

IREN
PARIS 7

Ldar

Laboratoire de didactique André Revuz
Mathématiques • Physique • Chimie

**Cahiers du laboratoire de didactique
André Revuz
n° 5
Février 2013**

**Activités des élèves et pratiques des enseignants
en classe de mathématiques**

**Auteurs : F. Vandebrouck, A. Robert, J. Rogalski, M. Abboud
Blanchard, C. Cazes, A. Chesnais, C. Hache**

ISSN : 2105-5203

**INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT**

Activités des élèves et pratiques des enseignants en classe de mathématiques

**Auteurs : F. Vandebrouck, A. Robert, J. Rogalski, M. Abboud Blanchard,
C. Cazes, A. Chesnais, C. Hache**

FABRICE VANDEBROUCK, ALINE ROBERT

Cette brochure rassemble quelques chapitres en français d'un livre en cours d'édition anglaise chez Sense Publisher : *The mathematics classroom : students' activities and teachers' practices*. Ce livre est lui-même adapté du livre paru aux éditions Octarès en 2008 « La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants ». Nous regroupons dans cette brochure les chapitres du livre en français réécrits ou ajoutés pour la version anglaise. Chacun de ces deux ouvrages a pour objectif de regrouper des travaux en didactique des mathématiques, portant sur l'enseignement secondaire et supérieur, qui donnent une aussi grande importance aux acteurs (élèves et enseignants) qu'aux mathématiques et à la situation scolaire. Ces travaux s'inscrivent dans le cadre très général des théories de l'activité et du développement.

Les recherches présentées ont comme ambition d'analyser ce qui se joue en classe de mathématiques, en faisant varier les situations scolaires, les environnements, les contenus, les enseignants et les classes. Étudier, comprendre, voire interpréter les liens entre l'enseignement d'un contenu mathématique donné et les apprentissages correspondants des élèves est l'objectif premier. Nous cherchons à mettre en évidence des régularités et des variabilités dans ces processus pour mieux comprendre les acquisitions des élèves et interpréter les pratiques des enseignants. L'ensemble du travail conduit à des inférences pouvant servir aux formations, en enrichissant la palette des activités possibles pour chaque professeur.

Le cadre général de la théorie de l'activité est exposé en chapitre 1 de l'ouvrage en anglais, il réunit plusieurs chapitres de l'ouvrage en français et nous le reprenons comme chapitre 1 dans cette brochure. Nous précisons ainsi d'emblée notre inscription dans ce cadre.

L'enjeu de l'ouvrage, quelle qu'en soit la langue, n'est cependant pas théorique même si sa spécificité tient à des emprunts aux théories de l'activité et du développement qui complètent des outils spécifiquement didactiques. Nous cherchons à donner leur place aux sujets singuliers (élèves et professeurs) au sein de la relation didactique, même si les facteurs affectifs et sociaux ne sont pas directement pris en compte, tout importants qu'ils soient. Les analyses des activités des élèves en classe, telles que les enseignants les organisent, nous fournissent les données pour aborder les pratiques des enseignants et approcher les apprentissages des élèves : c'est cette centration et le découpage de la réalité correspondant qui sont justifiés par la théorie générale. Cependant, la manière de spécifier les activités aux mathématiques et aux situations scolaires est peu présente dans le cadre des théories de l'activité et du développement. Nous nous donnons les moyens de recueillir et d'analyser de manière significative, adaptée à notre projet, des données sur l'enseignement et l'apprentissage nous permettant l'interprétation des relations entre les deux.

C'est pourquoi les compléments théoriques et méthodologiques nécessaires sont présentés dans le chapitre 2 de l'ouvrage en anglais, regroupant plusieurs chapitres de la version précédente et repris ici aussi.

Toutes les recherches présentées dans chaque l'ouvrage adoptent cette méthodologie commune présentée en chapitre 2, avec évidemment des adaptations indispensables présentées au fur et à mesure. Certains travaux sont le fruit de chercheurs individuels et traitent de façon exhaustive de petits nombres de cas, souvent sur des temps assez courts. Certains autres sont des regroupements de recherches ou le fruit de recherches collectives à partir de données plus nombreuses et vont plus directement vers des résultats pertinents pour la problématique générale du livre. Quoi qu'il en soit, il y a toujours une limite à des généralisations trop hâtives des résultats. Il n'y a ainsi ni résultats définitifs, ni (encore moins) de prescription dans nos propos.

Les chapitres 3 et 4 de l'ouvrage en anglais concernent des résultats sur les pratiques des enseignants en classe « ordinaire ». Ils mettent en évidence la stabilité des pratiques des enseignants mais aussi rendent compte des diversités et variabilités entre les enseignants. Nous ne les reprenons pas ici, la version anglaise n'étant que réduite par rapport à la version française. Le chapitre 5, également absent ici, traite des manuels d'enseignements et montre que les exercices proposés dans ces manuels n'offrent pas aux enseignants les opportunités pour diversifier leurs activités des élèves. Les chapitres 6 et 7 mettent plus directement des pratiques d'enseignants et les activités des élèves. Seul le chapitre 7, totalement nouveau par rapport à l'ouvrage « La classe de mathématique », à propos de l'enseignement de la symétrie orthogonale en sixième, apparaît ici. Le chapitre 8 traite de l'activité des élèves dans une situation spécifique d'un enseignement en environnement informatique. Il est présent dans la brochure car résultant de la fusion de deux chapitres du livre originel. Les chapitres 9 et 10 traitent des pratiques des enseignants en environnement informatiques, en particulier la comparaison d'activités des enseignants dans des environnements différents. Le chapitre 11 est une étude à grande échelle sur les pratiques des enseignants et les facteurs liés aux régularités et variabilités dans les pratiques. Ces trois chapitres ne sont pas présentés ici. Enfin, le chapitre 12 se propose d'être une synthèse de l'ouvrage avec une ouverture sur la formation des enseignants. Il est présenté ici, n'étant pas directement issu du livre originel.

La lecture des différents chapitres peut se faire de manière relativement indépendante. En particulier, une lecture exhaustive des chapitres 1 et 2 n'est pas nécessaire pour aborder les autres... et réciproquement !

JANINE ROGALSKI

CHAP 1. THEORIE DE L'ACTIVITE ET CADRES DEVELOPPEMENTAUX POUR L'ANALYSE LIEE DES PRATIQUES DES ENSEIGNANTS ET DES APPRENTISSAGES DES ELEVES

INTRODUCTION

Le but de ce chapitre est de proposer un cadre théorique d'ensemble pour analyser les activités articulées des enseignants et de leurs élèves, et pour étayer ce qui en est inférable quant à la formation des compétences professionnelles¹ enseignantes et quant aux apprentissages des élèves dans des domaines de savoir précisés.

Le cadre organisateur est celui de la théorie de l'activité, initiée par Leontiev, enrichie dans une lignée de recherche issue de Vygotsky, puis exploitée et développée dans une perspective de psychologie ergonomique (Leplat, 1997; Rogalski, 2004). On en présente les composants fondamentaux : la distinction entre tâche et activité, le double point de vue de la situation et du sujet de l'action, et le système de double régulation de l'activité, c'est-à-dire les facteurs déterminants et les effets en retour de l'activité portent sur les composants de la situation et sur le sujet lui-même. La régulation n'est pas seulement rétroactive mais aussi proactive dans l'activité finalisée quand le sujet anticipe les résultats qu'il veut produire et adapte en conséquence son activité.

Dans ce cadre théorique, l'objet d'étude est l'activité d'un individu mû par des motifs propres, dans une situation particulière. Concernant l'enseignant, ce ne sont pas les "propriétés" ou le "fonctionnement" de la position occupée par l'enseignant dans un système didactique qui sont en jeu ici, à la différence de la perspective qui pourrait être adoptée par une didactique *stricto sensu* qu'on pourrait définir comme "science des procédés didactiques". Il s'agit en revanche, de prendre en compte la diversité des enseignants, de se poser la question du développement et de la formation de leur compétence professionnelle individuelle. Il en est de même de la considération de l'élève comme sujet-personne, non comme sujet didactique. C'est ce qui conduit à articuler l'approche piagétienne d'épistémologie génétique avec le cadre socio-historique de Vygotsky quant au développement individuel.

La prise en compte des effets de l'activité sur le sujet exprime la dimension développementale et constructiviste de la théorie de l'activité (TA). On se centrera ici sur l'activité, ses déterminants et ses effets en ce qui concerne l'enseignement

des mathématiques. On s'intéressera en particulier aux effets sur le développement des compétences professionnels de l'enseignant, et la conceptualisation mathématique chez l'élève. Une articulation de la TA avec les cadres théoriques de Piaget et Vygotsky enrichit l'approche en précisant la dimension développementale de la double régulation, quant aux facteurs et aux effets, à la temporalité, et au rôle des instruments psychologiques (Vygotsky) et cognitifs (Piaget). On inclut au cadre piagétien la notion de champ conceptuel de Vergnaud (1982; 1990), particulièrement importante pour les didactiques des disciplines scientifiques et professionnelle (ce qui concerne ici l'enseignant). On intègre au cadre vygotskien les apports de Bruner sur la médiation (Wood, Bruner, & Ross, 1976) qui contribuent à rendre compte de l'intervention didactique de l'enseignant en classe. On conclut sur une articulation des cadres théoriques, pour « outiller » l'analyse des pratiques enseignantes et des activités des élèves en mathématiques.

LA THEORIE DE L'ACTIVITE FINALISEE

La théorie de l'activité a été développée par une lignée de chercheurs engagés à la suite de Vygotsky dans la psychologie du travail (appelée plus tard "psychologie ergonomique"), puis en didactique professionnelle, avant de s'articuler à une approche didactique de l'enseignement des mathématiques dans la "double approche" (Robert & Rogalski, 2002; 2005; Robert, chapitre 2). Elle concerne l'activité finalisée [*goal-oriented*] et motivée: par ses actions le sujet vise l'atteinte des buts de sa tâche, et ce sont les mobiles de son activité qui sont le moteur de ses actions.

Nous allons en présenter les éléments essentiels pour notre visée : distinction tâche et activité ; « déclinaison » des tâches ; moyens d'analyse de l'activité ; couplage entre le sujet et la situation, avec le modèle de double régulation de l'activité. On indiquera comment ce cadre théorique permet l'analyse de l'articulation de l'activité de l'enseignant et celle de l'élève.

Tâche et activité

La distinction tâche et activité est centrale dans la théorie : l'activité est « du côté du sujet »² et la *tâche* « du côté des objets de l'action ». La définition de la tâche proposée par Leontiev (1978), reprise et développée par Leplat (Leplat, 1997) est le "*but qu'il s'agit d'atteindre sous certaines conditions*". L'activité est ce que développe un sujet lors de la réalisation de la tâche : non seulement ses actes extériorisés, mais aussi les inférences, les hypothèses qu'il fait, les décisions qu'il prend, ce qu'il fait et ce qu'il se retient de faire ; l'activité comprend aussi la manière dont le sujet gère son temps et son état personnel — charge de travail, fatigue, stress, plaisir pris au travail —, ainsi que ses interactions avec autrui dans la situation de travail. Nous considérerons d'abord le point de vue de la tâche, en déclinant des caractères essentiels. Nous développerons ensuite celui de l'activité développée en réponse à la tâche.

Une déclinaison des tâches

L'objet de la tâche est ce qu'il s'agit de transformer ou d'étudier. Les tâches portant sur des objets matériels ont été initialement les plus étudiées par la psychologie ergonomique. L'analyse est plus complexe quand il s'agit de tâches dont les « objets » mettent en jeu des individus humains : relations de service, travail thérapeutique, travail enseignant, et des tâches dont la visée est un apprentissage et une acquisition d'instruments de pensée, comme c'est le cas pour l'élève. Pour l'enseignant, la formulation du but à atteindre peut se faire en termes « procéduraux », avec des verbes d'action : « faire acquérir » les notions de mesure des longueurs au CE, ou « corriger un contrôle de maths », « suivre le programme ». Les buts peuvent aussi se formuler dans les termes du rapport élève / savoir : « que l'élève ait acquis les notions de longueur et d'unités linéaires... », « qu'il se représente les fonctions comme des objets mathématiques et des outils de mathématisation »... Pour l'élève, la tâche s'exprime dans les énoncés proposés par l'enseignant, et les consignes de travail mathématique.

Les tâches et sous-tâches: dès que la situation est complexe, le but à atteindre s'organise en différents sous-buts, dont l'organisation temporelle est plus ou moins contrainte. Par exemple, « initier les élèves à la notion de fonction », en troisième, intègre des choix de documentation, l'élaboration d'un scénario (sur une ou plusieurs séances), une formulation des tâches-élèves, la conduite de la réalisation en classe, et l'évaluation des acquis des élèves.

La déclinaison de la tâche porte sur les transitions entre les attentes de la tâche prescrite à la tâche effectivement réalisée. En situation de travail (cas de l'enseignant), ou de formation (cas de l'élève), le sujet répond à des tâches qui lui sont données par un prescripteur, avec des résultats attendus et des ressources et contraintes encadrant la réalisation : on est du côté des attentes de la tâche prescrite. Mais l'activité n'est pas la réponse directe à la tâche prescrite : la tâche est en fait redéfinie par le sujet. Pour la réaliser il s'en fait une représentation, s'autorise ou s'interdit des possibles (pas toujours consciemment), lève des contraintes ou s'en pose, utilise des critères d'évaluation qui peuvent différer de ceux de la prescription. On est alors du côté de la tâche effective, à laquelle répond l'activité du sujet. Les « malentendus » dans l'enseignement sont une expression des décalages entre la tâche attendue par l'enseignant et celle à laquelle répond l'élève. Le décalage entre tâche prescrite et tâche effective est inhérent à l'existence des deux points de vue : celui du prescripteur et celui du réalisateur. La tâche que le sujet réalise peut s'éloigner de la tâche prescrite parce que le sujet manque de mobile pour s'engager dans l'action attendue, parce qu'il n'a pas les compétences nécessaires pour la réaliser, parce qu'il s'en est construit une représentation inappropriée, voire en raison de divergences avec les intentions ou les prescriptions de la tâche. C'est l'activité du sujet qui « dévoile » la tâche effective.

L'analyse de l'activité

En situation de travail ou de formation [*In work or training situations*], l'activité est orientée par la réalisation de la tâche. Les observables qui en permettent l'analyse sont d'abord les opérations sur les objets de l'action, quelle que soit la visée de recherche. Cela explique que l'analyse de l'activité s'appuie d'abord sur une analyse préalable de la tâche. Celle-ci peut être conçue comme une analyse psychologique de réalisation de la tâche : "*psychological task analysis*" (Vicente, 1999), qui s'appuie sur une expertise du domaine. Toutefois l'activité dépasse les actions sur "ce qui est à faire" et intègre d'autres déterminants personnels. Par exemple, un enseignant peut changer de liste de problèmes d'une année sur l'autre, non pas à cause de l'impact sur les élèves, mais pour maintenir sa propre motivation, éviter l'ennui de la répétition.

L'analyse d'une "tâche-élève" s'appuie sur l'expertise mathématique du didacticien pour identifier ce que l'élève peut faire pour la réaliser effectivement : c'est l'objet de l'analyse a priori présentée dans le chapitre 2. L'analyse de la "tâche-enseignant" est plus délicate : il s'agit d'abord d'une tâche largement discrétionnaire pour laquelle il n'y a pas de procédure déterminée à suivre pour la réaliser (Leplat, 1997, p. 21), ensuite, l'identification de ce que serait un traitement qui aboutisse au but visé, reste une question ouverte car il n'y a pas de référence partagée à ce qu'est un « enseignant expert »³. Pour cette analyse de la tâche et de l'activité de l'enseignant, nous nous référons aussi à un modèle de l'enseignement comme gestion d'un environnement dynamique humain (Rogalski, 2003), l'enseignant exerçant une médiation (Wood, Bruner & Ross, 1976) entre l'élève et le savoir à acquérir (Robert & Rogalski, 2005), médiation dans laquelle les actes de langage jouent un rôle central (Pariès, Robert & Rogalski, chapitre 4).

Le sujet et la situation

Deux autres notions clés sont organisatrices de la TA: le sujet et la situation. On s'intéresse à un *sujet individuel*, qui a des intentions, des compétences (un potentiel de ressources et contraintes propres). Dans ce cadre, il ne s'identifie pas à son rôle, bien qu'il soit contraint par des responsabilités, y compris juridiques s'agissant de l'enseignant. On peut chercher d'une part des régularités entre sujets et de l'autre des spécificités de leur activité : qu'est-ce qui est commun dans les déterminants et l'organisation de leur activité ? Quelles en sont les différences individuelles?

Qu'il s'agisse de l'élève ou de l'enseignant, le sujet n'est pas seul maître de ses buts ni de ses moyens. Il agit dans une *situation de travail ou de formation* qui comporte un système de ressources et de contraintes. L'enseignant a en fait un ensemble de tâches, et plus largement : une mission (dimension discrétionnaire de sa tâche), qui le lie à un prescripteur (son employeur, sa hiérarchie) par un contrat partiellement implicite. Il agit dans le contexte d'interventions multiples sur les élèves (les parents, les collègues d'autres disciplines, etc.). Il se situe par ailleurs dans un processus de travail qui se déroule sur le temps long de la scolarité de ses élèves. La situation de l'élève ne se limite pas aux tâches que l'enseignant lui

prescrit, dans le cadre d'un contrat didactique, mais intègre son environnement familial et social.

Nous allons maintenant présenter le modèle de double régulation de l'activité, qui peut s'articuler avec les problématiques d'apprentissage et de développement, telles qu'elles ont été prises en charge dans les théories de Piaget et de Vygotsky, dont nous défendons la complémentarité, et prolongées par Vergnaud.

Le modèle de double régulation de l'activité

La notion de régulation renvoie d'abord au fait que l'activité modifie l'état aussi bien de la situation que de l'acteur qui agit. La situation est à la fois un déterminant de l'activité et elle est modifiée par cette activité (au premier chef en ce qui concerne les objets visés par la tâche, mais aussi les ressources et les contraintes externes de sa réalisation). Le sujet lui-même est un déterminant de l'activité et est modifié par son activité, aussi bien dans son potentiel de connaissances et d'actions (en bref : ses compétences) – que dans son état physique: fatigue, sommeil, etc. ou psychique : plaisir, ennui, angoisse, etc.

La figure 1 présente un schéma de ce système de double régulation, en relation avec le système de déterminants relatifs à la situation et ceux relatifs au sujet acteur.

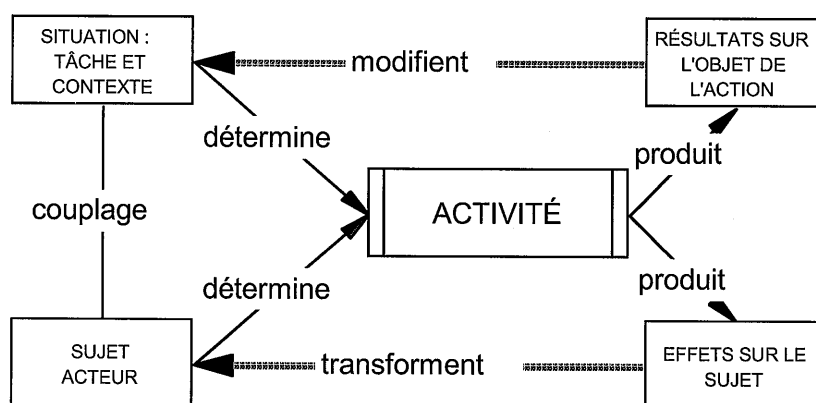


Figure 1. La double régulation comprend, d'une part, une co-détermination de l'activité par les propriétés de la situation et du sujet, et d'autre part, une double modification de la situation et du sujet du fait des résultats et effets produits (et de leur comparaison à l'attendu ou à l'acceptable). (D'après Leplat, 1997).

La régulation peut être considérée sur le court terme des ajustements de l'action et des apprentissages « locaux » (par exemple apprendre à lire un antécédent sur un graphe), et sur le long terme du développement du sujet (conceptualiser la notion

de fonction numérique). Le modèle de double régulation s'articule directement avec les théories constructivistes de Piaget et de Vygotsky. Il éclaire aussi la problématique d'intervention didactique, en interrogeant les propriétés des situations comme productrices potentielles des apprentissages et du développement. On doit auparavant souligner l'articulation des activités respectives de l'enseignant et de l'élève.

Un cadre pour l'articulation de l'activité de l'enseignant et celle de l'élève

L'élève est un déterminant central de l'activité de l'enseignant. Il peut s'agir de l'élève individuel, de l'ensemble des élèves, et de la classe comme entité. Les choix des scénarios (organisation des tâches-élèves) et de leur déroulement en classe dépendent des acquis antérieurs des élèves, des modes de fonctionnement que l'enseignant évalue comme possible dans la classe. Les interventions didactiques de l'enseignant en classe dépendent de l'activité des élèves, individuellement ou collectivement. La réalisation des tâches produit un "retour" sur l'activité de l'enseignant et un éventuel ajustement ultérieur, des tâches proposées mais aussi de sa propre activité. Le comportement des élèves contribue aux effets sur l'enseignant : fatigue, plaisir, etc.

L'enseignant détermine l'activité de l'élève tout d'abord par les tâches mathématiques qu'il lui demande d'accomplir. Tout au long de la réalisation de la tâche, il exerce une médiation entre l'élève et le savoir mathématique à acquérir : aide à au démarrage, aides à la réalisation (procédurales ou constructives), évaluation de la production, identification du savoir en jeu. Il peut participer à la construction de la réflexivité chez l'élève – y compris en faisant des mathématiques devant lui – et intervenir ainsi sur le développement de la dimension constructive de l'activité chez l'élève. Tout le chapitre 2 approfondit cette question.

2. MISE EN REGARD DES THEORIES DE PIAGET ET DE VYGOTSKY SUR LE DEVELOPPEMENT ET L'APPRENTISSAGE

Piaget et Vygotsky ont élaboré l'un et l'autre des cadres théoriques pour rendre compte des processus développementaux chez l'enfant et plus généralement l'homme. Nous proposons ici d'en rappeler d'abord les visées scientifiques propres ; nous préciserons ensuite les éléments que nous allons retenir du constructivisme piagétien, puis l'apport théorique propre de Vygotsky . Une mise en perspective de ces cadres met en avant leurs convergences, y compris quant aux facteurs du développement, à la temporalité longue, à la place des instruments dans ce développement (« instrument. cognitifs » chez Piaget ; « instruments psychologiques » chez Vygotsky).

Les visées scientifiques propres à Piaget et à Vygotsky

Pour Piaget, le point marquant, qui fait sa spécificité et son apport absolument irremplaçable dans le panorama scientifique du XXème siècle, est sa visée

d'épistémologie génétique. La question centrale est comment le savoir vient à l'homme, et le fait passer d'un petit d'homme à un adulte capable de contribuer au développement des connaissances scientifiques.

Il s'agit de « *chercher à dégager les racines des diverses variétés de connaissances dès leurs formes les plus élémentaires et de suivre leur développement aux niveaux ultérieurs jusqu'à la pensée scientifique inclusivement.* » (Piaget, 2005, p. 6). Piaget précise que l'évolution dans une lignée d'espèce fait en théorie partie de la visée, mais qu'il va commencer par le moment du développement du tout jeune humain. Il insiste sur le fait que son travail comporte « *une dimension psychologique, mais à titre de 'by-product' [...] l'intention en [est] essentiellement épistémologique* » (op. cit., p. 7).

Piaget se situe donc du côté du développement de la connaissance pour un *sujet épistémique*, qui est tout autant une construction théorique que l'est le *sujet didactique* de la didactique des mathématiques, quand elle définit l'enseignant et par leur place dans l'institution scolaire. Orienté par sa formation de biologiste, il insiste toujours sur les racines biologiques de la connaissance (Piaget, 1971 ; 2005, pp. 59-75).

L'intérêt de Piaget pour l'évolution des structures de connaissances le conduit à mettre hors du champ un certain nombre de questions. Par exemple, la question des facteurs du développement de l'enfant (sujet psychologique cette fois) ne va pas être centrale dans les travaux de Piaget : ce n'est pas parce qu'il dénie l'intervention de facteurs non internes au « sujet épistémique » mais parce que sa visée est la compréhension du processus interne de développement.

Le constructivisme piagétien affirme que les connaissances sur les objets se construisent à partir des actions sur ces objets (et l'ambition de Piaget est de montrer la validité de son approche sur l'ensemble des grands domaines de la connaissance). Celles-ci ne sont pas limitées aux actes physiques sur les objets matériels, mais la construction des connaissances fait intervenir aussi des opérations mentales. Ainsi, par exemple, l'observation est une véritable action qui porte sur les représentations du sujet.

Vygotsky, quant à lui, a une visée de théorisation clairement psychologique, visant à théoriser les « fonctions supérieures » de la pensée. Son sujet est un sujet psychologique, pris dès l'origine dans une interaction sociale avec d'autres sujets qui ont développé historiquement et personnellement des instruments psychologiques, permettant le développement de la connaissance. Ainsi, la connaissance du monde préexiste socialement à l'enfant : ses activités cognitives existent d'abord dans l'interaction sociale avant d'être intériorisées et d'exister sur un plan subjectif. Telle est l'idée centrale, et très forte, du socio-constructivisme, du passage de l'inter-individuel à l'intra-individuel qui s'appuie sur la construction d'instruments psychologiques.

Il s'agit donc d'une centration profondément différente de celle de Piaget avec des visées tout à fait différentes. Le sujet de Vygotsky est un sujet individuel et social, qui va construire les instruments de sa pensée dans l'interaction sociale, le sujet de Piaget est un sujet épistémique, et c'est l'organisation de ses connaissances qui est

en jeu (et non pas la médiation qui y intervient, ni les instruments de son fonctionnement).

À partir de ce point focal de sa théorie, Vygotsky articule théoriquement les processus d'apprentissage et ceux du développement, sans les dissocier. Il va en particulier différencier dans le « développement-apprentissage » du sujet les concepts « quotidiens » et les concepts « scientifiques ». Les premiers se construisent sur le monde quotidien, sans que l'interaction sociale ait pour visée un apprentissage conceptuel organisé, alors que c'est le projet de l'intervention didactique pour l'acquisition des concepts scientifiques (Vygotsky, 1986, chap. 6). Dans la théorie de Vygotsky, d'une part, les concepts scientifiques sont enseignés dans des institutions scolaires, et d'autre part, leur mode de développement diffère de celui des concepts quotidiens. Cet approfondissement théorique du mode d'évolution des concepts est un apport directement pertinent pour toute didactique d'un domaine de savoir.

On a souligné ces différences dans les visées et les objets centraux de Piaget et Vygotsky pour amorcer la mise en évidence du fait ce ne sont pas des psychologues qui seraient en contradiction, mais qu'ils apportent chacun une contribution scientifique spécifique. Chacun propose une perspective originale sur la construction des connaissances, ainsi que le défend, par exemple, Shayer (2003). Nous allons donc entrer d'abord plus avant dans le cadre du constructivisme piagétien, puis développer l'acquis théorique de la conceptualisation vygotskienne, très important pour la didactique des sciences.

Le constructivisme piagétien.

La représentation dominante sur le constructivisme piagétien est probablement celle d'une construction interne au sujet, à laquelle on pourrait opposer le socio-constructivisme vygotskien, comme prenant en compte la dimension sociale qui aurait été « escamotée » chez Piaget. Pour montrer qu'il s'agit en fait d'un effet de perspective, on peut en appeler à Piaget lui-même : « *le groupe social joue [...] au point de vue cognitif le même rôle que la « population » au point de vue génétique. [...] En ce sens la société est l'unité suprême et l'individu ne parvient [...] à ses constructions intellectuelles que dans la mesure où il est le siège d'interactions collectives dont le niveau [dépend] de la société dans son ensemble* ». (Piaget, 1992, p. 345). La nécessité du social dans le développement cognitif y est clairement affirmée. Piaget intègre bien l'existence de deux mouvements dans le développement : l'un associé à l'individu théorisé comme sujet épistémique et l'autre proprement social. Mais c'est le processus d'organisation des connaissances (leur structure) qui va être central dans les recherches qu'il conduit. Ce « mécanisme interne » du développement est conçu en termes d'une double régulation, rétroactive et proactive⁴, dont la figure 2 présente un schéma.

On peut considérer cette double boucle comme un « zoom » sur une partie du système de régulation de l'activité (figure 1). C'est l'objet d'action qui est retenu de la situation : la comparaison entre l'état attendu de cet objet et l'effet observé déclenche un ajustement de l'action. L'effet en retour (*feedback*) sur le sujet (qui n'est pas explicitée dans la figure 1) va modifier l'action « en amont », par une

adaptation des connaissances et des schèmes d'action. De plus, dans la mesure où il y a résultat voulu (intention) ou attendu (anticipation), l'action aussi est régulée de manière proactive (*feedforward*). Piaget précise ce mécanisme en termes d'une dialectique entre *assimilation* de la situation nouvelle aux schèmes d'action et aux conceptualisations du sujet et *accommodation* de ses concepts et de leur organisation (On peut penser au passage de l'unidimensionalité de traitement des objets à la bidimensionalité, dont un modèle est le produit cartésien).

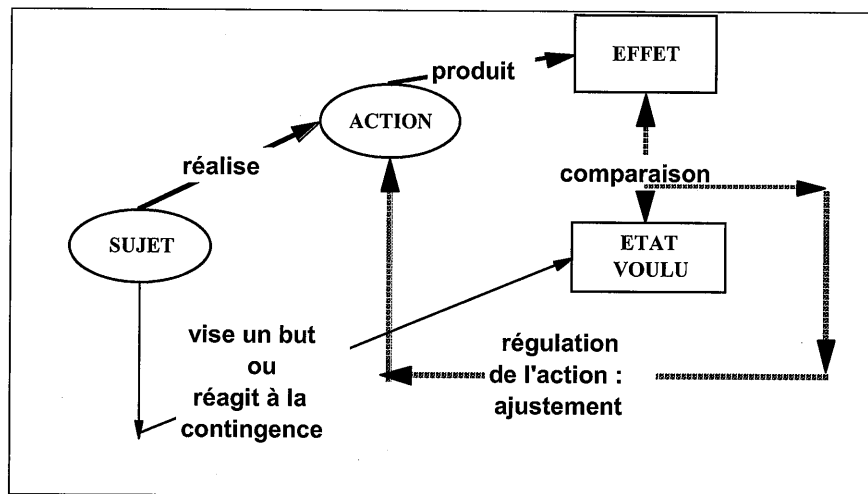


Figure 2. Schéma de régulation de l'action, dans une boucle courte d'ajustement de l'action, dépendant de la comparaison de l'effet produit à la visée de l'action. La visée peut être déterminée par un but conscient ou être le résultat de la contingence de la présence simultanée du sujet et de l'objet dans la situation.

Le développement des structures de connaissances résulte alors d'un double processus : une *déséquilibration* quand les structures antérieures connaissances conduisent le sujet à attendre un résultat qui est infirmé dans la réalisation de l'action et une *rééquilibration* lorsque les structures de connaissances sont modifiées (Piaget, 1985). Piaget ne dit pas que la rééquilibration est nécessairement « majorante », c'est-à-dire conduisant à une conceptualisation plus efficiente (c'est-à-dire la construction de concepts pour comprendre et agir sur le monde). Il développe par ailleurs l'importance de l'abstraction réfléchissante qui porte sur l'activité même du sujet et non simplement sur ses résultats. Ce concept d'abstraction réfléchissante a été opérationnalisé pour l'enseignement des mathématiques par Simon *et al.* (Simon, Tzur, Heinz, & Kinzel, 2004).

Dans le cadre de l'épistémologie génétique piagétienne, la prise en compte des contenus de la connaissance a été réaffirmée par Gréco – un collaborateur de Piaget à redécouvrir – et inscrite par Vergnaud dans sa théorie des champs conceptuels

(voir plus loin). Elle conduit par ailleurs à analyser la double régulation à la fois comme une régulation "fonctionnelle" d'ajustement des représentations de la situation et de l'organisation de l'action, et une régulation "structurelle" modifiant l'organisation conceptuelle et les opérations cognitives du sujet. Les schémas des figures 1 et 2 ne différenciaient pas jusqu'ici les deux types de régulation, et les temporalités en jeu. Nous y reviendrons plus loin.

L'épistémologie génétique piagétienne : la place des contenus de connaissance

La notion piagétienne qui a été probablement la plus retenue en psychologie, et dans les sciences de l'éducation est celle des stades (sensori-moteur, des opérations concrètes, des opérations formelles – avec éventuellement des « intermédiaires »), avec l'idée d'une « logique de l'enfant » évoluant vers une logique scientifique, permettant des opérations logiques coordonnées, manipulant des propositions abstraites, indépendamment de leur contenu. En fait, les travaux initiaux d'épistémologie génétique sur l'espace, le nombre, la vitesse et le temps, les notions physiques, présentent des organisations successives des représentations de l'enfant dans chacun de ces domaines, organisations qui présentent un parallélisme quant à la structure sous-jacente.

Gréco a souligné la place du contenu dans des analyses rassemblées en un ouvrage postume (Gréco, 1991). Il y met en évidence l'importance de la prise en compte de l'objet de l'action et de la tâche. Il rappelle ainsi que « *dans la genèse de structures logiques élémentaires, Inhelder et Piaget [...] indiquent des étapes ou des niveaux réguliers mais insiste[nt] aussi sur le fait que ces étapes sont fortement diversifiées selon la nature du matériel, la tâche classificatoire proposée à l'enfant [...] etc.* » (op. cit., p. 38). Il souligne la nécessité de « *préciser les conditions de l'équilibration, notamment en tant que ces conditions relèvent aussi des propriétés des objets et des tâches* » (p. 39), et insiste sur le rôle joué par l'objet de connaissance et d'action dans la régulation au coeur du processus de développement : « *l'ajustement des formes aux contenus oblige à une révision qui révèle des propriétés que les formes disponibles ne permettent pas de couvrir... Partie intégrante du constructivisme piagétien est le souci de restaurer la place de l'objet dans le développement* » (op. cit., p. 55).

L'apport complémentaire des champs conceptuels de Vergnaud

Comme l'a souligné Gréco, les concepts piagétiens essentiels de déséquilibration / rééquilibration, de dialectique de l'assimilation et de l'accommodation, et d'intervention d'un processus complexe de régulation sont généraux mais doivent se spécifier selon le contenu des connaissances. Il appartient à Vergnaud d'avoir élargi le cadre piagétien en théorisant la notion de champ conceptuel (Vergnaud, 1982, 1990), articulant classes de situations, invariants opératoires, schèmes d'action et systèmes de représentation, relativement à un domaine de savoir.

La théorie des champs conceptuels « *a d'abord été élaborée en vue de rendre compte du processus de conceptualisation progressive des structures additives, des*

structures multiplicatives, des relations nombre-espace, de l'algèbre » (Vergnaud, 1990, p. 135). Elle est née à l'articulation entre deux approches épistémologiques : celle de la didactique des mathématiques (et, au-delà, des savoirs disciplinaires), et celle de la psychologie cognitive développementale. Schématiquement, du point de vue didactique, la notion de champ conceptuel vise à fournir un cadre d'analyse du rapport élève-savoir dans le triangle didactique : élève, savoir, enseignant. Du point de vue de la psychologie du développement, la théorisation en termes de champ conceptuel permet d'analyser de manière conjointe les effets des apprentissages et ceux du développement au long de la scolarité mathématique.

La notion de champ conceptuel

Un exemple typique est celui du champ conceptuel des structures additives dans le calcul élémentaire, avec un ensemble de concepts numériques : nombre (naturel, d'abord « petit »), relation d'ordre (entre entiers d'abord, généralisée ensuite à la droite numérique), opérations d'addition et de soustraction, leurs propriétés et leurs coordinations avec la relation d'ordre, avec des classes de problèmes impliquant ces opérations pour leur solution. Vouloir considérer le concept de nombre « en soi », isolé des autres concepts qui lui donnent un sens opérationnel, est non seulement inopérant pour comprendre les acquisitions des enfants, mais dénué de sens pour étudier les processus d'enseignement visant des connaissances numériques. La notion de champ conceptuel est pertinente pour étudier des acquisitions ou des apprentissages à des niveaux très variés, de la conceptualisation « quotidienne » chez le jeune enfant (hors d'un projet didactique) à la conceptualisation visée dans un enseignement scientifique ou celle de l'étudiant se spécialisant en mathématiques⁵.

Ainsi, à un niveau élémentaire, la construction d'une collection complète et sans répétition de formes colorées à partir de formes et de couleurs données indépendamment fait intervenir un ensemble de concepts relevant du champ conceptuel du produit cartésien (Rogalski, 1985). Elle fait intervenir les notions d'identité et de différence pour des couples, éventuellement la cardinalité des ensembles, la distributivité (qui assure que toute forme est associée successivement à chaque couleur, ou l'inverse). Remarquons que les concepts en question sont des précurseurs de concepts logico-mathématiques, bien qu'ils soient aussi des « concepts quotidiens » (ce que sont aussi les « petits » cardinaux, que manipule l'enfant d'âge préscolaire, à partir du précurseur que constitue la « numérosité » : une qualité perçue de collections d'objets, qui n'est par ailleurs pas un apanage humain mais est partagée par de nombreuses espèces). Ils vont se développer en s'intégrant dans le champ conceptuel des structures multiplicatives.

Les concepts peuvent être considérés comme des nœuds d'un réseau de relations de tous ordres ; un champ conceptuel correspond à une partie de ce réseau, qui possède des caractères de pertinence relativement à un ensemble de situations à traiter. Ainsi, de nombreux concepts sont pris dans le champ conceptuel des structures multiplicatives numériques : les concepts de produit cartésien, de mesure-produit, d'applications linéaires sur $\mathbb{R}$, d'opérations de multiplication dans divers ensembles numériques ($\mathbb{N}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$). Réciproquement, un même concept

scientifique peut s'inscrire dans différents champs conceptuels : ainsi, la surface (comme mesure) se rattache aux champs conceptuels des quantités physiques et des opérations de mesure, des ensembles de nombres positifs, de l'espace et de ses modèles, au champ conceptuel des structures additives (en tant que mesure « simple »), aux structures multiplicatives (comme produit de mesures « linéaires »).

Les schèmes dans la théorie des champs conceptuels

Vergnaud insiste sur le fait que, pour prendre en compte la fonction adaptative de la connaissance, il faut donner une place centrale à sa dimension opératoire (« *la connaissance rationnelle est opératoire ou n'est pas* », *op. cit.*, p. 136). La notion de « schème » modélise cette fonction opératoire. Avec Piaget, on définit le schème comme organisation invariante de l'action pour une classe de situations.

Il faut insister sur le fait que ce n'est pas l'action qui est invariante, mais une propriété particulière de l'action: son organisation. Le caractère opératoire du schème tient justement à la possibilité que l'action puisse varier selon la variation des déterminants de la situation dans laquelle le sujet agit : c'est ce qui permet l'adaptation à des situations nouvelles et non la simple répétition. Dans la lignée piagétienne, plusieurs processus sont postulés dans le développement des schèmes : un double processus d'assimilation et d'accommodation (de même nature que le processus en jeu dans le développement conceptuel), des processus de généralisation / spécification, et des processus de combinaison de schèmes pré-existants.

Dans le domaine des acquisitions mathématiques, Vergnaud a montré l'évolution du schème de dénombrement au cours de l'apprentissage numérique de l'enfant et de l'élève. Ce schème comporte la coordination temporelle des centrations visuelles, du geste de pointage, de la récitation de la liste de noms de nombre, de la répétition du dernier mot-nombre (un ordinal) pour donner la cardinalité de l'ensemble dénombré (« un, deux, trois, ... , sept - SEPT ! »). L'enfant va assimiler les situations de dénombrement à ce schème initialement acquis pour de toutes petites collections. De nouvelles situations vont appeler une accommodation du schème initial : pour de « grandes » collections, des opérations vont s'ajouter à l'organisation antérieure : la structuration spatiale de la collection, l'utilisation du théorème-en-acte d'addition des cardinaux de sous-ensembles disjoints, des actions de marquage des éléments déjà comptés, l'utilisation d'un système intermédiaire (bâtons regroupés par cinq dans les anciens dénombrements manuels de bulletins de vote par exemple). Les opérations « techniques » de l'addition s'y articuleront.

Par ailleurs, l'analyse proposée en théorie de l'activité avec l'emboîtement « activité, action, opération » (Galperine, 1966, Haenen, 2000 ; Leontiev, 1978 ; Savoyant, 1979 ; 2005) conduit à distinguer des niveaux dans les schèmes⁶.

La question des schèmes d'action chez l'élève se pose pour étudier le développement de ce qu'on pourrait appeler leur dextérité, dans l'exécution de procédures mathématiques ; ce n'est pas notre propos dans ce livre.

L'importance des systèmes de représentation

Dans la théorie des champs conceptuels, le fait de développer « une approche psychologique et didactique de la formation des concepts mathématiques, conduit à considérer un concept comme un ensemble d'invariants utilisables dans l'action. La définition pragmatique d'un concept fait donc appel à l'ensemble des situations qui constituent la référence de ses différentes propriétés, et à l'ensemble des schèmes mis en œuvre par les sujets dans ces situations. Toutefois l'action opératoire n'est pas le tout de la conceptualisation du réel [...], l'usage de signifiants explicites est indispensable à la conceptualisation » (op. cit. p. 145). La reprise de la déclaration d'Inhelder et Piaget : « la mémoire d'un schème est ce schème », renvoie à la question du passage des "concepts en acte" et des "théorèmes-en-acte" des schèmes à des concepts représentables, à partir d'une prise de conscience.

Pour Vergnaud, les représentations ont une double facette : le signifiant correspond à leur dimension externe et le signifié à leur dimension interne. Les représentations externes (signifiants) peuvent prendre des formes diverses, même si Vergnaud a souligné, comme Vygotsky, la place centrale du langage verbal (comme opposé au non-verbal, il peut être oral ou écrit). Le traitement de représentations symboliques peut faire partie intrinsèque de l'activité : c'est un point crucial pour analyser le double processus enseignement / apprentissage dans l'enseignement secondaire, particulièrement pour tout ce qui a trait à l'algèbre.

Histoire collective des mathématiques, histoire individuelle de l'élève

Au moment de l'enseignement, un processus de conceptualisation a déjà eu lieu dans des "communautés mathématiques", avec la production d'un "savoir savant" – au cœur des analyses épistémologiques en didactique des mathématiques. Ces organisations conceptuelles historiquement constituées servent de référence à la détermination des champs conceptuels pertinents pour analyser et provoquer des conceptualisations chez l'élève à partir de son activité dans des situations appropriées.

Du point de vue de l'élève, une histoire personnelle et les cadres familiers dans lesquels il agit introduisent dans son activité d'autres éléments que la structure conceptuelle de la situation. Vergnaud a ainsi bien mis en évidence une typologie des problèmes additifs dont la pertinence psychologique et didactique se marque par des différences importantes dans les acquisitions, alors que le modèle mathématique limite essentiellement les variations aux valeurs numériques et aux opérations "techniques" utilisables dans la résolution.

Le cadre théorique "socio-constructiviste" élaboré par Vygotsky permet de prendre en charge cette double détermination historique, en articulant deux notions. La première notion est celle de *médiation sociale* : elle intervient au premier chef par une intervention directe de l'adulte ou du "mieux sachant" ("*more knowledgeable*") sur l'activité de l'enfant ou de l'élève. Son analyse a été ultérieurement développée par Bruner dans une visée de théorie de l'instruction (Bruner, 1966; Wood, Bruner & Ross, 1976. La seconde notion est la dynamique

“concepts quotidiens / concepts scientifiques”, ces derniers étant objets d’enseignement, susceptibles d’une analyse comme « savoirs savants ».

Ce cadre vygotkien permet aussi de considérer le processus “apprentissage / développement” comme une unité du point de vue du sujet, et de prolonger à l’empan de la vie du sujet la problématique du développement (que la psychologie, et Piaget lui-même, a traditionnellement limitée à l’enfance).

Après avoir rappelé, ci-après, l’apport de Vygotsky, nous proposerons une mise en perspective des cadres piagétien et vygotkien comme des outils compatibles et complémentaires pour analyser les pratiques enseignantes et les acquisitions des élèves.

Intervention didactique et développement chez Vygotsky

La théorie de Vygotsky met au coeur du processus de développement la médiation sociale et l’apport des “instruments psychologiques” dans cette médiation. Elle offre ainsi une perspective complémentaire à celle de Piaget pour étudier la relation enseignement / apprentissage dans le développement des champs conceptuels d’un domaine scientifique comme celui des mathématiques. Vygotsky contribue aussi à l’analyse de la conceptualisation en montrant comment concepts “quotidiens” issus de la vie “courante” de l’enfant et concepts “scientifiques” enseignés se développent dans une dialectique de “double germination”.

Concepts quotidiens et concepts scientifiques

Le chapitre 6 de *Pensée et Langage* (Vygotsky, 1986) développe la problématique d’une double forme de concepts : des concepts *quotidiens* et des concepts *scientifiques*, et de leurs relations dans l’apprentissage et le développement de l’enfant. Il critique Piaget de ne s’être intéressé qu’au développement des concepts spontanés ou quotidiens, et de ne pas avoir regardé ce que devenaient les concepts scientifiques (enseignés) chez l’enfant et l’adolescent, et comment ils s’intégraient au développement.

La distinction ainsi introduite par Vygotsky contraste le mode d’existence de concepts issus de l’interaction de l’enfant avec les objets du monde sans qu’il y ait eu d’intervention didactique, au mode d’existence des concepts scientifiques issus d’une production collective antérieure, qui sont par ailleurs des objets d’enseignement.

Deux caractères distinguent les modes respectifs d’existence des concepts quotidiens et scientifiques : leur organisation – dimension “structurale” et leur rapport avec les objets – dimension “fonctionnelle”. Les concepts scientifiques sont fortement liés par des relations mutuelles, dont des relations d’abstraction (généralisation), alors que les concepts quotidiens peuvent être isolés. Dans l’activité du tout jeune enfant, le concept de « chat » ne suppose pas d’être inséré dans une relation d’abstraction avec celle de félin, ou de mammifère, et d’être l’objet d’un rapprochement et d’une différenciation avec le concept de « chien » : il peut fonctionner dans l’action, et être opératoire, sans de telles mises en relation. En revanche, le concept de *fonction* (numérique, d’une variable) en mathématiques

ne peut pas vivre sans celui de *variables*, tandis que l'opérationnalisation du concept de variable suppose des *concepts numériques*. Par ailleurs, le concept de *graphe de fonction* (sous-ensemble unidimensionnel du plan) et sa représentation graphique (externe) impliquent une *mise en relation nombre-espace*, avec les notions de *droite numérique*, d'*abscisse*, d'*ordonnée* et de *coordonnées*.

Les concepts quotidiens peuvent vivre "en-acte" et ne sont pas nécessairement conscients et verbalisables – soit que le processus de prise de conscience de ce « concept-en-acte » (Vergnaud, 1982, 1990) n'ait pas eu lieu dans le développement de l'enfant, soit que le fonctionnement actuel ne l'appelle pas. En revanche, les concepts scientifiques sont explicites et vivent à travers des représentations symboliques – au premier chef, le langage, et les autres systèmes symboliques en mathématiques.

Vygotsky développe l'idée qu'un concept quotidien est « *gorgé de contenu empirique* » : c'est ce qui fait sa force du point de vue de la signification, mais aussi sa faiblesse, car il « tire » avec lui des amas de propriétés, ce qui constitue une limitation à des constructions conceptuelles d'un niveau abstrait plus élevé.

En revanche, la force d'un concept scientifique réside dans sa généralité en termes d'abstraction et de généralité du domaine de mise en oeuvre (on peut parler de « *décontextualisation* »), le fait qu'il est conscient et a été construit avec les « mots pour le dire ». Sa force est dans aussi la cohérence du système de concepts dont il fait partie. Toutefois, s'il a une généralité plus grande que le concept quotidien, il présente beaucoup moins de contenu empirique, et cela en fait sa faiblesse, du point de vue de la signification⁷.

La dialectique de "double germination" des concepts quotidiens et des concepts pragmatiques.

La présentation des modes respectifs d'existence des concepts quotidiens et des concepts scientifiques peut induire à les considérer comme deux catégories conceptuelles. La dimension historique-développementale de l'approche théorique de Vygotsky est en fait essentielle pour dépasser cette vision : concepts quotidiens et concepts scientifiques se développent en interaction dans une dialectique de « double germination ».

D'une part, la germination des concepts quotidiens se fait du « bas » vers le « haut », vers ce qui est « général » et « décontextualisé », à partir de l'interaction avec les objets du monde de l'action (comme dans le constructivisme piagétien). D'autre part, la germination des concepts scientifiques se produit du « haut » vers le « bas », étayée par les représentations symboliques (dont le langage adéquat) proposées dans la médiation.

Dans cette métaphore biologique de la germination, les concepts quotidiens frayent la voie à la germination des concepts scientifiques par les significations qu'ils assurent, et les concepts scientifiques préparent la voie par leur organisation et les médiations qu'ils proposent, et « tirent » vers le haut – vers la conceptualisation scientifique – les concepts quotidiens dans leur germination.

Du point de vue de l'enfant, une acquisition opérationnelle a lieu quand les deux types de concepts se sont « rencontrés » et que deux processus se sont engagés. Le

premier processus est celui d'une réorganisation des concepts quotidiens, réorganisation qui va dans le sens d'un mode d'existence davantage organisé en système. Le second est un processus de prise de signification des concepts scientifiques pour devenir des concepts pour l'action. Ce processus d'interaction suppose des propriétés quant à la dynamique du développement : cette dynamique a lieu dans une *zone proximale de développement*⁸.

