



Laboratoire de didactique André Revuz
Mathématiques • Physique • Chimie

**Cahiers du laboratoire de didactique
André Revuz
n°7
Avril 2013**

LES EXEMPLES

En chimie, en mathématiques, en physique

Coordinateurs : Rita Khamfour-Armale, Laurent Vivier

**Auteurs : Richard Cabassut, Philippe Colin, Cécile de Hosson, Nicolas
Décamp, Bernadette Denys, Jacques Douaire, Marie-Pierre Galisson, Nicolas
Gauvrit, Rita Khamfour-Armale, Isabelle Kermen, Alain Kuzniak, Joris
Mithalal, Cécile Ouvrier-Buffet, Bernard Parzysz, Marc Rogalski,
Laurent Vivier**

ISSN : 2105-5203

Les Exemples

En Chimie, en Mathématiques, en Physique

Coordonné par Rita Khanfour-Armale et Laurent Vivier

**Richard CABASSUT
Philippe COLIN
Cécile DE HOSSON
Nicolas DÉCAMP
Bernadette DENYS
Jacques DOUAIRE
Marie-Pierre GALISSON
Nicolas GAUVRIT
Rita KHANFOUR-ARMALE
Isabelle KERMEN
Alain KUZNIAK
Joris MITHALAL
Cécile OUVRIER-BUFFET
Bernard PARZYSZ
Marc ROGALSKI
Laurent VIVIER**

Introduction

PRÉAMBULE

Dans l'enseignement, et peut-être plus spécifiquement dans l'enseignement des sciences, le terme « exemple » est employé de manière très courante. C'est un fait, presque une banalité, de dire que les exemples sont omniprésents dans l'enseignement, que ce soit dans les manuels ou en classe. Quel enseignant n'a jamais été sollicité par ses élèves ou étudiants pour produire un exemple ?

La notion d'exemple est clairement présente dans ce cas d'une demande explicite de production d'exemple et, plus généralement, lorsque le mot « exemple » est employé. Ainsi, dans le premier chapitre d'un manuel de mathématiques de 3^e pris au hasard, le mot « exemple » est utilisé à la suite des définitions et propriétés des deux pages « cours » :

- « Exemple : π est un nombre irrationnel » juste après la *définition* d'un nombre irrationnel censé illustrer ou éclairer la définition.
- « Exemple : on a vu ci-dessus que $\text{PGCD}(36 ; 24)=12$. $\frac{36}{24} = \frac{3 \times 12}{2 \times 12} = \frac{3}{2}$ et $\frac{3}{2}$ est une fraction irréductible. » juste après une propriété pour rendre irréductible une fraction.

Il serait toutefois trompeur de se limiter à cet unique emploi du mot, car la notion d'exemple est beaucoup plus large. C'est le cas des « activités » préparatoires au cours, des *exemples*, sans que le terme soit mentionné, présentés dans les pages « savoir-faire » ou encore des exercices, qu'ils soient « de base », « d'application » ou « d'approfondissement ».

Ce que l'on peut comprendre lorsque l'on ouvre un manuel, c'est qu'un exemple n'est jamais isolé, il fait toujours référence à une notion, un chapitre, un contexte : un exemple est toujours un exemple de quelque chose et sa fonction dépend, entre autres, de sa position dans le chapitre. Considérons la réaction chimique entre l'acide acétique et l'eau : elle peut être un exemple d'une réaction chimique ou d'une réaction acido-basique, et sa fonction est différente selon qu'elle est présentée, ou étudiée, en début de chapitre, en cours de chapitre ou en fin de chapitre.

Ainsi, sous le terme apparemment banal d'*exemple*, on trouve des caractéristiques et des fonctions qui peuvent être très différentes. C'est l'objectif de cette brochure d'éclairer la notion d'exemple et de préciser le rôle qu'elle joue dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques et des sciences physiques.

La brochure est organisée en deux parties. La première partie (page 5) est dédiée à une étude bibliographique sur la notion d'exemple en didactique. Chaque article présente un résumé avec des commentaires et des critiques des lecteurs. Dans la deuxième partie (page 47), nous avons voulu interroger la notion d'exemples à partir de nos expériences de recherche.

PARTIE I : FICHES DE LECTURE CRITIQUE

En mathématiques, nous nous sommes appuyés sur un numéro spécial de la revue *Educational Studies in Mathematics : The Role and Use of Examples in Mathematics Education*, Volume 69 de 2008. Cette revue est le fruit du travail de chercheurs reconnus internationalement. Après une première rencontre en 2005, ils ont organisé un *research forum* à PME 30 en 2006 d'où a émergé ce numéro spécial d'ESM. L'objectif de ces chercheurs était principalement de lancer un nouveau courant de recherche sur la notion d'exemple et de proposer un cadre cohérent pour ces recherches. De ce fait, les articles dont il est question dans cette partie ont tous des liens avec le cadre des espaces d'exemples et des *Learners Generating Examples* (LGE) de Mason et Watson (2005). Ces deux chercheurs ont d'ailleurs chacun un article dans ce numéro spécial dont les éditeurs sont Anne Watson et Liz Bills.

Le recueil d'articles montre ainsi une certaine homogénéité du point de vue théorique. Le point de vue des lecteurs, tous affiliés au LDAR et/ou à l'IREM de Paris, révèle également une homogénéité dans la perception des articles : les études sont intéressantes mais le cadre théorique laisse des zones d'ombre parfois importantes et les arguments des auteurs ne sont pas toujours convaincants. Une des raisons provient peut-être du choix d'isoler les exemples comme objet d'étude alors qu'ils ne sont qu'une composante de l'activité mathématique. Nous renvoyons aux commentaires de chaque article de la partie I ainsi qu'aux articles d'Ouvrier-Buffet et de Vivier de la partie II pour des discussions plus précises.

Les deux premières fiches sont relatives au cadre théorique des espaces d'exemples et des LGE qui sont repris dans les autres articles. L'article de Goldenberg et Mason (fiche page 7) est un article plutôt théorique qui présente la notion d'espace d'exemples de manière générale en pointant notamment les dimensions de variations possibles. Les types *exemple*, *contre-exemple* et *non-exemple* sont également précisés. L'article de Watson et Shipman (fiche page 11) s'intéresse plutôt aux situations permettant aux apprenants de générer des exemples (*Learner Generated Example*) dans un but de conceptualisation. Plusieurs études expérimentales sont présentées pour étayer leur propos.

Les troisième et quatrième fiches s'intéressent plus spécifiquement aux exemples utilisés par les enseignants : expérimentés du secondaire pour l'article de Zodik et Zaslavsky (fiche page 19) et débutants du primaire pour l'article de Rowland (fiche page 27). Zodik et Zaslavsky relèvent de nombreux exemples qu'ils classifient à l'aide des trois types *exemple*, *contre-exemple* et *non-exemple* qu'ils croisent avec deux caractéristiques liées aux enseignants : exemples préparés ou spontanés (souvent pour répondre à un élève). Rowland s'intéresse plutôt aux exemples, qu'il qualifie d'inappropriés ou de judicieux, que les professeurs débutants utilisent et que l'on pourrait ainsi interpréter avec la notion de variable didactique.

L'étude de la cinquième fiche (fiche page 31) est plus spécifique. Alcock et Inglis s'intéressent à la production d'exemples dans un processus de preuve par deux doctorants en mathématiques en distinguant deux formes de raisonnements : sémantique et syntaxique.

En sciences physiques, il apparaît que les études sur la notion d'exemple dans l'enseignement sont extrêmement peu nombreuses. De ce fait, un seul article est exposé, le seul trouvé qui mentionne explicitement dans son titre le terme d'exemple. Il s'agit d'un article de Brown

datant de 1992 (fiche page 37) où il compare deux stratégies d'enseignement : une première par exposition de plusieurs exemples juxtaposés pour construire par induction le concept et une deuxième par une succession de situations pouvant être expliquées par une même structure analogique. Il est à noter que si la littérature sur les exemples est faible, nombreuses sont les études sur l'usage des analogies dans l'enseignement.

PARTIE II : DES RECHERCHES ORIGINALES SUR LA NOTION D'EXEMPLE

Cette deuxième partie a pour objectif d'ouvrir les recherches sur la notion d'exemple. Les deux premiers articles font référence explicitement aux cadres utilisés en partie I pour les discuter, alors que les quatre articles suivants explorent librement d'autres pistes en s'appuyant notamment sur les manuels.

L'article de Cécile Ouvrier-Buffet (page 49) s'intéresse aux types d'exemples et à leurs fonctions mais d'un tout autre point de vue de ce qui ressort du numéro spécial d'ESM. Au lieu de partir directement des exemples, elle prend un point de vue plus large en s'intéressant aux définitions et plus précisément à l'activité autour des définitions, notamment celle liée à la preuve en mathématiques. Il s'agit d'un texte plutôt théorique qui se termine par une discussion sur l'intérêt de considérer des *non-exemples* (Tsamir & Tirosh, 2008).

Le deuxième article (page 59) est écrit par l'auteur de la fiche sur l'article de Watson et Shipman (2008, cf. fiche page 11). À travers trois études expérimentales sur le thème des rationnels en écriture décimale, l'auteur, Laurent Vivier, discute certaines caractéristiques qui sont prêtées aux exemples dans la perspective des LGE. Il se focalise en particulier sur les potentialités réelles, et non pas uniquement espérées, des exemples pour la conceptualisation. D'une certaine manière, cet article prolonge les commentaires sur l'article de Watson et Shipman.

Richard Cabassut (page 69) expose le rôle fondamental des exemples dans les comparaisons internationales. En effet, il est impossible de comparer en intégralité deux systèmes éducatifs et il est nécessaire de choisir des exemples tirés des curricula. Il s'intéresse, dans une comparaison Allemagne/France sur les preuves, aux justifications institutionnelles en prenant appui sur le théorème sur la somme des angles d'un triangle ainsi que sur les formules du périmètre d'un cercle et celle de l'aire d'un disque.

Bernard Parzysz (page 83) pointe le caractère particulier des exemples en probabilités. Après une recension des exemples d'expériences aléatoires utilisés par les manuels, l'auteur s'intéresse à la fonction de ces exemples en probabilités. Il replace l'interrogation dans une problématique plus large tenant compte de la simulation et de la modélisation. Il dégage alors l'intérêt de ces premiers exemples pour l'enseignement et l'apprentissage des probabilités dans ce qu'il nomme un *schéma d'expériences*.

Si en physique on relève quelques articles s'intéressant aux exemples dans l'enseignement (cf. notamment les travaux de Brown et la fiche page 37), en revanche il semble qu'aucune étude didactique n'ait été menée sur les exemples en chimie – même si des articles traitant de la motivation ont été publiés. Ainsi, Isabelle Kermen et Nicolas Décamp (page 91) ont initié une telle étude en s'intéressant aux transformations chimiques non totales (TnT) dans les manuels

de Terminale S. Ils discutent en particulier le rôle de contre-exemple que peut jouer une TnT dans la classe déjà enseignée des transformations totales puis du sens de l'induction porté par les différents exemples de TnT alors que la plupart sont dans la sous-classe des transformations acido-basiques. À côté de la question de la variété des exemples pour l'enseignement qui est ici posée, les auteurs pointent également de nombreuses imprécisions qui peuvent être préjudiciables pour les apprentissages.

Enfin, Nicolas Gauvrit (page 103) se penche sur les exemples en psychologie. Dans une première partie, il précise les caractéristiques particulières des exemples dans les catégories en distinguant leurs structures internes et externes. Le propos, bien différent de celui des autres articles de cette brochure, permet de différencier l'exemple dans les disciplines scientifiques scolaires de l'exemple en psychologie, plus proche donc du fonctionnement mental du sujet. Dans une deuxième partie, indépendante, il se penche sur la transposition didactique des statistiques dans les manuels à l'usage des psychologues. Il relève une transposition radicale des statistiques visant à éliminer les mathématiques, l'institution source, mais qui n'est pas pleinement assumée et présente donc des paradoxes qu'il juge préjudiciables pour l'enseignement.

PARTIE I

Fiches de lecture critique

Goldenberg, P. & Mason, J. (2008). Shedding light on and with example spaces, *Educational Studies in Mathematics*, 69.

Fiche écrite par Alain Kuzniak

Page 7

Watson, A. & Shipman, S. (2008). Using learner generated examples to introduce new concepts, *Educational Studies in Mathematics*, 69.

Fiche écrite par Laurent Vivier

Page 11

Zodik, I. & Zaslavsky, O. (2008). Characteristics of teachers' choice of examples in and for the mathematics classroom, *Educational Studies in Mathematics*, 69.

Fiche écrite par Marie-Pierre Galisson et Bernadette Denys

Page 19

Rowland, T. (2008). The purpose, design and use of examples in the teaching of elementary mathematics, *Educational Studies in Mathematics*, 69.

Fiche écrite par Jacques Douaire

Page 27

Alcock, L. & Inglis, M. (2008). Doctoral students' use of examples in evaluating and proving conjectures, *Educational Studies in Mathematics*, 69.

Fiche écrite par Joris Mithalal

Page 31

Brown, D. E. (1992). Using examples and analogies to remediate misconceptions in physics: Factors influencing conceptual change, *Journal of Research in Science Teaching*, 29, 17-34.

Fiche écrite par Philippe Colin et Cécile de Hosson

Page 37

Shedding light on and with example spaces

Paul Goldenberg & John Mason

Fiche écrite par Alain Kuzniak

L'article rédigé par Goldenberg et Mason est l'article conclusif du numéro d'ESM spécialement consacré aux exemples. Il donne une vision globale de l'usage des exemples dans l'enseignement des mathématiques et s'applique à dégager un cadre théorique fondant une exploitation raisonnée des exemples : les espaces d'exemples. L'article reste assez général et pour en savoir plus sur la mise en pratique de cette approche, il est recommandé de lire le livre de Watson et Mason (2005).

I. UNE SYNTHÈSE SUR LA NOTION D'EXEMPLE

Les deux auteurs s'appuient sur diverses contributions dont certaines sont présentées dans cette brochure (Alcock et Ingliss, 2008, fiche page 31 ; Zazkis et Leikin, 2008), pour dégager différents usages des exemples en mathématiques.

Le cas le plus commun, et qui n'est pas spécifique aux mathématiques, concerne le jeu entre abstraction et monde empirique. À partir d'exemples, il est possible de généraliser et de définir certains objets ou concepts et, dans le sens inverse, un exemple permet de donner du sens et de la substance à des définitions abstraites. Les exemples s'insèrent alors dans le processus de réification utilisé en didactique notamment par Sfard (1994).

Les exemples peuvent également être considérés comme des outils de médiation entre les apprenants et les concepts et techniques mathématiques. Ils sont aussi outils de communications pour l'apprenant lui-même ou entre individus pour mieux cerner le sens des objets mathématiques notamment en découvrant les limites d'un concept. Les deux auteurs insistent sur le fait que « voir un objet mathématique comme un exemple de quelque chose » est un acte fondamental dans la compréhension de la signification d'une notion mathématique. Un objet donné peut être un exemple pour diverses propriétés et cette reconnaissance de la propriété et de son lien avec l'objet est à la charge de l'apprenant. Les auteurs soulignent que cette mise en relation est liée à la réification et à la perception mais ils ne justifient pas cette affirmation.

Ils citent également Rissland (Michener, 1978) qui établit une progression sur l'usage des exemples dans la construction des notions mathématiques : exemple introductif pour motiver la notion, référentiel pour fonder l'intuition, générique comme modèle et enfin contre-exemple pour percevoir les limites de la notion.

Note du lecteur 1: Goldenberg et Mason soutiennent l'intérêt d'introduire l'idée de non-exemple. Pour une propriété P donnée, nous comprenons ce non-exemple comme un exemple qui vérifie non P . Il peut s'agir d'un contre-exemple si P est affirmée. Cette notion a été

introduite dans l'enseignement de notions mathématiques pour permettre de jouer explicitement sur l'opposition entre les éléments possédant la propriété et ceux qui ne la possèdent pas. Il est ainsi possible de questionner les prototypes. (Voir aussi Ouvrier-Buffet, page 49.)

Note du lecteur 2 : Les auteurs insistent sur la question de la représentativité d'un exemple particulier. Cette question porte plus généralement sur la relation entre un élément et sa classe d'équivalence au sens mathématique. Ce lien peut s'interpréter en sémiotique comme le lien entre un signifiant et son référent. Dans quelle mesure un signifiant donné est-il un représentant suffisamment caractéristique et pertinent de l'objet mathématique qu'il représente ? Cette question devient cruciale dans une pratique ostensive des mathématiques puisque l'exemple présenté par le professeur est censé porter la signification de l'objet mathématique dans son ensemble. Une différence de perception existe entre celle de l'expert habitué à relativiser la portée réelle d'un exemple et celle du débutant pour qui certains exemples seront plus porteurs de sens que d'autres. De fait, le travail perceptif tend à dégager certains prototypes alors qu'un travail plus abstrait ignorera cette nécessité. Les auteurs généralisent ici l'idée de *figural concept* de Fischbein à d'autres domaines que celui des figures géométriques en distinguant les traits saillants et parfois inadaptés que privilégie une construction perceptuelle du concept.

Note 3 et conclusion provisoire du lecteur : Les exemples sont nécessaires à l'enseignement et à l'apprentissage des mathématiques. Cependant, du fait même de leur caractère parfois particulier, la relation entre un exemple et le concept qu'il illustre doit être bien pensée pour éviter les erreurs et les mauvaises interprétations. C'est pour dépasser ces problèmes que les auteurs ont éprouvé la nécessité d'introduire la notion d'espace d'exemples.

II. LES ESPACES D'EXEMPLES

Cette notion est liée à une vision constructiviste de l'apprentissage des mathématiques en relation avec le niveau de l'apprenant. Il s'agira de collections d'exemples dans un sens très étendu intégrant des diagrammes et divers objets mathématiques voire métamathématiques comme des exemples de démonstrations. La nature de ces exemples peut évoluer suivant les domaines mathématiques considérés.

Les auteurs développent leur idée d'espaces d'exemples en cinq paragraphes illustrant des points spécifiques.

II.1. Sur les dimensions des variations possibles et l'étendue des changements autorisés.

Il y a deux façons de percevoir un objet comme un exemple de quelque chose. On peut être attentif aux variations qui mettent en évidence les invariants parmi toutes les variations. On peut aussi insister sur la vision d'un cas particulier au milieu de la généralité. Ainsi, on peut voir une expression particulière du second degré comme une instanciation de la forme générale du second degré.

Les auteurs introduisent l'idée de dimension des variations possibles pour aider les apprenants à faire varier les exemples sans qu'ils perdent leur caractère exemplaire et générique. La

nouveauté est ici que le professeur peut intervenir pour déclencher ces variations et ouvrir de nouvelles dimensions possibles.

Quant à l'étendue des changements autorisés, elle a été introduite dans le cadre théorique pour favoriser l'exploration de ce champ des exemples par les élèves et les professeurs.

II.2. Espaces d'exemples accessibles

La métaphore du garde-manger est utilisée par les auteurs pour mettre en évidence la double idée du stockage des exemples puis de leur accessibilité. En effet, stocker est nécessaire mais utiliser ce qui est stocké est également indispensable et non évident à faire. L'idée d'accessibilité permet d'attirer l'attention du professeur sur le contexte, l'ancienneté des situations, les connaissances d'un élève particulier.

II.3. Construction d'exemple et enrichissement de l'espace des exemples.

Ce point n'est pas beaucoup développé par les auteurs qui font référence à d'autres articles : il semble essentiel dans leur approche pédagogique qui construit les notions mathématiques à partir d'une structuration des exemples de la notion.

II.4. Explorer les espaces d'exemples

Dans la logique métaphorique qui est celle de la notion d'espaces d'exemples, les auteurs suggèrent des activités d'exploration des diverses dimensions de ces espaces. Il est ainsi possible de demander aux étudiants de fournir le plus possible de nombres irrationnels entre 100 et 200, ce qui permet de combiner des écritures avec π ou $\sqrt{2}$.

II.5. Une synthèse sur la notion d'espaces d'exemples

De manière synthétique, les auteurs affirment qu'un espace d'exemple est l'expérience de faire surgir à l'esprit une ou plusieurs classes d'objets mathématiques en y associant leurs méthodes de construction.

Ces espaces ne sont pas statiques mais évolutifs et dynamiques.

Note 4 : Dans cette dernière synthèse, les auteurs insistent sur la dimension personnelle et psychologique de la notion. Il ne faut ainsi pas voir les espaces d'exemples comme une collection mathématique d'objets mais comme un processus lié à l'individu qui lui permet de donner du sens aux objets mathématiques en les généralisant à partir d'exemples. A mon avis, leur synthèse les éloigne un peu du cœur de ce qu'ils ont défini dans les quatre premiers paragraphes. Elle les éloigne aussi des usages habituels de la notion qu'ils rappellent et dont certains sont présentés dans cette brochure.

III. SUR LE RÔLE DE LA NOTION D'ESPACE D'EXEMPLES POUR L'ENSEIGNEMENT ET L'APPRENTISSAGE DES MATHÉMATIQUES

L'article se conclut par un ensemble de perspectives sur les usages pédagogiques de la notion d'espace d'exemples. Il va s'agir de penser à des tâches spécifiques qui aident les apprenants à construire et à développer le garde-manger des exemples. En invitant les élèves à construire

des exemples dans des champs mathématiques spécifiques avec contraintes – esthétique, simplicité, complication, généricité ou particularité – les auteurs s'appuient aussi sur cette exploration des variations et des changements. Ils visent aussi à rendre conscients élèves et professeurs des différences entre les types d'exemples.

Une certaine explicitation du travail fait autour de ces notions semble nécessaire pour aider les professeurs à développer ce type d'enseignement en explorant avec lucidité le monde des exemples.

Note 5 : Les modalités mises en évidence par les auteurs et notamment l'approche systématique des variations et des limites des exemples rappellent d'autres expériences et cadres théoriques. On peut citer les méthodes liées au *problem solving* de Schoenfeld ou les réflexions sur le milieu et les situations fondamentales de Brousseau. Les auteurs font aussi une allusion aux travaux de Legrand en évoquant l'idée d'une classe organisée pour promouvoir ce type de travail mathématique.

IV. SUR LE RÔLE DE LA NOTION D'ESPACE D'EXEMPLES DANS LA RECHERCHE EN DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

La tonalité du dernier paragraphe détonne par rapport à l'ensemble. Cette fois les auteurs argumentent sur l'intérêt de leur cadre théorique pour les recherches sur l'enseignement des mathématiques. Ils commencent par noter que chercheurs et formateurs d'enseignants échouent à développer des pratiques partagées pour décider de la pertinence de leurs cadres et outils théoriques. Ils dénoncent aussi le côté évasif des définitions qui ne peuvent s'appuyer sur un cadre axiomatique. De leur point de vue, la notion d'espace d'exemples pourrait être un objet intéressant pour sortir les recherches en sciences de l'éducation et spécialement celles sur l'enseignement des mathématiques de la confusion générée par les usages multiples de termes similaires et par les emplois de termes multiples ayant des significations semblables. Ceci permettrait de développer la discipline et de la rendre plus productive.

V. BIBLIOGRAPHIE

WATSON, A., & MASON, J. (2005). *Mathematics as a constructive activity: learners generating examples*. Mahwah: Erlbaum.

MICHENER, E (1978). Understanding mathematics. *Cognitive Science*, 2, 361 – 383.

SFARD, A. (1994). Reification as the birth of metaphor. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 44 – 55.

Using learner generated examples to introduce new concepts

Anne Watson & Steve Shipman

Fiche écrite par Laurent Vivier

I. BASES THÉORIQUES

L'article est articulé autour de deux axes théoriques. Le premier axe est issu des travaux de Marton (Marton & Booth, 1997) sur la théorie de la variation et le second est celui des *Learner Generated Examples* (LGE)¹ développé par Watson et Mason (2005).

La théorie de la variation de Marton met en relief, parmi différents aspects de l'apprentissage, la perception de la variation dans des événements quasi-simultanés. Ce point de vue peut facilement être introduit en mathématiques où les structures se manifestent à travers les relations entre les similarités et les différences.

L'objectif est donc de faire générer la variation par les étudiants puis de mener une réflexion sur les relations entre l'activité et l'effet produit. Cela permettrait de faire prendre conscience des structures mathématiques sous-jacentes. C'est dans ce sens que Watson et Mason (2005) ont élaboré un outil pédagogique sur cette idée.

Dans la suite de l'article, il s'agit de voir comment les LGE peuvent être réellement utilisés et surtout de répondre à deux objections souvent avancées.

II. LES OBJECTIONS : DES LGE NE PEUVENT ÉMERGER DU NOUVEAU

Cette partie expose trois objections avancées contre les LGE.

II.1. On ne peut pas construire des objets sans avoir une idée de ce qu'il y a à construire

Cette première objection s'appuie sur le « paradoxe de l'enseignement » (Fodor, 1980) qui avance que l'on ne peut pas accéder à un système conceptuel plus riche que celui dans lequel on est. Mais cela ne peut être valable en mathématiques car précisément, en mathématiques, on crée de nouveaux objets à partir d'objets familiers.

Par exemple, demander des exemples de fonction non-continue ne requiert pas de connaissance sur la non-continuité. S'exercer à la variation au-delà des limitations perçues est un moyen de construire de nouveaux objets. On retrouve ici la notion de non-exemple².

¹ L'article ne développe pas le cadre des LGE, voir par exemple la fiche de lecture page 7 sur les espaces d'exemples.

Un autre exemple concerne les bases de numération : de combien de chiffres a-t-on besoin en base dix pour pouvoir écrire tous les nombres ? Puis la même question en base deux. Ici, la variation (dix $\rightarrow$ deux) permet de faire émerger les structures sous-jacentes des représentations mathématiques.

II.2. L'empirisme en mathématiques n'est pas suffisant pour la conceptualisation car il y a un fonctionnement mental supérieur

Par empirisme, il faut comprendre ici : le relevé de données, l'exécution de techniques, l'observation des exemples, sans activité réflexive sur cette action.

Cette objection est particulièrement avancée par Schmittau (2003). Elle critique fortement un courant américain qui encourage les élèves à générer et à comparer des exemples pour atteindre une compréhension abstraite. Schmittau précise qu'ainsi on piège les élèves car on doit étirer, mutiler leurs conceptions pour coller aux généralisations. En d'autres termes, on fait croire à ces élèves que les connaissances ne sont que des extensions de leurs exemples, que l'on peut faire sans précaution particulière – dans la mesure où l'enseignant prend généralement en charge ces précautions de manière peu transparente pour les élèves.

Pourtant, ces critiques reposent sur les travaux de Davydov (1972) qui stipulent que la comparaison est le moyen de percevoir les structures, les dépendances et les relations qui caractérisent l'abstraction mathématique.

La question est de savoir ce que l'on compare et l'un des auteurs utilise une métaphore sur la coupe du bois (*going with the grain*) où « couper dans le sens de la fibre » est superficiellement facile. Ce que Watson veut dire, c'est que dans la comparaison il est nécessaire que la structure soit dégagée, perçue, discernée, par les élèves eux-mêmes et c'est ce qui est difficile (c'est en coupant contre la fibre que la structure du bois se révèle).

II.3. Les LGE ne sont testés que pour les élèves de haut niveau d'étude

On peut en effet le penser car c'est ce que l'on trouve dans la littérature, beaucoup d'études sur le haut niveau et peu à l'école (*school*).

II.4. Les questions

De ces objections, trois questions émergent

- Est-il possible que les apprenants créent des exemples de classes d'objets non rencontrés avant ?
- Est-il possible que des apprenants qui ne sont pas à un haut niveau d'étude puissent développer un apprentissage sur des objets mathématiques et des relations en générant leurs propres exemples ?
- Et si oui, quelles sont les conditions qui peuvent contribuer à cet apprentissage ?

Il est à préciser que dans un exemple, le producteur ne voit pas nécessairement ce que pourrait y voir un expert. C'est pourquoi il est important de considérer un « exemple de » pour diriger

² Cf. la fiche page 7 ainsi que l'article d'Ouvrier-Bufferet page 49.

la construction vers un certain but à atteindre, connu du sujet. Car c'est dans ce processus de recherche que l'étudiant rencontrera les nouvelles idées pour lui, les relations, les manières de classer.

Le papier propose ensuite deux études, où le cadre des LGE est consciemment utilisé comme une nouvelle stratégie d'enseignement, pour répondre aux objections.

III. ÉTUDE 1 : LGE POUR COMPRENDRE LES STRUCTURES

III.1. Le contexte

L'étude se déroule au Royaume Uni, dans une classe de 30 élèves de 13/14 ans qui est une des « meilleures de la cohorte de l'année précédente » ainsi que dans une classe parallèle témoin (au Royaume Uni les classes sont constituées par niveau en fonction des résultats obtenus par chaque élève).

Un travail sur les racines carrées a été mené avant l'étude. Le problème posé est le suivant : faire en sorte que $(a+\sqrt{b}).(c+\sqrt{d})$ soit entier avec quatre entiers a, b, c et d tels que b et d ne sont pas des carrés d'entiers. L'objectif est de faire émerger la conjugaison. Un artefact est utilisé sous forme de grille pour aider les élèves à calculer le produit qui relève de la double distributivité.

Le travail commence par une familiarisation de la grille pour faire des produits avec, notamment, des nombres du type $a+\sqrt{b}$ et des lettres. Le problème proprement dit suit ; il est à résoudre de manière individuelle en 30 min, à faire sur papier A3.

Les auteurs sont surtout attentifs à la nature et aux choix des nombres, à l'utilisation du signe « - », ...

III.2. Les résultats

18 étudiants sur les 30 montrent une certaine organisation dans leur recherche. Tous ont pratiqué la multiplication de racines carrées et on trouve au moins 4 exemples par étudiant.

La calculatrice donne le résultat (le produit est entier ou non) mais elle est rapidement abandonnée car elle ne permet pas de comprendre la structure qui est reliée à l'algèbre des racines carrées.

10 étudiants ont clairement travaillé sur la structure mais peu ont vu qu'il fallait que les deux racines carrées soient identiques (les auteurs donnent l'exemple de $(2+\sqrt{2})^2$). Mais aucun n'a pensé à introduire un signe « - » pour éliminer les termes diagonaux : changer de signe n'est pas une dimension de variation.

Une table montre l'évolution des exemples proposés par certains étudiants. On voit que certains termes sont maintenus constants pendant que d'autres varient et aussi, bien sûr, des carrés parfaits apparaissent. Ainsi, les exemples ne sont pas liés à une perspective inductive, on travaille sur la structure.

Le cours suivant est une reprise par le professeur (Steve Shipman). Par une utilisation des LGE, il apparaît ainsi une motivation ainsi qu'une augmentation du sens de la structure et les étudiants commencent à comprendre ce que sont les racines carrées (*surds*).

Pour ce qui est du groupe parallèle, les étudiants n'ont pas de véritable problème pour les questions familières, mais sont en difficulté sur les questions non familières ce qui marque une différence avec le groupe expérimental.

Sur la première étude, les auteurs en concluent que les LGE constituent une bonne manière pour commencer à comprendre un nouveau concept. Ils relèvent une fois de plus l'importance du but à atteindre et l'aide apportée par la grille. Toutefois, l'utilisation d'inverses (au sens algébrique) est limitée aux racines carrées et, en particulier, n'apparaît pas pour l'addition (signes $+/-$). On étend ainsi l'espace des exemples des nombres et le sens de la multiplication.

Les objections de Schmittau (cf. ci-dessus) ne sont donc pas valides ici car on impose aux étudiants un but (difficile) à atteindre.

IV. AUTRES ÉTUDES

D'autres études sont brièvement décrites avec des classes plus faibles.

Une étude a pour objectif d'arriver, en une heure, à percevoir $\cos(\theta)$, $\sin(\theta)$ et $\tan(\theta)$ comme des rapports invariants dans un triangle rectangle dont θ est un des angles. Pour ce faire, chaque étudiant doit tracer dix triangles rectangles. En conclusion, ce groupe est finalement meilleur qu'un autre groupe qui a pourtant travaillé sur la trigonométrie deux ans avant la séance proposée.

Une autre étude porte à nouveau sur les racines carrées. Elle s'inspire fortement de l'étude 1 et des constats faits. Ainsi, les auteurs ont inséré, pendant le travail de familiarisation de la grille, la possibilité d'utilisation du signe « $-$ » et ils n'imposent plus la condition b et d non carrés d'entier.

V. CONCLUSION

Une exploration de nouveaux concepts par les LGE est possible. Cela permet d'identifier ou de créer des relations, déduire des structures, engager un travail sémantique plutôt que syntaxique.

Les données donnent des preuves que les étudiants peuvent apprendre de nouveaux concepts à travers une symbiose entre l'induction et l'abduction et entre l'expérience et la déduction par les relations générées par les exemples.

VI. COMMENTAIRES DU LECTEUR SUR L'ARTICLE

Si les conclusions semblent raisonnables, on peut néanmoins objecter qu'il y a un parti pris très fort quant à l'utilité des LGE, et on pourrait arguer que c'est plus le contexte d'investigation qui est en jeu que la seule utilisation d'exemples. La nécessité d'une finalité dirigeant l'utilisation des exemples, et la référence aux travaux de Schmittau, vont d'ailleurs dans ce sens. On serait alors tentés de moduler la conclusion en disant que, dans un contexte

d'investigation, les LGE permettent une exploration productive en vue de la construction ultérieure de connaissances mathématiques. En outre, ce que donnent à voir les études, et surtout les études 1 et 2, est essentiellement un travail sur le signe. Ainsi, on peut douter, à partir de cet article, que l'on engage réellement un travail sémantique.

Plus globalement, certains passages sont difficiles à suivre car on a parfois du mal à suivre la pensée des auteurs. Vygotsky est en arrière-plan et, semble-t-il, la ZPD (mais elle n'est pas mentionnée).

Il manque une analyse a priori à l'expérimentation centrale de l'article et la notion de « structure sous-jacente » n'est pas vraiment discutée (voir ci-dessous).

VI.1. Commentaires sur l'objection 1

Les réfutations apportées par les auteurs relèvent plus de l'exposé d'opinion et sont, finalement, peu convaincantes. C'est plutôt l'étude ultérieure qui appuie leur propos. Ils s'appuient en particulier sur l'exemple de la non-continuité. Mais la non-continuité est-elle un concept comme les auteurs le supposent ? On peut en douter et il semble que, dans ce qu'ils développent, on reste dans le même système conceptuel. Ainsi, l'exemple proposé ne semble pas tout à fait remplir le rôle que lui prêtent les auteurs.

Il faudrait aussi préciser de quelles structures l'on parle. Par ailleurs, l'article ne précise pas les conditions de l'émergence des structures et il semble plutôt que ce soit un vœu des auteurs.

