nous délimitons et décrivons le langage des écritures du calcul symbolique dans ses dimensions syntaxique, morphologique, sémantique, transformationnelle et énonciative. Nous montrons en quoi ces écritures symboliques elles-mêmes, le langage qu'elles forment et ses particularités constituent à la fois la substance et l'objet de nombreuses activités langagières en classe.

Mots Clefs : didactique des mathématiques, langage, linguistique, morphologie, syntaxe, sémantique, dénotation, pragmatique, énonciation, embrayeur.

Abstract :

We aim to highlight the role of mathematical written language in language practices in the mathematics classroom. We propose provisional definitions of many linguistic terms, in the first place that of "language". We outline and describe the language of symbolic writings in its syntactic, morphological, semantic, transformational and enunciation dimensions. We show how the symbolic writings, the language they form and its features are both the substance and the subject of numerous language activities in the mathematics classroom.

Keywords: Mathematics Education, language, linguistics, syntax, semantics, denoting, pragmatics, enunciation, shifter.

1. PRÉSENTATION

Nous nous proposons de mettre ici en évidence le rôle que peut jouer le langage mathématique écrit dans les pratiques langagières dans la classe de mathématiques. Nous proposerons une brève description de la composante la plus spécifique de ce langage, celle des écritures du calcul symbolique, afin de montrer en quoi ces écritures constituent à la fois **la substance** et **l'objet** de nombreuses activités langagières en classe. Pour cela, nous devons proposer des définitions, au moins provisoires, de nombreux termes, en premier lieu de celui de « langage ».

Pourquoi faire le détour par l'analyse linguistique du langage mathématique écrit lui-même avant de regarder les pratiques langagières ? C'est qu'il en est de ces dernières comme des didactiques des disciplines : elles sont spécifiques d'un langage et c'est pour cela qu'il importe d'étudier celui-ci, aussi précisément que possible, dans ses diverses déclinaisons répondant à la variété des pratiques. Ce faisant, nous nous conformons au choix épistémologique caractéristique de la Didactique des Mathématiques de se centrer sur ce qui fait la spécificité de son objet.

Partons d'une observation banale : jusque très récemment, le seul élément de mobilier vraiment

indispensable dans une salle de cours dévolue aux mathématiques est un grand tableau noir ou vert ou (voire même, à l'université, plusieurs tableaux, pourvu qu'ils soient grands). Et sur ce grand tableau, le professeur ou les élèves dessinent des figures et inscrivent des signes immédiatement reconnaissables mais en général incompréhensibles, sauf de ceux qui les ont écrits (et encore, pas toujours) et des rares individus qui auront continué une certaine pratique des mathématiques. Aujourd'hui des écrans divers ont complété ou remplacé le tableau mais la problématique reste la même.

Notre hypothèse est la suivante : ces signes écrits (au tableau ou sur les écrans, sur les cahiers des élèves, dans les livres ou les notes du professeur) ne sont pas une simple notation de discours oraux. Au contraire il s'agit en soi d'un langage et une bonne partie des interactions langagières en classe de mathématiques se fait **avec, sur, et à propos** de ces signes écrits. Une autre façon de s'exprimer consiste à dire que nous faisons l'hypothèse qu'en mathématiques l'écrit est premier et que faire des mathématiques de nos jours, c'est essentiellement écrire, et transformer des signes.

Nous nous proposons ici de considérer ces signes du point de vue de la linguistique. Ceci nous permettra de déterminer, parmi ces systèmes de signes, ceux qui peuvent être considérés comme des langages, dans un sens qu'il s'agira de préciser. Une analyse sommaire utilisant quelques-unes des catégories de la linguistique nous permettra alors d'indiquer en quoi ces langages mathématiques écrits diffèrent des langues naturelles comme le français, et en quoi cela peut influencer sur les pratiques langagières en classe de mathématique. Le point de vue adopté revient à refuser de considérer les langages mathématiques comme de simples variantes des langues naturelles adaptées à l'activité mathématique. Au contraire, nous posons qu'il faut étudier d'abord le langage mathématique écrit en lui-même et pour lui-même, comme on étudie une langue, par exemple le chinois¹.

Le texte que nous présentons ici s'apparente à un article de vulgarisation. En effet, bien que mettre en œuvre une méthodologie linguistique rigoureuse soit fertile, dans la mesure où s'astreindre à la rigueur de ce type d'analyse, notamment aux niveaux syntaxique et sémantique, permet de révéler certaines caractéristiques et contraintes du langage qui autrement resteraient largement invisibles, cette mise en œuvre est souvent assez lourde et par là difficile à communiquer de manière concise. Ainsi, montrer **directement** qu'un système de signes constitue un langage suppose d'en écrire complètement la grammaire et de valider cette dernière (c'est à dire de montrer qu'elle permet d'engendrer, d'analyser et de donner un sens à toutes les phrases du langage – ici toutes les écritures mathématiques – et seulement à celles-ci). Cela suppose une exhaustivité fastidieuse dont les détails n'apportent pas grand-chose. Dans ce cas nous ne ferons guère plus que donner une idée de la manière dont le résultat annoncé est obtenu. On renverra le lecteur intéressé aux travaux – d'ailleurs peu nombreux – consacrés au langage du calcul symbolique écrit des mathématiques (voir par exemple Kirshner 1987, Drouhard 1992, Nicaud et al. 2001, Arzarello et al. 2012).

Cela étant nous avons bien conscience qu'un certain nombre d'observations que nous faisons dans cet article (par exemple concernant le rapport écrit-oral, l'activité méta-discursive, l'implicite, la dénotation ou encore la question des embrayeurs) mériteraient de bien plus amples développements mais nous avons préféré évoquer – quitte à rester superficiel – de nombreux aspects méconnus du langage des écritures symboliques pour leur effet sur les pratiques langagières en classe de mathématiques plutôt que d'en approfondir un ou deux.

2. QU'APPELLE-T-ON « LANGAGE » ?

Précisons tout d'abord un point de vocabulaire : en linguistique on parle **du** « langage » pour décrire (pour le

¹ la comparaison n'étant pas tout à fait anecdotique, en raison de son énorme diffusion et d'un système d'écriture idéographique pouvant coder des langues différentes

dire vite) la capacité générale des humains de communiquer au moyen de systèmes de signes, tandis qu'on désigne par « **langues** » (« le français », « le mandarin ») les systèmes linguistiques particuliers à des groupes d'humains, manifestations de la capacité de langage au sein de groupes sociaux (communautés linguistiques).

Donc, en toute rigueur, il faudrait parler de « langue » et non de « langage » mathématique, et même de « langues » au pluriel : il y en a autant qu'il y a de communautés langagières, chacune avec ses normes. Non seulement on ne parle pas **le** même mathématique en classe de 6ème et en Maths Spé', mais d'un strict point de vue linguistique une catégoricienne et une probabiliste sont deux mathématiciennes qui ne parlent pas non plus la même langue (même si une intercompréhension, au moins limitée, est possible, vu que les deux langues appartiennent à la même famille).

Toutefois d'une part on a pris l'habitude de parler de « langages formels » et de « théorie des langages » pour désigner les systèmes formels et de réserver le mot « langue » aux langues naturelles ; et d'autre part on a accoutumé de traduire en français ce que Chomsky appelle *language* (pour désigner l'ensemble des phrases engendrées par une grammaire) par « langage ». Nous considérerons donc ici « langue » et « langage » comme synonymes, et avons décidé d'utiliser les expressions :

- « **le** langage » (mathématique), pour désigner la capacité sémiotique générale, c'est à dire la capacité à communiquer au moyen d'un système organisé et partagé de signes,
- « **un** langage » particulier (en spécifiant son nom, par exemple : « le langage **du** calcul symbolique »), pour désigner la langue propre à une communauté de mathématiciens pour traiter d'une classe particulière d'objets mathématiques.

Pour pouvoir se demander si les écritures mathématiques forment un langage (ou plusieurs), il faut déjà savoir ce qu'on appelle un langage (ou si on préfère, une langue). Or en linguistique, il n'y a pas une définition unique et universellement partagée de la notion de langage : on doit donc choisir parmi les théories une de celles dont l'objet est tel que les écritures mathématiques puissent y être considérées comme constituant un langage. Qu'on se rassure, cela n'enlève rien à la rigueur de la démarche car, une fois le cadre théorique choisi, tout reste à faire : pour montrer qu'un système de signes est un langage il faut montrer explicitement qu'il satisfait aux critères requis par le cadre théorique.

On peut regrouper les théories linguistiques selon la manière, fonctionnelle ou structurale, qu'elles ont de définir la notion de langage (Drouhard, Panizza, Puig & Radford 2006). Certains auteurs privilégient une caractérisation fonctionnelle des langages, c'est à dire ce qu'ils permettent de faire. Pour Duval (1995) par exemple, « le propre d'une langue est de permettre un discours » (1995 p. 88) et cela suppose quatre fonctions discursives (fonction référentielle de désignation d'objets, apophantique d'expression d'énoncés complets, d'expansion discursive d'un énoncé complet et de réflexivité discursive – cette dernière fonction étant la capacité de marquer la valeur, le mode ou le statut accordé à une expression par celui qui l'énonce).