Zone proximale de développement et relation apprentissage / développement

La zone proximale de développement (ZPD) est située entre le niveau présent de développement, attesté par ce que l'enfant est capable de faire / de résoudre de façon autonome, et ce que l'enfant peut faire / résoudre avec l'aide d'autrui (adulte, enseignant, pair « plus sachant »). Pour la réussite de l'apprentissage conceptuel, les situations doivent relever de cette zone : si elles en sont au-delà de la ZPD, les aides ne produiront au mieux qu'un effet de copie immédiate (ou de récitation – Vygotsky parle de « *mécanique verbale* »), et ne contribueront pas au développement ; si elles sont en deçà de la ZPD, l'enfant / l'élève fait seulement fonctionner ce qu'il a déjà conçu, et n'apprend pas.

La notion de ZPD est pertinente pour aborder le développement d'une conceptualisation nouvelle à partir des acquisitions mathématiques antérieures de l'élève. En agissant sur l'élève dans cette zone, l'enseignant va permettre à des concepts « quotidiens » ou à des concepts mathématiques devenus « familiers » de se transformer en s'intégrant dans un champ conceptuel plus élaboré. Ces concepts pour l'élève pourront évoluer vers les concepts mathématiques qui leur sont épistémologiquement liés, si la médiation enseignante est réussie (ce qui suppose qu'elle vise la conceptualisation et non pas la seule mise en oeuvre de procédures). Le concept vygotksien de ZPD n'est pas juste une manière de parler des relations développement-apprentissage. Sa prise en compte transforme la problématique de ces relations : dans la théorie vygotksienne, la conceptualisation scientifique n'a pas à « attendre », « s'appuyer sur », ou « suivre » le développement conceptuel « spontané », mais elle intervient dans ce développement, en offrant des médiations nouvelles au travers de nouveaux instruments pour penser. Quant à la dynamique de l'apprentissage, elle dépend aussi de la « rencontre » possible des concepts enseignés et des significations que peuvent apporter les concepts quotidiens (ou les concepts mathématiques devenus familiers), bien que ces derniers soient plus « faibles » quant à leur généralité et leur organisation. Vygotsky propose ainsi un processus dialectique de conceptualisation au cœur des processus développementaux.

Une mise en convergence des cadres piagétien et vygotksien

Nous avons montré les spécificités des approches respectives de Piaget et de Vygotsky d'un point de vue épistémologique, ce qui nous a conduit à ne pas les considérer comme contradictoires. Par ailleurs, nous avons retenu de leur cadre théorique respectif ce qui concernait le développement conceptuel, du point de vue des questions de didactique mathématique (et des didactiques faisant une place

essentielle à la conceptualisation). Ces considérations nous conduisent à souligner leur convergence – ou leur complémentarité –, là où Bruner a “célébré leurs divergences”, argumentant que : “*with one thinker emphasizing the role of inner autochthonous logical processes, and the other the shaping role of culture, inevitably led to sharp divergences in their approach of mental growth*” (Bruner, 1996). Nous allons ainsi dans la même direction que d’autres chercheurs tels que Cole et Wertsch, spécialistes de Vygotsky, qui ont proposé d’aller au-delà de l’apparente antinomie social/ individuel entre Piaget et Vygotsky (Cole & Wertsch, 2001). En effet, Piaget n’a jamais dénié le rôle clé de la dimension sociale du développement de l’enfant – mais sa théorie ne l’intègre pas. De son côté, la théorie socio-constructiviste de Vygotsky n’est en rien incompatible avec la notion de structuration des connaissances chez le sujet via les processus de régulation invoqués dans le cadre Piagétien – même s’il ne les a pas considérés. Ce qui suit renvoie aux convergences en ce qui concerne les facteurs du développement, les instruments psychologiques – ou cognitifs –, et le temps long du développement.

Les facteurs du développement

On a souligné plus haut le fait que si les facteurs de développement n’étaient pas au coeur de la problématique d’épistémologie génétique de Piaget, il ne les réduisait pas à l’interaction avec les objets de l’action. En fait, il a mis en avant trois facteurs généraux : la maturation biologique ; le rôle de l’exercice et de l’expérience acquise dans l’action ; et, enfin, les interactions et transmissions sociales (Piaget & Inhelder, 1971, p. 152 ff.). La dimension sociale de la théorie de Piaget a été étudiée de manière plus générale par DeVries (1997). Vygotsky, quant à lui, a explicité le rôle de l’interaction avec les objets du monde de l’action dans le développement de l’enfant : le socio-constructivisme de Vygotsky est un constructivisme matérialiste.

Instruments psychologiques ; instruments cognitifs

Un élément central dans la théorie de Vygotsky est la place des instruments dans le développement de l’enfant, en particulier des instruments psychologiques, ces instruments étant déjà socialement constitués. Une place tout à fait spécifique est attribuée au langage, instrument psychologique par excellence.

Piaget a largement utilisé le langage (et le graphisme) comme un moyen d’accès aux “*représentations spontanées*” de l’enfant. Pour autant, il n’a pas mis en question le rôle du langage dans le développement, mais fait explicitement référence à ce que fournit le langage en matière d’instruments cognitifs : “[...] *language has already been elaborated socially and contains a notation for an entire system of cognitive instruments (relationships, classifications, etc.) for use in the service of thought. The individual learns this system and then proceeds to enrich it.*” (Piaget & Inhelder, 1971, p. 87).

Le temps long du développement d’un sujet

L’étude par Piaget et ses collaborateurs des stades de développement cognitif sur les grandes catégories de la pensée a mis en avant, régulièrement, le temps long de

ce développement. Dans le domaine numérique, Vergnaud a montré que le champ conceptuel des structures additives se développait précocement, avec des opérations additives dès 2 ans, alors que les acquisitions sur les compositions de transformations ou de comparaisons¹⁰ n'étaient pas terminées à l'issue de la scolarité obligatoire. Des données sur l'acquisition des mesures spatiales (Rogalski, 1982), en particulièrement du volume, ont montré la difficulté et la durée du processus de conceptualisation faisant passer d'une notion « unidimensionnelle » du volume (un concept familier en fin de primaire) à la notion de mesure produit (dont la conceptualisation n'est pas achevée en fin de collège).

L'insistance sur le temps long du développement cognitif n'apparaît pas sous la même forme chez Vygotsky, mais il a souligné, dans le chapitre « concepts quotidiens, concepts scientifiques » (1986), que la formation des concepts scientifiques – aussi bien que celle des concepts quotidiens – ne fait que commencer lorsque l'enfant assimile pour la première fois une signification ou un terme nouveau, porteur de concept scientifique.

Didactique et extension de l'empan temporel du développement

L'interprétation didactique “des deux constructivismes” nous conduit à étendre l'empan temporel du développement jusqu'aux “mathématiques avancées”. Les concepts déjà disponibles dans un champ conceptuel sont des *précurseurs* possibles des concepts à acquérir et occupent une fonction analogue aux concepts quotidiens dans le cadre vygotskien. Ils ont potentiellement deux rôles contradictoires, facilitateur ou obstacle. Le caractère producteur des précurseurs est en particulier de donner du sens aux nouveaux concepts (Vygotsky parlait de la “force” des concepts quotidiens) ; leur caractère réducteur tient à des propriétés de ces concepts qui ne sont plus valides pour ceux à acquérir (après Bachelard, la didactique française a parlé d'obstacle épistémologique). Dans la théorie de Piaget, la dualité des rôles producteur / réducteur peut s'interpréter en termes du jeu des processus d'assimilation et d'accommodation.

Un apport important du cadre piagétien – dont on ne retrouve pas l'analogue chez Vygotsky – est le fait que le savoir se développe par un « effet Münchhausen » : « une des idées-forces du constructivisme piagétien est que le savoir crée lui-même les conditions et les instruments du savoir » (Gréco, 1991, p. 52). Il y a ainsi une dynamique propre du savoir au-delà des occasions de développement provoquées par la médiation didactique¹¹.

Les deux constructivismes” : des outils théoriques complémentaires

Chacun des deux grands acteurs du constructivisme a reconnu les points de force de l'autre: Vygotsky, discutant du décalage en faveur des concepts scientifiques sur un certain nombre de notions de causalité, a précisé : « je ne suis pas allé regarder finement l'état où étaient les enfants en ce qui concernait la logique qu'ils étaient capables de mettre en oeuvre ; de ce point de vue-là Piaget a montré une supériorité écrasante » (Vygotsky, 1986). Quant à Piaget, il a, de son côté, marqué son accord avec l'approche de Vygotsky de l'analyse des concepts quotidiens et

scientifiques. Il a par ailleurs souligné que « l'individu ne parvient [...] à ses constructions intellectuelles que dans la mesure où il est le siège d'interactions collectives dont le niveau [dépend] de la société dans son ensemble » (Piaget, 1992, p. 345).

Enfin, une convergence plus philosophique entre les cadres piagetien et vygotkien a été soulignée par Bruner (1996) : *"The unique mystery of mind is its privacy, its inherent subjectivity". "Both Piaget and Vygotsky were very explicit on this point. See Piaget (1974, pp. 28 ff.); Bruner's (1987) preface to Volume One of Vygotsky's collected works"*. Cette convergence sur la subjectivité de la pensée conforte l'articulation entre les deux cadres développementaux et la théorie de double régulation de l'activité, qui donne toute sa place au sujet, auteur et acteur de son activité propre, qu'il s'agisse de l'élève dont on vise l'apprentissage ou de l'enseignant qui intervient pour cet apprentissage.

CONCLUSION : ARTICULATION DE LA THEORIE DE L'ACTIVITE ET DES DEUX CONSTRUCTIVISMES

Nous avons présenté la théorie de l'activité et le modèle de double régulation de l'activité exploité en psychologie ergonomique mais qui peut être étendu à toute activité finalisée, dont celle de l'élève. Une composante du modèle de double régulation de l'activité est l'impact de l'activité sur le sujet lui-même, qui exprime la dimension développementale de ce modèle. S'agissant de la connaissance, nous avons ensuite souligné les convergences et la complémentarité des théories constructivistes de Piaget – avec l'extension des champs conceptuels de Vergnaud – et de Vygotsky – avec la théorie de Bruner sur l'étayage.

L'articulation entre la théorie de l'activité et « les deux constructivismes » offre ainsi un outil théorique pour une double approche du point de vue de la didactique des mathématiques et du point de vue de l'activité des sujets concernés : enseignant et élèves. En particulier, la théorie piagétienne met en regard « du côté de l'élève » les analyses épistémologiques des objets mathématiques en jeu, cependant que la théorie vygotkienne rend compte de l'intervention didactique de l'enseignant, dans sa médiation entre le savoir et l'élève et dans son étayage de l'activité de l'élève.

La dimension développementale appelle par ailleurs à questionner la temporalité des processus en jeu, notamment pour les élèves. Leplat avait déjà mis en rapport théorie de l'activité et constructivisme piagétien en soulignant l'existence d'une régulation fonctionnelle et d'une régulation structurale. La régulation fonctionnelle conduit à l'ajustement de l'action (cf. figure 2), dans un processus de micro-genèse, qui peut se traduire par des acquisitions procédurales – avec un étayage possible par l'enseignant. Cette régulation du court terme peut aussi comporter des « amorçages » conceptuels dans la ZDP de l'élève, entre concepts déjà acquis et nouveaux concepts mathématiques. La régulation structurale porte sur le long terme, dans un processus de macro-genèse, dans lequel se transforment les structures conceptuelles et les schèmes d'action du sujet, dans une dialectique d'assimilation et d'accommodation.

Dans une perspective didactique, on peut rendre compte du rapport entre ces deux temporalités en faisant l'hypothèse que la mise en fonctionnement de concepts – « amorcés » via une « situation fondamentale » (lorsqu'elle existe), un problème pertinent, voire par un apport *ex cathedra* explicite de l'enseignant – contribue de manière essentielle à la structuration du champ conceptuel visé¹². D'où l'importance méthodologique, d'une part, de l'analyse des tâches mathématiques proposées par l'enseignant du point de vue des activités potentielles des élèves lors de la réalisation de ces tâches, et d'autre part, de l'analyse des interventions didactiques sur l'activité des élèves en classe. Deux éléments délicats dans les analyses des situations d'enseignement / apprentissage sont la place jouée par l'activité autonome de l'élève et l'importance de l'identification par l'enseignant de la ZPD pour y intervenir.

Les directions de travail s'appuyant sur les outils théoriques présentés ici restent très générales. Il importe de préciser encore beaucoup d'aspects permettant de d'étudier l'intervention didactique et le développement des élèves à différents niveaux d'analyse : du niveau global des relations entre des organisations d'ensemble de l'intervention enseignante et les acquisitions mathématiques des élèves¹³, au niveau « micro » des interactions fines dans le cours de la classe, en passant par le niveau local d'une séance de classe.

Janine Rogalski
Laboratoire Didactique André Revuz
University Diderot – Paris7

NOTES

¹ On parle ici de compétences au sens retenu en psychologie ergonomique comme en didactique professionnelle : il ne s'agit en rien la compilation d'un ensemble de tâches réussies, mais d'un potentiel de ressources d'action du sujet. On utilisera le même sens si l'on parle de compétences mathématiques de l'élève.

² Attention : cette distinction tâche / activité va à l'encontre de formulations que l'on peut rencontrer dans des textes pédagogiques divers; Dans la théorie de l'activité, "les activités que l'on proposera à l'élève" s'exprimeront ainsi comme "les tâches que l'on proposera ...".

³ Berliner (2001) a montré la complexité de la question des caractéristiques et de la définition même de d'un enseignant "expert". Une articulation d'approches qui converge avec celle que nous proposons ici est présentée par Perrenoud (2005) à propos de la question des savoirs mobilisés dans l'analyse des pratiques.

⁴ Cette conception est à relier à l'importance prise alors par les concepts de la cybernétique, dont la régulation est un concept central, de la biologie aux systèmes automatisés.

⁵ L'entrée retenue ici est celle des concepts. Elle est directement opératoire pour étudier les acquisitions et les apprentissages dans des disciplines scientifiques (les champs conceptuels y sont définis par référence au savoir savant). Une entrée « duale » par les situations a été retenue en didactique professionnelle, avec la notion de « structure conceptuelle d'une situation », articulant des concepts divers, dont des concepts pragmatiques (Pastré, 1999 ; Vidal-Gomel et Rogalski, 2007). La notion de situation fondamentale de Brousseau peut être vue comme une expression du lien épistémologique concepts – situations.

⁶ L'analyse se complique du fait que ces niveaux sont relatifs, dans la mesure où ce qui est une action composée de plusieurs opérations peut devenir, au cours du développement, une opération « unitaire » elle-même composante d'une action de niveau plus élevé.

⁷ Dans le domaine du travail, la didactique professionnelle a introduit la notion théorique de « concepts pragmatiques », qui sont des organisateurs de l'activité. Historiquement construits par une communauté professionnelle dans et pour un domaine particulier, ce ne sont ni des concepts "quotidiens", ni des concepts "scientifiques" (ou techniques) au sens de Vygotsky. Intégrés dans une structure conceptuelle de la situation de travail, ces concepts sont en relation avec des indicateurs (observables) et des moyens pour agir (Vidal-Gomel et Rogalski, 2007). Dans l'enseignement, une expression comme "la classe décroche" renvoie à un concept pragmatique dont les enseignants utilisent divers indicateurs, et pour lequel ils ont une panoplie de moyens d'intervention (changement de tâche, intervention sur l'activité des élèves, ...).

⁸ Plusieurs « déclinaisons » de cette notion peuvent se trouver dans la littérature : zone de proche développement, zone de développement proximal, voire zone de développement potentiel. J'ai gardé proximale comme associée à « zone ».

⁹ Notre centration issue de la didactique porte en fait sur le développement des connaissances et particulièrement les processus de conceptualisation, et non sur des processus logiques généraux.

¹⁰ Jean-François Richard (2004) a montré que des étudiants de sciences humaines rencontraient encore de gros problèmes en statistique descriptive dans des questions sur des effectifs cumulés (exigeant

d'effectuer des soustractions). Ma propre expérience m'a montré qu'on retrouvait ce type de problèmes avec la récupération d'erreurs sur les crédits et débits en comptabilité.

¹¹ C'est l'existence de la dynamique propre du savoir nous a conduit à considérer l'activité de l'enseignant comme gestion d'un environnement dynamique, à savoir le rapport élève/savoir (Rogalski, 2003).

¹² On peut même faire l'hypothèse que le fonctionnement peut créer du sens. – sous certaines conditions sur la densité du travail et sur la posture de l'élève par rapport aux mathématiques.

¹³ Les problèmes méthodologiques restent encore largement ouverts pour définir des indicateurs globaux adéquats aussi bien des acquisitions des élèves (au-delà de bilans de réussite de certains types de tâches) que des propriétés pertinentes de l'intervention enseignante.

ALINE ROBERT ET CHRISTOPHE HACHE

CHAP 2. POURQUOI, COMMENT COMPRENDRE CE QUI SE JOUE EN CLASSE DE MATHÉMATIQUES ?

INTRODUCTION

Le chapitre précédent propose un cadre général unique, organisé autour des activités des acteurs, permettant d'analyser les apprentissages des élèves et les pratiques des enseignants ; l'objet du présent chapitre est de spécifier aux mathématiques en situation scolaire cette démarche, dans laquelle nous inscrivons, du point de vue théorique et méthodologique : tous les travaux qui l'illustrent dans cet ouvrage se sont intéressés à l'enseignement au collège et au lycée (11-18 ans).

Nos recherches ont un double objectif –il s'agit de donner aux chercheurs des accès aux apprentissages des élèves sur un contenu donné, en relation avec l'enseignement dispensé, au sein d'un système scolaire précis, dans une visée diagnostique (analyses pour comprendre ce qui existe) ou prospective (expérimentations pour comprendre comment enrichir l'existant) ; à plus long terme il s'agit de travailler à et sur la formation des enseignants, notamment à partir d'inférences des analyses précédentes et d'hypothèses autorisées par le cadre théorique (conclusion du livre).

L'objet de ce chapitre est ainsi de décrire les cadrages théoriques spécifiques que nous utilisons et les méthodologies générales qui en découlent, les chapitres ultérieurs décrivant des recherches effectives précises menées de cette manière.

Nous allons d'abord présenter les outils théoriques que nous avons adoptés pour avancer vers cette compréhension des apprentissages sur un contenu donné. L'intelligibilité que nous visons s'exprime en termes de mises en relation de contenus mathématiques, d'enseignement et d'apprentissages, elle s'appuie aussi sur la mise en évidence et la description de régularités et de variabilités selon les classes, les enseignants et leurs pratiques. Dans un premier temps nous abordons les moyens que nous nous donnons pour avoir accès aux apprentissages, et les résultats que nous attendons.

Notre approche est, d'une, part résolument didactique, au sens où nous développons toutes nos analyses à partir des spécificités des contenus mathématiques à enseigner. L'étude de ces contenus est un préalable incontournable, mais cette étude, toute préalable qu'elle soit, ne se fait pas indépendamment du reste. Ainsi décrivons-nous les contenus mathématiques en pensant à ce que nous allons étudier : les apprentissages. Plus précisément, dans notre cadre théorique, l'apprentissage mathématique est associé à la notion de

conceptualisation (voir chapitre précédent). Cela nous amène à référer les contenus mathématiques étudiés à des niveaux de conceptualisation. Ces niveaux de conceptualisation sont définis à partir des programmes scolaires et des caractéristiques des notions concernées par un ensemble de tâches et par les connaissances correspondantes dont la disponibilité est visée (2ème paragraphe de la première partie de ce chapitre). C'est d'ailleurs là que peuvent intervenir certaines différences entre didacticiens francophones, discutées à la fin de ce chapitre. Par exemple, nous donnons beaucoup d'importance, parmi d'autres caractéristiques, à la variété des mises en fonctionnement possibles des connaissances, et nous nous sommes donné les moyens de la repérer à partir des énoncés des exercices.

D'autre part, sur un contenu donné ainsi spécifié, c'est l'étude des activités des élèves qui oriente nos analyses. En effet notre inscription dans la théorie de l'Activité nous amène à postuler que les apprentissages étudiés dépendent directement des activités des élèves. Ceci alors même que ces dernières restent en partie inaccessibles et sont différentes d'un élève à l'autre, et alors que d'autres éléments peuvent intervenir dans les apprentissages (1er paragraphe de la première partie de ce chapitre). Ainsi, de fait, nous n'avons même pas accès aux différentes traces des activités singulières des élèves. Nos moyens ne nous donnent que la possibilité de prévoir les activités possibles des élèves, que nous prenons comme référence et qui constituent finalement notre objet d'étude. Il s'agit des activités que les élèves ont pu faire pendant une ou plusieurs séances, sans que nous puissions assurer que c'est effectivement le cas pour tel ou tel élève, et non des activités qu'ils auraient pu faire compte tenu de leurs connaissances dans certaines situations (celles-ci sont appelées potentielles et peuvent faire l'objet d'autres analyses).

Étudier les activités des élèves (au sens des activités possibles) pendant une séance met en jeu l'analyse de leur travail sur les tâches proposées en classe, avec tout ce qu'y ajoute l'enseignant pendant le déroulement de la séance. Nous avons mis au point des analyses *a priori* des tâches en termes de mises en fonctionnement potentiel des connaissances mathématiques (3ème paragraphe de la première partie de ce chapitre) qui permettent de caractériser ce que les élèves vont avoir à faire avec leurs connaissances. Cela est complété par la mise au point de moyens pour analyser les séances de classe, et les activités possibles des élèves, c'est à dire ce qu'ils ont pu faire : nous faisons intervenir tout ce que l'enseignant ajoute, pendant les déroulements, aux tâches prévues, y compris avec les aides diverses ou l'organisation de travail collectif, et qui contribue à modéliser les activités possibles des élèves (2ème paragraphe de la deuxième partie de ce chapitre).

Cependant, si ces activités se développent bien en grande partie en classe, au jour le jour, l'ensemble de ce qui est proposé aux élèves sur le contenu étudié (les cours, les exercices, dans un certain ordre, ce qu'on appelle le scénario) doit aussi évidemment être pris en compte. Ce contenu étudié réfère au découpage que nous adoptons dans nos recherches, lié le plus souvent à l'enseignement d'une notion, ou d'un chapitre du programme.

Nous cherchons ainsi plus précisément à apprécier, sur un contenu donné décrit en relation avec la conceptualisation visée, les scénarios globaux possibles ou

effectifs. Leur description, comme un ensemble ordonné de cours et d'exercices associés à des mises en fonctionnement attendues des connaissances, doit permettre une première approche de l'ensemble des activités possibles des élèves en relation avec leurs apprentissages. Ces scénarios globaux pourraient être qualifiés d'« itinéraires cognitifs » prévus (1er paragraphe de la deuxième partie de ce chapitre). Les séances analysées se réfèrent plus ou moins selon les recherches à ces scénarios.

Toutes ces analyses mettent en jeu des hypothèses générales que nous adoptons sur les apprentissages. Elles résultent de notre adaptation aux apprentissages mathématiques en situation scolaire du croisement des théories de Piaget et Vygotski, prolongées par celle de Vergnaud (cf. chapitre précédent). L'analyse des tâches proposées met ainsi en jeu des éléments qui sont supposés pouvoir avoir une influence sur les activités et par là-même sur les apprentissages. Ainsi, en relation avec la construction de la disponibilité visée, que nous allons associer à la conceptualisation, la variété de ce que les élèves ont à mettre en fonctionnement dans leur travail a un rôle, tout comme l'ordre dans lequel les élèves travaillent sur les exercices ou les introductions, ou comme la quantité d'exercices analogues etc. Autrement dit les possibilités, plus ou moins offertes par les scénarios, de faire bouger, mélanger, reconnaître les connaissances à utiliser dans les exercices qu'ils ont à chercher est partie prenante de la construction de leurs connaissances. C'est associé à des processus d'assimilation, d'accommodation, de déséquilibre et ré-équilibration. Mais cela dépend fortement non seulement des tâches proposées et de ce qu'elles peuvent provoquer, mais encore de la manière dont elles sont travaillées par les élèves (notamment en classe en relation avec la nature et la qualité des investissements individuels, collectifs) et des médiations et tutelles engagées par l'enseignant. Pour analyser les déroulements en classe on retient, de même, tout ce qui peut avoir une influence sur les activités des élèves en relation avec les pratiques des enseignants, que ce soit en lien avec la nature du travail organisé (autonome, collectif) ou avec les interventions directes de l'enseignant, ses aides, son repérage du travail des élèves et la façon dont il s'appuie sur ce travail, ses bilans.

Enfin, depuis une quinzaine d'années, nous avons introduit l'idée que les choix des enseignants, en classe et pour la classe, ne sont pas seulement déterminés par les seuls apprentissages visés. Ils dépendent aussi de nombreuses contraintes externes, institutionnelles (liées aux programmes et aux horaires) et sociales (liées aux classes et aux établissements), et de la personnalité de chaque enseignant, de ses représentations, de ses connaissances et expériences. Pour mieux comprendre les pratiques des enseignants (dont les activités des élèves dépendent et qui dépendent des activités des élèves¹), nous sommes amenés à en compléter les analyses à partir de ce qui se passe en classe en prenant en compte des déterminants liés au métier dans une double approche didactique et ergonomique (troisième partie de ce chapitre). L'utilisation du mot « pratiques » indique la prise en compte globale du travail de l'enseignant avant, pendant ou après la classe, même si c'est à partir du travail en classe et pour la classe et de ses activités en relation avec les activités attendues des élèves que nos analyses se font.

On voit bien ainsi que le découpage de la réalité adopté n'est pas linéaire, plusieurs analyses doivent être imbriquées : par exemple l'étude de séances particulières peut faire intervenir les scénarios globaux dans lesquelles elles s'inscrivent ; l'analyse des activités possibles des élèves se fait compte tenu de celles des enseignants, mais ces dernières sont pilotées par les activités prévues des élèves, qu'elles contribuent, dans un deuxième temps, à compléter. Le choix des variables à analyser et des indicateurs à prendre en compte est délicat car non seulement les variables en jeu sont souvent à la fois locales et globales (une notion / des exercices précis par exemple), mais encore elles se définissent les unes en fonction des autres. Par exemple ce qui est retenu pour décrire les contenus enseignés, leur spécificité, dépend de ce qui nous intéresse pour apprécier les scénarios et leur potentialité en termes d'apprentissages, les descriptions des scénarios, en retour, sont évidemment fonction des spécificités des contenus et de leur description. Et ce que nous en présentons comme description des contenus mathématiques doit permettre d'apprécier le processus d'apprentissage correspondant, par exemple en termes de variété de tâches. Enfin si ce sont les activités attendues des élèves qui contribuent à décoder les activités des enseignants en classe, ce sont ces dernières qui, finalement, nous permettent de décrire les activités possibles des élèves...

Reste que bien des questions demeurent au sein de ce découpage, que nous récapitulons dans la quatrième partie de ce chapitre. Une des questions encore ouverte aujourd'hui par exemple, sur laquelle nous travaillons, est la détermination d'indicateurs significatifs dans le discours de l'enseignant : jusqu'à quel point analyser la manière dont l'enseignant s'adresse aux élèves, par-delà le strict contenu de son message, sur lequel il faut aussi se poser des questions ? Dans quelle mesure (et à quoi ?) les élèves sont-ils sensibles – les répétitions, les images, ce qui est écrit et dit, les questions, les différences de présentation ?

Les résultats que ces outils ont permis de produire, comme l'illustreront les chapitres suivants, sont issus de recherches assez récentes, dans lesquelles les chercheurs les ont adaptés à leurs problématiques précises en particulierisant la méthodologie, en la discutant, voire en l'enrichissant.

Ces travaux portent aussi bien sur des analyses de manuels, qui utilisent surtout les analyses a priori (tâches, scénarios) et en illustrent la portée et les limites, que sur des analyses de pratiques dont on peut inférer des caractéristiques générales importantes, tant pour les élèves que pour les formations : stabilité intra-personnelle, régularités inter-enseignants, variabilités et évolutions... Un certain nombre de ces recherches ont comme entrée l'intégration des TICE dans l'enseignement, et proposent des diagnostics renouvelés des difficultés des enseignants ou des élèves amenant à élaborer des propositions d'utilisation ou de formations.

Soulignons que les descriptions raisonnées que nous produisons, à partir des indicateurs que nous avons retenus pour caractériser les variables qui interviennent dans nos analyses, permettent une compréhension approfondie de ce qui se joue en mathématiques en classe, à court et à moyen terme, du point de vue des régularités et des diversités pour un contenu à enseigner, pour un enseignant ou plusieurs enseignants. Le long terme (les apprentissages des élèves) est difficile à atteindre

tant il est délicat de circonscrire ce qu'on met sous le terme et tant sont nombreuses et en partie hors d'atteinte les variables qui y contribuent pour chaque élève ! Ainsi, même si certains travaux mettent en relation l'enseignement dispensé sur un chapitre, analysé suivant nos critères, et les productions des élèves qui en résultent, ils dégagent des régularités, assez locales, dépendant en partie des acteurs en présence, et ils ne prétendent pas en déduire des indications prescriptives. On peut dire en revanche que nos recherches peuvent permettre d'enrichir le travail des enseignants, en donnant accès à des variables qui contribuent à organiser une partie de leurs choix, avant et pendant la classe, et en donnant des moyens d'apprécier la palette correspondante des possibles et « des impossibles ». De plus, les régularités inter-enseignants et les variabilités qui sont dégagées, interprétées dans le cadre théorique choisi, contribuent à la réflexion sur les formations (conclusion du livre)

Ainsi, dans la première partie de ce chapitre, nous allons revenir sur les activités des élèves, attendues, possibles, *a minima* ou *a maxima* en présentant un schéma général de notre démarche didactique. Nous présentons les analyses *a priori*, mathématiques, des séances de classe, qui vont permettre d'apprécier ces activités (analyses globales des mathématiques à enseigner, relief et types de notions, et analyses locales *a priori* des tâches proposées, toutes en relation avec la conceptualisation visée et les apprentissages). Dans la deuxième partie, nous exposons les analyses *a posteriori* des séances, globalement (scénarios) et localement (analyses des déroulements), utiles pour accéder aux activités des élèves par l'intermédiaire de celles des enseignants. Nous présentons dans la troisième partie, de manière détaillée, les analyses de pratiques des enseignants de mathématiques, qui constituent le cœur des travaux présentés dans ce livre. Deux dernières parties nous permettent de reprendre les éléments généraux de méthodologie et d'indiquer, pour finir, des pistes de comparaison entre différents « paradigmes » de recherches en didactique (le positionnement de la cinquième partie).

NOTES

¹ Cela correspond à ce que Rogalski met sous le terme « gestion d'un environnement dynamique ouvert » dans le chapitre précédent.

1ERE PARTIE : LES ACTIVITES DES ELEVES ET LES ANALYSES A PRIORI DE SEANCES DE CLASSE

I - LES ACTIVITES DES ELEVES ET LE SCHEMA GENERAL DANS LEQUEL S'INSCRIVENT NOS ANALYSES.

L'activité d'un élève¹ (ou d'un professeur) correspond à ce qu'il développe lors de la réalisation d'une tâche (dans un exercice, ou pendant l'écoute d'un cours) en situation (en classe, voire à la maison), ses actes mathématiques extériorisés (le dit, le fait, l'écrit), mais aussi de façon plus intériorisée ses hypothèses, ses décisions dans ce qu'il fait (dit) ou non. Cela comprend son « état personnel » : l'activité est inaccessible mais laisse des traces observables. Participent aux activités tout ce que font les élèves, y compris l'écoute, mais aussi ce qui est « autour », ce qui va permettre le développement de connaissances à partir des actions. Les activités des élèves sont aussi constituées ce que les élèves ne font pas, disent, ne disent pas, pensent... Elles sont conditionnées par bien des facteurs, dont l'activité de l'enseignant qui contribue aux transformations espérées en termes de connaissances. Nous ne retenons de l'enseignant que les cours² et les exercices proposés aux élèves ainsi que les conditions de travail organisées en classe, y compris tout ce qu'ajoute l'enseignant dans son discours (nous présentons en annexe 2 un bilan récapitulatif des dimensions dont nous pensons qu'elles interviennent dans les apprentissages). Cependant, il existe bien d'autres facteurs que les activités des élèves que nous ne prenons pas en compte directement et qui interviennent dans les apprentissages (et même sans doute dans les activités elles-mêmes) : tout ce qui concerne l'affectivité développée en situation scolaire, tout ce qui concerne les origines socio-culturelles des élèves en amont de la situation scolaire mais qui peuvent jouer comme un filtre entre l'élève et l'école³, et aussi tout ce qui peut être lié à des conjonctures, indépendantes des acteurs directs du système scolaire. Ces autres déterminants (facteurs affectifs, facteurs socio-culturels, éléments liés à la conjoncture etc.) sont considérés comme des paramètres variables ils sont pris en compte, mais ils ne sont pas analysés pour eux-mêmes.

Nous ne considérons pas les cas extrêmes d'élèves n'entrant pas du tout dans le jeu de la classe, soit par refus préalable de l'école, soit par incompréhension majeure de la transformation attendue mais implicite des activités en connaissance ; c'est-à-dire quand les élèves adoptent de manière constante une posture étrangère à la posture d'apprentissage attendue. En revanche, dans certains des travaux présentés dans l'ouvrage et selon les possibilités d'implication des élèves dans leurs propres apprentissages, les notions de logique d'action (logique de réussite) ou de logique d'apprentissage peuvent être introduites. L'emprunt précis du schéma de double régulation du chapitre précédent n'est toutefois utilisé que dans certains travaux, notamment ceux qui portent explicitement sur des sujets individuels.

Il faut souligner à nouveau que les élèves d'une classe ne développent pas les mêmes activités, les mêmes cheminements à partir d'un même « itinéraire cognitif » : l'activité d'un sujet est aussi déterminée par le sujet lui-même. Des éléments de différenciation seront introduits, ou non, dans les différents travaux présentés.

Comme les activités sont, par définition même, en partie inaccessibles (intérieurisées), nous ne travaillons, nous l'avons dit, que sur les activités possibles des élèves, vraisemblablement proches pour la plupart d'entre eux de leurs activités effectives, compte-tenu des analyses *a priori* et des déroulements. Le cas échéant, nous dégagons des moyens pour approcher davantage les activités singulières possibles des élèves (grâce aux « mouchards » des ordinateurs par exemple).

Des tâches aux activités : activités possibles, a minima, a maxima

Toutes les interventions de l'enseignant (objet essentiel de nos analyses) et des autres élèves (moins abordé ici) modifient, réduisent ou enrichissent, les activités possibles des élèves (attendues à partir d'une analyse *a priori*) et contribuent à leur identification, objet de nos analyses. De fait, parmi les activités possibles, nous sommes amenés à distinguer des activités *a maxima*, que feraient les élèves qui démarrent leur travail dès que le professeur demande quelque chose, s'engagent dans ce qui est demandé, avec une certaine autonomie, souvent avec une idée pour démarrer, une capacité de surmonter les adaptations demandées et des activités *a minima*. Ces dernières sont le fait d'élèves, peut-être plus distraits, plus lents..., qui attendent le dernier moment pour s'y mettre, et qui s'engagent dans un travail personnel quand un maximum de choses ont été indiquées par l'enseignant, ils travaillent avec moins d'autonomie. Lors du travail des élèves sur ordinateur, nous pouvons plus facilement rechercher des glissements des activités possibles attendues, vers des activités réduites, ou modifiées, lorsque des traces en sont prévues.

Différenciation entre élèves liées à leur posture par rapport au savoir

Notre prise en compte des élèves réels, même si nous n'atteignons pas toujours les cas individuels, nous amène à rencontrer les questions de différenciation (cf le chapitre de Chesnais). Plusieurs aspects peuvent être abordés. L'hétérogénéité des classes dépend à la fois des différences entre les élèves, et de la répartition des différents types d'élèves dans la composition de la classe.

Nos outils nous permettent d'aborder surtout le premier aspect, à la fois du point de vue des résultats des élèves et du point de vue de la prise en compte par les enseignants de ces différences. Ce sont à la fois les choix de tâches prévues et les ajustements que les enseignants sont amenés à improviser, notamment au moment des corrections ou des aides constructives, qui peuvent nous renseigner sur cette prise en compte différentielle des élèves.

Ainsi les élèves de ZEP⁴ ont des représentations globales, des conceptions générales sur l'école quand ils rentrent dans la classe. Ils peuvent être dans un

environnement où l'école est une institution inconnue, ou même dévalorisée, où les parents sont déçus de l'école, les jeunes n'attendent pas grand-chose de l'école, ils sont confrontés à de nouvelles sollicitations à l'extérieur, apparemment indépendantes des acquisitions scolaires. Cela peut avoir des conséquences sur la façon dont ils envisagent les mathématiques et s'y engagent au quotidien. En effet, si leur rapport au savoir est surtout de type « action » (faire des calculs, résoudre des exercices, répondre aux tâches demandées, voir Charlot B., Bautier E., Rochex J.Y., 1992), cela ne les prédispose peut-être pas à faire une place à la nécessité de s'appropriier les concepts en tant qu'objets mathématiques, ce qui est pourtant nécessaire.

En classe, à certaines conditions, les élèves entrent dans les tâches et développent des activités. Mais pour avoir des effets positifs aussi bien sur la conduite de la classe que pour l'apprentissage des élèves, ces tâches doivent avoir un calibrage particulier, ni trop réduites ni trop complexes. Sont en jeu le fait, pour les élèves, de dépasser la première phase de résolution orale, de s'engager dans un travail de formulation et d'écrit, de trouver les liens avec le savoir visé. Autant de sources de différences actives ou passives dans la manière dont s'engagent les activités possibles des élèves, difficiles à surmonter pour l'enseignant.

On observe aussi des micro-postures qui pèsent sur le travail en classe (ne pas enlever son manteau – qui peut marquer un simple « passage » dans la classe –, d'emblée ne pas écouter, ne pas s'intéresser à ce qui se passe ou seulement de temps en temps, bavarder, ne rien faire, etc.) en relation avec le rapport au savoir global. Ces micro-postures peuvent être ainsi un obstacle permanent à l'entrée dans l'activité mathématique en classe. En particulier une attention trop morcelée peut empêcher les élèves de retenir ce qui s'est joué, ce qui nécessite à la fois de faire des liens et de s'attendre à ce qu'émerge quelque chose de plus général que ce qui a été « fait ». Dans le même temps ces élèves peuvent être très curieux, très vifs dans l'instant, et ils veulent souvent beaucoup parler, répondre rapidement, cherchant aussi à monopoliser l'attention de l'enseignant. Ce type d'attitude peut être néfaste en mathématiques en raison du caractère cumulatif des connaissances, et de la visée de conceptualisation.

Le schéma de découpage de la réalité des classes

Ce schéma est une tentative pour illustrer le découpage de la réalité adopté dans l'ouvrage. Il s'agit d'un schéma très général qui sera questionné de manières diverses dans chacune des recherches.

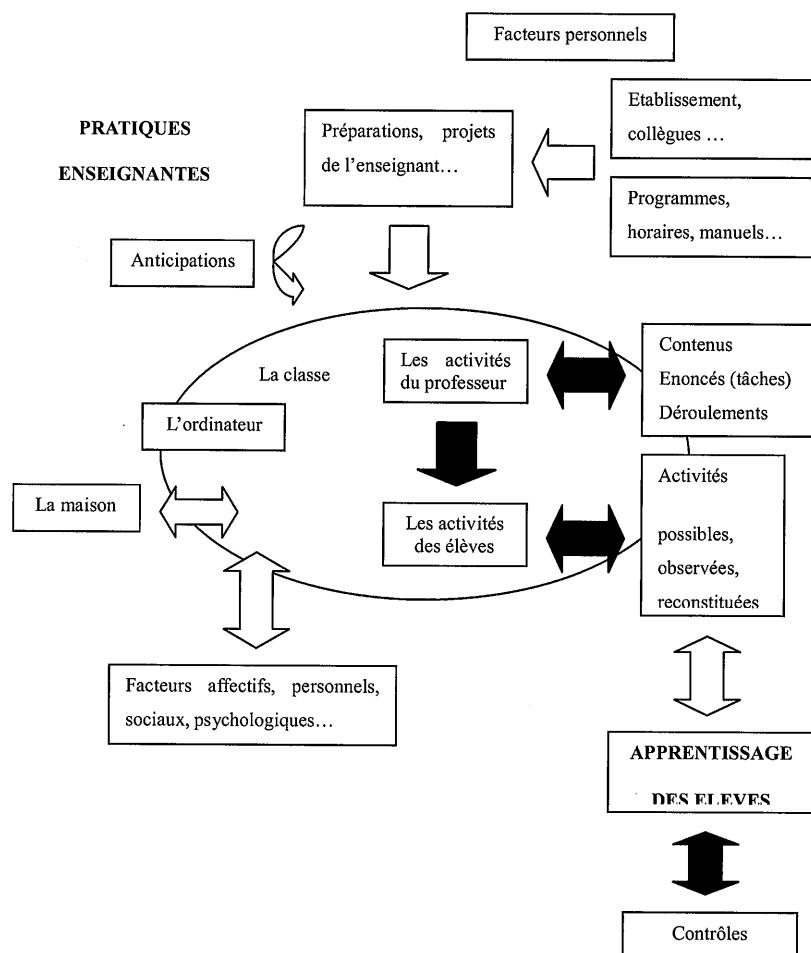
Les activités possibles des élèves y sont centrales, entre les pratiques des enseignants (en haut à gauche) et les apprentissages (en bas à droite). Les flèches n'ont pas un statut théorique mais elles indiquent des liens qui nous semblent importants dans notre découpage : si ces liens existent sans être pris en compte explicitement dans les recherches, ils sont représentés par une flèche blanche ; si les liens sont pris en compte, voire organisent les analyses, ils sont représentés par une flèche noire. Ce qui est surligné en gris clair est l'objet de nos recherches, à

terme. Ce qui est surligné en gris foncé constitue ce qui est observé et analysé, pour appréhender cet objet.

Nos analyses, étroitement imbriquées avec les situations scolaires et les mathématiques, cherchent à prendre en compte les relations entre tous les acteurs. Toutefois, et c'est ce que donne bien à voir ce schéma, nous retenons en priorité les variables « aux mains » des enseignants, certes pondérées par des déterminants externes à la classe, mais dont nous ne nous donnons pas les moyens de tenir compte de manière exhaustive.

Comme nous l'avons déjà écrit plus haut, l'analyse des activités possibles des élèves vise notamment à approcher leurs apprentissages. L'analyse des pratiques enseignantes vise, quant à elle, à aborder⁵ leurs effets en termes d'activités des élèves. Mais, si du côté des élèves, les facteurs externes ne sont pas pris en compte directement, il se trouve qu'en revanche, du côté des enseignants, nous gardons dans les analyses certains éléments externes à la classe pour mieux pondérer, comprendre, voire interpréter, en croisant différentes sources, ce qui se passe, grâce à la prise en compte des déterminants importants de ces pratiques, liés à l'exercice du métier qui les engendre : institutionnels, sociaux, personnels.

Cependant, même si on peut en partie reconstituer des éléments de représentation ou un parcours universitaire, il reste nécessairement des éléments inaccessibles, notamment personnels. Plus précisément, toujours du côté des enseignants, et c'est une autre réduction, nous privilégions les éléments de la réalité analysée (la classe de mathématiques et les élèves) qui dépendent des acteurs, consciemment ou pré consciemment⁶. Même si certains indicateurs donnent à voir des phénomènes à l'insu des acteurs, dans des analyses de discours notamment, ils ne font que renforcer d'autres analyses concernant des choix des enseignants : essentiellement des choix de contenus mathématiques enseignés et de gestion, *a priori* et/ou en partie improvisés, mais pas inconscients.



II - ANALYSES GLOBALES DES MATHÉMATIQUES À ENSEIGNER ET À APPRENDRE : NIVEAUX DE CONCEPTUALISATION, TYPES DE NOTION, RELIEF

Globalement la façon dont nous choisissons de caractériser les mathématiques à enseigner doit pouvoir servir de référence à nos analyses des enseignements et des apprentissages.

Les acquisitions sont ainsi rapportées dans nos analyses à une description en termes de niveau de conceptualisation : à la suite de Vergnaud (1990), nous définissons les acquisitions en référence à un ensemble de tâches dont la résolution, attendue, requiert la disponibilité⁷ d'un certain nombre d'aspects de la notion – objets (définitions, théorèmes, propriétés) et outils (contextualisés, dans différents

cadres et registres) – et la réorganisation des nouvelles connaissances dans les acquis antérieurs. L'annexe 1 donne les définitions des concepts d'« outils », « objets », « cadres » et « registres », que nous adoptons suite à Douady (1986) et Duval (1995), en y ajoutant celle de « points de vue » (Robert, 1995) dont nous avons besoin aussi.

Cela nous amène à définir à partir d'un programme scolaire donné, sur une notion ou un domaine donné, ou un chapitre (par exemple sur le théorème de Pythagore), un niveau de conceptualisation mathématique à acquérir, contribuant à définir les objectifs d'enseignement et d'apprentissage. Cependant, nous avons besoin, pour élaborer des scénarios d'apprentissage, d'ajouter à cette première description des mathématiques à enseigner d'autres éléments qui interviennent dans les choix de l'itinéraire cognitif à proposer aux élèves, notamment liés à la plus ou moins grande proximité des notions à introduire avec ce qui précède. Nous terminons en introduisant l'idée de relief, attachée à toutes les spécificités des notions dont on peut tenir compte avant d'élaborer un scénario précis.

Relation avec la transposition didactique

Entre les savoirs « savants » et les savoirs à enseigner : notre manière de traquer et de questionner la transposition didactique est justement de donner des moyens de circonscrire ce qui, dans un savoir donné, est prescrit à l'étude à un moment donné. Souvent une recherche historique ou épistémologique est nécessaire pour comprendre ce qui caractérise une notion, les raisons de son émergence à tel ou tel moment de l'histoire, ce qu'il en reste dans un programme scolaire donné. Cependant nos investigations en tant que didacticien se font souvent à partir de textes déjà synthétiques, de « seconde main », et n'ont pas l'ambition de faire progresser la recherche épistémologique par exemple, même si nous renouvelons certaines questions (cf. Dorier 2000, Bridoux, 2012).

Nous utilisons plutôt le mot « savoir » quand nous nous référons à ce que les mathématiciens ont établi, qui est consigné dans des articles de mathématiques, des livres, des traités etc. Nous parlons plus volontiers de « connaissances » lorsque les élèves sont en jeu, les apprentissages, l'enseignement.

Niveau de conceptualisation

Un niveau de conceptualisation caractérise pour nous, un domaine de travail mathématique assez large, cohérent, enseigné (ou à enseigner), au moins en partie. Il est spécifié par

- des fondements (axiomes, spécifiques ou empruntés à d'autres champs mathématiques). Ils peuvent rester implicites ou non pour un niveau donné,
- un corpus de définitions (objets), de théorèmes, de propositions. C'est ce que nous appellerons l'« arsenal du niveau »,
- des modes de raisonnements, des démarches, et un certain degré de rigueur,

- et enfin, un ensemble de problèmes que l'on peut résoudre en son sein.

Le travail dans un même niveau de conceptualisation peut se faire dans plusieurs cadres (par exemple, en géométrie peuvent coexister le cadre ponctuel, vectoriel, numérique, analytique, figure), plusieurs registres (en géométrie : coordonnées cartésiennes, coordonnées polaires ou barycentriques, u , AB [en vecteurs], complexes écrits sous forme algébrique, trigonométrique, géométrique...). On retrouve la place donnée aux systèmes de représentation, et notamment aux registres, un des enjeux étant de pouvoir les choisir et passer de l'un à l'autre (conversion).

La cohérence signifie qu'il serait possible d'établir l'arsenal du domaine en se référant aux seuls fondements et définitions initiales. Autrement dit, les démonstrations des théorèmes du domaine peuvent se faire en interne, avec les outils du domaine. De même pour le champ des problèmes abordés une fois l'arsenal acquis. Ceci ne signifie pas qu'il y ait à le faire avec les élèves, ni qu'il n'y ait pas d'autres démarches possibles, externes.

Un exemple

Deux niveaux de conceptualisation traversent la géométrie enseignée du collège aux premières années d'université : la géométrie « à la Euclide » (surtout développée au collège), la géométrie affine et affine-euclidienne (développée en premières années d'université et lors de la préparation au concours d'enseignement, et introduite subrepticement au lycée⁸).

Le qualificatif « à la Euclide » indique que les fondements, le travail à partir de ces fondements, les modes de raisonnement sont ceux d'Euclide. Cependant on travaille avec les nombres réels, et les formules d'aires.

Remarquons que ces niveaux ne sont pas imbriqués, même si le corps des problèmes qu'ils permettent de résoudre est en partie commun ; un certain degré de généralité supplémentaire est acquis au niveau de la géométrie « affine et affine-euclidienne ». De plus, la chronologie scolaire entre ces niveaux n'est pas stricte : certains emprunts partiels à un niveau de conceptualisation non encore développé à une étape donnée de la scolarité peuvent être mis en évidence, ainsi la géométrie analytique au collège jusqu'à ces dernières années, est juxtaposée à la géométrie à la Euclide, alors qu'elle emprunte à la géométrie affine.

Le programme d'Erlangen fournit un autre niveau de conceptualisation en géométrie que nous n'évoquerons pas ici. Quant à la géométrie axiomatique telle que développée par Hilbert, elle nous semble aussi pouvoir être candidate à notre catégorisation (quatrième exemple de niveau de conceptualisation). Nous ne développerons pas la description de ces deux derniers niveaux de conceptualisation car les contenus d'enseignements ne sont pas organisés sur ces bases, ces architectures.

Les relations entre niveaux de conceptualisation ne sont donc pas de simples extensions⁹ : c'est une autre organisation des savoirs qui est en place, et selon les cas, il s'agit d'une généralisation (de la géométrie « affine et affine-euclidienne »

au programme d'Erlangen par exemple), ou d'une centration différente sur les fondements (de la géométrie « à la Euclide » à la géométrie de Hilbert par exemple), ou un changement de ces fondements (de la géométrie « à la Euclide » à la géométrie « affine et affine-euclidienne »).