La réponse à l'objection 1 apparaît aussi en conclusion de la première étude où les auteurs concluent que les LGE constituent une bonne manière pour commencer à comprendre un nouveau concept. Mais on peut tout à fait prendre le contre-pied et affirmer la conclusion inverse : les étudiants restent en fait au même niveau conceptuel, au même niveau d'abstraction, ils étendent juste leur domaine à leur niveau. Par conséquent la conjugaison n'émerge pas.

VI.2. Commentaires sur l'objection 2

Il faut noter que, contrairement à ce que laissent entendre les auteurs, les trois points de vue mentionnés (LGE, Schmittau, Davidov) ne semblent pas si antithétiques. Il en ressort en réalité que les exemples seuls ne suffisent pas, qu'il faut les organiser pour que ce ne soit pas seulement une accumulation d'exemples mais une mise en perspective qui laisse apparaître les structures sous-jacentes. Cela renvoie à leur métaphore du bois qui est peu explicite – pour qui ne la connaît pas !

VI.3. Un manque d'analyse a priori

L'étude 1 manque d'une étude a priori que l'on peut reproduire ici.

Tout d'abord, précisons que d'autres structures peuvent apparaître, et peut-être plus naturellement : $Z[\sqrt{b}]$ ou $Q[\sqrt{b}]$ où éliminer les radicaux aux dénominateurs prend tout son sens. D'autres structures sont implicites : on cherche à faire des sommes et des produits avec des racines carrées, mais ces opérations ont-elles été explicitées ? Et qu'en est-il de leurs propriétés ?

Sur la situation proposée aux élèves, il est à noter qu'ils risquent de ne voir que la condition suffisante, le produit de deux quantités conjuguées est un entier. Et c'est bien ce qui est visé. Mais qu'en est-il de la condition nécessaire qui conditionne de fait la situation ? Les auteurs ne la mentionnent pas alors que c'est fondamental puisque si la condition n'est pas nécessaire les élèves risquent de trouver des solutions qui n'atteignent pas l'objectif – la conjugaison. Heureusement, on peut démontrer que le produit est un entier si et seulement si les quantités sont conjuguées ou b et d sont des carrés d'entiers. Il faudrait au moins le signaler dans l'article.

Ce problème d'analyse a priori apparaît également pour les autres études. Dans l'étude, dite étude 2, il manque de manière notable une discussion sur l'angle θ qui est la variable principale – il s'agit d'un angle de triangle rectangle à tracer. Les connaissances relatives à la trigonométrie sont-elles disponibles ? Plus globalement, la situation est peu explicitée et on ne peut finalement pas se faire une idée. Par exemple, on peut penser que les élèves doivent mesurer et effectuer une division, mais cela n'est pas explicite. Qu'en déduire alors ?

VI.4. Commentaires sur le déroulement de la situation de l'étude 1

Sur l'étude 1, qui est la plus détaillée, les auteurs affirment que 10 étudiants ont clairement travaillé sur la structure, mais on ne sait comment. Peu d'étudiants ont vu qu'il fallait que les deux racines carrées soient identiques. A ce propos, le verbe employé est *need*, ce qui apparaît trop fort : d'une part il n'y a pas d'analyse a priori qui justifie ce terme et d'autre part ce n'est pas ce qui peut être perçu par un élève. Pour un étudiant, on peut plus simplement dire qu'il trouve que ça aide d'avoir $b=d$.

Dans la table des réponses, On voit également une tendance chez certains à aboutir à $b=d$ mais sans aller plus loin, sans doute à cause du problème du signe « $-$ » cela n'est pas mentionné dans l'article. A ce propos, on pourrait noter, dans une analyse a priori, que le signe « $-$ » a très peu de chances d'apparaître, en raison notamment de la présence très forte du signe « $+$ ».

Dans l'étude 1, un cours a suivi l'implémentation de cette situation. Il y a une reprise, mais on ne sait pas s'il y a un appui sur les exemples et l'algèbre qui sont apparus au cours précédent ? Pour ce qui est du groupe parallèle, il est dit que les étudiants n'ont pas de véritable problème pour les questions familières, mais ils sont en difficulté sur les questions non familières ce qui marque une différence avec le groupe expérimental. Mais qu'a-t-on fait travailler en fait ? une méthode d'investigation en mathématiques ? Il semble en fait que le contexte antérieur donne du corps à la connaissance et permette un meilleur réinvestissement. Mais les auteurs ne se demandent pas si cela est lié à l'utilisation d'exemples ou à un « simple » contexte d'investigation.

VII. BIBLIOGRAPHIE

DAVYDOV, V. (1972). (Trans. 1990) Types of generalization in instruction. *Soviet Studies in Mathematics Education*, 2, 90–102.

MARTON, F., & BOOTH, S. (1997). *Learning and awareness*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

FODOR, J. (1980). Fixation of belief and concept acquisition. In M. Piatelli-Palmerini (Ed.), *Language and learning: the debate between Jean Piaget and Noam Chomsky* (143–149). Cambridge: Harvard University Press.

SCHMITTAU, J. (2003). Cultural-historical theory and mathematics education. In A. Kozulin, B. Gindis, V. Ageyev, & S. Miller (Eds.), *Vygotsky's educational theory in cultural context* (225–245). Cambridge: Cambridge University Press.

Characteristics of teachers' choice of examples in and for the mathematics classroom

Iris Zodik & Orit Zaslavsky.

Fiche écrite par Marie-Pierre Galisson et Bernadette Denys

L'article porte sur des caractéristiques relatives aux choix d'exemples des professeurs pour la classe et en classe de mathématiques dans le second degré. C'est le compte rendu d'une recherche à grande échelle dont l'objectif était d'identifier chez des enseignants expérimentés ce qui caractérise les exemples qu'ils ont préparés a priori et ceux qu'ils produisent en classe dans l'action. Il a aussi pour objet d'avoir accès aux critères qui sont à l'origine de leur choix et aux connaissances qui leur sont nécessaires.

I. RÉFÉRENCES THÉORIQUES

Les auteurs rappellent et illustrent l'importance des exemples dans l'enseignement des mathématiques, en insistant sur leur caractérisation en termes de typologie (exemple générique ; non-exemple ; contre-exemple), de nature (distincte selon qu'il s'agit d'une notion ou d'une procédure, différente encore si la procédure vise un plus grand degré de généralité).

Leur étude s'inscrit dans la filiation de travaux qui montrent combien la multiplicité et la variété des exemples sont liées à l'appréhension des structures fondamentales (Atkinson, Derry, Renkl & Wortham, 2000) et dans celle de recherches qui révèlent la nécessité d'un choix réfléchi et organisé d'exemples pour construire des images pertinentes du concept d'espace d'exemples³ (Vinner, 1983 ; Zaslavski & Peled, 1996 ; Petty & Jansson, 1987 ; Watson & Mason, 2005).

Les auteurs relèvent encore que les recherches sur le choix et l'utilisation des exemples par les professeurs sont peu nombreuses. Parmi ces recherches, ils retiennent les travaux de Rowland⁴, Thwaites & Huckstep (2003) qui ont mis en évidence trois types de faiblesses caractéristiques des choix d'enseignants débutants (dans le premier degré) : la non prise en compte de variables cruciales, un choix inapproprié de nombres pour montrer la pertinence d'un algorithme, un choix de données au hasard.

Ces constats leur permettent de faire un lien avec la question des connaissances du professeur nécessaires pour opérer des choix d'exemples pertinents (Ball, Bass, Sleep & Thames 2005) et avec les propres travaux de Zaslavski qui travaille depuis 2005 sur la difficulté du choix des exemples dans l'enseignement du second degré.

³ Cf. les fiches pages 7 et 11.

⁴ Cf. la fiche page 27.

En s'appuyant sur le fait que la formation des enseignants ne prend pas en charge la fonction des exemples pour enseigner, les auteurs font l'hypothèse que l'aptitude à opérer des choix se construit dans la pratique. D'où leur objectif de s'intéresser aux pratiques des enseignants expérimentés en cherchant à mutualiser des résultats de recherches issus du domaine portant sur les exemples et du domaine portant sur les connaissances des professeurs.

Du côté des recherches sur les exemples, ils prennent en compte un certain nombre de résultats :

- Les travaux de Rissland (1991) et de Skemp (1971) qui montrent qu'un exemple est contextualisé, qu'il est appréhendé de divers points de vue et que des aspects non pertinents peuvent brouiller ce qui doit être essentiel
- Par suite, il est donc préconisé (Watson & Mason, 2006) pour que l'exemple fasse sens, d'en faire varier certains aspects tout en préservant d'autres ce qui permettra à l'élève d'appréhender le cas général à travers le cas particulier (cœur de l'exemplification – (Mason & Pim, 1984)).

Du côté des recherches sur les connaissances du professeur, cette capacité à exemplifier renvoie à trois des composantes distinguées par Shulman (1986, 1987) : sa connaissance des mathématiques (*knowledge of mathematics*), sa connaissance de l'apprentissage de l'élève (*knowledge of students' learning*), sa connaissance des contenus pédagogiques mathématiques (*pedagogical content knowledge*). La dernière catégorie comprend les divers moyens par lesquels le professeur peut faciliter l'apprentissage des notions mathématiques, en formulant, favorisant des représentations, en produisant des exemples.

Par ailleurs, remarquant qu'une part importante du travail du professeur réside dans ses prises de décision, les auteurs font référence au « savoir agir dans l'instant » (*knowing to act in the moment*) mis en évidence par Mason et Spence (1999) et plus précisément, en ce qui concerne le choix ou la production d'exemples, à la capacité d'adaptation du professeur (*teachers' flexibility*) (Leikin & Dinur, 2007).

Enfin, pour analyser le développement des connaissances de l'enseignant au cours de sa pratique, les auteurs s'inspirent du modèle de Simon (1995), « *Mathematics Teaching Cycle* ». Ce dernier cadre illustre les dialectiques entre les connaissances de l'enseignant, sa préparation de la leçon, et les interactions dans la classe.

Nourrie par ces apports, l'étude s'intéresse aux choix des exemples opérés par les professeurs, à ce qui motive ces choix en termes de connaissances, aux « savoirs en action » (*knowledge-in-action*) qu'ils révèlent, à l'accessibilité à l'espace d'exemples personnel des enseignants. Les auteurs proposent en conclusion un cadre d'analyse inspiré par Simon « *Mathematics Exemple-Related Teaching Cycle* » et soulignent l'intérêt de ce travail en termes d'articulations avec les travaux de Ball et al (2005) sur les connaissances mathématiques nécessaires pour enseigner.

Cette étude se situe donc à l'intersection de deux domaines de recherche, celui sur les fonctions de l'exemple dans l'apprentissage et l'enseignement et celui des connaissances et des pratiques du professeur de mathématiques.

II. DESCRIPTION DE L'ÉTUDE

L'étude concerne 5 professeurs expérimentés : 15 classes participent à cette recherche (du 7^e au 9^e grade) ; ces classes sont de bon niveau ou hétérogènes.

II.1. Les objectifs

Caractériser ce qui fonde les choix d'exemples des professeurs et, en particulier dans l'action, ce qui motive leur décision de produire ou transformer des exemples.

II.2. Les données

54 séances observées et présentées en détail (notes, enregistrements audio, deux chercheurs par séance pour 22 des séances). Ces données sont croisées avec d'autres sources (entretiens avant et après les séances, travaux d'élèves, préparations du professeur, plan des leçons).

Pour chacun des professeurs, les leçons observées sont choisies au hasard ou choisies car considérées par les enseignants expérimentés comme des leçons qui illustrent de bons choix, de bons traitements d'exemples (leçons observées en fin de recherche de façon à avoir accès à des pratiques plus ou moins régulières).

II.3. L'analyse des données

Elle reposait sur deux étapes préalables : ces choix satisfont-ils aux critères d'un exemple ? Sont-ils valides d'un point de vue mathématique ?

Plutôt que de chercher à caractériser un exemple en lui-même, il s'est révélé plus porteur de sens de s'intéresser aux considérations sous-jacentes qui conduisent le professeur à ce choix et à une catégorisation de ces considérations. Celles-ci renvoient non seulement aux mathématiques mais à la pédagogie mise en œuvre (objectif, outils à disposition, interprétation...).

Une analyse statistique permet d'obtenir une vision plus claire de ces données et d'interpréter quelques phénomènes. Limitée, elle permet d'émettre des hypothèses pour des recherches futures.

La consistance des analyses est étayée par le croisement des points de vue de deux chercheurs qui mènent l'analyse indépendamment et par des entretiens avec les professeurs concernés.

II.3.1. L'identification des exemples

Il y a nécessité d'une interaction mentale entre l'objet censé donner une image du concept et le sujet qui en infère l'idée de classe ; l'élève peut se référer à l'objet comme une référence d'une classe de situations.

II.3.2. La correction mathématique des exemples

Les auteurs relèvent trois types d'incorrections : un cas traité comme un exemple d'une classe plus générale, qui en fait ne remplit pas les conditions nécessaires d'un tel exemple ; traiter un exemple comme un contre-exemple pour une conjecture quand il n'y a pas de contradiction logique ; traiter un cas de non-existence comme s'il y avait un exemple « possible ».

III. LES RÉSULTATS

Les chercheurs ont relevé 604 exemples produits par les enseignants ; 35 par les élèves et très peu d'exemples incorrects (12).

Les auteurs distinguent deux types d'exemples : les exemples planifiés, les exemples « spontanés ».

- Les exemples planifiés : le professeur les intègre dans sa leçon (plan, document de travail, manuel) ; ils peuvent être aussi identifiés dans les déclarations et actions du professeur ;
- Les exemples spontanés : liés à une prise de décision dans l'action, construits dans le moment ou complétant ou modifiant un autre exemple (donné par exemple par un élève), ils sont identifiés dans les déclarations des professeurs, le temps mis pour les produire, les expressions de l'enseignant, ses hésitations. Ils répondent souvent à une interrogation d'élève.

Les chercheurs caractérisent 317 exemples planifiés et 287 exemples spontanés, bien que la distinction soit parfois malaisée.

Les ressources dans lesquelles puisent les enseignants sont majoritairement des manuels.

Les exemples spontanés sont plutôt issus de l'espace d'exemples du professeur directement accessible. Les exemples produits moins instantanément indiquent un accès moins immédiat à l'espace d'exemples du professeur, ou la nécessité d'en produire de nouveaux. Ils signaleraient une occasion d'apprentissage pour le professeur, un enrichissement de son espace d'exemples personnel.

Les principes qui guident les considérations de choix ou de productions d'exemples des professeurs relèvent des « savoirs pédagogiques mathématiques » (PCK) et de la prise en compte des élèves. Les enseignants prennent conscience de ces rapports avec leurs connaissances après questionnement : ils ne s'étaient jamais exprimés à ce sujet. Ces considérations sont au nombre de 474 : elles peuvent être catégorisées en 6 critères explicités ci-dessous (fréquences d'occurrences décroissantes) et distingués sur le graphique ci-après (Fig. 6) selon les types d'exemples (distribution en pourcentage).

- Commencer par un exemple simple ou un cas familier (*Start with a simple or familiar case*) – un triangle en position prototypique...
- Prendre en compte les erreurs (*Attend to students' errors*) prévisibles, soit pour les éviter, soit au contraire pour que les élèves s'y confrontent – $\sqrt{50} = \sqrt{(2 \times 25)}$ mais $\sqrt{25}$ sert à attirer l'attention sur le fait que $\sqrt{(42 + 32)} \neq \sqrt{42} + \sqrt{32}$...
- Attirer l'attention sur les aspects caractéristiques d'une notion (*Draw attention to relevant features*) – prendre des triplets pythagoriciens classiques (suites proportionnelles à (3,4,5) pour illustrer le théorème de Pythagore, puis introduire un autre triplet moins familier afin d'éviter une centration sur des aspects réducteurs.
- Amener au cas général en s'appuyant sur des choix « au hasard » (*Convey generality by « random » choice*) : les enseignants sont conscients de l'opportunité ou non de

cette décision qui n'est en fait pas si aléatoire mais orientée (domaines de nombres, choix des élèves). Par exemple, donner sens à la définition d'un rationnel en la faisant fonctionner avec des nombres déjà connus des élèves, s'appuyer sur une configuration géométrique donnée au « hasard » pour inférer une propriété générale.

- Prendre en compte les cas particuliers, non prototypiques (*Include uncommon cases*) – Par exemple le statut de 0 et 1 dans l'étude des racines carrées, le statut des quadrilatères non convexes.
- Réduire au minimum le travail non nécessaire (*Keep unnecessary work to minimum*) – par exemple, pour illustrer le développement décimal périodique illimité des rationnels non décimaux, choisir $1/7$ plutôt que $1/17$, éluder des étapes calculatoires...

Sont données 302 considérations concernant les exemples spontanés, 172 des exemples planifiés : l'écart s'explique par le fait que les chercheurs n'ont pas accès aux motifs qui sous-tendent ces derniers...

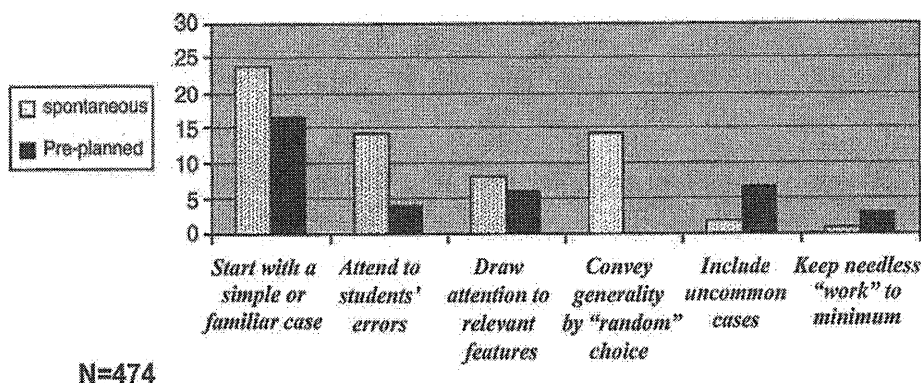


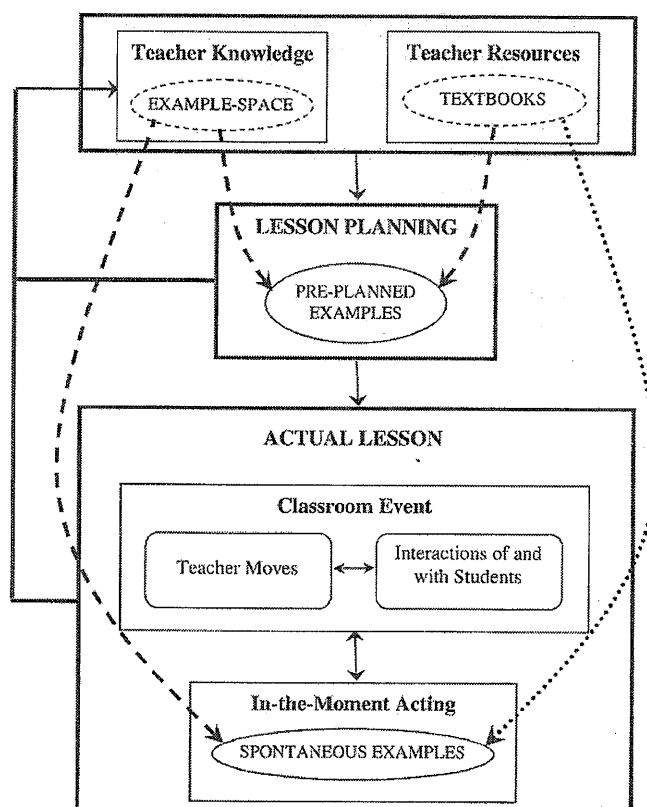
Fig. 6 Distribution of number of considerations between pre-planned examples and spontaneous examples (in percentage)

Des tendances se dessinent : les catégories 2 et 4 (numérotées de gauche à droite) renvoient aux exemples spontanés à l'inverse des catégories 5 et 6 qui renvoient aux exemples planifiés. La seconde catégorie traduit le fait que c'est dans le cours de la leçon que les professeurs prennent conscience des difficultés des élèves et non pas de façon anticipée. La première catégorie est dominante, tant en termes d'occurrence par types d'exemples qu'en termes d'occurrences par critère.

Beaucoup des connaissances en jeu sont étroitement liées aux mathématiques (logique d'un contre-exemple, constructibilité d'un triangle, propriétés des nombres...). D'autres font plutôt écho aux savoirs pédagogiques (PCK) : insister sur les propriétés pertinentes ; graduer une suite d'exemples, jouer sur des choix aléatoires pour généraliser. Finalement, nombre de ces considérations montrent combien les professeurs prennent en compte les attentes des élèves : prise en compte des erreurs, graduation des difficultés.

Les auteurs produisent, en s'inspirant du cadre de Simon (1995), un modèle (Fig.7) caractérisant la « **dynamique des choix et des élaborations d'exemples du professeur quand il enseigne** ».

Fig. 7 Mathematics example-related teaching cycle



Les « justifications des choix » sont imbriquées, liées aux événements dans la classe. Les choix dans la leçon réelle (*actual lesson*) sont reliés aux connaissances de base du professeur, à son espace d'exemples accessible. Quand il doit s'en éloigner, c'est l'occasion de développer cet espace.

Le modèle illustre qu'en termes de connaissances, l'espace d'exemples et les manuels sont des ressources principales. Les manuels servent essentiellement à la planification de la leçon, l'espace d'exemples sert à la fois à la planification et à la mise en œuvre du cours. Les interactions dans la classe, les actions du professeur créent les conditions pour que celui-ci agissant dans l'instant, trouve l'exemple approprié au contexte. Il semble que l'existence d'un espace d'exemples développé et accessible favorise l'accroissement des capacités d'adaptation du professeur. Des événements imprévus seraient susceptibles d'accroître ce développement en termes de prise de conscience des besoins des élèves et de capacités à choisir des exemples adaptés.

IV. CONCLUSION

Les connaissances du professeur se développent dans sa pratique (constat attesté par sa manière d'exprimer ce qui justifie son choix).

Les auteurs soutiennent que les exemples spontanés sont en lien avec un espace exemple accessible et pour une large part lié au contexte.

Ils suggèrent de distinguer entre un espace d'exemples aisément accessible (immédiateté et automaticité) et un espace d'exemples plus distant dont l'accès suppose une réflexion et une prise en charge personnelle.

L'espace d'exemples du professeur est une collection d'exemples étiquetés. Une étiquette réfère à une classe d'exemples et à un contexte ; l'expansion de l'espace d'exemples ne tient pas seulement à l'ajout de nouveaux exemples, mais aussi à l'association de nouvelles étiquettes sur des exemples déjà existants. La fonction « cube » est une fonction impaire mais aussi l'exemple d'une fonction dont une tangente coupe la courbe. L'enrichissement de l'espace d'exemples est lié à l'idée d'élargissement des contextes d'usage des exemples.

Les auteurs relèvent quelques constats. Dans les principes des professeurs on retrouve le besoin habituel de prise en compte des difficultés des élèves. En ce qui concerne les exemples spontanés, les auteurs soulignent combien les professeurs accordent un pouvoir certain aux exemples choisis au hasard pour conduire à une généralisation, mais ils rappellent aussi les écueils de ces exemples (Rowland, 2003). Ils identifient les raisons majeures qui expliquent l'existence des exemples spontanés, à savoir : la nécessité de répondre à une question d'élève (notamment une proposition fausse) et la prise de conscience des limites d'un exemple préparé. Tous les contre-exemples sont des exemples spontanés.

Cette étude ouvre les perspectives suivantes :

- Exploiter ce travail dans le cadre de la formation initiale et continue (faciliter l'articulation théorie-pratique) – Faire vivre des expériences pour élaborer des exemples spontanés dans le cadre de la classe (réel ou hypothétique) dont l'objectif serait le développement d'un espace d'exemples et la prise de conscience des différents aspects qui guident choix ou élaboration d'exemples.
- Initier d'autres recherches : Comment diffuser les connaissances des praticiens issues de leurs pratiques dans un programme de formation ? S'intéresser aussi aux exemples produits par les élèves et les enseignants dans d'autres classes. Comment se construit l'espace d'exemples ? Comment les exemples sont-ils encodés dans l'espace d'exemples ? Quels liens entre accessibilité à l'espace d'exemples et contexte ?

V. BIBLIOGRAPHIE

- ATKINSON, R.K., DERRY, S.J., RENKL, A., & WORTHMAN, D. (2000). Learning from Examples: Instructional principles from the worked examples research. *Review of educational Research*, 70(2), 181-214.
- BALL, D., BASS, H., SLEEP, L., & THAMES, M., (2005). A theory of mathematical knowledge for teaching. Paper presented at a Work- Session at ICMI –Study : *The Professional Education and Development of teachers of Mathematics*, Brazil, 15-21 may 2005.
- LEIKIN, R., & DINUR, S., (2007). Teacher flexibility in mathematical discussion. *The Journal of Mathematical Behavior*, 26(4), 328-347.
- MASON, J., & PIM, D., (1984). Generic examples: Seeing the general in the particular. *Educational Studies in mathematics*, 15, 227-289.

- MASON, J., SPENCE, M., (1999). Beyond mere knowledge of Mathematics: the importance of knowing-to-act in the moment. *Educational Studies in mathematics*, 38, 135-161.
- RISSLAND, E.L. (1991). Example-based reasoning. In J.F. Voss, D. N., Parkins, & J.W. Segal (Eds), *Informal reasoning in education* 187-208 Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- ROWLAND, T., THWAITES, A., & HUCKSTEP, P., (2003). Novices' choice of examples in the teaching of elementary mathematics. In A. Rogerson (Ed), *Proceeding of the International Conference on the Decidable and the Undecidable in Mathematics Education*, 242-245. Brno, Czech Republic.
- SHULMAN, S.L., (1986). Those who understand : knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15 (2), 4- 14.
- SHULMAN, S. L., (1987). Knowledge and teaching. Foundation of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.
- SIMON, A.M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for research in mathematics Education*, 26(2), 114-145.
- SKEMP, R.R., (1971), The psychology of learning mathematics. Harmondsworth, UK: Penguin books.
- VINNER, S., (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematics education in Science and Technology*, 14, 294-305.
- WATSON, A., & MASON, J., (2005). Mathematics as a constructive activity: learners generating examples. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- WATSON, A., & MASON, J., (2006). Seeing an exercise as a single mathematical object : Using variation to structure sense-making. *Mathematical thinking and learning*, 8(2), 91- 111.
- ZALAVSKY, O. & PELED, I., (1996). Inhibiting factors in generating examples by mathematics teachers and students-teachers: the case of binary operations. *Journal for research in Mathematics education*, 27(1), 67-78.
- ZALAVSKY, O. & ZODIK, I., (2007). Mathematics teachers' choices of examples that potentially support or impede learning. *Research in Mathematics Education*, 9, 143-155.
- ZODIK, I., & ZALAVSKY, O., (2007). Exemplification in the mathematics classroom; What is it like and what does it imply? Proceeding of the 5th Conference of the European Society for research in Mathematics Education, 2024-2033, Larnaka, Cyprus.

The purpose, design and use of examples in the teaching of elementary mathematics

Tim Rowland

Fiche écrite par Jacques Douaire

Cet article étudie l'usage des exemples par les enseignants débutants et ce que ces enseignants et leurs formateurs peuvent en apprendre. Il est présenté comme un travail empirique, portant sur l'enseignement élémentaire, s'appuyant sur l'enregistrement de 24 leçons. De nombreux exemples inappropriés sont analysés ; des règles pouvant guider des choix plus judicieux sont citées.

Mots-clefs : Exemples, mathématiques, enseignement, élémentaire (école)

I. PROLOGUE

L'usage des exemples dans la pédagogie des mathématiques a une longue histoire mais semble absent de la littérature pour l'enseignement en Grande-Bretagne. La situation a été différente en Europe continentale.

Cet article présente de nombreux cas d'un usage maladroit ou irréfléchi d'exemples à commencer par celui de Kirsty, une future enseignante d'une vingtaine d'années qui, pour illustrer qu'il ne faut pas confondre l'abscisse et l'ordonnée (« *the x-axis goes first* »), prend comme premier exemple le point de coordonnées (1,1).

II. LES EXEMPLES DANS L'ENSEIGNEMENT DE MATHÉMATIQUES

II.1 La place des exemples dans l'enseignement des mathématiques

Deux usages, deux fonctions, des exemples sont distingués.

Le premier⁵ essentiellement inductif a pour but de pourvoir en exemples de quelque chose pour faciliter l'abstraction ; un jeu d'exemples différents permet d'appréhender le caractère général d'un concept.

- Dans le cas d'un apprentissage notionnel l'enseignant qui choisit des exemples montre par là même la signification du concept qu'il privilégie, ce qu'il considère comme paradigmatique (prototypique) ainsi que les variations possibles.

⁵ Ce point de vue est proche du cadre des LGE, cf. les fiches pages 7 et 11.

- Dans le cas d'une technique, par exemple la soustraction, ce que l'élève apprend dépend de façon significative de la conscience que l'enseignant a de l'effet de ses choix en termes de variables numériques pour étayer la pertinence de l'algorithme.

La seconde fonction des exemples est d'illustrer, d'entraîner. Cet usage est orienté vers la pratique et non vers l'induction comme dans le cas précédent. Par exemple, pour entraîner pour la soustraction à deux chiffres, 20 exercices seront privilégiés parmi les 4000 possibles. La répétition a pour but de faire mémoriser la procédure. L'auteur confère donc aux exercices d'entraînement, le statut d'exemple, sans revenir sur ce choix dans la suite de l'article.

Dans l'idéal les exemples doivent relever d'un processus de choix délibéré, certains étant meilleurs que d'autres.

II.2 Didactique des mathématiques et exemplification

Au primaire, les manuels anglais sont plus pauvres en exemples ; le choix et le nombre des exemples (au sens d'exercices) ont été plus mis en évidence en Europe continentale qu'au Royaume-Uni. Trois fois plus d'exercices sur le continent (Allemagne et Suisse alémanique) et moins de changement de thèmes traduisent la volonté de renforcer un thème. En Grande-Bretagne, l'approche du curriculum serait spiralaire : chaque thème est vu « *en passant* ».

III. ORIENTATIONS THÉORIQUES ET MÉTHODES DE RECHERCHE

Le travail présenté ici, qui s'inscrit dans le cadre théorique inspiré par Shulman (1987) des SMK (*Subject Matter Knowledge*), cherche à approfondir le constat habituellement partagé que les étudiants ayant obtenu des scores bas aux tests, avant qu'ils n'exercent comme professeurs, étaient considérés comme des moins bons enseignants dans le domaine numérique au primaire.

L'observation porte sur douze étudiants (ayant obtenu des scores médians au SMK) qui ont chacun conduit deux leçons ; ces leçons ont été enregistrées. Ils font partie d'une formation de 150 stagiaires, recrutés selon un programme sélectif, ayant suivi une préparation de 10 mois, et ayant tous au moins une licence et plus de trente heures de didactique des mathématiques en formation.

Les 18 critères (choix des exemples, choix des représentations,...) permettant d'analyser ces pratiques étaient regroupés en 4 catégories : fondements, transformations, connexions, et contingence – ces catégories ne sont pas développées dans l'étude.

Ce texte est inspiré par le fait qu'un des critères les plus significatifs était le choix des exemples.

IV. LE CHOIX DES EXEMPLES PAR LES STAGIAIRES

Hypothèse induite de l'expérience : les stagiaires apprennent plus des échecs (des pièges) que des pratiques qui réussissent qui sont si subtiles qu'elles demeurent invisibles à leur observation.

Les quatre facteurs éclairants dans les catégories lors du choix ou de l'emploi d'exemples sont : variables et successions, plus largement développées, représentations, objectifs d'apprentissage.

Quelques exemples de choix discutables, en dehors de celui proposé par Kirsty :

- 1- Pour mettre en évidence le rôle des termes dans une soustraction, la stagiaire, au lieu de prendre un exemple avec des nombres distincts, comme pour $12-5=7$, a choisi $4-2=2$, en s'appuyant de plus sur une représentation figurée accentuant cette confusion entre ce qui est soustrait et le reste.
- 2- Pour apprendre aux élèves à lire l'heure sur une pendule analogique, l'enseignant montre six heures et quart, ... six heures et demi. Il demande ensuite aux élèves de montrer sept heures et demie et un élève montre les deux aiguilles sur le 7. Le choix de l'exemple six heures et demi peut être la cause de cette dernière erreur, l'élève ayant induit que la demie heure se traduit par la superposition des deux aiguilles, comme c'est le cas pour six heures et demie.
- 3- Pour expliquer que pour ajouter 9 il est commode d'ajouter 10 et de retrancher 1, un stagiaire prend comme exemple d'ajouter 9 à 9, ne semble pas judicieux. A-t-il pour justification un attrait pour la symétrie ?

L'auteur note aussi des différences entre le recours aux exercices proposés par un manuel et ceux plus spontanés d'un enseignant.

- 4- Il développe l'analyse de ce qui lui apparaît comme un choix judicieux d'une série d'exercices dans la recherche des compléments à 10. La série des nombres 8, 5, 7, 4, 10, 8, 2, 1, 7, 3 semble bien choisie car :
 - 8 et 7 sont près de 10 : l'intérêt de ces premiers exemples réside dans ce qu'ils mobilisent peu de comptage pour arriver à 10 ;
 - 5 est un double connu ;
 - 4 peut apparaître a priori plus embarrassant mais les réponses des élèves ont été aisées ;
 - le choix de 10 semble plus étrange, mais il permet de faire apparaître que 0 est un nombre ;
 - retour à 8 qui est un résultat connu et qui permet de lier « 2 et 8 » et « 8 et 2 ».

Ces choix reflètent des principes didactiques explicités depuis le début des années 60 en Allemagne.

- 5- Il présente aussi des choix d'exemples plus discutables observés chez Sonia pour faire 100 :

- $82 + \dots = 100$; $35 + \dots = 100$; $63 + \dots = 100$;
- Sonia n'a mis en œuvre aucun principe pour le choix du premier nombre mais peut donner des raisons pour les autres (35 parce qu'il est petit, 63 parce qu'il y avait un chiffre différent pour les unités).

Dans un sens la variété des exemples est opposée à une variation réfléchie.

- 6- Dans certains cas le professeur préfère choisir des exemples de façon explicitement improvisée. L'avantage est qu'ils permettent de donner une apparence plus libre au cours. De même si on produit des exemples de façon aléatoire, ceux-ci ne peuvent être au service d'une intention pédagogique spécifique, et cela peut entraîner par-dessus tout, une non-perception du rôle des variables numériques voire une confusion du rôle des données comme nous l'avons vu dans quelques exemples.
- 7- En géométrie, pour distinguer entre translation et symétrie parmi les transformations, une stagiaire prend comme exemple un cercle et un rectangle ; un élève propose un L, exemple approprié, mais la stagiaire continue avec les formes initiales qu'elle avait trouvées sur une table en entrant dans sa classe, qui s'avèrent ne pas permettre d'effectuer cette distinction.