D'autres auteurs, à la suite de Saussure (1979) préfèrent caractériser un langage par son organisation, ou, en termes modernes, par sa structure (Ducrot & Schaeffer 1995 p. 36) ; c'est le cas par exemple de Chomsky (ibid. p. 77 sqq.). C'est ce dernier type de caractérisation que nous avons choisi d'adopter dans ce travail. En effet, comme nous le verrons, la façon dont un langage est défini dans la théorie chomskyenne dite « standard » (Chomsky 1971) permet de considérer qu'une écriture telle que « $2x^2+3x$ » est un élément (une « Phrase » dans le vocabulaire chomskyen) d'un langage, alors que cette même écriture (isolée), dépourvue de réflexivité discursive, ne peut être élément d'un langage au sens de Duval.

3. LE LANGAGE DES ÉCRITURES DU CALCUL SYMBOLIQUE

Nous faisons le choix d'étudier le langage symbolique « **savant** » (des mathématiciens), ou plus précisément les caractéristiques communes aux différents langages savants et non le langage des élèves. En effet nous nous plaçons dans la problématique de l'acquisition par les élèves de ce que les spécialistes des langues étrangères appellent une langue-cible. Nous nous intéressons aux particularités de cette langue-cible (ici le langage du calcul symbolique écrit) susceptibles de poser des problèmes aux élèves, particularités qui peuvent donc être l'objet d'activités langagières en classe en vue de la résolution de ces problèmes. Bien entendu il serait également possible – et intéressant – d'étudier directement les pratiques langagières **des élèves** dans leur apprentissage de cette langue-cible. On trouvera par exemple une étude assez systématique de certaines de ces pratiques langagières d'élèves dans la thèse de Colette Laborde (1982, chapitres 3, 5 et 6) ; mais il s'agit d'un autre travail qui déborderait du cadre que nous nous sommes fixé.

Nous nous proposons d'étudier le langage mathématique symbolique **écrit**. Ce choix s'écarte de la tradition de donner la primauté à l'étude de la langue orale initiée par Saussure dans son Cours de Linguistique Générale de 1916 (1979), choix clairement justifié par le fait qu'on apprend à parler sa langue maternelle avant d'apprendre à lire et à écrire sa langue maternelle ! Nous posons au contraire l'hypothèse qu'en matière de langage symbolique, l'oral est d'abord une **oralisation** de l'écrit. En effet, si le calcul peut être « mental », le raisonnement **sur** ce calcul est vite limité s'il n'y a pas la possibilité d'un support écrit. En effet, la parole **orale** n'existe physiquement que durant le bref intervalle de son énonciation – ensuite elle n'existe plus que dans la mémoire ; et encore, pour la retrouver, il est généralement nécessaire de reconstituer le flux du discours dans sa temporalité. La trace **écrite**, elle, est atemporelle (sa temporalité ne se manifeste qu'au moment du tracé des signes puis à celui de la lecture). L'importance de l'écrit est qu'on **peut accéder du regard à tout moment à n'importe quelle partie du discours**. C'est cette possibilité d'accès direct qui va contribuer à permettre le raisonnement mathématique, et partant, l'« expansion discursive » (Duval, 1995) ou, en d'autres termes, le caractère producteur de l'écrit (Serfati, 1997).

Il est à noter que la notion de **langage écrit** n'est pas aussi simple qu'il n'y paraît au premier abord ; en particulier, l'écrit n'étant absolument pas une simple décalque de l'oral, sa description met en œuvre des concepts linguistiques particuliers, tels que celui, entre autres, de « graphème » (Catach 1988). En outre le langage mathématique écrit présente des caractéristiques qui lui sont propres, par exemple la disposition bi-dimensionnelle des écritures (fractions, exposants, indices), où la taille (« fonte ») relative des caractères est un trait signifiant, ce qui n'a aucun équivalent dans les langues écrites dans un système alphabétique (Drouhard 1992).

Nous partons du travail pionnier de description du langage mathématique de Colette Laborde qui a montré que le langage mathématique est formé d'une langue naturelle (ici, le français) et d'écritures symboliques (Laborde 1982 p.18) :

Les textes mathématiques écrits présentent des spécificités qui transcendent les variations susceptibles d'exister d'un texte à l'autre. (...) : l'existence et l'imbrication de deux codes :

Dans un texte mathématique écrit sont utilisés deux codes : la langue naturelle et l'écriture symbolique (que nous notons $\mathbb{E}$), c'est à dire une écriture formée de signes extérieurs à la langue naturelle, tels que parenthèses, « + », « × » ou lettres et nombres. Ces signes peuvent entrer en combinaison suivant des règles spécifiques pour engendrer des expressions symboliques.

(...)

Le plus souvent les expressions symboliques sont insérées dans des phrases en langue naturelle.

Pour Laborde la question de savoir si le langage mathématique tel qu'elle le définit est bien un langage ne se pose pas, dans la mesure où il consiste en une série d'écritures symboliques insérées dans la langue naturelle – qui est évidemment un langage : il remplit donc les fonctions de communication au moyen d'un système de signes. Par contre, pour mener à bien notre démarche d'étude linguistique, nous ne pouvons pas ne pas nous poser la question de savoir si les écritures symboliques elles-mêmes forment ou non des langages.

La manière que nous avons choisie de décrire un langage satisfait à la double condition que celui qui le maîtrise puisse à la fois reconnaître et produire des énoncés jamais vus auparavant. Par exemple, le lecteur reconnaîtra sans peine que « 3216467651060516848794156 » désigne un nombre, pair au demeurant, bien qu'il ne l'ait vraisemblablement jamais vu auparavant. Pour cela, on considère que ce langage est engendré par ce que les linguistes appellent depuis Chomsky une **grammaire** (générative).

Dans ce modèle linguistique, on considère que toutes les **phrases** (dans le vocabulaire des grammaires génératives, « 3216467651060516848794156 » est appelée une « phrase ») sont engendrées par expansions successives d'un noyau à partir d'un **vocabulaire** de base (formé ici des dix chiffres « 0 », « 1 », ... , « 9 »). Ces expansions sont obtenues par des **réécritures**, qui consistent à substituer, dans une chaîne de caractères donnée², une partie de cette chaîne par une autre chaîne de caractères, selon certaines spécifications (la fonction « remplacer partout » des traitements de texte est un exemple de réécriture).

Ces réécriture suivent des règles qui définissent précisément ce qui peut être remplacé par quoi et dans quel contexte. Ces règles sont appelées « **règles de réécriture** » ; l'ensemble des règles de réécriture qui engendrent un langage donné est appelé la « **grammaire** (générative) » de ce langage (le langage étant alors défini comme l'ensemble des phrases engendrée par la grammaire).

Les règles de réécriture **récurrentes** sont des règles telles que la réécriture de la chaîne initiale puisse présenter une occurrence de cette même chaîne initiale (par exemple, pour engendrer un langage formé d'éclats de rire, la règle : « remplacer chaque occurrence de « Ha ! » par « Ha ! Ha ! »). Les règles de réécriture récurrentes permettent d'engendrer une infinité de phrases (ici : { « Ha ! », « Ha ! Ha ! », « Ha ! Ha ! Ha ! Ha ! »... })

Une grammaire engendre donc des phrases, formant un langage ; inversement, à toute phrase bien formée, la grammaire du langage permet d'associer sa **structure**, caractérisée par la suite des réécritures ayant abouti à cette phrase, structure que l'on peut représenter par un **arbre** (Nicaud, Bouhineau & Gélis 2001).

Exemple : la grammaire suivante engendre les écritures décimales des nombres **entiers** :

RR1 (1^{ère} règle de réécriture) : Dans toute chaîne de caractères où se trouve une occurrence de « Chiffre », substituer à cette occurrence le caractère « 0 » ou « 1 » ou ... ou « 9 ».

RR2 (2^{ème} règle de réécriture) : Dans toute chaîne de caractères où se trouve une occurrence de « Écriture_décimale_d'entier », substituer à cette occurrence ou bien la chaîne « Chiffre » ou bien la chaîne « Écriture_décimale_d'entier Chiffre »³.

2 « chaîne de caractères » est le terme technique (rigoureusement défini) employé pour désigner les suites de chiffres, de caractères alphabétiques et de symboles (tels que « $2x^2$ » ou « somme_algébrique ») du langage. Dans les grammaires chomskyennes les noms des catégories linguistiques, qui désignent la nature d'une expression (par exemple « somme ») sont considérées comme des chaînes de caractères tout autant que les expressions produites (par exemple « $2 + 3$ »).