Relation avec les champs conceptuels

Les champs conceptuels introduits par Vergnaud (1990) se définissent à partir de l'apprentissage mathématique des élèves : il s'agit pour l'auteur de fournir un cadre qui « permet de comprendre les filiations et les ruptures entre connaissances chez les enfants et les adolescents ». Les niveaux de conceptualisation que nous introduisons sont plus restreints : ils ne sont liés qu'aux savoirs mathématiques (tels qu'ils se sont développés dans l'histoire et qu'ils sont présentés dans les programmes).

L'utilisation commune du mot conceptualisation indique cependant une préoccupation partagée, celle des apprentissages mathématiques : dans notre cas, la mise en évidence de ces niveaux organise transversalement les connaissances mathématiques à transmettre et contribue à caractériser le travail attendu à chaque niveau, en relation avec les variables attachées aux apprentissages ; la théorie des champs conceptuels permet de concevoir l'organisation cognitive que les élèves doivent atteindre pour un champ conceptuel donné et d'apprécier l'itinéraire correspondant.

Types de notions

L'enjeu, dans cette analyse des notions à enseigner, est de comprendre le rapport entre ce qui est nouveau et ce que les élèves ont déjà travaillé. Cela ne s'applique pas aux notions mathématiques en toute généralité, même si leur étude contribue à établir ce rapport, complétée par l'étude des programmes. Il s'agira en particulier de déduire des caractéristiques mises en évidence (et évidemment compte tenu des programmes scolaires) des modes d'introduction raisonnables de ces notions. Une notion peut relever de plusieurs introductions, notamment selon la progression adoptée par l'enseignant auparavant, mais nous faisons l'hypothèse qu'on peut trouver pour chaque type de notion une introduction spécifique et adaptée.

Nous avons distingué très généralement trois types de notions : les extensions de concepts (sans « accidents » ou « avec accidents »), les notions RAP (réponses à un problème) et les notions FUG (formalisatrices, unificatrices, généralisatrices), et nous allons discuter plus loin de leurs introductions respectives.

Précisons. Le « nouveau » dans un programme de mathématiques peut recouvrir des notions (trigonométrie en quatrième par exemple), mais aussi des cadres (cadre graphique ou algébrique au collège par exemple), des objets (produit scalaire en première par exemple), ou des théorèmes et des propriétés (théorèmes de Thalès ou de Pythagore au collège par exemple). Nous nous centrons sur trois caractères que les nouvelles notions (ou nouveaux objets, ou nouveaux cadres, etc.) présentent par rapport aux anciennes et qui vont amener à un travail spécifique des élèves. Nous

analysons aussi la fonction¹⁰ que ces nouvelles notions remplissent dans le paysage mathématique où elles sont introduites. C'est la combinaison de plusieurs de ces caractères qui permet de définir ces types de notions.

Le caractère généralisateur apparaît quand ce qui est nouveau a une portée plus grande que ce que les élèves ont déjà à leur disposition : le nouveau étend l'ancien en l'incluant à des degrés divers. Par extension du domaine d'application, ou en introduisant de la généralité là où il y avait du particulier par exemple. Le produit scalaire dans l'espace généralise, par exemple, le produit scalaire dans le plan. Les fonctions peuvent aussi avoir ce caractère au début du lycée, lorsqu'on passe des fonctions particulières, affines, définies par leur expression algébrique, aux fonctions générales, définies comme un programme de calcul, pas toujours explicite.

Le caractère formaliste se signale par l'introduction d'un nouveau formalisme (plus ou moins « invasif », plus ou moins symbolique, et qui est parfois déjà utilisé avant mais de manière réduite). Vocabulaire (formulations) et symboles nouveaux peuvent intervenir dans le formalisme. Le formalisme du cadre de l'algèbre élémentaire, par exemple, est nouveau, notamment à cause du « x », mais il comprend les signes anciens comme le signe =, le +, etc. et l'écriture des nombres. L'utilisation de ces signes n'est pas toujours la même en algèbre et en arithmétique élémentaire, c'est le cas pour le signe égal qui signale en algèbre non seulement un résultat mais encore une équivalence : il y a « accident ». Autre exemple : les intégrales peuvent être introduites comme formalisant ce qui permet de calculer l'aire sous une courbe (il y a aussi dans cette notion un caractère unificateur, même s'il n'est pas toujours mis en évidence).

Soulignons cependant certaines notions ont parfois plusieurs formalisations co-existantes, dans des cadres différents ou non. Cela se voit parfois par le nom (le même !) donné aux objets. Les relations entre ces formalisations ne sont pas toujours explicitées. Ce que l'on cache est ici affaire d'organisation des connaissances et de leurs représentations. Des auteurs comme Duval (Duval, 1995, 1996) ont beaucoup travaillé sur les correspondances non congruentes entre divers registres (écritures), il propose d'expliciter cet aspect du formalisme, supposé non transparent pour les élèves.

Exemples :

- cosinus (trigonométrie dans le triangle rectangle, produit scalaire, fonction),
- π (formule de l'aire du disque, formule du périmètre du cercle, exponentielle complexe),
- puissances (arithmétique, exponentielles),
- fonction affine et droite du plan au sens géométrique (vectoriel),
- Relation de Chasles et théorème de Thalès, si on dispose des longueurs, des vecteurs et des mesures algébriques...

Il existe aussi des notions qui, même si elles sont parfois utilisées implicitement, ne sont pas encore formalisées (formalisables) à un niveau de la scolarité. Arsac (Arsac 1998) donne un exemple saisissant entre ce qu'on a le droit de lire sur une figure géométrique en le disant (lié à des notions de convexité admises

implicitement au collège), ce qu'on a le droit de lire sur la figure sans même le dire (lié à des notions sur les aires) et ce qu'il faut dire. Les notions proto-mathématiques et para-mathématiques de Chevallard (1985) sont du même ordre.

Le caractère unificateur indique que ce qui est nouveau regroupe, rapproche, remplace plusieurs éléments anciens, traités jusqu'ici séparément. Cette unification s'accompagne souvent d'une simplification, mais éventuellement aussi d'une perte de visibilité par rapport à ce qui est remplacé. Les expressions algébriques introduites dans le nouveau cadre de l'algèbre élémentaire ont, par exemple, un caractère unificateur : « x » désigne aussi bien une variable (ce qui est écrit comporte alors en général un « quel que soit x » implicite), une inconnue (ce qui est écrit n'est alors éventuellement vrai que pour certaines valeurs de x), un paramètre, un nombre généralisé, qui peut être entier, décimal, fraction... Les fonctions ont aussi ce caractère unificateur, qui rend compte du fait qu'une fonction ne se réduit ni à sa formule algébrique, ni à sa représentation graphique, et que les trois types d'études ponctuelle, globale et locale sont nécessaires à la caractériser.

Les espaces vectoriels introduits au début de l'université permettent de traiter d'une même manière des espaces de polynômes, de suites, ou de vecteurs.

Certaines notions à enseigner sont des extensions de notions anciennes, que ce soit parce qu'elles ont un caractère généralisateur ou qu'elles se traduisent par un formalisme qui étend un formalisme antérieur. On peut distinguer des extensions « sans accident », pour lesquelles il y a congruence du travail entre le nouveau et l'ancien, et des extensions « avec accidents », pour lesquelles quelque chose change dans le type de travail à faire dans le nouveau et dans l'ancien. La multiplication des décimaux est, par exemple, une extension de celle des entiers, sans accidents au niveau du sens, mais différente au niveau de l'algorithme opératoire. Le produit scalaire dans l'espace est une extension sans accident de celui dans le plan.

Un second type de notion correspond aux notions, plutôt vues comme objet, introduites pour répondre à un problème (problème pouvant être formulé dans des termes accessibles aux élèves, et dont les élèves peuvent débiter une résolution). Elles ont deux caractères, généralisateur et unificateur par exemple, ou unificateur et formalisateur. Le théorème de Pythagore peut être introduit comme réponse à un problème : trouver une relation générale entre les longueurs des côtés d'un triangle rectangle. Ce théorème unifie des situations particulières dans lesquelles les élèves savent faire le calcul. C'est une notion que nous appelons RAP (réponse à un problème). Il en est de même de l'intégrale vue comme aire sous la courbe (Robert et Rogalski M., 2004). Le barycentre peut aussi être introduit comme une RAP.

Enfin certaines notions ont les trois caractères à la fois : ce sont les FUG, elles permettent d'introduire plus de généralité en unifiant différents objets antérieurs grâce à un nouveau formalisme. Ce nouveau formalisme amène souvent des simplifications. Deux exemples ont été développés, celui de la convergence des suites et celui des espaces vectoriel (Dorier, 1997 ; Robert, 1998).

Relief – difficultés des élèves et naturalisation des connaissances chez les enseignants

Ce que nous appelons relief d'une ou plusieurs notions à enseigner est attaché à l'ensemble de ce qui permet de spécifier ce qui est utile à savoir pour le chercheur (et aussi le formateur, voire l'enseignant) pour en analyser (élaborer) l'enseignement, attaché à un ou des programmes : il comporte la caractérisation mathématique de ces notions, qui amène à en définir le niveau de conceptualisation visé à un moment donné de l'enseignement, précise donc ce qui est objet, ce qui sera outil, leur insertion dans les programmes scolaires précédents (curricula) et dans les acquis antérieurs supposés des élèves et le type des notions S'y ajoutent d'autres éléments que la structure conceptuelle de la situation, qui concernent les élèves, comme sujets cognitifs (cf. chapitre précédent).

On complète ainsi ce qui précède par la liste des difficultés d'apprentissage déjà répertoriées, si possible. Par exemple de nombreux travaux didactiques en algèbre élémentaire permettent d'introduire l'idée qu'il est nécessaire de travailler particulièrement la rupture entre arithmétique et algèbre qui est source de difficultés pour les élèves et souvent minorée, avec le nouveau statut du signe égal ou l'intérêt des vérifications numériques (Grugeon, 2012).

Tout cela permet de préciser le sens que les notions peuvent prendre à tel ou tel moment de la scolarité, leur place dans le paysage des connaissances des élèves. Outre l'accès à la distance entre le nouveau et l'ancien, cela permet de répertorier les points d'appui éventuels pour l'enseignement et les obstacles prévisibles et facilite l'appréciation des activités proposées sur les notions, de l'élaboration des introductions aux chapitres concernés, du travail mathématique ultérieur à organiser pour les élèves, mais aussi des commentaires à développer et des pièges qui peuvent survenir.

Enfin cela facilite aussi, du côté des analyses de pratiques, la nécessaire recherche de la naturalisation des connaissances de l'enseignant. La naturalisation des connaissances désigne ce qui est devenu transparent chez les professionnels, par exemple en termes de choix de cadres ou de changements de point de vue, et qui n'est pas du tout transparent pour les élèves – son repérage contribue à une meilleure appréciation des cheminements installés chez les élèves (cf. des exemples dans Lenfant, 2002, en algèbre élémentaire). Le passage de la donnée d'un triangle rectangle à l'utilisation de la propriété équivalente que deux droites sont perpendiculaires ou qu'un certain angle est droit est un exemple de changement de point de vue avec perte d'information : non seulement on traduit la donnée avec d'autres mots, dans le même cadre (changement de point de vue) mais encore on ne tient plus compte du triangle, retenant seulement les deux côtés de l'angle droit (les droites qui les portent) ou l'angle qu'ils forment(se plaçant alors dans une géométrie avec mesure explicite).

Disposer d'une vue globale du relief sur une notion que l'on étudie facilite la concentration sur des éléments clefs qui peuvent intervenir dans l'enseignement et l'apprentissage.

Pour aller plus loin dans l'analyse des mathématiques enseignées et la tentative de leur donner un certain relief utile à l'enseignement, il est aussi possible d'introduire les niveaux de conceptualisation qui traversent la scolarité (Dorier, 1997 ; Robert, 1998). La notion de champ conceptuel (Vergnaud, 1990) est un autre mode d'accès à cette tentative, peut-être plus adapté au premier degré. Très généralement, il est utile d'analyser les réseaux de concepts qui sont travaillés ensemble (Robert, 1992). Les analyses développées par Chevallard (Chevallard 1992), plus systématiques que celles qui sont indiquées ici, permettent une approche très complète des mathématiques à enseigner, à partir de la transposition didactique et des organisations praxéologiques.

III - ANALYSES A PRIORI LOCALES DES TACHES MATHEMATIQUES

Une tâche mathématique est, ici, très généralement, attachée à un énoncé proposé aux élèves. Elle est caractérisée par les mises en fonctionnement des connaissances anciennes et nouvelles en vue de sa résolution. Les mises en fonctionnement sont déterminées à partir du contenu du cours des élèves considérés (théorèmes, définitions, propriétés, exemples, exercices résolus etc.). Ce qui nous intéresse ici est la manière (ou les manières) dont les élèves peuvent utiliser leurs connaissances dans l'exercice, cela nous sert à détecter finalement les activités possibles des élèves face à l'énoncé considéré, en classe notamment.

Ces analyses sont dites « *a priori* » car elles peuvent être menées à partir de l'énoncé seul, sans assister à la résolution de la tâche par un élève, des élèves, ou une classe accompagnée d'un professeur.

L'analyse *a priori* d'une tâche consiste à chercher, compte tenu du programme, de la place des exercices dans ce qui a été travaillé en classe avec le professeur, l'utilisation que les élèves vont avoir à faire de leurs connaissances, nouvelles et anciennes, en travaillant sur cet énoncé. Cette analyse ne se réfère donc pas directement au potentiel d'apprentissage d'un exercice. On cherche simplement quelles activités les élèves vont pouvoir développer, avec leurs connaissances supposées (programmes, contenu des séances précédentes), sur cet exercice. Même si cela n'apparaît pas explicitement dans les analyses, les choix faits pour décrire ces activités ne sont bien sûr pas indépendants d'hypothèses faites sur les apprentissages.

Nous repérons par exemple si les connaissances à utiliser sont indiquées ou non dans l'énoncé, directement ou implicitement (une indication implicite peut être donnée par la place de l'énoncé dans la progression des leçons¹¹). Si elles ne sont pas indiquées, elles sont supposées disponibles, et cela dénote la nécessité d'une activité particulière et fondamentale des élèves pour retrouver ces connaissances / penser à les utiliser (deux activités difficilement dissociables). Nous faisons l'hypothèse que cette activité peut contribuer à construire la disponibilité attendue. Nous distinguons dans un premier temps les tâches simples et isolées (TSI) ou bien d'application immédiate qui sont des applications d'une connaissance sans adaptation ni mélanges : une seule connaissance précise est mise en œuvre avec,

éventuellement, remplacement simple des données générales par les données du contexte de l'exercice traité.

Différents niveaux de mises en fonctionnement des connaissances

Lorsque les tâches analysées sont simples et isolées, on parle de travail des élèves au niveau technique.

Lorsque les tâches¹² nécessitent des adaptations de connaissances qui sont en partie au moins indiquées, on parle de niveau mobilisable de mise en fonctionnement. Le travail des élèves n'est en effet pas analogue selon qu'ils doivent rechercher les connaissances à utiliser (travail du pourquoi ou du quoi) ou mettre en fonctionnement (en l'adaptant) des connaissances indiquées (travail du comment). Si c'est à l'élève de reconnaître les connaissances à utiliser, on parle de niveau disponible de mise en fonctionnement.

Relever d'un certain niveau de mise en fonctionnement d'une connaissance pour une tâche nécessite que le travail de l'élève sur la tâche mette en jeu la connaissance à ce niveau. Ou cela est possible pour cet élève et on renforce peut-être la connaissance, ou ce n'est pas possible d'emblée, et ce travail va peut-être contribuer à transformer la connaissance de l'élève pour que cela devienne possible.

Adaptations des connaissances

Pour les autres tâches, nous détectons, pour chaque connaissance en jeu, les adaptations que les élèves auront à en faire, en relation avec ce qu'ils auront à utiliser précisément, reconnaissances, initiatives et ajouts, mélanges (Robert, 1998 ; Robert et Rogalski M., 2002). Cela permet de caractériser chaque énoncé (qui peut comprendre plusieurs tâches). Ces analyses sont évidemment relatives à un niveau scolaire donné, le cas échéant à une classe donnée. Nous tenons aussi compte de l'ensemble des tâches proposées et de leurs répétitions.

Rappelons l'importance, admise pour les apprentissages mathématiques, de la variété des contextes rencontrés, et de leur imbrication – notamment changements de cadres, de registres, de points de vue et mélanges nouveau /ancien.

Nous avons mis au point une liste de sept adaptations en réfléchissant ainsi aux activités que les élèves peuvent avoir à faire à partir des connaissances dans la forme qui leur est donnée dans les cours. Nous distinguons ce qui est reconnaissance de propriétés, de certaines modalités d'application de modalités. Nous repérons aussi l'introduction (nécessaire) d'intermédiaires ou d'étapes, qui nous semble être une autre activité très importante en mathématiques, en distinguant enfin tout ce qui est mélange, mise en relation, changement, de cadre par exemple et en brochant sur ces différents types d'activités intellectuelles spécifiques des mathématiques.

Ces adaptations (repérées par un code Ai) peuvent intervenir simultanément et ont chacune un spectre assez large (et, encore une fois, relatif) :

A1. Les reconnaissances (partielles) des modalités d'application des connaissances (notions, théorèmes, méthodes, formules...) : typiquement en géométrie, reconnaître la(es) configuration(s) où utiliser le théorème de Thalès. Cela peut aller de reconnaissances de variables, de notations, à des reconnaissances de formules ou de conditions d'applications de théorèmes...

A2. L'introduction d'intermédiaires – notations, points, expressions... : typiquement en géométrie introduire une parallèle, ou nommer un point pour utiliser le théorème de Thalès¹³.

A3. Les mélanges de plusieurs cadres ou notions, les changements de points de vue, les changements ou jeux de cadres, de registres, les mises en relation ou interprétations... : typiquement en géométrie, utiliser du calcul algébrique pour obtenir le résultat (par exemple résoudre $x^2 = 1$ au milieu d'un problème de géométrie). Les énoncés qui jouent sur les aspects graphique/algébrique des fonctions contiennent automatiquement cette adaptation.

A4. L'introduction d'étapes, l'organisation des calculs ou des raisonnements (cela va de l'utilisation répétée (in) dépendante d'un même théorème à un raisonnement par l'absurde faisant intervenir le théorème) : typiquement en géométrie, utiliser quatre fois le théorème de Thalès de manière non indépendante puis sa réciproque. Les étapes peuvent être classiques, en quelque sorte forcées (étude d'une fonction), ou à imaginer.

A5. L'utilisation de questions précédentes dans un problème.

A6. L'existence de choix – forcés (un seul convient finalement) ou non.

A7. Manque de connaissances nouvelles

Prenons par exemple l'exercice suivant (il peut être proposé à partir de la fin du collège) :

« Est-ce que le produit de deux nombres qui s'écrivent comme la somme de deux carrés d'entiers peut encore s'écrire de la même façon ».

Une première activité va être de comprendre et formaliser la phrase proposée (qu'est-ce qu'un nombre qui s'écrit comme la somme de deux carrés ? Comment comprendre « s'écrire de la même façon » ?). On peut remarquer que la question est ouverte, une étape s'impose pour les élèves, à savoir faire une conjecture sur le résultat à démontrer. Cela peut induire des expériences numériques, mais on peut penser que ces dernières ne changent pas la recherche de la démonstration, tout aussi nécessaire (pas d'indications).

Une réponse "élémentaire" :

« Si m, n, p et q sont des entiers on écrit ainsi :

$$(n^2 + m^2)(p^2 + q^2) = n^2p^2 + m^2q^2 + 2npmq + n^2q^2 + m^2p^2 - 2nqmp$$

$$= (np + mq)^2 + (nq + mp)^2$$

Et grâce à ce que nous appelons la stabilité des entiers pour l'addition et la multiplication, on peut conclure ».

Outre les manipulations algébriques élémentaires, il est nécessaire ici d'introduire un intermédiaire (l'expression algébrique $2npmq$ qu'on ajoute puis retranche), les

identités remarquables sont dans ce choix de démarche des connaissances qu'il faut adapter.

Une autre réponse peut utiliser les nombres complexes (initiative d'un changement de cadre, l'énoncé étant plutôt arithmétique) et identifier chaque somme de carrés au carré du module d'un nombre complexe bien choisi à introduire (intermédiaire). On écrit alors « $n^2 + m^2 = |m + in|^2$ », et on conclut en appliquant la règle « $|z|^2 |z'|^2 = |zz'|^2$ » (règle à adapter) et la stabilité des entiers pour l'addition et la multiplication. En classe de terminale (connaissance des nombres complexes) il y peut donc, en plus, y avoir un choix de stratégie pour les élèves.

Dans le cas des séances sur ordinateur, des tâches nouvelles apparaissent ainsi que des activités nouvelles associées. Dans tous les cas, l'analyse des tâches doit prendre en compte l'environnement logiciel qui simplifie ou complexifie les tâches proposées et modifie l'activité possible des élèves. Dans une moindre mesure, l'analyse des tâches sur un manuel peut également prendre en compte l'environnement, c'est-à-dire des indices externes (par exemple des titres, des idéogrammes...) qui peuvent aider (ou non) l'élève dans son activité.

Signalons qu'il existe d'autres analyses de tâches faisant intervenir moins directement les connaissances précises à mettre en fonctionnement dans un exercice donné, réfèrent exclusivement à la nature du travail attendu : conjecture, recherche de démonstrations, application d'une procédure... (Stein et al., 1996)

Les analyses en termes de compétences mettent l'accent sur les grands types d'activités intellectuelles, définies indépendamment des contenus, (chercher des informations, entrer dans une démarche, communiquer...), et ne font pas référence directe aux connaissances impliquées, ce qui introduit une différence fondamentale entre compétences et connaissances. Cependant, dans beaucoup de textes institutionnels actuels, avoir une compétence manifeste la possibilité de résoudre des tâches non simples, variées, non « prêtes à l'emploi disciplinaire », y compris issues de la vie réelle, ainsi cela témoigne de la possibilité d'adaptations de connaissances disponibles diverses, ce qui permet d'utiliser les analyses précédentes.

D'autres analyses locales seront présentées dans le dernier paragraphe (accrochées à des analyses en termes de praxéologies notamment).

2EME PARTIE : LES ANALYSES A POSTERIORI DES SEANCES

I - ANALYSES GLOBALES DES SCENARIOS PROPOSES AUX ELEVES

Pour l'enseignement d'un contenu précis, le scénario désigne l'ensemble ordonné des exercices et des cours prévus pour un chapitre ou une notion¹⁴, y compris les évaluations et le travail à la maison, avec des prévisions grossières de gestion (durée, répartition du travail). Un scénario est apprécié à la fois en relation avec ses qualités « internes », dont dépend l'ensemble des activités qu'on peut en attendre a priori des élèves, et en relation avec les déroulements qu'il autorise, au delà de son propre contenu.

On l'étudie ainsi globalement, d'abord sous l'angle de l'introduction qui est prévue, en relation avec les spécificités de la notion (notamment la proximité de la notion avec ce qui précède) : c'est la première installation du sens de la notion qui est en jeu. Puis on fait l'étude des dynamiques cours / exercices qu'il recèle et des dynamiques correspondantes qui peuvent s'enclencher entre sens et techniques (cf. ce que Douady (1986) notamment appelle familiarisation ou réinvestissement). Enfin la quantité et la nature des tâches proposées sont associées à l'évaluation du travail d'adaptation proposé aux élèves. Ces éléments (différentes dynamiques mises en évidence, adaptations à l'initiative des élèves etc.) sont autant d'éléments permettant de penser que la mise en œuvre du scénario permettrait une plus ou moins grande disponibilité de la notion, une certaine (ré)organisation des connaissances.

Cela ne préjuge pas complètement de ce qui va se jouer en classe : ce sont les analyses de déroulement qui pourront renseigner ce point. Cependant nous qualifions un scénario de "robuste" lorsque plusieurs déroulements sont possibles qui n'en modifient pas le principal, les activités des élèves.

Les analyses des scénarios permettent, entre autres, d'éclairer un double enjeu du travail du professeur :

- élaborer des scénarios visant la construction du sens de ce qui est enseigné et les acquisitions techniques nécessaires,
- et organiser la possibilité de déroulements qui permettent une proximité entre ce qui a été conçu et ce qui se passe en réalité.

Nous allons discuter maintenant les deux dimensions évoquées ci-dessus : l'introduction des notions, et les dynamiques contextualisation / décontextualisation.

À propos de l'introduction des notions

Le problème est rendu difficile par la diversité des notions introduites aux élèves dans les programmes. En effet à nos yeux, les introductions dépendent des notions en jeu : de ce fait, pour nous, une variable importante tient au repérage du type des notions visées (voir plus haut) et à son adéquation avec l'introduction proposée.

La question des introductions des notions nous semble pouvoir être travaillée grâce à notre classification des types de notions.

Une notion qualifiée d'extension peut être, par exemple, introduite par l'intermédiaire d'un problème, fabriqué « avec de l'ancien », accessible vu qu'il s'agit d'une extension, mais dont la résolution nécessite l'introduction de la nouvelle notion (cf. les situations dites fondamentales de Brousseau (1998)). Les problèmes issus des travaux sur la dialectique outil / objet nous paraissent aussi correspondre à ce type de notion (extensions), notamment s'il y a extension sans accident (voir §II-2)). Ils permettent de prolonger le sens de ce qui est nouveau et même la technique associée en provoquant chez les élèves une première utilisation, en outil implicite, de ce qui est visé. S'il y a « accident », on peut encore introduire de la même manière le nouveau, mais l'accident peut donner lieu à erreur et c'est la qualité du problème, notamment les moyens de contrôle internes prévus (si possible) qui permettront de dépasser l'obstacle.

Les notions qui peuvent correspondre à la réponse du mathématicien à un problème (RAP) peuvent être abordées en proposant aux élèves un problème qu'ils peuvent s'approprier, comprendre, mais pas résoudre (dans notre classification des adaptation à la charge de l'élève cela correspondrait à l'adaptation codée A7 (voir plus haut) : c'est l'enseignant qui va introduire le nouveau (notamment l'objet nouveau avec, le cas échéant, son formalisme). Au cours du travail, les élèves ont ainsi pu éprouver, partiellement bien sûr, ce à quoi le nouveau apporte une réponse. On conçoit que ces introductions portent davantage sur le sens des notions que sur les techniques nouvelles (notamment s'il y a un nouveau formalisme à la clef).

Quant aux notions FUG, nous faisons l'hypothèse qu'il n'existe pas de problème adapté à les introduire avec du sens. L'introduction qu'on peut proposer est très partielle il se peut même qu'on soit amené à exposer d'abord (ou très rapidement) une partie des connaissances puis à proposer un problème leur donnant sens (cf. algèbre linéaire, Dorier 2000, convergence des suites, Robert, 2009). Il s'agit d'amener les élèves à travailler avec ces notions, sans que leur caractère outil puisse émerger de ce qu'ils savent déjà, sauf le constat que quelque chose leur manque ! On peut se demander si l'introduction de « sauts informationnels » [Brousseau 1998] n'a pas quelque chose à voir avec ce type de levier : il faut « forcer » les élèves à utiliser des éléments qui sont introduits dans le cours, même si ces éléments ne sont pas familiers, n'apparaissent pas d'emblée économiques aux élèves. Dans le cas des sauts informationnels il y a l'idée d'économie « forcée », pour nous il y a même un effet de contrat.

Les dynamiques contextualisation / décontextualisation, la variété des adaptations proposées

Les activités des élèves les préparent plus ou moins à la conceptualisation visée. Nous avons dégagé des dimensions, inspirées des théories de l'apprentissage et des résultats des recherches en didactique des mathématiques, qui peuvent avoir une influence sur la qualité des activités proposées aux élèves en relation avec cette visée de conceptualisation, et donc de la disponibilité des notions, outils et objets.

Ce qu'on appelle « sens » des notions, correspond à ce caractère des acquisitions : mettre du sens traduirait (et se traduirait par) la possibilité de mettre en fonctionnement à bon escient la notion, dans divers contextes. Compte tenu de hypothèses que nous adoptons, cela implique (et est impliqué par) un travail des élèves mettant en jeu de manière dialectique les caractères outils et objets de la notion, liés aux exercices et aux cours, et l'organisation des notions nouvelles dans l'ensemble des connaissances, liée à la variété des tâches proposées. Idéalement, il s'agit d'introduire les nouvelles connaissances autant que possible dans une certaine continuité avec ce qui est déjà acquis, dans un contexte, qui permet une certaine utilisation « outil », compte tenu du niveau de conceptualisation visé : ceci assure (en partie) la possibilité d'un début de construction autonome ; mais cette mise en fonctionnement assure aussi la possibilité de la dépasser, grâce à l'enseignant qui en présente des caractères objets, décontextualisés, qui pourront être recontextualisés autrement grâce à la généralité introduite. On voit bien l'importance du choix des tâches et des cours (expositions des connaissances).

Un premier enjeu tient ainsi à la manière dont les connaissances sont introduites, en relation avec les exercices. L'ordre entre ce qui est mis en fonctionnement dans les exercices et ce qui est exposé dans les cours, permet d'apprécier les liens entre ce qui est travaillé de manière contextualisée et ce qui est exposé de manière décontextualisée et de façon autonome.

Les tâches proposées aux élèves leur font rencontrer divers aspects de la notion, diverses manières de la travailler (adaptations). C'est en étudiant les mises en fonctionnement attendues des connaissances, la variété relative des adaptations, en relation avec la spécificité de la notion, que l'on peut apprécier l'empan des connaissances visées et la réorganisation prévisible du nouveau dans l'ancien.

Il faut souligner que chaque notion nécessite une analyse spécifique – un exemple de discussion sur le scénario est donné pour l'enseignement de la symétrie orthogonale en sixième (Chapitre Chesnais).

Reste que ce sont les activités en classe qui donnent vie à toutes ces tâches et que leur analyse est indispensable pour comprendre ce qui se joue. Ces analyses sont pilotées par des analyses précises a priori de tâches, et des analyses de déroulement qui font l'objet de ce qui suit.

II - ANALYSES LOCALES A POSTERIORI : LES DEROULEMENTS EN CLASSE

De nombreux facteurs influencent les activités des élèves en classe et, du coup, les connaissances engendrées. Ils contribuent à favoriser la transformation des savoirs enseignés en connaissances individuelles par l'intermédiaire de l'activité des élèves. Il n'y a cependant pas de loi générale reliant enseignement et apprentissage, on constate seulement des régularités, très dépendantes des conditions de travail, des classes, et des types de savoirs en jeu. Par exemple, l'action, même répétée, n'engendre pas nécessairement une construction de connaissances, il faut une transformation de cette action en activité.

Quoi qu'il en soit c'est l'analyse des relations entre les tâches prévues et le déroulement organisé par l'enseignant dans une séance de classe qui permet au

chercheur d'appréhender les activités possibles des élèves. Il s'agit de se donner les moyens de renseigner la question suivante : dans quelle mesure les élèves ont-ils réalisé l'activité attendue à partir de l'analyse *a priori* de la tâche? Quelle a été la nature de leur activité ? Rappelons qu'en général, on ne peut prétendre accéder aux activités effectives de chaque élève mais seulement aux activités possibles des élèves. Cependant, ces analyses locales restent partielles et doivent être rapportées à l'ensemble de ce qui est proposé aux élèves (cf. scénario).

De nombreux éléments étudiés participent à l'élaboration de la réponse à notre question. Dans un premier temps la forme et la nature du travail sont recomposés, un découpage en épisode est effectué (voir ci-dessous). Ces éléments éclairent l'activité des élèves, et amènent à inférer son caractère a-didactique éventuel, la place possible des échanges entre élèves, l'importance qu'elle prend dans la séance... Une source importante d'observables est liée à tout ce qu'ajoute l'enseignant, que ce soit pour solliciter les élèves, leur répondre ou développer son projet.

À partir de tous ces éléments, ce sont des analyses supplémentaires qui permettent de recomposer tous les renseignements et de proposer une lecture des activités possibles des élèves dans une séance donnée.

Le contrat didactique¹⁵, ou les habitudes, les coutumes, la mémoire de la classe jouent aussi leur rôle dans les apprentissages. Les élèves peuvent, par exemple, effectuer une tâche parce qu'ils ont compris que c'est ce que l'enseignant attend, et non pour des raisons mathématiques : qu'apprennent-ils ce faisant ? Nous prenons aussi en compte ce type d'interrogation globalement.

Nous précisons ci-dessous plusieurs dimensions qui peuvent baliser nos analyses.

Nature et formes du travail des élèves, travail autonome, collectif, écrit, oral...

Dans nos analyses de séances de classe, nous retenons, outre la durée du travail des élèves sur les tâches qui leurs sont proposées¹⁶, la forme (collectif ou non, en petits groupes) et la nature du travail organisé dans la classe (travail de recopie, de lecture, de calcul, de recherche, travail écrit ou oral, noté ou non, etc.).

Ceci permet de mettre en évidence, au moins en partie, l'autonomie laissée aux élèves (y compris pour ne pas faire ce que l'enseignant a prévu), la part des échanges entre eux, ainsi que la possibilité ou la nécessité pour eux d'avoir des initiatives, que ce soit celles qui sont liées aux adaptations demandées ou d'autres. Cela doit bien entendu être complété par la manière dont ce travail est « récupéré » par l'enseignant et mis en relation avec l'état supposé des connaissances¹⁷. Dans la mesure où nous adoptons, à la suite de Piaget et de Brousseau l'hypothèse de l'importance, voire de la nécessité de moments de construction individuelle des connaissances, nous apprécions les occasions où l'élève (les élèves) se confrontent, en autonomie, à un problème. Nous repérons ainsi les occasions laissées à l'élève (aux élèves) de travailler seul(s), que ce soit longtemps (phase a-didactique) ou non. Dans ces phases, l'enseignant n'influence pas les élèves, de quelque manière que ce soit, ni par des aides, ni par des indications (directes ou indirectes). La nature de cette activité mathématique d'un élève dépend de l'objet de son travail, en

relation avec ses connaissances : recherche préliminaire à l'introduction d'une notion, ou résolution d'un exercice inscrit dans un chapitre donné, ou lors d'un problème transversal, ou etc. Autant de paramètres à faire intervenir dans les analyses, au moment de la recomposition de l'activité possible des élèves.

De ce point de vue, les séances avec ordinateur nous intéressent particulièrement dans la mesure où l'activité autonome des élèves y est généralement *a priori* plus présente (voir aussi le chapitre xxx).

Dans la mesure où nous adoptons l'hypothèse que les échanges entre élèves, que ce soit au cours de l'interaction entre eux¹⁸, de conflits socio-cognitif, et les interactions avec l'enseignant influencent les activités des élèves, nous cherchons à en rendre compte, notamment en analysant d'une part l'existence et la nature des échanges (prévus ou non par l'organisation même du travail provoqué par l'enseignant), et d'autre part, dans les phases collectives, les verbalisations (formulations, formalisations) demandées aux élèves. Nous y revenons ci-dessous.

Des travaux de sciences de l'éducation, notamment dans le cadre d'études d'élèves socialement défavorisés [Bautier, 2006], insistent depuis longtemps sur l'importance et la spécificité de l'écrit des élèves (dans toutes les disciplines d'ailleurs) : la formulation à l'écrit est l'occasion d'une mise à distance de l'action, nous faisons l'hypothèse qu'elle est incontournable dans la construction des connaissances. En mathématiques, plus spécifiquement, ce travail de l'écrit est, en plus, à la fois un moyen de représentation et l'occasion d'un travail de formalisation, voire de symbolisation. Il peut même y avoir une certaine créativité inattendue dans la production mathématique à partir de l'écriture symbolique (une figure dessinée, une formule couchée sur le papier peuvent mettre sur la voie d'une démonstration ou d'un calcul intéressant, qui n'était pas anticipé).

En classe l'usage de l'écrit est très variable, ainsi que son rapport avec l'oral. De fait, des formes très différentes de ce travail de l'écrit (écrit provisoire ou rédigé par exemple) existent et on peut faire l'hypothèse que selon les élèves les effets de ce travail ne sont pas les mêmes. Cette dimension est encore en chantier dans nos travaux.

L'écrit de l'enseignant (au tableau notamment) est ainsi un objet d'étude. On a déjà montré la régularité des formes utilisées par chaque enseignant (cf. Robert et Vandebrouck 2003). Une question importante se pose quant au rôle que l'enseignant donne à ses écrits : est-ce une simple traduction de l'oral ? Y a-t-il des transformations entre écrit et oral ? Sont-elles signalées ou implicites ? L'écrit au tableau ou sur les feuilles distribuées sert-il de modèle pour les rédactions attendues des élèves ? Autant de questions dont les réponses peuvent nous permettre d'éclairer les activités correspondantes des élèves, et notamment ce qui reste ou non à leur charge (source de malentendus éventuels pour des élèves qui ne le décoderaient pas).

Dans le cas des séances sur ordinateur, ce travail de l'écrit et surtout son articulation avec le travail machine devient une variable des activités élèves très importante (voir chapitre xxx dans ce livre).

Les interventions de l'enseignant

Plusieurs modalités de ces interventions sont analysées (et là encore à recomposer), toujours avec le filtre de leur influence supposée sur les activités des élèves : certaines portent sur la forme des interactions avec les élèves, d'autres concernent les contenus de ces interventions (aides, bilans, rappels, explications, corrections et évaluations, expositions des connaissances, contenu mathématique). En toile de fond on retrouve l'attention portée au repérage que l'enseignant fait du travail visible des élèves et à la possibilité inférente d'en profiter » en calibrant ses interventions à des connaissances qu'il suppose « proches » de celles des élèves. Tout ce qui contribue à ce repérage peut ainsi être objet d'étude – questions, réponses, relances (voir chapitre 2 partie 2). Les modalités des interactions avec les élèves sont étudiées par de nombreux auteurs depuis longtemps¹⁹, y compris sans tenir compte des contenus en jeu (Postic, 1989).

Une variable importante tient ainsi aux connaissances des élèves sur lesquelles elles portent, et plus précisément à leur plus ou moins grande proximité avec des connaissances déjà acquises par les élèves²⁰.

Un zoom sur les aides

Nous précisons la nature des aides de l'enseignant en distinguant le moment où l'aide est donnée, la nature de ces aides, et leurs formes. Nous avons mis en évidence deux types d'aides selon qu'elles modifient les activités prévues *a priori*, ou qu'elles ajoutent quelque chose à l'action des élèves.

Les unes, dites « à fonction procédurale », jouent sur les tâches prescrites elles-mêmes, en modifiant strictement les activités par rapport à celles prévues à partir l'analyse *a priori* de l'énoncé. Elles correspondent aux indications que donne l'enseignant avant ou pendant le travail des élèves, y compris sous forme de question ouverte, « quel théorème pouvez-vous utiliser ? » par exemple. Elles peuvent conduire à découper la tâche en introduisant des sous tâches explicites, ou à (faire) choisir une méthode très contextualisée, cela change alors les adaptations nécessaires, et peut orienter l'activité vers des processus plus immédiats²¹.

Les autres, aides dites « à fonction constructive », ajoutent quelque chose entre l'activité stricte de l'élève et la construction (espérée), dans sa tête, de la connaissance qui pourrait en résulter. Que ce soit par une simple reprise de ce qui a été fait, même dans une application immédiate (tâche simple et isolée), ou par des rappels, des généralisations partielles, des bilans, toutes sortes d'interventions amenant les élèves à prendre une petite distance par rapport à ce qu'ils viennent de faire, à dégager une méthode un peu plus générale, à discuter des résultats. Ces aides peuvent favoriser une amorce de décontextualisation de ce que les élèves ont mis en œuvre, par exemple le cas générique correspondant, ou indiquer comment faire le type de tâches concerné, ou expliquer pourquoi on a fait ces choix.

Cependant selon les élèves, telle aide à fonction procédurale devient immédiatement constructive (l'élève en tire une généralisation tout seul), alors que pour tel autre élève, telle aide à fonction constructive reste de fait procédurale, la

valeur de généralité n'étant pas entendue il l'oublie dès que l'exercice est terminé, n'en fait plus rien.

Adopter le cadre de la théorie de l'activité nous conduit en effet, rappelons-le, à faire l'hypothèse qu'il y a une autre transformation « interne » au sujet, que l'élève doit vivre, quand il résout un problème, entre la résolution et les connaissances qui vont être potentiellement construites par-là même : une personnalisation suivie d'une dépersonnalisation, associée à une généralisation, et, à la fin des fins, une décontextualisation et/ou une organisation participant à la conceptualisation visée. Les aides constructives peuvent s'inscrire au moins au début du processus !

Nous pensons que ce passage, qui souvent est « raté », en particulier pour les élèves en plus grande difficulté, et qui est un des enjeux fondamentaux pour les professeurs en ZEP, peut aussi être aidé par des élaborations collectives du savoir avant même les bilans, amenant les élèves faire une place à ce savoir avant même de le retenir (Butlen et Pezard, 2003). C'est une autre forme d'intervention pour faciliter le processus précédent.

Mais soulignons que la manière dont l'enseignant prend en compte les élèves singuliers dans les interactions collectives et pour négocier l'avancée de son projet est aussi partie prenante de l'influence éventuelle des aides : prend-il des renseignements pour réguler ses interventions – notamment au moment des corrections ? S'appuie-t-il sur les élèves forts ? Quel repérage fait-il de la classe à partir des repérages individuels ?

Un zoom sur la qualité du discours (fonctions langagières, marqueurs langagiers)

Certaines caractéristiques plus fines des discours, en particulier la nature des fonctions langagières engagées pendant les interactions, voire l'utilisation régulière de certains marqueurs langagiers à certains moments précis, et d'autres caractéristiques liées à des indicateurs encore à déterminer, contribuent à modeler les activités des élèves, notamment lorsqu'ils travaillent sur des tâches complexes [chapitre 2, partie 2]. On peut trouver, grâce à ce type d'analyse sur le discours, des renseignements sur la manière d'accompagner voire d'influencer le travail des élèves. Cela renforce-t-il les autres « choix » de l'enseignant, ou les compense-t-il ? Une question ouverte...

Dans certaines recherches des indicateurs supplémentaires, tenant à des automatismes des enseignants par exemple, des gestes professionnels simples routinisés, y compris oraux, sont utilisés pour analyser les pratiques, qui amènent à préciser encore les discours proposés aux élèves, à des niveaux plus fins, y compris en partie à l'insu des enseignants.

Un zoom sur les corrections du travail des élèves en classe et les cours (les phases d'exposition des connaissances)

Les phases d'exploitation du travail des élèves par l'enseignant représentent une variable importante des activités des élèves, en relation avec la synthèse de leurs actions.

On différencie plusieurs types de corrections (orale, écrite, faite au fur et à mesure, ou à la fin d'un exercice, par l'enseignant, par les élèves...), Ce type de réflexion

peut être rapproché des réflexions portant sur le rôle des erreurs dans les apprentissages.

Derrière certaines erreurs se cachent des représentations fausses ou incomplètes qui peuvent demeurer ancrées chez les élèves si rien de spécifique n'est dit à ce sujet, voire si rien n'est demandé (au moment où l'enseignant corrige) pour les mettre en évidence : l'exposé de la solution « modèle » peut les laisser sous silence, ignorées et du professeur et des élèves.

De plus, plusieurs éléments peuvent intervenir dans une correction, par exemple la solution (stricte) des questions mais aussi ce qui a « marché » dans l'exercice (décontextualisation de la méthode), la manière de l'écrire etc.²². En particulier, lorsque la correction se fait au fur et à mesure de la résolution de chaque question par les élèves, les aspects un peu plus généraux des exercices peuvent échapper aux élèves si on n'attire pas leur attention dessus, globalement, à un moment donné.

D'une certaine manière, la correction peut être un temps de « fructification » de l'action de l'élève. Elle peut contribuer à la transformation de son action en connaissance intériorisée : soit parce que l'élève a « réussi » la tâche prescrite et que la confirmation et la reprise par l'enseignant lui permettent d'en retenir quelque chose, soit parce qu'il n'a pas réussi mais que l'enseignant répond à sa recherche, la complète, lui permettant ainsi aussi de progresser. On conçoit que les corrections ne sont pas toutes équivalentes : elles doivent à la fois apporter quelque chose d'un peu général et être proches de ce que les élèves ont cherché (l'enseignant doit se placer si possible dans la Zone Proximale de Développement des élèves, ZPD).

Les recherches sur les phases d'exposition des connaissances (cours, voire institutionnalisation lorsque cela fait suite à une certaine forme de situations) sont peu nombreuses.

Cependant quelques variables sont retenues, certaines dynamiques globales ont déjà été citées : ordre dans lequel les différentes phases se déroulent, relations entre contextualisation et décontextualisation, forme même des cours (magistral, interactif, dialogué). La nature de l'activité des élèves dans les phases de cours est évidemment une variable importante (même s'il est difficile de l'analyser quand leur seule action observable est l'écoute).

De manière plus précise, nous faisons aussi intervenir la nature des commentaires sur les mathématiques, ou « méta », en recherchant s'ils existent, faisant alors appel non pas à des connaissances strictement mathématiques mais à une réflexion sur ces connaissances, plus large ou à une présentation raisonnée, à laquelle les élèves peuvent être associés, des méthodes utilisables. Ce peut être aussi une structuration explicite « externe » du cours et notamment des démonstrations (argumentation), ou encore à une histoire de l'émergence des savoirs en relation avec les problèmes qui sont apparus, par exemple dans le cas des FUG pour lesquelles on ne propose pas de problème introductif (cf. Dorier, 2000) ou même une présentation des occasions ultérieures de s'en servir.

Dans certains de nos travaux nous avons essayé de « classer » les commentaires méthodologiques selon leur distance aux contenus visés, en distinguant les généralités sur le travail par exemple, les méthodes indépendamment du problème

précis où il y en a besoin, les méthodes adaptées à tel problème précis (cf. Robert et Tenaud 1989).

D'autres travaux, notamment à l'étranger, assez peu nombreux encore, s'intéressent aux exemples, ou aux métaphores, ou encore à l'évolution des formulations organisée par l'enseignant, en étudiant notamment le vocabulaire utilisé, de la langue naturelle au symbolisme (cf. étude sémiotique) et aussi les différences entre ce qui est dit et ce qui est écrit. Enfin la piste des documents reste ouverte.

Le travail hors classe

Vraisemblablement de plus en plus important au fur et à mesure de la scolarité, le travail hors classe n'a encore donné lieu qu'à peu de travaux spécifiques, tout en faisant « beaucoup parler » (par exemple à propos de « l'inflation des cours particuliers »). Il semble cohérent avec notre cadre théorique de supposer qu'il n'est pas indépendant du travail en classe, voire même qu'il en dépend (Félix, 2004, Rayou et al. 2010). Nous ne l'incluons pas directement dans nos analyses sauf quand nous en avons des traces : exercices donnés aux élèves à faire « à la maison », corrections en classe d'exercices de ce type etc.

Questions ouvertes

Des questions restent ouvertes, comme nous l'avons déjà signalé, notamment l'influence du temps long, et plus généralement, la « taille » de ce qui est étudié.

Un certain nombre de recherches prennent en compte cette dimension importante en mettant en relation l'ensemble des activités sur un chapitre par exemple et les productions des élèves à la fin de l'enseignement – cela nécessite d'adapter la méthodologie pour traiter une masse considérable de données (cf. Horoks, Chesnais dans ce livre).

3EME PARTIE : LES ANALYSES DE PRATIQUES DES ENSEIGNANTS DE MATHÉMATIQUES (LA DOUBLE APPROCHE DIDACTIQUE ET ERGONOMIQUE)

Ce paragraphe est développé un peu plus que les autres dans la mesure où il correspond à des recherches plus récentes et à un élargissement des cadres antérieurs. Nous présentons ainsi un bref historique de ces évolutions théoriques avant d'exposer la manière dont nous analysons actuellement les pratiques des enseignants.

Dans ce qui suit, précisons d'emblée que le mot pratiques est utilisé pour qualifier tout ce qui se rapporte à ce que l'enseignant pense, que cela corresponde à quelque chose qu'il dit ou non, à quelque chose qu'il fait ou non. Le point de vue est relatif au temps long, que ce soit avant, pendant, après les séances de classe. Le mot activités est réservé à des moments précis de ces pratiques, référés à des situations spécifiques dans le travail de l'enseignant : activités en classe, activités de préparation, d'élaboration de contrôles pour les élèves, activités de concertation... Le travail de l'enseignant est le mot réservé au sous-ensemble des pratiques en classe de mathématiques et pour cette classe (préparation) qui constitue le cœur de nos analyses.

La distinction est importante dans la mesure où nous pensons qu'il est nécessaire d'introduire des concepts propres à l'étude des pratiques des enseignants et de leurs activités. Par exemple, dans certains travaux, nous étudions l'activité du professeur dans une situation spécifique d'intégration d'outils informatiques dans sa classe et nous adoptons une approche directement inspirée de la didactique professionnelle. Dans ces travaux, la dialectique entre « activité productive » et « activité constructive » est introduite pour spécifier que l'enseignant agit et transforme le réel (contribue à l'activité des élèves) mais aussi qu'il se transforme lui-même dans un processus à long terme de développement.

I - UN PETIT HISTORIQUE : QUELLE PLACE DONNER AUX ENSEIGNANTS DANS NOS ANALYSES ?

Beaucoup de chercheurs contribuant à cet ouvrage sont engagés, pour leur travail d'enseignement, dans des formations des enseignants (en Écoles Normales²³, puis en Instituts Universitaires de Formation des Maîtres depuis 1991²⁴). Que ce soit en formation initiale ou continue, le constat de la difficulté de la diffusion des travaux de didactique des mathématiques est très présent. Pourquoi cette difficulté ? Une explication scientifique de ce phénomène semble importante.

D'autre part, comme beaucoup de didacticiens ces dernières années, notre recherche des liens entre enseignement et apprentissage nous amène à nous intéresser prioritairement à ce qui se passe effectivement dans les classes, aux activités des élèves provoquées par l'enseignant comme à son discours.