V. CONCLUSION

Les exemples jouent un rôle central dans la pédagogie des mathématiques à tous les niveaux. Les résultats de la recherche présentée dans cet article montrent que les enseignants débutants ont besoin d'être aidés et guidés pour apprécier les différents rôles des exemples dans l'enseignement des mathématiques.

VI. BIBLIOGRAPHIE

ROWLAND T. (2008). Researching teacher's mathematics disciplinary knowledge. In P.Sullivan & T.Wood (Eds) *International handbook of mathematics teacher education: Vol 1 Knowledge and beliefs in mathematics teaching and teaching development*, 273-278, Rotterdam : Sense Publisher.

SCHULMAN L. S. (1987). Knowledge and teaching : foundations of the new reform. *Harvard Educational Review* 57 (1), 1-22.

Doctoral students' use of examples in evaluating and proving conjectures

Lara Alcock & Matthew Inglis

Fiche écrite par Joris Mithalal

L'objet de cet article consiste à étudier les stratégies de raisonnement des mathématiciens, et notamment leur utilisation des exemples dans ces stratégies. Cette étude s'inscrit dans une distinction entre deux formes principales de raisonnement – syntaxique et sémantique –, utilisée pour caractériser l'activité des étudiants et pour analyser leur usage des exemples en termes de quantité et de finalité. On peut arguer que cette distinction est un peu caricaturale et restrictive, et qu'elle focalise l'attention sur les systèmes de représentation employée ainsi que sur les preuves « finies », ce sur quoi nous reviendrons par la suite.

I. RAISONNEMENT SYNTAXIQUE, RAISONNEMENT SÉMANTIQUE

Cet article prend appui sur un article précédent (Weber & Alcock, 2004) dans lequel les auteurs opérèrent une distinction entre deux manières de produire une démonstration vue comme « preuve formelle » : (1) une production syntaxique s'appuyant sur la combinaison de symboles et une substitution d'énoncés logiquement valides ; (2) une production sémantique faisant appel à d'autres registres de représentation ainsi qu'à une plus grande étude « informelle » pour établir des conjectures.

Les auteurs précisent que le raisonnement syntaxique repose sur un travail dans un unique système de représentation, centré sur les définitions, théorèmes, et leurs combinaisons. Le raisonnement sémantique, au contraire, s'appuie sur plusieurs systèmes de représentation, sur la prise en compte d'exemples et l'articulation de registres de représentations sémiotiques. Il apparaît qu'on peut affiner les types de raisonnement en précisant le rôle de chacun des systèmes de représentation :

- Raisonnement et produit syntaxiques, lorsque le raisonnement comme l'expression du résultat reposent sur le « système de représentation de la preuve » ;
- Raisonnement sémantique, produit syntaxique, lorsque le raisonnement fait appel à d'autres systèmes de représentation mais que le sujet en revient finalement au système de représentation de la preuve ;
- Raisonnement et produits sémantiques, lorsque l'intégralité de l'activité s'appuie sur d'autres systèmes de représentation que celui de la preuve.

Cet article envisage les liens entre ces deux types de raisonnement et l'utilisation d'exemple par des doctorants, même si l'objectif semble un peu flou⁶ : on ne sait s'il s'agit de détecter le type de raisonnement à l'aide des exemples utilisés, ou de légitimer la typologie antérieure en exhibant deux utilisations très différentes des exemples.

II. L'UTILISATION D'EXEMPLES

D'un point de vue théorique, il s'agit en premier lieu de clarifier la notion d'exemple employé ici. Les auteurs précisent qu'il ne s'agit que « d'exemples de concepts mathématiques », c'est-à-dire des « illustrations de cas particuliers d'objets mathématiques ». Cette définition, très restrictive, semble justifiée par le contexte de « mathématiques supérieures » où l'aisance théorique des étudiants peut laisser supposer une grande familiarité avec les objets mathématiques eux-mêmes, ainsi qu'au choix d'une étude centrée sur la preuve qui permet d'envisager un travail sur les objets mathématiques eux-mêmes.

Les auteurs proposent alors une revue des différents types d'exemples.

- Pour explorer les extensions possibles d'une définition : illustration d'un concept.
- Exemples frontières : pour expliquer pourquoi une condition est indispensable. Ceci comprend :
 - les exemples de départ ;
 - les exemples de référence ;
 - les exemples modèles ;
 - les contre-exemples.

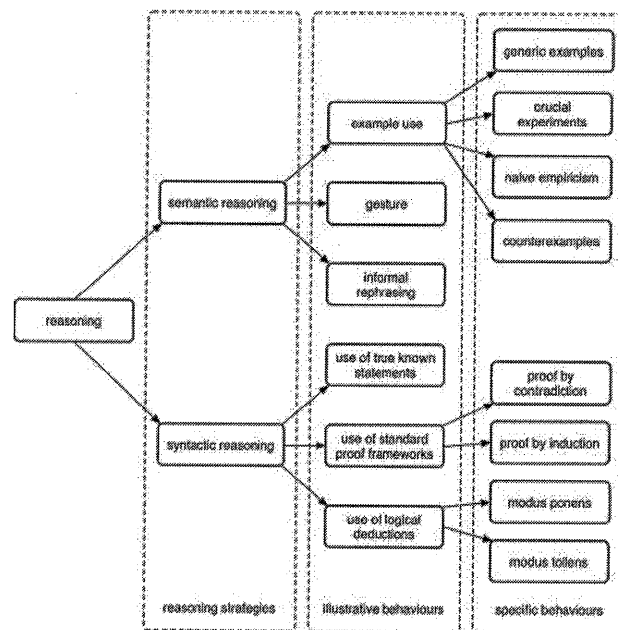
Les exemples permettent, selon les auteurs⁷, de développer la compréhension des concepts. En outre, du point de vue de la démonstration, ils peuvent avoir différentes fonctions :

- réfuter une conjecture ;
- construire une nouvelle conjecture ;
- valider une conjecture (par l'observation convaincante, ce qu'on peut rapprocher de l'empirisme naïf) ;
- valider une conjecture (par une expérience cruciale) ;
- utilisation comme représentant générique ;
- illustration dans une preuve.

On voit alors rapidement les liens à établir entre l'utilisation des exemples et les types de raisonnements, que les auteurs résument dans le graphe reproduit ci-contre.

⁶ Quand bien même l'objectif annoncé consiste à étudier des stratégies expertes pour envisager leur transposition dans l'enseignement.

⁷ Et en référence à (Watson & Mason, 2002).



III. L'ÉTUDE EXPÉRIMENTALE

III.1. L'expérimentation

L'expérimentation proposée par les auteurs se base sur une étude de cas menée auprès « d'étudiants très talentueux » auxquels sont proposés des conjectures de théorie élémentaire des nombres dont ils doivent évaluer la validité. Notons que ce contexte est identique à celui développé par Weber et Alcock (2004).

Des définitions sont données aux étudiants, ce qui permet de contextualiser des conjectures que ceux-ci doivent évaluer :

Définition. Un nombre abondant est un entier n dont la somme des diviseurs est supérieure ou égale à n .

Définition. Un nombre parfait est un entier n dont la somme des diviseurs vaut $2n$.

Définition. Un nombre déficient est un entier n dont la somme des diviseurs est inférieure ou égale à n .

Exemple. 12 est un nombre abondant, car $1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28$ and $28 > 2 \times 12$. En revanche, 14 est un nombre déficient, car $1 + 2 + 7 + 14 = 24$, and $24 < 2 \times 14$.

Votre tâche consiste à étudier les conjectures suivantes, et de déterminer (en le prouvant) si elles sont vraies ou fausses.

Conjecture 1. Un nombre est abondant si et seulement si c'est un multiple de 6.

Conjecture 2. Si n est parfait, alors kn est abondant pour tout entier k .

Conjecture 3. Si p_1 et p_2 sont premiers, alors $p_1.p_2$ est abondant.

Conjecture 3b. Si p_1 et p_2 sont premiers, alors $p_1.p_2$ n'est pas abondant.

Conjecture 4. Si n est déficient, alors tout diviseur de n est déficient.

Conjecture 5. Si n et m sont abondants, alors $n + m$ est abondant.

Conjecture 6. Si n et m sont abondants, alors nm est abondant.

Conjecture 7. Si n est abondant, alors n n'est pas de la forme pm , où m est un entier naturel et p un nombre premier.

À la suite, les auteurs ont mené huit entretiens – sur la méthode des entretiens semi-structurés – auprès de participants. L'article présente deux sujets, Chris et David, comme représentants des deux approches. Chris, s'appuyant plutôt sur un raisonnement sémantique, utilise 28 exemples, de tous types, notamment pour former des conjectures ou preuves. David, dont le raisonnement est qualifié de syntaxique, n'utilise que 9 exemples, qui sont exclusivement des contre-exemples et des explications⁸.

Deux usages des exemples s'opposent ici, restreint – c'est-à-dire dans une production uniquement formelle – ou exploratoire – afin de mettre en place des stratégies de preuve.

III.2. Les observations

Les extraits d'entretiens publiés montrent de manière relativement éloquente que, pour les cas difficiles, Chris s'appuie de manière très forte sur la multiplication des exemples, et que l'oubli de certains cas peut le conduire à des erreurs, tandis que David emploie peu d'exemples, qu'il choisit de manière très précise et contrôlée, si la nécessité s'en fait sentir.

Pour les cas « simples » en revanche, des productions syntaxiques sont employées pour les deux.

IV. CONCLUSIONS (DES AUTEURS ET DU LECTEUR)

Si l'étude présente un intérêt certain quant à l'usage des exemples, on peut apporter un certain nombre de critiques relatives aux raisonnements opposés. Cette dichotomie fait porter l'accent sur la preuve formelle, dont on sait – notamment via les travaux de Balacheff – qu'elle n'est que la partie émergée de l'iceberg, qu'elle fait appel à une intégration forte de contraintes formelles et passe sous silence certaines aspérités du raisonnement.

Le choix de la théorie des nombres peut à ce propos ajouter au questionnement, dans la mesure où il est plus aisé que dans d'autres domaines de s'appuyer fortement sur un seul registre de représentations sémiotiques, ce qui pourrait favoriser les raisonnements syntaxiques.

Enfin, les auteurs proposent dans la discussion trois interprétations quant aux raisons de l'emploi de stratégies syntaxiques ou sémantiques.

⁸ On peut arguer que le recours au nombre d'exemples est peu pertinent, dans la mesure où il n'y a aucune évaluation qualitative de ces exemples. La multiplicité des exemples – de mauvaise qualité – n'est d'aucun secours à Chris, tandis que le travail de David est soutenu par des exemples *pertinents et bien choisis* qui rendent inutiles l'utilisation d'exemples supplémentaires. La qualité des exemples, comme l'aisance des étudiants, n'est pas interrogée par les auteurs et ceci fragilise les conclusions.

- Le type de stratégie individuelle dépend du domaine mathématique étudié.
- Le type de stratégie individuelle dépend de la familiarité avec le domaine.
- Le type de stratégie individuelle est décidé arbitrairement, et conformément à une habitude jugée productive.

La troisième proposition, correspondant à l'hypothèse qui semble sous-jacente au texte, est conservée. Les deux premières sont réfutées pour des raisons méthodologiques, puisque le domaine abordé est identique pour les deux sujets et que leurs domaines de compétence respectifs ne sont ni l'un ni l'autre proche de la théorie des nombres⁹.

On peut interroger ces affirmations, notamment la dernière qui semble peu étayée, faute d'indication sur les compétences des étudiants – il est délicat de considérer qu'un étudiant travaillant en thèse sur des problèmes de topologie algébrique soit peu familier de problèmes élémentaires de théorie des nombres. L'hypothèse de l'utilisation de raisonnements sémantiques en cas de difficulté ou de non-familiarité – on voit d'ailleurs Chris les abandonner quand la tâche s'avère « facile » – mériterait d'être approfondie.

Cette étude apporte de fait un éclairage intéressant sur les usages des exemples par des étudiants de haut niveau en mathématiques, usages très divers mais dont la fonction et la validité semble clairement identifiée – ce qu'on ne retrouve pas toujours dans, par exemple, l'enseignement secondaire. En revanche, les liens entre ces usages et des types de raisonnement – qui seraient des caractéristiques du sujet – sont moins convaincants.

V. BIBLIOGRAPHIE

BALACHEFF, N. (1987). Processus de preuves et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, 18, 147–176.

HAREL, G. (2001). The development of mathematical induction as a proof scheme: A model for DNR-based instruction. In S. Campbell, & R. Zazkis (Eds.), *Learning and teaching number theory: Research in cognition and instruction* (185–212). Westport, CT: Ablex.

ROWLAND, T. (2001). Generic proofs in number theory. In S. Campbell, & R. Zazkis (Eds.), *Learning and teaching number theory: Research in cognition and instruction* (157–183). Westport, CT: Ablex.

GOLDIN, G. A. (1998). Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior*, 17, 137–165.

WATSON, A., & MASON, J. H. (2002). Extending example spaces as a learning strategy in mathematics. In A. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. 4, 377–384, Norwich, UK.

⁹ Ce qui peut prêter à caution, les auteurs ne donnant aucune précision supplémentaire...

WATSON, A., & MASON, J. (2005). Mathematics as a constructive activity: Learners generating examples. Mahwah, NJ: Erlbaum.

WEBER, K., & ALCOCK, L. (2004). Semantic and syntactic proof productions. *Educational Studies in Mathematics*, 56, 209–234.

Using examples and analogies to remediate misconceptions in physics: Factors influencing conceptual change

D. E. Brown

Fiche écrite par Philippe Colin et Cécile de Hosson

I. UN RAPIDE ÉTAT DES LIEUX

La recherche présentée vise la construction de la troisième loi de Newton (loi dite de l'action et de la réaction) par l'usage d'analogies, stratégie pédagogique mise en perspective de formes plus classiques d'enseignement mettant en jeu l'exposé d'exemples. Le choix de l'analogie est sous-tendu par la nécessité de prendre en compte les formes de raisonnement risquant de faire obstacle à l'apprentissage à la troisième loi de Newton. Ainsi, l'auteur souligne-t-il l'existence de « conceptions naïves » fortement résistantes à l'enseignement par des méthodes traditionnelles.

Note 1 : L'auteur ne caractérise pas les méthodes traditionnelles auxquelles ces conceptions résistent ; sur ce point il propose cinq références bibliographiques, dont Viennot (1979) qui montre que les étudiants :

- considèrent une force comme un attribut, une grandeur intrinsèque et non comme une interaction entre objets,
- confondent le poids d'un objet et l'action de cet objet sur un autre avec, en quelque sorte, l'idée d'une « transmission » du poids,
- confondent le bilan des forces exercées sur un objet et la comparaison des forces s'exerçant sur des objets différents,
- introduisent des décalages temporels pour des lois à caractère instantané afin de permettre une interprétation causale des situations,
- attribuent de façon systématique un caractère « résistant » aux frottements.

L'auteur indique qu'il en résulte un ensemble de travaux de recherche sur l'usage approprié d'exemples concrets permettant, selon un processus de type inductif, la construction de modèles (*abstract schema*) susceptibles de s'appliquer à d'autres situations.

Note 2 : Il faut noter que, concernant en particulier le domaine des sciences physiques, peu d'études ont été menées sur l'usage des exemples dans l'enseignement. Il existe, en revanche, une littérature abondante sur l'usage des analogies notamment en classe (par exemple Duit 1991, Harrison 2007). Il est certain, cependant, que l'auteur ne connaissait pas les articles

postérieurs à 1990 (le sien fut accepté en avril 1990). Il mentionne, d'ailleurs, que son travail reprend les résultats de sa thèse soutenue en 1987.

L'auteur insiste sur la nécessité, en présence de conceptions fortes, de travailler avec les élèves sur le caractère prototypique des exemples (*prototypical cases*) au lieu de simplement fournir une liste d'exemples à titre d'illustration.

Note 3 : Il aurait été intéressant d'avoir quelques précisions sur les critères permettant d'évaluer le caractère prototypique d'un exemple, afin d'entamer une réflexion sur la construction d'activités-élèves sur ce thème.

II. QUESTIONS DE RECHERCHE

Dans un premier temps, l'auteur pose une question relativement large : Comment utiliser les exemples dans des domaines où sont présentes de fortes conceptions erronées ?

Les travaux de Clement (1988 p. 573) montrent que, lors de la résolution de problèmes, les « experts » s'appuient nettement plus sur des processus de construction de modèle à partir d'analogies que sur un processus basé uniquement sur un principe formel. Un exemple d'outil utilisé lors de cette construction, à savoir les analogies « passerelles » (*bridging analogies*), a déjà fait l'objet de recherche (Brown & Clement 1987, 1989) pour évaluer la solidité et la cohérence des modèles construits.

A partir de ce constat, l'auteur précise sa problématique et présente ses deux questions de recherche :

- Les élèves peuvent-ils s'engager de manière féconde dans un processus similaire de construction et d'évaluation de modèles à travers l'usage de multiples analogies ?
- L'approche par usage d'analogies est-elle plus efficace qu'une approche inductive où de nombreux exemples illustrent l'application d'un concept ou principe ?

Note 4 : La seconde question n'a pas donné lieu à un prolongement de recherche : l'auteur s'est centré sur la confirmation des résultats relatifs à l'usage d'analogies sur un échantillon plus important (Brown 1994).

III. EXEMPLE ET ANALOGIE : QUELLES DISTINCTIONS ?

Dès le début de l'article, l'auteur propose en note (note 2 p.18) la distinction suivante :

« Pour le propos de cet article, « exemple » et « analogie » sont utilisés pour des situations physiques qui sont d'une certaine manière en relation les unes avec les autres. Quand la relation essentielle est que chacune des situations peut être assimilée à un même principe abstrait, « exemple » est le mot approprié ; quand elles sont essentiellement liées par le fait qu'elles ont des ressemblances structurelles et/ou fonctionnelles, « analogie » est le terme approprié. »

Note 5 : Concernant la distinction entre exemple et analogie, la définition de Glynn (1989, p. 385) cité par Duit (1991, p. 651) fait souvent référence : « Un exemple est une instanciation d'un concept, pas une comparaison entre des caractéristiques similaires propres à deux

concepts. ». Comme l'indique Duit, cette distinction n'est pas si facile à opérer. Quand un élève utilise différents exemples d'un même concept, il peut être amené à effectuer des comparaisons : dans quelle mesure n'opère-t-il pas de manière analogique ?

IV. MÉTHODOLOGIE

IV.1. Recueil de données :

- Pré-test avec 21 élèves d'un cursus de chimie ;
- Analyse des pré-tests : 14 élèves retenus (élèves ayant répondu, au premier pré-test, qu'une table n'exerçait pas de force dirigée vers le haut sur un livre posé dessus), répartis au hasard en 2 groupes de 7 ;
- Post-test et entretiens de 45 minutes.

Note 6 : Même si l'auteur a effectué un traitement statistique pour valider ses résultats, l'échantillon n'en reste pas moins très restreint. Les résultats seront confirmés 2 ans plus tard (Brown 1994) sur un échantillon plus important.

The teaching Instrument fondé sur des *Example-based explanations* déclinées en 2 stratégies d'enseignement :

- « *Text Excerpt* » : approche de type inductive avec appui sur un extrait de texte d'un manuel scolaire présentant 7 exemples illustrant la 3^e loi de Newton avant d'accéder à la situation cible du livre sur la table (voir figure 1)

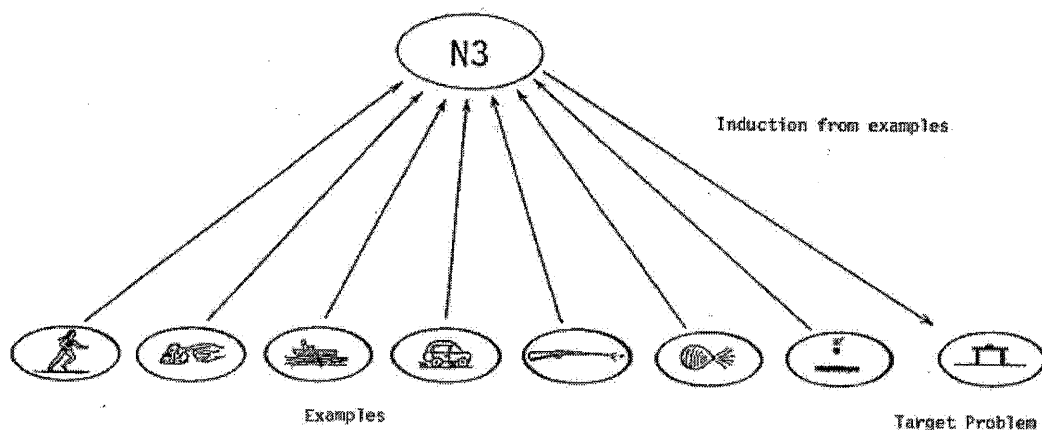


Figure 1. Text excerpt. Induction from multiple examples to generate or support an abstract schema which can then be applied to new cases.

- « *Bridging Explanation* » : approche permettant de mettre en relation des situations de même structure analogique (voir figure 2)
 - Utilisation d'une situation d'ancrage familière ;
 - Passage de la situation d'ancrage à la situation cible par une suite ordonnée de situations intermédiaires ;
 - Construction d'un modèle mécanique des objets rigides (« ressort » des liaisons intermoléculaires).

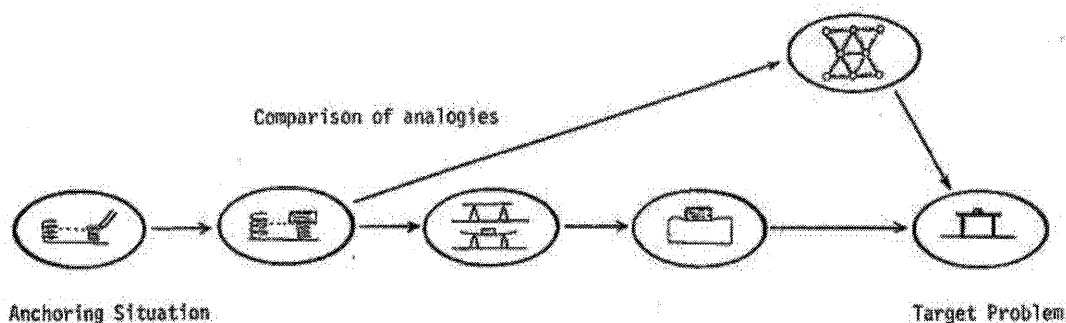


Figure 2. Bridging explanation. Comparison of analogies bridging between an anchoring situation and a target problem, leading to model construction.

Note 7 : Un rappel sur la 3^e loi de Newton (loi dite « des actions réciproques ») :

« L'action est toujours égale et opposée à la réaction ; c'est-à-dire, que les actions de deux corps l'un sur l'autre sont toujours égales, et dans les directions contraires » (Newton, Principia, Principes mathématiques de philosophie naturelle, trad. M. du Chatelet, Paris : Dunod (2005)).

L'analyse des documents d'appui de chacune des deux approches révèle, comme le souligne l'auteur, une prise en compte différente des difficultés.

– « *Text Excerpt* »

Les difficultés majeures soulignées précédemment sont clairement explicitées aux élèves comme le montre l'extrait suivant à propos de la course d'une athlète :

« C'est la réaction (du sol sur le pied) qui la propulse vers l'avant (...) Dans cet exemple et dans tous les autres, cela ne fait réellement aucune différence d'appeler action telle force et réaction telle autre, parce qu'elles interviennent en même temps exactement. L'action n'est pas la « cause » de la réaction. (...) Le point le plus important : les deux forces n'agissent pas sur le même objet. »¹⁰

Les élèves semblent avoir toutes les cartes en main ; on peut néanmoins comprendre toute la difficulté à mettre en relation des situations aussi diverses et aussi complexes, mêlant de nombreux obstacles ; en particulier, comment associer le caractère dynamique des exemples à celui statique du problème cible. Les exemples choisis ne facilitent pas assez la tâche des élèves ; les résultats sont donc sans surprise¹¹.

– « *Bridging Explanation* »

Le principal obstacle visé par l'auteur est constitué par l'attribution de la force à un objet. La stratégie s'appuie donc principalement sur la construction d'un modèle explicatif des interactions entre objets. Cependant, cette focalisation peut se faire au détriment de celle accordée à la possible confusion entre le bilan des forces exercées sur un objet et la

¹⁰ C'est nous qui soulignons.

¹¹ C'est nous qui soulignons.

comparaison des forces s'exerçant sur des objets différents, comme en témoigne l'extrait suivant relatif à la situation du livre sur la table :

« La table est composée de molécules liées à d'autres molécules comme par des ressorts (*springy*). (...) Si vous regardez de très près avec un microscope, vous verrez que le livre entraîne une légère flexion de la table. La table, tout à fait comme un ressort, (...) pousse vers le haut. Comme le ressort soutenant le dictionnaire, la table fléchit et se comprime juste assez pour fournir une force vers le haut égale au poids du livre. »¹²

L'explication est-elle suffisante pour comprendre que le livre n'exerce pas son poids sur la table ou, formulé différemment, que le poids du livre et l'action de la table sur le livre ne sont pas des actions réciproques obéissant à la 3^e loi de Newton¹³ ?

V. OUTILS D'ÉVALUATION

L'auteur utilise des pré- et/ou post-tests relatifs à 5 situations :

- Problème de la table (pré- et post-tests) : Un livre est posé sur une table. Est-ce que la table exerce une force ascendante sur le livre ?
- Problème de la chèvre (pré- et post-tests) : Une chèvre entêtée pousse contre un mur. Pendant que la chèvre pousse, le mur exerce-t-il une force réciproque sur la chèvre ?
- Problème du moustique (pré- et post-tests) : Un jour sans vent, un moustique atterrit en haut du monument de Washington. Demandez-vous si le moustique exerce une force sur le monument, ou si le monument exerce une force sur le moustique pendant qu'il se repose là-haut. Pendant que le moustique se repose là-haut, le monument exerce-t-il une force ascendante sur le moustique ?
- Problème des deux boîtes (post-test) : Une boîte pesant 50 kg est posée sur une autre boîte pesant 100 kg. Demandez-vous si la boîte du dessus exerce une force sur celle du dessous et si le sol exerce une force sur la boîte du dessous. Le sol exerce-t-il une force ascendante sur la boîte du dessous ?
- Problème des deux blocs d'acier (post-test) : Un grand bloc d'acier pesant 200 kg est placé sur un petit bloc d'acier pesant 40 kg. Demandez-vous si le bloc du dessus exerce une force sur celui du dessous et si celui du dessous exerce une force sur celui du dessus. Le bloc léger du dessous exerce-t-il une force ascendante sur le bloc lourd du dessus ?

¹² C'est nous qui soulignons.

¹³ Lorsqu'un livre est posé sur une table, deux forces s'exercent sur lui : la force exercée par la Terre et la force exercée par la table. Dans la situation, trois objets sont en interaction : le livre, la table et la Terre. D'après la 3^e loi de Newton, la force exercée par le livre sur la table est égale à la force exercée par la table sur le livre et la force exercée par la Terre sur le livre (son poids), est égale à la force exercée par le livre sur la Terre. La 3^e loi de Newton ne dit rien du rapport entre la force exercée par la table sur le livre et le poids du livre. En revanche, si le livre est en équilibre sur la table (immobile par rapport à la table) alors d'après la seconde loi de Newton (qui concerne la somme des forces exercées sur un objet donné), on peut conclure que la force exercée par la table sur le livre est égale à la force exercée par la Terre sur le livre (donc à son poids).

Il est demandé une justification des réponses à chaque problème, ainsi qu'une comparaison de la mesure des forces exercées par des intervenants dans chacun des problèmes (sauf le premier, où il s'agit seulement de dire si la table exerce une force ascendante sur le livre posé dessus). Dans chaque cas, une évaluation du degré de confiance et du sens « physique » attribués par les élèves à leurs réponses est requise.

VI. RÉSULTATS QUANTITATIFS

Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous. On constate les meilleurs résultats obtenus pour l'approche par *Bridging Explanation*.

Questions	Text excerpt (n = 7)		Bridging (n = 7)	
	Pre	Post	Pre	Post
Table ^a	0	2	0	7*
Goat ^b	3	6	5	13
Mosquito ^b	1	4	2	14*
Two boxes ^b	—	5	—	13**
Steel blocks ^b	—	3	—	13**

Nombre de réponses correctes (pour les étudiants n'ayant pas répondu correctement au pré-test « Table »)

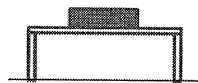
Les résultats de la dernière colonne pour les 4 derniers tests prennent en compte d'une part l'existence d'une action réciproque et, d'autre part, la comparaison de la mesure de ces 2 actions réciproques.

L'auteur souligne qu'il n'est pas possible d'isoler les différents facteurs responsables de cette différence et, par conséquent, la nécessité de pratiquer des entretiens pour une analyse qualitative plus fine.

VII. RÉSULTATS QUALITATIFS

Quelques résultats saillants à propos des problèmes « table » et « blocs d'acier »

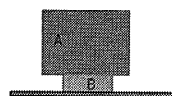
— Post-test pour le problème « table »



5 élèves sur les 7 du groupe « *Text Excerpt* » maintiennent l'idée que la table n'exerce pas de force sur le livre.

Tous les élèves (7/7) du groupe « *Bridging Explanation* » appliquent la 3^e loi de Newton à la situation avec 2 types d'argument : la nécessité (« c'est la loi qui l'impose ») ou / et l'appui sur le modèle explicatif du « ressort ».

— Post-test pour le problème « blocs d'acier »



Nous rappelons qu'il s'agit d'un problème difficile s'il existe une confusion entre le poids d'un objet et l'action de cet objet sur un autre.

3 élèves sur 7 du groupe « *Text Excerpt* » acceptent l'existence d'une force de B sur A mais aucun d'entre eux n'accepte que les actions réciproques soient égales, en s'appuyant sur le poids comme force attribuée à l'objet.

6 élèves sur 7 du groupe 2 « *Bridging Explanation* » appliquent la 3^e loi de Newton à la situation. L'extrait suivant de l'entretien souligne le rôle crucial joué par la situation livre-ressort comme explication « passerelle » :

« Même si le livre pèse beaucoup plus que le ressort, le ressort doit « rebondir en arrière » ; pourquoi ne se passerait-il pas la même chose ici (action du bloc B sur le bloc A) ? »

VIII. DIFFÉRENCES ENTRE LES 2 STRATÉGIES : 3 FACTEURS IDENTIFIÉS

Dans cette partie de l'article, l'auteur présente – à partir de l'analyse des entretiens – 3 facteurs influençant les différences dans les réponses des élèves soumis aux deux méthodes d'emploi d'exemples.

- Les exemples doivent faire sens pour les élèves.

Les extraits suivants de l'entretien en témoignent :

« *Text Excerpt-based* » student : « Pourquoi le sol déciderait spontanément de pousser en avant quand il y a quelqu'un qui court dessus ? »

« *Bridging Explanation* » student : « Les objets métalliques essaient de retourner à leur position initiale (...) et donc la force que j'exerce sur lui va le faire descendre, et la structure du métal, supposons que c'est un ressort en métal, essaiera de retrouver son ancienne position. »

Le taux de confiance exprimé par les élèves « *Text Excerpt-based examples* » est inférieur à celui des élèves « *Bridging Explanation* », respectivement 3,27 / 5 et 4,60 / 5.

- Il est nécessaire de présenter de façon explicite les liens entre les différentes analogies.

6 élèves sur 7 ne font pas de lien direct entre l'action du doigt sur le ressort et l'action du livre sur la table.

C'est un argument fort pour défendre l'approche par *Bridging Explanation*. L'auteur souligne l'importance de l'ordre de présentation des analogies comme en témoigne le commentaire d'un élève lors de l'entretien :

« Sorti du contexte, vous comparez juste le ressort et la table, ça n'aiderait pas ; mais vous construisez un chemin du ressort, qui est évident, à une planche flexible, puis à une planche rigide, puis à une couche de mousse, puis à une table, c'est pas mal ».

- L'appui sur des modèles « mécaniques » explicatifs est important.

Un commentaire d'élève à titre d'illustration :

« On essaie de me dire qu'à chaque force est associée une force opposée qui arrive contre elle. Mais on ne m'a pas dit d'où elle venait et pourquoi, et je n'ai pas l'intention de l'accepter avant qu'on ne le fasse. »

Selon l'auteur, c'est ce type de modèle qui aurait un sens pour les élèves et les amènerait à abandonner la force conçue comme propriété d'un objet, au profit d'une force comme résultat d'une interaction.

Note 8 : On peut s'interroger ici sur les limites du modèle explicatif utilisé : les ressorts liant les molécules ne doivent pas conduire à une vision matérialiste pouvant faire obstacle à une future modélisation des liaisons plus conformes à celle du physicien en termes de forces électromagnétiques, par exemple.

IX. PERSPECTIVES

L'auteur présente quelques questions :

- Le constat d'échec de la technique inductive vaut-il dans d'autres domaines ? Est-ce la norme ou de simples cas isolés ?
- La technique des analogies « passerelle » est-elle une alternative toujours viable ?

Note 9 : Duit (1991) notait la difficulté à trouver, pour chaque conception erronée repérée dans les différents champs des sciences, des situations d'ancrage et des analogies « passerelle » opérationnelles. De nombreuses études ont été menées depuis, et Harrison (2008 p. 202) indique que cette stratégie s'est avérée efficace dans différents domaines (frottements, cellules, gènes et ADN, particules, concepts mathématiques, modèles acide-base) dont il précise que le nombre ne cesse de croître.

X. DISCUSSION

Cet article de David Brown remonte à une trentaine d'années et, comme l'indiquent les références en notes, les publications sur l'usage d'analogies et en particulier des *bridging analogies* sont depuis plus nombreuses. Notre choix s'est porté sur cet article car c'est un des très rares (peut-être l'unique ?) à faire mention explicite dans son titre de l'usage d'exemples afin de surmonter les conceptions.

Il faut rappeler que John Clement, initiateur du *bridging analogies teaching* souligne dans un article (Clement 1993 p. 1245) que cette stratégie d'enseignement repose sur une forte interaction entre enseignant et élèves pour discuter le passage d'une analogie à une autre et faire le lien entre la situation d'ancrage et le domaine cible. Duit (1991 p. 665) indique que cette stratégie d'enseignement implique « *main aspects of negotiation of views* » et utilise des aspects empruntés au *socratic dialogue*.

La passation d'entretiens fournit l'occasion de se rapprocher d'une réelle séquence d'enseignement-apprentissage à la manière de *teaching experiment*.

Il aurait été intéressant d'avoir des informations sur la construction du protocole d'entretien pour chacune des stratégies afin de préciser la qualité de l'étayage, facteur crucial quant à la teneur des réponses fournies.