3 Dans la réécriture par RR2 d'une chaîne de caractères où se trouve une occurrence de « Écriture_décimale_d'entier », on peut retrouver une occurrence de « Écriture_décimale_d'entier » : RR2 est donc récurrente.

Exemple de réécritures engendrant l'écriture décimale «2014»⁴ :

	« <u>Écriture décimale d'entier</u> »	RR2 →	« <u>Écriture décimale d'entier</u> <u>Chiffre</u> »
RR1 →	« <u>Écriture décimale d'entier</u> 4 »	RR2 →	« <u>Écriture décimale d'entier</u> <u>Chiffre</u> 4 »
RR1 →	« <u>Écriture décimale d'entier</u> 14 »	RR2 →	« <u>Écriture décimale d'entier</u> <u>Chiffre</u> 14 »
RR1 →	« <u>Écriture décimale d'entier</u> 014 »	RR2 →	« <u>Chiffre</u> 014 »
RR1 →	« 2014 »		

Dans cet exemple, le choix de l'option non récursive de RR2 (substitution de « Chiffre » à « Écriture décimale d'entier ») comme avant-dernière réécriture permet d'arrêter la procédure d'expansion. Il suffit alors d'appliquer une dernière fois RR1 pour obtenir la phrase finale.

Ici, « Chiffre » et « Écriture décimale d'entier » forment ce qu'on appelle des **catégories** grammaticales. On peut dire également que « la nature de « 123 » est d'être une Écriture décimale d'entier » et que « la nature du « 1 » de « 123 » est d'être un Chiffre ».

Les écritures décimales **d'entiers**, engendrés par une grammaire, forment donc un langage au sens de Chomsky (et seulement dans ce sens).

Pour montrer rigoureusement qu'un système de signes est un **langage** au sens de Chomsky, il faut donc (et il suffit d') en établir la grammaire, c'est à dire la suite des règles de réécriture qui engendre toutes les expressions du système et seulement celles-ci. Le problème a été résolu dans le cas des écritures symboliques de **l'algèbre élémentaire** par David Kirshner (1987) et, par des voies différentes, par nous même (Drouhard 1992). Cela a été également indirectement confirmé par le travail de Jean-Michel Gélis sur le logiciel APLUSIX (Nicaud et al. 2001).

Une fois démontré que les écritures de l'algèbre élémentaire forment un langage au sens de Chomsky, l'extension de ce résultat à **l'ensemble des écritures du calcul symbolique** va de soi. En effet, il suffit d'observer ces écritures, aussi compliquées soient-elles⁵, pour s'apercevoir qu'elles sont toutes construites sur le même modèle : un opérateur et (son ou) ses opérandes, lesquels à leur tour peuvent être formés d'un opérateur et de ses opérandes et ainsi de suite. Précisons qu'un « opérateur » n'est pas forcément lié à une opération au sens mathématique du terme, mais plutôt à un « assemblage » d'écritures (Serfati 1997 p. 62). Ainsi, un terme indicé tel que « u_n » est constitué de l'opérateur Mise en Indice et de ses deux opérandes, « u » et « n ». En termes de règles de réécriture, un opérateur est associé à une catégorie ; en termes d'arbres décrivant la structure linguistique, un opérateur est un embranchement (ou « nœud »).

Par exemple, l'expression « $f(x) = 2x^2$ » qui appartient au langage de l'analyse, est formée par l'opérateur à deux places Égale_à, marqué par le signe « = », et ses deux opérandes.

- Le second opérande (membre) de l'égalité est formé par l'opérateur à deux places Multiplié_par et de ses deux opérandes appelés « facteurs ».
L'opérateur Multiplié_par n'est pas non plus marqué par un symbole explicite, mais par la seule juxtaposition de deux facteurs.
- Le premier opérande (appelé « membre ») de l'égalité est formé par l'opérateur à deux places

4 pour plus de clarté nous soulignons à chaque étape la partie de la chaîne de caractères destinée à être réécrite.

5 En excluant les schémas, qui contiennent des écritures symboliques mais ne se réduisent pas à des écritures.

Fonction_de et de ses deux opérandes « f » et « x ».

Il est à noter que l'opérateur Fonction_de n'est pas marqué par un symbole explicite, mais par la seule juxtaposition de ses deux opérandes, le second étant délimité par une paire de parenthèses.

- Le premier facteur est l'Écriture_de_nombre « 2 ».
- Le second facteur est formé par l'opérateur à deux places À_la_Puissance et de ses deux opérandes, appelés respectivement « base » (ici « x ») et « exposant » (ici « 2 »). L'opérateur À_la_Puissance est marqué par la juxtaposition de la base et de l'exposant, lequel est marqué et délimité typographiquement par une diminution de sa taille relative et une élévation au-dessus de la ligne courante.

Si toute écriture symbolique peut être décomposée en termes d'opérateurs et d'opérandes, alors on peut dire que toute écriture peut être décrite par une suite d'applications de règles de réécritures. Dans notre exemple, dire qu'une égalité est formée de l'opérateur Égale_à et de ses deux opérandes appelés « membres » est équivalent à une règle de réécriture de type :

- RR Éga : remplacer « Égalité » par « Écriture_décimale_de_nombre » OU « Variable » OU « Fonction » OU « Somme » OU « Produit » OU « Fraction » OU « Puissance » OU « Racine », suivi de « = », suivi de « Écriture_décimale_de_nombre » OU « Variable » OU « Fonction » OU « Somme » OU « Produit » OU « Fraction » OU « Puissance » OU « Racine ».

Ainsi par exemple « $f(x) = 2x^2$ » est engendré à partir de la chaîne de caractères « Fonction = Produit » laquelle à son tour provient par réécriture de la chaîne « Égalité ».

Dans le cas de l'égalité, les deux sous-expressions situées de part et d'autre du signe « = » (dont la catégorie est : Écriture_décimale_de_nombre OU Variable OU Fonction etc.) sont les « membres » de l'égalité. Ce sont les **opérandes** de l'opérateur Égale_à. En linguistique générative, on dit des opérandes qu'il remplissent une **fonction syntaxique** (voir ci-dessous §5.2 Syntaxe).

Cet exemple illustre le fait que, pour des raisons techniques de cohérence des règles de réécriture (Ruwet 1967) « premier membre » et « second membre » ne peuvent pas être définis en termes de catégories. En outre, il faut bien préciser quels types d'écritures peuvent constituer chaque membre de l'équation. Par exemple, une Égalité ne peut pas être un membre d'une Égalité (sinon on ne saurait pas qui est opérande de qui), pas plus qu'elle ne peut être un terme d'une Somme.

Dire que toute écriture peut être engendrée par une suite de réécritures revient à son tour à dire que les écritures symboliques mathématiques forment un langage au sens de Chomsky.

La raison principale de s'intéresser à la syntaxe du langage des écritures du calcul symbolique mathématique est que ce langage est bien plus complexe qu'il n'y paraît de prime abord. Une grande partie de cette complexité provient du fait que les opérateurs, pas plus que les délimiteurs, ne sont pas tous marqués par des symboles explicites. Si c'était le cas (c'est le cas en général des langages de calcul informatiques qui tolèrent mal l'implicite) notre exemple ressemblerait à quelque chose comme « $((f) \rightarrow (x)) = ((2) \times ((x)^{(2)}))$ », écriture totalement dépourvue d'ambiguïté... et assez peu lisible.

Or on sait bien les terribles difficultés qu'ont les élèves à maîtriser la notation du produit liées au fait qu'il n'est pas toujours marqué par un symbole explicite (« $\times$ » ou « $\cdot$ »). Une partie des pratiques langagières en classe vont donc porter sur l'explicitation de ces implicites syntaxiques.

Par ailleurs la syntaxe des écritures symboliques est très différente de celle du langage naturel : en particulier l'ordre des parties dans l'écriture (déterminé par les emboîtements d'opérateurs) ne correspond pas du tout à l'ordre des mots dans la phrase en français. Comparer par exemple : « le carré du produit de la somme des nombres a et b par leur différence » et « $((a+b)(a-b))^2$ ».

Les élèves doivent apprendre à maîtriser, certes progressivement, le langage des écritures du calcul symbolique mathématique ; or aucune grammaire de ce langage n'est disponible, ce qui fait que cet apprentissage se fait (s'il se fait) « sur le tas », par essais et erreurs, en interaction avec l'enseignant qui, lui, le maîtrise. Ces interactions langagières, portant donc sur le langage du calcul symbolique, vont constituer la trame d'une partie des pratiques langagières en classe.