Premières tentatives

Un certain nombre de recherches ont été menées sur les enseignants de mathématiques dans les années 90. En partant notamment du constat que les professeurs avaient du mal à entendre le discours du didacticien, à adopter des ingénieries didactiques, nous nous sommes demandés d'abord, à cette époque, si cela ne devait pas être imputé à des différences de représentations entre enseignants et didacticiens, représentations sur les mathématiques, sur l'enseignement des mathématiques et sur l'apprentissage des mathématiques. Assez vite les travaux ont révélé que cette explication ne suffisait ni à interpréter complètement les différences constatées (Marilier, 1994), ni encore moins à agir. D'une part, les représentations exprimées auxquelles nous avons accès ne traduisaient pas suffisamment les pratiques effectives, ne suffisaient pas à les expliquer. D'autre part, les difficultés d'un enseignant à « emprunter des éléments de didactique », l'écart entre le possible et le didactique (prescrit) ne pouvaient pas seulement être imputés aux personnes, mais devaient aussi être mis en relation avec autre chose, notamment ce que plus loin nous ferons intervenir comme le métier. Notre démarche fut alors, pour explorer les pratiques du professeur, de nous centrer sur le discours tenu en classe : évidemment en relation avec ce que l'enseignant faisait faire, en terme de contenu athématique, mais aussi avec ce qu'il ajoutait au contenu par son discours.

Pendant quelques années, un certain nombre de recherches ont prouvé qu'il y avait une réelle variabilité dans les discours tenus en classe : de manière inter-individuelle, variabilité des commentaires « méta » (par exemple Chiocca, 1995 ; Josse et Robert, 1993), variabilités des mises en scène d'un même problème. Les méthodologies étaient directement empruntées à la didactique des mathématiques, ajoutant aux analyses des tâches proposées aux élèves en relation avec les contenus précis visés, des analyses de discours pilotées par une catégorisation assez générale distinguant structuration, argumentation, accompagnement non mathématique... On ne prenait en compte finalement que les élèves : c'est à la seule aune de ce qui leur était destiné que se faisaient les analyses.

La dernière recherche en date de ce type a été la thèse de Hache (1999) qui a réussi à regrouper certaines variables liées au discours, à la gestion et aux contenus choisis, en dégagant quelques « univers » propres à chaque professeur parmi une dizaine de types possibles ; chaque univers se caractérisant par une certaine combinatoire de la nature des tâches proposées et de la gestion correspondante (caractérisée par la nature des éléments relatifs au discours de l'enseignant). Un même enseignant n'empruntait jamais plus de 3 ou 4 univers.

Mais à ce stade, il nous restait de grandes interrogations au delà du constat de ces diversités, non seulement sur les effets de la diversité sur les apprentissages, mais encore sur l'interprétation de ces variabilités, voire sur les conséquences que l'on pourrait en tirer pour la formation. Pourquoi les professeurs, débutants ou confirmés, utilisaient-ils telle ou telle manière de mener la classe ? Quelle variation pour un même professeur ? Entre professeurs ? Dans le même temps, quelques travaux sur les formations (Masselot, 2000 ; Vergnes, 2001) ont précisé les

difficultés des professeurs débutants à emprunter des éléments issus de la didactique des mathématiques dans leurs pratiques. Même s'il est très séduisant de se dire qu'on va proposer un bon problème aux élèves, un problème qui les mette à pied d'œuvre pour construire le sens d'une notion, il n'en reste pas moins que l'enseignement n'est pas fait que d'introductions, que toutes les notions ne se prêtent pas de la même manière à ce type d'approche, qu'il y a des contraintes de temps qui pèsent lourd sur les possibilités de laisser les élèves travailler en autonomie, que tous les élèves ne sont pas égaux, y compris vis-à-vis de la posture nécessaire à entrer dans des démarches de recherche autonome, qu'au delà de l'introduction la technique doit être travaillée aussi, et enfin que les enseignants réussissent tout de même à faire apprendre à un certain nombre d'élèves en utilisant des dispositifs éventuellement éloignés des nôtres. Comment cela se passe-t-il ? Et pour les enseignants, peut-on, et comment, installer plus vite des pratiques efficaces ?

Il y avait à la fois un enjeu de compréhension des pratiques (et de réflexion sur la formation) et un besoin de dépasser les résultats obtenus sur les variabilités individuelles, pour repérer les régularités, trouver ce qui peut être modifié (et comment), sans perdre de vue la visée des acquisitions des élèves.

Un élargissement

Ce qui précède nous a amenés à analyser les pratiques des enseignants à la fois dans et pour leur relation avec les apprentissages de leurs élèves, mais en ajoutant la prise en compte du fait qu'il s'agit de l'exercice, certes singulier, d'un même métier « enseigner ».

Nous avons donc effectué un double élargissement. D'une part, nous avons abandonné dans nos analyses le lien exclusif entre pratiques en classe et apprentissages visés pour nous plonger aussi dans l'univers du métier. Nous avons choisi l'option suivante : pour analyser, interpréter les pratiques (et peut-être pour ensuite les former), nous ne pouvions pas faire l'impasse du fait que ces pratiques, tout en ayant pour objectif l'apprentissage des élèves, concernent l'exercice singulier du métier d'enseignant, ce qui ne peut manquer d'induire des choix spécifiques. Il y a là un véritable changement de posture pour le chercheur. D'autre part, cela nous a amenés à nous inspirer et à faire des emprunts à la théorie de l'activité, à la psychologie ergonomique et à la didactique professionnelle. Ce travail n'est pas terminé, loin s'en faut !

Soulignons que l'initialisation de ce travail a été facilitée par le fait que nous utilisions déjà des éléments de théorie de l'activité dans notre approche didactique des apprentissages des mathématiques (inspiration des travaux de Piaget, de Vygotski et surtout de Vergnaud).

Nous avons ainsi élaboré avec J. Rogalski une démarche théorique pour étudier les pratiques des enseignants de mathématiques, appelée « double approche »²⁵, pour souligner le fait que nous imbriquons des analyses didactiques des activités mathématiques des élèves, qui pilotent une partie des analyses de ce que font les enseignants, notamment en classe, et des analyses ergonomiques inspirées de

l'analyse de l'exercice d'un métier, qui complètent les premières. Puis certains d'entre nous y ont encore ajouté des éléments ergonomiques directement inspirés des schémas de développement des activités de travail (voir par exemple Pastré, 2005).

Du point de vue didactique, les analyses partent des choix de tâches (global et locaux) proposées aux élèves. Les analyses de tâches *a priori* servent ainsi à décoder les activités en classe des enseignants, en mettant en jeu la proximité des tâches prévues et des activités des élèves compte tenu des déroulements provoqués. Du point de vue ergonomique, on considère l'activité de l'enseignant en tant que sujet en situation, et non en tant qu'élément du triangle didactique savoir – élève – enseignant. Intervient alors la mise en relation des choix pour la classe et en classe avec les diverses contraintes liées à l'inscription dans l'institution et à la singularité de chacun. Dans cette perspective on n'oppose pas la contingence de l'activité dans une classe particulière aux nécessités du métier dans une institution didactique. Reste que les choix, les deuils, ne sont pas complètement aléatoires et que les étudier du point de vue du métier permet de mieux en comprendre les raisons.

II - LA DOUBLE APPROCHE DIDACTIQUE ET ERGONOMIQUE POUR L'ANALYSE DES PRATIQUES D'ENSEIGNANTS DE MATHÉMATIQUES

Pour analyser les pratiques, et plus précisément le travail des enseignants pour la classe et en classe, nous proposons ainsi de prendre en compte à la fois les buts (les apprentissages des élèves par exemple, mais aussi leur enrôlement au quotidien²⁶) et les contraintes incontournables, non conjoncturelles, qu'impose le métier d'enseignant de mathématiques. Ces contraintes se déclinent en prenant en compte, d'une part des déterminants en partie extérieurs à la classe (institutionnels, sociaux et personnels), et d'autre part différentes échelles rendant compte du travail réel.

C'est ainsi qu'admettant la complexité des pratiques et leur cohérence (De Montmollin, 1984), nous développons la double approche. Ce cadrage se traduit par des analyses en composantes et niveaux d'organisation qui sont à recomposer, sachant que c'est ces recombinaisons qui donnent accès à ce que nous cherchons. Ainsi ces analyses, qualitatives, menées à partir d'observations en classe, complétées par des documents recueillis en dehors de la classe, ont pour enjeu à la fois de nous permettre de mieux comprendre ce que l'enseignant organise en classe comme activités pour les élèves, et de distinguer ce qui est déterminé dans une pratique de ce qui est variable (de mettre en évidence des alternatives), ce qui est conjoncturel ou essentiel, ce qui est partagé par plusieurs enseignants (régulier) et ce qui est singulier, ce qui peut être enrichi.

Un point de départ : les analyses en classe de mathématiques

Nous analysons les pratiques d'un enseignant donné à partir de séances en classe de cet enseignant et des activités qu'il y déploie. Nos observables sont les activités des élèves telles que l'enseignant les organise avec une lecture orientée ici vers la reconstitution de divers choix de l'enseignant. Cette lecture est complétée par

diverses études hors-classe se rapportant aux séances analysées et permettant de compléter les analyses des observables déjà recueillis.

A partir d'une séance en classe, analysée en relation avec les activités possibles des élèves, nous dégagons les deux premières composantes des pratiques observées que nous appelons composante cognitive et composante médiative.

La composante cognitive traduit ce qui correspond aux choix de l'enseignant sur les contenus, les tâches, leur organisation, leur quantité, leur ordre, leur insertion dans une progression qui dépasse la séance, et les prévisions de gestion pour la séance. Elle se déduit de l'itinéraire cognitif choisi par l'enseignant pour quelques séances, elle permet aussi d'anticiper, pour d'autres séances, ce type de choix de l'enseignant.

Les choix correspondant aux déroulements, à l'installation effective en classe de cet itinéraire cognitif choisi, notamment les improvisations, les discours, l'enrôlement des élèves, la dévolution des consignes, l'accompagnement des élèves dans la réalisation de la tâche, le repérage de leur travail et ce que l'enseignant en fait, les validations, les expositions de connaissances, participent à la description de la composante médiative. Elle renseigne sur les cheminements organisés pour les différents élèves.

Les composantes, inférées à partir d'une ou plusieurs séances de classe, sont ensuite recomposées en logiques d'intervention, qui dépassent l'échelle d'une séance, permettant d'intégrer dans une certaine mesure le temps long, notamment dans la perspective de lier activités d'élèves et apprentissages. Ces logiques font intervenir aussi des choix personnels des enseignants qui peuvent être questionnés par ailleurs (voir ci-dessous).

Nos travaux sur la stabilité des pratiques des enseignants expérimentés légitiment²⁷ dans une certaine mesure cette extrapolation (voir partie 2, chapitre 2). Le métier : intégration de déterminants professionnels des pratiques

Pour mieux cerner le « métier », trois composantes supplémentaires des pratiques sont introduites : la composante personnelle, la composante institutionnelle et la composante sociale. Elles traduisent la prise en compte de données non directement observables en classe, mais incontournables pour comprendre certains choix : elles correspondent à des déterminants du métier.

D'abord une composante personnelle qui permet de pondérer ce qu'on voit en classe et de l'intégrer dans le temps long. Le professeur peut en effet faire des choix, y compris liés au temps long et, comme on n'observe en général que des extraits de la pratique sur une année scolaire, on ne peut le avoir une idée de ces choix que si on interroge le professeur, même si c'est encore insuffisant. Cette composante sert à traduire aussi les représentations du professeur, liées à ses connaissances et à ses expériences, mais aussi les risques qu'il consent dans l'exercice de son métier, le confort dont il a besoin : un métier s'exerce longtemps et on ne peut pas consentir des efforts trop grands pendant très longtemps. On accède à ces éléments en général par des entretiens, au mieux réalisés à partir de visionnage de vidéos de l'enseignant concerné en sa présence (voir un exemple dans la partie 2, chapitre 2). Évidemment, dans cette composante personnelle, il y a des aspects encore plus particuliers, liés au psychisme, dont nous ne tenons pas

compte explicitement tout en reconnaissant leur importance. On reste ici dans le rationnel : on travaille sur des éléments qui ne sont pas inaccessibles au conscient, ce qui légitime un certain nombre de réductions.

Le professeur ne décide pas des transferts qui peuvent émaner de sa personne ; il ne décide pas de la composition de sa classe, il ne décide pas de la conjoncture, il ne décide pas de ses automatismes en revanche, il décide quand même consciemment, in fine, des contenus qu'il propose et des déroulements qu'il organise. Et ce caractère de rationalité consciente attaché à ces choix nous fait privilégier les analyses correspondantes dans la mesure où on a en tête la formation et qu'on a en tête une formation rationnelle. Cela rejoint la décision de choisir comme intermédiaire pour accéder aux apprentissages, les activités possibles des élèves.

Mais exercer un métier c'est aussi devoir respecter un certain nombre de contraintes qui peuvent même s'avérer plus ou moins contradictoires avec ce qu'on aurait envie de faire si on était tout seul. De notre point de vue, un enseignant n'est pas libre ! Nous avons défini la composante institutionnelle : la nature des mathématiques à enseigner, les programmes, les horaires, certaines ressources comme les manuels, l'existence d'une administration, les inspections.

Nous ajoutons une composante sociale qui correspond d'une part au fait que l'enseignant n'est pas tout seul, dans sa classe et que les élèves interviennent non seulement comme groupe mais aussi comme appartenant à des groupes sociaux, et d'autre part au fait que l'enseignant n'est pas tout seul dans son établissement et qu'il y est soumis à des exigences, des attentes (des collègues, des parents etc.), quelquefois des contraintes dont on ne peut pas faire l'impasse pour interpréter ce qu'on a vu dans la classe. Par exemple voici un cas extrême, qui s'est déjà rencontré : le cas du jeune enseignant qui est fortement découragé de faire travailler ses élèves en petits groupes en classe parce que « ça fait trop de bruit », alors qu'il serait très motivé pour le faire.

Voici notre première manière d'analyser les pratiques dans le cadre de la double approche. Ce découpage en composantes, profondément imbriquées dans le système complexe que représentent les pratiques, et les recompositions « raisonnées » qu'il autorise nous a permis un certain nombre d'avancées dans nos recherches, notamment pour trouver des logiques d'action, des régularités et des variabilités. En particulier, les choix de contenus mathématiques que fait un enseignant sont certes impliqués par la nature même des mathématiques en jeu, mais aussi par des impératifs de gestion de la classe concernée, par des considérations liées aux programmes, au temps long, à ses propres représentations et connaissances.

Niveaux d'organisation du travail des enseignants

Nous avons introduit un deuxième type d'analyse de pratiques, toujours dans cette perspective de double approche. Ce deuxième type d'analyse est plus adapté pour accéder aux variabilités et aux évolutions individuelles dans le travail réel²⁸.

La complexité de ce travail de l'enseignant se marque notamment par l'imbrication de différentes phases distinctes de ce travail. Ainsi la préparation, en partie

indépendante du reste du travail mais en partie aussi influencée par l'anticipation de ce qui va se passer en classe, est moins contrainte, notamment temporellement, que le déroulement lui-même où l'improvisation, « réglée » par l'avancée du temps. Obtenir que la classe tourne ne recouvre pas totalement l'objectif de réussite des élèves, même si les deux sont liés, pas plus que cette réussite ne recouvre l'apprentissage, même si les deux sont liés. Enfin non seulement il n'est pas possible de décrire exhaustivement entièrement ce que les enseignants ont à faire à chaque étape de leur travail²⁹, mais encore il est impossible de l'évaluer entièrement, tant les apprentissages sont difficiles à la fois à être appréciés – ne serait-ce qu'à moyen terme³⁰, et à être mis en relation directe avec l'enseignement, comme nous l'avons déjà évoqué.

Les trois niveaux d'organisation utilisés pour ce complément d'analyse tiennent précisément compte de ces différentes échelles attachées à la fois à la temporalité et au grain des activités à analyser³¹. Ils sont directement liés aux sujets. Voici ces niveaux (ou organisateurs des pratiques) :

- Un niveau micro, qui consiste à étudier ce qui est automatique ; par exemple dans le discours ce qui n'est pas préparé, les gestes élémentaires (Butlen, 2007). On a regardé aussi le mode d'écriture au tableau qui est parfaitement automatique pour une part. D'autres analysent les déplacements. Soulignons qu'éventuellement dans ces analyses on a accès à des phénomènes qui se produisent à l'insu des enseignants, mais qui restent préconscients, dont l'enseignant peut prendre conscience même s'il peut avoir du mal à agir dessus.

- Un niveau local, celui de la classe au quotidien. Le niveau où se rencontrent les préparations et les improvisations ; le niveau de toutes les adaptations du professeur.

- Un niveau macro celui des projets, des préparations³², qui se nourrit des connaissances, représentations et expériences de chacun.

III - QUELQUES EXEMPLES D'ANALYSES DE PRATIQUES

Un premier type de résultats tient ainsi à la confirmation de la cohérence individuelle³³ des pratiques (De Montmollin, 1984) et au fait qu'elles deviennent stables, la composante médiative, comprise à un certain grain³⁴ exprimant le plus cette stabilité. (voir partie 2, chapitre 2). D'autres travaux sur l'utilisation du tableau par les enseignants ont confirmé à la fois les régularités des choix de chaque enseignant, et la cohérence avec le mode de gestion choisi (Robert et Vandebrouck, 2003).

Un autre type de résultats permet de comprendre des régularités dans l'intervention des contraintes institutionnelles sur les pratiques (composantes institutionnelles proches) avec des diversités dans les autres composantes (voir partie 2, chapitres 1 et 4).

Comme nous n'y reviendrons pas dans les chapitres suivants, nous résumons certains résultats déjà obtenus sur des pratiques d'enseignants expérimentés que nous avons souvent rencontrées en troisième et au seconde et sur des pratiques

d'enseignants débutants permettant de montrer l'utilisation des niveaux d'organisation.

Exemples de régularités dans des séances d'exercices en classe de troisième et de seconde

Nous donnons seulement un résumé des résultats de ces recherches³⁵ (Robert, 2005b et c).

Les enseignants privilégient en classe un travail exclusif sur les nouvelles connaissances mathématiques en train d'être enseignées. Ce travail proposé aux élèves ne comporte pas beaucoup d'exploration du champ des problèmes solubles avec les outils du moment. L'enseignant propose en effet, vu la nécessité d'avancer, des tâches relativement proches du cours, qui demandent des mises en fonctionnement standard, qu'il faut avoir vues. Cela revient à privilégier le sens du « décontextualisé » vers le « contextualisé ». Du même coup, il y a peu d'entretien explicite des connaissances anciennes. Il y a rarement des occasions de réorganisation entre les connaissances anciennes et ce qui est nouveau. De plus, les élèves sont peu et pas très longtemps confrontés à de l'incertitude sur ce qu'il va falloir faire, ce qui contribue à minorer les questionnements des élèves sur ce qu'il faut utiliser et les mises en relation autonomes.

Cela passe par ce qui est organisé en classe et par les interventions de l'enseignant avant et pendant les activités des élèves : on constate ainsi une orientation univoque de l'activité des élèves vers ce « nouveau » savoir visé, orientation notamment permise par une prise en main précise et rapide (voire immédiate) de ces activités, avec un guidage permanent et peu de temps de travail autonome, si ce n'est sur les derniers calculs, complètement balisés et dont le rôle est majoré en ce qui concerne le travail demandé aux élèves en classe.

Les activités provoquées portent ainsi sur des tâches (devenues) isolées si ce n'est simples et isolées, qui portent sur le chapitre en cours, sans beaucoup d'adaptations des connaissances à utiliser ; il n'y a pas souvent (besoin) de structuration des connaissances en acte du côté des élèves (ils n'ont pas besoin de le faire, c'est le professeur qui s'en charge). De même dans ces conditions, il n'y a pas besoin de dévolution des moyens de contrôles aux élèves.

On constate donc une certaine séquentialisation des activités des élèves sur une même notion en moments relativement indépendants : les élèves font fonctionner les outils les uns après les autres, indépendamment, ils n'ont besoin que des connaissances outils (empilées) correspondant au cours et soufflées par le découpage organisé par l'enseignant. Le développement de la dynamique entre cours et exercices peut manquer d'ampleur. C'est ainsi l'organisation des connaissances chez les élèves qui serait une des premières victimes de ce manque de temps.

Tout se passe comme si les contraintes en partie communes qui pèsent sur les enseignants d'un même niveau scolaire dans des établissements proches (standard ici) – les restrictions d'horaires, les programmes et le poids des instructions et inspecteurs, l'hétérogénéité importante et la composition des classes – amenaient

des pratiques en partie communes, en termes de composantes médiative et cognitive, même si il reste des marges de manœuvre qui ne sont pas investies de la même façon...

On ne peut pas être sûr qu'il en résulte chez les élèves un morcellement des connaissances³⁶, car des élèves apprennent ce qui ne leur est pas enseigné explicitement (et leur est donc dévolu, plus ou moins implicitement). Mais on peut se demander tout de même si la plainte réitérée de beaucoup d'observateurs du manque de « choses sûres » chez les élèves n'a pas aussi comme origine ce type de travail en classe, et ceci est renforcé par ce qu'on entend souvent les élèves déplorer : « C'est juste quand on commence à comprendre qu'on change de chapitre ». Une question se pose alors : y a-t-il des alternatives à ce type de choix ?

Exemples d'analyses des pratiques des enseignants débutants

L'étude des pratiques transitoires des débutants permet d'illustrer autrement ce type d'analyses de pratiques.

Les débutants³⁷ (appelés PLC2 dans le système français en référence à leur statut de Professeur de Lycée ou collège) développent des pratiques qui évoluent tout au long de leur première année, que nous appelons donc transitoires : elles ne sont pas encore stables mais certainement complexes et nous supposons que leur cohérence est déjà « en germe », à partir des expériences antérieures et connaissances des débutants.

Ils sont amenés à adopter une nouvelle posture, qui fait intervenir leur composante personnelle et qui est liée à l'exercice d'un métier nouveau, dans un établissement réel : cela les amène à prendre conscience des contraintes et des marges de manœuvre de leur nouvelle profession : « tout n'est pas possible ni pour tout le monde, ni pour chacun ».

Au quotidien, dans les classes des débutants, on a mis en évidence des difficultés avec la prise en compte des élèves et avec la gestion du temps (composante médiative). Il se peut que le projet mathématique de la séance soit majoré au détriment des élèves ou que ce soit la prise en compte des élèves qui est majorée, au détriment du suivi du projet mathématique. Tout se passe comme si certains débutants étaient obnubilés par les réactions de la classe et le souci que tous les élèves suivent, alors que d'autres oublièrent que c'est aux élèves qu'il leur fallait enseigner des mathématiques, voire manifestèrent une sorte de méconnaissance des mathématiques pour les élèves.

Au niveau de la composante cognitive, le projet développé par les débutants est souvent assez local, à l'échelle de quelques séances au maximum et ne s'inscrit pas toujours dans un ensemble relativement cohérent sur l'année, notamment sur le plan mathématique (Margolinas et Rivière, 2005 ; Bloch, 2005).

D'autres éléments complémentaires sont proposés dans le travail de Bloch (ibid) : elle suggère que les PLC2 non seulement manquent de moyens pour organiser leur enseignement sur le plan des contenus, notamment pour les introductions, mais encore ont une difficulté spécifique vis-à-vis du travail mathématique des élèves, qui peut prendre plusieurs formes : c'est, paradoxalement, l'oubli de la nécessité

d'intermédiaires, de constructions transitoires pour les élèves, et même quelquefois l'oubli de la nécessité de constructions du sens. Ainsi défend-elle l'idée (déjà travaillée par Lenfant, 2002 en algèbre), que certains débutants ont tellement naturalisés certaines notions mathématiques qu'ils n'en voient plus les difficultés, qu'ils ne sont pas sensibles au fait que donner une règle, même en la commentant, ne suffit pas à la faire apprendre (à tous). Ou encore qu'ils attendent trop vite des preuves formelles alors que les élèves peuvent « passer » par des processus plus pragmatiques. Finalement, elle propose de donner des moyens aux PLC2 de « faire faire vraiment des mathématiques aux élèves » notamment en identifiant les savoirs en jeu, en élaborant des situations adéquates à le rencontrer et en apprenant à gérer comme il faut – nous y reviendrons

Finalement ces pratiques des débutants, non stabilisées, manqueraient de suffisamment d'images mentales opérationnelles permettant les nuances et les improvisations adaptées : les débutants auraient comme des pré-images, lacunaires, plus ou moins déformées (Chesné, 2006). Ce peut être « sans déformation » mais sans aucun relief dans les pratiques, aucune hiérarchie, dans un désir de « bien faire » en suivant ce qui a été indiqué en formation, en gommant provisoirement autant que faire se peut la composante personnelle et les réactions spontanées (Chesné, Ibid) : les enseignants concernés ne s'impliquent alors pas complètement comme tels avec des conséquences sur les élèves qui n'ont pas en face d'eux un vrai maître engagé. Ce peut être avec des « déformations caricaturales » : certains exagèrent la relation individuelle avec les élèves, ou leur activité, quelle qu'elle soit, plus ou moins mathématique, d'autres exagèrent le suivi du projet mathématique qu'ils ont décidé d'adopter, l'exposition des connaissances et le déroulé des exercices.

Nous faisons l'hypothèse que le fait de ne pas disposer d'automatismes, de routines ni de relief global, tant sur les mathématiques que sur les élèves fait obstacle à une certaine prise de distance avec le niveau local, qui, de ce fait, occupe toute la scène. Faute de suffisamment de relais aux autres niveaux micro et global, il y aurait une « surcharge » du niveau local !

Le cas des néotitulaires, notamment ceux nommés en premier poste en ZEP/REP a donné lieu à des travaux très récents (Coulange, 2012) qui montrent bien la diversité des effets éventuels des formations sur les formés, en relation avec leur composante personnelle, leur premier poste et la spécificité de leur formation.

Une question se pose alors : y a-t-il des précurseurs qui amèneraient à installer, au moins chez un nombre important de débutants, certaines pratiques plutôt que d'autres ? Nous y reviendrons dans le dernier chapitre.

4EME PARTIE : RETOUR AUX ACTIVITES DES ELEVES – UN POINT DE VUE METHODOLOGIQUE – DES QUESTIONS

Même si chaque recherche amène à choisir des éléments de cette méthodologie générale et à les adapter, le travail à mener pour étudier l'enseignement d'un contenu mathématique donné se découpe en plusieurs « actes » (six) ; que ce soit pour mieux comprendre les apprentissages ou les pratiques enseignantes, ou pour élaborer des dispositifs alternatifs à expérimenter. Ces actes sont évidemment non indépendants, mais peuvent être abordés dans des ordres différents.

ACTE 1, LA DETERMINATION DU RELIEF CORRESPONDANT A LA NOTION ETUDIEE

Cette phase des recherches amène à reprendre des études épistémologiques ou historiques aussi bien que didactiques. Le but est de circonscrire les spécificités mathématiques de la notion, de caractériser son inscription dans les programmes (et les évolutions éventuelles), et de synthétiser les difficultés répertoriées des élèves. Cela peut être enrichi par des analyses de manuels ou d'autres ressources.

ACTE 2, LE SCENARIO DE L'ENSEIGNEMENT ETUDIE OU VISE

C'est évidemment la référence au relief qui permet d'apprécier globalement tant l'introduction prévue que les dynamiques entre cours et exercices et / ou la richesse des tâches. C'est un travail difficile car il porte souvent sur beaucoup de données. La comparaison de différents scénarios peut être une aide.

ACTE 3, LES ANALYSES A PRIORI DE TACHES PRECISES, A PARTIR D'ENONCES PROPOSES AUX ELEVES

Le chapitre sur l'analyse des manuels ci-après illustre dans le détail un exemple de ces analyses.

ACTE 4, LES ANALYSES DE DEROULEMENTS, A PARTIR D'OBSERVATIONS OU DE VIDEOS OU D'ENREGISTREMENTS AUDIO

Les séances analysées sont souvent filmées, puis transcrites. La caméra est posée au fond de la salle, centrée sur le tableau, avec l'enseignant comme acteurs principal (les élèves sont peu vus, mal entendus, mais souvent l'enseignant reprend ce qu'il a, lui, entendu).

Pour faire le type d'analyses correspondantes, nous avons établi une grille d'étude des déroulements des séances (illustrée dans ce qui suit). Une des variables reste le grain de ces analyses : selon qu'on étudie le discours phrase à phrase ou de manière moins fine, les renseignements que l'on recueille sont différents – par exemple pour

comprendre les dynamiques des phases d'interactions, il peut être intéressant de s'intéresser aux marqueurs langagiers (cf. chapitres suivants)

Nous utilisons le croisement des analyses *a priori* des énoncés, des conditions de travail installées en classe et de tous les échanges verbaux pour reconstituer ensuite les activités des élèves, en rentrant plus ou moins dans le détail selon la problématique précise adoptée.

Nous prenons d'abord en compte la chronologie que nous établissons : en nous fondant sur l'analyse *a priori* de l'énoncé, nous listons les tâches des élèves telles qu'ils les rencontrent au fur et à mesure de la séance, avec leur durée, en référence à ce qui a été déjà listé *a priori*.

Nous notons alors les formes de travail (individuel, collectif,...), les enjeux du travail (« simple » recherche, écrit, écrit collectif...) et les types de travail (chercher, écrire ou parler, écouter, rédiger, recopier...). Types de travail et formes de travail déterminent la nature du travail, en partie indépendamment du contenu de ce travail. En particulier les moments de silence de l'enseignant sont pris en compte comme indice d'un essai de « dévolution » de la tâche aux élèves. Ainsi les élèves peuvent-ils (ou non), sur une même tâche, plus ou moins chercher, discuter, écrire, écouter, recopier, être aidés, être corrigés... et même être encouragés (le tout de façon plus ou moins longue). La nature de leur travail (par exemple chercher collectivement, rédiger individuellement...) pondère, voire modifie à nouveau les mises en fonctionnement des connaissances induites par les tâches.

Nous croisons ensuite les tâches et sous-tâches travaillées et les interventions de l'enseignant : questions, relances ou réponses, aides et explications, qui contribuent à l'enrôlement des élèves, et au maintien dans le travail, repérages du travail des élèves et exploitation, expositions de connaissances, généralisations... silences. Une attention particulière est portée aux aides de l'enseignant. Rappelons que les aides à fonction procédurales peuvent réduire la tâche à accomplir mais aussi permettre aux élèves de se mettre au travail, les aides constructives peuvent permettre de faire construire de nouvelles connaissances aux élèves à partir de leur propre travail, cela correspond à l'utilisation par l'enseignant de ce que nous modélisons sous le terme générique « ZPD » Zone Proximale de développement, mais, selon les élèves, une aide procédurale peut être déjà constructive et une aide constructive, rester procédurale (cf. rapport au savoir des élèves en ZEP). De façon générale tous les commentaires ajoutés par l'enseignant, que ce soit sur les mathématiques en jeu ou sur le travail des élèves, sont des éléments importants de nos analyses de déroulement (cf méta)

Il s'agit en un mot de donner accès aux improvisations, aux choix, aux deuils que l'enseignant effectue en relation avec ce qui était prévu. Ceci pour reconstituer à la fois les activités possibles des élèves et les logiques des enseignants.

En ce qui concerne les phases d'exposition des connaissances (« cours » à proprement parler), les analyses sont un peu plus difficiles à faire, surtout si les élèves restent silencieux. De plus il est impératif de prendre connaissance à la fois de ce qui précède la leçon et de ce qui la suit immédiatement et souvent l'illustre par des exemples simples ou des applications immédiates, pour établir le lien éventuel réel ou artificiel entre des activités avant la séance et cette séance.

Nous remplaçons l'analyse des tâches par l'analyse des unités qui peuvent être présentes ou implicites dans des cours (définitions, théorèmes, propriétés, propositions, démonstrations, exemples, commentaires, illustrations, schémas ou dessins, applications).

Nous faisons tourner ensuite le même type de questionnements que précédemment sur ces « unités » : nous étudions notamment l'existence, la durée de ces phases d'exposition des connaissances, l'ordre (enchaînement) et la place de ce qui est exposé, avec notamment la manière dont sont introduits les différents commentaires, ainsi que le moment où ils prennent place. Cela permet de reconstituer la mise en évidence éventuelle par l'enseignant des aspects objets et outils d'une même connaissance (théorèmes ou méthodes correspondantes).

Nous cherchons si possible la part d'improvisation apparente et les échanges pendant ces phases, ainsi que les activités apparentes des élèves. L'écrit au tableau, la différence entre ce qui est écrit et ce qui est dit peuvent aussi être analysés (selon les recherches). De même pour le degré de formalisation mathématique qui sera ou non analysé.

Il est intéressant d'analyser comment l'enseignant demande aux élèves d'utiliser ce cours (et de le travailler), et de noter la qualité des références qu'il en fait. Tout se passe comme si pour certains le cours tenait lieu à la fois de mémoire de la classe et de catalogue des connaissances à utiliser.

La comparaison des manuels et du cours des enseignants peut être intéressante, ainsi que l'utilisation préconisée pour les élèves.

ACTE 5, RECONSTITUTION DES ACTIVITES DES ELEVES, LIENS AVEC LES APPRENTISSAGES, PREMIERES QUESTIONS

Les analyses précédentes permettent de reconstituer les traces des activités possibles des élèves, permises, voire favorisées. Les activités possibles sont celles dont on peut estimer que beaucoup d'élèves les ont faites, au moins partiellement, dans le temps de la classe. Souvent, nous sommes d'ailleurs amenés à distinguer des activités à maxima et des activités à minima (cf. I). En revanche lorsque les élèves travaillent en autonomie sur un ordinateur, l'accès à leurs activités est moins problématique (même si in fine personne n'a jamais accès aux activités effectives elles-mêmes). Nous parlons alors d'activité observée (même si seules les actions sont observées) et nous avons développé plusieurs accès méthodologiques à ces activités (par observation directe ou grâce à des fichiers de traces – cf. partie 3, chapitre 3).

Ceci dit, s'il est difficile d'analyser des enseignements en relation avec des apprentissages, il est encore plus difficile d'en avoir des témoins légitimes. On sait bien qu'une copie blanche n'est pas toujours synonyme d'un non apprentissage, qu'une variation apparemment anodine d'un énoncé peut changer les performances des élèves, qu'il peut y avoir une grande distance entre ce qu'un élève écrit et ce qu'il a compris, retenu, ou qu'il est en train d'apprendre. Les contrôles par exemple sont des témoins très partiels, pollués par des facteurs sociaux, affectifs, liés au contrat, liés à la nécessité d'une certaine réussite dans une classe...

Nos analyses ne nous permettent ainsi que de tisser des relations relativement contextualisées entre énoncés et déroulement d'une part et réussites des élèves à des contrôles d'autre part. Il nous faudra cependant nous en contenter dans certaines recherches (cf. partie 2, chapitre 4).

Soulignons que, plus généralement, notre cadre théorique ne nous autorise pas à des hypothèses précises organisées sur ces relations enseignement/apprentissage. Nous estimons même que beaucoup d'itinéraires cognitifs différents peuvent engendrer des apprentissages. C'est peut-être aux marges, avec des élèves en difficulté par exemple, que les compensations qui peuvent jouer pour certains élèves ne jouent plus, ou qu'il y a des phénomènes de seuil. Par exemple, des auteurs (Castella, 1995, 2000) ont montré que certaines connaissances sont construites par certains élèves sans avoir été enseignées explicitement ou exprès. Y a-t-il là des sources de différenciation ? Individuelles ou sociales ?

Tout au plus pouvons-nous énoncer quelques hypothèses (cf. annexe 2) sur des cas extrêmes inférées des théories générales qui nous inspirent : un enseignement entièrement magistral a de grandes chances de ne pas permettre de construire leurs connaissances à beaucoup d'élèves (faute de suffisamment d'activités des élèves) ; un enseignement sans aucune phase d'exposition de connaissances aussi (faute de suffisamment d'occasion de transformer les activités en connaissances) ; tout comme un enseignement où ne seraient proposées aux élèves que des tâches simples et isolées (faute de suffisamment d'activités non immédiates).

ACTE 6, LES LOGIQUES D'ACTION DES ENSEIGNANTS, LES ANALYSES DE PRATIQUES

Ce dernier acte consiste à reconstituer et à recomposer, pour un enseignant puis éventuellement plusieurs, les composantes que nous avons distinguées, en tenant compte de l'organisation en niveaux.

Les logiques d'action s'attachent à combiner les composantes cognitive et médiative, pour mieux dégager ensuite ce qui peut relever des contraintes que nous prenons en compte.

A partir de plusieurs analyses d'un même enseignant ou de plusieurs enseignants on recherche des régularités (sur les choix globaux de contenus) – dans le cas des débutants par exemple la surcharge du niveau local a amené à faire appel aux niveaux d'organisation pour interpréter les constats. La détermination de groupes professionnels (cf. genre) amène à travailler à la fois sur les composantes et les niveaux d'organisation.

Les diversités s'expriment souvent sur les logiques d'action (sur les choix locaux de tâches et de déroulements).

Ce sont pour l'instant des inférences à partir des premiers résultats qui nous amènent à suggérer des variabilités (ce qui peut bouger, à quel prix).

De nombreux chapitres de ce livre illustrent ce dernier acte.

CONCLUSION : ENCORE DES QUESTIONS - VERS LE TEMPS LONG ?

Nous avons déjà signalé ci-dessus les questions ouvertes des indicateurs à retenir pour étudier le discours des enseignants en classe, plus ou moins fins (marqueurs langagiers, formats des échanges ...). Mais ces analyses de déroulements, à partir des analyses de tâches (exercices, cours), restent essentiellement locales et ne renseignent pas complètement sur ce qui se passe sur le temps long, alors que les apprentissages se jouent aussi sur ce temps long. Il manque ainsi encore un « cran » pour apprécier mieux les activités des élèves et ce que provoquent les enseignants.

Souvent les enseignants ne disent pas, ne font pas tout ce qu'ils avaient prévu ce qui alimente une double discussion celle de la nécessité de tels choix et de tel deuil, et celle des alternatives. Ce qui est analysé pendant quelques séances amène à se poser des questions élargies, qui portent sur les autres exercices éventuels, les cours, le programme, la classe, l'enseignant particulier, l'établissement. Il s'agit de favoriser ces interrogations qui permettent de « remonter » au global

Certes l'étude des scénarios révèle en partie les mathématiques que peuvent fréquenter les élèves, en termes de dynamiques, dans le projet, entre les cours et les exercices, entre le sens et la technique, par l'intermédiaire de l'ordre dans lequel sont présentées les différentes parties, des durées prévues pour les différentes phases, et aussi de la quantité et de la variété des tâches. Mais la différence entre ce qui est prévu et ce qui se passe, telle que ce chapitre l'a mis en lumière, est trop importante pour que cela soit suffisant.

Certes l'étude des productions des élèves après un chapitre donné, quand on peut la faire, permet de mettre en relation ce qui s'est passé et des traces des apprentissages, mais c'est très coûteux en temps dans la mesure où il faut étudier tout ce qui s'est passé en relation avec le contrôle ; certaines recherches commencent à donner de telles ressources, toutefois limitées dans la mesure où de nombreux paramètres interviennent, hors de portée des observateurs.

Retenons, de cette conception des apprentissages et des pratiques, les intermédiaires choisis pour y avoir accès, avec l'importance des enchaînements des couples {énoncé-déroulement en classe}, précieux indicateurs de ce qui peut varier dans les activités des élèves et des enseignants. Ces activités sont appréhendées à partir d'analyses *a priori* des mises en fonctionnement attendues des connaissances à partir d'un énoncé, comparées aux mises en fonctionnement provoquées (permises) pendant le déroulement dans la classe, qui sont elles approchées par le travail que l'enseignant met en place pour les élèves. Ces analyses des activités possibles sont parfois complétées par des études d'activités effectives observées. Des études plus globales de la notion mathématique en jeu, du scénario dans lequel s'inscrivent les séances en classe, du contexte à la fois institutionnel, social et personnel (pour l'enseignant) donnent accès à des recompositions respectant la complexité en jeu.

5EME PARTIE : LE POSITIONNEMENT PAR RAPPORT A D'AUTRES RECHERCHES

Notre interrogation porte sur la classe effective et les sujets singuliers, nous en indiquons dans ce paragraphe, de manière nécessairement schématique et sommaire, quelques grandes spécificités par rapport aux autres théories didactiques étrangères ou françaises. Soulignons qu'il est impossible dans ces quelques pages d'être exhaustif ni même relativement complet, et que nous avons retenu quelques exemples susceptibles d'éclairer ce que nous proposons.

Nous le verrons, une différence initiale importante tient à l'adoption ou non d'un point de vue « didactique stricto sensu » où les sujets ont un rôle générique, voire épistémique et sont de ce fait tous équivalents (ce qui n'est pas notre point de vue).

I - DU COTE DES ELEVES ET DE LEURS APPRENTISSAGES

Un certain nombre de recherches anglo-saxonnes s'inspirent directement de la théorie de l'activité pour analyser des séances de classe (Christiansen et Walther, 1986, Hiebert & Wearne, 1997, Stein M.K., Grover B.W., Henningsen M. 1996...). On retrouve ainsi que, pour eux, la tâche est le point de départ de l'activité et reste externe à l'élève, alors que l'activité est ce que l'élève fait réellement, et que c'est ce qui influence les apprentissages (learning). Ils admettent en particulier l'importance des déroulements pour analyser les activités des élèves et ne se contentent pas d'étudier les tâches qui leurs sont proposées. Cependant les méthodologies mises en œuvres sont différentes des nôtres et l'activité est davantage analysée en référence à des mises en œuvre de démarches mathématiques globales qu'à des mises en fonctionnement de connaissances précises – conjecturer sur une tâche ouverte, calculer, raisonner, ainsi qu'à la nature du problème - interne ou externe aux mathématiques.... Voici une liste de quatre tels types de tâches cités par Sullivan, Clarke, Clarke, O'Shea (2010) :

Type 1. Involves a model, example, or explanation that elaborates or exemplifies the mathematics.

Type 2. Situates mathematics within a contextualised practical problem to engage the students, but the motive is explicitly mathematics.

Type 3. Involves open-ended tasks that allow students to investigate specific mathematical content.

Type 4. Involves interdisciplinary investigations in which it is possible to assess.

Une grande importance est donnée aux tâches ouvertes (open tasks) et aux démarches d'investigation associées. Cela correspond notamment aux recherches développées en relation avec les NTCM (cf. ci-dessous). Cependant souvent des caractéristiques liées à l'affectif ou au psychologique sont introduites, qui pilotent en partie l'analyse des tâches et activités différemment de notre pilotage par les connaissances stricto sensu - comme « l'attention » (Mason, 2003), ou encore "le défi" (Jaworski, B. 1994).

Revenons aux recherches francophones, passées en revue tout aussi succinctement.

En Théorie des Situations Didactiques³⁸ (TSD), lorsqu'est analysé ce qui se passe en classe, les références, la comparaison, l'aune à laquelle on rapporte les observations sont ce modèle de l'apprentissage mathématique défini à partir des situations fondamentales et du milieu. Les situations fondamentales, au cœur de la théorie, modélisent un procédé didactique forçant, en quelques sortes, les élèves à utiliser les mathématiques à acquérir. Les problèmes correspondant sont élaborés à partir du sens profond des notions, dégagé à partir de la question : à quoi servent les notions ? Les élèves n'ont pas d'autre recours que de les utiliser, à condition qu'ils jouent le jeu proposé. De plus, c'est au sein même du problème qu'ils trouvent les éléments leur permettant de savoir si leur démarche est correcte. Ils n'ont pas à attendre l'avis de l'enseignant (voir l'exemple du puzzle).

Du point de vue des déroulements, Brousseau (Brousseau 1998) a notamment dégagé l'intérêt de la succession des phases d'action, de formulation et de validation. Il a introduit la notion de contrat didactique qui modélise les attentes éventuellement implicites du professeur vis-à-vis des élèves et réciproquement. On peut alors jauger a priori les différentes situations (y compris ordinaires) proposées aux élèves en utilisant les outils initialement conçus pour élaborer les situations didactiques « idéales ». Les analyses *a posteriori* permettent de comparer les écarts entre les déroulements et les analyses *a priori*. Il s'agit de vérifier notamment si les outils que les élèves doivent mettre en œuvre pour résoudre le problème sont bien à leur disposition, sont bien dans le milieu ; si la situation est prévue pour être adidactique, par exemple pour introduire une notion à partir d'un « bon » problème, on vérifie a priori qu'il n'y a pas besoin de l'enseignant, que les connaissances visées sont nécessairement à l'œuvre, elles et elles seules, que la situation est à la portée des élèves. Et on vérifie a posteriori que le déroulement organisé a respecté ce qui était mis dans les attentes. Les analyses confirment ou infirment, voire expliquent à partir des caractéristiques du déroulement et des tâches prévues, les écarts entre ce qui s'est passé et ce qu'on pouvait en attendre du point de vue du modèle d'apprentissage inscrit dans la TSD : on peut évoquer le point de vue d'un certain potentiel théorique d'apprentissage des situations analysées, les analyses sont porteuses d'inférences sur les apprentissages par l'intermédiaire du modèle (Brousseau, 1997, 1998).

Or, pour notre part, nous cherchons à mesurer l'écart entre des activités des élèves, mettant en jeu leurs connaissances (en cours d'acquisition), analysées a priori, et les activités qui ont vraisemblablement pu avoir eu lieu dans des séances de classe ordinaires.

D'une part, la description de ces activités se fait en référence à des grandes dimensions qui ne correspondent pas à un modèle théorique construit mais seulement à des grandes catégories de variables influençant les apprentissages et dépendant des enseignants. Soulignons à ce titre l'importance de la chronologie et du détail correspondant des aides de l'enseignant dans nos analyses. Chronologie et analyses fines de discours nous semblent souvent absentes des analyses du milieu où la situation est analysée d'emblée dans sa globalité.

D'autre part, nous pouvons travailler aussi bien sur des séquences courtes que sur des enchaînements plus longs (ce qui est indispensable à certains moments de la

recherche) : en effet notre unité de base - le couple {énoncé/déroulement} - qui remplace la Situation au sens de la TSD est plus petite. On peut cependant souligner qu'elle est « du même ordre » d'une certaine façon puisqu'elle mélange contenu et gestion réelle. Mais les notions de tâches et d'activités n'apparaissent pas explicitement en TSD. Elles sont remplacées par les situations proposées aux élèves déclinées en phases, a-didactiques ou non, référées au seul travail mathématique des élèves pendant chaque phase. La dynamique des situations de référence tient uniquement à la mise en fonctionnement des mathématiques attendues, rendues indispensables par le problème proposé et qui plus est avec des moyens de contrôle internes pour les élèves. Les variabilités individuelles n'ont donc pas leur place.

Enfin nous donnons la même importance dans notre approche aux introductions des notions qu'au reste de l'enseignement d'une notion. On ne retrouve pas la centration sur les situations fondamentales ou sur les dialectiques outil/objet. On ne retrouve pas non plus la majoration implicite de l'introduction des notions pour la construction du sens chez les élèves.

La théorie anthropologique du didactique (TAD)³⁹ est encore différente, elle spécifie au didactique des éléments inspirés par une vision anthropologique de l'homme dans le monde. Les praxéologies mathématiques donnent des moyens systématiques, voire systémiques, pour établir une description exhaustive de l'offre mathématique d'une institution concernant une notion ou plusieurs notions : programme, manuels, ou même mathématiques plus ou moins savantes. L'offre signifie tout ce qu'on pourrait mettre à la disposition des élèves (et des enseignants) en termes de types de tâches, justifications (légitimes), théories, sans prendre en compte les conditions de l'enseignement autres que liées aux mathématiques. En particulier, ce ne sont pas les énoncés des exercices qui sont analysés mais les types de tâches qu'ils illustrent, qui en sont extraits, indépendamment de l'activité précise que les élèves auront à faire sur la tâche en question, qu'on ne se donne pas les moyens de déterminer. Cela amène à repérer des types de tâches élémentaires, sortes d'unités qui peuvent apparaître dans les exercices, les manuels, les cours, qui servent à baliser l'enseignement de ce qui est étudié, y compris en terme de manques ou d'évolution. Chaque type de tâche est associée à une (des) manière(s) de la résoudre (technique) et à des possibilités de justification (présentes ou non dans ce qui est analysé) - technologie. L'ensemble, qui peut aller d'une notion à plusieurs chapitres, et qui peut couvrir un programme ou plusieurs, est organisé en relation avec les éléments de théories mathématiques correspondants et la mise en évidence de la transposition de ce savoir en contenus d'enseignements, participe de ces analyses. Ce n'est donc pas dans cette acception que le mot « tâche » est utilisé dans le travail présenté (Chevallard, 1992).

II - DU COTE DES PRATIQUES DES ENSEIGNANTS

Beaucoup de recherches anglo-saxonnes mettent en jeu les conceptions des enseignants (*beliefs*) mais n'introduisent pas la dimension du métier. Par exemple, le modèle élaboré par Schoenfeld (1998) caractérise les décisions et les actions

comme fonction de ses connaissances, de ses buts et de ses croyances. Ces déterminants sont évidemment marqués par le contenu considéré. Ce modèle est utilisé pour caractériser un moment dans l'activité d'enseignement, y compris au niveau de l'interaction avec les élèves et vise aussi à prédire le comportement d'un enseignant dont on a préalablement identifié l'ensemble des déterminants ; ce qui sous-tend l'existence de certaines invariances. En outre, un certain nombre de recherches s'intéressent maintenant à des dispositifs collectifs mettant en jeu des communautés de pratiques qui servent plus à étudier des évolutions éventuelles de ces pratiques qu'à les analyser en relation avec les apprentissages de élèves (Wenger, 1998).

En France, dans les recherches s'inspirant de la TSD, Margolinas (Margolinas, 1995) puis d'autres auteurs après elle ont présenté une analyse des connaissances du professeur et de leur jeu en classe organisé en niveaux structurant le milieu. Pour elle, travailler (pour un professeur), c'est « mettre en jeu » des connaissances de différents niveaux, y compris sur les mathématiques et sur les élèves. Étudier le travail, c'est mettre en évidence ces connaissances et leurs interactions entre ces niveaux et ensuite réfléchir aux moyens de faire acquérir ces connaissances.