Dans le domaine de l'usage des analogies en situation de classe, l'articulation recherche-pratique est forte et, faisant suite à des parutions plus « théoriques » (Gick & Holyoak 1983 ; Zietoun 1984 ; Glynn 1989), des ouvrages à visée très pragmatique sont parus à destination du public enseignant (Harrison & Coll (eds.) 2008).

La question centrale est de savoir si la construction d'un modèle explicatif, ici à partir d'une suite d'exemples-analogies proposés dans un ordre précis (commençant par une situation d'ancrage, suivie par plusieurs situations « passerelles », et terminant par la situation cible), facilite un saut conceptuel, rendu nécessaire par la présence de fortes conceptions erronées (concernant l'interprétation de la situation cible) chez les élèves.

On peut donc s'interroger sur la comparaison effectuée : ne pourrait-on pas introduire un modèle explicatif dans une *traditional teaching-by-example technique* (appellation figurant dans l'abstract de l'article) ? On serait alors en droit de comparer son impact sur l'apprentissage à celui obtenu après un enseignement par *bridging analogies*.

XI. QUELQUES PISTES DE RÉFLEXION

On pourrait questionner le choix, le rôle, l'importance des différents éléments du dispositif (situation d'ancrage, analogies « passerelles », modèle explicatif, situation cible, expérience associée). Brown et Clement (1989 p. 558) ont déjà montré que certaines situations d'ancrage en mécanique ne sont pas efficaces. Plus récemment, Clement (2008 p. 441) indique la nécessité du choix pertinent de la technique d'usage des analogies suivant le type de saut conceptuel visé et identifie la situation d'ancrage à un proto-modèle, élément décisif, par conséquent, dans le parcours d'apprentissage. Le niveau (micro, méso, macro) et les limites des modèles explicatifs donnés ou construits sont bien sûr à questionner.

Les résultats présentés dans l'article portent, à la marge, sur les aspects psychologiques (voir par exemple Gentner 1983, Gineste 1984, Richard 1990) mais l'on pourrait élargir le champ d'investigation en questionnant la nature des activités cognitives mises en jeu lors de l'usage d'exemples / d'analogies, les liens avec la modélisation et le processus inductif.

Enfin, la technique des analogies « passerelles » pourrait être replacée dans un cadre historique comme l'a déjà proposé Clement (1986, p. 230) à propos de Galilée et de Newton.

XII. BIBLIOGRAPHIE

Brown, D. (1994). Facilitating conceptual change using analogies and explanatory models, *International Journal of Science Education*, 16 (2), 201-214.

Brown, D., & Clement, J. (1987). Misconceptions concerning Newton's law of action and reaction: The underestimated importance of the third law. In J. D. Novak (Ed.), *Proceedings of the Second International Seminar, Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics*, 3, 39-53.

Brown, D., & Clement, J. (1989). Overcoming misconceptions via analogical reasoning: Abstract transfer versus explanatory model construction, *Instructional Science*, 18, 237-261.

Clement, J. (1986). Models for evaluating the validity of hypothesized analogies, In *Proceedings of the Annual Meeting of the Cognitive Science Society*, August 15, 1986, 223-234, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Clement, J. (1988). Observed methods for generating analogies in scientific problem solving. *Cognitive Science*, 12, 563-586.

Clement, J. (1993). Using bridging analogies and anchoring intuitions to deal with students' preconceptions Physics. *Journal of Research in Science Teaching*, 30(10), 1241-1257.

Clement, J. (2008). The Role of Explanatory Model for Teaching in Conceptual Change, in Vosnadiou S. (ed.), *International Handbook of Conceptual Change*, Taylor & Francis, New-York.

Clement, J., Brown, D., and Zietsman, A. (1989). Not all preconceptions are misconceptions: Finding anchoring conceptions for grounding instruction on students' intuitions. *International Journal of Science Education*, 11, 554-565.

Duit, R. (1991). On the role of analogies and metaphors in learning science, *Science Education*, 75 (6), 649-672.

Gentner, D. (1983). *Mental models*, Lawrence Erlbaum Associates Publishers, Hillsdale, New Jersey.

Gick, M., & Holyoak, K. J. (1983). Schema induction and analogical transfer, *Cognitive Psychology*, 15 (1), 1-38.

Gineste, M.-D. (1984). Les analogies : modèles pour l'appréhension de nouvelles connaissances, *l'Année Psychologique*, 84, 387-397.

Glynn, S. M. (1989). The Teaching with Analogies Model, in Muth K.D. (ed.), *Children's comprehension of text*, *International Reading Association*.

Harrison, A. G. & Coll, R. K. (eds) (2008). *Using Analogies in Middle and Secondary Science Classrooms : the FAR Guide – An Interesting Way to Teach with Analogies*, Corwin Press, Thousand Oaks, Californie, USA.

Richard, J.-F. (1990). *Les activités mentales. Comprendre, raisonner, trouver des solutions*, Paris, Armand Colin.

Viennot, L. (1979). Spontaneous reasoning in elementary dynamics, *European Journal of Science Education*, 1, 205-221.

Zeitoun, H. H. (1984). Teaching scientific analogies : a proposed model, *Research in Science and Technological Education*, 2, 107-125.

PARTIE II

Des recherches originales sur la notion d'exemple

Cécile Ouvrier-Buffet

Entrer par l'activité de définition en mathématiques pour revenir sur les notions d'exemples, contre-exemples et non-exemples

Page 49

Laurent Vivier

Un algorithme de somme pour les rationnels en écriture décimale. Des exemples, et après ?

Page 59

Richard Cabassut

Exemples dans les comparaisons dans l'enseignement

Page 69

Bernard Parzysz

Exemple, modèle, simulation en probabilités

Page 83

Isabelle Kermen & Nicolas Décamp

L'étude des exemples dans des manuels de chimie : un révélateur d'intentions didactiques ?

Page 91

Nicolas Gauvrit

Exemples et catégories et la transposition radicale des statistiques en psychologie

Page 103

Entrer par l'activité de définition en mathématiques pour revenir sur les notions d'exemples, contre-exemples et non-exemples

Cécile Ouvrier-Bufferet

I. DÉFINIR EN MATHÉMATIQUES : PROBLÉMATIQUE GÉNÉRALE

L'idée directrice est d'accéder à l'élaboration de concepts via la construction de définitions, activité pratiquée et reconnue par les mathématiciens. Dans ce type d'activité¹⁴, existe-t-il différents types de définition ? Peut-on mettre en évidence une hiérarchie du point de vue de la genèse des définitions, peut-on provoquer leur évolution et ainsi proposer une voie d'accès à la construction de concepts ? Il s'agit là d'essayer de baliser la construction de concepts par différents « niveaux » de définition (d'où l'idée de hiérarchie) et d'étudier le processus consistant à faire évoluer ce que nous pourrions provisoirement appeler des définitions intermédiaires.

Cette problématique génère d'autres questions pour lesquelles des éléments de réponses seront donnés dans cet article, en particulier pour la dernière question :

- Q1 : peut-on identifier des types de situations « favorables » à la génération de définitions ?
- Q2 : existerait-il des concepts plus favorables que d'autres, se prêtant « mieux » que d'autres à l'activité de définition ?
- Q3 : comment s'inscrit l'activité de définition dans une dialectique avec la preuve ?
- Q3 bis : tant du côté de la définition que de la preuve, qu'en est-il de la validation de tels processus ? mais aussi de la validation de la définition ou des définitions construite(s), et de la preuve elle-même ?
- Q3 ter : comment modéliser l'activité de définition et le processus de construction de définitions ?
- Q4 : quels liens avec les exemples et les contre-exemples, voire les non-exemples ?

Dans cet article, c'est cette dernière question que nous allons tenter d'approfondir, en utilisant l'entrée par l'activité de définition en mathématiques.

Nous allons donc tout d'abord analyser les types de situations existants dans les travaux internationaux qui permettent effectivement d'enclencher une construction de définitions et souligner en particulier l'utilisation d'exemples et contre-exemples (section II). Seront également dégagés la nature des concepts mathématiques retenus et les cadres théoriques propices à l'étude didactique et épistémologique des situations présentées.

¹⁴ L'activité de définition a été définie (et donc caractérisée) comme un mode de « penser » spécifique en mathématiques dans Ouvrier-Bufferet (2012).

Nous reviendrons ensuite plus en détail sur les rôles des exemples et contre-exemples en mathématiques (section III).

Côté recherches en didactique, au niveau international, l'utilisation des non-exemples est également présente. Nous discuterons la nécessité de parler de non-exemples en plus des exemples et contre-exemples (section IV).

La dernière section sera l'occasion de proposer une ouverture quant à la poursuite de travaux en didactique sur l'activité de définition et les rôles des exemples et contre-exemples.

II. DES TYPES DE SITUATIONS « FAVORABLES » À LA GÉNÉRATION DE DÉFINITIONS ?

Différents travaux au niveau international permettent d'identifier plusieurs types de situations favorables à une activité de définition. Cela étant, la construction avérée de nouveaux concepts dans ces expérimentations n'est pas toujours réelle : certains concepts, en effet, sont « revisités » (cela peut varier d'une simple reformulation de propriété à une extension réelle d'un concept, voire même à une reconstruction à l'occasion d'un changement de cadre ou paradigme) et ne font pas l'objet d'une première « rencontre ».

Rappelons rapidement ces situations impliquant une activité de définition (pour plus de détails, voir Ouvrier-Buffer, 2012), les concepts mathématiques en jeu, ainsi que les outils théoriques mobilisés par les différents auteurs pour leurs analyses épistémologique et didactique. Le tableau récapitulatif ci-après montre en particulier la place accordée à des situations (ou problèmes) initiées par la présentation d'exemples et contre-exemples (ou non-exemples, nous reviendrons sur cette notion dans la section IV). Une pensée de type inductif, impliquée dans la généralisation de concepts, est présente, d'où l'intérêt spécifique, et même la nécessité des contre-exemples.

Il ressort clairement une prépondérance des concepts de géométrie, certes très accessibles par leurs représentations, mais aussi de concepts issus de mathématiques discrètes. Ces derniers ont l'avantage de proposer une problématisation naturelle et peu fortement axiomatisée, ainsi qu'un accès aux concepts par leurs représentations, mais également une interface avec les mathématiques contemporaines, donc « en construction ». La place accordée aux concepts non familiers est faible. Ce n'est donc pas un hasard si les cadres théoriques mobilisés impliquent largement les heuristiques de Lakatos (1961, 1976), et les notions de *concept image* et *concept definition* (Vinner, 1991). Pour concevoir des situations de construction de définition, on s'intéressera en particulier à des concepts disposant de plusieurs définitions, différentes de nature, dont l'équivalence n'est pas évidente, et pouvant être impliquées dans des preuves (pour des conjectures et théorèmes « cruciaux » pour l'étudiant¹⁵).

¹⁵ Par défaut, le terme « étudiant » désignera indifféremment un élève ou un étudiant.

Types de situations impliquant une activité de définition	Concepts mathématiques en jeu	Outils théoriques
Classification, à partir de représentations de concept, d'exemples et de contre-exemples (ou non-exemples)	• Quadrilatères (Freudenthal, 1973; De Villiers, 1998) • Polyèdres (Mariotti & Fischbein, 1997) • Convexité (Fletcher, 1964 ; Ouvrier-Buffet, 2005) • Arbres, droites discrètes (Ouvrier-Buffet, 2003 & 2006)	Niveaux de Van Hiele Conceptions (dont celle de Lakatos)
Redéfinition d'un concept familier : • à partir de représentations de celui-ci • ou à partir d'une liste de définitions incorrectes • redéfinir dans un cadre différent Généralisation d'un concept (élargir des définitions connues)	• Fonction / triangles (Vinner) • Cercle (Borasi, 1992) • Taxicab géométrie (Borasi, 1992) / Objets sur la sphère (Duchet, 1995 ; Larsen & Zandieh, 2005 ; Zandieh & Rasmussen, 2010) • Puissance d'un nombre (Borasi, 1992)	<i>Concept image et concept definition</i> (Vinner, 1991) Heuristiques de Lakatos (1961, 1976) ; DMA¹⁶
Génération d'un concept en lien avec une activité de preuve : les situations « à la Lakatos » • avec des concepts familiers • avec des concepts non familiers	• Situation de <i>reinvention</i> en théorie des groupes (Larsen & Zandieh, 2008) • Polygones (Borasi, 1992) • Diagonales et polygones (Balacheff, 1987a) • Générateur, minimalité (Duchet, 1994 ; Ouvrier-Buffet, 2011)	Heuristiques de Lakatos

Tableau 1 – Différents types de situations impliquant une activité de définition¹⁷

¹⁶ *Defining as a Mathematical Activity.*

¹⁷ Des situations de construction de définitions de Ouvrier-Buffet sont proposées en Annexe.

Pour accéder à une situation fondamentale pour la construction de définitions (en considérant des concepts mathématiques non familiers des étudiants), trois types de situations ont été identifiés par Ouvrier-Bufferet (2003) :

- à partir d'exemples et contre-exemples d'un concept (et donc de certaines de ses représentations, ce qui est un biais non neutre de ce type de situations) ; c'est une certaine façon de proposer une première rencontre avec le concept (mais elle n'est clairement pas suffisante) ;
- des situations de mathématisation / modélisation ;
- des situations « à la Lakatos ».

Du côté de l'activité mathématique elle-même, définir permet d'introduire de nouveaux objets, d'élargir des concepts existants, de délimiter et différencier des concepts, de faire émerger des concepts (Formalisateurs Unificateurs Généralisateurs par exemple, voir l'ensemble des travaux de Robert et *al.* dans Dorier, 2000), et ce, dans différents types de « problèmes », à différents moments de l'activité du mathématicien qui restent à observer et modéliser (travaux en cours).

III. VERS LES EXEMPLES ET CONTRE-EXEMPLES

Dans le dernier cadre évoqué en section précédente, lakatosien, il est possible de considérer la dialectique avec la preuve, et avec elle une certaine place pour les définitions elles-mêmes (dans une logique déductive dans des démonstrations, et dans une logique constructive dans des preuves). Il en découle ainsi une place avérée pour les exemples et contre-exemples à différents niveaux et dans différents contextes :

- dans une logique déductive : il s'agit d'utiliser des exemples pour comprendre/vérifier une démonstration, ou une inférence dans une démonstration qui pourrait être problématique ;
- dans une logique constructive : on peut s'inspirer des exemples (et parfois des contre-exemples, plus rares) pour construire une preuve ;
- il est également possible de se convaincre qu'une preuve est correcte (en testant avec des exemples et des contre-exemples « classiques », certains contre-exemples étant conçus pour cela) ;
- l'exploration d'une conjecture reste un cadre de travail classique.

Nous ne reviendrons pas ici sur la portée et les limites du cadre défini par Lakatos (voir pour cela Ouvrier-Bufferet, 2012), mais nous allons nous concentrer plus précisément sur les exemples et contre-exemples et revenir ensuite sur la notion de « non-exemple » reprise par Tsamir et Tirosh (2008).

Pour les mathématiciens (mais aussi pour les étudiants), les exemples sont importants (voir en particulier certains types de preuve (empirisme naïf, expérience cruciale, exemple générique des travaux de Balacheff, 1987b) et le diagramme de Alcock-Inglis, 2008, p. 117 ; voir également la fiche page 31). Les exemples permettent par exemple d'explorer une conjecture, mais aussi d'illustrer et de véhiculer des propriétés qui seront ensuite structurées en définitions, théorèmes, preuves etc. au sein d'une théorie consistante. Les « nouveaux »

contre-exemples (ceux qui seraient construits par des mathématiciens et n'ayant pas encore été conçus pour répondre à une problématique de recherche) sont plus rares d'une certaine façon (il existe des banques de « bons » contre-exemples pour tester des conjectures, de nombreux ouvrages en proposent, et les mathématiciens procèdent également ainsi, suivant leurs champs de recherche, car la génération de contre-exemples s'avère particulièrement complexe).

Par rapport à la construction de définitions, considérer les contre-exemples nécessite de se placer dans la perspective dessinée par Pólya (processus d'induction, d'analogie, de généralisation, de particularisation) et poursuivie par Lakatos dans le cadre d'une logique de la découverte mathématique. Dans ce dernier cadre épistémologique, nous pouvons retenir différents types de contre-exemple :

- le contre-exemple *global* refuse la conjecture ;
- le contre-exemple *local* refuse la preuve ;
- on peut également rencontrer un contre-exemple *local non global*, un contre-exemple *global non local*, un contre-exemple *global et local*.

Le contre-exemple est en définitive un moyen de contrôle, et un « outil » pour choisir les définitions. En découlent plusieurs catégories de définitions, non pas par rapport à la portée des contre-exemples qui permettent l'évolution de celles-ci, mais par rapport à l'évolution de la construction du concept mathématique en jeu : les définitions *naïves*, les *zéro-définitions*, les *proof-generated definitions*, catégories enrichies par celle des *définitions-en-acte* (Ouvrier-Buffet, 2006 & 2011).

Certes, aborder les exemples et contre-exemples sous le prisme de l'activité de définition peut apparaître comme réducteur, en particulier si l'on considère le tableau ci-contre récapitulant les rôles possibles pour les exemples et contre-exemples en mathématiques. Mais les ramifications avec le processus de preuve et la construction de concepts permettent de considérer des situations de génération de définitions consistantes, non réduites à des reformulations de concepts déjà partiellement connus des étudiants. Ce regard épistémologique reste à affiner, c'est l'objet d'une étude en cours basée sur des entretiens avec des chercheurs impliqués dans différents champs mathématiques.

Utiliser des exemples pour comprendre/vérifier une démonstration, ou une inférence dans une démonstration qui pourrait être problématique
S'inspirer des exemples (voire de contre-exemples) pour construire une preuve
Se convaincre qu'une preuve est correcte (en testant avec des exemples et des contre-exemples « classiques », certains contre-exemples sont même conçus pour cela)
Explorer une situation mathématique pour se l'approprier et engager un travail d'élaboration de conjectures
Explorer une conjecture
Rédiger une preuve constructive (algorithme pour générer un exemple, et régler ainsi le problème d'existence)
Vérifier que toutes les hypothèses d'un théorème sont nécessaires
Élargir un domaine de validité
Aller contre des idées pré-conçues (effet de surprise)
Distinguer des notions proches (par exemple celles de continuité et continuité uniforme)
Tester la stabilité d'une propriété après transformation
Définir un concept (le délimiter via des exemples et contre-exemples)

Tableau 2 – Rôles possibles pour les exemples et contre-exemples¹⁸

IV. EXEMPLES, EXEMPLES GÉNÉRIQUES ; CONTRE-EXEMPLES ; ET NON-EXEMPLES

Revenons maintenant sur les non-exemples et la nécessité de les considérer (ou pas). Il est en effet fréquent de trouver dans la littérature de *mathematics education* comme catégories les *exemples génériques*, *contre-exemples*, et *non-exemples*. Reprenons les définitions usuelles de ces termes (cf. Bills & al., 2006, p. 127), en précisant que celles-ci dépendent de la façon dont la personne (enseignant ou étudiant) perçoit le concept ou la procédure mathématique en question, et des propriétés mathématiques intrinsèques en jeu : ainsi, les caractéristiques qui suivent ne sont pas strictement des définitions mathématiques mais ont pour vocation de questionner des usages dans un contexte didactique. L'idée générale qui sous-tend les définitions ci-après est de considérer l'ensemble des exemples (qu'ils soient génériques ou non) afin d'explorer un concept et/ou le domaine de validité d'une procédure, les limites d'application de propriétés (Goldenberg & Mason, 2008, p. 184, voir aussi la fiche page 7). Les exemples génériques sont des exemples illustrant des concepts ou des procédures et

¹⁸ Ce tableau peut être exemplifié par le travail de Locia Espinoza (2000).

peuvent servir d'appui pour une preuve générique. Les contre-exemples nécessitent une assertion ou une hypothèse à « contrer ». Les non-exemples servent à clarifier les frontières d'un concept, et peuvent agir de manière semblable à celle des contre-exemples pour identifier le domaine de validité d'une procédure ou pour délimiter les conditions d'application d'un théorème. Ces non-exemples permettent ainsi d'identifier les caractéristiques essentielles d'un concept, d'une procédure : en ce sens, nous sommes du côté de la définition, dans une acception usuelle du terme, qui délimite ce qu'est le concept (utilisation ici d'exemples) et de ce qu'il n'est pas (mobilisation de non-exemples). Nous pouvons alors considérer les travaux sur le *concept image* (Vinner, 1991). La question sera d'explorer si les exemples et non-exemples rencontrés ne sont pas trop limités quant à leur portée et dans quelle mesure le concept image résiste et peut être enrichi, remanié.

Mais a-t-on besoin de parler de non-exemple ? Utiliser les contre-exemples, n'est-ce pas suffisant en mathématiques et pour des analyses didactiques ? En fait, le rôle potentiel du non-exemple est à considérer et à affiner :

- parle-t-on simplement d'un représentant d'un autre concept proche de celui qui est étudié ? (comme cela peut-être le cas lorsque l'on considère des exemples de quadrilatères jouxtant des non-exemples constitués de triangles, pentagones etc.) ;
- va-t-il jouer un rôle moteur dans un processus de classification par exemple ?

Si l'on considère une définition comme une proposition potentielle, il serait suffisant de parler de contre-exemple. Dans la littérature, par rapport à la formation de concept naturelle, le terme de non-exemple est privilégié pour mettre l'accent sur l'aspect « délimitation » (un aspect central de la définition dans une acception ordinaire). Celui de contre-exemple pourrait aussi être utilisé, mais ne l'est généralement pas dans la littérature dans le cadre de la formation de concepts mais davantage dans l'exploration de conjectures. Ce qui est clairement un choix des auteurs didacticiens utilisant les non-exemples, afin de préciser des analyses non pas sur la dialectique entre la formation de concepts et l'élaboration d'une preuve ou l'exploration d'une conjecture, mais sur la « seule » délimitation d'un concept.

Dans une perspective à plus long terme de fréquentation de l'activité de mathématique de preuve et de définition, la question didactique (et mathématique) centrale serait alors : dans quelle mesure les étudiants peuvent-ils transférer leur pratique des exemples et non-exemples à celle des contre-exemples ?

V. OUVERTURE

Le travail épistémologique permettant de modéliser l'activité de définition (travaux de Ouvrier-Bufferet et Larsen & Zandieh & Rasmussen) et l'efficacité des modèles proposés sont encore à tester, notamment sur des concepts non familiers des étudiants (travail en cours, cf. Ouvrier-Bufferet, 2011). Il est bien sûr question de « définir » dans une perspective d'activité mathématique, c'est-à-dire au-delà de la délimitation d'un concept, et dans une dialectique avec les preuves et conjectures. Il s'agit également de prendre en charge la gestion par l'enseignant de situations impliquant l'activité de définition, et, en amont, la dévolution de cette activité aux enseignants peu familiers avec ce type de travail en classe. La complexité de

ces questions réside déjà dans le choix de situations et de concepts permettant une activité réelle de définition. La voie d'étude centrée sur les exemples et non-exemples existe et a déjà été largement explorée dans le champ des *mathematics education*, mais encore trop peu sur des concepts foncièrement nouveaux pour les étudiants. L'une des pistes à explorer encore, en relation avec la précédente, est d'impliquer plus fortement l'activité de définition dans la perspective d'un travail sur la preuve (ce qui générera sans doute de nouveaux outils d'analyse). En effet, les travaux existants partent généralement, pour de telles situations, sur le modèle de Lakatos, c'est-à-dire avec des contraintes fortes comprenant la donnée initiale de concepts, de conjecture et surtout de preuve à analyser. Il reste à ouvrir les situations de Lakatos en particulier du côté de la preuve, cette dernière étant porteuse de la connaissance mathématique, à l'image des définitions. C'est là que la construction de concepts peut être balisée, tout comme le rôle central des exemples et contre-exemples. Il est nécessaire d'apporter un bémol à ce dernier point : en effet, des entretiens avec des mathématiciens (en cours) montrent à quel point la génération « idéale » de contre-exemples est complexe et minore ainsi la forme de construction de concepts proposée par Lakatos.

BIBLIOGRAPHIE

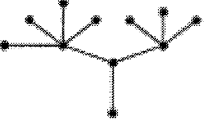
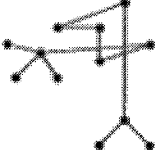
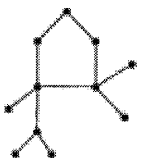
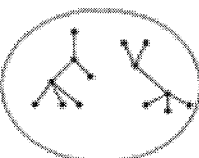
- ALCOCK, L. & INGLIS, M. (2008). Doctoral students' use of examples in evaluating and proving conjectures. *Educational Studies in Mathematics*, 69, 111-129.
- BALACHEFF, N. (1987a). Les définitions comme outils dans la résolution de problème. *XI^e Conference for the Psychology of Mathematics Education*. Montréal.
- BALACHEFF, N. (1987b). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 18, n°2, 147-176.
- BILLS, L., DREYFUS, T., MASON, J., TSAMIR, P., WATSON, A., & ZASLAVSKY, O. (2006). Exemplification in mathematics education. In J. Novotna, H. Moraova, M. Kratka, & N. Stehlikova (Eds.), *Proceedings of the 30th PME International Conference* (vol. 1, 126-154). Czech Republic: PME.
- BORASI, R. (1992). *Learning mathematics through inquiry*. New Hampshire: Heinemann.
- DE VILLIERS, M. (1998). To teach definitions in geometry or to teach to define? In A. Olivier & K. Newstead (Eds), *Proceedings of PME 22*, vol. 2, 248-255. Stellenbosch, RSA.
- DUCHET, P. (1994). Communication sur une grille. *Actes MATH.en.JEANS*, 45-50. Ed. MATH.en.JEANS, Paris (disponible en ligne : <http://www.mathenjeans.fr.st/edition/actes/actespdf/94045050.pdf>).
- DUCHET, P. (1995). Paris et New York sont-ils les sommets d'un carré ? *Actes MATH.en.JEANS*, 95-103. Ed. MATH.en.JEANS, Paris (disponible en ligne : <http://www.mathenjeans.fr.st/edition/actes/actespdf/95095103.pdf>).
- DORIER, J-L. (Ed) (2000). *On the Teaching of Linear Algebra*. Kluwer Academic Publishers.
- FLETCHER, T.J. (1964). *Some lessons in Mathematics*. Cambridge University Press.
- FREUDENTHAL, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: Reidel.

- GOLDENBERG, P. & MASON, J. (2008). Shedding light on and with examples spaces. *Educational Studies in Mathematics*, 69, 183-194.
- LAKATOS, I. (1961). *Essays in the Logic of Mathematical Discovery*. Thesis. Cambridge University Library.
- LAKATOS, I. (1976). *Proofs and refutations*. Cambridge: Cambridge University Library.
- LARSEN, S. & ZANDIEH, M. (2005). Conjecturing and Proving as Part of the Process of Defining. In Lloyd, G. M., Wilson, M., Wilkins, J. L. M., & Behm, S. L. (Eds.). *Proceedings of the 27th PME-NA*. Colombus, OH: ERIC.
- LARSEN, S. & ZANDIEH, M. (2008). Proofs and Refutations in the Undergraduate Mathematics Classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 67, 205-216.
- LOCIA ESPINOZA, E. (2000). *Les contre-exemples dans l'enseignement des mathématiques*. Thèse, Université Paul Sabatier, Toulouse.
- MARIOTTI, M.A. & FISCHBEIN, E. (1997). Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics*, 34, 219-248.
- OUVRIER-BUFFET, C. (2003). Construction de définitions / construction de concept : vers une situation fondamentale pour la construction de définitions en mathématiques. Thèse, laboratoire Leibniz, Grenoble (disponible en ligne : <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00005515/en/>).
- OUVRIER-BUFFET, C. (2005). Activités de classification et construction de définitions à l'école élémentaire. *Colloque de la COPIRELEM*. Strasbourg, France.
- OUVRIER-BUFFET, C. (2006). Exploring mathematical definition construction processes. *Educational Studies in Mathematics*, 63(3), 259-282.
- OUVRIER-BUFFET, C. (2011). A mathematical experience involving defining processes: in-action definitions and zero-definitions. *Educational Studies in Mathematics*, 76(2), 165-182.
- OUVRIER-BUFFET, C. (2012). L'activité de définition : vers un mode de pensée spécifique ? In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement Des Mathématiques et Contrat Social : Enjeux et Défis pour le 21^e Siècle – Actes du Colloque EMF 2012* (GT3, pp. 492-503). <http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012>.
- TSAMIR, P. & TIROSH, D. (2008). Intuitive nonexamples: the case of triangles. *Educational Studies in Mathematics*, 69, 81-95.
- VINNER, S. (1991). The Role of Definitions in Teaching and Learning of Mathematics. In Tall, D. (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer.
- ZANDIEH, M. & RASMUSSEN, C. (2010). Defining as a mathematical activity: A framework for characterizing progress from informal to more formal ways of reasoning. *Journal of Mathematical Behavior*, 29, 57-75.

ANNEXE – EXEMPLES DE SITUATIONS DE CONSTRUCTION DE DÉFINITIONS UTILISANT DES EXEMPLES ET CONTRE-EXEMPLES

A) Situation de classification d'un concept discret (l'arbre), non nommé, et n'étant pas présent en tant que concept mathématique étudié au lycée.

1^{ère} partie - A partir d'exemples et contre-exemples identifiés comme tels

			1- comment définiriez-vous l'objet mathématique "truc" sachant que: T1, T2, T3 et T4 sont des représentations de "truc" et que T5, T6 n'en sont pas ?
			

2^{ème} partie - Possibilité de réinvestissement (et de validation) des définitions construites précédemment (ici le vocabulaire mathématique est introduit par le gestionnaire de la situation).

Soit G un graphe (ensemble de points et de traits reliant ces points) connexe (en un seul morceau).
Démontrer qu'il existe un arbre couvrant tous les sommets.

B) Le même type de problème qu'en A) a été également étudié avec les droites discrètes (et triangles discrets).

C) Un dernier type de situations de construction de définitions mobilisant cette fois-ci la génération d'exemples et contre-exemples : les déplacements sur une grille discrète.

Le problème est le suivant :

Soit G une grille discrète régulière (par exemple de maille carrée). Un point de G est à l'intersection de deux lignes de G . Un déplacement de G est défini par deux entiers positifs et deux directions (parmi en haut, en bas, à droite, à gauche).

Le problème général formel est le suivant : soit $E_k = \{d_1, \dots, d_k\}$ un ensemble de k déplacements d_i , $k \geq 1$ et $1 \leq i \leq k$. Partant d'un point quelconque de G , quels points de la grille peut-on atteindre en utilisant que des combinaisons entières positives de déplacements de E_k ?

Un algorithme de somme pour les rationnels en écriture décimale.

Des exemples, et après ?

Laurent Vivier

I. INTRODUCTION

Il est possible de définir les rationnels par une extension du système d'écriture décimale des décimaux. Le corps $\mathbf{Q}$ peut ainsi être défini avec des algorithmes des quatre opérations de base (Rittaud & Vivier, *soumis*). En particulier, l'algorithme de somme pour les rationnels en écriture décimale proposé dans (Rittaud & Vivier, *soumis*), a donné lieu à des expérimentations en classe de seconde et en première année d'université. Ce texte se focalise sur des exemples de sommes et surtout sur ce que l'on peut en espérer.

Dans une première partie sera exposée l'utilité des exemples pour la mise en œuvre de cet algorithme et sa compréhension. Dans une deuxième partie, nous verrons comment des étudiants de première année d'université peuvent, à travers la production d'exemples, d'une part étendre et compléter l'algorithme et d'autre part se *frotter* à la complexe égalité $0,\overline{9}=1$. Ce dernier point illustrera certaines difficultés liées à la perspective des *Learner Generated Examples* (LGE) exposée par Watson & Shipman (2008, voir aussi la fiche 11). Enfin, en troisième partie, nous exposerons des résultats de (Vivier, 2012) sur la production d'un algorithme de somme en formation d'enseignants.

II. UTILITÉ DES EXEMPLES

II.1. Mise en œuvre de l'algorithme

Dans 4 classes de seconde (113 élèves), on a proposé l'exemple¹⁹ suivant : pour effectuer la somme $0,\overline{27} + 0,\overline{90}$ on peut procéder ainsi :

	2	7
+	9	0
1	1	7
+		1
	1	8

Donc, $0,\overline{27} + 0,\overline{90} = 1,\overline{18}$.

¹⁹ Il y avait en fait deux tests différents mais avec la même difficulté numérique, dans un des test les périodes étaient écrites avec des points de suspensions. En outre, avant la présentation de l'algorithme, le test proposait notamment des sommes de rationnels en écriture décimale dont il fallait identifier le résultat dans une liste de proposition (Vivier, 2011).

genre de question, et ce qui ressort le plus c'est que l'algorithme donne un résultat « plus précis » mais sans que l'on sache vraiment pourquoi car les élèves n'ont pas détaillé leurs réponses.

En première année d'université (MPSI intégré à l'université Paris 13), six étudiants sur les quatorze de l'étude comprennent parfaitement le rôle de la retenue qui *sort* de la période comme pour l'étudiant U9 : « Il s'agit d'ajouter la retenue que l'on avait pas comptée ». Cet étudiant adapte même l'algorithme en revenant aux premières sommes à effectuer pour aboutir à une disposition de l'addition en une seule étape²⁰, avec une flèche, proche de la disposition usuelle pour la somme de décimaux.

a) $0,5 + 0,7$

$$\begin{array}{r} 1,1 \\ 0,555 \\ 0,777 \\ \hline 1,333 \end{array}$$

 $1,3$

b) $0,34 + 0,51$

$$\begin{array}{r} 0,85 \end{array}$$

c) $0,72 + 0,3$

$$\begin{array}{r} 1,0605 \end{array}$$

Image : réponse de l'étudiant U9 aux questions préliminaires

II.3. Conclusion

Ainsi, la présentation de l'algorithme sur un seul exemple permet pour environ la moitié des élèves de seconde et presque tous les étudiants de première année d'université de pouvoir reproduire l'algorithme avec quelques adaptations simples (notamment sur les tailles des périodes et sur la retenue). Néanmoins, si environ 50% des élèves de seconde arrivent à effectuer le processus, très peu semblent en mesure de le justifier, on peut penser que les élèves n'ont pas une compréhension suffisante du système décimal. En revanche, en première

²⁰ La présentation en deux étapes était guidée par le point de vue mathématique où il est très intéressant de considérer la somme dans le groupe des périodes de taille donnée pour ensuite définir la somme de deux rationnels en écriture décimale. Nous reprenons dans nos expérimentations ultérieures cette idée d'un algorithme en une seule étape.

année d'université six étudiants donnent de bonnes justifications²¹. Mais pour ces justifications, on peut penser que ce n'est pas l'exemple qui est en jeu, mais plutôt, ici aussi, la compréhension du système décimal (rappelons que les étudiants sont inscrits dans un cursus de mathématiques).