4. LES AUTRES LANGAGES SYMBOLIQUES

En réalité, le langage des écritures du calcul symbolique peut être subdivisé en une **famille** de langages qui tous sont des langages au sens de Chomsky : le langage du calcul arithmétique écrit (sans lettres), celui du calcul algébrique (avec des lettres servant à noter des inconnues et des indéterminées), celui de l'analyse (avec des lettres servant à noter des variables et des fonctions), celui du calcul vectoriel, des ensembles, de l'algèbre abstraite, de la logique etc. Les élèves apprennent ces langages successifs au fur et à mesure, et doivent apprendre à gérer les différences qu'il y a entre ces langages qui, s'ils partagent la même structure syntaxique, (opérateurs et opérandes) présentent parfois des différences importantes par exemple sur le plan sémantique. C'est le cas bien connu du signe « = » dont l'emploi et la signification **diffère** fortement en arithmétique et en algèbre. Ici aussi, l'explicitation de ce genre de différences est (ou devrait être) l'objet d'activités langagières en classe.

Les **écritures décimales de nombres**, quant à elles, sont les écritures des nombres en « chiffres arabes » ; elles ne contiennent aucun signe d'opération. Elles sont engendrées par des règles de réécriture et donc forment un langage au sens de Chomsky. Or, bien que les écritures décimales de nombres fassent partie des constituants des écritures du calcul symbolique, nous considérons qu'elles forment un langage distinct. En effet, ne contenant aucun signe d'opération d'aucune sorte, leur structure n'est pas basée sur des opérateurs et des opérandes et est donc complètement différente de celles des écritures symboliques que nous venons de voir ; d'où la décision de considérer qu'il s'agit d'un langage différent, dont les écritures produites, par exemple « 1,23 », servent d'éléments du vocabulaire de base du langage des écritures symboliques mathématiques.

Par ailleurs il est intéressant de constater que tout au long de l'histoire des mathématiques, l'écriture des nombres a suivi une évolution propre avec ses progrès, ses abandons et ses régressions, évolution distincte de celle de l'expression des problèmes arithmétiques et de leur résolution (ancêtres des écritures symboliques). Ainsi, le système babylonien des écritures sexagésimales de position, qui permettait d'écrire tout nombre rationnel avec une précision arbitraire, coexistait-il avec une formulation rhétorique des problèmes. L'écriture babylonienne des nombres était bien meilleure sur le plan des possibilités de calcul que le système grec, par exemple, basé sur les lettres de l'alphabet, bien que plus tardif (Haas 1988). Celui-ci permettait en effet une notation des nombres mais aucunement un calcul (lequel se faisait bien plutôt avec des abaques ou des *calculi* – des petits cailloux). Par contre, la formulation géométrique des problèmes arithmétiques chez Euclide permet de bien développer et expliciter leur résolution. On voit sur cet exemple que l'évolution de l'écriture des nombres est assez indépendante de celle de l'expression des calculs (rhétorique, syncopée, symbolique), laquelle par ailleurs ne se dégage que très lentement d'un vocabulaire géométrique (Dahan-Dalmedico & Peiffer 1986) dont les actuels termes de « carré » et de « cube » sont les ultimes vestiges.

Un autre système d'écritures est celui des notations symboliques de la **géométrie** « synthétique » (avec des

expressions de type « les diagonales AC et BD du quadrilatère $ABCD$ ») qui diffère complètement du langage du calcul symbolique que nous venons de voir. En particulier, ce n'est pas un langage de calcul : on n'y calcule pas sur les écritures (contrairement au langage du calcul vectoriel par exemple). Nous avons deux grandes familles: le langage de la géométrie d'un côté et les langages du calcul symbolique de l'autre. De nos jours, le langage de la géométrie n'est plus guère utilisé que pour la géométrie synthétique, tandis que les langages du calcul symbolique le sont pour tout le reste des mathématiques. Nous allons nous concentrer sur cette seconde famille, d'autant que le langage de la géométrie synthétique a été bien étudié, par exemple par Duval (1995).

Donc pour préciser l'analyse de Laborde (1982) nous dirons que le **langage mathématique** est composé d'expressions issues de langages des écritures symboliques (parfois de plusieurs d'entre eux en même temps) insérées dans une « gangue » de langue naturelle. De ce point de vue on pourrait dire que le langage mathématique est une sorte de « langue créole », autrement dit un mélange structuré de langages différents entre eux.

5. CARACTÉRISTIQUES LINGUISTIQUES DES LANGAGES SYMBOLIQUES ET LEUR INFLUENCE SUR LES PRATIQUES LANGAGIÈRES

Dans ce qui suit nous présenterons quelques-unes des caractéristiques communes aux langages symboliques écrits, pertinentes pour la compréhension des pratiques langagières associées.

5.1. Les niveaux de l'analyse linguistique.

Pour être précise, une analyse linguistique doit être effectuée à plusieurs niveaux (Benveniste 1966, chapitre X pp.119-131, repris dans Ducrot & Schaeffer 1995, pp. 119 sqq.). Les niveaux auxquels nous nous proposons de regarder les langages symboliques écrits sont :

- la Syntaxe, qui traite de la structure des écritures (nature des parties qui les composent et relations entre ces parties),
- la Morphologie, qui traite de la mise en forme typographique des écritures,
- la Sémantique qui porte sur leur signification,
- la partie des Transformations de mouvement de la syntaxe qui décrit les relations entre écritures (transformations qui constituent autant de pas de calcul),
- la Pragmatique, qui « étudie tout ce qui, dans le sens d'un énoncé, tient à la situation dans laquelle l'énoncé est employé (...) » ainsi que « (l'effet) de la parole sur la situation⁶ » (Ducrot et Schaeffer 1995 pp. 131-133). L'analyse des effets est considérée comme faisant partie de la pragmatique.

5.2. Syntaxe

L'analyse linguistique, en particulier celle basée sur des grammaires génératives, permet de donner un sens précis, basé sur des définitions rigoureuses, au vocabulaire utilisé pour décrire les écritures mathématiques. Les **catégories** (Égalité, Écriture décimale de nombre, Variable, Fonction, Somme, Produit, Fraction, Puissance, Racine, etc.), dont nous avons parlé plus haut, permettent de nommer la **nature** des expressions et sous-expressions. Quant aux relations entre les sous-expressions et les expressions qui les contiennent (comme « **terme** d'une somme » ou « **facteur** d'un produit »), elles correspondent à ce qu'on appelle des **fonctions syntaxiques**. Dans la langue française, dans « le chat mange la souris », la fonction syntaxique de « Le chat » est : **sujet** du verbe « mange »,

⁶ « actes illocutoires » : Ducrot et Schaeffer 1995 p. 782

tout comme celle de « la souris » est d'en être le **complément d'objet direct**. On peut de manière équivalente considérer que ces fonctions syntaxiques décrivent les relations qu'entretiennent les opérandes avec les opérateurs dont ils dépendent.

Nous donnons ci-dessous une liste quelques-unes des principales catégories du langage des écritures du calcul symbolique et des noms de leurs opérandes. On verra que le vocabulaire descriptif est fluctuant et lacunaire (en particulier, le mot « terme » est assez polysémique et peut à peu près s'appliquer à tous les opérandes).

Catégorie	Exemple	opérande(s)
Somme, Somme Algébrique, Différence, Opposé	« $9x^2 - 4$ »	Terme
Produit	« $9x^2$ »	Facteur
Quotient	« $2 \div 3$ »	Dividende, Diviseur
Fraction	« $\frac{2x-3}{3x}$ »	Numérateur, Dénominateur
Puissance	« x^2 »	Base (?), Exposant
Racine	« $\sqrt[3]{1-3b^2}$ »	exposant (?), Radicande
Valeur Absolue	« $ 1-3b^2 $ »	Terme (?)
Égalité, Inégalité	« $(3x+2) = 0$ »	Membre
Système	« $\begin{cases} x-2y=3 \\ 4x-5y=6 \end{cases}$ »	Ligne (?)
Image de fonction (?)	« $f(x)$ »	Antécédent (?)
...		...

L'importance des fonctions syntaxiques vient de ce que, dans les faits, les transformations d'écritures (du type développement, factorisation ou changement de membre) s'expriment en termes d'opérandes (par exemple : « changement de *membre* d'un *terme* ») et non pas de catégories (Drouhard 1995).

La difficulté la plus connue des écritures du calcul symbolique consiste pour le débutant à en identifier la structure, ou en d'autres termes, identifier au sein d'une écriture les catégories et les fonctions syntaxiques des opérandes. Un exemple de difficulté provient de ce que l'opérateur n'est pas toujours explicite (ce qui donne l'erreur classique « $3x = 2$ » → « $x = 2-3$ ») ; un autre provient du fait que les mêmes signes « + » et « - » sont utilisés pour marquer des catégories très différentes (caractère positif ou négatif d'un nombre, somme, différence, changement de signe ou identité, signes des termes d'une somme algébrique), d'où des ambiguïtés et la difficulté de comprendre les « règles des signes » qui sont le résultat d'un mélange de propriétés mathématiques et de conventions d'écriture (Drouhard & Panizza 2012).