Beaucoup de ces connaissances concernent la manière qu'a le professeur de concevoir les contenus, au sein d'un programme, d'élaborer les exercices à proposer et d'interpréter les connaissances des élèves. Ce type d'investigation assez globale ne nous semble pas prendre en compte la chronologie des séances ni surtout leur déroulement précis qui deviennent ainsi relativement secondaire. Les modalités de mises en actes, par exemple tout ce qui concerne la façon de reprendre une idée d'élève, les différentes aides, ne sont ainsi pas détaillées, voire n'ont pas de place.

Du côté de la TAD, les déroulements des séances sont mis en relation systématiquement avec les organisations didactiques développées indépendamment des classes, des enseignants et des notions (Chevallard, 1999). Ainsi sont pris en compte notamment les différents moments de l'étude (première rencontre, travail de la technique etc) mais dans ces recherches l'importance des déroulements effectifs et les spécificités des sujets singuliers que nous prenons en compte par l'intermédiaire de l'analyse des activités effectives nous semblent encore minorées. Enfin, plus récemment, des chercheurs ont développé un modèle de l'action du professeur en classe, étendu ensuite à un modèle de l'action conjointe professeur-élève dans le cadre de la didactique comparée (Sensevy, et al., 2000). La décomposition de l'action de l'enseignant en quatre dimensions actionnelles et la prise en compte systématique des mésogénèse, chronogénèse et topogénèse ne nous semblent pas non plus bien adaptées à notre projet d'introduction du temps réel et des variabilités individuelles et notionnelles. Les références théoriques explicites aux caractéristiques cognitives des apprentissages et aux activités effectives des élèves ne sont pas convoquées.

Dans la démarche que nous développons, travailler c'est mettre en jeu des activités et analyser le travail c'est étudier l'activité (ce qui est pensé, dit, pas dit, fait, pas fait). Nous nous intéressons moins aux connaissances qu'à leurs mises en fonctionnement et nous ne réduisons pas non plus les activités des enseignants à

des gestes professionnels, même si il est intéressant d'introduire des niveaux liés à la temporalité et au grain de ces activités.

Ces différents points de vue ont évidemment des conséquences sur les formations des enseignants et les recherches correspondantes. Nous y reviendrons dans la conclusion.

III - ET LA DIDACTIQUE PROFESSIONNELLE ?

Si nos travaux s'inscrivent tous dans le cadre général de la double approche, ils empruntent des éléments plus ou moins précis, selon leur objet, à la didactique professionnelle (Pastré, 2005a et b). Les recherches sur l'intégration des TICE dans les pratiques d'enseignants sont celles qui nous ont le mieux permis de nous en inspirer directement.

Par exemple, dans certains travaux, nous étudions l'activité du professeur dans une situation spécifique d'intégration d'outils informatiques dans sa classe et nous adoptons une approche directement inspirée de la didactique professionnelle. Dans ces travaux, la dialectique entre « activité productive » et « activité constructive » est introduite pour spécifier que l'enseignant agit et transforme le réel (contribue à l'activité des élèves) mais aussi qu'il se transforme lui-même dans un processus à long terme de développement (Pastré et Rabardel, 2005).

Nous souhaitons ajouter dans ce dernier paragraphe quelques difficultés qui se présentent lors de ces emprunts. Elles sont liées d'abord à notre difficulté à définir des schèmes et à intégrer la notion de compétence. Elles sont aussi liées à des questions d'expertise. Il n'y a pas toujours en mathématiques d'accord sur l'orientation de l'action du professeur : il n'y a pas, loin s'en faut, de définitions universelles des « bonnes manières » d'enseigner, ni de même, d'adoption commune des modèles de référence pour analyser les pratiques. De plus, le contrôle des pratiques de l'enseignant ne se fait pas sur les apprentissages, but ultime des pratiques (ou seulement partiellement, par l'intermédiaire d'épreuves dont tout le monde s'accorde à souligner les insuffisances inhérentes à la complexité d'une telle évaluation). En revanche le professeur, et même l'inspecteur ou les collègues, peuvent vérifier que « la classe tourne » ou que les élèves réussissent aux contrôles qu'il a conçus : ce n'est pas le but de l'action qui est facilement et directement testé, mais seulement un sous-but partiel, cet enrôlement des élèves, qui constitue une condition sans doute nécessaire mais qui peut ne pas renseigner sur les apprentissages. Nous nous demandons si une multi expertise ne doit pas nécessairement être convoquée dans ce domaine professionnel.

Le rapport singulier / invariants / générique, les différences entre « déroulé de l'action », significations pour chacun et invariants, seraient aussi particulier à la profession d'enseignant, tout comme le fait de travailler dans un environnement dynamique ouvert humain. Complexité, variabilité et imprévisibilité rendent problématiques les découpages permettant d'atteindre l'exécution de l'action et nécessitent sans doute plusieurs approches simultanées et imbriquées.

Enfin, les analyses du travail réel organisent beaucoup de recherches de type ergonomique. Dans les travaux sur les pratiques des enseignants, ce type

d'analyses est difficile à mener vu sa complexité (présence des élèves, difficulté de l'évaluation). De ce fait, beaucoup de formations d'enseignant, par exemple, s'inspirent du travail souhaité par les formateurs sans toujours d'ancrage dans le travail réel des enseignants, contrairement à beaucoup de formations inspirées de la didactique professionnelle.

IV - TICE, DES SPECIFICITES DANS LE CAS DU TRAVAIL SUR ORDINATEUR (PARTIE 1 - CHAPITRE 2)

Dans le cas du travail sur ordinateur, un travail préalable sur les scénarios d'usage des outils informatique impliqués est spécifiquement pertinent, dans la mesure où l'articulation sur le long terme des séances informatiques avec des séances classiques est un facteur des activités élèves. L'analyse *a priori* des tâches doit aussi être complétée par celles des environnements, des aides, des feedbacks possibles. Au même titre que les aides du professeur, ils peuvent modifier les activités possibles attendues.

Du côté des déroulements, la durée et la nature du travail des élèves sont différentes d'un type d'outil à l'autre. Le travail est cependant souvent individuel et les élèves ont a priori beaucoup d'autonomie. Ils peuvent avoir des parcours de travail différents avec des temps de travail différents sur les tâches qui leurs sont proposés. Ils peuvent aussi bénéficier de feedbacks individualisés, peuvent échanger avec leurs pairs ou avec l'enseignant. Il y a donc en général plus matière à observation que pendant des séances traditionnelles où le rythme est souvent dicté par l'avancée collective du groupe classe. Les élèves peuvent donc être suivis individuellement, on a ainsi accès non seulement à leurs activités possibles mais aussi à leurs véritables actions. La reconstitution de l'activité est ainsi plus proche du réel que dans la méthodologie classique. On est plus à même de savoir si des aides constructives le sont réellement et donc d'aller vers des effets en terme d'apprentissage. Cependant il y a une perte au niveau de la généricité dans la mesure où seuls quelques élèves peuvent être observés.

Des apprentissages spécifiques à l'usage des outils informatiques, mêlant mathématiques et connaissances sur les outils eux-mêmes font leur apparition, en particulier dans l'usage par les élèves de logiciels ouverts (géométrie dynamique, tableur...). Ils peuvent justifier le recours à une approche théorique plus centrée sur ces apprentissages. Il s'agit de l'approche instrumentale (Rabardel, 1995) spécifiée aux mathématiques (Artigue, 2002), qui sera développée dans la partie 4 chapitre 2 à propos de l'introduction du tableur dans les classes.

Enfin, certaines aides de l'enseignant sont uniquement liées à l'environnement informatique et à la manipulation des outils. Elles n'existent pas dans l'environnement traditionnel papier-crayon (sauf exceptionnellement quand il y a utilisation d'un outil non TICE type compas, équerre...). Nous introduisons dans certains travaux un troisième type d'aides (après les aides procédurales et les aides constructives) que nous appelons aides « manipulatoires » (partie 4, chapitre 1).

V - CONCLUSION

On pourrait schématiser de grandes dimensions qui permettent de distinguer les différents choix des chercheurs.

Une première grande source de diversité tient aux rapports que les travaux didactiques entretiennent à la conjoncture (le temps présent et les problèmes qui se posent dans les pays concernés) et au terrain (l'école actuelle, les élèves, les enseignants), voire aux formations d'enseignants – en relation avec les conditions institutionnelles qui sont imposées aux recherches. Il s'agit du positionnement qui est adopté concernant les liens entre les recherches et l'enseignement tel qu'il est prescrit dans un lieu donné, les programmes, les instructions, mais aussi les habitudes culturelles ou sociales. En un mot les recherches ont-elles une portée prescriptive, prospective, fournissent-elles des diagnostics, des propositions (à expérimenter ou non), quelles variables sont mises en scène ? En relation avec les problèmes à traiter, dans quel cadre théorique ou conceptuel⁴⁰ les recherches s'inscrivent-elles, quelle est sa place ?

Certains s'inscrivent ainsi directement dans un système éducatif donné, avec des objectifs d'action sur le système. Citons notamment les recherches anglo-saxonnes (et autres) pour essayer de rendre plus effectives les normes du NCTM établies dans les années 2000 pour améliorer l'enseignement des mathématiques aux USA (et dans d'autres pays ayant adopté les mêmes types de normes). Les analyses de tâche qui sont alors produites, par exemple, ne cherchent pas à traduire des caractéristiques épistémologiques des mathématiques à enseigner mais des compétences recherchées chez les élèves, à provoquer (chercher, conjecturer, rédiger...). D'autres chercheurs travaillent en direction de, voire avec, les enseignants, avec des objectifs analogues, liées à la réalité de ce qui se passe en classe ; ils affichent des objectifs explicites de transformation de l'enseignement et de l'amélioration des apprentissages (Boero en Italie 2007). D'autres encore cherchent à retrouver dans les mathématiques enseignées les sources culturelles ou sociales pour les groupes concernés et à en tenir compte (Radford, 2010). En revanche certains chercheurs ont plutôt pour objectif de caractériser des formes universelles qui seraient nécessaires pour l'enseignement des mathématiques, liées aux seuls contenus (situations fondamentales) ou à comprendre comment les savoirs évoluent, diffusent, établissant une écologie des savoirs par exemple (Brousseau, Chevallard, Sensevy, *ibidem*, en France). D'autres encore travaillent à élucider comment se nouent l'enseignement et l'apprentissage, quels en sont les ressorts, les invariants, les diversités, par-delà la conjoncture locale ou plus générale (Vergnaud, *ibidem*). Les derniers chercheurs cités font davantage appel à des cadres théoriques, qui sont souvent des modèles servant de référence aux recherches, à choisir en amont des recherches, à adapter, voire à développer ; les premiers types de chercheurs travaillent avec des cadres théoriques, éventuellement locaux ou au contraire plus généraux, éventuellement à mélanger, qui semblent appropriés à aborder les questions à traiter ; d'autres chercheurs enfin en restent à des travaux relativement empiriques, voire positivistes. En France les recherches en didactique des mathématiques ont pu se développer dans une certaine

indépendance avec la conjoncture ; ainsi des cadres théoriques issus de la théorie anthropologique à adapter au didactique, de la théorie des jeux comme modèle des apprentissages, des théories de Vygotski et Piaget articulés à la théorie de l'activité ont été développés, en amont des recherches contextualisées.

Enfin les recherches sur les formations d'enseignants de mathématiques (ou en mathématiques) sont plus ou moins associées aux recherches en didactiques, dans certains pays c'est même l'origine de la demande didactique. Là encore de grandes diversités se font jour, nous y reviendrons dans la dernière partie de ce livre.

Une autre distinction, qui n'est pas sans rapport avec la précédente et avec les choix « théoriques », tient à ce qui est retenu, pris en compte dans les recherches en ce qui concerne les élèves et les enseignants – et les variables correspondantes à introduire dans les travaux, en lien avec les cadres théoriques (ou conceptuels) adoptés et leur explicitation. Un élève apprenant les mathématiques, un professeur enseignant les mathématiques peuvent être « approchés », analysés de plusieurs manières (non exclusives, non indépendantes) :

- comme sujet « épistémique » (étudié en relation avec les invariants qui caractérisent son évolution, en relation avec sa seule fonction, son seul rôle – élève ou enseignant),
- comme sujet institutionnel (étudié dans ses « assujettissements », fonction des institutions auxquelles il appartient),
- comme sujet social (en relation à la fois avec ses origines socio-culturelles – surtout pour l'élève et avec son métier – surtout pour l'enseignant),
- comme sujet psychologique, avec plusieurs points de vue
- comme sujet cognitif (étudié dans son développement, en tenant compte de ses potentialités d'apprentissage s'agissant de l'élève, d'enrichissement de ses pratiques, pour l'enseignant),
- comme sujet affectif (étudié en tenant compte de ses émotions, de ses goûts, de sa confiance en soi...),
- comme sujet singulier, voire psychique (avec son histoire personnelle, ses représentations, ses connaissances, voire ses traits de caractère...).

L'intitulé même du champ scientifique correspondant à des recherches analogues dans différents pays est révélateur – cf. le « Psychological Mathematical Education » anglo-saxon qui traduit des recherches à partir des sujets cognitifs.

Une dernière dimension est liée à la prise en compte du quantitatif dans les travaux, de la validation et, plus récemment, à la place donnée aux évaluations – travaille-t-on sur des individus, sur quelques classes, sur une grande quantité de classes, sur une catégorie d'élèves (caractérisée ou non par un représentant « générique »), sur un groupe professionnel (par exemple : les enseignants de collège) ? Y a-t-il lieu de valider les conclusions, comment ?

Cette dimension est liée en effet au mode de validation prévu dans les travaux, et aux cadres théoriques – l'inscription forte dans un tel cadre peut servir d'auto-validation à certains travaux. Ainsi la place donnée à l'expérimentation, et plus

généralement à toutes les analyses de données, varie-t-elle fortement en relation avec l'inscription dans un modèle théorique général et avec la discussion éventuelle ou la recherche d'élargissement de ce dernier. S'il est utilisé pour explorer de nouveaux champs de l'enseignement des mathématiques, les expériences servent à recueillir des données dont le modèle « prescrit » les analyses⁴¹ – sinon, si les recherches sont pilotées par des questionnements qui ne s'inscrivent pas directement dans un modèle, ou qui le mettent en défaut, ou qui empruntent à des théories générales, l'expérimentation peut aussi servir à établir des régularités, des hiérarchies, des causalités, des dialectiques contribuant à accroître, voire à renouveler la compréhension même des phénomènes.

Les recherches en France sont plutôt cliniques pour l'instant (qualitatives, à partir de cas, la validation se faisant souvent en comparant les prévisions et ce qui se passe) mais beaucoup envisagent de changer d'échelle... Là encore c'est en lien avec les objectifs – les recherches très liées à des objectifs à atteindre pour les apprentissages des élèves ne peuvent se passer d'évaluations quantitatives, même si on en connaît les limites importantes : incertitudes sur les causes des apprentissages, sur le moment où évaluer, sur les tâches à proposer (pas trop proches, pas trop éloignées de ce qui a été appris), etc.

Les évaluations internationales ne sont pas toujours associées à des recherches didactiques, cependant leurs résultats permettent de renouveler les perspectives quantitatives grâce à des outils statistiques très performants, notamment grâce à l'amélioration extraordinaire des moyens de recueil des données et des traitements associés.

Selon la place donnée à la conjoncture et au terrain dans les travaux, selon les types de sujets considérés, certaines variables s'imposent plus ou moins aux chercheurs. Ainsi, en France, l'analyse praxéologique des tâches en termes de types de tâches, techniques, technologies, théories est plus adaptée à une analyse globale, plus ou moins exhaustive, des savoirs à enseigner ou enseignés, qui peut critiquer et même s'évader des programmes, concernant davantage les sujets institutionnels (dans des institutions variées). Nos analyses *a priori* (présentées ci-dessus) sont plus adaptées à comprendre les activités possibles des élèves et des enseignants au sein d'un programme donné (concernant les sujets épistémiques et cognitifs, voire sociaux) ; elles nécessitent l'inscription des tâches dans un itinéraire cognitif global, en référence à un champ conceptuel (ou à un niveau de conceptualisation). Dans ce point de vue, les programmes peuvent être contestés mais en évoquant des arguments non seulement épistémologiques mais aussi liés aux sujets (élèves notamment). Les recherches faisant intervenir les enseignants comme sujets psychologiques (d'un certain point de vue) se distinguent aussi des recherches faisant intervenir les seuls sujets institutionnels dans la mesure où d'autres variables sont prises en compte, comme les marges de manœuvre vis-à-vis des contraintes et leur investissement, autrement dit les choix, les alternatives, les deuils..., et pas seulement les contraintes. Encore différentes, les recherches très liées au terrain ont développé des méthodologies spécifiques faisant intervenir les

diverses communautés qui se créent avec des chercheurs, des enseignants, des formateurs (communautés de pratiques, discursives ...).

Cela étant, les chercheurs en didactique des mathématiques ont tous le projet de tenir compte d'abord des spécificités des mathématiques à enseigner pour comprendre les apprentissages en relation avec les enseignements – dans la mesure où ils partagent le postulat fondamental de l'importance (et de la spécificité) de la nature des contenus en jeu dans les apprentissages. Mais les descriptions de ces mathématiques à apprendre dépendent nécessairement de la nature des sujets des élèves qu'on prend en compte (cf. ci-dessus), des enseignants qu'on considère, et même de la nature des relations entre apprentissages et enseignement auxquelles on s'intéresse. Selon les travaux, plusieurs types de relations entre enseignement et apprentissage sont recherchés. Ainsi si tous sont d'accord pour dégager, à partir de l'histoire et de l'épistémologie des mathématiques, des programmes scolaires et de leur évolution, une description des contenus à enseigner (notions, chapitres, domaines, ou champ mathématique), les modalités mêmes de ces descriptions dépendent largement du projet didactique et des « sujets » étudiés, comme nous l'avons déjà évoqué ci-dessus pour les recherches francophones. Certains autres chercheurs mettent un grand poids sur le langage développé en classe, et étudient spécifiquement la communication qui s'y noue. D'autres insistent sur l'analyse sémiotique qui peut être faite, notamment dès lors qu'interviennent des instruments.

Si les problèmes sont abordés de manière quantitative, alors on va dégager de grandes variables susceptibles de rendre compte des variations constatées, elles seront utilisées à la fois pour élaborer les modes de questionnement et pour les analyser. Pas question de rentrer dans les différences individuelles, liées à la prise en compte des sujets singuliers ! Pas question non plus d'attribuer à tel ou tel résultat une interprétation qui dépasserait les seules variables retenues – et c'est sans doute l'origine de la faible portée de certaines évaluations internationales, qui, à vouloir trop embrasser, ne laissent pas beaucoup de marges d'interprétation.

En revanche, si on veut comprendre les jeux plus singuliers qui se jouent en classe, les marges qui restent à l'intérieur même d'un système donné, alors le choix des variables retenues et des types de sujets étudiés peuvent être différents. Si par exemple on veut introduire l'élève comme sujet « cognitif », et l'enseignant comme sujet singulier, alors, dans les descriptions dont on a besoin, on ne peut pas se limiter aux mathématiques structurées, analysées, en relation avec les seuls savoirs. Il est nécessaire de se donner dans les descriptions des contenus des moyens pour inscrire les difficultés des élèves, éventuellement inattendues, et plus généralement les apprentissages tels qu'ils se déroulent ; il faut aussi se donner des moyens pour analyser ce qui se passe en classe, au même titre que ce qui est prévu. Les notions de champ conceptuel et de niveau de conceptualisation sont une réponse à la première attente ; les analyses de déroulement répondent à la deuxième. Encore faut-il que ces dernières puissent révéler ce qu'on cherche, ainsi les analyses *a priori* de tâches en termes d'adaptations ont été introduites précisément pour permettre d'étudier le devenir en classe de ce qui est prévu et de

mieux apprécier les activités des uns et des autres en réponse aux tâches qui effectivement traitées dans la classe.

VI - ET LES AUTRES DISCIPLINES ?

En France, diverses didactiques se sont développées, là encore avec des histoires différentes – certaines venant des formateurs (français), d'autres d'universitaires (mathématiques, physique). Un certain nombre de recherches entre disciplines ayant des proximités scientifiques (mathématiques- physique notamment) commencent à être menées, et cela permet d'élargir utilement le spectre des questions posées. Mais ceci est vraiment une autre histoire.

ANNEXES

ANNEXE 1

Il s'agit de donner des clefs pour lire les diversités des travaux de recherche, en comprendre les raisons (choix des auteurs) et ce à quoi ils peuvent donner accès, ce à quoi ils ne donnent pas accès.

Outil/objet/cadres/registres et systèmes de représentation

Régine Douady (1986) a introduit les caractères objet et outil des notions à enseigner : cela permet de distinguer d'une part les propriétés décontextualisées d'une notion (objet) et d'autre part ce qui est à l'œuvre lorsqu'on l'utilise dans un contexte, de manière souvent partielle (outil).

Suivant le vocabulaire introduit par Douady (1986), nous appelons cadre un domaine de travail mathématique dans lequel fonctionne une notion donnée, ce domaine n'étant pas le seul domaine d'intervention de la notion en général. Un cadre se caractérise par certains fondements (admis, implicites ou non), un certain nombre d'objets, des théorèmes et un corps de problèmes. Par exemple le milieu d'un segment peut être défini analytiquement, ponctuellement, vectoriellement.

Suivant le vocabulaire introduit par Duval (1995, 2003), nous appelons registre ce qui se rapporte à l'écriture d'une notion, du point de vue sémiotique. Les nombres décimaux ont ainsi plusieurs écritures possibles (à virgule, comme somme de fractions décimales) et les traitements des opérations selon leur écriture ne sont pas en bijection parfaite, ne sont pas « congruents » : il existe une sorte de conversion à faire, qui n'est pas transparente. L'intérêt de cette catégorisation est ainsi de repérer qu'il y a des registres « non congruents », c'est-à-dire que le travail dans chacun d'eux n'est pas isomorphe en quelque sorte, ce qui est à la source de difficultés si rien n'est fait pour préparer les élèves. Les systèmes de représentation sont des systèmes de signes moins organisés que les registres, ils peuvent les précéder dans les apprentissages.

Les points de vue

Enfin nous introduisons l'idée de point de vue : ce sont des manières d'aborder un problème mathématique liées à un type de stratégie de portée variable. Plus flous que les cadres ou registres, les points de vue permettent d'indiquer différentes manières d'aborder la même propriété par exemple. Changer de point de vue pour faire une démonstration revient à adopter une certaine flexibilité (Gagatsis et al. 2010). Non seulement les mathématiciens font spontanément ces changements de points de vue, mais encore ils savent bien que c'est une méthode générale de recherche.

Les changements de points de vue en effet peuvent enclencher des changements de stratégie : rendre un énoncé symétrique alors qu'il ne l'est pas, remplacer une

propriété par une autre équivalente mais donnant une autre pondération aux objets impliqués « rapproche » souvent d'une démarche efficace. Classiquement (Robert, 1995), pour traduire la concourance de trois droites du plan, on peut prendre le point de vue du point appartenant aux trois droites, ou du point d'intersection de deux d'entre elles qui appartient à la troisième, ou reconnaître trois hauteurs ou médianes d'un triangle, ou encore chercher trois droites concourantes dont les droites données sont l'image par une transformation. De même, selon que l'on énonce les droites d et d' sont perpendiculaires ou d est perpendiculaire à d' , les propriétés correspondantes qui s'imposent sont différentes. Considérer qu'une parabole est tangente au côté d'un triangle ou que le côté du triangle est une tangente à la parabole conduit naturellement à des associations d'idées différentes – la deuxième expression peut conduire plus que la première à l'idée que le projeté du foyer de la parabole sur le côté appartient à la tangente au sommet de la parabole.

Pour démontrer une égalité en arithmétique, en algèbre ou en analyse, on peut commencer par transformer le terme de gauche, ou celui de droite, ou transformer les deux, en montrant qu'elles sont égales à une même troisième, ou en démontrant que leur différence est nulle ou que leur rapport vaut 1, ou en montrant que la valeur absolue de leur différence peut être rendue inférieure à n'importe quel nombre positif donné : autant de points de vue enclenchant des stratégies différentes. De même lorsqu'on travaille sur différentes formes d'une expression algébrique, factorisée, développée, etc.

Ainsi symétriser ou dis-symétriser un énoncé est une source de changement de point de vue fréquents. Les théorèmes ou associations d'idées qui viennent spontanément en tête, liés y compris aux mots ou aux signes utilisés, sont différents.

Il se peut que certains changements de points de vue amènent à perdre une partie de l'information, ce qui peut en expliquer aussi la difficulté – par exemple, passer du point de vue « triangle rectangle » au point de vue « existence d'un angle droit » ou « droites perpendiculaires » fait « oublier » pour un temps le troisième côté du triangle...

Local/global/ponctuel

Une autre distinction, assez délicate (Rogalski M., 2008), peut intervenir pour éclairer les différents théorèmes ou énoncés mathématiques : c'est, notamment en analyse, le fait que des propriétés concernent un point (on évoquera une propriété ponctuelle), un voisinage du point (propriété locale –) ou un intervalle, voire l'ensemble entier (propriété globale). Un des enjeux de l'analyse est justement le passage entre ces trois aspects – souvent la présence de quantificateurs, implicite ou non, modifie encore la nature des énoncés.

ANNEXE 2 : DES HYPOTHESES SUR L'ENSEIGNEMENT (UN BILAN)

Toutes les hypothèses, et ce ne sont que des hypothèses, que nous énonçons ici doivent être adaptées à la classe, au contenu et à l'enseignant. Il manque, rappelons-le, la prise en compte d'aspects sociaux et affectifs, voire psychanalytiques. Il manque aussi le passage des élèves à chaque élève.

1) Hypothèses liées aux choix sur les contenus

a) Pour introduire une notion

Selon le type de notion, il peut exister ou non des problèmes favorisant la prise de sens.

Si on a affaire à une extension de concept déjà introduit ou à une notion « réponse à un problème », il peut être efficace d'introduire le cours par la recherche d'un problème adéquat.

Si c'est une FUG (notion formalisatrice, unificatrice, généralisatrice – comme la notion de limite formalisée) la présentation est plus délicate.

b) Pour travailler une notion

On fait l'hypothèse que si on veut installer une certaine conceptualisation et une certaine organisation des connaissances, il peut être efficace de varier les activités proposées aux élèves, au sein d'un scénario cohérent. En particulier ne pas se limiter à des tâches simples et isolées mais introduire, à un moment approprié, les aspects outils et objets et proposer des adaptations : changements de cadres, intermédiaires à introduire, étapes à retrouver. En somme il s'agit d'explorer le champ ouvert par l'utilisation de la notion et de l'intégrer dans ce qui est déjà en cours d'acquisition (mélanger ancien et nouveau).

La recherche de problèmes transversaux semble apporter des possibilités de construction de disponibilité et d'organisation ou de structuration des connaissances grâce aux mélanges des connaissances anciennes et nouvelles.

Les problèmes comportant des moyens de contrôle « internes » sont aussi supposés efficaces.

c) Le passage à l'écrit

Le passage à l'écrit serait indispensable à bien des titres : travail sur des représentations, travail de précision et de rigueur, voire entrée dans une dynamique de l'écrit en mathématiques, liée à l'importance des écritures et de leur caractère producteur dans le travail mathématique.

Les narrations de recherche (Chevalier, Sauter, 1993) peuvent être une étape dans l'apprentissage de l'importance de l'écrit à la fois pour valoriser la démarche de recherche en elle-même et pour faire l'expérience de la transformation qui s'opère quand on prend une distance par rapport à l'action, grâce à l'effort d'écriture, collectif ou non. Mais en mathématiques l'écrit, notamment symbolique, est aussi

spécifique d'une traduction particulière de l'avancée des idées, tout à fait singulière dans cette discipline (démonstrations).

Ainsi apprendre aux élèves qu'une démonstration peut être, une fois écrite, systématiquement précisée (par exemple en citant correctement les théorèmes utilisés), ordonnée (en oubliant l'élaboration de la démarche), complétée (en vérifiant les hypothèses utilisées, en cherchant les cas particuliers), simplifiée (en enlevant ce qui ne sert pas) peut en aider certains à améliorer leur rédaction.

d) L'exposition des connaissances par l'enseignant

Dans tous les cas les moments d'exposition des connaissances, même (surtout ?) préparées par un travail des élèves, sont indispensables à formaliser et fixer ce que tous les élèves ont à savoir. L'enjeu en termes de prise de sens est important, entre la nécessaire introduction de nouveau et l'accroche, tout aussi nécessaire, à ce que les élèves connaissent, au moins un peu.

En particulier, s'il n'y a que des moments d'exposition des connaissances, on peut supposer que certains élèves vont décrocher.

2) Hypothèses sur les choix de gestion

a) Des tâches qui restent variées, pas seulement simples et isolées

Donner à travailler aux élèves davantage que l'application simple et isolée des notions : formuler, valider, corriger, mais aussi questionner, chercher des tâches complexes et mettre au point une démarche globale sont autant de types d'activités qui peuvent contribuer à installer un apprentissage.

Brousseau (1997) a introduit la notion de « dévolution⁴² d'un problème aux élèves » pour caractériser ces phases où l'enseignant, grâce aux choix qu'il a faits, délègue au problème et au travail collectif l'appropriation du problème et l'avancée vers la solution, y compris nouvelle.

Sont en jeu la construction de connaissances, plus ou moins autonome et les déséquilibre/rééquilibrations peut-être efficaces.

b) Un temps de travail autonome en classe qui soit effectif

Cela suppose de laisser les élèves travailler sur des durées de quelques minutes au moins sans le professeur (moments adidactiques, le silence de l'enseignant ne l'empêche pas d'être vigilant à ce qui se passe), et/ou échanger entre eux.

Ce qui est en jeu est la possibilité de construction collective (pouvant précéder les appropriations individuelles) et la portée des conflits (socio-cognitifs) entre pairs, ou au moins des échanges.

c) Des habitudes (particulièrement importantes dans les classes défavorisées)

Mais l'exercice de l'autonomie ou des prises d'initiative s'apprend : peuvent y contribuer l'établissement d'habitudes, des répétitions du type de travail visé, etc. Tout ce qui a trait au contrat, aux coutumes et à la mémoire de la classe (portée et limites) s'inscrit ici.

L'importance des récurrences a été travaillée notamment en relation avec leurs incidences négatives (différenciation dans les classes hétérogènes – référence Crinon, Rochex, 2012). On peut aussi penser que réciproquement des répétitions adaptées peuvent contribuer à installer aussi bien des routines positives que même des changements de postures chez certains élèves. L'enjeu est de trouver comment s'appuyer sur le niveau local, le seul accessible directement, pour valoriser et s'appuyer sur les potentialités des élèves, réelles mais pas toujours ni toutes adaptées et, peut-être, faire « déteindre » un peu ce qui a pu se produire au niveau local.

d) Un travail en petits groupes sur certaines tâches

Faire travailler les élèves en petits groupes peut permettre d'installer un travail autonome mais à certaines conditions et sur certaines tâches (cf. Robert, 2008)

e) Un travail à la maison à la portée des élèves faibles

En particulier il serait important de s'assurer que les élèves faibles puissent s'engager dans le travail à la maison demandé qui souvent est très difficile à obtenir et s'avère rarement correct. C Felix (2004) a bien montré que c'est ce qui a été fait en classe qui peut manquer à la réalisation du travail à la maison et pas l'inverse.

f) Des aides appropriées

Les aides à dispenser aux élèves peuvent aussi être variées : avant la tâche, pendant, après...

Elles peuvent être directes ou méta, ce peuvent être des indications, des informations, des explications, des explicitations du jeu auquel on joue dans une séance donnée, voire en mathématiques. Certains auteurs distinguent des « niveaux » de méta : un premier niveau correspondant à des généralités sur le travail à mener, un deuxième niveau correspondant aux méthodes générales adaptées à un type de problème mathématique donné et un troisième niveau pour qualifier des méthodes contextualisées à un problème précis (Robert et Tenaud, 1988).

Sont en jeu les « vertus » de l'imitation (dans la Zone de Proche Développement) et la qualité des médiations (questions et réponses, relances, reprises).

Mais, même localement, contenus et gestion ne sont pas indépendants et de plus l'organisation globale est aussi en cause !

L'inscription dans un scénario global conditionne le bénéfice de tel ou tel énoncé, notamment selon la place par rapport à l'exposition des connaissances (dynamiques entre cours et exercices, mises en relation entre connaissances). C'est ce qui explique en partie la conception d'ingénieries didactiques par les didacticiens, en particulier pour l'introduction de notions nouvelles. Ceci dit, tout énoncé ou presque peut encore être découpé, cela modifie les activités des élèves en proposant des tâches plus petites. Et un énoncé très découpé peut être travaillé de manière autonome par les élèves : il y a une relative indépendance entre le type d'énoncé et la gestion.

Aline Robert
Laboratoire de didactique André Revuz
Université Cergy Pontoise

Christophe Hache
Laboratoire de didactique André Revuz
Université Paris Diderot

NOTES

- ¹ Cf. Partie précédente
- ² Phase d'exposition des connaissances
- ³ Importance et variabilité du rapport au savoir en relation avec l'origine socio-culturelle, poids éventuel de facteurs affectifs liés au niveau scolaire des parents (Charlot, et al., 1992 ; Bautier, 2006 ; Bautier et Rochex, 1998).
- ⁴ Zone d'éducation prioritaire, correspondant à des établissements fréquentés par une majorité d'élèves défavorisés socialement
- ⁵ En premier lieu ; dans quelques recherches, l'activité de l'enseignant est étudiée avec une problématique plus liée aux effets de cette activité sur l'enseignant lui-même (cf. boucle de régulation).
- ⁶ En aucun cas nous n'abordons le domaine, pourtant fondamental, de l'inconscient.
- ⁷ La disponibilité est notre manière de traduire l'invariance caractéristique de l'acquisition des schèmes de Vergnaud (1990).
- ⁸ De moins en moins si on se réfère à l'évolution actuelle des programmes en France)
- ⁹ Malgré ce que le mot « niveau » pourrait connoter implicitement
- ¹⁰ Éventuellement avec une incursion dans l'Histoire, pour préciser comment les notions ont émergé, suite à quels problèmes et à quels errements..., bien entendu sans qu'il soit question de faire suivre aux élèves l'itinéraire historique.
- ¹¹ Séances en classe et/ou manuel
- ¹² Dans certains travaux, on parlera de tâches complexes.
- ¹³ C'est moins fréquent en général, sauf au niveau universitaire.
- ¹⁴ « Notion » est à prendre au sens large, incluant certains théorèmes importants faisant l'objet d'un chapitre
- ¹⁵ Tel qu'il est défini par Brousseau (1990) : les attentes respectives des maîtres et des élèves.
- ¹⁶ Une chronologie des séances est établie, à partir de l'analyse a priori des tâches et du déroulement effectif.
- ¹⁷ Les études sur le milieu s'insèrent à cet endroit là.
- ¹⁸ Cf. l'idée de Vygotski, liée à son analyse sociale du savoir que « l'appropriation collective peut précéder l'appropriation individuelle ». (référence Vygotski, 1986)
- ¹⁹ On a étudié les formats en présence, comme 'questions-réponses-reprises' ou la succession des prises de parole, en dégagant des types d'interaction, par-delà les contenus.
- ²⁰ Zone Proximale de Développement ou de proche développement. [il s'agit de connaissances presque acquises que l'élève peut utiliser avec l'aide d'un adulte ou d'un pair]
- ²¹ Au sens du schéma de double régulation de la partie 0.
- ²² On retrouve là l'idée des aides à fonctions constructives.
- ²³ Établissements de formation des futurs enseignants en école primaire
- ²⁴ Établissements de formation professionnelle des futurs enseignants

- ²⁵ Raccourci pour « double approche didactique et ergonomique » pour l'analyse des pratiques enseignantes (Robert 2001, Robert et Rogalski, 2002]
- ²⁶ Dans nos premiers travaux, nous avons qualifié la manière dont les activités sont enclenchées et plus généralement le maintien des élèves dans l'activité, c'est-à-dire l'enrôlement, par l'expression plus vague « faire tourner la classe ».
- ²⁷ Avec une restriction préalable : ils sont menés en se plaçant dans l'approche qu'ils contribuent à légitimer.
- ²⁸ C'est le résultat du travail d'un des sous groupes OPEN [Observatoire des pratiques éducatives et enseignantes, 2008] autour des « organisateurs des pratiques ». Dans ce sous groupe, travaillaient ensemble des chercheurs issus de la didactique professionnelle, des chercheurs issus de la didactique d'autres didactiques, des sociologues. La gageure était de répondre à la question « pour vous que pourrait-on donner comme définition d'organisateur de la pratique ? »
- ²⁹ Ce que les ergonomes appellent tâches discrétionnaires
- ³⁰ Il y a là une discussion sur ce que renseignent les évaluations qui est très importante.
- ³¹ Il y a lieu de distinguer ces niveaux d'organisation qui prennent aussi en compte le grain des activités et les temporalités de l'action introduites en annexe.
- ³² Dans des travaux antérieurs, on a utilisé les vocables « lignes d'action » et « singularisation » pour parler des niveaux macro et local.
- ³³ Vandebrouck (2002).
- ³⁴ Découpages de l'ordre de quelques minutes, ponctué par les activités organisées pour les élèves.
- ³⁵ Nous avons étudié pour établir ces constats des séances de troisième ou de seconde, essentiellement en algèbre. Les énoncés proposés ne sont pas des exercices d'application immédiate, mais ils interviennent juste après un cours, ou juste avant, et ne sont pas très éloignés du cours.
- ³⁶ C'est cependant un des constats les plus forts qu'on a fait sur les connaissances des étudiants de CAPES formés à l'Université.
- ³⁷ Cf article Grugeon et al, à paraître (2012).
- ³⁸ Théorie qui ne nous semble pas contradictoire mais complémentaire à ce que nous faisons, mais qu'on ne saurait résumer brièvement.
- ³⁹ Tout aussi impossible à résumer brièvement.
- ⁴⁰ Ce mot est plus utilisé au Canada.
- ⁴¹ Il ne doit pas y avoir de « surprise », pour le dire rapidement.
- ⁴² Le mot est utilisé plus largement pour signifier « déléguer à, mettre sous la responsabilité de ».

AURELIE CHESNAIS

CHAP 7. ETUDE D'UN SCENARIO ET DE SA MISE EN ŒUVRE PAR DEUX ENSEIGNANTS DIFFERENTS

*Comparaison des déroulements et des effets sur les productions des élèves
en contrôles*

INTRODUCTION

Nous comparons dans ce chapitre l'application d'un même scénario d'enseignement de la symétrie orthogonale par deux enseignants expérimentés (nous les nommerons Martine et Denis dans le reste du texte) dans leurs classes de sixième¹ respectives, Denis exerçant dans une Zone d'Education Prioritaire² (ZEP). Compte tenu du cadre théorique développé au début de ce livre et dans lequel s'inscrit notre étude, notre objectif est de contribuer à l'étude des régularités et des variabilités des pratiques entre enseignants ainsi qu'à celle des liens entre les pratiques des enseignants et les apprentissages des élèves. Nous tentons également de mettre en relation ces éléments avec les logiques sous-jacentes des pratiques à partir des traces que nous en percevons dans les analyses.

Nous précisons tout d'abord les éléments de méthodologie que nous avons retenus pour notre étude. Nous exposons ensuite les caractéristiques de la symétrie orthogonale que nous avons retenues pour l'étude du scénario avant de présenter celui-ci. Puis, nous comparons les déroulements dans les classes de Denis et Martine, lors de la mise en œuvre de ce scénario dans leurs classes. L'analyse des productions des élèves en contrôles et sa mise en relation avec l'analyse des déroulements nous permet enfin d'apprécier l'effet des pratiques sur les apprentissages des élèves.

ELEMENTS DE METHODOLOGIE

Conformément à notre inscription dans le cadre théorique exposé dans les premiers chapitres de ce livre, les activités des élèves sont au centre de nos analyses, en tant qu'intermédiaires entre les pratiques des enseignants – dont elles sont en partie la conséquence – et les apprentissages des élèves – qu'elles sont susceptibles d'induire.

L'étude de l'objet d'enseignement

Apprécier les activités des élèves nécessite une étude préalable de l'objet d'enseignement visé – ici, la symétrie orthogonale. Il s'agit d'éléments épistémologiques, didactiques et liés aux programmes d'enseignement. Cette étude

nous permet de déterminer les différentes dimensions qui permettent de caractériser un scénario d'enseignement de la symétrie orthogonale en sixième en France.

L'analyse du scénario

Le scénario désigne ici, comme dans les chapitres précédents, le projet conçu par l'enseignant en amont des séances de classes. Il est constitué de l'ensemble des énoncés d'exercices et de leçon qui seront proposés aux élèves.

L'analyse *a priori* des énoncés d'exercices et de leçons ainsi que de leur articulation vise à établir les activités qu'ils sont susceptibles de provoquer chez les élèves. Nous « convertissons » donc les énoncés proposés par l'enseignant en tâches mathématiques et établissons les procédures de résolution que les élèves peuvent mettre en œuvre pour réaliser ces tâches. Pour cela, nous tenons compte de la place de la tâche dans le scénario, c'est-à-dire non seulement des connaissances à disposition des élèves, mais aussi de la fonction de la tâche dans celui-ci. Une procédure de résolution possible est caractérisée par les connaissances mathématiques qu'elle mobilise ainsi que les adaptations (chapitre 2) nécessaires à leur mise en fonctionnement, le paradigme géométrique (Houdement et Kuzniak, 2003, cf. infra) dans lequel elle s'inscrit, les conceptions erronées de la symétrie qui sont susceptibles d'intervenir dans la résolution et enfin les moyens de contrôle de la validité de leurs procédures dont disposent les élèves.

Les tâches du scénario sont en outre classées en quatre catégories³ : tâches de reconnaissance des propriétés d'une figure (axe de symétrie etc.), tâches de construction (de symétries de figures, d'axes de symétrie, de la médiatrice d'un segment etc.), tâches de preuve (il s'agit de justifier un énoncé à l'aide des propriétés d'une figure) et tâches de dessin (à main levée ou à la règle au jugé).

Cette analyse *a priori* de l'ensemble du scénario nous permet une première prévision de l'ensemble des activités qu'il est susceptible de provoquer chez les élèves, donnant ainsi accès à l'itinéraire cognitif élaboré par l'enseignant.

L'analyse des déroulements

L'analyse des déroulements en classe est elle aussi guidée par la recherche de la caractérisation des activités possibles des élèves. Rappelons que les activités réelles ne sont pas accessibles, notamment parce qu'une partie se passe dans les têtes, mais que nous reconstituons des activités possibles *a minima* et *a maxima* à partir des traces observables des activités réelles (interventions orales des élèves et de l'enseignant, traces écrites dans les cahiers etc.).

Nos analyses de séances de classes sont donc centrées sur le repérage des traces des activités des élèves, mais aussi tout ce qui peut influencer sur ces activités : modifications – diminutions ou enrichissements – des tâches initialement prescrites. Par exemple, une diminution de la tâche peut venir d'une indication donnée par l'enseignant au début du déroulement induisant fortement une

procédure ; de même, l'ajout par l'enseignant d'une demande de justification d'une réponse peut enrichir la tâche.

Nous procédons à partir des vidéos des séances, qui sont transcrites et complétées par les documents de l'enseignant (préparation de cours, énoncés des exercices etc.). A partir des transcriptions et des vidéos, chaque séance est découpée en épisodes. Nous distinguons 5 types d'épisodes : exercices, cours, corrections – de travaux traités à la maison ou lors d'une séance précédente –, récitation/rappels de cours, autres ; le découpage correspond aux interventions de l'enseignant (du type : « on corrige l'exercice qui était à faire », « maintenant, on passe dans le cahier de leçon », ...).

Nous découpons ensuite chaque épisode en phases selon la forme de travail – individuel, en petits groupes, en classe entière – et sa nature (telle tâche, tel énoncé de cours, le traitement de telle question d'élève si celle-ci provoque un développement, ...) déterminé notamment à partir des questions de l'enseignant et des interventions des élèves.

Les indicateurs retenus pour les analyses sont : la répartition du temps en fonction des formes de travail ; la nature du travail et sa répartition en fonction des formes de travail ; enfin, la part du travail qui reste à la charge des élèves.

L'analyse des productions des élèves en contrôles

Les contrôles désignent les évaluations notées réalisées en classe. Nous considérons les productions des élèves lors de ces évaluations comme des traces – nécessairement imparfaites – des apprentissages réalisés suite à l'enseignement reçu.

Chaque production d'élève donne lieu à un codage de 0 et de 1 pour chaque tâche. Celle-ci a été considérée comme réussie (codée 1) si la production de l'élève porte la trace de la connaissance dont la mobilisation était attendue pour résoudre la tâche, même si la résolution est incomplète ou fautive par ailleurs. Par exemple, à ce niveau scolaire, la tâche de justification de la longueur d'un segment, connaissant celle d'un segment qui lui est symétrique, a essentiellement pour but d'évaluer si l'élève mobilise la propriété de conservation des longueurs par la symétrie orthogonale plutôt que de réaliser une mesure : nous avons alors codé 1 toute production mentionnant cette propriété, même si la réponse était mal rédigée ou que l'élève ne mentionne pas explicitement la symétrie des extrémités des deux segments (élément exigé par certains enseignants). Nous avons codé 0 lorsqu'il n'y a pas de trace de la connaissance attendue, y compris lorsque la tâche n'a pas été traitée.

Ce codage pour chaque élève et chaque tâche permet ensuite de calculer des taux de réussite, comme pourcentages de 1 sur l'ensemble ou sur des groupes de tâches, pour un élève donné, ou bien pour l'ensemble de la classe sur une tâche donnée ou sur des groupes de tâches. Le taux de réussite pour un groupe de tâches représente ainsi à la fois le nombre moyen d'élèves ayant réussi les tâches et le nombre moyen de tâches réussies par élève.

Les données de l'étude

Le scénario que nous présentons est celui élaboré et mis en œuvre sans intervention du chercheur durant l'année scolaire 2006-2007 par Martine. Dans le cadre d'un dispositif expérimental particulier (Chesnais, 2009), celui-ci a été transmis à Denis qui l'a mis en œuvre dans sa classe durant l'année scolaire 2007-2008, avec un accompagnement du chercheur.

Nous disposons des vidéos de l'ensemble des séances consacrées à la symétrie orthogonale par les deux enseignants, soit, pour chacun, une douzaine de séances durant un peu moins d'une heure.

Quant aux productions des élèves en contrôles, nous en disposons pour une vingtaine de tâches dans chaque classe, réparties dans trois contrôles pour Denis (en cours d'enseignement, en fin d'enseignement et quelques semaines après la fin de l'enseignement de la notion) et deux contrôles dans la classe de Martine (en cours et en fin d'enseignement).

LES CARACTERISTIQUES DE LA NOTION ENSEIGNEE

Aspects épistémologiques

La symétrie orthogonale est non seulement un concept mathématique mais aussi un objet de culture partagée dans la société. Dans le second cas, cela recouvre selon nous la perception d'une symétrie bilatérale 'approximative' avec un axe vertical, mais sans l'associer à la notion mathématique sous-jacente ; nous parlons alors, en reprenant la terminologie de Vygotski, du concept quotidien de symétrie, par opposition au concept scientifique, mathématique.

Le concept scientifique est aujourd'hui défini comme une transformation, mais une étude de la genèse historique du concept montre qu'elle est avant tout associée à l'harmonie, à l'équilibre d'une figure ou d'un objet. Nous distinguons alors deux aspects de la symétrie, que nous qualifions respectivement de statique et dynamique⁴. Le premier fait référence aux propriétés d'une figure, le second à la transformation, c'est-à-dire à la relation entre deux ensembles de points (éventuellement confondus). Dans le concept quotidien, l'aspect statique est omniprésent, alors que l'idée de transformation, mouvement ou déplacement, en est quasiment absente, limitée à une association avec le pliage permettant de superposer les deux parties d'une figure. En revanche, dans le concept mathématique, depuis que la symétrie orthogonale est définie comme élément du groupe des isométries du plan, la transformation préexiste en quelque sorte, puisque l'existence d'axes de symétrie dans une figure n'est que le corollaire de l'existence d'une symétrie orthogonale la conservant globalement.

Ce qui est visé par l'enseignement est, à terme, le concept scientifique et la synthèse des aspects statique et dynamique. Or le concept quotidien peut jouer comme levier ou comme obstacle. Par exemple, l'idée d'un axe de symétrie comme partageant une figure en deux parties superposables, reliée au pliage,

empêche de concevoir que l'image d'une figure puisse être elle-même. Cela rend impossible l'accès au deuxième niveau d'appréhension des transformations (Grenier et Laborde, 1987), c'est-à-dire à la symétrie comme application du plan dans lui-même, bijection involutive dont les points de l'axe sont les points invariants – le premier niveau consistant à considérer la transformation dans son action sur des figures.

Aspects didactique : les conceptions alternatives

Grenier (1988) a identifié un certain nombre de conceptions de la symétrie qui se manifestent par des théorèmes en actes (Vergnaud, 1990) dont le domaine de validité est limité. Nous les qualifions de conceptions alternatives et nous en retenons quatre :

- La symétrie orthogonale comme transformation d'un demi-plan dans un autre. Cette conception est liée au concept quotidien (notamment via le pliage et le miroir). Elle est associée à l'idée que cette transformation ne fonctionne que dans un sens (le plus souvent, de haut en bas ou de gauche à droite). Elle représente un obstacle pour concevoir le symétrique d'une figure coupée par l'axe ainsi que la définition du symétrique d'un point à l'aide de la médiatrice du segment, dans la mesure où ce dernier n'a pas de 'sens' dans cette conception.
- La confusion avec d'autres transformations géométriques. Les élèves construisent ainsi parfois le symétrique d'une figure touchant l'axe en réalisant une symétrie centrale autour du point de contact ou en la translatant ; ou encore, ils reconnaissent un axe de symétrie sur une figure n'en comportant pas mais comportant un centre de symétrie (comme un parallélogramme non rectangle, par exemple).
- Les conceptions liées aux cas particuliers des axes verticaux et horizontaux. Elles conduisent notamment à la construction du symétrique d'un point sur une même ligne horizontale que celui-ci, malgré un axe oblique ou encore à ne percevoir que les axes de symétrie verticaux et horizontaux sur une figure. Cumulées avec la confusion avec la symétrie centrale, cela implique aussi des théorèmes en actes tels qu' 'un segment et son symétrique ont le même support'.