On a ainsi l'impression que les élèves de seconde en restent à un niveau procédural sans accéder à un niveau conceptuel, pourtant à leur portée, sur le système décimal alors que les étudiants de première année d'université semblent déjà à ce niveau conceptuel ce qui leur permet de justifier l'algorithme. En bref, l'exercice proposé pour présenter l'algorithme joue bien son rôle de « guide procédural » mais ne serait être seul responsable d'une quelconque conceptualisation.

III GÉNÉRATIONS D'EXEMPLES PAR LES ÉTUDIANTS

III.1. Autour de l'algorithme

En première année d'université (29 étudiants en MPSI intégré²² à l'université Paris 13). Les étudiants ont été regroupés en dix groupes de trois (excepté le groupe I, composé de deux étudiants) sur la base des réponses à un test individuel, et notamment sur la comparaison entre $0,\overline{9}$ et 1 : les groupes A, B, C, D, F, G et H sont composés d'un étudiant qui a affirmé $0,\overline{9}=1$ et de deux étudiants qui ont affirmé $0,\overline{9}<1$ (excepté dans le groupe H où deux étudiants ont affirmé l'égalité) ; les groupes E, I et J sont composés uniquement d'étudiants ayant affirmé l'inégalité.

Il a d'abord été présenté aux groupes les deux exemples suivants :

$$\begin{array}{r} 1 \qquad 1 \\ 4, 2 \ 4 \ 2 \\ \hline + 1 \ 7, 0 \ 4 \ 9 \\ \hline 2 \ 1, 2 \ 9 \ 1 \end{array}$$

$$4,2\overline{42} + 17,0\overline{49} = 21,2\overline{91}$$

$$\begin{array}{r} 1 \qquad (1) \\ 0, 8 \ 2 \\ \hline + 0, 4 \ 1 \\ \hline 1, 2 \ 34 \end{array}$$

$$0,8\overline{2} + 0,4\overline{1} = 1,2\overline{4}$$

²¹ Il est à noter que la présentation de l'algorithme semble éviter les justifications *topologiques* qui utiliseraient la notion de limite. En effet, dans le cas avec retenue qui sort, un résidu apparaît tout à droite du résultat obtenu lorsque l'on fait une somme finie (comme le 2 de $0,5555+0,7777=1,3332$). Il faudrait donc utiliser une définition formelle de la notion de limite pour conclure correctement. Le résidu constitue un signe qui semble l'emporter sur une interprétation topologique *naïve* dans la perception du résultat des sommes finies. C'est pour cette raison que nous pensons que cet algorithme permet d'éviter les *réponses infinitésimales* (Margolinas, 1988) comme $0,555...+0,777...=1,333...2$.

²² Il ne s'agit pas du même groupe qu'au I car les expérimentations n'ont pas été menées la même année. Voir aussi (Rittaud & Vivier, 2013).

Puis, après une demande de justification²³, on leur a demandé de trouver tous les cas de figure que l'on peut rencontrer dans de telles sommes. Pour cela, on leur demandait d'écrire au moins cinq autres sommes de deux rationnels en écriture décimale et d'effectuer ces sommes à l'aide de l'algorithme proposé. On précisait que selon le cas de figure envisagé, il était possible que l'on soit amené à adapter légèrement l'algorithme. La table 2 synthétise les réponses des dix groupes (entre parenthèses les noms des groupes sont signalés).

	exemple avec retenue qui <i>sort</i> de la période	exemple sans retenue qui <i>sort</i> de la période	exemple avec des périodes de tailles différentes	exemples avec des débuts des périodes différents	exemple avec au moins un décimal (période 0)
Nombre de groupes (sur dix)	8 (ABCDGHIJ)	10 (ABCDEFGHIJ)	3 (ACH) à 5 (ACHDF)	2 (BC) à 4 (BCDF)	1 (A)

Table 2

La perception de la présence ou non d'une retenue qui *sort* de la période est plutôt bien perçue. On ne peut manquer de pointer que, précisément, les deux exemples proposés pour présenter l'algorithme étaient élaborés sur cette variation – avec ou sans retenue qui *sort* de la période. En revanche les autres variations possibles ont des taux d'apparition faibles. Pourtant, dans le test individuel de la veille, les étudiants avaient été explicitement interrogés sur les variations d'écriture des nombres rationnels (taille de période, début de la période associé, ou non, à une permutation de la période) et ils avaient dans l'ensemble bien répondu à ces questions. On retrouve clairement le problème de la variation exposé par Watson et Shipman (2008, voir aussi la fiche page 11). Mais peut-être devons-nous préciser : si les étudiants n'arrivent pas à percevoir/débusquer la variation, comment peut-on espérer qu'ils découvrent/construisent un concept ? De plus, aucun groupe ne propose de variation d'écriture des deux nombres d'une même opération, pour voir si le résultat est le même²⁴. Or, c'est sans doute à ce moment que le concept de nombre et d'opération peuvent effectivement commencer à être perçus.

²³ Les justifications produites sont, pour quatre groupes, plus précises que celles mentionnées à la section II. On peut par exemple noter : anticiper la retenue venant de la droite, existence de deux types de retenues (*locale* et *héritée*), périodicité des retenues ainsi que des mentions de la stabilité des tailles de périodes. Deux autres groupes proposent une justification partielle, trois groupes ne donnent pas de justification et un groupe n'a pas compris l'algorithme.

²⁴ On peut interpréter cela d'une part par une variation sur les nombres en jeu dans la somme et, d'autre part, par la question de la justification de l'algorithme par un changement d'écriture d'un même nombre. Tout deux semblent hors de portée des étudiants de l'étude. Il est à noter que la question de la variation des écritures liée à la consistance des définitions produites est très courant en mathématiques et dépasse largement le cadre de notre étude.

Bien sûr, il n'était pas explicitement demandé d'exemples avec un but précis – si ce n'est la variation – mais on ne peut s'empêcher de rapprocher ce manque de variation à la non-apparition du signe « – » dans l'expérimentation de Watson et Shipman (2008).

III.2. Pour l'égalité $0,\bar{9}=1$

A la suite de l'activité présentée à la section précédente, on a demandé à chaque étudiant de choisir un nombre rationnel a écrit dans le système décimal et de calculer $x=0,\bar{9}+a$ par l'algorithme puis de reporter les résultats de chaque groupe dans un tableau. Ce tableau doit faire apparaître $1+a$, sauf si la période de a est $\bar{0}$. La question posée est, pour chaque cas, de donner $x-a$ puis de faire les remarques que le groupe juge nécessaires.

Sur les 8 groupes qui ont calculé convenablement les trois sommes, figuraient 6 groupes avec un étudiant ayant répondu « $0,\bar{9}=1$ » dans le test individuel de la veille à la question de leur comparaison et deux autres groupes, E et J, pour lesquels les trois étudiants avaient tous répondu « $0,\bar{9}<1$ » au test individuel. Sans surprise, les 6 premiers groupes donnent comme remarque l'égalité $0,\bar{9}=1$. On relève également que le groupe F met en doute l'algorithme et que le groupe A parle d'arrondi pour régler le problème – donc pour ce dernier on note une certaine contradiction. Pour les deux autres groupes, le groupe E écrit « $0,\bar{9}\approx 1$ » et précise que $0,\bar{9}+a-a$ donne 1 et le groupe J affirme qu'il y a « beaucoup d'approximations ».

Ainsi, 5 des 6 premiers groupes en restent à l'égalité, réponse d'un des membres au test individuel, et ne voient pas que si l'on accepte l'algorithme, les calculs montrent la nécessité de l'égalité entre $0,\bar{9}$ et 1. Pour les deux autres groupes, si le groupe E semble se rapprocher de l'égalité (voir les images 2a et 2b), le groupe J semble remettre en cause l'algorithme et ses nombreuses approximations.

	Etudiant 1	Etudiant 2	Etudiant 3
a	0,34	1,53	2,7
$x = 0,\bar{9} + a$	$x = 1,2\bar{4}$	$x = 2,53(2)$	3,3
$x - a$	1	1	1

Pour obtenir x il faut ajouter une 1 à la partie entière de a .
 lorsque qu'on calcule $0,\bar{9}+a-a$ on obtient 1.
 On peut donc déduire de ce calcul que $0,\bar{9}\approx 1$.

Images 2a et 2b : Tableau des résultats et remarques du groupe E, légèrement incohérentes

Ainsi, les exemples produits par les groupes ne permettent que très peu de dépasser le stade conceptuel où en sont les membres des groupes. Il est toutefois à noter que le temps de réflexion a été court et qu'il serait sans doute profitable de faire une nouvelle expérimentation sur une durée plus longue pour que les étudiants se familiarisent avec l'algorithme de la somme, un peu comme dans l'expérimentation de Weller, Arnon et Dubinsky (2009).

IV. CONSTRUCTION D'UN ALGORITHME

En Master 2 « enseignement », on a demandé à 12 étudiants-professeurs de déterminer un algorithme pour faire la somme de deux rationnels en écriture décimale. La durée était d'environ 2h, par groupe de 3 en totale autonomie.

Les étudiants ont clairement mené leurs investigations par des exemples alors que cela n'était pas demandé explicitement. Les exemples étaient orientés dans le but de voir comment on pouvait faire de telles sommes. Bien entendu, sont apparus des moments plus formels où ils cherchaient à prouver leurs conjectures. Ainsi, il n'est pas forcément nécessaire de préciser explicitement le but à atteindre, important pour Watson et Shipman (2008, voir aussi la fiche page 11). Les étudiants-professeurs ont d'eux-mêmes orienté leurs exemples.

Aucun groupe n'a réussi à déterminer un algorithme mais, dans l'ensemble des groupes, tous les points importants à considérer ont été trouvés : début de la période identique pour les deux nombres – quitte à faire des décalages –, des périodes de taille identique – quitte à prendre le PPCM –, cas d'une retenue qui *sort* de la période. Dans ce dernier cas, aucun groupe n'a trouvé de solution, mais un groupe a trouvé un exemple, à la toute fin du temps réglementaire, qui les a stupéfaits car ils voyaient que dans cet exemple il y avait quelque chose à comprendre, une régularité qui devrait tout expliquer. Mais ils n'ont pu aller plus loin. L'exemple est le suivant :

The image shows a handwritten mathematical derivation. At the top, there is a faint title in French: "Somme de deux nombres décimaux". Below it, the student has written "Exemple" and "On suppose que". The main part of the work shows the addition of two numbers: $a = 0,32$ and $b = 0,415$. The student has written $a+b = 0,735$. Below this, there is a calculation for the period: $a+b = 0,735$ and $p = 440685 + 1$. The student has also written $a+b = 0,735$ and $p = 440685 + 1$. The work is written on a grid background.

Image 3 : un exemple important

D'un autre côté, un groupe a parfaitement identifié le cas de la retenue qui *sort* de la période – c'était le seul des 4 groupes. Ils ont codé les périodes des deux nombres par deux entiers N et M d'au plus k chiffres et ont écrit « $\overline{N} + \overline{M} = \overline{N + M}$ » si $N+M$ a encore k chiffres puis :



Image 4 : identification par un groupe du problème de la période qui *sort* de la période.

Mais ce groupe n'a pas su comment aller plus loin.

On peut penser que l'association des deux groupes présentés dans cette section sur le cas de la retenue qui *sort* de la période aurait pu permettre de trouver une solution à ce problème.

V. CONCLUSION

Regardons ce qui ressort principalement de ces quelques expérimentations. D'une part, des exemples *bien choisis* peuvent servir pour la présentation d'un processus algorithmique en montrant les étapes à suivre. Cette présentation, en tout cas dans nos exemples, est suffisamment riche pour que la plupart des élèves et des étudiants puissent reproduire ce processus. Mais, en revanche, cela ne semble avoir aucune incidence directe sur le niveau de conceptualisation nécessaire pour une compréhension de la signification de l'algorithme, et pas uniquement une compréhension procédurale, que nous avons perçue à travers des demandes de justifications.

D'autre part, dans la dernière section sur l'expérimentation en formation d'enseignants, on met le doigt sur un point qui apparaît fondamental : la dialectique entre la conceptualisation et la production d'exemples. En effet, les étudiants-professeurs produisent des exemples ce qui pousse certains à une forme de conceptualisation (la somme des périodes) mais ils ne savent qu'en faire sans un exemple *crucial*. D'autres en revanche ne conceptualisent pas suffisamment pour tirer partie de leur exemple *crucial* obtenu un peu par hasard.

On peut ainsi conclure, du moins en ce qui concerne l'exemple d'algorithme ici traité : si les exemples semblent nécessaires pour initier la conceptualisation, sans conceptualisation un exemple peut ne servir à rien. Cela ouvre une discussion sur l'intérêt de la notion des LGE proposée par Watson et Mason (2005).

BIBLIOGRAPHIE

- MARGOLINAS, C. (1988). Une étude sur les difficultés d'enseignement des nombres réels, *Petit x* 16, 51-66.
- RITTAUD, B. & VIVIER, L. The field $\mathbf{Q}$ from the standpoint of circular words, (*soumis*) – Une version simplifiée en français est disponible sur Internet : <<http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/59/34/13/PDF/Rittaud-Vivier-DDIP.pdf>>.
- RITTAUD, B. & VIVIER, L. (2013). Different praxeologies for rational numbers in decimal system – the $0,\bar{9}$ case, *Proceedings of CERME 8*, 6-10/02/2013, Antalya, Turquie (*à paraître*).
- VIVIER, L. (2011). El registro semiótico de los Desarrollos Decimales Ilimitados. *El cálculo y su enseñanza*, México. Revue en ligne <http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/>
- VIVIER, L. (2012). Construction d'une ressource pour l'enseignant : un algorithme de somme de deux rationnels en écriture décimale. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF 2012* (GT6, pp. 919–932). <http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012>
- WATSON, A., & MASON, J. (2005). *Mathematics as a constructive activity: learners generating examples*. Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.
- WATSON, A., & SHIPMAN, S. (2008). Using learner generated examples to introduce new concepts, *Educational Studies in Mathematics*, 97-109.
- WELLER, K., ARNON, I. & DUBINSKY, E. (2009). Preservice Teachers' Understanding of the Relation Between a Fraction or Integer and Its Decimal Expansion, *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 9(1), Routeledge.

Exemples dans les comparaisons dans l'enseignement

Richard Cabassut

Les systèmes éducatifs sont d'une grande complexité et mettent en jeu des variables qu'il est souvent difficile de contrôler. Une étude exhaustive est bien souvent difficilement réalisable. C'est pourquoi le recours à des exemples est fréquent. Nous proposons de présenter différents exemples utilisés dans des comparaisons dans l'enseignement. Nous distinguerons ces exemples par leurs fonctions : des exemples pour illustrer, décrire ou préciser, des exemples pour représenter ou caractériser.

I. DES EXEMPLES POUR ILLUSTRER, DÉCRIRE OU PRÉCISER

(Clarke 2004, p.1) rappelle le « besoin dans la recherche comparative internationale non pas de minimiser les variations, par une agrégation simpliste des données au niveau d'une nation, par l'imposition implicite d'un curriculum international commun à travers des tests internationaux, ou par l'aspiration à « dissiper » la variation à travers l'identification et le plaidoyer des meilleures pratiques applicables internationalement uniformément, mais de documenter et de rendre compte des variations dans la politique et la pratique éducatives de manière à anticiper des variations supplémentaires dans l'adaptation et l'application de telles recherches »²⁵. Les exemples servent donc à documenter et à rendre compte des variations. Pour cela nous utilisons la dialectique similitude-différence suggérée par Clarke (Ibid. p.5) pour comparer deux groupes d'objets : soit on rassemble deux groupes d'objets d'après leurs similitudes par rapport à une caractérisation commune puis on compare ensuite leurs différences qu'on essaie d'interpréter, soit on différencie les deux groupes d'objets d'après leurs caractéristiques propres puis on interprète les similitudes entre ces groupes.

Dans une étude précédente (Cabassut 2005), nous avons appliqué cette méthode pour la comparaison de la validation des théorèmes de cours dans les manuels en France et en Allemagne. Nous avons choisi dans le curriculum allemand du Bade-Wurtemberg²⁶ un théorème à étudier. Nous avons noté les caractéristiques suivantes du théorème choisi²⁷. D'abord le moment de première rencontre avec la validation du théorème, précise quelle classe de l'enseignement secondaire est concernée. Ensuite la position relative de première validation du théorème par rapport à la classe 8 (correspondant à la classe de quatrième), classe où la démonstration est introduite comme objet d'étude dans le curriculum, enfin le

²⁵ Traduction de Cabassut.

²⁶ (Cabassut 2005) détaille les raisons de ce choix, l'Allemagne étant organisée de manière fédérale, les curricula de mathématiques peuvent donc varier d'un Land à l'autre : il a fallu donc arrêter son choix sur un Land, ici le Bade-Wurtemberg.

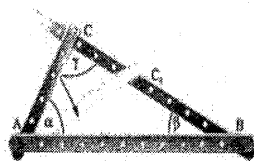
²⁷ Les critères du choix et la justification des caractéristiques considérées sont détaillés dans (Cabassut 2005). L'objet de cet article n'est pas de présenter dans le détail des recherches sur la démonstration mais l'aspect comparatif de ces recherches.

domaine mathématique du théorème est précisé (algèbre, analyse, géométrie, grandeurs et mesures ...). Une fois le théorème à étudier choisi, nous avons étudié sa validation dans un manuel de la collection Lambacher-Schweizer du Bade-Wurtemberg qui est la collection la plus utilisée dans ce Land (exemple de représentativité). Pour comparer avec la France, nous avons alors utilisé la méthode de comparaison de Clarke, en cherchant parmi les manuels disponibles en France, une validation semblable à celle retenue dans la collection allemande précédente. Ce pourra être le cas si la technologie²⁸ utilisée dans le manuel allemand est également mobilisable dans le manuel français. Si on ne trouve pas de validations semblables on essaie d'expliquer les différences observées. Illustrons sur des exemples semblables : la somme des angles d'un triangle

1.1. L'exemple concerne la validation que la somme des angles d'un triangle est un angle plat.

Le livre allemand est celui de classe 7 (12-13 ans), en Bade-Wurtemberg, édition Klett, collection Lambacher Schweitzer (LS), (p.105), première édition 1994. Il propose deux validations successives. Une première validation pragmatique utilise des mesures d'angles d'un triangle mécano articulé pour observer la somme des angles. Une validation d'apparence plus formelle utilise les propriétés des angles alternes-internes et des angles correspondants pour valider la propriété.

I a) Welche Winkel des Dreiecks ABC ändern sich, wenn man den Stab AC nach rechts schwenkt und der Stab BC seine Richtung beibehält? Welcher Winkel wird größer, welcher kleiner? Vergleiche die Zunahme des einen Winkels und die Abnahme des anderen mit dem Winkelmesser.
b) Was lässt sich über die Summe $\alpha + \beta + \gamma$ sagen, wenn sich AC und BC mehr und mehr der Lage von AB nähern?



In Fig. 1 sind g und h parallel. In diesem Fall ist: $\alpha + \delta = 180^\circ$.
Ist - wie in Fig. 2 - h nicht parallel zu g, so entsteht ein Dreieck ABC. Der Winkel γ bei C hat gegenüber Fig. 1 um eine Winkelweite β zugenommen; gleichzeitig ist bei B ein neuer Winkel derselben Weite β entstanden (Wechselwinkel an Parallelen).
Jetzt gilt daher: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.

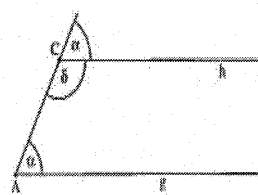


Fig. 1

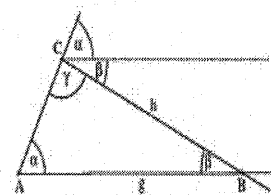


Fig. 2

Satz von der Winkelsumme im Dreieck:
In jedem Dreieck ergeben die drei Innenwinkel zusammen 180° .
 $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

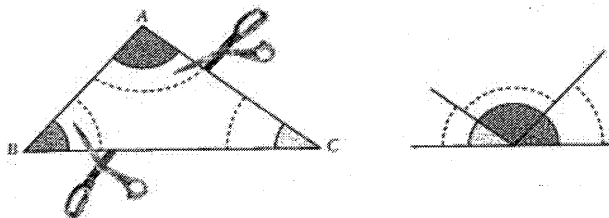
On trouve un ouvrage français, dans la collection « Nouveau Transmath », 1997, p. 225, classe de cinquième (âge 12-13 ans), qui contient une validation en deux étapes, d'abord une étape d'observation pragmatique reposant sur des arguments visuels puis de mesure, et une « démonstration »²⁹.

²⁸ Technologie est pris dans le sens de la théorie anthropologique du didactique, c'est-à-dire l'ensemble des justifications des techniques utilisées pour démontrer le théorème considéré, c'est-à-dire les théorèmes, propriétés et définitions mathématiques qui justifient les techniques utilisées pour démontrer le théorème.

²⁹ Nous utilisons des guillemets car, dans cette validation, on recourt à un argument visuel pour reconnaître des angles alternes internes ou des angles correspondants. Or en principe un argument visuel ne doit pas être utilisé dans une démonstration mathématique.

① En découpant

- Trace sur papier blanc un triangle ABC comme celui dessiné ci-dessous.
- Découpe chacun de ses angles, puis « regroupe »-les comme l'indique le dessin ci-dessous.



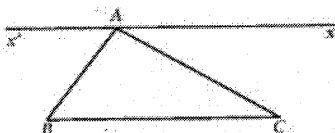
- Quelle semble être la valeur de la somme des angles du triangle ?

② En mesurant avec ton rapporteur

- Trace trois triangles.
- Mesure les angles de chacun de ces triangles à l'aide d'un rapporteur, puis calcule la somme des angles de chaque triangle.
- Quelle semble être la valeur de cette somme ?

③ Une démonstration à présent

La droite $(x'x)$ est parallèle à la droite (BC) et passe par A.



- Compare les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BAx'}$, puis $\widehat{ACB}$ et $\widehat{CAx}$.
- Explique alors pourquoi la somme des trois angles du triangle ABC est égale à 180° .

Comparaison :

Dans les deux validations on observe des similitudes.

- Il y a une première validation pragmatique (reposant sur des arguments visuels, des actions (découpage, action sur le mécano, mesure) qui remplit une fonction de découverte. Puis il y a une seconde validation qui utilise des arguments mathématiques (reposant sur les théorèmes sur les angles) et un argument visuel, qui remplit une fonction de preuve.
- Les technologies mobilisées dans le manuel français et dans le manuel allemand sont semblables, à l'exception de la définition des angles correspondants sollicitée dans le seul manuel allemand.
- Les deux validations ont des fonctions analogues, avec une nuance pour la fonction d'explication davantage mise en évidence dans l'exemple allemand avec la compensation de l'angle illustrée dans l'articulation du mécano.

Quelques différences apparaissent :

- Les structures des validations sont légèrement différentes, ce qui est bien représenté par des figures différentes. La validation allemande utilise les angles correspondants, ce qui n'est pas nécessaire dans la validation française.

- Les argumentations et la démonstration apparaissent dans une section intitulée « activités » distincte de la section « cours » dans le livre français, alors que cette distinction n'existe pas dans le livre allemand.

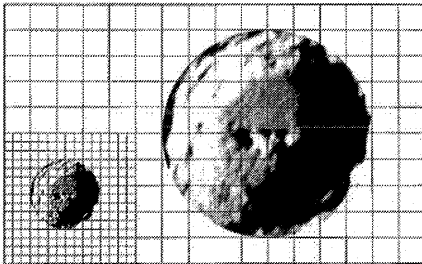
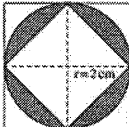
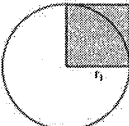
On notera au niveau des validations des figures une technique de codage des figures plus développée dans le manuel allemand (ici avec le codage des angles). Ceci semblerait répandu (comme le montrerait l'observation d'autres manuels, de situations de classe (Knipping 2003) ou notre expérience de correcteur du baccalauréat franco-allemand).

La définition des angles alternes-internes est définie par recours à la figure dans le manuel français et par un texte en langue naturelle dans le manuel allemand.

Cet exemple montre l'existence de validations semblables dans les deux institutions quant à l'utilisation des arguments pragmatiques, du recours à la figure et des arguments mathématiques, et répondant aux mêmes fonctions. Par contre, pour les différences observées, il est difficile de savoir si elles sont le fait de différences culturelles entre pays (recours au codage, distinction activités-cours) ou simplement de fluctuations entre manuels qu'on pourrait retrouver au sein d'un même pays.

1.2. Exemples différents : le périmètre et l'aire du disque

Dans le livre de mathématiques, classe 10 (15-16 ans), en Bade-Wurtemberg, édition Klett, collection Lambacher Schweitzer (LS), (p.74), première édition 1996, on observe une validation de la formule de l'aire du disque.


1 Die beiden Bilder zeigen den Mondkrater „Kopernikus“ auf zwei verschiedenen Mondkarten.

a) Kann man den Bildern entnehmen, wie groß die Fläche des Kraters in Wirklichkeit ist?

b) Wie viele der eingezeichneten Quadrate liegen ganz in der Kraterfläche? Warum sind es auf beiden Karten gleich viele?

c) Gib für den Flächeninhalt des Kraters einen Näherungswert in der Flächeneinheit „1 Quadratfläche“ an.

d) Wie lautet der Näherungswert in der Einheit „1 Radiusfläche“?

Bisher haben wir Flächeninhalte von Vielecken berechnet. Nun versuchen wir, Flächeninhalte von krummlinig begrenzten Flächen zu bestimmen. Die wichtigste derartige Figur ist der Kreis.

Der Flächeninhalt des Kreises auf dem Rand ist kleiner als 16 cm^2 , aber größer als 8 cm^2 . Vergleicht man den Flächeninhalt A eines Kreises mit dem Flächeninhalt r^2 des Radiusquadrates, so stellt man fest: Bei allen Kreisen ist

$$2r^2 < A < 4r^2 \quad \text{oder} \quad 2 < \frac{A}{r^2} < 4.$$

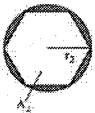
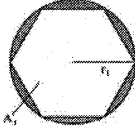
Die Schranken 2 und 4 hängen nicht von r ab; wir können daher vermuten: Bei allen Kreisen ist der Quotient $\frac{A}{r^2}$ die gleiche (zwischen 2 und 4 gelegene) Zahl, bzw.: Bei allen Kreisen ist der Flächeninhalt **dasselbe** Vielfache von r^2 .

Um die Vermutung zu überprüfen, denken wir uns regelmäßige Vielecke derselben Eckenzahl n in zwei Kreise einbeschrieben. Da diese n -Ecke ähnlich sind, gilt für ihre Flächeninhalte A_1 und A_2 :

$$\frac{A_2}{A_1} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \quad \text{oder} \quad \frac{A_2}{r_2^2} = \frac{A_1}{r_1^2}.$$

D.h.: Bei festem n ist der Quotient aus n -Eck-Inhalt und Inhalt des Radiusquadrates bei allen Kreisen gleich.

Da sich der Inhalt eines n -Ecks bei hinreichend großer Eckenzahl vom zugehörigen Kreisinhalt nur beliebig wenig unterscheidet, muss in gleicher Weise auch für die Kreisinhalte gelten:

Satz: Der Quotient $A:r^2$, d.h.:
(Flächeninhalt des Kreises) : (Flächeninhalt des Radiusquadrates)
ist bei allen Kreisen gleich.

L'auteur commence par une activité d'approche autour d'évaluations par quadrillage d'aires. Il poursuit en proposant la conjecture suivante, qui correspond à une argumentation :

« L'aire du disque dans la marge est plus petite que 16 cm^2 , mais plus grande que 8 cm^2 . On compare l'aire A d'un disque avec l'aire r^2 du carré de côté r , on constate ainsi que : pour tous les cercles on a : $2 r^2 < A < 4 r^2$ ou $2 < A/r^2 < 4$. Les bornes 2 et 4 ne dépendent pas de r . On peut **conjecturer** que pour tous les cercles le quotient A/r^2 est le même (compris entre 2 et 4) ».

Intéressons-nous à la validation de cette conjecture dans le manuel.

« Pour vérifier notre conjecture, nous considérons deux polygones réguliers de même nombre n de sommets inscrits dans deux cercles de rayons respectifs r_1 et r_2 . Comme ces deux polygones sont semblables, leurs aires A_1 et A_2 sont dans le rapport : $A_2/A_1 = r_2^2/r_1^2$ ou $A_2/r_2^2 = A_1/r_1^2$.

Cela signifie que, pour un n fixé, le quotient de l'aire d'un polygone à n côtés inscrit dans un cercle de rayon r et l'aire d'un carré de côté r est le même pour tous les cercles.

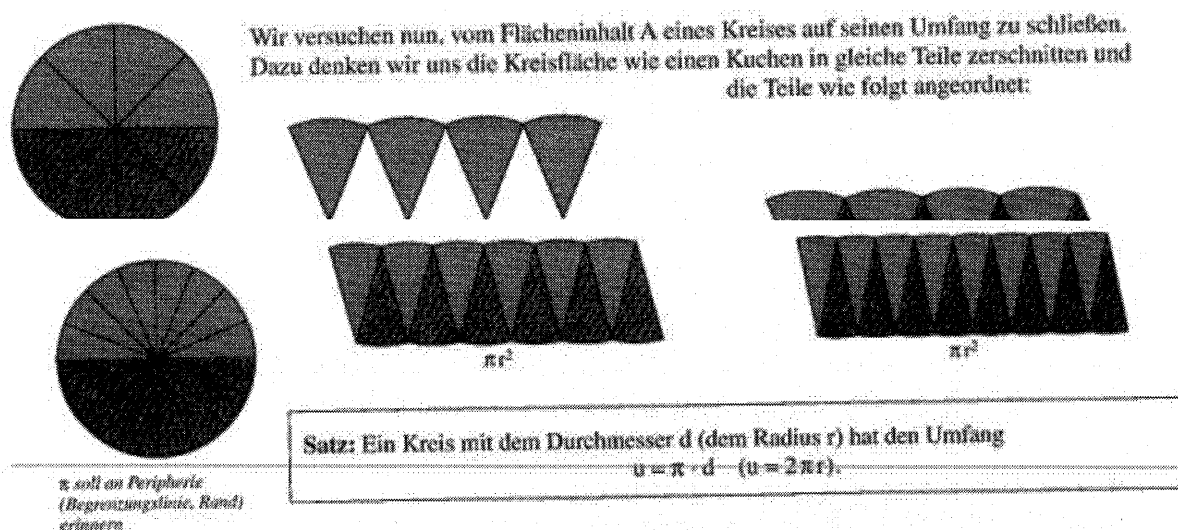
Comme l'aire d'un polygone à n côtés diffère aussi peu qu'on le souhaite de l'aire du disque correspondant pour n suffisamment grand, on doit avoir de la même façon également pour les aires de disques :

Théorème : Le rapport A/r^2 est le même pour tous les disques » (traduction d'extraits p.74).

On utilise ici des arguments mathématiques (propriété du rapport des aires de triangles semblables (et de polygones semblables) dans le carré du rapport de similitude) vus dans la classe précédente. Par contre on utilise des arguments extra-mathématiques après avoir vérifié (visuellement) que du carré à l'hexagone, l'aire du polygone régulier inscrit dans le cercle se rapproche de l'aire du cercle. Il est induit que pour n suffisamment grand, l'aire d'un polygone régulier inscrit dans un disque diffère aussi peu qu'on le souhaite de l'aire du disque. C'est pourquoi nous évoquons un **argument d'induction**, qui n'est pas un argument mathématique. Dans un argument suivant, partant du rapport de l'aire d'un polygone régulier inscrit dans un cercle au carré du rayon de ce cercle constant, on effectue un passage à la limite. A la limite, l'aire du polygone inscrit dans le cercle est égale à celle du cercle. Donc le rapport de l'aire de ce polygone au carré de son rayon est égal au rapport de l'aire du disque au carré de son rayon. Comme ce rapport est constant pour tous les polygones, il est constant pour tous les cercles. Ce passage à la limite est affirmé sans qu'aucune justification mathématique ne soit donnée. C'est pourquoi nous parlerons d'**argument d'autorité** exprimant un **passage à la limite**. Cet argument d'autorité n'est pas un argument mathématique. Cette validation utilisant des arguments extra-mathématiques (induction, autorité) est une propédeutique à l'enseignement des limites, comme le suggèrent les programmes officiels : « Les élèves comprendront le problème des déterminations de la circonférence et de l'aire du cercle ainsi que du volume de solides déterminés. Ils reçoivent un point de vue sur comment une considération propédeutique des limites permet le calcul » (Ministerium 4/1994, p.481, traduction de Cabassut).

Quelques pages plus loin, le même livre propose de déterminer la formule du périmètre d'un

cercle. Après la validation de la formule de l'aire A d'un disque de rayon r indiquant que le rapport A sur r^2 est constant, le livre définit le nombre π comme étant ce rapport constant. On décompose le disque en secteurs de même angle que l'on recompose de manière à former une figure approchant un parallélogramme, comme suggéré par la figure suivante. « On choisit un nombre de secteurs suffisamment grand pour que l'aire de la surface recomposée diffère aussi peu qu'on le souhaite de l'aire d'un rectangle de longueur un demi-périmètre et de largeur un rayon » (traduction d'extraits p.78). Comme l'aire du rectangle recomposé est l'aire du disque, et comme on a précédemment établi que l'aire du disque vaut π fois le carré du rayon, on en déduit que le périmètre du cercle vaut π fois le diamètre.



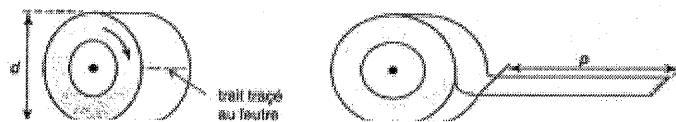
Étudions les arguments extra-mathématiques.

Il y a d'abord un constat visuel avec 8 secteurs puis 16 secteurs de l'apparition d'une figure se rapprochant d'un parallélogramme. Ici la recomposition des secteurs en espèce de parallélogramme pourrait se montrer avec les propriétés géométriques disponibles en classe 10. Le recours au constat visuel permet de simplifier l'exposé. Par contre l'argument suivant est un argument d'induction. En effet après l'avoir vérifié sur quelques cas, on conclut qu'on peut choisir un nombre de secteurs suffisamment grand pour que l'aire de la surface recomposée diffère aussi peu qu'on le souhaite de l'aire d'un rectangle de longueur un demi-périmètre ($1/2 u$) de cercle et de largeur un rayon r . Il n'est pas produit ici de justification mathématique de cette affirmation. Avec le passage à la limite, on déduit que l'aire du disque vaut l'aire du rectangle précédent. Ce passage à la limite est affirmé sans qu'aucune justification mathématique ne puisse être donnée à ce niveau de classe. C'est pourquoi nous parlerons d'**argument d'autorité** exprimant un **passage à la limite**. Cet argument d'autorité n'est pas un argument mathématique. On vise, comme pour la formule de l'aire, une préparation à l'enseignement des limites, préconisée par les programmes officiels.