Dans le cas du langage des écritures décimales de nombres, les catégories sont « Chiffre » et « Écriture Décimale de Nombre ». Les fonctions syntaxiques sont alors : « partie entière », « partie décimale », « chiffre des unités », « chiffre des dizaines », ... , « décimale », « chiffre des dixièmes » etc. Cette simple énumération permet de faire voler en éclats la prétention du langage mathématique à être totalement rigoureux et univoque : « décimal » qualifie en effet des objets aussi hétérogènes que les deux fonctions syntaxiques « décimale » et « partie décimale », l'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux, et le système d'écriture positionnel des nombres en base dix ! Ainsi, on peut dire que « lorsque les décimales qui constituent la

partie décimale d'un nombre écrit dans le système décimal forment une suite illimitée non-périodique, ce nombre n'est pas rationnel et donc pas décimal ». Pour l'univocité (et la cohérence), on repassera. Cela fait que le discours professoral présente une importante composante de méta-discours, et que beaucoup d'actes de langage sont en fait des actes de méta-langage (méta par rapport au langage mathématique).

Or un tel méta-discours est difficile à tenir car, comme on le voit avec le tableau précédent, les noms des catégories ne sont bien fixés que pour une minorité d'expressions se rapportant aux principales opérations et relations (addition, soustraction, multiplication, division, égalité) ; là encore on trouve plus d'abus de langage que de rigueur. Ce n'est d'ailleurs pas forcément un mal en soi : les abus de langage facilitent la communication en restreignant le nombre de termes ou de symboles à mémoriser. Un langage du calcul symbolique totalement non ambigu devrait avoir par exemple autant de signes d'égalité que de classes d'objets différents à évaluer et de ce fait serait totalement impraticable. On s'en aperçoit quand on travaille sur des classes d'équivalences où l'on doit définir l'égalité et les opérations sur des classes à partir de celles définies sur les objets : au début on écrit

soigneusement des formules du type « $a + b = \overbrace{a + b}$ » et puis très vite on arrête de mettre des points sur tous les symboles parce qu'en pratique ça ne sert à rien. En tous cas le statut peu clair de ces ambiguïtés, combiné avec le fait que la syntaxe des écritures du calcul symbolique n'est pas étudiée (sauf par les rares auteurs que nous avons signalés plus haut) et donc pas enseignée, contribue à rendre d'autant plus malaisé le méta-discours de l'enseignant – et rend par la même plus fragiles ses pratiques méta-discursives.

5.3. Morphologie

Les écritures décimales de nombres forment d'abord un langage écrit. Ce n'est pas une transcription des dénominations des nombres dans les langues orales, car celles-ci sont basées sur des structures en général très différentes (qu'on pense à « quatre vingt seize »). Le langage des écritures de nombres n'a rien à voir non plus avec le français écrit ; pour commencer il ne s'agit pas d'une écriture alphabétique, bien que les écritures de nombres se présentent sous forme de chaînes de caractères (ici, des chiffres), tout comme les mots sont des chaînes de lettres. Au contraire, il s'agit d'une écriture à « logogrammes »⁷ (Anis 1988). Les logogrammes sont des unités de langue écrite qui ne notent pas des **sons** (contrairement aux lettres de l'alphabet en français) mais représentent des **choses**. Les écritures logographiques peuvent être communes à plusieurs langues, chaque logogramme étant prononcé conformément à la langue d'usage. Ainsi l'idéogramme « 山 », signe de la montagne, est-il lu *shān* en chinois mandarin et *yama* en japonais ; de la même façon, le même chiffre « 2 » est lu *deux* en français, *dos* en espagnol et *kettō* en hongrois. Nous avons là un problème interdidactique (Biagioli et al. 2006) lors de l'apprentissage de la lecture et de l'écriture des nombres et des mots : les écritures sont très ressemblantes (mots en lignes qui se lisent de gauche à droite) alors que les deux systèmes sont basés sur des principes profondément dissemblables voire contradictoires. Mais cette différence ne se voit pas, contrairement au français écrit et au mandarin écrit. Il est à noter qu'on peut avoir dans les langues écrites le phénomène inverse de systèmes très semblables sans que cela soit apparent. Ainsi l'écriture coréenne (*Hangeul* : 한글) est, en dépit des apparences, alphabétique (Ducrot & Schaeffer 1995 p. 307).

Les écritures du calcul symbolique sont des logogrammes ou des **combinaisons de logogrammes**, composés de chiffres, de symboles et de caractères alphabétiques à valeurs non alphabétiques (Ducrot & Schaeffer 1995, p. 303). Il est à noter qu'en chinois comme en mathématiques, certains de ces logogrammes se combinent dans les deux dimensions de l'espace de la feuille (Drouhard, Panizza, Puig & Radford 2006) : « 佳 » superposé à « 木 » donne « 集 » comme « $2x-3$ » superposé à « $3x$ » donne « $\frac{2x-3}{3x}$ ». Ceci constitue une

7 ou « morphémogrammes » (Ducrot & Schaeffer 1995)

différence majeure tant avec les écritures alphabétiques (comme celle du français écrit) qu'avec les écritures décimales de nombres, qui toutes deux s'écrivent en ligne et se lisent de gauche à droite.

Quelle que soit la formulation de la partie générative, on doit donc y adjoindre une composante de mise en forme typographique. Le principe en est très simple : la grammaire engendre des chaînes de caractères telles que : « {1} over {9 x^2 - 4} »⁸. Ces écritures unidimensionnelles sont ensuite mises sous leur forme usuelle

« $\frac{1}{9x^2-4}$ » au moyen de transformations⁹ qui concernent non seulement la disposition verticale des signes mais également la gestion des tailles relatives des signes, des polices de caractères, des espaces etc. (voir Kirshner 1989).

La morphologie de l'oralisation du langage symbolique écrit pourrait constituer tout un chapitre, mais ce n'est pas notre objet et nous nous contenterons de signaler par exemple que : « $\frac{1}{9x^2-4}$ » se prononce « *un sur [pause] neuf ixé deux moins quatre* » et non « *un sur neuf ixé deux [pause] moins quatre* » de même que « *neuf ixé deux moins quatre* » est l'oralisation de « $9x^2 - 4$ » tandis que « *neuf facteur de ixé deux moins quatre* » est celle de « $9(x^2 - 4)$ » (à noter que de cette façon il n'est pas nécessaire de mentionner la parenthèse fermante).

5.4. Sémantique

De nombreux élèves peinent à donner une signification aux écritures du calcul littéral ; pour eux, l'algèbre est une question de règles (purements syntaxiques). Certes, en théorie, il est vrai que tout calcul littéral peut se réduire à des réarrangements d'écritures syntaxiquement bien formées : c'est d'ailleurs ce qu'on appelle le calcul formel, et les systèmes informatiques le font très bien. Mais dans la réalité humaine, les écritures algébriques sont toujours porteuses de signification (elles « veulent dire quelque chose »), et c'est tant mieux. Ce n'est pas parce que le calcul est formalisable qu'il est, dans les faits, formel (on retrouve d'ailleurs ici le problème épistémologique général du formalisme en mathématique). C'est sa composante sémantique qui fait que l'algèbre n'est pas une activité, littéralement, insensée (ce qu'elle est pourtant aux yeux de beaucoup d'élèves).

La « sémantique » est la partie de la linguistique consacrée à ce que désignent et signifient les écritures. Nous suivons Frege (1892, traduction 1971) qui distingue soigneusement deux composantes de la signification : dénotation (*Bedeutung*¹⁰), à savoir ce que les écritures désignent, et Sens¹¹ (*Sinn*), à savoir la manière dont les écritures désignent ce qu'elles désignent. De nombreux travaux de didactique de l'algèbre, repris de manière synthétique dans Drouhard & Panizza (2012) et Arzarello et al. (2012) ont eu pour objet de montrer qu'il est important de prendre en compte cette distinction pour bien comprendre la genèse sémiotique de l'algèbre élémentaire.

Il est à noter (nous ne développerons pas ce point ici) qu'une approche didactique de l'algèbre qui se centrerait sur la seule modélisation pourrait permettre effectivement de donner une **interprétation** (en termes du processus modélisé) aux écritures et aux calculs, mais ne contribuerait que très indirectement à construire leur **signification**.

À la suite de Frege, nous devons maintenant distinguer quatre cas. La dénotation des Écritures décimales de

8 Syntaxe de l'éditeur de formules Open Office

9 « compilation » dans le vocabulaire de LaTeX

10 Terme qui peut également être traduit par « signification », « désignation » ou « référence » selon les auteurs.

11 Nous écrivons le mot « Sens » avec une majuscule chaque fois que nous l'emploierons dans l'acception de Frege (comme traduction de « *Sinn* » qui, comme tous les substantifs en allemand, prend une majuscule) et non dans l'acception commune et non précisée du mot « sens ».

nombres est la fonction qui à chaque écriture (par exemple l'écriture « 0,6 ») associe son dénoté, c'est-à-dire le nombre qu'elle désigne (ici, le nombre¹² 0,6). L'impression de simplicité et d'univocité est trompeuse. En effet « 1 », « 0,9̄ », « 0,99̄ », « 0,999̄ » etc. ont le même dénoté, à savoir le nombre 1. On sait depuis Cornu (1981) les redoutables difficultés didactiques que cela pose, mêlant des questions d'analyse portant sur les nombres et des questions de langage portant sur leur écriture.