Dépasser la plupart des conceptions alternatives et réaliser la synthèse des aspects statique et dynamique suppose de (re-)définir la symétrie sans l'outil pliage. En outre, le travail de Grenier (ibid.) atteste de la résistance de ces conceptions malgré l'enseignement. Aussi, l'organisation d'un travail spécifique semble indispensable pour permettre aux élèves de les dépasser et favoriser une conceptualisation scientifique de la notion.

Les programmes d'enseignement

Les programmes de la classe de sixième en vigueur en France au moment de notre étude⁵, en ce qui concerne la géométrie, sont organisés autour de l'introduction

progressive des transformations géométriques et l'objectif du passage d'une géométrie essentiellement perceptive et instrumentée à une géométrie déductive – ce que nous reformulons à l'aide des paradigmes géométriques définis par Houdement et Kuzniak (2003) comme passage de la géométrie dite naturelle (géométrie 1) à la géométrie dite axiomatique naturelle (géométrie 2).

Ces programmes sont issus des programmes de 1985, à quelques modifications près. Notamment, en ce qui concerne la symétrie orthogonale, il était clairement indiqué que l'aspect statique devait être redéfini par l'invariance dans la transformation, sans se contenter d'une approche perceptive :

Suivant les cas, [la symétrie orthogonale] apparaîtra sous la forme : de l'action d'une symétrie axiale donnée sur une figure ; de la présence d'un axe de symétrie dans une figure, c'est-à-dire d'une symétrie axiale la conservant.

Mais cette indication a disparu, laissant un flou sur la manière dont les deux aspects doivent être abordés. Les compétences visées à propos de la symétrie orthogonale dans les programmes de 2005 sont essentiellement liées aux constructions. Cela semble indiquer à première vue que l'accent est mis sur une géométrie instrumentée, mais la construction du symétrique d'une figure sur papier uni sans le pliage ou le calque suppose, notamment pour les polygones, de construire le symétrique des sommets à l'équerre et au compas ou bien au compas seulement puis de relier les points obtenus : ces constructions s'appuient sur la définition du symétrique d'un point via la médiatrice et sur les propriétés de conservation (des longueurs et des angles) par la symétrie.

Ces programmes nous semblent pouvoir être interprétés de différentes manières. En effet, ils préconisent d'une part un « travail expérimental (pliage, papier calque) », qui place la problématique dans le cadre de la géométrie 1, d'autre part un travail sur les propriétés de la symétrie et la définition du symétrique d'un point, qui relève de la géométrie 2. L'articulation à faire entre les deux et l'objectif en termes de niveau d'appréhension des transformations (Grenier et Laborde, op. cité) qu'il faut viser restent flous.

Bilan de l'étude de la notion

Il existe donc plusieurs scénarios possibles entre lesquels les programmes ne permettent pas de trancher. Un scénario se caractérise par des choix quant à la prise en considération de l'articulation entre concept quotidien et scientifique – le second devant remplacer en le dépassant, à terme, le premier ; la part de travail perceptif, instrumenté et déductif ; le lien à établir entre aspects statique et dynamique – l'articulation des deux étant visée ; enfin le traitement des conceptions alternatives, dont on vise *in fine* la disparition.

PRESENTATION DU SCENARIO DE MARTINE

Pour des raisons de place, nous ne pouvons présenter le scénario de manière exhaustive. Aussi, nous en présentons seulement la structure chronologique puis la

manière dont les différentes dimensions évoquées en bilan de l'étude de la notion ci-dessus y sont actualisées.

Structure chronologique

Le scénario est organisé en trois parties :

- La première introduit la symétrie dans son aspect dynamique et inclut la caractérisation de figures symétriques comme superposables par pliage, puis la définition du symétrique d'un point⁶, la construction de symétriques de figures (points, segments, demi-droites, droites, cercles) et les propriétés de conservation (de l'alignement, des longueurs, des aires, des angles, du parallélisme et de l'orthogonalité).
- La deuxième partie porte sur l'aspect statique de la symétrie et inclut la recherche d'axes de symétrie de figures géométriques d'une part (segment, droite, angle, triangles particuliers, quadrilatères particuliers, cercles), de dessins figuratifs d'autre part ; elle inclut une « méthode pour déterminer si une figure admet un axe de symétrie » et se termine par un exercice où il s'agit de trouver les figures usuelles ayant un nombre d'axes de symétrie donné.
- La dernière partie porte sur la notion de médiatrice d'un segment et fait le lien entre les deux aspects de la symétrie. Elle inclut la définition de la médiatrice comme droite perpendiculaire à un segment en son milieu ainsi que le fait que celle-ci est un axe de symétrie du segment. On y trouve aussi la propriété d'équidistance des points de la médiatrice aux extrémités du segment (directe et réciproque), utilisée notamment pour élaborer et justifier la construction au compas de la médiatrice d'un segment et du symétrique d'un point ; elle se termine par la reformulation, à l'aide de la médiatrice, de la définition du symétrique d'un point et par des exercices 'de synthèse' faisant intervenir plusieurs éléments du chapitre ainsi que des connaissances anciennes.

Le scénario s'organise donc clairement autour des aspects dynamique et statique de la symétrie orthogonale, introduits successivement. Commencer par l'aspect dynamique offre la possibilité de redéfinir l'aspect statique en lien avec l'invariance, mais cela n'apparaît pas explicitement *a priori*. Enfin, le fait que la troisième partie soit conçue pour faire le lien entre les deux aspects, notamment via la notion de médiatrice, montre que le scénario est guidé par l'exigence d'une certaine cohérence mathématique et didactique.

Concept mathématique et concept quotidien

Le scénario porte essentiellement sur le concept mathématique. La place du concept quotidien est très peu importante et le passage de l'un à l'autre est partiellement travaillé. Le premier exercice du chapitre fait appel au concept quotidien de mouvement (via le déplacement d'un calque) pour caractériser la symétrie orthogonale par le pliage et/ou le retournement du calque. C'est sur cette

caractérisation que s'appuie, dans la suite du scénario, l'introduction de la définition du symétrique d'un point par rapport à un axe comme point tel que l'axe coupe le segment perpendiculairement en son milieu : cela contribue selon nous à articuler le concept quotidien et le concept mathématique. Toutefois, dans le travail sur les axes de symétrie (deuxième partie du scénario), les tâches de reconnaissance et dessin d'axes de symétrie incluent des dessins figuratifs, le plus souvent constitués 'd'une seule partie' : l'intervention ou non du concept mathématique dans la résolution de ces tâches nous semble très dépendante du déroulement, celles-ci pouvant tout à fait être résolues en ne mobilisant que le concept quotidien.

Aspects statique et dynamique

La structure du scénario montre que l'articulation des deux aspects en est un enjeu majeur et qu'elle est prise en charge de façon très organisée.

En effet, premièrement, certains exercices permettent de travailler sur l'articulation entre les deux aspects. Par exemple, une des tâches dont l'énoncé est de « compléter une figure pour qu'elle admette un axe de symétrie » permet de mettre en lien la notion d'axe de symétrie avec la construction du symétrique d'une figure. Ensuite, on trouve des exercices où une figure et sa symétrie sont partiellement confondues (une des tâches consiste par exemple à construire le symétrique d'un segment par rapport à une droite qui lui est perpendiculaire en un point qui n'est pas le milieu du segment). Enfin, certaines tâches consistent, après avoir construit un symétrique, à justifier une propriété d'une figure formée par des éléments situés de part et d'autre de l'axe (par exemple, on demande de justifier la nature d'un triangle ABA' , où A' est construit comme symétrique de A par rapport à une droite passant par B). Or, comme nous l'avons précisé précédemment, ces tâches sont de nature à faire évoluer la conception de transformation d'un demi-plan dans un autre : elles favorisent donc la conceptualisation mathématique de la symétrie et préparent le passage au deuxième niveau d'appréhension des transformations.

Toutefois, comme précisé dans le paragraphe précédent, le traitement des axes de symétrie de figures est positionné de façon intermédiaire entre le concept quotidien et le concept scientifique.

Niveaux d'appréhension de la transformation

La symétrie est introduite en tant qu'action sur des figures, c'est-à-dire au niveau 1 de Grenier et Laborde (1987). Le symétrique d'un point est ensuite étudié en tant que symétrique d'une figure particulière puis sert à établir la méthode de construction d'une figure plus complexe. Les tâches mobilisent donc la transformation entre les premier et deuxième niveaux de Grenier et Laborde (1987), conformément aux indications des programmes. Par exemple, les propriétés de conservation (essentiellement la conservation des longueurs et des angles) sont évoquées dès le premier exercice, c'est-à-dire dans le cas où

l'appréhension des figures reste globale, puis elle est retravaillée à l'occasion des constructions de symétriques et des tâches de preuve qui les mobilisent.

Le jeu entre les paradigmes géométriques

La structure du scénario elle-même semble sous-tendue par une cohérence théorique liée au concept mathématique – donc à la géométrie 2 –, dans la mesure où l'ensemble des constructions de symétriques et des tâches de preuve, par exemple, s'appuient sur la définition du symétrique d'un point et les propriétés de la symétrie établies dans la leçon.

En outre, l'initiation au raisonnement déductif constitue un objectif important du scénario. En effet, tout d'abord, on peut remarquer que les tâches de preuve (nécessitant précisément, la plupart du temps, un tel type de raisonnement) représentent 20 % des tâches du scénario ; ensuite, cette initiation est explicitement prise en charge via une série d'exercices, dans la première partie du scénario : il s'agit d'amener les élèves à justifier un énoncé en utilisant les propriétés d'une figure et à clarifier ainsi les 'règles du jeu mathématique' – notamment la non-validité de la mesure ou d'un argument perceptif dans ce type de tâche. Certaines tâches de construction contribuent aussi à la transition vers la géométrie 2 : par exemple, les élèves doivent élaborer eux-mêmes la méthode de construction du symétrique d'un point, alors qu'ils ne disposent que de la définition. Ce type de travail nous semble relever précisément de la géométrie 2, alors que les tâches de construction consistent souvent, en sixième, à appliquer une procédure, l'enjeu principal étant celui de la maîtrise des instruments – travail qui relève plutôt de la géométrie 1. De même, ce qui est en jeu dans la plupart des tâches de construction de symétriques du scénario est la maîtrise de la construction du symétrique d'un point dans des configurations complexes (i. e. où la figure n'est pas limitée au point et à l'axe de la symétrie, où la construction nécessite éventuellement de faire intervenir un raisonnement ou susceptible de faire intervenir des conceptions alternatives) : la construction du symétrique d'un point n'est donc pas visée pour elle-même mais est le moyen d'un travail plus élaboré sur le concept.

Les conceptions alternatives

Elles sont prises en considération de deux manières.

D'une part, certaines tâches ont clairement comme objectif de faire émerger et de remettre en cause certaines conceptions erronées. Ainsi, un exercice consiste à « chercher les erreurs » dans le dessin de figures symétriques ou non ; par exemple, lorsque le dessin est constitué de deux parties dont l'une a été obtenue par une autre transformation que la symétrie orthogonale, il s'agit de travailler sur la confusion avec les autres transformations. De la même manière, certaines tâches de construction du symétrique de figures coupées par l'axe peuvent être l'occasion de la remise en cause de la conception de transformation d'un demi-plan dans un autre.

D'autre part, les cas particuliers – notamment ceux liés aux axes verticaux et horizontaux – ne sont pas surreprésentés dans les première et troisième partie du scénario. En particulier, dans la troisième partie, ils sont presque absents : cela peut, selon nous, soit avoir pour conséquence un dépassement de ces conceptions alternatives, soit cela fait cohabiter des conceptions alternatives liées à des cas particuliers avec des conceptions correctes, leurs domaines d'application respectifs étant différents. En fait, on peut penser que l'effet est variable selon les élèves, les conceptions alternatives particulières et les tâches. A propos de la transformation d'un demi-plan dans un autre, il nous semble que le fait que le travail soit centré sur le concept mathématique et le nombre important de tâches dans lesquelles cette conception est remise en cause peut permettre de la dépasser. Toutefois, dans la deuxième partie du scénario (qui traite des axes de symétrie de figures), les figures géométriques sont souvent présentées dans des positions stéréotypées (le rectangle avec ses côtés parallèles au bord de la feuille, par exemple) et les dessins figuratifs sont tels que presque tous les axes sont verticaux ou horizontaux. Or Grenier avait pointé dans son travail que c'est précisément dans le cas des figures que les conceptions alternatives associées se manifestent le plus et non dans le cas des points. Cette partie expose donc au risque évoqué précédemment de traiter l'aspect statique uniquement du point de vue perceptif (en lien avec le concept quotidien) et de renforcer les conceptions alternatives liées à ces cas particuliers.

Organisation des exercices et liens avec les leçons

Le scénario de Martine prévoit une proportion importante de travail sur des exercices (75 tâches en tout) dont l'essentiel est prévu pour être traité en classe, avec une part de travail individuel. Le travail à la maison consiste essentiellement en un entraînement sur des tâches similaires à celles traitées en classe.

Les exercices de chaque partie sont organisés de manière très progressive : le nombre de tâches par exercice augmente progressivement ainsi que la variété et la complexité de celles-ci (quantité de connaissances en jeu, mélangeant progressivement les connaissances nouvelles avec des anciennes, avec de plus en plus d'adaptations, elles-mêmes de plus en plus difficiles).

Enfin, les exercices sont systématiquement liés à la leçon, soit qu'ils en constituent une application (plus ou moins directe selon les adaptations en jeu), soit qu'ils permettent d'introduire de nouvelles connaissances qui font ensuite l'objet d'une leçon.

Bilan de l'analyse du scénario de Martine

Le scénario semble donc organisé autour de la problématique du changement de paradigme géométrique et de l'initiation au raisonnement déductif. Les objectifs d'apprentissages liés au concept de symétrie orthogonale concernent clairement le concept mathématique – même s'il reste une ambiguïté dans la deuxième partie – et le lien entre les aspects dynamique et statique.

COMPARAISON DES DEROULEMENTS

Faute de place, nous ne présentons que les points communs et différences essentiels qui sont apparus lors de l'analyse des déroulements dans les classes de Denis et Martine.

La répartition du temps à l'échelle du chapitre : des similitudes importantes

D'un point de vue quantitatif et global sur l'ensemble des séances, on observe essentiellement des convergences : Denis et Martine prennent sensiblement le même temps pour traiter le chapitre (une douzaine d'heures). De même, la proportion du temps correspondant au même type d'épisodes (cours, exercices, corrections, etc.) est quasiment identique entre les deux classes. Notamment, près de 60 % du temps est consacré par les deux enseignants à la résolution d'exercices. Toutefois, en observant l'avancée dans le chapitre, on constate que Denis passe davantage de temps sur la construction de symétriques de figures et les méthodes pour chercher des axes de symétrie ou construire la médiatrice d'un segment, tandis que Martine s'attarde plus longuement sur la définition du symétrique d'un point et les propriétés de la médiatrice d'un segment. On observe également qu'en moyenne, la durée des épisodes selon leur nature est aussi très similaire entre les deux classes : les épisodes d'exercices, de cours et de correction durent respectivement environ 15 minutes, 6 minutes et 13 minutes en moyenne chez Martine, 15 minutes, 8 minutes et 11 minutes chez Denis. De plus, la répartition entre temps de travail individuel et collectif dans les épisodes d'exercices est de l'ordre de un tiers/deux tiers dans les deux classes.

La nature du travail : des différences essentielles

Lors des épisodes d'exercices, Denis intervient en général collectivement très tôt, voire dès le début, pour reformuler la tâche, la simplifier ou la découper en prenant en charge une partie du travail – notamment les adaptations – alors que Martine laisse presque toujours les élèves travailler directement sur les tâches initiales, y compris lorsqu'elles supposent des adaptations. Par conséquent, le travail individuel des élèves sur un même exercice ne porte pas tout à fait sur les mêmes tâches. En particulier, si les élèves de Martine sont souvent confrontés à des exercices dont ils doivent élaborer eux-mêmes la procédure de résolution à partir des contenus du cours, ceux de Denis le sont beaucoup plus rarement : pour les constructions de symétriques de points ou de figures, aucune méthode n'est donnée avant le travail individuel des élèves dans la classe de Martine (pour le symétrique d'un point par exemple, dans l'exercice 7, la seule aide fournie est le rappel de la définition de deux points symétriques) ; au contraire, dans la classe de Denis, des éléments de procédure sont donnés parfois dès le début (pour la construction du symétrique d'un point, les instruments à utiliser sont indiqués après seulement 2 minutes). A l'extrême, les tâches de preuve sont entièrement traitées

collectivement dans la classe de Denis, alors qu'une partie du travail est individuel dans celle de Martine.

Les aides individuelles prodiguées par chacun des enseignants pendant ces phases de travail individuel sont, dans les deux cas, très peu fréquentes. En revanche, le travail collectif sur les exercices est très différent, par sa nature et notamment par les apports des deux enseignants, au-delà de la simple correction de la tâche. En effet, chez Martine, ce travail collectif porte souvent sur les connaissances visées – compte tenu de la fonction de la tâche dans le scénario – tandis que chez Denis, soit il se limite aux tâches, soit il porte sur des connaissances autres que celles visées ; par exemple, dans le premier exercice du chapitre, la phase de travail collectif chez Martine a pour fonction non seulement de corriger l'exercice (c'est-à-dire d'indiquer le mouvement qu'il fallait imprimer au calque pour passer d'une figure à l'autre), mais aussi de nommer et de caractériser les transformations géométriques en jeu, de façon à identifier, en guise de synthèse, la symétrie axiale comme étant celle qui correspond au pliage ou au retournement du calque. Lors de la phase de travail collectif chez Denis, pour le même exercice, il s'agit non seulement de trouver le mouvement à imprimer au calque, mais aussi d'identifier et de caractériser les transformations, exceptée la symétrie axiale qui n'est pas citée. De même, pour le traitement de l'exercice qui vise l'introduction de la définition du symétrique d'un point, la nature du travail individuel et du travail collectif est très différente chez les deux enseignants : chez Denis, le travail individuel, au début de la tâche, consiste à réaliser une manipulation avec du papier calque pour obtenir le symétrique d'un point, puis tracer un segment et une droite ; le travail collectif, qui vient ensuite, est orienté sur le fait de compléter les phrases à trous indiquées dans l'énoncé, par les mots « perpendiculaire », « milieu », « symétrique » et « médiatrice ». Martine, quant à elle, alterne travail individuel et collectif tout au long de l'épisode. Voyant par exemple que les élèves prennent du temps pour réaliser la manipulation matérielle, elle la traite collectivement, puis elle commente cette manipulation en faisant identifier aux élèves qu'ils ont construit le symétrique d'un point (ce qui n'était pas explicite dans l'énoncé). Elle demande ensuite aux élèves :

Martine : Maintenant observez la figure, essayez de me dire ce que vous observez, ce que vous remarquez, [...] Que pouvez vous dire de cette droite AA', par rapport à la droite d ?

Cette question posant des difficultés aux élèves, Martine alterne temps de réflexion individuelle et synthèses collectives pour parvenir explicitement à la caractérisation du symétrique d'un point.

Dans la classe de Denis, le fait que l'axe est perpendiculaire au segment et passe par son milieu ne sont pas obtenus comme réponses à la caractérisation de la figure, qui permettrait de définir la notion de points symétriques : le seul enjeu semble être de compléter des phrases. D'autre part, dans les deux classes, le cas d'un point appartenant à l'axe est mentionné, ce qui était indiqué dans le scénario pour Denis, puis le résultat des observations est repris : Denis demande aux élèves

de placer un autre point de la même façon et de placer des codages qui indiquent la perpendicularité et le milieu, tandis que Martine demande :

Martine : A quelles conditions le point A et le point A' sont symétriques par rapport à une droite d ?

Cette différence d'approche est typique des déroulements de Denis et de Martine : celle-ci fait souvent reformuler les idées et raisonnements par les élèves, tandis que Denis les place plus volontiers dans l'action.

Quant aux tâches de preuve, elles sont intégralement traitées sur le mode collectif dans la classe de Denis, alors que seule la correction fait l'objet d'un tel traitement après un travail individuel des élèves chez Martine. Celle-ci laisse en outre largement à la charge de la classe la validation et la justification des raisonnements durant ces phases collectives, ce que Denis ne fait qu'exceptionnellement.

Les apports durant les phases d'exercices sont aussi plus systématiques et plus axés sur les connaissances visées dans le cas de Martine.

Enfin, les interventions de Martine semblent toujours adaptées aux interventions des élèves, grâce à une bonne interprétation de leurs productions et de leurs erreurs, au point parfois de reprendre longuement à l'occasion des épisodes de cours, des raisonnements sur des tâches données ou des cheminements plus globaux. De telles interventions, beaucoup plus rares et limitées chez Denis, sont surtout parfois moins bien ciblées.

En ce qui concerne les épisodes de cours, la responsabilité des contenus est davantage partagée entre Martine et ses élèves qu'entre Denis et les siens. Dans le premier cas, les énoncés de cours sont toujours élaborés comme synthèse des exercices, en s'appuyant sur les activités des élèves, alors que cette articulation, bien que présente aussi chez Denis, y semble parfois un peu artificielle.

Bilan sur la comparaison des déroulements entre Denis et Martine

Au grain le plus gros, on observe donc des similitudes entre les déroulements de Martine et Denis. Est-ce un hasard ou le déroulement, au moins en ce qui concerne la répartition du temps, est-il entièrement déterminé par le contenu du scénario ? Il semble peu probable que la répartition entre temps de travail individuel et collectif sur un exercice ne dépende que de la tâche traitée. En revanche, la fonction que la tâche remplit dans le scénario par rapport à sa cohérence globale pourrait jouer un rôle dans la mesure où, si l'objectif est de faire émerger tel et tel contenu, cela prend du temps collectivement.

Ce qui apparaît comme différence essentielle est que, outre les tâches prescrites aux élèves, le contenu et les modalités de déroulement des phases collectives peuvent être très différents entre les deux classes. Martine laisse une grande responsabilité aux élèves sur le contenu, les validations et les justifications, alors que Denis le fait plus rarement, prenant notamment systématiquement en charge la validation. De même, Martine laisse souvent aux élèves une part de responsabilité dans la formulation même des réponses, que son but soit de leur faire travailler

cette compétence, d'évaluer leur degré de compréhension, ou encore de faciliter leur compréhension.

EFFETS SUR LES PRODUCTIONS EN CONTROLES

Les contrôles proposés dans la classe de Denis et de Martine comportaient des exercices identiques ainsi que des exercices différents mais dont nous pouvons comparer certaines tâches similaires. Les résultats (taux de réussite en pourcentages des élèves de Martine et Denis pour les 11 tâches identiques, cf. figure 1) font apparaître des écarts relativement importants pour certaines tâches, mais surtout des similitudes entre les taux de réussite selon les tâches, alors qu'on notait d'importants écarts de réussite entre les élèves de Denis et de Martine pour presque tous les types de tâches la première année de l'expérimentation (Chesnais, 2009).

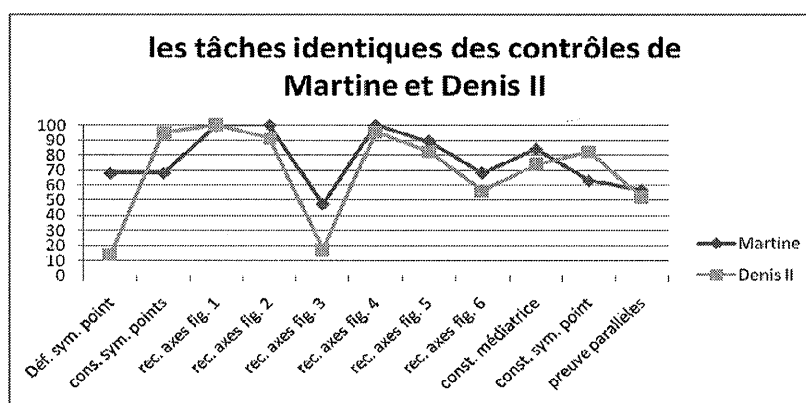


Figure 1. Comparaison des taux de réussite (en %) en contrôle des élèves de Martine et des élèves de Denis.

En particulier, pour les six tâches où il s'agit de reconnaître et dessiner des axes de symétrie (notées « rec. axes fig. x » sur la figure 1), les taux de réussite ne sont que légèrement inférieurs dans la classe de Denis, sauf pour la troisième sur laquelle nous revenons ci-dessous. En ce qui concerne la seule tâche de preuve, les taux sont également comparables.

Dans certains cas, les écarts sont plus importants, notamment pour la tâche qui consistait à restituer la définition du symétrique d'un point : elle est réussie à 70 % dans la classe de Martine mais à peine à 15 % dans celle de Denis. Ces différences pourraient s'expliquer par le fait que les élèves de Denis sont peu habitués à restituer en contrôles des connaissances décontextualisées, parce que ce type de connaissance pose des problèmes particuliers liés au langage. Mais ce résultat est aussi, selon nous, à mettre en relation avec ce qui s'est déroulé durant le chapitre

(cf. la comparaison des déroulements). La tâche « rec. axes fig. 3 », a un taux de réussite de 50 % dans la classe de Martine et 20 % dans celle de Denis. Il s'agissait de la tâche la plus difficile parmi les tâches de même type, car elle comportait des axes autres que vertical et horizontal. Dans ce cas, la mise en relation avec ce qui s'est passé durant le chapitre n'a pas permis de mettre en évidence de facteur permettant d'expliquer cette différence, mais nous formulons l'hypothèse que cela n'est pas propre au chapitre de la symétrie axiale : le cumul de difficultés dans une tâche poserait davantage problème aux élèves de ZEP.

Nous avons également comparé les taux de réussite concernant d'autres tâches de preuves, non identiques, mais similaires : pour deux tâches de preuve élémentaires (faisant intervenir la conservation des longueurs et la conservation des angles), nous obtenons un taux de réussite de 80 % pour les élèves de Martine et de respectivement 50 % et 43 % pour les élèves de Denis. Autrement dit, un écart relativement important persiste entre les élèves des deux enseignants pour ce genre de tâches.

En résumé, les taux de réussite sont dans l'ensemble très proches de ceux obtenus dans la classe de Martine, hormis pour la question de cours, une tâche particulièrement complexe et certaines tâches de preuve.

CONCLUSION ET HYPOTHESES D'EXPLICATION

La mise en œuvre du même scénario par deux enseignants différents dans leurs classes respectives a permis de mettre en évidence des points communs mais aussi des différences importantes tant dans les déroulements en classe que dans les effets sur les productions des élèves en contrôles. Malgré le facteur évidemment très limitant du faible nombre d'observations (notamment le fait que les expérimentations n'ont porté que sur deux enseignants), nous proposons dans cette dernière partie une interprétation de ces résultats tant du point de vue des propriétés du scénario que de la question des logiques sous-jacentes aux pratiques.

L'étude du scénario de Martine a mis en évidence ses qualités en termes de potentiel d'activités pour les élèves. L'analyse de sa mise en œuvre dans la classe de Martine puis celle de Denis a permis de confirmer pour une grande part cette analyse *a priori* et suggère même une certaine 'robustesse' à la transmission. En effet, les travaux sur les ingénieries didactiques ont montré depuis longtemps que la transmission d'un scénario dans des classes ne garantit pas nécessairement la reproductibilité des déroulements ni des résultats des élèves. Ce scénario mériterait certes d'être plus éprouvé, mais nous émettons tout de même l'hypothèse que sa grande cohérence du point de vue mathématique et didactique ainsi que la présence de certaines tâches 'sensibles', i. e. jouant un rôle clé pour atteindre les apprentissages visés (par exemple la série d'exercices permettant d'initier aux règles du raisonnement déductif) ne sont pas étrangers à son efficacité.

A propos des différences observées entre les mises en œuvre dans les deux classes, il nous faut tout d'abord pointer que les modalités de l'expérimentation jouent probablement un rôle. Certaines variations dans les déroulements peuvent ainsi certainement s'expliquer par le fait que le scénario a été conçu par Martine : celle-

ci maîtrisant mieux les objectifs des tâches et l'organisation globale du scénario, peut d'autant plus facilement faire des liens et mettre en perspective les tâches lors des phases collectives. Rappelons également que Denis a été accompagné par le chercheur dans la mise en œuvre du scénario : cet accompagnement a essentiellement consisté en un entretien lors duquel le scénario lui a été présenté assorti d'explications concernant sa structure ainsi que quelques éléments de didactique (notamment à propos des conceptions alternatives des élèves). Il nous semble en outre important de signaler que Denis avait été observé, sans intervention du chercheur, l'année précédant l'expérimentation du scénario de Martine. Or la comparaison entre les pratiques de Denis la première et la seconde année (Chesnais, 2009) montre une évolution vers des pratiques susceptibles de provoquer des activités plus riches chez les élèves ainsi qu'un progrès net des productions des élèves en contrôles⁷. Les parts respectives de l'effet du changement de scénario et de l'accompagnement du chercheur sur cette évolution restent toutefois à déterminer.

Le cadre théorique de la double approche nous permet d'émettre des hypothèses quant aux différences de pratiques observées. En effet, les différences de parcours et même d'âge entre Denis et Martine – éléments pris en compte par la composante personnelle des pratiques – suggèrent que les deux enseignants ne disposent pas des mêmes ressources. Par exemple, Martine étant plus âgée que Denis, elle a exercé lorsque les programmes précédents étaient en vigueur : or, il y apparaissait explicitement le fait que l'aspect statique devait être redéfini comme invariance globale dans la transformation. En outre, rappelons que Denis exerce en ZEP, avec des élèves de milieu social majoritairement défavorisé et dont le niveau en mathématiques à l'entrée en sixième – mesuré par les évaluations nationales menées par le ministère – était nettement inférieur à celui des élèves de Martine. On peut supposer que ces éléments – pris en compte par la composante sociale des pratiques – influencent les pratiques de Denis, celui-ci 's'adaptant' à son public. Toutefois, nos analyses ne nous permettent pas de savoir si les différences observées entre Denis et Martine sont responsables des écarts entre les performances des élèves ou au contraire des similitudes : en effet, la question reste selon nous de savoir si des déroulements plus proches de ceux observés dans la classe de Martine auraient permis aux élèves de Denis d'obtenir des résultats encore meilleurs ou si les caractéristiques des déroulements dans la classe de ce dernier sont une adaptation nécessaire à ces élèves et permettent précisément d'obtenir des résultats proches de ceux des élèves de Martine.

Il nous semble ainsi avoir montré dans cette étude la fécondité du cadre théorique présenté au début de cet ouvrage pour l'étude des pratiques des enseignants de mathématiques et leurs effets sur les apprentissages des élèves.

Aurélie Chesnais
Equipe ERES, laboratoire LIRDEF (EA 3749),
Universités Montpellier 2 et Montpellier 3

NOTES

- ¹ La classe de sixième désigne, en France, la première classe de l'enseignement secondaire (élèves de 10-11 ans).
- ² Les zones d'éducation prioritaire désignent, en France, des regroupements d'établissements scolaires accueillant une forte proportion d'élèves de milieu social défavorisé.
- ³ Les trois premières catégories sont issues d'une catégorisation proposée par Lima (2006) à propos des exercices portant sur la symétrie orthogonale dans des manuels de sixième ; nous avons ajouté la dernière catégorie.
- ⁴ Nous pensons être la première à attribuer ces qualificatifs à la symétrie orthogonale, mais la distinction de conceptions dynamiques et statiques pour un concept donné n'est pas nouvelle. (voir par exemple, pour le cercle, Artigue et Robinet (1982) ou pour la convergence des suites, Robert (1982).
- ⁵ Ils sont définis par le Bulletin Officiel Hors Série N°5 du 9 septembre 2004. Des réformes en 2007 et 2008 les ont modifiés depuis.
- ⁶ La définition est énoncée de la manière suivante dans la leçon :

Le point A' est le symétrique du point A par rapport à une droite (d) signifie que : si A appartient à (d) , A et A' sont confondus ; si A n'appartient pas à (d) , la droite (d) est la perpendiculaire à la droite (AA') et (d) passe par le milieu du segment $[AA']$.
- ⁷ Puisque les observations se sont déroulées sur deux années consécutives, il ne s'agit pas des mêmes élèves, mais les caractéristiques (notamment en termes d'origine sociale et de niveau mesuré par les résultats aux évaluations nationales à l'entrée en sixième) sont similaires pour les deux classes.

CAZES CLAIRE, VANDEBROUCK FABRICE

CHAP 8. ACTIVITES D'ELEVES AVEC DES BASES D'EXERCICES EN LIGNE

INTRODUCTION

Nous appelons base d'exercices en ligne (BEL) pour les mathématiques une ressource Internet élaborée à des fins d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques, constituée d'exercices de mathématiques organisés selon un certain classement, et telle qu'à chaque exercice est associé un environnement, comportant des aides de différents types, des outils (graphiques, calculatrices...), des rappels de cours, mais aussi des analyses de réponses ou la solution complète de l'exercice. Dans la plupart de ces produits, les exercices sont programmés et à variations aléatoires. Les élèves n'ont ainsi jamais le même énoncé, même s'ils refont plusieurs fois un exercice.

De telles ressources, libres ou non, existent pour tous les niveaux scolaires et sont de plus en plus nombreuses. Elles peuvent différer grandement suivant leur structure didactique, le type de réponse acceptée ou le type d'interactivité élaborée. Pourtant, alors que l'étude de l'usage des technologies dans l'apprentissage des mathématiques constitue un champ de recherche extrêmement fécond, il existe peu de travaux spécifiés à l'usage des BEL. La plupart des articles consacrés aux mathématiques et aux technologies numériques concernent des « environnements ouverts » (micromondes ou bien Computer Algebra Systems). Ces travaux visent en général à concevoir et expérimenter des ingénieries didactiques, dans lesquelles, le « milieu », au sens de Brousseau (1997), inclut l'outil technologique et est résistant aux actions des élèves, produisant des rétroactions lesaidant à construire leurs connaissances. Au contraire, les BEL constituent des milieux alliés qui cherchent à accompagner l'apprenant. En outre, la question des prises en main des outils technologiques est moins complexe dans le cas des BELs et elle suscite moins les questions de genèses instrumentales développées dans le cas des environnements ouverts (Artigue, 2002). Les résultats de recherche ne sont donc pas transférables d'une technologie à l'autre. La problématique du chercheur étudiant l'usage des BEL en classe est d'analyser qualitativement l'utilisation de ressources en classes ordinaires et d'en tirer des informations sur l'activité des élèves et des enseignants avec ces outils. Cette préoccupation correspond à la problématique générale de cet ouvrage où l'on cherche à analyser l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques tel qu'ils sont, et non pas tel qu'ils pourraient ou devraient être.

Des conséquences positives de l'emploi des BELs ont déjà été observées dans certaines recherches. Ruthven et Henessy (2002) ont par exemple effectué une vaste étude sur l'emploi des technologies dans l'enseignement des mathématiques en Angleterre. Ils notent que les produits de type « drill and practice » (exercices), qui sont des BELs particulières, permettent un travail adapté au rythme de chaque élève, ainsi qu'un accroissement de la motivation de ces élèves. Cependant, il nous semble important de poursuivre des investigations plus précises sur l'activité des élèves avec ces outils, afin de déterminer les apports, les limites et les contraintes de l'utilisation des BELs en classe de mathématiques.

Nous importons directement le schéma de double régulation de l'activité introduit dans le chapitre 1 pour analyser l'activité des élèves sur des BELs. En effet, les scénarios d'usage de ces ressources prévoient que les élèves refassent plusieurs fois les mêmes exercices, avec des variantes d'énoncés, ou fasse parfois des séries d'exercices similaires. L'activité effectivement fournie par les élèves produit alors des résultats, notamment des rétroactions du logiciel, qui viennent modifier la situation initiale sur la BEL : on peut parler d'activité productive¹ des élèves et de régulations fonctionnelle de leur activité. Les actions des élèves et les rétroactions logicielles sont particulièrement observables dans ces situations de travail sur les BEL. L'évolution des résultats de l'activité productive sur un exercice donné, au fil de boucles de régulations, peut ainsi s'observer et s'interpréter ou non en terme d'activité constructive des élèves (sur le temps moyen de l'action). La question des apprentissages sur le long terme, des effets des apprentissages avec la BEL dans l'environnement papier crayon, est plus complexe et de ce fait nos résultats sont nécessairement limités.

A partir de nos observations, nous effectuons donc des analyses *a priori* des situations proposées aux élèves, et aux niveaux d'épisodes choisis, nous effectuons en particulier des analyses des tâches prescrites aux élèves observés. Pour les analyses mathématiques des tâches, nous retenons les outils développés dans le chapitre 2. En particulier, nous nous demandons si les tâches sont des applications immédiates de connaissances mathématiques explicites ou bien s'il y a au contraire des adaptations et/ou des reconnaissances à effectuer. Nous prenons également en compte l'environnement logiciel des tâches, c'est-à-dire tous les indices externes ou facteurs instrumentaux qui peuvent constituer des aides ou non à la réalisation des tâches. Nous donnons systématiquement une copie d'écran. Des données personnelles sur les élèves observés sont aussi précisées même si bien souvent nous n'avons que quelques éléments à ce sujet. Les résultats de l'activité productive des sujets sont observés à travers les réponses saisis par les élèves sur les machines. En particulier, les rétroactions du logiciel, aussi bien que les aides du professeur quand il y en a, nous fournissent les données concernant les modifications des situations dans les boucles de régulations.

Dans le paragraphe 1, nous donnons un exemple d'analyse de situations, c'est-à-dire en particulier des analyses de tâches et d'environnement logiciels pour des exercices BEL proposés aux élèves. Dans les paragraphes 2 et 3, nous étudions sur des exemples comment les situations influencent l'activité des élèves. Nous montrons combien la phase de diagnostic et de mise en activité autonome est

délicate pour les élèves. En particulier, nous montrons que l'activité attendue n'est pas toujours l'activité développée par les élèves. Nous montrons également comment les élèves peuvent difficilement réguler leur activité face au logiciel sans intervention du professeur. Enfin, dans le paragraphe 4, nous concluons sur des conditions favorables pour un usage raisonné des BEL avec les élèves.

EXEMPLES D'ANALYSES DE TACHES ET D'ENVIRONNEMENT LOGICIELS

Du point de vue des connaissances mathématiques en jeu, la méthodologie pour analyser les tâches est celle qui a été présentée dans le chapitre 2. Nous distinguons en particulier les tâches d'applications immédiates de connaissances de toutes les autres tâches qui sont qualifiées de complexes². L'analyse des tâches est fonction du scénario dans lequel interviennent ces tâches. Par exemple, le fait que les connaissances mises en fonctionnement soient anciennes ou nouvelles pour l'étudiant, avec un niveau de mise en fonctionnement disponible ou mobilisable est un élément à prendre en compte. Certains éléments du scénario sont implémentés dans les ressources tandis que d'autres éléments relèvent du choix de l'enseignant.

Du point de vue de l'interface avec le logiciel, les éléments caractéristiques de la tâche sont le type de réponse attendue (QCM, valeur numérique, tracé géométrique...), les aides proposées par le logiciel (en particulier les corrigés parfois) et plus généralement l'environnement logiciel de l'exercice qui peut faciliter ou complexifier la résolution des tâches. Cela rend, pour le chercheur, l'analyse des tâches plus complexe que dans l'environnement traditionnel. Voici une illustration de cette complexité à travers un exercice issu de la BEL Euler³.

Il s'agit d'un exercice mettant en jeu des connaissances anciennes de la classe de troisième (grade 9) au niveau mobilisable, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de reconnaissance à effectuer de la part de l'élève. L'énoncé de l'exercice est « *Le plan est muni d'un repère orthonormé. Déplacez les points A et B de telle façon que la droite (AB) représente la fonction définie pour tout x par $f(x) = 7/2 - x/8$* ». La tâche consiste donc à déplacer deux points sur le quadrillage pour que la droite passant par ces deux points devienne la courbe représentative d'une fonction affine aléatoirement donnée. Il s'agit ainsi de travailler le passage du registre algébrique au registre graphique (Duval, 1995).

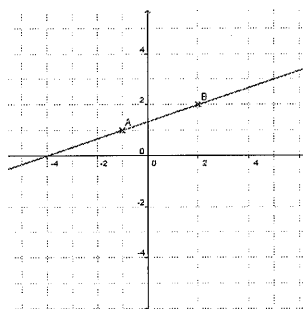


Placer deux points à coordonnées entières appartenant à la représentation graphique d'une fonction affine

RESSOURCE 222

Le plan est muni d'un repère orthogonal.
Déplacez les points A et B de telle façon que la droite (AB) représente la fonction affine définie pour tout nombre x par $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$.

Valider



La tâche n'est cependant pas immédiate puisqu'il y a deux sous-tâches pour un élève de troisième : la première est de trouver les coordonnées de deux points de la droite (AB) en utilisant son équation issue de l'expression algébrique de la fonction f donnée. La deuxième sous-tâche est de déplacer les points A et B sur l'écran pour les mettre en bonne position.

L'environnement du logiciel apporte des difficultés car la présence dès le début de l'exercice de la droite (AB) sur le graphique vient perturber la perception de la tâche attendue. En outre, la tâche est de déplacer les points A et B déjà donnés alors qu'en environnement traditionnel, il s'agit plutôt de placer des points. On ne peut de plus déplacer ces points que sur des positions à coordonnées entières. Ceci constitue une difficulté majeure liée à l'environnement de la tâche et ceci la complexifie car elle ne permet pas à l'élève de placer tous les points qu'il peut trouver par le calcul. L'élève doit piloter son calcul afin de trouver des points A et B à coordonnées entières. Enfin, les points que l'on peut placer doivent avoir leurs affixes et leurs ordonnées comprises entre -5 et 5, ce qui constitue une dernière difficulté pour des élèves lorsqu'ils cherchent des points. En environnement papier crayon, on étendrait la représentation graphique pour placer des points d'affixes ou d'ordonnées hors de $[-5, 5]$. Ici, ce n'est pas possible.

L'intérêt du logiciel est tout de même notable. D'une part, il offre la possibilité de refaire l'exercice avec des variables aléatoires. L'élève peut donc refaire plusieurs fois l'exercice avec de nouvelles droites et s'entraîner jusqu'à ce qu'il réussisse. D'autre part, la rétroaction en cas d'erreur indique que la réponse est fausse et donne la fonction représentée par la droite (AB) proposée par l'élève, comme dans l'exemple suivant :



nouveau aide guide actions brouillon clavier écran son

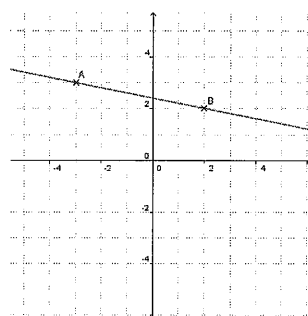
Placer deux points à coordonnées entières appartenant à la représentation graphique d'une fonction affine

ressource 22

Le plan est muni d'un repère orthogonal.
Déplacez les points A et B de telle façon que la droite (AB) représente la fonction affine définie pour tout nombre x par $f(x) = \frac{12}{5} - \frac{x}{5}$.

Valider

Les points A et B ainsi placés définissent la droite représentant la fonction affine g définie pour tout nombre x par $g(x) = \frac{12}{5} - \frac{x}{5}$.



Le message du logiciel est « Les points A et B ainsi placés définissent la droite représentant la fonction g définie par $g(x) = 12/5 - x/5$ ». Ce feedback peut permettre à l'élève de faire un retour réflexif sur sa proposition et comprendre ses erreurs. Cela pourrait lui permettre de rectifier sa réponse mais il ne lui est malheureusement pas permis de faire un second essai.

Des analyses d'expérimentations développées dans Cazes, Gueudet, Hersant, Vandebrouck (2006) font apparaître que de tels exercices assez immédiats semblent nécessaires à l'apprentissage des élèves ou des étudiants. Cependant, de part leur trop grande simplicité lorsqu'ils sont effectués dans un environnement papier/crayon, de tels exercices sont peu proposés en classe, notamment dans les séances de travaux dirigés classiques au niveau de l'université.

Ce simple exemple permet d'avoir une idée du travail possible avec des BEL mais seule une visite approfondie de chacun des sites permet de se rendre compte des nombreuses possibilités offertes par ces ressources. Nous avons observé en particulier que de nouvelles tâches sont rendues possibles par le travail sur les BEL, avec de nouvelles activités associées ; tandis que de nouvelles activités peuvent apparaître sur des tâches similaires à des tâches papier-crayon. Les paragraphes 2 et 3 qui suivent sont consacrés à l'étude d'exemples de l'activité réelle d'élèves sur des BEL, en classe de seconde d'une part et dans l'enseignement supérieur d'autre part.

Si certaines tâches bien représentées dans les BELs semblent faciles à proposer en nombre important sur machine, toutes les tâches ne sont sûrement pas réalisables sur logiciel. L'enseignant peut, par exemple, faire le choix de laisser les applications immédiates pour un travail sur machine de façon à centrer l'activité en environnement papier-crayon sur des tâches plus complexes. Nous revenons sur le travail de l'enseignant dans le chapitre 9.

EXEMPLES D'ACTIVITE EN CLASSE DE SECONDE (GRADE 10)

Les exemples développés dans ce paragraphe sont issus d'observations effectuées aux cours des années scolaires 2004-2005 et 2005-2006 dans des lycées généraux et professionnels. Dans chaque cas, un observateur est placé derrière un élève et note toutes ses actions visibles. La méthodologie est celle exposée dans le chapitre 2, avec des spécificités dues au travail des élèves sur ordinateur. Seuls quelques épisodes significatifs pour notre problématique sont analysés ici afin que nous puissions aller directement vers des résultats intéressants. Ces observations sont issues de séances en demi-groupe d'élèves, encadrées par un enseignant responsable de la classe, qui fournit aux élèves des aides individualisées. Les élèves travaillent chacun sur un poste informatique sur une suite d'exercices choisis par leur professeur. Les deux élèves dont nous suivons la progression au cours d'une séance se nomment Alice et Fanny. Ces deux élèves sont de bonnes élèves de seconde (grade 10) et elles travaillent pendant une séance sur le thème des fonctions sur la BEL MathEnPoche⁴. Le cours a déjà été fait dans l'année et les connaissances sont encore en cours d'acquisition. Pour chaque situation proposée aux deux élèves, nous étudions l'activité attendue puis l'activité réelle des élèves.

Première situation proposée à Alice et Fanny, activité attendue

Le premier exercice qu'elles rencontrent est un exercice de type QCM. Il s'agit d'une série de 5 questions qui sont des applications immédiates de connaissances sur images et antécédents. L'environnement facilite l'activité puisque il n'y a que deux choix possibles comme dans la question 1 suivante.

Question N°1 : Complète.

On sait que :

2 a pour image 1 par la fonction f

Donc :

Le point de coordonnées (;) appartient à la courbe représentative de f

Par exemple, Alice répond correctement 3 fois sur 5. Les deux autres fois, elle confond « image » et « antécédent », reçoit un simple message d'erreur et rectifie au second essai : mais il suffit seulement d'inverser les réponses ! Le même exercice se poursuit par 5 autres questions analogues où il y a cette fois plusieurs choix comme dans la question 6 suivante :

Question N°6 : Complète.

On sait que :

-5 a pour image 2 par la fonction f

Donc :

$f(\square) = \square$

$\square$ a pour antécédent $\square$ par la fonction f

Le point de coordonnées $(\square ; \square)$ appartient à la courbe représentative de f

Ce sont les mêmes questions que précédemment mais il y a cette fois-ci six champs à renseigner. L'activité attendue n'est pas la même qu'à la question précédente puisqu'il y a un mélange de plus de deux registres d'écriture, ce qui constitue une adaptation supplémentaire. La stratégie qui consiste à répondre un peu au hasard et à rectifier éventuellement au second essai ne fonctionne plus car le logiciel ne signale pas l'emplacement des erreurs.

Activité réelle d'Alice

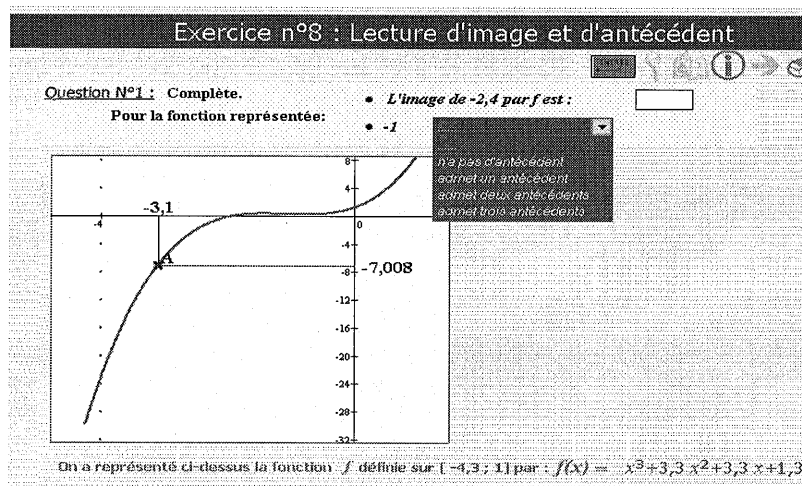
Alice comprend qu'elle ne peut pas se contenter de rectifier au deuxième essai si besoin est. Elle consulte donc son cahier de cours avant toute réponse et lit à mi-voix l'explication relative à « antécédent » et « image ». Elle répond alors correctement à la question 6. Elle refait cependant sa confusion à la question 7 et à la question 8, consulte à nouveau son cahier et corrige. Elle refait encore l'erreur à la question 9 et décide à ce moment d'appeler le professeur. Il lui explique immédiatement. Elle refait la dernière question sans erreur.