En France, on détermine d'abord le périmètre du cercle en classe de 6ème, comme l'illustre l'extrait suivant du manuel « le nouveau Pythagore », édition Hatier, 1996.

A. Expériences, mesures et calculs

1. Mesurer le diamètre d du rouleau de papier adhésif.
Tracer, au feutre, un trait, juste au début du ruban (fig. 1).



2. Mesurer la longueur p du ruban déroulé (fig. 2).
Compléter ce tableau avec différentes valeurs obtenues dans la classe.

Périmètre (cm) $p =$					
Diamètre (cm) $d =$					
$p \div d \approx$					

B. Conclusion

1. Que constate-t-on dans ce tableau ?
2. Compléter la phrase :

Le périmètre d'un cercle est égal à son diamètre multiplié par ...

3. Compléter la formule :

$$p = \pi \times \dots$$

avec

$$\pi \approx \dots$$

La technique de mesure est **pragmatique** car justifiée par le constat visuel. Elle remplit une fonction de **découverte** de la constance du rapport périmètre/diamètre. En l'absence de démonstration mathématique possible dans cette classe compte tenu des technologies mobilisables, on préfère utiliser l'**autorité** du livre (et éventuellement du professeur) qui impose le résultat comme vrai, s'appuyant sur l'induction à partir des mesures. Il y a un **principe didactique du théorème admis**³⁰ qui consiste à utiliser l'argument d'autorité pour valider des théorèmes à mobiliser pour la suite de la scolarité, qu'on retrouve dans les programmes parfois sous la mention « preuve admise » lorsque l'absence de technologie mobilisable ou les contraintes de la situation d'enseignement (manque de temps, difficultés de la classe, manque d'intérêt...) ne le permettent pas : « À ce propos, les *études expérimentales* (calculs numériques, avec ou sans calculatrices, mesures, représentations à l'aide d'instruments de dessin, etc.) permettent d'émettre des conjectures et donnent du sens aux définitions et aux théorèmes. Elles ont donc toute leur place dans la formation scientifique des élèves. On veillera toutefois à ce que les élèves *ne les confondent avec des démonstrations* : par exemple, pour tout résultat mathématique énoncé, *on précisera explicitement qu'il est admis lorsqu'il n'a pas été démontré* » [Ministère 1998, p.43]. On pourra regretter ici que dans

³⁰ Nous appelons principe cette règle qui est suivie dans l'enseignement français alors que dans l'enseignement allemand un autre principe prévaudra, celui de justifier les théorèmes, y compris par une validation qui ne constitue pas une démonstration mathématique et dont certaines parties relèvent de l'explication.

l'activité précédente la distinction entre conjecturer et démontrer ne soit pas signalée clairement.

En 5ème, le manuel suivant de la même collection, propose une validation de la formule de l'aire du disque. La technique est **pragmatique** (découpage, reconfiguration). Cette technique est une **explication** puisqu'elle montre, par reconfiguration, le lien entre l'aire du parallélogramme et celle du disque. Elle est justifiée par **constat visuel** et une induction à partir des 4 découpages. Le dernier pas utilise l'**autorité** du livre (et éventuellement du professeur) qui impose le résultat comme vrai mais en s'appuyant également sur les résultats des techniques pragmatiques. La technologie mathématique utilise les formules d'aire du parallélogramme (mobilisable en cinquième) et de périmètre du cercle (mobilisable en sixième). La technologie mathématique repose sur les formules d'aire du parallélogramme (mobilisable en cinquième) et de périmètre du cercle (mobilisable en sixième).

Entre nous

Objectifs :

- Utiliser la formule du périmètre du cercle
- Découvrir la formule de l'aire d'un disque.

Remarques :

- Un peu de patience : la formule est au bout
- Les collages sont plus aérés et plus propres avec du papier autocollant.

A. Découpage et collage

1. Dessiner et découper 4 disques de mêmes dimensions.
2. Couper le premier disque en 4 secteurs identiques et coller tête-bêche ces 4 secteurs.



3. Couper le second disque en 8 secteurs identiques et coller tête-bêche ces 8 secteurs.
4. Même travail avec 16 secteurs (et avec 32 si vous voulez).

B. Formule

1. À quoi ressemble la figure obtenue en collant tête-bêche des secteurs nombreux et très fins ?
En déduire une formule pour calculer l'aire d'un disque.
2. Un disque compact fait 12 cm de diamètre.
Peu importe son air ! Calculer son aire.

Comparaison :

Les technologies non mathématiques sont analogues : une technique pragmatique de découpage/recomposition des secteurs est justifiée par constat visuel et un argument d'autorité. Dans l'institution française, on n'a pas formulé l'induction du passage à la limite sous forme générique (comme dans le cas allemand). Plusieurs hypothèses peuvent être formulées : difficulté cognitive pour des élèves de classe de cinquième à recevoir un raisonnement de passage à la limite, absence de fonction préparatoire à l'enseignement des limites du fait de l'éloignement des classes de sixième et cinquième par rapport à la classe de première où sont introduites les limites. Par contre, dans l'institution allemande la fonction

préparatoire à l'enseignement des limites (**fonction propédeutique de la fonction découverte**)³¹ est explicite dans les programmes.

Les technologies mathématiques sont différentes : dans l'institution française, formule de l'aire d'un parallélogramme, calcul ; dans l'institution allemande, triangles semblables et effet d'une similitude sur l'aire, formule de l'aire d'un rectangle et calcul.

Dans l'institution française, on a commencé par valider la formule du périmètre en sixième et c'est cette formule qu'on utilise pour valider la formule de l'aire ; sans doute parce que, ne disposant pas de la technologie sur le rapport des aires de figures semblables utilisé dans la validation allemande, il n'était pas aisé de mettre en place un argument pragmatique pour mesurer les aires (à l'exception des techniques de quadrillage assez inconfortables ou des techniques utilisant des logiciels de géométrie plane avec calcul d'aires) ; par contre cet argument paraît plus facile à mettre en place pour mesurer les périmètres ; on voit donc que la disponibilité de technologies mathématiques peut influencer l'ordre de présentation des validations

Nous pensons qu'intervient ici le niveau de détermination didactique de l'école (au sens de la théorie anthropologique du didactique). En Allemagne, la filière Gymnasium, permet de dérouler dans une filière homogène préparant à l'entrée à l'université, un curriculum de mathématique où peut être élaborée une construction élémentaire des mathématiques, avec des phases propédeutiques, comme ici c'est le cas avec en classe 10 une propédeutique à l'enseignement des limites de la classe 11. En France, le collège unique doit proposer un socle de connaissances commun à tous les élèves, qui connaîtront une orientation diversifiée après la classe de troisième. On considérerait que les élèves qui se destineront aux filières professionnelles et à certaines filières techniques, et qui ne fréquenteront pas l'enseignement des limites, doivent par contre avoir une connaissance des formules du périmètre et de l'aire du disque, qui pourrait être utiles dans leurs filières à venir. Le niveau de détermination didactique de l'école déterminerait donc les moments d'introduction des thèmes d'enseignement et les modalités d'introduction.

Les exemples précédents ont donc pour fonction de préciser dans une comparaison dans l'enseignement les éléments de similitudes ou de différences, en les illustrant. Nous allons maintenant considérer des exemples qui visent à représenter une classe d'objets dans une comparaison dans l'enseignement.

³¹ Cabassut (2005) distinguent plusieurs fonctions de la validation, parmi lesquelles la fonction découverte. Cette fonction a dans cet exemple plus particulièrement une fonction de préparation à un futur enseignement.

II. DES EXEMPLES POUR REPRÉSENTER

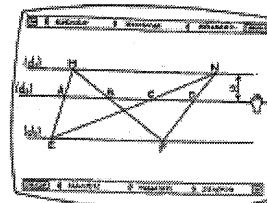
Nous commençons par présenter un exemple de représentant choisi suivant des critères qualitatifs.

II.1. Un représentant qualitatif

L'étude des productions d'élèves combine méthodes qualitatives et quantitatives. Illustrons la méthode supra-linguistique d'analyse du discours qui permet de le quantifier. Il a été demandé à des classes françaises (3ème et Seconde) d'Alsace et allemandes (classes 10 et 11) du Bade-Wurtemberg de rédiger une démonstration correspondant à un même énoncé (formulé dans les langues maternelles respectives). Le choix de l'énoncé a été effectué par une commission franco-allemande qui s'est assurée que les élèves disposaient des techniques mathématiques pour rédiger une démonstration. Chaque copie correspond à une classe différente (et donc à un professeur différent). Chaque copie a été corrigée par deux correcteurs. Parmi les énoncés proposés, nous avons sélectionné l'énoncé suivant dont la résolution présente l'avantage de demander un traitement géométrique et un traitement algébrique.

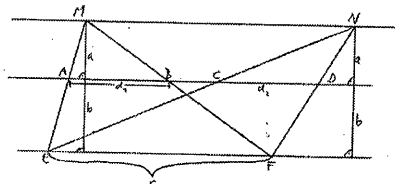
Sur son écran d'ordinateur, Gérard a construit la figure ci-dessous. Les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles et distantes de 1 décimètre. Il fait glisser la droite (d_3) entre (d_1) et (d_2) parallèlement à celles-ci. Il constate que les longueurs AB et CD affichées à l'écran sont égales, quelle que soit la position de (d_3) , mais il s'agit de valeurs approchées.

Démontrer que $AB = CD$ quelle que soit la position de (d_3) .



Nous allons donc constituer la population des copies françaises, notée F, avec les 23 « meilleures » copies après correction et la population des copies allemandes, notée A, constituée des 23 « meilleures » copies après correction. Rappelons que F et A ne sont pas des échantillons représentatifs de copies d'élèves français, et d'élèves allemands et que l'intention est d'étudier les démonstrations correctes (et non pas d'étudier les erreurs produites par les élèves). Une étude qualitative permet de dégager deux prototypes de démonstration.

Copie allemande



Nach dem Strahlensatz gilt:

$$\frac{d_1}{c} = \frac{a}{a+b} \quad \text{und} \quad \frac{d_2}{c} = \frac{a}{a+b}$$

$$d_1 = \frac{ac}{a+b} \quad d_2 = \frac{ac}{a+b}$$

$$d_1 = d_2$$

Copie française

M, A et E sont alignés } dans la même droite

N, B et F sont alignés } dans la même droite

Dans le triangle MEF, les droites (d_3) et (d_2) sont parallèles, c'est pourquoi le triangle MEF est en situation de Thalès.

$$\text{Donc } \frac{MA}{ME} = \frac{MB}{MF} = \frac{AB}{EF}$$

M, C et E sont alignés } dans la même droite

N, D et F sont alignés } dans la même droite

Dans le triangle NDF, les droites (d_3) et (d_1) sont parallèles, c'est pourquoi le triangle NDF est lui aussi en situation de Thalès.

$$\text{Donc } \frac{NC}{NE} = \frac{ND}{NF} = \frac{CD}{EF}$$

N, C et E sont les points respectifs de M, A et E parallèlement

à (d_1) et (d_2) donc $\frac{MA}{ME} = \frac{NC}{NE}$

$$\text{Donc } \frac{AB}{EF} = \frac{CD}{EF}$$

C'est pourquoi, quelle que soit la position de (d_3) , $AB = CD$.

On observe dans la copie allemande la domination du registre algébrique symbolique et le recours à la figure, avec codage de la figure. Dans la copie française, on observe l'absence de figure et l'importance du recours au registre écrit et une grande expansion du discours.

On souhaite vérifier par des méthodes quantitatives si ces caractéristiques sont liées aux populations F et A. En effet, on trouve des copies des deux types dans F et A. L'étude statistique montre que le recours à la figure est significativement plus fréquent dans une copie allemande que française. Il faut définir une mesure de l'expansion du discours qui ne soit pas basée sur le nombre de mots. En effet « le théorème de Thalès » compte pour quatre mots en français et pour deux mots en allemand (« *der Strahlensatz* »). On distingue les unités démonstratives suivantes dans la formulation d'un argument : le contexte de l'argument (par exemple : dans le triangle MEF), les entrées de l'argument ou données (par exemple : « les points M, A, E sont alignés », « $(AB)/(EF)$ », la citation de la règle d'argument (par exemple : d'après le théorème de Thalès), une sortie de l'argument ou conclusion (par exemple : « on a les rapports $MA/ME = MB/MF = AB/EF$ » compte une unité), un ajout de données (par exemple « on trace une droite perpendiculaire à d_2 et qui passe par M »).

L'étude statistique montre que l'écart entre les copies françaises et les copies allemandes du nombre d'unités démonstratives en géométrie est significatif, alors qu'il ne l'est pas en algèbre. En géométrie, la citation du contexte et la citation de l'entrée d'argument sont significativement plus fréquentes tandis que l'écart n'est pas significatif pour la citation de la règle d'argument. En revanche, en algèbre, la citation de la règle d'argument est significativement plus fréquente dans les copies allemandes. Ces différences illustrent des contrats didactiques qui développent différentes techniques et fonctions de la preuve dans un cas où les technologies mathématiques disponibles sont les mêmes³².

II.2. Un représentant statistique

Ici nous présentons un exemple de représentant choisi suivant des critères statistiques.

Cabassut et Mousoulides (2009) proposent une description d'une formation continue à l'enseignement de la modélisation auprès d'enseignants du primaire ou du secondaire. Cette formation continue a été expérimentée dans quatre pays partenaires d'un projet européen³³. Avant de participer à la formation, chaque professeur participant a renseigné un questionnaire relatif à sa biographie, et à ses croyances envers l'enseignement des mathématiques et de la modélisation. Nous allons présenter ici une analyse des réponses à ce questionnaire.

Les données recueillies sont complexes : 50 variables à plusieurs modalités de réponses. Nous commençons avec une analyse multiple des correspondances sur les variables actives (36 variables avec deux possibilités de réponses, soit 2^{36} possibilités). Puis nous appliquons une classification hiérarchique ascendante (HAC ou analyse en classes) en utilisant les distances

³² Nous renvoyons à (Cabassut 2005) pour détailler le sens des termes techniques et technologies empruntées à la théorie anthropologique du didactique. Pour faire court : ici les techniques sont les manières de résoudre le problèmes et les technologies sont les justifications mathématiques de ces techniques.

³³ Les détails du projet européen sont donnés dans (Cabassut & Mousoulides 2009).

mesurées sur les premières coordonnées entre les professeurs sur les axes factoriels déterminés par l'analyse multiple des correspondances (MCA). On identifie quatre classes ou groupes (*clusters*). Dans un groupe, les réponses actives clivantes sont celles dont les pourcentages³⁴ sont très différents entre le groupe et la population totale. Ces variables clivantes sont interprétées pour décrire chaque groupe. On exclut des variables clivantes les variables biographiques (âge, sexe, type d'école, nationalité, niveau d'étude ...). Ces variables biographiques seront utilisées après la constitution des classes pour observer comment elles sont représentées dans chaque groupe. On utilise le logiciel SPAD. On trouvera un compte-rendu détaillé de cette analyse dans l'article de Cabassut et Villette (Cabassut & Villette 2011). Ce que nous voulons illustrer ici c'est une modalité offerte par le logiciel SPAD : il permet d'éditer des parangons, objet central du groupe (*cluster*), considérés comme « représentatifs » du groupe. Ce sont les individus les plus proches du point moyen du *cluster* (proximité mesurée avec la distance adoptée par le logiciel). Nous avons ensuite interviewé plus en détail un parangon de chaque *cluster*.

III. CONCLUSION

Nous avons présenté quelques utilisations des exemples dans les comparaisons dans l'enseignement en les distinguant par les fonctions que remplissent ces exemples. Que ce soit pour illustrer ou pour représenter, on retrouve une même fonction d'explication. Par contre, pour passer à une fonction de validation, l'exemple ne suffit plus, et on peut utiliser des méthodes statistiques qui proposent une validation statistique par l'étude d'un grand nombre d'exemples, et non plus l'étude de quelques exemples. Pour terminer, nous voulons signaler que l'étude de quelques exemples peut se faire par la construction d'idéaux types, au sens de (Weber 1922). Dans ce cas il ne s'agit plus d'extraire de la réalité des exemples à étudier, mais de construire à partir de la réalité des idéaux types. C'est par exemple la démarche choisie par Knipping (Knipping 2003) pour une comparaison Franco-Allemande autour de l'enseignement du théorème de Pythagore.

BIBLIOGRAPHIE

CABASSUT, R. (2005). *Démonstration, raisonnement et validation dans l'enseignement secondaire des mathématiques en France et en Allemagne*, Thèse, IREM Université Paris 7.

CABASSUT R., MOUSOULIDES N. (2009). Theoretical Considerations on Designing and Implementing a Teacher Training Course on Mathematical Modeling: Insights from a French-Cypriot Compariso, in. *Gagatsis, A., Kuzniak, A., Deliyianni, E., Vivier, L. eds. Cyprus and France Research in Mathematics Education*, Cyprus: University of Cyprus, 141-153.

CABASSUT, R., VILLETTE, J.-P. (2011). Exploratory data analysis of an european teacher training course on modelling. *Colloque Cerme 7*. Université de Rzeszow, Pologne.

³⁴ Une question a plusieurs modalités de réponse. Pour une réponse donnée, c'est-à-dire un choix de modalité, on calcule le pourcentage de cette réponse dans le groupe. On fait la même chose pour l'échantillon. Si la différence est très importante entre les deux pourcentages on dit que la réponse est clivante.

CLARKE, D. (2004). Issues of Voice and Variations : The Problematics of International Comparative Research in Mathematics Education, paper submitted to discussion group 11: International comparaisons in mathematics education *ICME 10*, Copenhagen, Denmark, July 4-11, 2004

KNIPPING, C. (2003). *Beweisprozesse in der Unterrichtspraxis Vergleichende Analysen von Mathematikunterricht in Deutschland und Frankreich*, Verlag Franzbecker

WEBER, M. (1922). *Wirtschaft and Gesellschaft: Grundriss der verstehenden Soziologie*. Tübingen: Mohr.

Exemple, modèle, simulation en probabilités

Bernard Parzysz

I. LES EXEMPLES

Les exemples introductifs sont nombreux dans les chapitres de probabilités des manuels, mais quelle est leur finalité ? « *Dans le cas des concepts, le rôle des exemples est de provoquer ou de faciliter l'abstraction*³⁵ » (Rowland, 2008, p. 150). Mais ils constituent également une « banque » de références, comme l'indiquait naguère un document d'accompagnement du programme de mathématiques de seconde :

« Les élèves devront se constituer un bagage d'expériences de référence : lancers de pièces, de dés, tirages de boules dans une urne, obtention de listes de nombres au hasard à l'aide d'une calculatrice ; ces expériences seront des éléments fondateurs de leur perception de l'aléatoire. » (Ministère, 2000, p. 21).

Dans le domaine des probabilités, il s'agit apparemment de réaliser une approche intuitive de la notion d'expérience aléatoire, ou d'un certain type d'expérience aléatoire. Les exemples mentionnés ci-dessus sont conçus comme des *exemples génériques* au sens de Balacheff, c'est-à-dire un « *objet présent non pour lui-même, mais en tant que représentant caractéristique d'une classe d'individus.* » (Balacheff, 1987). Mais alors, de quelle(s) classe(s) d'expériences sont-ils les représentants ? Et seront-ils perçus comme tels par les élèves ? Ou, en d'autres termes : qu'est-ce qui dit qu'un exemple est générique ? Et générique pour qui ?

On peut également se tourner vers la notion d'*exemple prototypique*. Le terme de « prototype » a d'abord été proposé par Eleanor Rosch (Rosch, 1973). Elle a commencé par le définir comme un *stimulus* qui prend une position prédominante dans la formation d'une catégorie, parce qu'il est le premier qui vient à l'esprit lorsqu'on évoque cette catégorie. Elle l'a plus tard redéfini comme un *objet*, membre le plus « central » d'une catégorie, servant de référence cognitive pour ladite catégorie. Le tableau ci-dessous établit un parallèle entre la catégorisation par prototype et la catégorisation logique (*tableau 1*).

³⁵ In the case of concepts, the role of examples is to provoke or facilitate abstraction.

	Logique	Prototype
Structure horizontale des catégories	Les membres d'une catégorie ont tous le même statut (homogénéité)	Existence d'une unité centrale (« meilleur exemplaire »)
Limites des catégories	Nettes	Floues
Appartenance à une catégorie	De type vrai/faux	Degré d'appartenance basé sur la plus ou moins grande ressemblance avec le prototype.
Partage des propriétés	Mêmes propriétés pour tous les membres d'une catégorie (condition suffisante d'appartenance)	Au moins une propriété en commun avec le prototype
Choix et nature des propriétés	Choix « objectif ». Nombre minimal de propriétés.	Propriétés considérées comme partagées à des degrés divers. Information plus fournie.
Statut des propriétés	Propriétés de même importance et indépendantes les unes des autres	Hierarchie des propriétés, considérées dans leur ensemble.
Dimension verticale	Niveaux hiérarchiques a priori équivalents	Notion de « niveau de base » (le plus informatif)

Tableau 1

II. QU'EN DISENT LES MANUELS ?

Dans le but de préciser les exemples d'expériences aléatoires proposés aux élèves français, je me suis tourné vers les manuels et j'ai entrepris l'étude de 15 manuels récents :

- 7 de troisième (édition 2008), codés 3A à 3G ;
- 4 de seconde (édition 2010), codés 2A à 2D ;
- 4 de première S (édition 2011), codés 1A à 1D.

J'ai pris en compte la nature de l'expérience aléatoire :

- lancer d'une pièce de monnaie (codé P1), de deux pièces simultanément (P2) ;
- lancer d'un dé cubique (D1), de deux dés simultanément (D2) ;
- tirage d'une boule d'une urne (B1), de deux boules simultanément (B2) ;
- tirage d'une carte dans un jeu (C1), de deux cartes simultanément (C2) ;
- rotation d'une roue de loterie (R) ;
- autre (X).

Je me suis aussi intéressé à la « dissymétrie » éventuelle des différentes issues, c'est-à-dire à leur non-équiprobabilité (codée NE), ainsi qu'à l'itération de l'expérience (codée I).

Les résultats sont rassemblés dans le tableau ci-après (tableau 2).

	3A	3B	3C	3D	3E	3F	3G	2A	2B	2C	2D	1A	1B	1C	1D
P	1	2		2	2	1	1,2		1,2			1		2	
D	1	1,2	1,2	1	1,2	1		1,2	1,2	1	1	1,2	1	1	1
B	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1
C	1				1		1		1	1	1	1	1		
R	1	1	1	1	1	1	1		1	1				1	1
X		X	X		X	X	X			X	X			X	X
NE			X		X		X	X	X	X	X		X		
I				X	X	X	X	X				X	X	X	X

Tableau 2

II.1. Commentaire sur les expériences aléatoires

Expériences aléatoires. Les deux exemples les plus fréquents sont, sans surprise, le tirage de boule(s) ou de jeton(s) d'une urne (15 sur 15) et le lancer de dé(s) (14 sur 15). Vient ensuite la rotation d'une roue de loterie (11 sur 15), qui me semble pourtant un objet moins familier des élèves (donc moins « prototypique »)³⁶. On ne trouve qu'ensuite un troisième groupe constitué du lancer de pièce(s) (9 sur 15) (univers trop restreint ?) et du tirage de carte(s) dans un jeu (8 sur 15), dont on pourrait penser a priori qu'ils sont plus familiers pour les élèves.

De façon non systématique sont présentés des exemples variés :

- dé icosaédrique,
- loto « familial »,
- mise en couples de danseurs,
- sexe de nouveau-nés,
- lancer de punaise,
- jeu de franc-carreau,
- réponses à un QCM, etc.

³⁶ On peut noter au passage que dans ce cas l'équiprobabilité est souvent justifiée par l'égalité des aires des secteurs, alors que c'est en fait la longueur des arcs de cercle qui est en jeu : l'index se déplace en effet selon le pourtour de la roue.

La plupart de ces expériences aléatoires peuvent se formaliser en tant qu'espaces probabilisés finis, constitués d'un ensemble (univers) Ω , de la tribu associée $\mathcal{P}(\Omega)$ et d'une loi de probabilité particulière : l'équiprobabilité sur Ω .

Cette omniprésence de l'univers fini peut s'expliquer par des raisons à la fois pratiques et théoriques : d'une part il est plus simple de manipuler des ensembles finis, et d'autre part on n'a pas à se poser la question des événements, puisque la tribu (implicitement) associée est toujours $\mathcal{P}(\Omega)$. C'est cette même préoccupation qui apparaît dans le programme de première S où figure la loi géométrique tronquée.

II.2. Commentaires

L'équiprobabilité est souvent justifiée (quand elle l'est) par des considérations de nature « géométrique » (par exemple des « symétries », au propre ou au figuré), et en utilisant des expressions codées « rituelles » (Parzysz, 1980) comme : dé ou pièce « bien équilibré(e) », « non pipé(e) », boules ou jetons « indiscernables au toucher », etc.

Malgré tout, on trouve dans les manuels le souci de prendre en compte la non-équiprobabilité, car elle est assez fréquemment attestée (8 sur 15), et ceci de deux façons différentes :

- soit la loi est donnée. Exemple : pièce truquée de façon que la probabilité d'obtenir pile soit double de celle d'obtenir face ;
- soit on part (souvent sans le dire) d'une équiprobabilité supposée qu'on va utiliser pour trouver la loi. Exemples : dé cubique dont une face est marquée 1, deux faces marquées 2 et trois faces marquées 3, roue de loterie dont les secteurs rouge et bleu ont chacun un angle de 90° , le secteur vert un angle de 60° et le secteur jaune un angle de 120° ...

La répétition d'une expérience aléatoire est, elle aussi, assez fréquente (9 sur 15), en liaison avec l'utilisation d'un arbre de probabilité, première étape de la modélisation.

III. LA MODÉLISATION

L'un des objectifs de l'enseignement des probabilités dans le secondaire est la construction de la notion de modèle probabiliste. Je me contenterai ici de renvoyer à l'article que j'ai publié récemment sur le sujet (Parzysz, 2011), dans lequel je reprenais le parallèle établi par Michel Henry entre la modélisation en probabilités et la modélisation en géométrie (Henry, 2009). En particulier, il signale la difficulté épistémologique de la distinction entre l'expérience réelle et le modèle théorique :

Souvent, [les] modèles nous sont tellement familiers que nous n'en voyons pas d'autres, et nous avons tendance à confondre ces représentations avec les objets idéaux en jeu, lesquels sont souvent confondus avec la réalité qu'ils modélisent.

Il distingue aussi la notion de modèle pseudo-concret :

On peut présenter un modèle par une analogie, en y introduisant des objets idéalisés de la réalité. (...) Nous parlerons alors de modèles « pseudo-concrets ». (...) [Un modèle pseudo-concret est] une sorte d'abstraction et de simplification de la réalité perçue

dans sa complexité, dans la mesure où certains choix sont faits pour ne retenir que ce qui semble pertinent de cette situation vis-à-vis du problème étudié.

En résumé, dans une approche des probabilités de type « fréquentiste »³⁷, la démarche part d'une perception du hasard fondée sur des expériences réelles et des actions qui leurs sont associées, qui amène à repérer des stabilités. Il s'agit ensuite de formaliser ces constatations en élaborant un protocole expérimental permettant d'assurer la répétition de l'expérience « dans les mêmes conditions » et de formuler des hypothèses sur les résultats qui peuvent survenir (paradigme P1). Puis on définit l'expérience aléatoire générique ainsi que la probabilité mathématique, et on étudie ses propriétés à l'aide d'outils mathématiques (paradigme P2). Enfin, on travaille dans P2 uniquement, en s'aidant éventuellement d'expériences réelles ou simulées.

Il existe, dans l'enseignement des probabilités, des expériences aléatoires à visée pédagogique destinées à introduire ou à illustrer des modèles classiques mais qui ne reflètent pas nécessairement de façon satisfaisante le phénomène réel. C'est le cas pour le modèle binomial, dont un modèle est celui de tirages successifs d'une boule dans une urne avec remise de la boule tirée, chaque boule ayant la même probabilité d'être obtenue. Une autre concrétisation de ce modèle est la « planche de Galton », dispositif constitué à la base d'une planche sur laquelle sont fixés des clous disposés en quinconce sous lesquels est placée une série de godets (fig. 1).

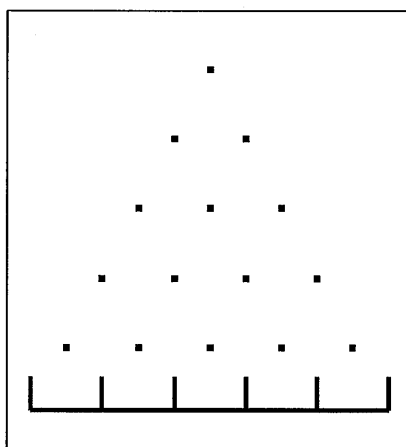


Figure 1. La planche de Galton

Lorsqu'on laisse tomber une bille au-dessus du clou supérieur, elle descend en rebondissant sur les clous et vient achever sa course dans l'un des godets. Lorsqu'on recommence avec un grand nombre de billes, leur répartition dans les godets est censée illustrer une répartition binomiale ayant pour paramètres le nombre de billes et la probabilité 1/2. L'explication fournie est que, lorsqu'une bille arrive sur un clou, elle a autant de chances d'aller vers la droite que vers la gauche. Mais une étude réalisée par Heinz Steinbring ((Steinbring 1986),

³⁷ C'est-à-dire dans laquelle la probabilité d'un événement lié à une expérience aléatoire apparaît comme limite de la fréquence d'apparition de cet événement à l'issue d'un grand nombre de répétitions de cette expérience.

voir également (Artigue & Parzysz 2003)) montre – et justifie – que le modèle binomial ne correspond pas à la réalité physique, puisque la bille qui arrive sur un clou (nécessairement par côté) a plus de chance de rebondir du même côté que de l'autre.

III. LA SIMULATION

Les programmes de lycée ont, depuis plusieurs années, fait de la simulation sur calculatrice et sur ordinateur un élément majeur de l'enseignement des probabilités et de la statistique, en liaison avec le développement des technologies de l'information et de la communication (TIC) au cours des dernières décennies.

Qu'est-ce que simuler une expérience aléatoire ? Trois points principaux ressortent de l'étude des manuels de seconde à ce sujet :

- « La simulation remplace l'expérience. » (coll. Repères, Hachette 2004)
- « Simuler une expérience aléatoire, c'est remplacer cette expérience par une autre, plus économe, plus rapide, et qui permet d'obtenir des résultats analogues. » (Belin 2000)
- « Pour simuler une expérience, on décrit l'expérience aléatoire et on la modélise : on choisit un modèle de tirage aléatoire de nombres qui doit avoir les mêmes propriétés que le phénomène simulé. » (coll. Abscisse, Magnard 2004)

Le document d'accompagnement de seconde précise même : « Formellement, simuler une expérience c'est choisir un modèle de cette expérience puis simuler ce modèle. ».

La situation peut être schématisée par le diagramme suivant (fig. 2) :

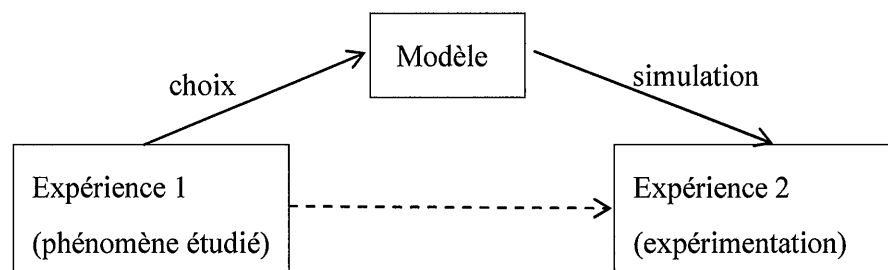


Figure 2. De l'expérience à sa simulation

Mais comment simuler lorsqu'on ne sait pas ce qu'est un modèle probabiliste, comme c'est le cas pour les élèves de ce niveau ? Ici aussi je me contenterai de renvoyer à un précédent article (Parzysz, 2009). La simulation probabiliste étant fondamentalement la simulation d'un modèle, il peut en effet sembler paradoxal de faire réaliser des simulations par des élèves qui abordent tout juste les probabilités. Je pense qu'on peut néanmoins y parvenir à partir de l'explicitation des conditions permettant la répétition de l'expérience (matérielle) considérée (voir ci-dessus). Il s'agit alors, pour le maître comme pour l'élève, de « traduire » ces conditions, aussi fidèlement que possible, dans le langage de l'outil technologique, c'est-à-dire de veiller à la congruence sémantique entre l'expérience réelle et l'expérience simulée. Pour prendre un exemple concret, on ne remplacera pas – tout au moins dans les débuts – la simulation du tirage simultané de deux boules d'une urne par celle de la succession de deux

tirages d'une boule, sans remise, même si un même modèle peut, dans la théorie, rendre compte aussi bien d'une expérience aléatoire que de l'autre.

Globalement, la démarche générale peut être visualisée par le schéma suivant (fig. 2) :

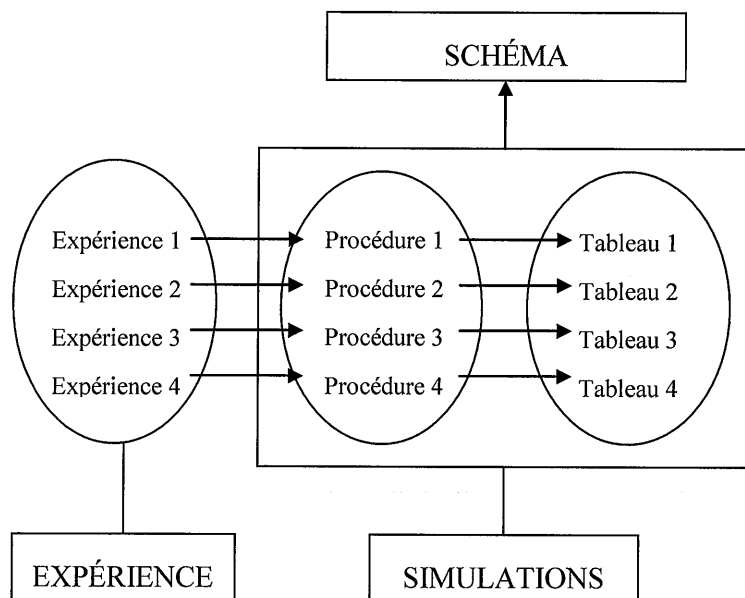


Figure 3. De l'expérience au schéma d'expérience

L'expérience réelle est simulée en utilisant une procédure implémentée dans le tableau, qui conduit à un tableau de nombres obtenu à partir du générateur pseudo-aléatoire³⁸ de l'ordinateur. Pour des expériences différentes, la comparaison des procédures via les tableaux peut amener – si les expériences correspondent à un même modèle – à repérer des similitudes entre les expériences et permettre d'identifier un même « schéma d'expérience », qui sera par la suite formalisé en un véritable modèle probabiliste. Dans ce processus, les expériences aléatoires étudiées seront a posteriori interprétées comme des exemples de ce modèle.