La dénotation des expressions arithmétiques (avec des chiffres et des symboles d'opération mais pas de lettres) est une fonction qui à toute écriture arithmétique telle que « 3 + 2 » associe un nombre réel (ici : 5), ou, dans le cas d'écritures de type « $\frac{1}{0}$ » une valeur appelée « Non_Défini » (Drouhard & Panizza 2012). Cette fonction est définie rigoureusement par le procédé, classique en théorie des langages, de *récurrence sur la complexité* : le dénoté d'une somme de deux termes est la somme des dénotés des termes, etc.

En ce qui concerne les propositions arithmétiques telles que « 2 + 3 = 5 », nous suivons Frege pour qui le dénoté d'une telle égalité est sa **valeur de vérité** (ici : Vrai). Certes, la plupart des mathématiciens adoptent plutôt la sémantique de Tarski¹³ (que l'on peut résumer de manière un peu caricaturale ainsi : l'expression « la neige est blanche » dénote le fait que la neige est blanche) ; dans cette optique « 2 + 3 = 5 » dénote le **fait** que 2 + 3 est bien égal à 5. Cependant, au-delà de l'observation de Quine (qui disait de Tarski que sa conception de la dénotation ne consiste finalement qu'à enlever des guillemets autour des énoncés – « *disquotation* »), la principale raison qui nous fait préférer la position de Frege est que celle-ci attribue également un dénoté (le Faux) aux propositions fausses, ce qui n'est pas le cas de la sémantique de Tarski (en effet, on ne voit pas bien quel pourrait être le **fait** dénoté par un énoncé manifestement faux tel que « le charbon est blanc » ou « 2+3 = 4 »). Cela vient sans doute de ce que les logiciens et les mathématiciens ne s'intéressent pas vraiment à la **signification** des énoncés **faux**, alors que les linguistes si, car ils doivent rendre compte de toutes les classes d'énoncés sans exception (vrais, faux, indéterminés, non définis etc.)

Pour ce qui est de la dénotation des **écritures littérales**, nous prendrons nos exemples dans le calcul algébrique mais tout ce qui sera dit ici peut se généraliser à l'ensemble des écritures littérales du calcul symbolique. Frege (1971), dans ses textes de 1891 et 1892 *Fonction et Concept* et *Sens et Dénotation*, oppose à la conception naïve de la sémantique du langage mathématique, selon laquelle une lettre désignerait une « quantité indéterminée », le fait que de telles « quantités indéterminées » n'existent pas (en termes modernes nous dirions qu'il n'existe pas d'« ensemble des nombres Indéterminés »). Il n'y a, dit-il, que des nombres, et si indétermination il y a, elle porte sur le processus de désignation, et non sur l'objet désigné. Cela revient à considérer que ce que désigne « 3x+2 » par exemple, est une quantité, mais que la détermination de cette quantité dépend de « x ». Autrement dit, « 3x+2 » dénote une **fonction** de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ notée $\delta_{\langle 3x+2 \rangle}$ qui à tout réel u associe $\delta_{\langle 3x+2 \rangle}(u) = 3u + 2$ (et à Non_défini associe Non_défini).

De même, le dénoté de « 3x+2 = 0 » est la fonction booléenne :

$$\delta_{\langle 3x+2=0 \rangle} \text{ de } \mathbb{R} \cup \{\text{Non_défini}\} \text{ dans } \{\text{Vrai ; Faux ; Non_défini}\}$$

telle que, pour tout u réel (ou Non_défini) :

- si $u = -2/3$ alors $\delta_{\langle 3x+2=0 \rangle}(u) = \text{Vrai}$,
- si $u = \text{Non_défini}$ alors $\delta_{\langle 3x+2=0 \rangle}(u) = \text{Non_défini}$

12 Pour la clarté de l'exposé les écritures seront toujours notées entre guillemets tandis que les objets qu'elles dénotent seront notés sans guillemet.

13 La formulation exacte de la version actuelle de la sémantique de Tarski se fait dans le cadre de la théorie des Modèles (voir par exemple Cori & Lascar 1993)

- sinon $\delta_{\langle 3x+2=0 \rangle}(u) = \text{Faux}.$

L'intérêt de s'obliger à être systématique dans la description (ici, linguistique) est que cela permet de mettre au jour des caractéristiques qui autrement passent inaperçues (on les utilise sans s'en rendre compte). C'est le cas du fait que, dans l'usage le plus banal du calcul symbolique (par exemple pour introduire une « règle », ou en général n'importe quelle propriété), certaines formules, par exemple « $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ » servent à noter des substitutions. Dans ces formules, les lettres sont destinées à être substituées par des expressions (et non pas seulement par des nombres). Les dénotés de telles **formules de substitution** ne sont donc pas des nombres, mais des écritures symboliques. En d'autres termes, une description cohérente de la sémantique du calcul algébrique doit adjoindre à la dénotation δ que nous venons de voir, une nouvelle classe de fonctions que l'on pourrait appeler « dénotations littérales » et noter avec le symbole « Δ ». Si on désigne par L le langage symbolique (considéré comme un ensemble d'écritures notées « ϵ »), la dénotation littérale Δ est donc une fonction de L dans L^L telle que :

pour toute écriture ϵ de L comprenant n variables $v_1, \dots, v_n$, l'image de ϵ par L (appelée « dénoté de ϵ ») est une fonction notée L_ϵ de L dans L qui à tout n -uplet d'écritures $(\epsilon'_1, \epsilon'_2, \dots, \epsilon'_n)$ associe l'écriture obtenue par substitution de chaque variable v_i de ϵ par l'écriture ϵ'_i correspondante.

Exemple :

$$\Delta_{\langle (a+b)(a-b) \rangle}(\langle x+1 \rangle ; \langle y-4 \rangle) = \langle (x+1 + y-4)(x+1 - (y-4)) \rangle^{14}$$

Pour être totalement rigoureux, il faudrait donc explicitement distinguer les variables selon le type d'objets (nombres ou écritures symboliques) que les formules sont susceptibles de dénoter car, selon ce type, leur dénotation n'est plus la même (δ ou Δ). Autrement dit, les variables des formules sont **typées** (en informatique les variables sont dites *typées* quand on doit déclarer explicitement si elles sont de type entier, booléen, décimal, alphanumérique etc.), mais de manière totalement implicite. Or effectuer un calcul symbolique suppose la plupart du temps un va-et-vient constant entre des égalités qui sont des identités (formules de substitution) et des égalités qui n'en sont pas (pas de calcul littéral), dont l'apparence est absolument identique¹⁵, avec les mêmes lettres et le même signe « = ».

Pour une étude antérieure nous avons regardé six manuels de classe de 4^{ème} (en 2002). Un seul de ces manuels, celui de la collection Deledicq, comprenait un chapitre entier expressément dédié au rôle et à l'usage des lettres en algèbre ; mais le plus important ici est qu'aucun des six ne mentionnait le fait que des lettres dans une formule puissent représenter autre chose que des nombres.

Toutes ces questions sémantiques sont ardues et posent des difficultés redoutables aux débutants, difficultés bien connues des enseignants ; mais le **pourquoi** de ces difficultés reste pratiquement inaccessible, dissimulé qu'il est dans la complexité de la machinerie linguistique sous-jacente, dont nous n'avons donné ici qu'un bref aperçu.

Or c'est une illusion de croire que le recours à l'algèbre abstraite (celle des propriétés du corps ordonné $\mathbb{R}$) permettrait de rendre compte du fonctionnement du **langage** de l'algèbre élémentaire. Dans les années 70, cela s'était manifesté par le fait que les procédures de résolution des équations (comme le changement de membre

14 On voit sur cet exemple que le principe des substitutions n'est pas bien compliqué mais que dans la pratique cela pose des problèmes redoutables de gestion des parenthèses – problèmes bien connus des professeurs qui passent leur temps à corriger les erreurs de parenthèses de leurs élèves.