Deuxième situation proposée à Alice et Fanny, activité attendue

Dans la suite de la séance, Alice et Fanny travaillent cette fois à des recherches graphiques d'images et d'antécédent (exercice 8) et des résolutions graphiques d'équations du type $f(x) = a$ (exercice 9). Il s'agit de connaissances nouvelles pour la classe de seconde mais déjà vues en séances traditionnelles (connaissances en cours d'apprentissage).

Dans l'exercice 8, une fonction étant donnée par son expression algébrique et une courbe représentative, il s'agit de déterminer l'image d'un nombre et le ou les antécédents s'ils existent d'un autre nombre. Il y a une série de 5 questions successives du même type. Les fonctions considérées sont des fonctions aléatoires polynomiales du premier, second ou troisième degré, à coefficients décimaux avec au plus un chiffre après la virgule, définies sur un intervalle. La valeur de l'image est à taper dans un cadre. Pour le ou les antécédents, un menu déroulant (cadre bleu) permet de choisir la réponse. Suivant le choix effectué, un ou plusieurs cadres

s'affichent pour rentrer la ou les valeurs. Un point A mobile sur la courbe permet de lire les valeurs demandées. On notera que lorsqu'il y a plusieurs antécédents, l'outil ne permet pas de les visualiser simultanément. Il faut donc penser à ne pas s'arrêter à la première valeur trouvée. L'activité attendue est de déplacer le curseur afin de lire graphiquement des images et des antécédents. Il s'agit donc de travailler uniquement dans le registre graphique et d'appliquer de façon immédiate les connaissances du cours sur ce registre. Le choix du registre de travail est donc forcé et ce registre n'est pas dans le contrat didactique habituel de l'élève. En outre, l'environnement qui oblige à manipuler le curseur complexifie la tâche proposée comme nous allons le voir.



Activité réelle d'Alice

La première courbe proposée à Alice dans l'exercice 8 est la courbe représentative de la fonction $f(x) = x^2 - 4$. Il faut déterminer l'image de 1,2 et le ou les antécédents de -7 s'ils existent. En accord avec le contrat habituel de travail, Alice calcule algébriquement l'image de 1,2. Cette démarche est renforcée par le fait que le polynôme de degré 2 est un polynôme qu'elle peut traiter algébriquement facilement. Pour la recherche de l'antécédent, Alice observe tout de suite sur le graphique qu'il n'y en a pas car la valeur -7 est relativement loin du minimum de f . Alice valide sa réponse, reçoit un message de félicitations. Elle ne trouve pas l'exercice très intéressant et passe à l'exercice 9.

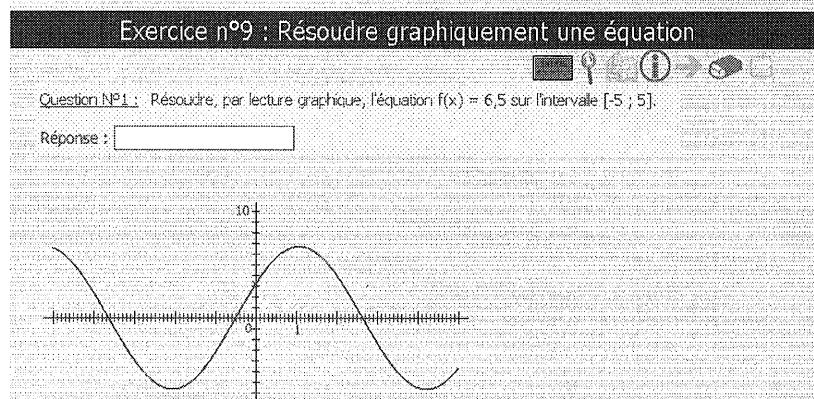
Activité réelle de Fanny

La première courbe proposée à Fanny dans l'exercice 8 est celle de la fonction $f(x) = x^2 - 5,19$. On lui demande l'image de 0,2 et le ou les

antécédents de -4,7 s'ils existent. Fanny calcule également algébriquement l'image de 0,2 mais éprouve des difficultés à mener son calcul pour trouver les antécédents de -4,7. Il y a des adaptations qui apparaissent et liées à la présence du nombre décimal. L'enseignante passe à proximité de Fanny qui l'interpelle : « *c'est pas clair pour trouver l'antécédent !* ». L'enseignante lui montre comment bouger le point *A* pour obtenir l'affichage des coordonnées de points sur la courbe. Fanny se saisit immédiatement de cette méthode instrumentée, répond correctement et enchaîne ensuite avec succès les 5 exercices de la série en procédant par la méthode graphique pour la recherche des antécédents comme pour celle des images.

Troisième situation proposée à Alice et Fanny, activité attendue

Dans l'exercice 9, il s'agit de résoudre graphiquement une série de cinq équations de la forme $f(x) = \alpha$, α étant un nombre décimal avec au plus un chiffre après la virgule, et f étant donnée par sa représentation graphique sur un intervalle. Il y a suivant les cas 0, 1, 2 ou 3 solutions. Il s'agit donc toujours de mettre en fonctionnement de façon immédiate des connaissances en cours d'acquisition et cette tâche est à nouveau complexifiée par l'environnement. En effet, il faut pour chaque question déplacer le curseur rouge sur la courbe, ce curseur étant initialement placé au dessus de l'origine. En outre, les coordonnées du curseur ne s'affichent pas et c'est à l'élève de faire les lectures de ses coordonnées.



Activité réelle d'Alice

Dans l'exercice 9, Alice ne repère pas qu'il faut utiliser le curseur mobile car elle n'a pas eu l'occasion de le faire dans l'exercice 8. Mais cette fois ci, il n'est pas possible de travailler algébriquement. Elle essaie donc d'estimer la réponse et donne successivement deux valeurs cohérentes mais insuffisamment précises. Elle tombe alors sur l'écran d'aides qui ne lui sont pas utiles puisqu'ils lui expliquent

comment trouver graphiquement la solution alors que son problème est un problème de maniement du curseur. Elle appelle donc l'enseignante qui lui montre l'utilisation du curseur. Alice s'engage alors correctement dans l'activité attendue. Pourtant elle n'arrive finalement pas à valider l'exercice 9 à cause de trois erreurs à trois énoncés successifs. Ces trois erreurs ont des causes différentes :

Alice oublie l'une des solutions.

Alice ne voit pas une solution qui est au bord du cadre du graphe.

Alice se trompe en lisant l'énoncé.

Dans le dernier cas, Alice croit que c'est la précision de sa réponse est qui insuffisante. Elle ne voit pas que c'est en fait une erreur de lecture d'énoncé. C'est l'observateur qui le lui explique. Dans les deux autres cas, l'erreur est plus grave mais Alice n'a pas la possibilité de la rectifier à cause d'un mauvais maniement du logiciel. Il n'y a donc pas toujours régulation de l'activité car Alice ne comprend pas ses erreurs ou ne peut pas les corriger à cause de ses problèmes de manipulations. Alice semble pourtant savoir effectuer globalement la tâche demandée.

Activité réelle de Fanny

Dans l'exercice 9, Fanny repère le curseur rouge et comment le faire bouger comme dans l'exercice 8. Puis, elle s'engage dans l'activité attendue d'elle. Elle trouve en général les bonnes réponses avec le curseur. Cependant, pour sa question 3, elle tombe sur une sinusoïde et l'équation « $f(x)=4,5$ » qui a trois solutions. Fanny oublie cependant l'une d'entre elles et fournit successivement deux réponses fausses : -1,5 et 4,8 puis -0,5 et 4,8. Elle est orientée vers l'aide qui, comme pour Alice, lui donne la méthode pour trouver graphiquement une image ou un antécédent. Sachant faire l'exercice, elle dit : « *j'en veux pas de ces aides !* ». Comme l'enseignante passe, elle lui demande « *comment je fais pour supprimer ça ?* ». L'enseignante lui montre le bouton rouge de fermeture de l'aide. Fanny clique et se retrouve alors avec la correction (ce que n'avait pas réussi à faire Alice). Elle voit les valeurs affichées dans la correction avec deux décimales et c'est ce qui attire son attention. Elle attribue de ce fait son erreur non pas au fait qu'il lui manque une solution mais au fait qu'elle n'a pas pu trouver toutes les décimales parce qu'elle n'a pas réussi à se servir de la loupe.

Analyse de l'activité réelle des élèves Alice et Fanny

Dans les premières questions proposées à Alice (les questions à deux choix), les élèves peuvent fournir le résultat attendu dès le second essai. Tout semble se passer comme si la prise d'information leur permettait de développer une « stratégies à deux coups » en s'appuyant sur le feedback. Cette stratégie est favorisée par les QCM à deux champs. Ce n'est que lorsque cette stratégie à deux coups ne fonctionne plus et que la tâche se complexifie qu'Alice fait un travail en profondeur pour rectifier ses erreurs. Ces exemples illustrent l'idée que les élèves tiennent compte des feedbacks seulement lorsqu'ils en ressentent le besoin. On peut cependant faire l'hypothèse que la confusion d'Alice entre « image » et « antécédent » est bien corrigée puisqu'elle aborde correctement ensuite les

exercices 8 et 9. L'apprentissage ne se fait cependant pas sur un cycle court de régulations : la correction est longue et progressive. Il faut en particulier qu'Alice prennent plusieurs initiatives, que la situation devienne problématique pour elle (Alice n'a cherché à comprendre que quand il y a eu un mélange de plus de deux registres d'écritures, c'est-à-dire les 6 champs à remplir) et que le professeur intervienne rapidement et à bon escient.

Dans l'exercice 8, il y a dès le départ et pour les deux élèves, un décalage entre l'activité attendue et l'activité développée par les élèves observés. La tâche est la même que dans l'environnement papier-crayon mais l'activité attendue ne l'est pas. Les élèves ne développent pas l'activité attendue parce qu'elles ne comprennent pas qu'on attend d'elles la manipulation du curseur. En outre, les expressions algébriques sont données par le logiciel et cette donnée ne favorise pas le travail graphique. Enfin, les expressions aléatoires sur lesquelles tombent Alice et Fanny sont de degré 2, ce qui ne les décourage pas de chercher algébriquement. Ce ne serait sans doute pas le cas si les expressions étaient systématiquement plus compliquées ou du troisième degré.

Enfin, les exemples illustrent que les feedbacks du logiciel, même s'ils sont pris en compte par les élèves, ne leur permettent pas facilement de réguler correctement leur activité. Dans l'exercice des QCM, la prise d'information d'Alice n'est pas suffisante pour lui permettre de réguler seule son activité. Alice a besoin de son cahier de cours puis d'un dialogue avec le professeur pour pouvoir réussir. Le travail qui consiste à interpréter les informations fournies par le logiciel est en général difficile à faire. Dans l'exercice 8, Alice propose une réponse correcte et obtient une rétroaction validant sa réponse mais n'expliquant pas la procédure attendue. Elle n'a donc aucun indice leur permettant de déceler le décalage entre le travail qu'elle a fourni et celui qui était attendu. Pour Alice, on peut se demander ce qui lui fait abandonner l'exercice. Elle a sans doute inconsciemment l'impression de « passer à côté » mais pas au point de demander de l'aide à l'enseignante. L'activité à l'exercice 8 n'est ainsi pas du tout régulée. Du coup, Alice ne peut pas entrer correctement en activité dans l'exercice 9 car elle ne sait pas qu'on peut manipuler le curseur. Là encore, les aides proposées, qui lui rappellent la méthode mathématique de résolution des équations, ne lui permettent pas de réguler son activité puisque son problème est le maniement du curseur. C'est encore l'enseignante qui vient l'aider et lui montre l'utilisation du curseur.

Fanny, peut-être aidée par son regard critique vis-à-vis du travail avec un logiciel, appelle quant à elle le professeur dès l'exercice 8 et celui-ci régule rapidement son activité. D'elle-même Fanny sait ainsi s'adapter à la situation de l'exercice 9. Cependant comme Alice, elle ne peut pas non plus réguler correctement seule son activité dans l'exercice 9 et elle s'énervait contre les aides (« *j'en veux pas de ces aides !* »). Sa lecture du corrigé n'est pas suffisante pour qu'elle comprenne qu'il lui manque une solution. Cela semble dû à une ambiguïté du logiciel : les réponses sont acceptées à 0,1 près mais, dans le corrigé, elles sont données à 0,01 près. Là encore, à cause de son regard critique sur les logiciels, Fanny préfère se dire que la loupe du logiciel est difficile à utiliser plutôt que de remettre en cause son travail.

Les exemples de Fanny et Alice illustrent l'importance de la prise en compte de l'aspect instrumental dans les situations proposées. Plus l'environnement de la ressource devient sophistiqué, plus les élèves doivent articuler la manipulation du logiciel et l'apprentissage des mathématiques. Les exemples montrent toujours que le rôle de l'enseignant est fondamental.

EXEMPLES D'ACTIVITE A L'UNIVERSITE (L1)

L'exemple développé dans ce paragraphe est issu d'observations effectuées aux cours de l'année scolaire 2004-2005 dans une université. L'étudiant s'appelle Charles et nous étudions son activité pendant une séance de travaux dirigés sur machine pendant laquelle les étudiants travaillent sur la BEL Wims⁵ et l'enseignant circule en leur donnant des aides individualisées. Charles travaille seul sur sa machine et il s'agit d'une séance d'entraînement sur des connaissances anciennes ou en cours d'acquisition. La méthodologie est différente de celle employée dans le paragraphe précédent car la BEL Wims dispose d'un journal de traces d'activités des élèves. Il n'y a pas d'observateur direct de l'activité de Charles mais nous pouvons relever les temps de travail de l'élève sur un exercice Wims *Joint*. Nous étudions alors a posteriori le travail de Charles sur un exercice analogue à l'exercice *Joint* proposé lors d'un examen en papier/crayon.

Situation proposée à Charles, activité attendue

Exercise. Let $f(x)$ be a real function defined on the interval $[-0.5; 0.5]$, by the following formulas.

$$f(x) = \begin{cases} a_1 + a_2 x & \text{si } x < 0; \\ -3\exp(4x) & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Please find the values of the parameters a_1, a_2 such that $f(x)$ is continuous and differentiable to order 1.

Send your reply.

$a_1 =$ $a_2 =$

Remarks.

1. The numerical precision required in your reply is of 0.005.
2. To do your computations, you can use the online tools: [function calculator](#), or [linear system solver](#) (which will open in another window).

[Change the function](#).

Exercice Joint

Cet exercice concerne la continuité et la dérivabilité des fonctions de la variable réelle. Il y a une adaptation des connaissances des étudiants puisqu'ils doivent reconnaître que les fonctions proposées sont de classe C^1 sur les intervalles considérés. Il est alors suffisant de calculer les limites et les dérivées à droite et à gauche en 0, ce qui constitue une application immédiate des connaissances algébrique sur les limites et les dérivations. Il faut écrire que les deux limites et les deux dérivées doivent être égales, ce qui permet de calculer a_1 et a_2 par un calcul là

encore immédiat. Quand l'étudiant donne une réponse erronée, Wims fournit une rétroaction de ce type :

Exercice. Let $f(x)$ be a real function defined on the interval $[-0.5, 0.5]$, by the following formulas.

$$f(x) = \begin{cases} a_1 + a_2 x & \text{si } x < 0; \\ -3\exp(4x) & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Please find the values of the parameters a_1, a_2 such that $f(x)$ is continuous and differentiable to order 1.

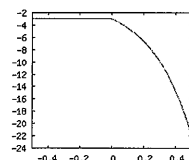
You have given the reply: $a_1 = -3, a_2 = 0$, hence

$$f(x) = \begin{cases} -3 + 0x & \text{si } x < 0; \\ -3\exp(4x) & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

This reply is not correct. $f(x)$ is continuous but it is not differentiable.

Your score: 5/10.

Graph of $f(x)$
according to your reply :



Another function :

Rétroaction logique pour l'exercice Joint

Il n'est pas possible de résoudre cet exercice par essai et erreur car une seule réponse est permise. Après la première réponse de l'étudiant, Wims fournit une rétroaction. Cette rétroaction est dans le cadre géométrique tandis que l'énoncé est dans le cadre analytique. Elle n'aide donc pas forcément l'étudiant à trouver la réponse correcte mais elle lui propose un autre point de vue. Cependant l'étudiant ne peut pas revenir en arrière pour proposer une autre solution. Wims propose directement une autre fonction numérique construite à partir d'un panel de fonctions de références et des combinaisons linéaires.

Activité réelle de Charles

Le journal des traces montre que Charles a travaillé 34 mn sur cet exercice. Il a cherché sur 4 énoncés successifs correspondant à cet exercice. A son premier essai, il a cherché l'exercice pendant 9 mn et a obtenu le score de 5/10 ; ce qui veut dire qu'il a uniquement trouvé la valeur manquante a_1 (comme dans l'exemple d'erreur ci-dessus). Après avoir lu le résultat correct, c'est à dire la valeur manquante a_2 , il n'a pas cherché à comprendre d'où venait cette valeur car le journal montre qu'il a très vite relancé un nouvel énoncé de l'exercice. Cette attitude n'est pas originale, les étudiants relancent presque toujours tout de suite l'exercice suivant. Il a ensuite travaillé pendant 13 mn et obtenu le score de 10/10. Il a enfin relancé deux fois supplémentaires cet exercice, a travaillé chacune des fois pendant 5mn et obtenu à chaque fois la note de 10/10. On voit donc que Charles a bien résolu cet exercice, c'est-à-dire qu'il a régulé a priori correctement son activité. Cependant on peut se

demander pourquoi ses calculs durent-ils 5 longues minutes à chaque fois alors qu'il s'agit de calculs algébriques immédiats ? Que fait-il au même exercice pendant l'examen ? Voici sa copie

Exercice. Soit $f(x)$ une fonction réelle définie sur l'intervalle $[-0.5, 0.5]$, par les formules suivantes

$$f(x) = -5 \exp(-5x) \text{ si } x < 0$$

$$f(x) = a_1 + a_2 x \text{ si } x \geq 0$$

Veuillez trouver les valeurs des paramètres a_1, a_2 telles que $f(x)$ soit continue et dérivable d'ordre 1.

$a_1 = \boxed{-5} \quad a_2 = \boxed{25}$

Explicitiez ici vos calculs

$\lim_{x \rightarrow 0^-} -5e^{-5x} = -5$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} a_1 + a_2x = -5 \Rightarrow \boxed{a_1 = -5}$

$\frac{-5e^{-5x} + 5}{x-0} = \frac{-5(e^{-5x} - 1)}{x} = \frac{25(e^{-5x} - 1)}{-5x}$ or $\frac{e^{-5x} - 1}{-5x} \rightarrow 1$

$\frac{a_1 + a_2x - a_1}{x} = a_2 \Rightarrow \boxed{a_2 = 25}$

Copie d'examen de Charles, exercice Joint, Juin 2004, EVRY 2004

On constate que Charles développe bien l'activité attendue pour trouver la valeur manquante a_1 . En revanche, pour calculer la dérivée à droite puis la dérivée à gauche, il utilise la limite du taux d'accroissement alors qu'il lui suffirait d'appliquer les calculs de dérivées classiques dans les intervalles de définition. C'est-à-dire que Charles utilise une procédure correcte mais pas celle qui est la plus rapide et la mieux adaptée. Ceci explique le temps considérablement long passé sur cet exercice à chaque essai pendant la séance Wims et qui pénalise certainement Charles pendant l'examen (puisque'il lui reste moins de temps que ce que l'examineur a prévu pour faire le reste du sujet).

Analyse de l'activité de Charles

Dans ce cas, Charles sait résoudre l'exercice. Il y a bien une régulation de l'activité à l'issue du premier essai où il ne résout que partiellement l'exercice. C'est la rétroaction logicielle sous forme d'une note qui permet à Charles de réguler son activité. Le relevé de traces nous indique de plus que cette régulation s'effectue en un temps très court. Au second essai, il fournit une réponse complète de l'exercice. Son seul problème est que sa stratégie de résolution n'est pas optimale.

Malheureusement, à ce moment, ni les rétroactions logicielles, permettant une connexion entre deux points de vue, ni la présence du professeur ou des camarades pendant la séance Wims, ne permettent à Charles d'améliorer sa stratégie. En particulier, la régulation logicielle « bonne réponse » à partir du deuxième essai ne permet pas à Charles de se rendre compte que sa procédure n'est pas optimale. Il ne peut pas réguler au mieux, de façon autonome, son activité durant la séance Wims. Il y a donc ensuite deux nouvelles boucles d'activité où Charles applique sans aucun doute la même stratégie de résolution, toujours avec succès, mais en n'augmentant pas sensiblement sa rapidité entre les deux derniers essais et en restant sur une résolution relativement longue (5 minutes).

CONCLUSIONS

Nous avons illustré dans ce chapitre des résultats sur l'activité des élèves et des étudiants avec des BEL, complétant ceux développés dans Cazes, Gueudet, Hersant & Vandebrouck (2006). Dans les situations d'usages qui sont observées, que ce soit au lycée ou à l'université, les BELs permettent une forte individualisation de l'activité des élèves par rapport à leur travail dans des séances d'exercices traditionnelles (travaux dirigés à l'université notamment), quant bien même les élèves suivent toujours un plan de travail proposé au début de la séance par le professeur. Le modèle de double régulation de l'activité (Leplat, 1997) permet d'analyser finement l'activité des élèves avec les BELs et notamment de mettre en évidence des régularités et des disparités entre les élèves, dans l'organisation de cette activité autonome. L'introduction des analyses de tâches révèle que ces dernières sont souvent très proches des tâches que peuvent proposer les professeurs en séances traditionnelles. Cependant, les observations montrent que les élèves travaillent beaucoup plus longtemps sur un même exercice pendant les séances BEL que pendant les séances traditionnelles. Par exemple, dans le cas de Charles, le relevé objectif des traces d'activité sur la BEL Wims montre que même sur une tâche d'application immédiate de connaissances, Charles travaille plusieurs dizaine de minutes, recommençant l'exercice autant de fois que nécessaire alors qu'en environnement papier crayon ou durant une séance de TD classique, il n'aurait vraisemblablement traité qu'un seul exemple. Ce même relevé de traces montre dans d'autres situations que les étudiants ne se découragent pas non plus facilement, en général, face aux exercices qui demandent des adaptations de connaissances. La situation est ainsi différente de la situation traditionnelle car les élèves ont plus de responsabilités dans leur activité et ils peuvent suivre à leur rythme le plan de travail proposé par l'enseignant. S'ils ne font rien, il ne se passe rien ainsi ils sont en quelques sortes, contraints de travailler. En particulier, il n'y a que rarement des moments de corrections collectives que les élèves pourraient se contenter d'attendre. Cependant, gérer l'avancée dans le parcours, refaire ou changer d'exercice, activer une aide ou une correction, choisir de prendre des notes, contribue certes à la responsabilisation des élèves mais se révèle aussi être une source de difficultés, surtout pour des élèves faibles au lycée. Par ailleurs, dans certains cas, certains d'entre eux préfèrent continuer à réussir des exercices simples

plutôt que d'affronter les exercices plus difficiles, ce que nous avons déjà noté dans Cazes, Gueudet, Hersant et Vandebrouck (2006).

Ici, les résultats illustrent la valorisation de l'activité productive occasionnée par ces outils, avec souvent des décalages entre l'activité attendue et l'activité observée chez les élèves. Ce peut être parce que la tâche n'est pas une tâche d'application immédiate, que les connaissances à utiliser ne sont pas explicitées ou parfois que l'environnement logiciel complexifie la tâche par rapport à l'environnement traditionnel. Dès le début du déroulement de l'exercice, une modification de la situation de départ doit donc être opérée pour que l'activité effective de l'élève soit conforme à l'activité attendue. Cette modification est opérée grâce à l'enseignant, s'il est présent au bon moment et cela soulève donc le problème du travail en totale autonomie avec ces outils dès que l'on veut aborder des tâches un peu complexes. Le cas de Charles est un bon exemple où le professeur n'intervenant jamais, l'activité réalisée est décalée par rapport à celle attendue. Le décalage peut être aussi dû à la dénaturation de la tâche par l'environnement logiciel, qui peut permettre par exemple d'obtenir la bonne réponse sans développer l'activité mathématique attendue (notamment dans le cas de QCM à choix double, mais nous avons aussi repéré des exemples plus complexes) ou qui peut aussi favoriser une activité plus économique, du type essai/erreur en particulier. Du côté des résultats de l'activité, nous avons aussi trouvé que les rétroactions logicielles aux actions des élèves sont souvent insuffisantes, trop difficiles à comprendre par les élèves pour leur permettre de réguler seuls et correctement leur activité, voire inadaptées à l'activité effective. Les rétroactions ne peuvent en effet porter que sur le résultat de l'activité et non sur l'activité elle-même. Il est de fait très difficile d'implémenter a priori des rétroactions pertinentes et adaptées à la diversité des élèves.

Ces difficultés, dès que les tâches ne sont pas simples pour les élèves, peuvent générer des boucles d'activité inopérantes. L'élève peut par exemple se satisfaire de procédures mal adaptées en refaisant plusieurs fois un exercice, car celles-ci mènent au bon résultat, voire « assez souvent » au bon résultat. L'environnement allié peut aussi renforcer une certaine « logique d'action » au détriment de « logique d'apprentissage » : dans la logique d'action, le motif de l'activité des élèves est exclusivement l'obtention de la réponse attendue par le logiciel (valorisation de l'activité productive au détriment de l'activité constructive). C'est le cas d'Alice lorsqu'elle répond à ses QCM à deux champs de réponses possibles. Dans d'autres exemples, l'élève peut repérer intentionnellement des régularités dans l'affichage des bonnes réponses par la BEL, après plusieurs essais infructueux, et ces régularités peuvent lui permettre petit à petit d'inférer la bonne réponse à coup sûr (détournement de la BEL), sans que l'on sache si c'est basé ou non sur un apprentissage. Dans certains cas extrêmes, les décalages d'activité ne sont pas intentionnels et mènent à des apprentissages non souhaitables.

Les BELs semblent donc dans un premier temps bien adaptées pour un travail des élèves sur des exercices techniques, c'est-à-dire des exercices d'applications immédiates des connaissances, qui sont explicitées ou bien disponibles chez les élèves ou les étudiants. Ce n'était pas le cas des exercices 8 et 9 d'Alice et Fanny, ni de l'exercice Joint proposé à Charles. Les analyses de tâches se révèlent donc

importantes pour déterminer les exercices à proposer à des élèves et des étudiants avec une BEL. En ce sens, les BELs redonnent leur importance aux gammes, c'est-à-dire à la routinisation de certaines tâches d'applications immédiates de connaissances, qui sont importantes pour les apprentissages et qui sont souvent négligées dans les séances de travail. Les observations ou les relevés de trace d'activité fournis par certaines BELs montrent que ce travail est important, qu'il faut du temps aux élèves et aux étudiants pour réussir ces exercices techniques et que ce travail est moins rébarbatif grâce aux potentialités technologiques des BELs.

Dès que les tâches s'éloignent du niveau technique (que l'application ne soit plus immédiate ou que des connaissances sont supposées disponibles), il est plus difficile d'obtenir des élèves que les boucles d'activité autonome (l'activité et ses régulations) soient toujours mathématiquement acceptables, c'est-à-dire que les mathématiques produites ou renvoyées soient correctes et cohérentes. Cela ne signifie pas pour autant que les BELs ne puissent pas être utilisables autrement que pour les tâches simples ou immédiates. Cela signifie qu'il y a un phénomène de seuil, qui, s'il est placé trop haut en termes de complexité des tâches, exclut les élèves faibles. La notion de ZPD (Vygotski 1978, chapitre 1) est ici particulièrement utile dans la mesure où les élèves travaillent essentiellement en autonomie. Les BELs peuvent notamment accentuer la différenciation entre élèves, si l'enseignant n'est pas spécifiquement vigilant aux élèves en difficultés. Des apprentissages s'observent, sur le moyen terme, pour des élèves confrontés à des tâches comportant des adaptations qui leurs sont accessibles et pour lesquelles ils trouvent des ressources « sur le vif ». C'est le cas d'Alice qui, après le QCM, à partir de ses notes et de l'aide de l'enseignant, semble avoir bien compris la distinction entre image et antécédent. Elle a manifestement bien su réinvestir cette connaissance dans les exercices 8 et 9. Cependant, nous avons vu comment elle est passée d'une logique d'action à une logique d'apprentissage dès que l'exercice n'était plus un questionnaire à deux champs mais à six champs, c'est-à-dire dès que sa technique à deux coups ne fonctionnait plus et que la tâche mélangeait plus de deux registres d'écriture. Cet exemple illustre ainsi que la distinction que nous introduisons entre logique d'action et logique d'apprentissage est fonction de l'élève bien sûr mais aussi de la situation à laquelle il est confronté sur la BEL. On rejoint l'idée initiale de la situation qui doit comporter des adaptations pour espérer une activité constructive intentionnelle et en particulier un apprentissage mathématique. Bien souvent, c'est l'enseignant qui est présent, vigilant, peut réagir à l'activité « réelle » des élèves et favoriser cet apprentissage. Les enseignants doivent donc développer un travail spécifique d'aide et d'intégration de l'usage des BEL dans la pratique habituelle de la classe. Nous étudierons l'activité des enseignants utilisateurs de BEL dans le chapitre suivant.

*Claire Cazes
Fabrice Vandebrouck
Laboratoire de Didactique André Revuz,
Université Paris Diderot*

NOTES

- ¹ La terminologie d'activité productive provient du champ de la didactique professionnelle mais peut s'entendre ici de façon plus naïve, au sens où l'activité de l'élève produit des résultats : réponses numériques, implementation...
- ² Pour lesquelles nous pouvons préciser les types d'adaptations de connaissances en jeu (A1 à A7).
- ³ http://euler.ac-versailles.fr/baseeuler/recherche_fiche.jsp
- ⁴ <http://mathenpoche.sesamath.net/>
- ⁵ <http://wims.unice.fr/wims/>

MAHA ABOUD-BLANCHARD ET ALINE ROBERT

**SYNTHESE : DES PRATIQUES VERS LES
FORMATIONS DES ENSEIGNANTS DE
MATHÉMATIQUES : UN PREMIER PAS, LA
FORMATION DES FORMATEURS**

INTRODUCTION

Ce chapitre présente d'abord, à partir des chapitres précédents, une synthèse de l'étude des pratiques des enseignants, en référence au cadre théorique unificateur défini dans le chapitre 2. Nous rappelons brièvement les éléments méthodologiques partagés et nous reprenons—voire compléterons, à partir d'autres recherches proches—un certain nombre de résultats choisis pour leur intérêt dans une réflexion sur la formation des enseignants de mathématiques. C'est bien de réflexion qu'il s'agit, alimentant des propositions certes, mais encore peu étayée par des recherches, nous y reviendrons.

Nous abordons ensuite le champ de la formation des enseignants, mais en adoptant une entrée spécifique qui est la formation des formateurs. En effet, nous pensons que ce que la capitalisation de résultats sur les pratiques enseignantes nous permet à l'heure actuelle, c'est d'abord d'envisager des passerelles entre ces recherches et ce qui se passe effectivement en classe et son impact sur les apprentissages des élèves. Une de ces passerelles se situe du côté des formateurs eux-mêmes, messagers entre deux mondes, celui de l'école et de la classe et celui plus large s'étendant entre deux frontières : la recherche théorique dans différents champs relatifs à l'école, l'apprentissage et l'enseignement d'une part ; l'institution et les politiques éducatives d'autre part. La formation des enseignants en France est contrainte par des cadres institutionnels bien définis (que la formation soit initiale ou continue) ; les principales marges de manœuvre dans le choix des objectifs et des modalités des formations se situent du côté du formateur. De plus les évolutions récentes du curriculum scolaire le rendent de plus en plus complexe et associé à des idées d'innovation dont les ressorts et les effets ne sont pas clairement définis (environnements technologiques, apprentissage par compétences, accompagnements personnalisés...). La question qui se pose alors est de savoir comment la formation peut prendre en charge la mise en œuvre de ce curriculum scolaire tout en conservant une vigilance particulière vis-à-vis des mathématiques à enseigner et des apprentissages des élèves. Nous pensons que les formateurs des enseignants sont un élément clé dans la réponse à cette question. Leur formation est un des enjeux dans notre travail ; nous l'aborderons dans la deuxième partie de ce chapitre à travers des considérations générales et un exemple

particulier sur la formation aux utilisations des technologies dans l'enseignement des mathématiques.

PRATIQUE DES ENSEIGNANTS DE MATHÉMATIQUES : UNE SYNTHÈSE DE RECHERCHES

La plupart des travaux qui sont repris ici ont été menés en référence à la méthodologie générale de la double approche. L'imbrication, voulue par la théorie, de la prise en compte du métier et des objectifs d'apprentissages peut se faire grâce à un travail de croisement des cinq composantes des pratiques (cf. chapitre 2). Celles-ci traduisent et permettent de mettre en relation, pour une pratique à analyser, à la fois les choix en classe et pour la classe, observables à partir des déroulements, et la prise en compte des contraintes liées au métier, tenue de la classe et composition, programmes et horaires, attentes des parents, des collègues et de l'administration, conceptions personnelles... De plus la complexité des pratiques peut aussi s'aborder en distinguant plusieurs niveaux de leur organisation, celui du déroulement (niveau local), à croiser avec celui, plus global, des projets et conceptions, et avec celui, « micro », des routines et automatismes. Voici un choix de résultats qui se dégagent des recherches.

Difficultés des enseignants débutants

La recherche menée par Chesné (2006) a permis de traduire et de compléter, dans notre cadre théorique commun, ce que les formateurs observent depuis longtemps. Tout se passe comme si les débutants éprouvaient une surcharge de travail au niveau local (celui du quotidien de la classe). En relation avec une pauvreté provisoire de leurs ressources au niveau global, ils ont ainsi souvent des difficultés à concevoir un texte complet du savoir inscrit dans une vision globale. En relation avec des ressources encore à construire aux niveaux « micro » et local, ils ont du mal à gérer le temps de la classe et ne disposent pas suffisamment d'automatismes ou de routines ; ils ont du mal à prendre en main les élèves et surtout à en tenir compte de manière adéquate.

L'auteur montre ainsi deux excès inverses :

- le débutant qui majore la prise en compte souvent très individualisée des élèves, obnubilé par les réactions de la classe et le souci des élèves, au détriment d'un projet mathématique qui reste très local, sans inscription dans un ensemble cohérent (ce résultat a été montré, voire stigmatisé, dans d'autres recherches (Bloch, 2005, Margolinas & Rivière, 2005);
- à l'inverse, le débutant qui majore le projet mathématique en oubliant que c'est aux élèves qu'il enseigne.

Mathématiques et prise en compte des élèves ne sont pas encore imbriquées dans leurs préoccupations et leurs pratiques.

Dans le domaine de l'intégration des technologies, la première de ces caractéristiques/excès se trouve exacerbée comme l'ont montré Abboud-Blanchard et al. (2008). En effet, travailler dans une salle informatique avec un élève ou deux

par machine et qui interagissent directement avec un logiciel va amener l'enseignant stagiaire à des interventions exclusivement individuelles visant la simple exécution directe des tâches et négligeant le projet mathématique globale de la séance.

Par ailleurs certains débutants ont tellement « naturalisé » certaines notions mathématiques à enseigner qu'ils n'en voient plus les difficultés¹, négligent les explications, les passages intermédiaires et les constructions provisoires en minorant la nécessité du temps nécessaire que ce soit à la construction du sens ou aux techniques.

Cette forme d'illusion de la transparence, et plus généralement l'ignorance des malentendus² entre ce que dit l'enseignant et ce qu'entend l'élève sont particulièrement développées pour les débutants qui enseignent dans des classes défavorisées socialement et sont par-là particulièrement dommageables (Chesnaïs 2006, Coulange 2012).

Régularités des choix globaux de contenus des enseignants

Les choix des enseignants, notamment ceux qui mettent en jeu les choix globaux de contenus mathématiques sur une notion ou un chapitre, se font de manière assez analogue entre enseignants, à partir des contraintes institutionnelles et sociales, associés au « champ mathématique ». C'est ce qui apparaît dans le chapitre 3 de Roditi, sur un exemple. La prise en compte des contraintes institutionnelles à un niveau global, horaires, programmes, ressources disponibles, amène à des choix « forcés », identiques, de progression sur l'année, de volume horaire sur chaque chapitre, et aussi à ce ressenti fréquent de « course constante contre la montre » pour « finir » les programmes.

Les contraintes sociales, liées en partie à la nécessité que la classe tourne, peuvent être à l'origine de « principes » de gestion partagés que Roditi a dégagés (ibid.).

Nous retrouvons aussi cette similarité des choix des contenus dans le chapitre 9 d'Abboud-Blanchard, Cazes et Vandebrouck. Les auteurs y soulignent que les contraintes précédentes auxquelles viennent s'ajouter celles liées à l'usage des bases d'exercice en ligne font que les enseignants se centrent dans cet usage sur des connaissances anciennes ou en cours d'acquisition sans se permettre d'explorer plus en avant les potentialités des outils technologiques pour aborder de nouveaux contenus. Ils montrent aussi que les exercices choisis sont uniquement ceux où il n'y a pas de mélanges de domaines mathématiques (par exemple géométrie et algèbre) dans un souci de ne pas compliquer le travail de l'élève dans des séances qu'ils jugent circonscrites par le temps imparti au travail d'entraînement.

Stabilité pour chaque enseignant et différences entre enseignants associées à des choix de gestion et de contenus des séances.

De l'analyse des pratiques d'enseignants expérimentés dans plusieurs classes (Chappet-Paries, Robert & Rogalski, chapitre 4), il ressort d'abord que dans des conditions sociales et institutionnelles comparables, les pratiques en classe d'un

enseignant expérimenté ont une certaine invariance et cette stabilité concerne d'abord les décisions de gestion de l'enseignant, *a priori* et pendant la séance. Autrement dit, ces choix sont plus stables que les choix précis de contenus préparés avant la séance³. L'équilibre trouvé entre la prise en compte des élèves, la nécessité de dérouler le programme et la conformité professionnelle serait une adaptation stabilisée pour l'enseignant expérimenté et difficilement ébranlable. Cela implique que des modifications liées au choix des contenus pourraient être intégrées dans les préparations sans avoir de répercussion sur les déroulements en classe.

A contrario, l'utilisation des technologies dans la classe, lorsqu'elle se fait d'une façon épisodique⁴, amène des perturbations dans le déroulement (voir chapitres 9 et 10). Abboud-Blanchard et Paries (chapitre 10) montrent en particulier qu'un enseignant non expert des technologies et les utilisant de façon épisodique voit la stabilité de ses pratiques perturbée, notamment relativement à la composante médiative. Cette perturbation ressentie par l'enseignant peut l'amener à des usages *a minima*, répondant aux injonctions institutionnelles mais n'exploitant pas les potentialités des technologies. Toutefois, Abboud-Blanchard, Cazes et Vandebrouck montrent que des usages répétés, même épisodique, d'une même technologie conduisent parfois les enseignants à modifier leurs pratiques, retrouvant ainsi une nouvelle stabilité.

On peut aussi se demander si certains élèves ne sont pas de ce fait souvent exclus des activités mathématiques dans une classe donnée (et cela se pose notamment en classes défavorisées) : du fait du choix de la gestion de l'enseignant, ils n'auraient jamais l'occasion de développer des connaissances proches des savoirs visés, les aides pourraient ne jamais leur être utiles et rester procédurales en ne leur permettant que d'effectuer la tâche demandée (cf. Chesnais, chapitre 7).

Parallèlement, et plusieurs chapitres précédents l'illustrent, les diversités entre enseignants sont constatées dans la manière dont les enseignants mettent au point dans les détails leur scénario à l'intérieur de l'enveloppe prédéterminée, choisissent localement la variété des tâches (énoncés), les évaluations, le travail à la maison, et gèrent leurs classes (déroulement, travail laissé aux élèves, repérage et appui sur ce travail) – cela concerne donc beaucoup le niveau local. Autrement dit, la diversité est plutôt associée à des investissements différenciés des enseignants des marges de manœuvre « qui leur restent », en termes de tâches précises et de déroulements. Les mêmes différences sont révélées par l'étude du discours fin (questions aux élèves, registres langagiers utilisés, fonctions du discours, marqueurs langagiers) qui renforce cette différence de choix (cf. Chappet Paries, Robert & Rogalski, chapitre 4).

Enfin certains enseignants partagent, et de manière stable, certaines caractéristiques détaillées dans le chapitre 2. Ainsi pour eux, tout se passe comme si les contraintes de temps⁵, rendues encore plus lourdes par les restrictions d'horaires actuelles, amènent à privilégier dans un certain nombre de classes « moyennes », surtout au lycée, un travail des élèves sur « le nouveau », mais : sans beaucoup d'exploration (notamment qualitative), peu d'entretien de l'ancien, pas ou peu de réorganisation entre ancien et nouveau, avec une orientation univoque de l'activité des élèves vers ce nouveau permise par une prise en main précise et rapide (voire immédiate) de

ces activités. Cela s'avère particulièrement contradictoire avec des nouvelles instructions pour le lycée.

Tout cela peut avoir des conséquences sur les activités des élèves, comme l'explorent les travaux ci-après.

Relations entre choix d'enseignants et apprentissages

Quelques travaux assez récents mettent en jeu la mise en relation entre des évaluations (contrôles) d'élèves et l'enseignement reçu, attestant d'un certain nombre de régularités (sur l'apprentissage des triangles semblables en seconde, (Horoks, chapitre 6), sur l'apprentissage des racines carrées en troisième (Dumail, 2007), sur l'apprentissage de la symétrie orthogonale en sixième, (Chesnais, chapitre 7). Ces chercheurs ont pu confirmer l'importance de ce qui est fait en classe, collectivement, dans les acquisitions des élèves. Cependant si des répétitions de tâches garantissent un certain succès, elles peuvent aussi empêcher certaines adaptations de connaissances, pourtant indispensables aux acquisitions. De même des formes de travail comme le travail en petits groupes ne bénéficient pas automatiquement à tous les élèves, la qualité de l'accompagnement de l'enseignant jouant beaucoup.

Cependant, encore une fois, les variations des choix des enseignants sont limitées par l'inscription des pratiques individuelles dans les contraintes précédentes.

Discussion sur les régularités

Finalement, du point de vue du chercheur qui s'intéresse aux apprentissages et aux activités qui peuvent les entraîner, un certain nombre de questions transversales se posent sur ces régularités et se retrouvent sous divers angles – qui permettent de mesurer à quel point le travail de l'enseignant est fait de choix, d'hésitations, voire de paris et de deuils. Nous estimons que les enseignants ont leurs raisons, que personne ne connaît aussi bien qu'eux, et qu'il est nécessaire de les explorer !

Gérer l'hétérogénéité et obtenir l'engagement des élèves dans le travail occupent une grande place, que ce soit dans des classes difficiles ou non. La question s'étend d'ailleurs au travail hors-classe. Plus spécifiques à l'enseignement des mathématiques, et liées aux précédentes, se posent les questions de simplifications, de découpages, de réductions à faire pour s'adapter au niveau des élèves, d'exigences à respecter sur la forme écrite, plus généralement d'interprétation et de suivi des programmes⁶ Elles amènent à aborder ce qui est prescrit à l'enseignant, ce qu'il en comprend et ce qu'il va en retenir, compte tenu de la spécificité du terrain où il exerce.

Plus généralement, l'équilibre entre la nécessité, pour arriver à gérer la classe, de permettre à beaucoup d'élèves, y compris défavorisés, de s'engager dans un exercice et l'intérêt, pour les apprentissages, de proposer suffisamment de tâches complexes est souvent délicat, discuté, et source d'interrogations ouvertes, qui mêlent choix de contenus et choix de gestion. Terminer le programme (trop) rapidement ou rester suffisamment longtemps sur un certain nombre de notions

pour en assurer l'apprentissage du plus grand nombre, quitte à ne pas avoir tout « fait » ? Il y a sans doute des seuils, liés à la composition des classes, qui amène à telle ou telle décision pratique, vue ici comme une alternative, avec son cortège de conséquences variées.

Des recherches complémentaires sont nécessaires pour mieux comprendre ce qui peut être en jeu à chaque niveau.

Tous ces résultats et les questions qu'ils soulèvent sont des préalables essentiels à toute réflexion sur les formations des enseignants aussi bien initiales que continues.

Il faut ajouter qu'il n'y a pas beaucoup de travaux de recherches achevés sur la formation des enseignants du second degré.

Quelques travaux précurseurs menés sur des formations de professeurs d'école (Masselot, 2000, Vergnes, 2001) ont indiqué que la formation initiale ou continue n'atteint pas ses objectifs pour tous – loin s'en faut, et que les personnalités des formés semblaient tenir un rôle important dans cette réussite, ce qui a été précisé encore dans le travail de Mangiante (2012), mettant en jeu des précurseurs, en germe chez les débutants.

Le travail de Grugeon (2008) à partir d'une formation pour les enseignants-débutants dispensé à l'IUFM d'Amiens reste aussi parcellaire, même si les évaluations cliniques d'une formation inspirée des mêmes principes que ceux que nous avons exposés sont encourageantes.

Il faut bien reconnaître que s'attaquer à une évaluation des formations et de leurs effets sur les pratiques des enseignants débutants est ainsi encore très rare, car très difficile.

PLUSIEURS DEMARCHES EN FORMATION PROFESSIONNELLE DES ENSEIGNANTS (DE MATHÉMATIQUES)

Avant d'aborder notre propre démarche, il est intéressant de présenter plusieurs types de formation qu'on rencontre dans diverses instances. On peut ainsi distinguer :

- Des formations centrées sur les apprentissages des élèves : prescriptives (programmes, activités, cours...) ; didactiques (contenus, gestion, difficultés des élèves)
- Des formations centrées sur la personne de l'enseignant (et les représentations), notamment des analyses de pratiques réflexives organisées en formation initiale.
- Des formations centrées sur le travail de l'enseignant : contraintes institutionnelles, sociales, marges de manœuvre et pratiques en classe
- Des formations « en acte » qui résultent de recherches collaboratives associant chercheurs et enseignants (Bednarz 2004)).
- Des formations centrées sur des compétences listées par l'institution (notamment en formation initiale) ou même sur des tâches précises prescrites – cf. le Plan Académique de Formation.

Les dernières sont les plus facilement discutables à nos yeux, c'est-à-dire trop limitées : une analyse de tâches en termes d'objectifs à atteindre est insuffisante. La compréhension de l'activité demande la prise en compte des conditions même de cette activité. Ainsi « agir c'est toujours choisir, hiérarchiser, diagnostiquer, estimer, juger, anticiper, adapter, mettre en relief, construire des significations, toutes choses qu'une décomposition du travail évacue. La déstructuration du travail produit une atomisation des processus... l'écume de l'action d'où le sujet a disparu » (Astier, 2006).

Sans trancher plus avant entre ces diverses démarches, incontestablement en partie complémentaires, l'histoire même de nos recherches sur l'enseignant nous amène à questionner la troisième démarche (centrée sur le travail de l'enseignant)⁷.

En effet, rappelons qu'après avoir mis en cause les représentations des enseignants dans notre difficulté à transmettre nos résultats de didactique (Robert et Robinet, 1992), nous avons compris l'insuffisance de cette démarche : l'écart entre le possible et le didactique ne peut pas être seulement imputé aux personnes, il doit aussi être mis en relation avec les conditions même d'exercice du métier d'enseignants. Nous avons alors mis en place la double approche des pratiques professionnelles (Robert et Rogalski 2002), qui prétend qu'analyser les pratiques seulement du point de vue des apprentissages des élèves (le but) ne permet ni d'interpréter les pratiques effectives ni de les former. Dans cette perspective, former c'est donner les moyens à chaque futur enseignant de fabriquer, à chaque fois, de l'idéal possible... L'idée de centrer la formation sur le travail est donc tentante.

Mais qui former « d'abord » ?

UNE FORMATION DE FORMATEURS D'ENSEIGNANTS DE MATHÉMATIQUES

Dans le chapitre 2, nous disions que nos recherches ont un double objectif. Il s'agit de donner aux chercheurs des accès aux apprentissages des élèves sur un contenu donné, en relation avec l'enseignement dispensé, au sein d'un système scolaire précis ; à plus long terme, il s'agit de travailler à et sur la formation des enseignants, notamment à partir d'inférences des analyses précédentes et d'hypothèses autorisées par le cadre théorique (cf. partie précédente).

Nous avons choisi d'entrer dans le monde de la formation à travers un de ses principaux acteurs : le formateur, en nous intéressant en particulier à sa formation. En effet les formateurs ont des statuts très différents, ne sont pas toujours formés (si ce n'est sur le tas), alors que le travail qu'ils ont à réaliser demande un certain nombre de « compétences », non spontanées. Ne serait-ce que de lire et de critiquer la littérature professionnelle pour la présenter éventuellement aux formés, de s'approprier les résultats des recherches et de les proposer sous une forme acceptable aux enseignants (transposition), de se décentrer de sa propre pratique, de repérer les marges de manœuvre et les contraintes et d'enrichir la palette des

outils à proposer de manière adaptée à chaque formé, d'élaborer des scénarios de formation efficaces...

Notre but est de concevoir une formation qui est capable d'armer les participants à conduire des formations professionnelles d'enseignants de mathématiques du second degré, initiales ou continues, en relation directe avec le travail de l'enseignant en classe et pour la classe – et compatible, le cas échéant, avec d'autres segments indispensables des formations. Dans ce dispositif de formation, ce sont des chercheurs en didactique qui occupent la position de formateurs ; leurs connaissances leur permettent à la fois de concevoir le dispositif, de le mettre en œuvre, voire de l'évaluer. Ce type de formation s'appuie sur des hypothèses relevant du cadre théorique unificateur de ce livre et sur des résultats obtenus dans des recherches sur les pratiques des enseignants, mettant en jeu leur complexité et leur relation avec les apprentissages des élèves. Un certain nombre d'outils d'analyses utilisés en didactique sont transposés et mutualisés.