IV. CONCLUSION

Dans cette courte présentation j'ai simplement voulu mettre en évidence, d'une part les usages qui sont faits des exemples dans l'enseignement des probabilités au niveau du secondaire, et d'autre part le rôle que jouent – ou qu'ils pourraient jouer – les exemples dans le passage de l'expérience réelle au modèle théorique (notamment en liaison avec les lois classiques) et à leur simulation à l'aide des générateurs pseudo-aléatoires. Relativement à d'autres domaines qui sont « installés » depuis plus longtemps dans les programmes, la recherche didactique en probabilités est encore peu développée en France. Mais on peut espérer que, suite à la place

³⁸ Le générateur « aléatoire » de la machine est en réalité déterministe, puisque les nombres sont obtenus comme termes successifs d'une suite récurrente. Malgré tout, étant donné notamment la période extrêmement longue de cette suite, « tout se passe comme si » ces nombres résultaient d'une procédure aléatoire. Voir par exemple (Parzysz, 2005).

de plus en plus importante que prend ce domaine dans l'enseignement secondaire, un plus grand nombre de travaux apparaissent, menés éventuellement en articulation avec des disciplines connexes (sciences physiques, biologie...).

BIBLIOGRAPHIE

ARTIGUE, M. & PARZYSZ, B. (2003). Causalités et dépendances, quelle place dans les recherches en didactique des mathématiques ? *Enquête sur le concept de causalité* (coordonné par L. Viennot et C. Debru), 115-143. PUF, coll. Science, histoire et société.

BALACHEFF, N. (1987). Processus de preuves et situations de validations. *Educational Studies in Mathematics* 18, 147-176.

HENRY, M. (2009). L'introduction des probabilités au lycée, un processus de modélisation comparable à celui de la géométrie. *Repères-IREM* 36, 15-34.

Ministère de l'Education nationale (2000). *Mathématiques, classe de seconde*. Série Accompagnement des programmes.

PARZYSZ, B. (2005). Quelques questions à propos des tables et des générateurs aléatoires. *Statistique au lycée* vol. 1 (coordonné par B. Chaput & M. Henry), 181-199. Ed. APMEP / ADIREM.

PARZYSZ, B. (2009). Des expériences aléatoires au modèle, via la simulation. *Repères-IREM* 74, 91-103.

PARZYSZ, B. (2011). Quelques questions didactiques liées au domaine de l'aléatoire. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives* 16, 127-147.

ROSCH, E. (1973). Natural categories. *Cognitive psychology* 4, 328-350.

ROWLAND, T. (2008). The purpose, design and use of examples in the teaching of elementary mathematics. *Educational Studies in Mathematics* 69(2), 149-163.

STEINBRING, H. (1986). L'indépendance stochastique. Un exemple de renversement du contenu intuitif d'un concept et de sa définition mathématique formelle. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7/3, 5-50.

L'étude des exemples dans des manuels de chimie : un révélateur d'intentions didactiques ?

Isabelle Kermen & Nicolas Décamp

I. INTRODUCTION

Alors que le traitement et le rôle des exemples est un thème de recherche largement exploré en didactique des mathématiques (cf. Bills et Watson, 2008) et dans une moindre mesure en didactique de la physique (cf. Brown, 1992), une étude bibliographique préalable nous a amenés à constater que c'était un domaine vierge en didactique de la chimie. Il n'existe en effet dans la littérature que quelques articles traitant de l'effet de motivation qui peut être attendu lors d'illustrations ou d'exemples tirés de la vie courante ou de pratiques de référence (cf par exemple Bulte et al. 2006) mais il n'existe pas d'étude spécifique des liens entre l'introduction d'un concept et le rôle, le choix et le traitement des exemples qui sont apportés pour aider à sa définition et à sa compréhension. Dès lors, nous avons pris le parti de mener par nous-mêmes une étude exploratoire en nous attachant à décrire l'utilisation qui est faite des exemples dans les manuels de terminale S et en nous focalisant sur un chapitre, celui de l'introduction des transformations non totales, chapitre dont les enjeux didactiques ont été étudiés antérieurement au sein du Laboratoire de Didactique André Revuz (Kermen, 2007 ; Kermen et Méheut, 2008 ; Négrier et Kermen, 2011).

Dans une première partie nous présentons le contenu disciplinaire en question, le situons dans le programme et précisons les difficultés mises en évidence par une étude précédente (Van Driel et al, 1998). Nous recherchons les effets de transposition didactique à la fois dans le programme et dans les manuels. Nous introduisons ensuite notre grille d'analyse des manuels, les questions auxquelles nous souhaitons répondre et enfin les résultats de notre enquête, avant de proposer une synthèse.

II. LES TRANSFORMATIONS NON TOTALES : PROGRAMME DE TERMINALE S ET ENJEUX DIDACTIQUES

II.1. Les transformations non totales dans le programme de terminale S

En classe de terminale S, l'introduction des transformations chimiques non totales (TnT) correspond au premier des quatre chapitres de la deuxième partie du programme (« La transformation d'un système chimique est-elle toujours totale ? »). Jusqu'ici les élèves n'ont étudié et rencontré que des transformations chimiques totales (TT) qui donnent lieu à la disparition complète d'une espèce chimique au moins (le réactif limitant) et à la formation d'une ou plusieurs nouvelles espèces chimiques. En termes quantitatifs cela se traduit par le fait que la grandeur avancement de réaction prend dans l'état final du système une valeur particulière : l'avancement maximal. Dans la première partie du programme de terminale la confrontation à des transformations chimiques lentes et d'autres plus ou moins rapides a été l'occasion d'introduire la notion de vitesse de réaction. Dans la deuxième partie du

programme, l'objectif affiché « est de faire découvrir qu'une transformation chimique n'est pas toujours totale ». Il s'agit de mettre en évidence expérimentalement que l'avancement final est inférieur à l'avancement maximal dans une expérience donnée. Les auteurs du programme poursuivent leurs commentaires « Les exemples sont pris dans le domaine des réactions acido-basiques, ce qui justifie l'introduction du pH et de son outil de mesure, le pH-mètre. Cette situation, nouvelle pour l'élève, amène à modifier l'écriture de la réaction chimique pour rendre compte qu'elle s'effectue dans les deux sens ». Cette dernière formulation, que nous pensons malencontreuse, va se retrouver malheureusement dans des manuels comme nous aurons l'occasion de le souligner un peu plus tard (cf. parties III et IV). Les auteurs du programme ajoutent : « un retour sur le niveau microscopique permet d'interpréter l'état final du système comme un état d'équilibre dynamique et non comme un état figé, comme la simple observation pourrait le suggérer » (BOEN, 2001, p.98) – ce dernier commentaire est, lui, pertinent, contrairement au précédent.

II.2. Les transformations non totales : enjeux didactiques

Van Driel et al. (1998) ont étudié les réactions d'élèves de seconde en petits groupes (pour susciter leur expression) lors de l'introduction de transformations chimiques non totales au moyen d'expériences qualitatives et visuelles (mettant en jeu des changements de couleur). Ils ont montré qu'il fallait porter attention à deux points particuliers :

- Le premier de ces deux points est que l'idée qu'une transformation chimique puisse ne pas être totale ne va pas de soi. Pour mettre en évidence cet effet l'expérience proposée est la suivante : dans une première étape les élèves mélangent deux réactifs (ions fer(III) et ions thiocyanate), ce qui donne lieu à la formation d'un complexe thiocyanatofer(III) de couleur rouge. Dans une deuxième étape, les élèves sont amenés à rajouter des ions fer(III) au mélange rouge obtenu et constatent qu'il devient plus foncé. Cela les conduit à dire qu'il restait des ions thiocyanate et que le réactif limitant était donc les ions fer(III), leur schéma de raisonnement spontané étant basé sur l'idée que la transformation est totale. Dans une troisième étape on leur demande de prévoir ce qu'il va se passer si on ajoute des ions thiocyanate, et leur surprise est grande après réalisation de l'expérience car ils constatent que la solution devient encore plus rouge contrairement à ce qu'ils prévoyaient. Malgré un nouvel essai, ils doivent se rendre à l'évidence, ils n'ont pas fait d'erreur de manipulation et font part de leur incompréhension.
- Le deuxième aspect mis en exergue par cette étude concerne le fait que les élèves conçoivent difficilement qu'on puisse réaliser une transformation chimique qui redonne les mêmes espèces que celles qui étaient présentes initialement dans le système avant une première transformation chimique, ce qu'on résume en disant que les élèves refusent l'idée qu'il puisse se produire une transformation dans le sens inverse du sens initial. Ils ne conçoivent pas qu'ayant fait réagir de l'eau avec un complexe chloré du cobalt (donnant une couleur bleue au mélange) et ayant obtenu une couleur rose due à un complexe aqueux du cobalt, il puisse se reformer de l'eau et le complexe chloré si on ajoute des ions chlorure au mélange rose.

III. QU'ATTENDRE DES EXEMPLES DANS LES MANUELS ?

Étant donné que le programme incite à partir des expériences pour aboutir à la notion d'état d'équilibre d'un système chimique et qu'il y a deux aspects dans la progression des idées à prendre en compte chez les élèves (Van Driel et al., 1998), notre idée de départ est de voir comment les exemples sont utilisés dans les manuels, si effectivement les auteurs de manuels considèrent deux étapes et si les exemples utilisés permettent par induction une généralisation de ce qui a été établi. Nous construisons par conséquent une grille d'analyse prenant appui sur deux étapes dont nous préciserons les implications.

Dans la première étape nous regardons si deux exemples (au moins) différents de TnT sont proposés pour, en fait, jouer un rôle de contre-exemple dans la classe des TT. Un exemple pris dans le champ des transformations acido-basiques, tel que celui de l'acide éthanoïque et de l'eau ne peut être étudié que par des mesures de pH, d'abord celui de l'eau puis celui du mélange. Le traitement des données numériques permettra d'accéder à la valeur de l'avancement final. Un autre exemple peut être choisi qui correspond à une modification comportant un aspect visuel.

Dans une deuxième étape, nous examinons si les manuels proposent une transformation chimique dans le sens inverse de l'une des équations de réaction écrites précédemment lors des exemples traités. À nouveau cela peut s'effectuer avec mesures de pH. Si l'on reprend l'exemple cité précédemment, cela conduit à prendre de l'acide chlorhydrique dont on mesure le pH et auquel on rajoute des cristaux d'éthanoate de sodium ; on effectue la mesure du pH après dissolution des cristaux.

Si on veut faire une induction qui ait du sens, il est préférable de fournir plusieurs exemples, qui sont ici des contre-exemples pour les élèves qui sont encore dans le champ expérimental des TT. Pour commencer on peut vouloir traiter deux exemples de TnT interprétables par le même couple de réactions chimiques inverses, ne serait-ce que pour voir qu'il ne s'agissait pas d'une mesure fortuite et que toute une famille de transformations chimiques non totales est interprétable par la même paire de réactions inverses tout comme dans les classes antérieures il a été vu qu'une famille de transformations chimiques totales est interprétable par une même réaction chimique.

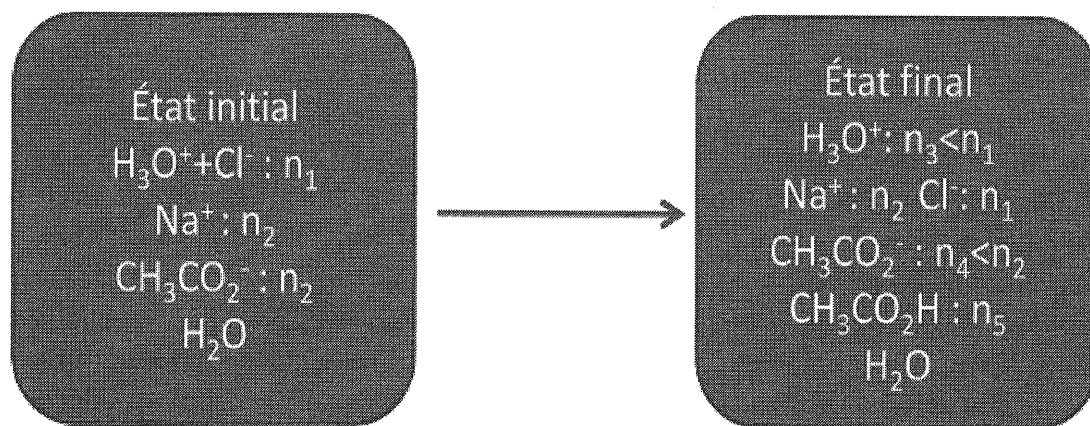


Figure 1. Exemple d'état initial et état final lors d'une transformation chimique entre de l'acide chlorhydrique et des cristaux d'éthanoate de sodium

Attardons-nous quelques instants sur le schéma de la figure 1, qui représente l'état initial et l'état final du système dans la transformation chimique entre l'acide chlorhydrique et les cristaux d'éthanoate de sodium, pour en tirer quelques implications. Il s'agit d'une transformation chimique non totale, puisqu'il reste des ions oxonium (on accède à leur concentration à partir de données expérimentales) et par voie de conséquence des ions éthanoate. Quelle réaction peut-on proposer pour modéliser ce phénomène : $\text{H}_3\text{O}^+ + \text{CH}_3\text{CO}_2^- \rightarrow \text{CH}_3\text{CO}_2\text{H} + \text{H}_2\text{O}$ ou $\text{CH}_3\text{CO}_2^- + \text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{CH}_3\text{CO}_2\text{H} + \text{HO}^-$? La question est rapidement tranchée puisque le milieu n'est pas basique. Ensuite c'est la modélisation d'une transformation non totale par une seule réaction chimique qui n'est plus adaptée. Jusqu'ici les transformations chimiques totales étaient modélisées par une réaction chimique, pour laquelle la question du sens ne se posait pas puisqu'il était identique à celui de la transformation. Pour les TnT, il convient de modéliser avec deux réactions, inverses l'une de l'autre, deux modèles différents, qui certes mettent en jeu les mêmes espèces chimiques mais pas dans le même rôle, les unes sont les « réactifs » dans la réaction directe (elles sont consommées) et les « produits » dans la réaction inverse (elles sont formées) les autres jouent un rôle opposé. Il est essentiel de parler de deux réactions inverses comme l'ont souligné Pedrosa et Dias (Pedrosa & Dias, 2000) sous peine de susciter des incompréhensions ou des idées fausses. Notre travail (Kermen & Méheut, 2008, 2009) a montré que certaines explications d'élèves étaient de ce fait très contradictoires.

Le programme lui-même, cité plus haut, marque bien le premier point, le fait que toutes les transformations chimiques ne sont pas totales, mais semble beaucoup moins rigoureux, sur le second point, concevoir qu'une transformation inverse soit possible et la conséquence fondamentale que cela implique, une modification du modèle utilisé jusqu'ici. La modification du modèle des TT que nécessite l'introduction des TnT n'est pas du tout mise en exergue (Kermen, 2007). Il y a même une regrettable coquille, « la réaction dans les deux sens » (voir ci-dessus). À travers l'étude des exemples que donnent les manuels nous essaierons de caractériser la transposition didactique que les auteurs de manuels opèrent. Plus précisément nous considérons les exemples comme révélateurs ou indicateurs des intentions didactiques implicites des auteurs de manuels. Nous étudions les exemples au travers de deux questions :

- Comment les transformations non totales sont-elles introduites ?
- Comment une transformation dans le sens inverse est-elle introduite ?

Le corpus étudié est constitué de 9 manuels de chimie de terminale S, cinq édités en 2002, trois en 2006 et un en 2007, ces quatre derniers étant des rééditions. Dans ces manuels, nous avons consulté le chapitre correspondant à l'introduction des transformations chimiques non totale également libellé notion d'équilibre chimique par certains manuels.

Pour répondre à la première question, nous examinons le nombre et la nature des exemples proposés et la présentation de l'aspect quantitatif. En effet pour qualifier une transformation chimique de non totale, il est déterminant de montrer que l'avancement final est inférieur à l'avancement maximal et de savoir quelle confiance accorder aux valeurs issues des mesures. Pour la deuxième question nous regardons la nature et le nombre des exemples présentés en

notant s'il est effectivement proposé une transformation par mélange des espèces obtenues lors d'une transformation « directe » précédente.

IV. RÉSULTATS ET DISCUSSION

IV.1. Comment les transformations non totales sont introduites

IV.1.1. Le qualitatif : les exemples permettent-ils d'aider à définir une nouvelle classe de transformations ?

Nous avons rassemblé les différents décomptes que nous avons faits dans le tableau 1 ci-dessous. Nous avons trouvé des exemples dans les neuf manuels examinés et nous les avons regroupés dans trois catégories (activités introductives, cours et TP) qui correspondent à trois rubriques figurant dans les manuels (dans cet ordre chronologique au sein du chapitre) mais aussi à trois fonctions des exemples, introduire, expliquer et appliquer-illustrer. Cette structuration du chapitre en activité introductive puis développement du cours et présentation d'un protocole de travaux pratiques avec des résultats de mesures se retrouve dans huit des neuf manuels examinés.

		Activités introductives (8)	Cours (9)	TP (8)
Nature et fréquence des exemples	Acide - base	CH ₃ COOH 5/8 HCl 3/8 NH ₄ ⁺ 1/8 HCO ₃ ⁻ 1/8	CH ₃ COOH 9/9 HCl 4/9 NH ₄ ⁺ 1/9 benzoïque 1/9	CH ₃ COOH 7/8 HCl 3/8 NH ₄ ⁺ 2/8 HCOOH 3/8 sulfamique 1/8
	Autres	Précipitation de PbI ₂ 1/8	Précipitation de PbI ₂ 1/9	

Table 1. Les différents exemples introduisant les transformations non totales dans les manuels. Une majorité de transformations acido-basiques.

Ce tableau 1 appelle plusieurs remarques.

Tout d'abord tous les manuels sauf un, se limitent à des transformations acido-basiques. Les autres types de transformations non totales, d'oxydoréduction par exemple seront vues plus tard dans un autre chapitre. Cette absence de diversité quoique conforme aux recommandations du programme nous semble dangereuse : on crée une nouvelle classe de transformations (les TnT) en choisissant tous les exemples dans une même classe de transformations déjà connue et identifiable par les élèves (les transformations acido-basiques). Un manque d'attention des enseignants à cet instant crucial pourrait conduire à un brouillage entre ces deux catégories et pourrait conduire certains élèves à en conclure abusivement que seules les transformations acido-basiques peuvent être non totales.

Les exemples figurant dans les activités introductives ne sont pas toujours développés. Ces activités sont pour la plupart présentées sous forme de questions laissées sans réponses (peut-être en vue de la possibilité d'une utilisation immédiate par l'enseignant) et les exemples ne sont pas systématiquement repris dans le cours, donc pas explicités.

Par ailleurs, hormis la limitation aux transformations acido-basiques déjà évoquée, notons que les exemples traités sont peu variés. Tous les manuels utilisent par exemple l'acide éthanóïque (sans que le mot vinaigre soit écrit pour désigner sa solution aqueuse). Peut-être faut-il y voir la marque de contraintes institutionnelles (le coût des composés chimiques, leur absence de dangerosité à la fois pour les élèves et l'environnement, quid de l'iodure de plomb ?), de contraintes expérimentales (leur disponibilité dans un laboratoire courant [si un manuel propose des composés exotiques ou chers, il peut ne pas être choisi par les enseignants et par voie de conséquence pas acheté par les élèves] et leur usage dans plusieurs expériences, leur facilité d'emploi).

Cinq manuels ne font pas de comparaison entre une transformation totale et une transformation non totale. La seule donnée d'un contre-exemple suffirait-elle à définir une nouvelle classe de transformations ? Un seul face à un très grand nombre ?

Dans les TP qui figurent après le cours, certes il s'agit de réinvestir les notions toutes récentes qui viennent d'être abordées et notamment de proposer deux transformations chimiques modélisées par un même couple de réactions chimiques donc une même équation, ce qui n'est jamais abordé dans le cours. Cependant à chaque fois il est demandé de faire des dilutions de solutions d'un acide faible, donc de travailler des compétences expérimentales générales, ce qui peut apparaître comme une contrainte qui serait due à la proximité de l'examen et à une validation des compétences expérimentales en fin de terminale. Le terme de dilution est par ailleurs employé sans précautions particulières or il a été employé jusqu'alors pour des solutions où cela avait pour conséquence de diviser la concentration en soluté apporté et la concentration effective des solutés par un même facteur. Dans le cas d'un acide fort (totalement dissocié dans l'eau, par exemple l'acide chlorhydrique) la concentration en acide apporté comme la concentration en ions oxonium sont divisées par dix si on dilue la solution dix fois. Dans le cas des acides faibles (partiellement dissociés dans l'eau), la concentration en soluté apporté est divisée par dix si on dilue dix fois, mais ni la concentration effective en acide, ni celle en ions oxonium ne sont divisées par dix, car le solvant cette fois ne réagit pas totalement avec l'acide. Cette différence est probablement en partie masquée pour les élèves dans la mesure où le même terme de dilution est employé dans les deux situations. On peut dire qu'il y a ici tension entre l'apprentissage d'une nouvelle notion et l'atteinte des objectifs évalués au bac.

IV.1.2. Le quantitatif : quelle attention prêter à la mesure du pH ?

La mesure du pH est diversement traitée or cette question est centrale si on veut établir un critère quantitatif permettant de distinguer TT et TnT. Deux manuels sur neuf n'y portent aucune attention particulière. Trois manuels donnent des valeurs de pH à 0,01 unité près et les concentrations (des ions oxonium) avec deux chiffres significatifs seulement, ce qui est contradictoire. Enfin quatre manuels sur neuf proposent un encadrement ou une valeur de

concentration avec une incertitude, ce qui semble plus compatible avec une pratique expérimentale réaliste. « Toute mesure est le tirage d'une variable aléatoire » (Treiner, 2011).

Prenons le cas du manuel de la collection Hélios, de l'éditeur Hachette. En page 66 la photo d'un pHmètre où on voit distinctement 3,40 sur l'affichage à cristaux liquides est mise en regard d'un texte où il est écrit « on lit $\text{pH}=3,4$ ». Il s'ensuit un calcul de la concentration en ions oxonium avec deux chiffres significatifs. Dans le même ouvrage en page 16, figure un conductimètre avec un affichage à trois chiffres significatifs et une recommandation, sélectionner la gamme de mesure permettant d'obtenir la meilleure précision, soit le plus grand nombre de chiffres significatifs. Que peut comprendre un élève ? Certainement pas que ce traitement différent est dû à la relation logarithmique entre le pH et la concentration en ions oxonium. D'autres manuels au contraire font un (seul) calcul pour montrer que c'est bien la forme de la relation entre le pH et la concentration en ions oxonium qui est à l'origine de cette recommandation sans toutefois l'assortir de plusieurs exemples à l'appui, c'est une généralisation rapide qui est proposée (Durupthy, 2002, p.105).

La présentation du critère selon lequel une transformation est totale ou non est aussi variable selon les manuels. Cinq manuels sur neuf annoncent qu'une transformation est totale si le taux d'avancement final τ vaut 1 ou 1,00 ; deux autres proposent 1,0 ou n'en parlent pas, les deux derniers écrivent proche de 1 ou compris entre 0,9 et 1.

Au final, c'est l'aspect expérimental qui est malmené, car en l'absence de barres d'incertitudes comment montrer que la valeur obtenue pour l'avancement dans l'état final n'est pas la valeur attendue (l'avancement maximal qui est calculé a priori) et que cet écart est significatif ?

IV.2. Comment les transformations dans le sens inverse sont introduites :

IV.2.1. Le cas le plus général : un déplacement d'équilibre

En réponse à la deuxième question que nous nous sommes posés concernant l'utilisation des exemples dans les manuels un constat s'impose : l'introduction d'une transformation dans le sens inverse de celle qui a été étudiée précédemment se fait par déplacement d'équilibre chimique dans sept manuels sur neuf (voir tableau 2) et non par simple mélange des espèces produites lors d'une précédente transformation. En effet la plupart des manuels reprennent l'état final du système après une première évolution et proposent d'ajouter une quantité déterminée de l'une des espèces qui vient de se former.

Type de transformation	Activités introductives (8)	Cours (9)	TP (8)
En partant des espèces formées lors d'une précédente transformation	2/8 (Hatier, Nathan 2002)	1/9 (Hatier)	1/8 (Bordas 2007)
Par perturbation du système à l'équilibre	4/8	7/9	1/8

Table 2. L'introduction d'une transformation dans le sens inverse se fait majoritairement dans les manuels par déplacement d'équilibre

Malgré une approche en deux temps conforme à l'esprit du programme, TnT puis transformation dans le sens inverse, les auteurs n'ont semble-t-il pas totalement intégré tous

les changements induits par ce programme, il s'agit d'étudier l'évolution de systèmes a priori quelconques dans leur composition et non pas résultant de la perturbation d'un état d'équilibre chimique. Ce dernier point de vue était l'objet d'un très grand nombre d'exercices dans l'enseignement supérieur et d'un non moins grand nombre de sujets d'enquêtes didactiques. On peut en outre signaler que dans l'ancien programme le terme équilibre avait une signification pas toujours très claire qu'on peut rapprocher du sens actuel du terme transformation qui laisse imaginer qu'une certaine confusion entre les termes transformation et équilibre perdure. La citation suivante peut aider à faire comprendre ces craintes.

« la transformation chimique entre l'acide éthanóique et l'eau s'interprète au niveau microscopique, comme une situation d'équilibre entre les molécules d'acide éthanóique, de solvant et les ions éthanóate et oxonium » (Hachette, collection Hélios, 2002, p. 68). Une transformation ne peut être considérée comme une situation d'équilibre, c'est l'essence même du mot transformation qui est alors remise en question.

		Activités introductives (8)	Cours (9)	Activité documentaire (9)
Nature et fréquence des exemples	Acide - base	Ethanóique /éthanóate 4/8 Benzoíque / benzoate 1/8 Benzoíque / benzoate et méthanoíque/méthanoate 1/8 Hydrogénocarbonate 1/8	Éthanóique / éthanóate 9/9 Benzoíque/benzoate et méthanoíque/méthanoate 1/9	
	Autres	CuSO ₄ anhydre ou pas 1/8	Synthèse NH ₃ 1/9 CuSO ₄ anhydre ou pas 1/9 Ozone et NO 1/9	Synthèse NH ₃ (éq. dynamique) 3/9

Table 3. Les exemples de transformation dans le sens inverse dans les différents manuels

Huit manuels instituent la notion de transformation dans le sens inverse d'une précédente transformation à partir d'un seul exemple (voir tableau 3), et parlent de « la réaction dans les deux sens » ou de la transformation dans les deux sens. Ce dernier point est un corollaire de cette étude sur la façon dont les exemples sont utilisés. Cependant il est révélateur d'une certaine incompréhension des intentions didactiques des auteurs de programme comme cela a été montré par ailleurs (Négrier & Kermen, 2011). En écho à cette étude nous proposons quelques citations que nous discutons ensuite.

Quelques citations :

- « la réaction mise en jeu peut donc s'effectuer dans les deux sens. (Hachette, Durupthy, 2002, p.107)

- « lorsqu'une transformation chimique n'est pas totale, la réaction associée peut s'effectuer dans les deux sens » (Nathan, 2002, p.101)
- « on remarque que les équations (1) et (2) sont inverses l'une de l'autre la transformation chimique peut donc avoir lieu dans les deux sens » (Hachette, collection Hélios, p.67)
- « lorsqu'une transformation chimique se produit simultanément dans les deux sens, l'état final est un état d'équilibre chimique ». (Nathan, 2006, p.110)
- « [les volcans sous-marins] sont le siège de deux transformations inverses :
- $\text{H}_2\text{S}_{(\text{aq})} + \text{H}_2\text{O}_{(\text{l})} = \text{HS}^-_{(\text{aq})} + \text{H}_3\text{O}^+_{(\text{aq})}$ » (Bordas, 2007, p.86)
- « la transformation chimique étudiée, dont l'avancement final est différent de l'avancement maximal, peut évoluer dans les deux sens » (Bordas, 2002, p.107)
- « dans un état d'équilibre dynamique, les deux transformations inverses se produisent à vitesses égales » (Bordas, 2007, p.86)

Nous avons déjà expliqué l'inconvénient de la première formulation, quant à la seconde (« la transformation dans les deux sens ») elle révèle autre chose. Ces auteurs emploient le terme transformation en lieu et place du terme réaction, parfois en considérant deux « transformations » (cf Bordas 2007). Il suffirait dans ce dernier cas de remplacer le terme « transformation » par le terme « réaction » pour que le propos soit correct. Une transformation étant définie comme le passage d'un état du système à un autre elle n'a qu'un sens. Certes lorsqu'on se pose la question de savoir dans quel sens le système est susceptible d'évoluer en référence à une équation de réaction, on peut proposer un sens ou l'autre, donc deux sens potentiels, mais in fine un seul sens se réalise, lorsque les quantités des espèces écrites d'un côté de l'équation de réaction augmentent, ou aucun s'il est déjà à l'équilibre chimique.

IV.2.2. Un exemple particulièrement peu pertinent...

Les exemples montrant des transformations dans le sens inverse sont pour la plupart eux aussi des exemples acido-basiques. Le manque de diversité des exemples traités est probablement une marque de la contrainte que constitue la préparation au bac, il s'agit d'habituer les élèves à rencontrer les mêmes objets.

Mais voici au détour d'un manuel (figure 2), un exemple hors du champ des transformations acido-basiques : la déshydratation d'un morceau de sulfate de cuivre. Malheureusement cet exemple ne répond pas au cahier des charges...

Application 2 Le sulfate de cuivre anhydre $\text{CuSO}_4(\text{s})$ est un solide blanc. Mis en présence d'un peu d'eau, il se transforme en sulfate de cuivre hydraté ($\text{CuSO}_4 \cdot (\text{H}_2\text{O})_5(\text{s})$), solide bleu (document 14). Ce solide, une fois placé à l'étuve à 120°C ou sur une plaque chauffante redevient blanc, et l'opération peut être recommencée indéfiniment. Écrire les équations de réaction qui se produisent.

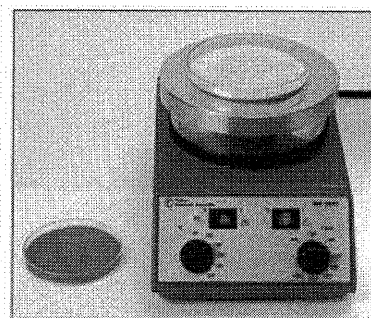
RÉPONSE : Lors de l'addition d'eau, on a :



Lors du chauffage du solide obtenu on a :



La réaction peut s'effectuer dans les deux sens.



14 La transformation du sulfate de cuivre anhydre en sulfate de cuivre hydraté peut s'effectuer dans les deux sens.

Figure 2. Un exemple de transformation dans le sens inverse hors du champ des transformations acido-basiques selon Nathan 2006, p109.

Lors du chauffage du solide bleu (sulfate de cuivre hydraté), il y a formation de solide blanc (sulfate de cuivre anhydre) et d'eau vapeur. On relève une première inexactitude dans la modélisation qui est faite puisque l'eau est indiquée dans l'écriture de la réaction à l'état liquide (l). Le deuxième problème pour cet exemple est que l'atmosphère étant illimitée, la vapeur s'échappe, il ne peut donc pas y avoir situation d'équilibre chimique à la fin. En effet, dans une situation d'équilibre chimique toutes les espèces mises en jeu dans la transformation, donc écrites dans l'équation de réaction doivent être présentes. Enfin, la transformation « inverse » présentée correspondant à l'hydratation effectuée avec de l'eau liquide conduit souvent à une solution et non à un solide, mais de toute façon ne s'interprète pas par une équation de réaction inverse de la précédente puisqu'il s'agit d'eau liquide et non vapeur...

IV.2.3. Mention d'analogies

Pour terminer signalons également la présence de quelques analogies dans les manuels. Ces dernières apparaissent toutes pour « expliquer » l'état d'équilibre, et sont essentiellement présentes dans les activités introductives. Leur but semble n'être que de « faire image » et d'introduire l'idée que l'état d'équilibre est dynamique : le système chimique présente une apparence macroscopique inchangée alors que les échanges microscopiques sont constants mais « se compensent » les uns les autres. Ainsi, les situations présentées dans ces analogies sont diverses mais la philosophie générale est la même : il peut s'agir de lapins de garenne qui se reproduisent et meurent au même taux la population globale restant constante, de burettes qui se vident et sont remplies au même débit, leur volume global restant constant ou de voitures passant d'une île A à une île B au même rythme que de l'île B à l'île A, le nombre de voitures sur chaque île étant là aussi constant.

Comme on le voit le parallèle avec les phénomènes chimiques est ici assez vague. S'il est vrai que la réaction dans le sens direct et celle dans le sens indirect ont la même vitesse lors d'un équilibre chimique, de nombreuses caractéristiques du phénomène chimique ne sont pas présentes. Pour n'en citer que deux :

- le système n'est pas un système fermé dans le cas des lapins de garenne ou des burettes.
- il n'y a pas d'équivalent simple à la conservation des éléments chimiques ou à la modification des substances (quelle que soit l'analogie présentée).

III. CONCLUSION

Récapitulons ici les principaux résultats que cette étude exploratoire a mis en évidence.

Le premier constat est qu'il y a bien peu de diversité dans les exemples traités. Cette absence de diversité est telle qu'elle pourrait mettre en danger la définition même de la catégorie que l'on cherche à définir. Cette uniformité s'explique dans le chapitre étudié par de nombreuses contraintes extérieures : les contraintes institutionnelles (le programme précise qu'il faut s'intéresser à des réactions acido-basiques), les contraintes matérielles (l'acide éthanóïque est d'usage courant, économique, peu polluant), les contraintes liées à la mesure (le pHmètre est un instrument de mesure plus spécifique que le conductimètre puisqu'il indique la concentration en ions oxonium alors que la conductivité d'une solution est liée à l'ensemble des ions présents), etc.