15 le seul indice étant le choix des lettres : les identités sont plutôt exprimées avec des « a », des « b » ou des « c », mais ce n'est pas impératif vu que les variables des identités sont muettes (en raison de la quantification universelle – elle-même implicite d'ailleurs) et peuvent donc être représentées en principe par n'importe quelle lettre.

d'un terme d'une somme) étaient justifiées dans les seuls termes des propriétés des groupes. Plus généralement, le recours aux seules mathématiques pour rendre compte des calculs, comme cela a pu apparaître en filigrane dans *La Transposition Didactique* (Chevallard 1985) permet de **justifier** que les transformations sont **correctes**, dans le sens où elles conservent la dénotation, mais ne permet ni de rendre compte de ce que signifient ces transformations et les expressions sur lesquelles elles portent (Sens, dénotation), ni **d'expliquer** comment on opère **dans la pratique** ces transformations. Les mathématiques sont une chose, le langage symbolique qui permet de faire des mathématiques en est une autre.

Pour connaître et comprendre le fonctionnement du langage des écritures symboliques, il faudrait changer de niveau et se placer dans une théorie adéquate des langages symboliques, à savoir au minimum la théorie des Modèles¹⁶ en logique mathématique, laquelle, bien que basée sur une formalisation extrêmement réductrice du langage mathématique, se situe au bon niveau de description (syntaxique et sémantique) ; les théories des Langages utilisées en informatique conviendraient également (voir par exemple Gross & Lentin, 1967). Paradoxalement, les formulations un peu vieillottes des anciens manuels d'algèbre en termes de monômes, et de polynômes considérés comme des sommes algébriques de monômes, étaient plus proches d'une description adéquate du langage algébrique, dans la mesure où les monômes y étaient plus considérés comme des expressions (donc des écritures) que comme des objets mathématiques comme les fonctions polynômes.

En fait, faute de savoir exactement sur quoi repose sa bonne connaissance du langage mathématique, chacun se débrouille comme il peut pour l'expliquer aux débutants (c'est d'ailleurs vrai de n'importe quel langage : personne ne peut expliciter **toutes** les règles de grammaire de sa langue maternelle, ce qui n'empêche pas de les mettre en œuvre **en acte** tout le temps). C'est sans doute pour cela que la pratique méta-discursive la plus fréquente dans les classes est, paradoxalement, une pratique muette : **l'ostension** (voir Gobert 2012). Faute de pouvoir expliquer, on montre comment on fait.

5.5. Transformations de mouvement

S'il est clair que dans la classe de mathématiques, le langage peut porter sur les objets en jeu et leurs relations, sur les actions réalisées ou encore sur les stratégies mises en œuvre et leur efficacité, le langage ne se limite pas à cela. Nous dirons même plus fortement que si on se limite à cela, on passe à côté du rôle essentiel du langage mathématique. La spécificité des écritures du calcul symboliques est précisément qu'elles ne servent pas qu'à noter des nombres, des opérations ou des fonctions mais qu'en **opérant** sur les **écritures** (par des **transformations**) on résout les problèmes mathématiques, ce qui revient à dire que les **actions** sur le langage **écrit** influent sur ce que le langage **décrit** (i. e. permettent de résoudre le problème)¹⁷. Nous partageons sur ce point (sans nous arrêter aux différences de terminologie) l'avis de Duval (2011) pp 74- 75¹⁸ :

« Nous ne faisons pas la même analyse du fonctionnement cognitif de la pensée selon que nous assimilons tous les systèmes sémiotiques à des codes ou, au contraire, si nous reconnaissons l'existence de deux types hétérogènes de systèmes cognitifs [codes et registres].

(...) Une réponse longtemps dominante a été de considérer une langue comme un code permettant de transmettre des informations (Jakobson, 1963). Cela amène à assimiler toute formulation verbale à une codification d'un contenu mental, et sa compréhension par un interlocuteur comme une décodification. Et, dans le cadre de presque tous les travaux de didactique des mathématiques, l'utilisation de la langue naturelle n'est pas considérée autrement. La compréhension des énoncés de problèmes, par exemple, serait un cas de décodification des

16 Voir par exemple Cori & Lascar (1993), chapitre 3 du tome I.

17 Spécificité du langage mathématique actuel dont Serfati (1997) retrace magistralement la genèse historique dans sa thèse.

18 Retraduction par l'auteur de la traduction du texte de Raymond Duval au Portugais (Brésil).

informations qui auraient été codifiées dans l'énoncé du problème. De même, dans la résolution de problèmes, on sépare la phase de recherche proprement dite, dans laquelle le langage ne joue aucun rôle, et la phase de rédaction, qui ne serait rien de plus qu'une question de formulation, c'est à dire, de mise en mots mathématiques. (...) Le problème d'une telle séparation du travail de la pensée est qu'elle ne permet ni d'analyser l'utilisation spontanée et continue du langage naturel par tous les individus, ni de décrire l'utilisation spécialisée qui est faite en mathématiques quand, par exemple, il s'agit de définir une propriété ou d'utiliser des théorèmes. »

Pour Duval, les écritures du calcul symbolique sont constituées en **registres** et sont l'objet de **traitements** au sein de ces registres, traitements constitutifs de « l'utilisation spécialisée qui est faite du langage mathématique ». On peut proposer une description linguistique¹⁹ de ces traitements en termes de **transformations** (dite « de mouvement »).

Le calcul symbolique consiste à opérer des transformations au sein de l'ensemble des écritures, de type :

$$\ll 3+2x \gg \xrightarrow{\text{commutation}} \ll 2x+3 \gg.$$

Ces transformations linguistiques décrivent entre autres des mouvements dans l'espace **syntagmatique**, c'est-à-dire l'espace des dispositions des termes dans l'écriture (« à droite du signe « = » », « à gauche du « x » » etc.) Dans cet espace syntagmatique, les élèves ont parfaitement raison de dire qu'ils « changent un terme de membre dans une équation » ! Leur erreur (fréquente) consiste à considérer qu'il s'agit d'un mouvement dans l'espace **physique** (ce qui ne serait possible qu'avec des ciseaux et de la colle). On peut même considérer que le texte mathématique constitué par une suite de calculs (par exemple au cours de la résolution d'une équation) représente une sorte de **trajectoire** des mouvements dans l'espace syntagmatique, tout comme une parabole figure la trajectoire du mouvement d'une balle lancée en l'air dans l'espace physique.

La description systématique des transformations de mouvement (nécessaire pour modéliser correctement la notion de calcul symbolique) pose des problèmes ardu, abordés dans Kirshner (1987), Drouhard (1992, 1995) et repris dans Drouhard & Panizza (2012), qu'il n'y a pas la place d'exposer ici. Rappelons simplement, comme nous l'avons déjà écrit plus haut, qu'une description élégante des transformations de mouvement – et à notre avis bien adaptée à rendre compte du calcul symbolique par des êtres humains (et non par des systèmes de calcul formel) – consiste à décrire ces transformations en termes de fonctions syntaxiques (ou de mouvement d'opérandes, ce qui revient au même). La genèse du calcul symbolique est donc indissociable de celle de la morphologie et de la syntaxe (et, pour tout ce qui concerne le choix et le contrôle des transformations, la sémantique) des écritures symboliques. On ne peut opérer que sur ce qu'on sait lire et écrire.

5.6. Capacité énonciative

En ce qui concerne la relation entre énoncé et la situation d'énonciation, les langages du calcul symbolique sont dépourvus de **capacité énonciative**. En particulier ces langages sont dépourvus d'**embrayeurs** (« shifters », Jakobson, 1963), c'est à dire d'éléments tels que « je », « toi », « maintenant », « hier », « ici », dans le cas où ces éléments réfèrent non pas à d'autres éléments du discours mais à des éléments de la situation au cours de laquelle le discours s'énonce (dite situation d'énonciation).

Cher lecteur, si je m'adresse à vous maintenant, depuis la table de travail sur laquelle je suis en train d'écrire, mon discours quitte un temps les rivages de la bienséance académique pour prendre un tour plus personnel.

Le changement de ton de mon discours provient de l'emploi dans la phrase qui précède d'un grand nombre

¹⁹ Qui n'est en aucun cas une traduction en termes linguistiques de la théorie des registres de représentation sémiotique mais plutôt un point de vue complémentaire

d'embrayeurs²⁰ faisant référence à la situation d'énonciation. Pour en revenir aux langages symboliques, ils sont totalement dépourvus d'embrayeurs, comme l'avait observé Daniel Lacombe²¹. Les élèves doivent donc apprendre progressivement à « **débrayer** » leur discours mathématique spontané (nous avons ici le pendant linguistique de la **dépersonnalisation** dans la Théorie des Situations) Cela s'observe particulièrement bien dans les situations de dictée de figures au primaire puis de description de figure où les élèves produisent spontanément un texte écrit fortement embrayé (« tu places la pointe du compas au milieu de ta feuille », etc.)