Cependant, lorsqu'aucune de ces contraintes extérieures ne semble s'imposer, l'étude des exemples peut sans doute, dans certains cas, servir de révélateur d'intentions didactiques implicites. En effet, le choix systématique de certains exemples non-génériques parmi l'univers des exemples possibles ne peut qu'attirer l'attention du didacticien. Plus précisément, dans cette étude il ne nous semble pas anodin que l'ensemble des manuels introduise les transformations dans le sens indirect par déplacement d'équilibre ce qui ne constitue justement pas un exemple générique mais un cas particulier. Les motivations précises d'un tel choix demanderaient à être étudiées plus en profondeur, mais si on combine ce résultat aux nombreuses incorrections relevées dans la formulation des explications, on ne peut que s'interroger sur la bonne compréhension des représentations symboliques voire des modèles sous-jacents aux TnT par les auteurs de manuels.

Un autre résultat mis en évidence lors de notre étude est que dans de nombreux manuels de chimie, les généralisations sont menées à partir d'un seul exemple. Là encore la définition de la catégorie s'en trouve affectée, mais cela pose également des problèmes quant à la nature de la science (en particulier pour l'induction).

Enfin, il apparaît que les aspects quantitatifs sont bien souvent malmenés. Dans le chapitre choisi, de tels aspects sont pourtant cruciaux puisque la différence entre TT et TnT se fait sur la base de la comparaison de deux nombres (l'avancement final et l'avancement maximal). On ne peut donc que regretter que la plupart des exemples de calculs de pH soient menés sans justification complète vis-à-vis de la mesure.

BIBLIOGRAPHIE

BARDE, N., BARDE, M., BESNARD, V., CAILLET, D., COUTURE, E., & JACKEL, L. (2002). Collection Hélios, *Chimie Term S*. Paris : Hachette.

BILLS, L. & WATSON, A. (2008). Editorial introduction of the role and use of examples in mathematics education, *Educational Studies in Mathematics*, 69, 2, 77-79.

Bouvry, O., Fort, L., Juillard-Condât, A., Langrand, C., Lévy, N., Pierens, É., Pierens, P., Prévost, V. (2006). *Chimie terminale S*, collection Sirius. Paris : Nathan.

- BROWN, D.E. (1992), Using examples and analogies to remediate misconceptions in physics : Factors influencing conceptual change, *Journal of Research in Science Teaching*, 29, 17-34.
- BULTE, A.M.W., WESTBROEK, H.B., DE JONG, O., & PILOT, A. (2006), A research approach to designing chemistry education using authentic practices as contexts, *Int. J. Sci. Educ.*, 28(9), 1063-1086.
- CLAVEL-MONIN, C., LE MARÉCHAL, J.-F., MESBAH, N., MIGUET, A.-M., PRAT, C., PRUVOT, H., THORAL, J. & VASSEUR, K. (2002). *Chimie Terminales S Obligatoire*. Paris : Hatier.
- DECROIX, S., CARIAT, T., GROUX, G., LE CAMUS, F., MARGARIT, A., MORIN, J.-L., RAVAILLE, A., SERRANO, S., SIMON, L. (2007). *Chimie Terminale S Obligatoire*. Paris : Bordas.
- DURUPTHY, A. (dir.) (2006). *Chimie Terminale S*. Paris : Hachette.
- DURUPTHY, A., DURUPTHY, O., FANGUET, M., FANGUET, R., GIACINO, M., & JAUBERT, A. (2002) *Chimie Term S*. Paris : Hachette.
- KERMEN, I. (2007). *Prévoir et expliquer l'évolution des systèmes chimiques*. Thèse de didactique des disciplines, Université Paris Diderot.
- KERMEN, I. & MÉHEUT, M. (2009). Different models used to interpret chemical changes: analysis of a curriculum and its impact on French students' reasoning, *Chem. Educ. Res. Pract.*, 10, 24-34.
- KERMEN, I. & MÉHEUT, M. (2008). Mise en place d'un nouveau programme à propos de l'évolution des systèmes chimiques : impact sur les connaissances professionnelles d'enseignants, *Didaskalia*, 32, 77-116.
- MEN (2001). *Bulletin officiel de l'Éducation nationale*. Paris, hors série n° 4.
- NÉGRIER, M. & KERMEN, I. (2011). Quelle adéquation entre intentions didactiques d'un programme de chimie et des manuels scolaires ? *Recherches en didactique des sciences et des technologies*, n°4, 163-194.
- PARISI, J.-M. (dir.) (2006). *Chimie Terminale S*. Paris : Belin.
- PEDROSA, A. & DIAS, H., (2000), Chemistry textbook approaches to chemical equilibrium and student alternative conceptions Chemistry Education: *Research And Practice In Europe*, 1(2), 227-236.
- TOMASINO, A. (dir.) (2002). *Chimie terminale S*. Paris : Nathan.
- TREINER, J. (2011). Variabilité, incertitude, erreur. *Bull. Un. Phys.* n°930, p.9-14.
- VAN DRIEL, J. H., DE VOS, W., VERLOOP, N. & DEKKERS, H., (1998). Developing secondary students' conceptions of chemical reactions: the introduction of chemical equilibrium, *International Journal of Science Education*, 20, 379-392.
- VILLAR, J.-G. (dir.) (2002). *Chimie Terminale S enseignement obligatoire*. Paris : Bordas.

Exemples et catégories

et

La transposition radicale des statistiques en psychologie

Nicolas Gauvrit

I. INTRODUCTION

Ce texte se décompose en deux parties indépendantes :

La première évoque brièvement quelques résultats venus de la psychologie cognitive et concernant les *catégories naturelles*, qui sont des ensembles d'objets naturels perçus comme ayant une certaine unité (on parle de la catégorie des pommes, des lapins, mais pas de la catégorie des « non-pommes », qui n'a pas d'unité subjective). Les années 1970 ont été riches d'enseignement sur ces questions, sous l'impulsion notable d'Eleanor Rosch. Certaines caractéristiques identifiées par les psychologues concernant les catégories font échos à des questions qui se posent sur le statut de l'exemple en mathématiques et il semble important que les didacticiens soient informés de ces résultats.

La seconde partie reprend les premiers balbutiements d'une réflexion sur la transposition didactique à l'œuvre en statistiques dans les départements de psychologie des universités. Cette transposition, on peut la qualifier de « radicale » parce qu'elle obère non seulement la théorie, mais même la technologie (au sens de la TAD). Mais elle est également paradoxale, et ce caractère paradoxal transparait notamment dans les exemples choisis dans les manuels à destination des étudiants.

II. EXEMPLES ET CATÉGORIES D'OBJETS MATHÉMATIQUES

II.1. Qu'est-ce qu'une catégorie ?

La théorie psychologique des catégories a été développée sous l'impulsion initiale d'Eleanor Rosch dans les années 1970 (Rosch, 1973). En psychologie, on appelle *catégorie* un ensemble d'objets naturels perçu comme ayant une unité subjective : on peut ainsi parler de la catégorie des lapins ou de celle des chaises, mais pas de la catégorie formée en unissant le nombre π , un chien et tous les fruits qui ne sont pas des pommes...

Dans un ouvrage désormais célèbre portant sur la catégorisation des couleurs, Berlin et Kay (1969) montrent par une analyse interculturelle de grande ampleur qu'il existe une structure apparemment universelle aux catégories naturelles. Ce résultat sera confirmé par d'autres auteurs (e.g. Rosch et Heider, 1972). Les catégories semblent donc transcender les cultures, même s'il reste évidemment des différences concernant l'organisation interne des catégories.

II.2. Structure interne des catégories naturelles

L'étude psychologique des catégories a d'abord été motivée par la mise en évidence du fait que les catégories naturelles ne sont pas seulement des ensembles au sens des mathématiques. En particulier, tous les éléments d'une catégorie n'ont pas le même statut, certains étant plus représentatifs que d'autres, plus typiques (on parle de *gradient de typicité*). Par exemple, dans certaines cultures comme en France, pour la catégorie des arbres, « chêne » est très représentatif (Dubois, 1983). On le vérifie expérimentalement en observant que « chêne » est l'exemple le plus fréquemment donné quand on demande à des sujets de (1) donner un exemple d'arbre le plus rapidement possible, (2) donner un exemple d'arbre particulièrement typique de ce qu'est un arbre (3) donner un exemple d'arbre « au hasard ». Le chêne est aussi l'arbre le plus rapidement reconnu comme arbre dans des tâches où on demande au sujet de dire, le plus vite possible, si un mot qui apparaît sur l'écran est le nom d'un arbre ou non.

La structure interne des catégories est largement déterminée par ce « gradient de typicité ». Les théories de la construction des catégories fondées sur un ensemble de caractères achoppent régulièrement sur cette question de la définition : dans ma thèse, je prends l'exemple de la catégorie des chaises. Pour distinguer une chaise d'une œuvre d'art en forme de chaise, il faut se référer à l'intention de celui qui a conçu l'objet. Dès lors, il n'est pas possible que le sujet « reconnaisse » une chaise du premier coup d'œil, car cela supposerait une réflexion sur la finalité du créateur. Les théories récentes des catégories s'accordent sur le fait que ce qui fonde la catégorie, c'est la ressemblance avec les éléments les plus typiques, que l'on nomme des *prototypes*. On retrouve dans cette théorie les intuitions de Wittgenstein (2001).

II.3. Structure externe des catégories

En ce qui concerne la structure de l'ensemble des catégories qui s'organise autour d'une « inclusion-appartenance » encore à préciser, elle est souvent imaginée comme formant un treillis. Il apparaît cependant qu'un niveau d'abstraction est privilégié, que l'on nomme le *niveau de base*. Ainsi, on parle plus facilement de chien que de setter ou de mammifère. « Chien » correspond au niveau de base. Ce niveau de base est un compromis entre un besoin de précision et le coût cognitif, et il dépend de la culture (et de la profession) du sujet. Une structure subjective externe s'ajoute donc à la structure interne des catégories, avec là encore des différences importantes avec la théorie classique des ensembles et une accessibilité en mémoire différente selon le niveau de généralité de la catégorie.

James Hampton (1988) a également montré que la « logique » des catégories n'est pas classique. Il a par exemple demandé à des sujets tout-venant si l'on pouvait dire qu'un tableau noir est un « meuble de classe » et si un meuble de classe est un meuble. A ces deux questions, la plupart ont répondu positivement. Pourtant, à la question « le tableau noir est-il un meuble ? », la majorité répond non. Il n'y a donc pas transitivité de l'inclusion dans les catégories.

II.4. Modèles théoriques

Des modèles mathématiques topologico-logiques ont été développés pour rendre compte de ces aspects, comme la logique locologique ou la logique pseudo-consistante. Dans ces logiques, les catégories sont des ensembles dans un espace munis d'un équivalent de topologie (la locologie de Michel de Glas par exemple (Breysse & De Glas, 2007)). Les logiques qui découlent de ces modèles, comme la logique pseudo-consistante ou para-consistante, ne vérifient pas tous les axiomes de la logique classique. Néanmoins, elles ne conviennent pas pour modéliser le raisonnement humain. Considérer qu'une catégorie est un ouvert ou un fermé n'est donc sans doute pas encore une restriction suffisante, mais constitue malgré tout une avancée probable, en ajoutant des contraintes heuristiques à ce que peut être une catégorie.

Dans le cadre des catégories, l'exemple peut avoir deux fonctions essentielles, qui renvoient aux idées d'exemple et de contre-exemple :

1. Les exemples prototypiques — qui peuvent être des exemplaires de la catégorie ou des schémas (objets plus abstraits) — permettent au sujet de construire la catégorie. Bien qu'il y ait encore discussion sur l'essence des catégories, on s'accorde généralement sur des modèles « *exemplar based* » pour lesquels c'est bien l'exemple qui fonde la catégorie.
2. Quant aux contre-exemples, ils délimitent par l'extérieur la frontière de la catégorie vue comme un ensemble dans un espace topologique.

II.5. Spécificité des catégories d'objets mathématiques

Une question importante à aborder est celle de la spécificité des catégories mathématiques. Il ne fait pas de doute que le mathématicien expert perçoit bien « les groupes » ou « les variétés affines » comme des ensembles ayant une unité, et organisés au sein d'un réseau, exactement comme l'on imagine les catégories naturelles. Un enseignant de mathématiques spéciales disait à ses étudiants « pour vous aujourd'hui, un groupe c'est un ensemble qui vérifie certaines propriétés, mais quand vous aurez vraiment compris, un groupe sera juste un groupe ». Cette phrase résume bien ce qu'est une catégorie.

Il reste que la catégorie mathématique a quelque chose de spécifique, au moins en théorie, bien qu'on puisse bien sûr identifier des prototypes (Presmag, 1992). Les contours d'une catégorie mathématique ne sont pas flous. Un cercle privé d'un point n'est pas un cercle. Certes, un individu normal – fût-il mathématicien – percevra qu'un cercle privé d'un cercle est tout de même « presque un cercle », mais dans le cadre mathématique il restera convaincu que ce n'est pas le cas. Il n'y a pas de position intermédiaire entre l'appartenance et la non-appartenance. Les catégories d'objets mathématiques sont également organisées différemment : alors qu'on a tendance naturellement à privilégier les partitions en réduisant le nombre de niveaux d'abstraction, en mathématiques on privilégie les catégories emboîtées. C'est ainsi que, à l'encontre de tout naturel, on définit le carré comme un rectangle particulier.

Le caractère peu naturel de cette classification conduit à utiliser des artifices, et à laisser croire un temps aux élèves qu'un carré n'est pas un rectangle, ce qui bien entendu a un coût

important de désapprentissage par la suite. Comment ces propriétés particulières des catégories mathématiques peuvent « prendre » chez certains élèves est une question de premier plan pour l'éducation.

II.6. Conclusion : catégories et exemples

Si l'exemple fonde la catégorie, et que les premiers exemples prendront vraisemblablement la place de prototype dans les catégories en construction chez les apprenants, le choix des exemples est crucial et ne doit pas être fait à la légère. Pourtant, il semble que dans les pratiques enseignantes ce choix ne fasse guère l'objet de réflexions profondes. Ce n'est sans doute pas inquiétant, si l'on considère que l'enseignant, comme expert du domaine, aura tendance lorsqu'il choisit un exemple « au hasard », à donner précisément un prototype !

Une des définitions d'un prototype est qu'il s'agit d'un objet qui n'a « aucune des propriétés particulières que ne partagent pas le reste de la catégorie ». Autrement dit, c'est un objet générique, ou, comme on le dit en mathématique 'quelconque'. Une vision en terme de catégories permet d'identifier les rôles de différents types d'exemples dans la construction des catégories d'objets mathématiques :

- L'exemple 'quelconque' est un prototype, qui engendre la catégorie
- L'exemple 'pathologique' (contreexemple d'une sous-catégorie) précise les frontières de la catégorie par l'intérieur
- Le contre-exemple précise les frontières de la catégorie par l'extérieur
- Quant aux exemples emblématiques, ils ont certainement pour fonction de fournir une assise au raisonnement, et n'interviennent que marginalement dans la construction catégorielle.

III. L'EXEMPLE DANS LES MANUELS DE STATISTIQUES POUR PSYCHOLOGUES

Les départements de psychologie des universités françaises forment un cas à part parmi les institutions à visée didactique utilisatrices de mathématiques. La psychologie est une science dont le statut scientifique est encore aujourd'hui régulièrement contesté. Signe de doute sur le statut de la psychologie, le département de psychologie de l'Université de Metz faisait par exemple partie en 2002 de l'Unité de Formation et de Recherche (UFR) « Arts et lettres », et non de l'UFR « Sciences », qui existait également, un classement littéraire qui revient ici ou là en France et dans le reste du monde.

III.1. Nécessité d'une transposition forte

Cet élément illustre comment la psychologie, qui utilise des outils mathématiques, reste néanmoins réticente à une approche scientifique. Cela crée bien sûr une difficulté pour enseigner les statistiques, et conduit à une transposition radicale qui élimine la théorie mais aussi la *technologie théorique* au sens de la TAD élargie de Castella (2008) – théorie développée par enrichissement de la TAD classique (Chevallard, 1992). Cette transposition radicale permet de rendre compatibles les statistiques enseignées avec une certaine approche, une vue de la science, développée dans les cursus de psychologie.

III.1.1. Un discours littéraire

L'impossibilité d'adapter – sauf à prix excessif – les outils mathématiques à la psychologie, tient également, si ce n'est surtout, à certaines caractéristiques fondamentales du discours psychologique. Parce qu'elle est une science jeune et très partiellement formalisée, la psychologie a développé un mode de présentation des objets et concepts où les traces littéraires de ses origines se manifestent. Sauf en de rares exceptions, un concept psychologique ne se définit pas de manière univoque à la manière d'un objet mathématique. Pour un concept qui fut longtemps relativement consensuel comme la mémoire de travail au sens de Baddeley (1986), il existait une « unique » définition, mais qui ne pouvait être donnée en quelques lignes.

La question de la définition de l'intelligence (Flynn, 2007), ou de la précocité intellectuelle (Lubart, 2006), reste vivement discutée, toujours contradictoire, malgré le fait que des chercheurs travaillent sur ces thèmes depuis des décennies.

III.1.2. Le mode de validation

Autre point capital pour comprendre la dynamique transpositive : le mode de validation. Science expérimentale, la psychologie repose en théorie sur une validation par l'expérience. En pratique pourtant, c'est bien l'appel à l'autorité ou au consensus qui sert de validation. Quelques expériences princeps fonctionnant « à tous les coups » font exception à cette règle générale. Les étudiants de psychologie ont tous réalisé cette expérience historique consistant à demander à des sujets de répéter des suites de chiffres de plus en plus longues, pour constater que l'on se rappelle, en moyenne, entre 5 et 9 chiffres au maximum (Miller, 1956). Mais il s'agit d'un cas exceptionnel.

III.1.3. Le public

À l'opposé des publics des écoles d'ingénieurs ou des filières techniques, les étudiants de psychologie sont en grande majorité issus des filières littéraires du lycée. La plupart d'entre eux avaient dans ces filières des résultats mathématiques faibles, et une partie a choisi la psychologie pour *ne plus avoir à étudier les mathématiques*.

On peut même penser que les filières de psychologies forment un vivier exceptionnel de « blocages » mathématiques, quand on sait qu'à la fin de la première année de psychologie, la question « trouver la moyenne des nombres suivants : 4, 5, 9, 12, 8 (calculatrice autorisée) » a obtenu un taux d'erreur de plus de 30 %, et que des réponses comme – 39 000 ou 178 ont été données sans aucune remarque par des étudiants. Cette question était posée lors d'un examen final, et il est probable que ces grossières erreurs révèlent surtout une anxiété mathématique massive (Meece, Wigfield, & Eccles, 1990).

III.2. Peut-on transposer franchement ?

Ces trois points³⁹ expliquent la radicalité de la transposition didactique. Se pose alors naturellement la question de savoir si un enseignement de statistiques *sans mathématiques* (comme le proclame à tort plusieurs manuels) est véritablement possible. La réponse à cette question est positive, si l'on accepte de renoncer aux exercices de calculs. Deux manières s'offrent alors à l'enseignant : soit enseigner l'utilisation pratique d'un logiciel de statistiques, qui viendra remplacer par la suite toutes les étapes de calculs « à la main » ; soit renoncer à tout exercice et exemple calculatoire, pour ne conserver des statistiques que la description d'un sens.

Ces deux approches de transposition didactique où la séparation avec l'institution source est assumée ont été observées en situation : un enseignant de statistiques de l'Université Paris-VIII (lui-même statisticien et non psychologue) a décidé d'initier les étudiants au logiciel R, suffisamment pour pouvoir supprimer tout calcul ou exhibition de formule des évaluations. Un autre enseignant, de l'Université de Metz (mathématicien à l'origine) a choisi pour sa part d'organiser tout son enseignement autour de deux principes : les étudiants doivent pouvoir choisir la méthode statistique adaptée à une situation (sans faire les calculs), et doivent savoir lire les résultats fournis par un logiciel statistique. Mais ces cours ne sont pas publiés.

On le voit, il est tout à fait envisageable d'oblitérer totalement les mathématiques de l'enseignement des statistiques dans l'institution psychologique. La transposition pourrait donc aller jusqu'au bout de son œuvre de radicalisation, en refusant toute formule, tout calcul.

III.3. Un paradoxe

Or, ce n'est pas ce qu'on observe dans les manuels. Si tous les manuels consultés évitent soigneusement toute démonstration, tout raisonnement de type mathématique, ils regorgent en revanche de paradoxales *traces mathématiques*, comme si les auteurs voulaient, malgré la transposition radicale à laquelle ils se sont livrés, signer leur reconnaissance à l'institution productrice. Ces traces se retrouvent notamment dans les *exemples* sensés illustrer le sens des notions abstraites.

Prenons un exemple tiré du manuel de Beaufils (2009) pour illustrer le coefficient de corrélation linéaire (cf. figure 1). On voit que le contexte est peu ancré dans la psychologie (il s'agit de comparer les goûts musicaux des classes moyennes et supérieures), et que la méthode de calcul est longuement détaillée, alors que toute calculatrice de poche donne le coefficient de corrélation immédiatement.

³⁹ À côté du discours littéraire, du mode de validation et du public, on pourrait ajouter, notamment, la formation des enseignants et la nécessité de rester cohérent.

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	
classes popu. (x)	2	1	4	5	6	3	9	7	8	45
classes sup. (y)	7	5	8	9	4	2	6	3	1	45
d = différence	-5	-4	-4	-4	+2	+1	+3	+4	+7	
d ² = différence ²	25	16	16	16	4	1	9	16	49	152

Nous obtenons

$$r' = 1 - \frac{6 \cdot 152}{9(9^2 - 1)} = -0.27$$

On peut vérifier que le calcul habituel du coefficient r donne le même résultat ($\Sigma x = \Sigma y = 45$; $\Sigma x^2 = \Sigma y^2 = 285$; $\Sigma xy = 209$).

Nous voyons que les Quatre saisons (i) contribuent de manière importante à ce coefficient alors que la Rhapsodie hongroise (f) y contribue fort peu.

Ce résultat reflète une relation à tendance inverse, dont l'ampleur est peu importante mais qui peut laisser augurer quelques cacophonies les soirs d'été si chacun écoute sa musique préférée, la fenêtre ouverte, dans le cas (improbable !) d'une cohabitation entre les sujets ayant répondu à l'enquête.

Figure 1 : Coefficient de corrélation linéaire dans (Beaufils, 2009)

Voici un second exemple, tiré du livre de Guégen (2006). Il présente les intervalles de confiances pour les proportions :

Lors du référendum sur le traité de Constitution européenne, un sondage réalisé peu avant le vote auprès de 1 009 personnes montre que le non l'emporte à 54.21 %. On cherche à connaître au risque d'erreur de 5 % l'intervalle de confiance de ce taux dans la population.

$$54.21 \pm 1.96 \times \sqrt{\frac{54.21 \times (100 - 54.21)}{1009}} = 54.21 \pm 3.07$$

Avec 5 chances sur 100 de se tromper, on peut estimer que le pourcentage du non sera compris entre 51.07 % ($54.21 - 3.07$) et 57.28 % ($54.21 + 3.07$). On a donc 5 chances sur 100 de se tromper en disant que le non l'emportera.

Figure 2 : Intervalles de confiances pour les proportions dans (Guégen, 2006).

Là encore, le contexte est peu ancré dans la psychologie (contrairement à d'autres exemples du même ouvrage), et là encore l'accent est mis sur le calcul plus que sur le sens. Il s'agit pourtant d'un manuel où le *sens* prend une place plus importante que dans les autres.

III.4. Trois hypothèses explicatives

La quasi-totalité des exemples trouvés dans 8 manuels de statistiques se résument à des calculs, souvent décontextualisés. L'un des manuels ne contient même que cela. La plupart des exemples n'ont aucun contexte concret, et lorsque c'est le cas il s'agit souvent

- soit de contextes artificiels, du type « dans une classe de 5 élèves, les notes de sport sont les suivantes : 13, 15, 16, 16, 15. Pour calculer la moyenne, on peut... » ;

- soit de contextes extra-psychologiques, typiquement en biologie, du type « On relève le poids de rats atteints d'une maladie X (groupe test) ou non (groupe témoin). Pour déterminer si la maladie a vraiment un effet, on peut utiliser un test de Student... » ;
- soit de contextes psychologiques mais où, parce que des données manquent, on ne peut donner aucun sens à l'exemple. « On fait passer un test d'anxiété à un groupe de personnes. Elles obtiennent les notes 4, 12, 7, 19, 33, 5, 3, 2, 2. Pour calculer l'écart type, on peut... ».

Comment expliquer ce choix paradoxal, là où il semblerait naturel de privilégier la mise en contexte pour favoriser l'investissement des étudiants, et surtout dans une situation où les mathématiques sont parfois explicitement rejetées (comme le montrent les titres de certains manuels) ? Je propose trois hypothèses :

Première hypothèse : le vœu des psychologues de démontrer que leur discipline est bien une science explique la nécessité qu'ils éprouvent à laisser une signature de scientificité dans le texte. Les traces mathématiques semées au gré des cours de statistiques pourraient tenir lieu de symbole, de preuve de rigueur.

La deuxième hypothèse s'appuie sur le rapport au savoir mathématique et à l'apprendre des psychologues, et plus précisément à la représentation qu'ils ont de la notion de « compréhension » en mathématiques. Si, pour un auteur, « comprendre » veut dire en mathématiques « savoir faire sans utiliser (trop) d'outils », autrement dit si savoir, c'est pouvoir réaliser, alors la présence de consignes de calculs dans les manuels s'explique tout naturellement : c'est grâce à elle que l'étudiant pourra calculer, et donc « comprendre », les indices dont on lui parle.

La troisième hypothèse est la plus évidente sans aucun doute. Il y a dans tout enseignement – pas seulement en statistiques ni en psychologie – une certaine sclérose du fait que, bien souvent, les enseignants reproduisent simplement l'enseignement qu'ils ont eux-mêmes reçu, en adaptant les modifications mineures qui s'imposent du fait des évolutions curriculaires. Or, il n'est pas si loin le temps où l'étudiant lambda ne disposait pas d'un ordinateur ou d'une calculatrice permettant en quelques secondes de calculer un coefficient de corrélation ou une variance. Il y a quelques décennies, les cours de statistiques pour psychologues comprenaient une partie calculatoire pure par la force des choses. La sclérose de l'enseignement, ou tout au moins la lenteur des changements, pourrait alors expliquer que l'exposition de calculs numériques persiste aujourd'hui malgré leur inutilité depuis l'avènement des machines électroniques et des logiciels.

III.5. Conclusion sur les statistiques en psychologie

Dans les manuels consultés, mais aussi par le recueil de discours de plusieurs enseignants de statistiques en psychologie, on peut voir que la transposition des statistiques en psychologie est problématique. La pratique montre un décalage sûrement délétère entre une volonté affichée d'une transposition radicale (possible), et un contenu où subsiste des formules mathématiques vides de sens dans un contexte où elles ne peuvent survivre pour reprendre localement l'image écologique de la TAD.

Si la volonté d'une transposition radicale et de la suppression des mathématiques est clairement affichée, il est plus difficile de comprendre les traces restantes de mathématiques. Ces ganglions calculatoires sont à mon avis néfastes, parce qu'ils repoussent les étudiants et ne peuvent en aucun cas compenser le manque de scientificité de la présentation et des modes de validation psychologiques. Dès lors, ils apparaissent comme des obstacles insensés à la compréhension statistique des élèves.

Qu'ils soient particulièrement visibles dans les exemples (et les exercices) est particulièrement inquiétant : c'est justement l'exemple qui doit fonder la compréhension. Lorsque, comme c'est le cas dans plusieurs ouvrages, des exemples purement calculatoires sont en parfait décalage avec le cours énoncé dans un style très littéraire, comment des étudiants déjà en difficulté en mathématiques pourraient-ils recoller les morceaux, faire le pont entre les deux mondes littéraires et statistiques ? Il est probable, que pour la plupart d'entre eux, les exemples sont finalement ignorés après avoir suscité une importante angoisse statistique et que les éléments d'une construction du sens sont alors manquants.

Réaliser une transposition véritablement radicale des statistiques en psychologie est possible, peut-être même souhaitable. Revenir à une approche mathématique est possible, mais sûrement difficile. La position intermédiaire qu'on observe actuellement est en revanche dangereuse, et le fait que les exemples héritent la partie « mathématique » (en fait calculatoire) rend le mélange encore plus vicieux.

BIBLIOGRAPHIE

BADDELEY, A. (1986). *Working memory*. Oxford: Oxford University Press.

BERLIN, B., & KAY, P. (1969). *Basic color terms: Their universality and evolution*. Centre for the Study of Language & Information.

BREYSSE, O., & DE GLAS, M. (2007). A new approach to the concepts of boundary and contact: Toward an alternative to mereotopology. *Fundamenta Informaticae*, 78(2), 217-238.

CASTELA, C. (2008). Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissages ignorés par les institutions d'enseignement. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 28(2), 135-182.

CHEVALLARD, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(1), 73-112.

DUBOIS, D. (1983). Analyse de 22 catégories sémantiques du français : organisation catégorielle, lexique et représentation. *L'année Psychologique*, 83 (2), 465-489.

FLYNN, J. R. (2007). *What Is Intelligence?: Beyond the Flynn Effect*. Cambridge: Cambridge University Press.

HAMPTON, J. (1988). Overextension of conjunctive concepts: Evidence for a unitary model of concept typicality and class inclusion. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 14(1), 12-32.

LUBART, T. (2006). Enfants exceptionnels : Précocité intellectuelle, haut potentiel et talent. Paris: Bréal.

MEECE, J. L., WIGFIELD, A., & ECCLES, J. S. (1990). Predictors of math anxiety and its influence on young adolescents' course enrollment intentions and performance in mathematics. *Journal of Educational Psychology*, 82(1) , 60-70.

MILLER, G. A. (1956). The magical number seven, plus or minus two: Some limits on our capacity for processing information. *The Psychological Review*, 63 , 81-97.

PRESMAG, N. C. (1992). Prototypes, metaphors, metonymies and imaginative rationality in high school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 23(6) , 595-610.

ROSCH HEIDER, E. (1972). The structure of the color space in naming and memory for two languages. *Cognitive Psychology*, 3 (2) , 337-354.

ROSCH, E. (1973). Natural categories. *Cognitive Psychology*, 4 , 328-350.

WITTGENSTEIN, L. (2001). *Tractatus logico-philosophicus*. (G.-G. Granger, Trad.) Paris: Gallimard.

MANUELS CONSULTÉS

BEAUFILS, B. (2009). *Statistiques descriptives appliquées à la psychologie*. Paris : Bréal.

CADET, B. (1996). *Méthodes statistiques en psychologie. Cours et Exercices*. Caen : Presses Universitaires de Caen.

CHANQUOY, L. (2005). *Statistiques appliquées à la psychologie et aux sciences humaines et sociales*. Paris : Hachette.

CORROYER, D., WOLFF, M. (2003). *L'analyse statistique des données en psychologie : Concepts et méthodes de base*. Paris : Armand Colin.

GUÉGEN, N. (2006). *Statistiques en psychologie*. Paris : Dunod.

MEUNIER, J.-M. (2010). *Statistiques pour psychologues: Analyses descriptives*. Paris : Dunod.

NAVARRO, J. (2012). *L'Essentiel de la statistique en psychologie*. Paris : Ellipses

ROUANET, H., Le Roux, B. (1995). *Statistique en sciences humaines : Exercices & solutions*. Paris : Dunod.

RUDE, N., RETEL, O. (2000). *Statistique en psychologie*. Paris :In Press.

Table des matières

Introduction

Page 1

Partie I : Fiches de lecture critique

Page 5

Goldenberg, P. & Mason, J. (2008). Shedding light on and with example spaces, *Educational Studies in Mathematics*, 69.

Fiche écrite par Alain Kuzniak

Page 7

Watson, A. & Shipman, S. (2008). Using learner generated examples to introduce new concepts, *Educational Studies in Mathematics*, 69.

Fiche écrite par Laurent Vivier

Page 11

Zodik, I. & Zaslavsky, O. (2008). Characteristics of teachers' choice of examples in and for the mathematics classroom, *Educational Studies in Mathematics*, 69.

Fiche écrite par Marie-Pierre Galisson et Bernadette Denys

Page 19

Rowland, T. (2008). The purpose, design and use of examples in the teaching of elementary mathematics, *Educational Studies in Mathematics*, 69.

Fiche écrite par Jacques Douaire

Page 27

Alcock, L. & Inglis, M. (2008). Doctoral students' use of examples in evaluating and proving conjectures, *Educational Studies in Mathematics*, 69.

Fiche écrite par Joris Mithalal

Page 31

Brown, D. E. (1992). Using examples and analogies to remediate misconceptions in physics: Factors influencing conceptual change, *Journal of Research in Science Teaching*, 29, 17-34.

Fiche écrite par Philippe Colin et Cécile de Hosson

Page 37

Partie II : Des recherches originales sur la notion d'exemple

Page 47

Cécile Ouvrier-Bufferet

Entrer par l'activité de définition en mathématiques pour revenir sur les notions d'exemples, contre-exemples et non-exemples

Page 49

Laurent Vivier

Un algorithme de somme pour les rationnels en écriture décimale. Des exemples, et après ?

Page 59

Richard Cabassut

Exemples dans les comparaisons dans l'enseignement

Page 69

Bernard Parzysz

Exemple, modèle, simulation en probabilités

Page 83

Isabelle Kermen & Nicolas Décamp

L'étude des exemples dans des manuels de chimie : un révélateur d'intentions didactiques ?

Page 91

Nicolas Gauvrit

Exemples et catégories et la transposition radicale des statistiques en psychologie

Page 103

TITRE :

Les exemples – En chimie, en mathématiques, en physique

COORDINATEURS :

Rita Khamfour-Armale et Laurent Vivier

AUTEUR/S :

Richard Cabassut, Philippe Colin, Cécile de Hosson, Nicolas Décamp, Bernadette Denys, Jacques Douaire, Marie-Pierre Galisson, Nicolas Gauvrit, Rita Khamfour-Armale, Isabelle Kermen, Alain Kuzniak, Joris Mithalal, Cécile Ouvrier-Bufferet, Bernard Parzysz, Marc Rogalski, Laurent Vivier

RESUME :

L'objectif de ce cahier du LDAR est d'approfondir et d'éclairer la notion d'exemple et de préciser le rôle qu'elle joue dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques et des sciences physiques.

Il suffit d'assister à une leçon en classe ou d'ouvrir un manuel pour s'apercevoir que l'enseignement des sciences s'appuie beaucoup sur des exemples. Les enseignants et les élèves, quel que soit le niveau d'enseignement considéré, le savent bien. Mais derrière cette évidence, presque une banalité, la notion d'exemple se révèle être une notion complexe aux multiples fonctions, aux multiples caractéristiques.

Après une première partie dédiée à une étude bibliographique sur la notion d'exemple en didactique, la deuxième partie présente des recherches issues du LDAR qui interrogent cette notion à partir d'expériences de recherche.

MOTS CLES :

Exemples, didactique de la chimie, didactique des mathématiques, didactique de la physique.