La langue naturelle (ici le français) dans laquelle sont insérées des écritures symboliques est la seule composante du langage mathématique dotée d'un tant soit peu de capacités énonciatives. On peut y mettre des verbes au mode personnel, on peut marquer l'évolution temporelle (au moins du temps du discours, avec des « premièrement », des « ensuite », à défaut de celui de l'énonciation). Toutefois la composante énonciative se limite essentiellement à un mode personnel... plutôt impersonnel (le « on » ou le « nous » ou les formes passives). Dans certains textes on s'adresse à l'élève en le tutoyant (pour les plus jeunes) ou on s'adresse à lui sous le mode infinitif ou impératif « démontrer... » ou « démontrez... ». Certes dans le langage de la pratique scolaire il peut y avoir des embrayeurs spatiaux ou temporels en partie implicites : « devoir sur table, durée 1h30 » signifie que le travail est à réaliser dans la salle de classe à partir du moment où l'élève est supposé commencer à lire la consigne. Toutefois ceci n'est pas spécifique au langage mathématique mais au contraire dépend du langage scolaire.

La pratique linguistique en classe correspond donc à une forte dualité entre un langage écrit quasiment dépourvu de capacités énonciatives et un langage oral saturé d'embrayeurs :

« Bon et alors maintenant j'essaie de résoudre cette équation, là, mais je dois tenir compte de ce qui est écrit ici, parce que sinon je sais qu'à tous les coups je vais me planter » etc.

Une bonne part du long et difficile apprentissage linguistique des élèves en mathématiques consiste à savoir quand ils doivent embrayer (à l'oral) et quand ils doivent débrayer (à l'écrit) leur discours mathématique de la situation d'énonciation.

6. CONCLUSION

6.1. Le langage n'est pas qu'un codage

Le titre de cet article est un clin d'œil à l'opuscule du philosophe anglais John L. Austin (1970), intitulé *How to do Things with Words* (traduit en français par : *Quand dire, c'est faire*). Il y étudie les énoncés de type « Je vous déclare unis par les liens du mariage » qui, prononcés par qui de droit et dans les circonstances adéquates, ne décrivent pas un état de fait mais bien plutôt le font advenir (acte **illocutoire** : voir également le premier article de ce cahier). Or en mathématiques aussi, on en se contente pas de décrire, on agit²², en écrivant et en manipulant des écritures et en invoquant des propriétés.

Nous avons voulu illustrer ici le fait que les **opérations** sur les écritures symboliques, leur **interprétation** et leur **compréhension** – que l'existence de langages symboliques rend possible – forment une part importante de l'activité mathématique.

Nous avons vu également que la **structure** et le **fonctionnement** du langage mathématique lui-même sont bien plus complexes que ce que l'on pourrait croire à première vue. En outre, le langage mathématique n'est

20 soulignés ici

21 Dans son cours de DEA de didactique des mathématiques à Paris 7.

22 Même si ce n'est pas de la même façon que ce que décrit Austin, en tous cas pour le calcul symbolique.

exempt ni d'ambiguïtés ni d'abus de langages ; et pourtant c'est celui qu'utilisent les mathématiciens, il n'y en pas d'autre. Certes, en principe, on pourrait formaliser complètement le langage mathématique, comme l'ont fait Russel et Whitehead dans les *Principia Mathematica* ; mais dans les faits ce genre de texte est presque totalement illisible et partant, inutilisable. Comment arrive-t-on à faire des mathématiques absolument rigoureuses avec un langage qui ne l'est pas tout à fait ? En fait, ce qui est rigoureux, ce n'est pas le langage mais l'usage qui en est fait. La rigueur n'est pas assurée par le langage, mais bien par les pratiques langagières.

C'est dans cette tension entre richesse du sens et aridité d'une dénotation réduite au vrai et au faux, entre subjectivité (manifestée par l'embranchement énonciatif) et objectivité (du texte intemporel et impersonnel), entre souplesse du langage et rigueur du raisonnement que se situe la puissance du langage mathématique. C'est cela que les élèves doivent apprendre à maîtriser, c'est à cela qu'est dévolue une part importante de l'activité langagière en mathématiques.

7. RÉFÉRENCES

- Anis, J. (1988). "Une graphématique autonome?". In N. Catach (Dir.): *Pour une théorie de la langue écrite*. Paris: Éditions du CNRS.
- Arzarelo, F., Bazzini, L., Chiappini GP. (2012). A Theoretical Model to Analyze Algebraic Thinking and its Applications in School Activities. En Coulange, L., Drouhard, J.-Ph., Dorier, J.-L., Robert, A. (Comp.) *Recherches en Didactique des Mathématiques, Numéro spécial hors-série, Enseignement de l'algèbre élémentaire: bilan et perspectives* (pp.193-207). Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Austin J. L. (1970). *Quand dire, c'est faire*, Paris: Le Seuil.
- Benveniste, E. (1966). *Problèmes de linguistique générale*, T. 1, Coll. TEL, Gallimard.
- Biagioli, N., Drouhard, J-Ph., Lopez, L., Lozi, R., Raoux, Ch. (2006). Le marquage temporel des séquences interdidactiques: la non-congruence comme marqueur d'interdiscursivité. Méthodes de recherche en didactique, séminaire annuel international, Lille 3, IUFM de Lille, CD-ROM.
- Catach, N. (1988). "L'écriture en tant que plurisystème, ou théorie de L prime". In N. Catach (Dir.): *Pour une théorie de la langue écrite*. Paris: Éditions du CNRS.
- Chevallard, Y. (1985). *La Transposition Didactique*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Chomsky, N. (1971). *Aspects de la théorie syntaxique*. Paris : Le Seuil.
- Cori, R., & Lascar, D. (1993). *Logique Mathématique*. T. 1. Coll. Axiomes. Paris: Masson.
- Cornu, B. (1981). Apprentissage de la notion de limite: Modèles spontanés et modèles propres. *Proceedings PME5*. Grenoble. pp. 322-326.
- Dahan-Dalmedico, A., Peiffer, J. (1986). *Une histoire des mathématiques, Routes et dédales*. Paris: Le Seuil. coll. Points Sciences.
- Drouhard, J-Ph. (1992). *Les Écritures Symboliques de l'Algèbre élémentaire*. Thèse de Doctorat. Paris: Université Paris 7.
- Drouhard, J-Ph. (1995). Algèbre, calcul symbolique et didactique. In R. Noirfalise & M.-J. Perrin-Glorian (Dir.) : *Actes 8ème École d'Été de Didactique des Mathématiques*. Clermont-Ferrand: IREM.
- Drouhard, J-Ph., Panizza, M. (2012). Hansel et Gretel et l'implicite sémio-linguistique en algèbre élémentaire. En Coulange, L., Drouhard, J.-Ph., Dorier, J.-L., Robert, A. (Comp.) *Recherches en Didactique des*

Mathématiques, Numéro spécial hors-série, Enseignement de l'algèbre élémentaire: bilan et perspectives (pp.203-229). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Drouhard, J-Ph., Panizza, M., Puig, L. & Radford, L. (2006). Algebraic Thinking. In M. Bosch (Ed.), *Proceedings of the 4th Conference of the European Society on the Research on Mathematics Education (CERME4)* (pp. 631-642). Barcelona: FUNDEMI IQS – Universitat Ramon Llull. CD-ROM.

Ducrot O., Schaeffer J-M. (1995). *Nouveau dictionnaire encyclopédique des sciences du langage*. Paris : Le Seuil.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et Pensée Humaine, Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang.

Duval, R. (2011). *Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas*. São Paulo: PROEM.

Frege, G. (1892, 1971). *Écrits logiques et Philosophiques*, Cl. Imbert (Trad.), Paris: Le Seuil.

Gobert, S. (2012). Conception sémiotique de l'ostension didactique. *RDM*, 32/3.

Gross, M., & Lentin, A. (1967). *Notions sur les Grammaires Formelles*. Paris: Gauthier-Villars.

Jakobson, R. (1963). *Essai de Linguistique Générale*. Paris: Éditions de Minuit.

Kirshner, D. (1987). *Linguistic analysis of symbolic elementary algebra*, Unpublished Doctoral Dissertation. Vancouver, BC: University of British Columbia.

Kirshner, D., & Awtry, T. (2004). Visual salience of algebraic transformations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 35(4), 224-257.

Laborde, C. (1982). *Langue naturelle et écriture symbolique deux codes en interaction dans l'enseignement mathématique*. Thèse d'État. Grenoble: Université Joseph Fourier.

Nicaud, J-F., Bouhineau, Gélis, J-M.(2001) Syntax and Semantics in Algebra. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent., J. Vincent, (eds.) *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference on the Future of the Teaching and Learning of Algebra*, (pp. 475-486). Victoria, Australia: The University of Melbourne.

Ruwet, N. (1967). Introduction à la grammaire générative. Paris : Plon.

Saussure (de), F. (1979). *Cours de linguistique générale*. Paris : Payot.

Serfati, M. (1997). *La constitution de l'écriture symbolique mathématique*. Thèse de Doctorat. Université Paris I.

Tammet, D. (2007). *Je suis né un jour bleu*. Paris : Les arènes.