Un dispositif général de formation de formateurs

Le dispositif de formation de formateurs que nous avons conçu et développé depuis une dizaine d'années met en place une formation relativement longue (plusieurs mois au moins) et s'adressent à des enseignants expérimentés volontaires. La démarche générale qui est adoptée pendant les séances de formation est d'y proposer un travail sur ce que fait l'enseignant en classe, par exemple grâce à des analyses de vidéos, puis d'adapter les déroulements aux apports des participants, et en s'appuyant sur ces derniers pour apporter des éléments nouveaux. Le bagage consistant espérer se tisse ainsi au fil des séances.

Dans ce qui suit nous exposons les principes théoriques qui sous-tendent cette formation en dégageant les trois principales orientations qui en découlent et qui la structurent.

Au centre de la formation de formateurs : les activités des élèves, interface entre les apprentissages et l'enseignement⁸

Nos recherches sur les pratiques, menées depuis les années 1990, s'inscrivent dans notre visée didactique d'élucider les relations entre l'enseignement d'un contenu donné et son apprentissage - elles ont comme objectif de mieux comprendre l'intervention des enseignants dans les apprentissages de leurs élèves. Notre inscription théorique nous conduit à référer ceux-ci aux activités que les élèves développent sur les contenus visés – même si c'est une vision partielle.

Ces activités, qui dépendent des tâches proposées et des déroulements organisés en classe, sont elles-mêmes appréciées en relation avec le degré de conceptualisation attendu, déterminé à partir des programmes et des spécificités des notions en jeu.

Du coup, ce sont les activités des élèves, notamment en classe, qui servent de décodeur potentiel du travail des enseignants en classe et pour la classe, et ce décodage est précisément un des objectifs principaux des formations auxquelles nous prétendons former les formateurs. En effet, il s'agit in fine de former des

professeurs qui engagent les élèves dans un travail mathématique de qualité (aussi bien pour le sens que pour la technique), malgré et compte tenu des contraintes, institutionnelles – programmes, horaires –, sociales – composition des classes, habitudes, pressions... Et, à nos yeux, la cible première pour remplir cet objectif est le travail de l'enseignant en classe et pour la classe, dont l'analyse devient l'enjeu majeur des formations auxquelles nous prétendons former les participants, avec un travail sur les mathématiques qui s'inscrit à la suite.

Nous pouvons ainsi énoncer la première orientation choisie : ce sont les outils d'analyse que nous utilisons en recherche pour ce décodage (du travail de l'enseignant aux activités possibles des élèves) que nous partageons, au moins partiellement⁹, avec les participants, en les mutualisant et en les développant au fur et à mesure. Ceci se fait notamment grâce à des analyses du travail de l'enseignant en classe (facilité par l'usage de vidéos). Nous supposons que ces outils vont permettre aux formateurs qui s'en emparent et se les approprient, de compléter ainsi leur propre expérience et d'entrer dans toutes les classes. Ils pourront présenter des formations en référence aux activités des élèves, qui jouent ici le rôle clef que nous leur reconnaissons théoriquement, en faisant discuter les alternatives et les palettes de possibles pour les enseignants sur une séance donnée.

Ces outils donnent en effet des moyens d'étudier localement, à l'échelle de chaque séance, les tâches qui ont été choisies, en relation avec les mises en fonctionnement des connaissances attendues (et les adaptations nécessaires), compte tenu de l'exposition des savoirs dans la classe. Ces outils permettent aussi, sur chaque tâche, d'analyser les déroulements correspondants, et de préciser les activités qui peuvent avoir lieu en classe, grâce à la prise en compte des formes de travail des élèves installées par l'enseignant, des diverses aides qu'il donne, des questions et réponses aux élèves, des corrections et bilans. Globalement, les outils introduits en formation de formateurs donnent aussi accès à l'étude de l'ensemble ordonné et organisé des cours et exercices retenus pour l'enseignement d'une notion visée, jusqu'aux contrôles (les scénarios d'enseignement), en introduisant notamment la recherche de différentes dynamiques proposées aux élèves, comme les décontextualisations ou les changements de cadres ainsi que la quantité et la variété des tâches proposées.

Enfin, pour servir de référence à l'élaboration de ces scénarios, nous introduisons des analyses plus globales qui servent à orienter les choix « stratégiques » : il s'agit de préciser ce que nous appelons le « relief » sur les notions, à partir de leurs spécificités, tant liées aux difficultés connues des élèves qu'aux mathématiques. Ainsi par exemple les introductions à choisir sont-elles conditionnées par la nature de l'insertion d'une nouvelle notion dans les connaissances précédentes, plus ou moins facile, ou les utilisations possibles dans le travail mathématique des élèves peuvent-elles être approchées par des éléments tirés d'études épistémologiques, en relation avec les programmes. Finalement, dans la mesure où le travail quotidien de l'enseignant inclut, pour chaque notion à enseigner, les choix de contenus (préparés avant la classe), l'organisation du travail des élèves en classe et l'exploitation de leurs activités, les outils en question vont être utiles aux formateurs que ce soit pour appréhender ou pour enrichir les choix des enseignants.

Tout cela amène à disposer de « mots pour le dire », base d'un vocabulaire professionnel partagé et très important, inspiré de la recherche, qui se développe tout au long de la formation.

La nécessaire prise en compte du véritable travail de l'enseignant, dans sa complexité

Cependant, beaucoup de recherches (plusieurs chapitres de ce livre en sont des exemples) ont montré à quel point il était insuffisant de référer les analyses de pratiques aux seuls apprentissages visés pour en comprendre les diversités et les régularités ; elles ont révélé à quel point les diverses contraintes, incontournables ou non, qui pèsent sur le métier, liées à l'institution, à la nécessité de tenir compte des élèves les plus divers, mais aussi aux habitudes et aux différences individuelles, jouent dans les choix des enseignants. Ce sont ces recherches ainsi que leur cadre théorique de référence, la double approche, qui expliquent la deuxième orientation choisie pour la formation de formateurs : la prise en compte explicite, au niveau même des séances, de la complexité de ce travail de l'enseignant, qui l'amène par exemple à anticiper sur les déroulements en classe quand il prépare ses séances tranquillement chez lui, et à improviser pour tenir compte des élèves quand il déroule ses préparations. Cela a conduit d'une part à séparer le moins possible les analyses des préparations de celles des déroulements, d'autre part à étudier explicitement les contraintes (programmes et autres) et les marges de manœuvre réelles, individuelles, ainsi que les régularités inter-enseignantes, traduisant des incontournables. Ce sont les analyses de séances (notamment grâce à des vidéos), déjà évoquées, qui servent à mettre en scène la complexité. Elles se font en mettant systématiquement en regard les tâches, analysées d'abord, et ce que l'enseignant peut provoquer, par sa gestion et ses discours, comme activités correspondantes chez les élèves. L'objet du travail en formation de formateurs n'est pas l'analyse des énoncés, ce n'est pas l'analyse des déroulements – la prise en compte de l'hétérogénéité par exemple, c'est le croisement entre les deux et toutes les questions, plus globales, qui s'y rattachent.

Des modalités de formation particulières, adaptées au développement des pratiques

Les hypothèses sur le développement des pratiques que nous adoptons en formation de formateurs expliquent la troisième orientation choisie, notamment en termes de modalités de formation. En effet, dans le cadre de la théorie de l'activité, spécifiée aux enseignants, et nous nous inspirons très schématiquement d'un modèle d'intervention collective dans ce qui pourrait s'appeler une « Zone proximale de développement des pratiques ». Il s'agit de développer en formation un travail collectif qui peut influencer les pratiques effectives, en en respectant la complexité, tout en étant orienté par les choix à faire sur les activités des élèves (aspect didactique). Notre démarche est quelque peu « homologique » à ce niveau : notre propre formation de formateurs est organisée de la même manière que pourront l'être les formations organisées ultérieurement par nos participants, avec des explicitations nombreuses cependant, sans doute inutiles pour les jeunes

enseignants. Le choix de modalité le plus important peut s'énoncer d'une manière schématique par le slogan suivant : « partir des pratiques pour contribuer collectivement à former des pratiques ». Autrement dit nous élaborons des séances de formation qui vont de l'analyse du local, le travail pendant la séance de classe, avec les choix correspondants, au global, avec l'inscription des constats précédents dans des choix et des projets plus vastes. Il s'agit, pour respecter la complexité constitutive de ce qu'on veut contribuer à enrichir, à savoir les pratiques effectives ultérieures, de commencer par rapprocher le plus possible les participants, pendant les séances de formation, de la posture d'enseignant (en classe en particulier) – menant à des appréciations constructives, permises par les outils qui ont été introduits, hors tout jugement. D'une certaine manière il s'agit de s'appuyer sur du « déjà-là » (pratiques expérimentées des futurs formateurs ou des enseignants en formation continue ou pratiques à venir des débutants) restitué d'une manière ou d'une autre et travaillé dans les séances de formation. Les débutants découvrent au fur et à mesure ces pratiques si les principes d'alternance indispensables sont respectés. Dans ce schéma, un rôle particulier est dévolu au collectif des participants et au formateur, permettant des aller-retour permanents de l'inter-individuel à l'intra-individuel : il s'agit de faciliter, grâce aux discussions, l'émergence de questionnements et les prises de conscience préalables aux acquisitions éventuelles visées ; cela permet notamment au formateur de rapprocher celles-ci des besoins ressentis et exprimés par les participants, en choisissant soigneusement ses interventions, et en donnant la part qui leur revient aux diverses marges de manœuvre des enseignants (en regard des contraintes). C'est ce qui permet les « remontées » à des questions plus globales, décontextualisations absolument nécessaires aux réinvestissements ultérieurs. On conçoit l'importance de la durée de la formation, condition nécessaire à ce que soient rencontrées suffisamment de sujets.

Enfin, les trois orientations de la formation notamment leurs aspects relatifs aux modalités de travail, amènent le formateur-chercheur à une adaptation permanente pour réduire le décalage entre son projet et ses connaissances, et les besoins exprimés par les participants. Il doit ainsi à la fois apprendre des participants, grâce à une certaine perméabilité explicite à leurs interventions, et transformer ces éléments issus de l'interaction en source d'apprentissage pour les participants. Autrement dit, il s'agit de comprendre les besoins ressentis par les participants et leurs potentialités pour mieux caler les besoins supposés par le formateur, qui motivent ses interventions – et peut-être les réviser.

Un dispositif spécifique à la formation des formateurs aux technologies

Nombre de recherches en didactique des mathématiques ont mis en évidence la complexité des outils technologiques qui interviennent dans les apprentissages mathématiques, le chapitre sur les bases d'exercices en ligne dans ce livre en est un exemple (Cazes et Vandebrouck chapitre 8). Cette complexité se traduit par l'accroissement de la complexité du travail de l'enseignant dans ces environnements

technologiques, deux chapitres dans ce livre en sont des illustrations (chapitres de Abboud-Blanchard et Paries chapitre 10, Abboud-Blanchard, Cazes & Vandebrouck chapitre 9). Malgré la quantité des recherches traitant de l'intégration des technologies dans l'enseignement des mathématiques qui nous permettent actuellement de mieux comprendre les pratiques correspondantes des enseignants, la formation des enseignants dans ce domaine reste globalement inadéquate. Nos recherches antérieures sur la formation continue aux technologies ont montré d'une part que les contenus des formations sont personnalisés, dépendantes de la pratique propre du formateur en tant qu'enseignant et d'autre part qu'il y a une centration sur les artefacts au détriment d'une étude des pratiques sur les plans cognitif et médiatif (Abboud-Blanchard et Emprin 2009). De plus, nous avons noté une absence de savoirs dont l'acquisition soit identifiée, par le formateur, comme objectif de la formation et un manque d'ancrage sur des aspects didactiques.

Partant de ces constats, nous avons conçu une formation de formateurs qui les sensibilise à la complexité des pratiques enseignantes dans les environnements technologiques et leur permet d'envisager des formations distanciées par rapport à leurs propres pratiques, visant des apprentissages enrichis par la présence des technologies et orientées vers une cohérence avec les pratiques en environnements traditionnels. La spécificité liée aux technologies sera dégagée au fur et à mesure.

Cette formation s'inscrit dans le dispositif général décrit ci-dessus et en adopte la démarche générale, et les orientations issues du cadre théorique. Elle consiste à mettre en place un environnement collaboratif de formation aux utilisations des technologies basé sur un double mouvement :

- à travers le premier mouvement ascendant (bottom-up), les enseignants, futurs formateurs, partagent leurs expériences, pratiques et visions et connaissances relatives à l'intégration des TICE dans l'enseignement ;
- le deuxième mouvement descendant (top-down), consiste, tout en s'adaptant aux besoins de ces enseignants, de leur permettre d'accéder aux résultats des recherches relatives à ce domaine et de s'emparer des questions qui y sont débattues, en portant un regard critique soutenu par leurs propres expériences.

Le rôle du chercheur-formateur dans cette formation est double, dans sa posture de formateur, il adapte les modalités et contenus de formation aux connaissances, déjà là, des participants ; dans la posture du chercheur, il s'appuie certes sur les recherches dans le domaine mais ne se limite pas à la simple diffusion de résultats ou d'outils d'analyse, il contribue à les compléter en fonction de l'usage qui en est fait dans la formation. Notons toutefois que ce rôle double est flexible et varie selon l'activité de formation en cours.

Précisons également ce que nous entendons par environnement collaboratif et le sens à donner à la « collaboration ». Il paraît évident que celle-ci ne va pas «automatiquement» permettre d'atteindre les objectifs de la formation. En général, la collaboration en formation des enseignants englobe plusieurs enjeux : travailler ensemble, partager les mêmes objectifs, contribuer à l'étude des pratiques à travers différentes perspectives et connaissances professionnelles, s'ouvrir sur de

nouvelles possibilités (Bednarz et al. 2011). Dans notre cas, il s'agit de partager à la fois des expériences professionnelles entre les participants et avec le formateur-chercheur, et des connaissances théoriques et empiriques entre l'ensemble des membres du collectif. Ce travail, vise à dégager, avec l'assistance du formateur, ce qui est objectivement partagé, voire expliciter ce qui est encore implicite. Ainsi chacun collabore en activant des connaissances et des expériences issues de sa propre pratique dans le but de co-construire de nouvelles connaissances ancrés dans la pratique et situées par rapport à des perspectives théoriques.

Dans un premier temps, la formation est organisée en modules, chacun relatif à un outil technologique donné familier à au moins un groupe de participants. Chaque module est constitué de trois épisodes. Dans le premier, un groupe d'enseignants présente et analyse ses propres utilisations de l'outil en classe, agrémentées d'une revue des ressources disponibles en ligne relatives à cet outil. Le deuxième consiste en un apport du côté de la recherche sous forme de résultats et/ou d'outils d'analyse spécifiques. Cet apport est pris en charge aussi bien par le chercheur-formateur que par les participants eux-mêmes via des lectures théoriques choisies. Dans le troisième épisode, une discussion est engagée qui vise à envisager collectivement les principales questions à soulever et les éléments à mettre en avant dans une formation des enseignants à l'utilisation de cet outil technologique. Sur le plan des modalités de formation, certaines activités clés sont mises en place à des moments opportuns. Elles incluent des analyses d'extraits de séances utilisant les technologies, qui agissent comme expérience partagée support des discussions, des lectures théoriques et professionnelles, la rédaction de comptes rendu réflexifs sur des usages ponctuels... L'analyse de ressources en ligne est une des activités régulières pendant la formation. D'un côté ces ressources constituent à l'heure actuelle la source principale de documentation de l'enseignant lorsqu'il s'agit d'avoir des supports pour construire un enseignement intégrant les technologies, la formation ne peut donc pas en faire abstraction. Identifier la ressource pertinente à utiliser pour sa classe et pour une notion mathématique donnée est en soi une activité complexe et chronophage pour l'enseignant. De plus, certaines ressources sont difficilement utilisables en dehors du cercle restreint de leurs concepteurs puisque les enjeux d'apprentissage, les difficultés et les moments délicats dans le déroulement sont peu explicités. Prenons par exemple le cas d'un enseignant souhaitant utiliser la géométrie dynamique, il a d'abord à choisir (si ce choix n'est déjà fait au niveau de l'établissement) un logiciel parmi plusieurs sur le marché. Ce choix peut être relatif à l'accessibilité du produit (logiciels libres d'accès ou non) ou aux caractéristiques ergonomiques et/ou didactiques du logiciel. Il a ensuite à gérer sa propre maîtrise du logiciel et la familiarité de ses élèves avec la manipulation du logiciel. Enfin, parmi la variété de l'offre des ressources présentant des activités de classe, il doit trouver et évaluer celles qui lui semblent pertinentes et correspondant à son projet d'enseignement ; sans toutefois perdre de vue l'équilibre coût-bénéfice en matière de temps d'investissement et temps d'apprentissage. D'un autre côté, les ressources sont de différentes natures (séances clés en mains, bases d'exercices en lignes, programmations sur un thème

mathématique...) de provenances diverses (sites académiques, collectifs d'enseignants, productions individuelles...) et ayant des formats variés (simple activités d'élèves avec un artefact, scénario d'enseignement commenté ou non...). Leurs analyses permettent aux participants à la formation de mieux comprendre l'existant en termes d'utilisation des technologies dans ses points forts et dans les manques qui rendraient ces ressources inefficaces.

A travers ces différents types d'activités, nous espérons deux retombées majeures. D'une part les futurs formateurs développeront une *prise de conscience* des spécificités, grossières et fines, de l'enseignement dans des environnements technologiques. Ces spécificités sont vues soit du côté de l'élève : accroissement de l'hétérogénéité de l'activité des élèves, risque d'une activité liée à l'utilisation de l'ordinateur mais non productrice de réflexion au niveau mathématique... ; soit du côté de l'enseignant : une préparation en amont plus exigeante qu'habituellement du travail de l'élève, natures et moments des aides à fournir à l'élève pour , les interventions collectives (moments et visées)... ; soit du côté des mathématiques à enseigner : changement de vision des objets dans le cas de géométrie dynamique ou des tableurs, approches variées des notions via un jeu de cadres facilité et plus fréquent... ; soit des conditions et contraintes matérielles de la mise en œuvre des séances. Cette prise de conscience serait propice à la conception de formations plus ciblées sur des aspects didactiques dépassant la tendance de centration sur les artefacts. Par ailleurs, ils vont construire un vocabulaire professionnel commun. Ceci devrait leur permettre de décrire des situations vécues/observées en les dépersonnalisant, ce qui améliorerait leur transférabilité à d'autres enseignants, notamment leurs futurs stagiaires. Le but du travail ainsi entrepris est d'amener progressivement les participants à identifier collectivement, pour chaque artefacts choisi, des éléments qu'ils jugent essentiels à être pris en compte par, et/ou aborder dans, la formation des enseignants aux technologies. Ces éléments sont de différentes natures :

- conditions matérielles et contraintes relatives aux : types de logiciels existants dans l'établissement, caractéristiques techniques des outils, salles dans lesquelles ont lieu les séances (salles informatique, salle de classe avec dispositif de projection, TBI...);
- différences entre les environnements de travail classique et technologique et leur implication sur l'activité de l'élève et de l'enseignant ;
- apports et limites relativement aux apprentissages mathématiques et palette des tâches à proposer aux élèves, à préciser pour une notion mathématique donnée et par rapport à un logiciel donné (l'articulation arithmétique-algèbre pour le tableur, l'ajout d'une dimension expérimentale à l'émission de conjectures et de preuves en géométrie dynamique...);
- caractéristiques de l'activité de l'enseignant, natures des interactions en classe (voir par exemple chapitres 8 et 9 dans ce livre)

Dans un second temps, cette identification « prend forme » à travers la conception par chaque groupe de participants d'une ressource destinée à être utilisée en

formation des enseignants ; elle est ensuite présentée à, et discutée avec, l'ensemble des participants. La ressource est basée sur une réelle activité mise en place dans la (les) classe(s) du (des) concepteur(s) de la ressource. Nous faisons l'hypothèse que concevoir une ressource basée sur une activité réelle de l'enseignant puis rédiger et discuter collectivement un document expliquant cette conception exige du concepteur de clarifier les éléments implicites rencontrés au cours de la phase de création et d'accéder à une dimension réflexive de son travail. De ce fait, dans notre travail, la conception de la ressource n'est pas un but en soi¹⁰ mais plutôt une modalité pour la formation. De plus, faire ce travail contribue à une prise de conscience accrue de la complexité des pratiques liées aux technologies, il contribue aussi à mieux comprendre le processus à travers duquel on se construit en tant que formateur. D'un autre côté, ce travail réflexif écrit, favoriserait une réflexion métacognitive sur les mathématiques en jeu dans des environnements technologiques à travers l'analyse détaillée des tâches et le repérage de l'impact des interactions en classes sur les apprentissages mathématiques des élèves.

Discussion

Dans nos formations, chaque participant est un enseignant en exercice et de ce fait, il est difficile de ne pas se poser la question de l'existence d'un impact double de la formation : a-t-on formé un enseignant, un formateur ou les deux ? Mais aussi y a-t-il des différences entre les deux processus, et si oui lesquelles ?

En comparant la formation des enseignants et la formation des formateurs, Llinares & Krainer (2006) situent la différence essentiellement du côté des contraintes que chacun des deux groupes subit dans l'exercice de son métier. Alors que les enseignants ont des contraintes institutionnelles fortes liées notamment aux programmes, aux niveaux d'enseignement et aux mathématiques à apprendre, les formateurs ont une liberté de définir leurs propres contenus et la façon de les apprendre. Les formateurs ont de plus une liberté relative aux moyens à mettre en œuvre pour se développer eux-mêmes dans leur pratique.

Nous partageons ce constat et nous pensons aussi qu'enseignants et formateurs sont des professionnels qui apprennent à travers leur activité constructive (Rogalski chapitre 1) dans leur professions respectives dans le sens où leur activité productive génère une connaissance liée à la pratique qui est source de leur propre apprentissage. Quand un enseignant est en train de se former en tant que formateur ces différents types de connaissances vont se retrouver en présence les unes des autres. Les questions que nous nous posons sont les suivantes : quelles articulations vont avoir lieu entre ces connaissances ? Y a-t-il certaines qui occupent le devant de la scène ? Y a-t-il des connaissances communes différentes qui vont émerger ? Comment en tant que chercheurs pouvons-nous alors les repérer et en tant que formateurs favoriser leur émergence ?

Enfin, sur le plan théorique en didactique des mathématiques, ce sont les mêmes cadres qui permettent pour l'instant d'étudier les deux types de pratiques (de

l'enseignant, du formateur) et de leur formation. Est-ce suffisant étant donné ce qui précède ?

En fait, lorsqu'on aborde ce volet de l'évaluation des formations, ou de leur comparaison, il y a lieu de s'attaquer à un chantier quadruple – celui de la formation dispensée (et donc des formateurs, dans leur diversité), celui des pratiques des enseignants formés et celui des apprentissages « correspondants » de leurs élèves... On conçoit l'énormité de la chose et la nécessité d'inventer des détours.

NOTES

¹ Ils n'en ont pas conscience – cela a été montré par exemple dans le travail de Lenfant (2002) sur l'algèbre élémentaire, pour laquelle les débutants oublient les solutions arithmétiques plus proches de certains élèves.

² On peut en trouver des traces chez d'autres enseignants, notamment en ZEP.

³ Cela a été vérifié sur l'utilisation du tableau noir (Vandebrouck 2002). Des résultats analogues ont été mis en évidence dans le premier degré : Maurice, J.-J., and Allègre, E.: 2002, 'Invariance temporelle des pratiques enseignantes: le temps donné aux élèves pour chercher', *Revue Française de Pédagogie* 138, 115-124.

⁴ Ce qui le cas le plus fréquent dans l'enseignement actuellement en France

⁵ Elles sont toujours évoquées pour justifier ces faits.

⁶ Et l'introduction du socle a encore accru ces questionnements

⁷ Une autre histoire sera de réfléchir à l'imbrication des divers types de formation.

⁸ Ce texte est tiré d'une communication publiée dans les actes du colloque Les didactiques en questions - État des lieux et perspectives pour la recherche et la formation. Université de Cergy-Pontoise (2011).

⁹ Il y a là une transposition de fait, dans la mesure où ces outils sont un détournés de leurs usages initiaux.

¹⁰ Comme c'est le cas par exemple du programme de formation pairform@nce (<http://national.pairformance.education.fr/>)

- Abboud-Blanchard M., Cazes C., Vandebrouck F. (2009) Activités d'enseignants de mathématiques intégrant des bases d'exercices en ligne. *Quadrante, Special Issue ICT in Mathematics Education*. Vol 18 (1-2). pp 147-160.
- Abboud-Blanchard M., Vandebrouck F. (2012) Analysing teacher's practices in technology environments from an Activity Theoretical approach. *International Journal of Technology in Mathematics Education*. A paraître en 2012
- Abboud-Blanchard M., Vandebrouck F. (à paraître) De l'analyse d'usages des TICE à une articulation de cadres théoriques pour l'étude des pratiques enseignantes. Dans J.-B. Lagrange (Eds.) *Les technologies numériques pour l'enseignement: usages et genèses*. Toulouse: Octarès Edition.
- Arditi S. (2011) *Variabilité des pratiques effectives des professeurs des écoles utilisant un même manuel écrit par des didacticiens*. Thèse de Doctorat. Université Paris Diderot. Paris.
- Arsac G. (1998) Les limites d'un enseignement déductif de la géométrie. *Petit x*. Vol 47. pp 5-31.
- Artigue M. (2002) Learning mathematics in a cas environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*. Vol 7 (3). pp 245 -274.
- Artigue M., Robinet J. (1982) Conception du cercle chez des enfants de l'école élémentaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol 3 (1). pp 5-64.
- Bautier E. (Eds) (2006) *Apprendre à l'école, Apprendre l'école. Des risques de construction d'inégalités dès la maternelle*, Lyon: Chronique Sociale.
- Bautier E., Rochex J.-Y. (1998) *L'expérience scolaire des nouveaux lycéens. Démocratisation ou massification*, Paris: Armand Colin.
- Bednarz N. (2004) Collaborative research and professional development of teachers in mathematics, Dans M. Niss et E. Emberg (Eds.) *Actes de International Conference on Mathematics Education*. Copenhagen. 4-11 July.
- Bednarz N., Fiorentini D., Huang R. (Eds) (2011) *International approaches to professional development for Mathematics Teachers*, Ottawa: University of Ottawa Press.
- Ben Salah Breigeat C. (2001) *Les connaissances mathématiques des nouveaux enseignants de mathématiques au collège: une étude de cas*. Thèse de doctorat. Université Paris Diderot.
- Berliner D. (2001) Learning about and learning from expert teachers. *International Journal of Educational Research*. Vol 35. pp 463-482.
- Beziau P., et al. (2003) *Un questionnaire sur l'utilisation du tableau noir en classe de mathématiques (collège et lycée): portée, limites, perspectives en formations*. Documents pour la formation des enseignants, Numéro 1, Publication de IREM de Paris 7.
- Bloch I. (2005) Les interactions mathématiques entre professeurs et élèves. Comment travailler leur pertinence en formation ? *Petit x*. Vol 81. pp 25-53.
- Boero P. (Eds) (2007) *Theorems in school: from history, epistemology and cognition to classroom practice*, Rotterdam, the Netherlands: Sense Publishers.
- Borne D., IGEN (1998) *Le manuel scolaire, rapport de l'Inspection Générale de l'Éducation Nationale*, Paris: Documentation française.

- Brault R. (2006) *Phare 5ème*, Paris: Hachette.
- Bridoux S. (2011) *Enseignement des premières notions de topologie à l'université. Une étude de cas*. Thèse de Doctorat. University Paris Diderot.
- Brousseau G. (1990) Le contrat didactique: le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol 9 (3). pp 309-336.
- Brousseau G. (1997) *Theory of didactical situations in mathematics*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Brousseau G. (1998) *Théorie des situations didactiques*, Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Brousseau G., Brousseau N. (1987) *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*, Bordeaux: IREM.
- Bruillard E. (Eds) (2005) *Manuels scolaires, regards croisés*, Caen: CRDP de Basse Normandie.
- Bruner J. (1966) *Toward a theory of instruction*, Cambridge, M A: Harvard University Press.
- Bruner J. (1983) *Le développement de l'enfant: savoir faire et savoir dire*, Paris: PUF.
- Bruner J. (1987) Prologue to the english edition. Dans R. W. Rieber et A. S. Carton (Eds.) *The collected work of L.S. Vygotsky (vol 1)* (pp.1-16). New York: Plenum Publishing.
- Bruner J. (1996) Celebrating divergences: Piaget and Vygotsky, Dans (Eds.) *Actes de A keynote adress, Vygotsky-Piaget Conference*. Genova. 15 septembre 1996.
- Busser E., Massot C. (Eds) (2006) *Aventure Math 5ème*, Paris: Pôle.
- Butlen D. (1985) *Introductions de la multiplication à l'école primaire: histoire, analyses didactiques, manuels actuels*. Cahiers de didactique des mathématiques, Numéro 19, Publication de IREM de Paris 7.
- Butlen D. (2007) *Le calcul mental entre sens et technique*, Besançon: PUFC, collection Didactique.
- Butlen D., Pezard M. (2003) Etapes intermédiaires dans le processus de conceptualisation. *Recherche en Didactique des Mathématiques*. Vol 23 (1). pp 1-40.
- Castela C. (1995) Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol 15 (1). pp 7-48.
- Castela C. (2000) Un objet de savoir spécifique en jeu dans la résolution de problèmes: le fonctionnement mathématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol 20 (3). pp 331-380.
- Cazes C., et al. (2006) Using E Exercises bases in mathematics: case studies at university. *International Journal of Computer in Mathematics Learning*. Vol 11 (3). pp 327-350.
- Chappet-Paries M., Robert A., Rogalski J. (2008) Analyses de séances en classe et stabilité des pratiques d'enseignants de mathématiques expérimentés du second degré. *Educational Studies in Mathematics*. Vol 68. pp 55-80
- Charlot B., Bautier E., Rochex J.-Y. (1992) *Ecole et savoir dans les banlieues et ailleurs*, Paris: Armand Colin.

- Chesnais A. (2009) *L'enseignement de la symétrie axiale en sixième: deux pratiques différentes et la question de leurs effets différentiels*. Thèse de doctorat. Université Paris 7. Paris.
- Chesné J.-F. (2006) *La formation des pratiques chez les enseignants du second degré: des passages obligés?* Mémoire de Master. Université Paris 7. Paris.
- Chevalier A., Sauter M. (1993) *Naration de recherche*. Publication de IREM de Montpellier.
- Chevallard Y. (1985) *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*, Grenoble: La pensée sauvage.
- Chevallard Y. (1992) Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol 12 (1). pp 73-111.
- Chevallard Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol 19 (2). pp 221-266.
- Chiocca M.-C. (1995) *Des discours des enseignants de mathématiques en classe aux représentations de leurs élèves sur les mathématiques: un essai de réflexion didactique*. Thèse de doctorat. Université de Paris 7. Paris.
- Christiansen B., Walther G. (1986) Task and activity. Dans B. Christiansen, A.-G. Howson et M. Otte (Eds.) *Perspective on Mathematics Education* (pp.243-307). D. Reidel Publishing Company.
- Cissé F., Corlay M. (2006) *Déroulement des cours et apprentissages (sur le chapitre des triangles semblables)*. Mémoire de Master. Université Paris 7. Paris.
- Cole M., Wertsch J. (2001) Beyond the individual-social antinomy in discussions of Piaget and Vygotski, webpage.charter.net/schmolzel/vygotsky/colewertsch.html
- Coulange L. (2012) Débuter en collège ZEP: quelles pratiques enseignantes? Un zoom sur deux professeurs de mathématiques. *Recherche en Didactique des Mathématiques*. Vol 32 (3).
- Crahay M. (2000) *L'école peut-elle être juste et efficace? De l'égalité des chances à l'égalité des acquis*: De Boeck.
- Crinon J., Rochex J.-Y. (2012) *La construction des inégalités scolaires*, Rennes: Presses Universitaires de Rennes.
- De Vries R. (1997) Piaget's social theory. *Educational Researcher*. Vol 26 (2). pp 4-17.
- Dorier J.-L. (Eds) (1997) *L'algèbre linéaire en question*, Grenoble: La pensée sauvage, collection Bibliothèque de Recherche en Didactique des Mathématiques.
- Dorier J.-L. (2000) *On the teaching of linear algebra*: Springer.
- Douady R. (1986) Jeux de cadre et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol 7 (2). pp 5-31.
- Douady R., Perrin Glorian M.-J. (1986) *Liaison Ecole Collège: nombres décimaux*. Brochure IREM, Numéro 62, Publication de IREM de Paris 7.
- Drijvers P., et al. (2010) The teacher and the tool: instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*. Vol 75. pp 213-234.

- Duval R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*, Berne: Peter Lang.
- Duval R. (1996) Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol 16 (3). pp 349-382.
- Duval R. (2003) Décrire, visualiser ou raisonner: quels apprentissages premiers de l'activité mathématique? *Annales de didactique de Strasbourg*. Vol 8. pp 13-62.
- Félix C. (2004) Les gestes de l'étude personnelle chez les collégiens: une perspective comparatiste. *Spirale*. Vol 33. pp 89-100.
- Gagatsis A., Deliyanni E., Elia I., Panaoura A. (2011) Explorer la flexibilité: le cas du domaine numérique. *Annales de didactique de Strasbourg*. Vol 16. pp 25-44
- Galperine P. (1966) Essai sur la formation par étapes des actions et des concepts. Dans A. Leontiev, A. Luria et A. Smirnov (Eds.) *Recherches psychologiques en URSS* (pp.114-132). Moscou: Editions du progrès.
- Gilly M., Roux J.-P., Trognon A. (1999) *Apprendre dans l'interaction*, Nancy: Presses Universitaires de Nancy.
- Gréco P. (1991) *Structures et significations. Approches du développement cognitif*, Paris: EHESS.
- Grenier D. (1988) *Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement sur la symétrie orthogonale en sixième*. Thèse. Université Joseph Fourier. Grenoble.
- Grenier D., Laborde C. (1987) Transformations géométriques: le cas de la symétrie orthogonale, Dans *Actes de colloque GRECO: didactique et acquisition des connaissances scientifiques*. Sèvres, France. mai 1987.
- Grugeon-Allys B., et al. (2012) Development and use of a diagnostic tool in elementary algebra using an online item bank, Dans *Actes de 12th international congress on mathematical education ICME12*. Séoul, Corée. July 8-12.
- Hache C. (1999) *L'enseignant de mathématiques au quotidien, études de pratiques en classe de seconde*. Thèse de doctorat. Université de Paris 7. Paris.
- Hache C. (Eds) (2005) *Domino 6ème*, Paris: Nathan.
- Hache C. (Eds) (2006) *Domino 5ème*, Paris: Nathan.
- Hache C. (2008) Le cas des manuels dans l'enseignement des mathématiques. Dans F. Vandebrouck (Eds.) *La classe de mathématiques: activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp.345-370). Toulouse: Octarès Edition.
- Haenen J. (2000) Galperian instruction in the ZPD. *Human Development*. Vol 43. pp 93-98.
- Henningsen M., Stein M. K. (1997) Mathematical tasks and student cognition: classroom-based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning. *Journal of Research in Mathematics Education*. Vol 28 (5). pp 524-549.
- Hiebert J., Wearne D. (1997) *Long term teacher and student effects on conceptually-based instruction in mathematics*. Publication de University of Wisconsin.
- Horoks J. (2006) *Les triangles semblables en classe de seconde: des enseignements aux apprentissages - Etude de cas*. Thèse de doctorat. Université Paris 7. Paris.

- Houdement C., Kuzniak A. (2003) Elementary geometry split into different geometrical paradigms, Dans *Actes de CERME3*. Bellaria, Italy.
- Hoyles C., Lagrange J.-B. (2010) *Mathematics Education and Technology - Rethinking the terrain, ICMI study 17*, New-York: Springer.
- Jaworski B. (1994) *Investigating mathematics teaching: a constructivist enquiry*, London: Falmer Press.
- Josse E., Robert A. (1993) Introduction de l'homothétie en seconde, analyse de deux discours de professeur. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol 13. pp 119-154.
- Kendal M., Stacey K. (2002) Teachers in transition: moving towards CSA-supported classrooms. *ZDM*. Vol 34 (5). pp 196-203.
- Lagrange J.-B., Erdogan A. (2009) Teacher's emergent goals in spreadsheets based lessons: Analysing the complexity of technology integration. *Educational Studies in Mathematics*. Vol 71 (1). pp 65-84.
- Lenfant A. (2002) *De la position d'étudiant à la position d'enseignant: l'évolution du rapport à l'algèbre de professeurs stagiaires*. Thèse de doctorat. Université Paris 7. Paris.
- Leontiev A. (1978) *Activity, consciousness and personality*, Englewood Cliffs: Prentice Hall.
- Leplat J. (1997) *Regards sur l'activité en situation de travail*, Paris: PUF.
- Lima I. (2006) *De la modélisation de connaissances d'élèves aux décisions didactiques des professeurs: étude didactique dans le cas de la symétrie orthogonale*. Thèse de doctorat. Université Joseph Fourier. Grenoble.
- Malaval J. (Eds) (2006) *Transmath 5ème*, Paris: Nathan.
- Margolinas C. (1995) La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations. Dans C. Margolinas (Eds.) *Les débats de didactique des mathématiques* (pp.89-102). Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Margolinas C., Rivière O. (2005) La préparation de séance: un élément du travail du professeur. *Petit x*. Vol 69. pp 32-57.
- Marilier M.-C. (1994) *Travail en petit groupes en classe de mathématiques: des pratiques aux représentations (étude de cas)*. Thèse de doctorat. Université Paris 5. Paris.
- Mason P. (2003) Structure of attention in the learning of mathematics. Dans J. Novotna (Eds.) *Proceedings of the International Symposium on Elementary Mathematics Teaching* (pp.9-16). Prague: Charles University.
- Masselot P. (2000) *De la formation initiale en didactique des mathématiques (en centre IUFM) aux pratiques quotidiennes en mathématiques, en classe, des professeurs d'école - une étude de cas*. Thèse de doctorat. Université Paris 7. Paris.
- Monaghan J. (2004) Teacher's activities in technology-based mathematics lessons. *International Journal of Computers for Mathematics Learning*. Vol 9. pp 327-357.
- Montmollin (De) M. (1984) *L'intelligence de la tâche*, Berne: Peter Lang.
- Pastré P. (1999) Apprendre des situations. *Education permanente*. Vol 139.
- Pastré P. (Eds) (2005) *Apprendre par la simulation. De l'analyse du travail aux apprentissages professionnels*, Toulouse: Octarès.

- Pastré P. (2005) La deuxième vie de la didactique professionnelle. *Education permanente*. Vol 165. pp 29-46.
- Pastré P., Rabardel P. (Eds) (2005) *Modèles du sujet pour la conception - Dialectiques activités développement*, Toulouse: Octarès.
- Perrenoud P. (2005) D'où viennent les savoirs mobilisés dans une analyse de pratique? Troisième Symposium des Groupes de Pairs, Société de Médecine Générale,
http://www.unige.ch/fapse/SSE/teachers/perrenoud/php_main/php_2005/2005_14.html
- Perrin-Glorian M.-J., Robert A. (2005) Analyse didactique de séances de mathématiques au collège: pratiques d'enseignants et activités mathématiques d'élèves. *Les dossiers des sciences de l'éducation*. Vol 14. pp 95-110.
- Piaget J. (1971) *Biology and Knowledge: an essay on the relations between organic regulations and cognitive processes* (B. Walsh, Trans.), Chicago: University of Chicago Press.
- Piaget J. (1974) *The place of sciences of man in the system of sciences*, New York: Harper & Row.
- Piaget J. (1985) *The equilibration of cognitive structures: The central problem of intellectual development* (T. Brown & K.J. Thampy Trans.), Chicago: University of Chicago Press.
- Piaget J. (1992) *Biologie et connaissance*, Lausanne: Delachaux & Niestlé (2ème édition, 1ère édition 1967 Paris: Gallimard).
- Piaget J. (2005) *L'épistémologie génétique* (1st edition 1970), Paris: PUF.
- Piaget J., Inhelder B. (1971) *The Psychology of the Child* (H. Weaver, Trans.), New York: Basic Books.
- Postic M. V. (1989) *Observation et formation des enseignants* (4ème édition), Paris: PUF.
- Rabardel P. (1995) *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains*, Paris: Armand Colin.
- Radford L. (2010) The antropological turn in mathematics education and its implication on the meaning of mathematics activity and classroom practice. *Acta Didactica Universitatis Comenianae. Mathematics*. Vol 10. pp 103-120.
- Rayou P. (2009) *Faire ses devoirs*, Rennes: Presses Universitaires de Rennes.
- Richard J.-F. (2004) *Les activités mentales. De l'interprétation de l'information à l'action* [Mental activities. From interpretation of information to action], Paris: Armand Colin.
- Robert A. (1982) L'acquisition de la notion de convergence des suites dans l'enseignement supérieur. *Recherche en Didactique des Mathématiques*. Vol 3 (3). pp 307-341.
- Robert A. (1992) Projets longs et ingénieries pour l'enseignement universitaire: questions de problématique et de méthodologie. *Recherche en Didactique des Mathématiques*. Vol 12 (2-3). pp 181-220.
- Robert A. (1995) *L'épreuve sur dossier à l'oral du CAPES, Géométrie*, Paris: Ellipses.

- Robert A. (1998) Outil d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol 18 (2). pp 139-190.
- Robert A. (2001) Les recherches sur les pratiques des enseignants et les contraintes de l'exercice du métier d'enseignant. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol 21 (1-2). pp 57-80.
- Robert A. (2005) Des recherches sur les pratiques aux formations d'enseignants de mathématiques du second degré: un point de vue didactique. *Annales de didactique et de sciences cognitives*. Vol 10. pp 209-250.
- Robert A. (2005) Recherches en didactique des mathématiques et formations professionnelles dans le secondaire, Dans C. Castela et C. Houdement (Eds.) *Actes de Séminaire national de didactique des mathématiques*. 137-176. ARDM et IREM de Paris 7.
- Robert A. (2008) *Laisser chercher les élèves? Les faire travailler en petits groupes?* L'Ouvert, Numéro 117, Publication de IREM de Strasbourg.
- Robert A. (2011) Des recherches de type "ingénierie". Dans C. Margolinas, et al. (Eds.) *En amont et en aval des ingénieries didactiques*. Grenoble: La pensée sauvage.
- Robert A., Robinet J. (1989) *Quelques remarques sur l'enseignement de l'algèbre linéaire*. Cahiers de Didactique des Mathématiques, Numéro 53, Publication de IREM de Paris 7.
- Robert A., Rogalski J. (2002) Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques: une double approche. *Revue Canadienne de l'Enseignement des Sciences, des Mathématiques et des Technologies*. Vol 2 (4). pp 505-528.
- Robert A., Rogalski J. (2005) A cross-analysis of the mathematics teacher's activity. An example in a French 10th-grade class. *Educational Studies in Mathematics*. Vol 59. pp 269-298.
- Robert A., Rogalski M. (2004) Problèmes d'introduction et autres problèmes de recherche au lycée. *Repère IREM*. Vol 54. pp 77-103.
- Robert A., Tenaud I. (1988) Une expérience d'enseignement de la géométrie en terminale C. *Recherche en Didactique des Mathématiques*. Vol 9 (1). pp 31-70.
- Robert A., Vandebrouck F. (2003) Des utilisations du tableau par des professeurs de mathématiques en classe de seconde. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol 23 (3). pp 389-424.
- Roditi E. (2009) L'histogramme: à la recherche du savoir à enseigner. *Spirale - Revue de recherches en éducation*. Vol 43. pp 129-138.
- Rogalski J. (1982) L'acquisition de notions relatives à la dimensionalité des mesures spatiales (longueur, surface). *Recherche en Didactique des Mathématiques*. Vol 3 (3). pp 343-396.
- Rogalski J. (1985) *Acquisition de la bidimensionalité (combinatoire, espace, mesure) chez les élèves d'âge scolaire et préscolaire*. Thèse d'état. Université Paris 7. Paris.

- Rogalski J. (2003) Y a t-il un pilote dans la classe? Une analyse de l'activité de l'enseignant comme gestion d'un environnement dynamique ouvert. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol 23 (3). pp 343-388.
- Rogalski J. (2004) La didactique professionnelle: une alternative aux approches de "cognition située" et "cognitiviste" en psychologie des acquisitions. *@ctivité*. Vol 1 (2). pp 103-120. <http://www.activities.org/v1n2/Rogalski.pdf>
- Rogalski M. (1997) L'enseignement de l'algèbre linéaire expérimenté à Lille. Dans J.-L. Dorier (Eds.) *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question* (pp.159-184). Grenoble: La pensée sauvage.
- Rogalski M. (2008) Les rapports entre local et global: mathématiques, rôle en physique élémentaire, questions didactiques. Dans L. Viennot (Eds.) *Didactique, épistémologie et histoire des sciences* (pp.61-87). Paris: PUF.
- Ruthven K. (2009) Towards a Naturalistic Conceptualisation of Technology Integration in Classroom Practice: the example of school mathematics. *Education et didactique*. Vol 3 (1). pp
- Ruthven K., Hennessy S. (2002) A practitioner model of the use of computer-based tools and resources to support mathematics teaching and learning. *Educational Studies in Mathematics*. Vol 49 (2-3). pp 47-86.
- Samurçay R., Rabardel P. (2004) Modèles pour l'analyse de l'activité et des compétences: propositions. Dans R. Samurçay et P. Pastré (Eds.) *Recherches en Didactique Professionnelle* (pp.Chapitre 7). Toulouse: Octarès.
- Savoyant A. (1979) Eléments d'un cadre d'analyse: quelques conceptions essentielles de la psychologie soviétique. *Cahier de Psychologie*. Vol 22. pp 17-28.
- Savoyant A. (2005) L'activité en situation de simulation: objet d'analyse et moyen de développement. Dans P. Pastré (Eds.) *Apprendre par la simulation. De l'analyse du travail aux apprentissages professionnels* (pp.41-54). Toulouse: Octarès.
- Schoenfeld A.-H. (1998) Toward a theory of teaching in context, http://www-gse.berkeley.edu/faculty/AHSchoenfeld/Schoenfeld_TeachingInContext.pdf
- Sensevy G., Mercier A., Schubauer-Leoni M.-L. (2000) Vers un modèle de l'action didactique du professeur. A propos de la course à 20. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol 20 (3). pp 263-304.
- Sesamath (2006) *Le manuel Sésamath*, Chambéry: Génération 5.
- Shayer M. (2003) Not just Piaget; not just Vygotski, and certainly not Vygotski as alternative to Piaget. *Learning and Instruction*. Vol 13 (5). pp 165-486.
- Simon M.-A., et al. (2004) Explicating a mechanism for conceptual learning: elaborating the construct of reflective abstraction. *Journal of Research in Mathematics Education*. Vol 35 (5). pp 305-329.
- Sinclair J.-M., Coulthard R.-M. (1975) *Towards an analysis of discourse*, Oxford: Oxford University Press.
- Stein M. K. (1996) Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: an analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. *American Educational Research Journal*. Vol 33 (2). pp 455-488.
- Sullivan P., et al. (2010) Exploring the relationship between tasks, teacher actions, and student learning. *PNA*. Vol 4 (4). pp 133-142.

- Trouche L. (2004) Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computer for Mathematics Learning*. Vol 9. pp 281-307.
- Vandebrouck F. (2002) *Utilisation du tableau et gestion de la classe de mathématiques: à la recherche d'invariants dans les pratiques d'enseignants*. Cahier de Didirem, Numéro 42, Publication de IREM de Paris 7.
- Vandebrouck F. (2011) Perspectives et domaines de travail pour l'étude des fonctions. *Annales de didactique de Strasbourg*. Vol 16. pp 149-186.
- Vergnaud G. (1981) *L'enfant, la mathématique et la réalité*, Berne: Peter Lang.
- Vergnaud G. (1982) Cognitive and developmental psychology and research in mathematics education: some theoretical and methodological issues. *For the Learning of Mathematics*. Vol 3 (2). pp 31-41.
- Vergnaud G. (1983) Multiplicatives structures. Dans R. Lesh et M. Landau (Eds.) *Acquisition of mathematics: concepts and processes*. New York: Academic Press.
- Vergnaud G. (1990) La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol 10 (2-3). pp 133-169.
- Vergnaud G., et al. (1979) *Acquisition des "structures multiplicatives"*, Paris: EHESS-CNRS-IREM d'Orléans et Centre d'étude des processus cognitifs et du langage.
- Vergnes D. (2001) Les effets d'un stage de formation en géométrie. *Recherche en Didactique des Mathématiques*. Vol 21 (1-2). pp 99-122.
- Vicente K. (1999) *Cognitive work analysis. Towards safe, productive and healthy computer-based work*, Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Vidal-Gomel C., Rogalski J. (2007) La conceptualisation et la place des concepts pragmatiques dans l'activité professionnelle et le développement des compétences. *@ctivité*. Vol 4 (1). pp 49-84.
- Vygotski L. (1978) *Mind in society: The development of higher psychological processes*, Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Vygotski L. (1986) *Thought and Language*, Cambridge MA: MIT Press.
- Wenger E. (1998) *Community of practice, learning, meaning and identity*, Cambridge: University press.
- Wood D., Bruner J., Ross G. (1976) The role of tutoring in problemn solving. *Journal of Child Psychiatry*. Vol 17 (89-100).

TITRE :

Activités des élèves et pratiques des enseignants en classe de mathématiques

AUTEUR/S :

Fabrice Vandebrouck, Aline Robert, Janine Rogalski, Maha Abboud Blanchard, Claire Cazes, Aurélie Chesnais, Christophe Hache

RESUME :

Cette brochure rassemble quelques chapitres en français d'un livre en cours d'édition anglaise chez Sense Publisher : the mathematics class room : students' activities and teachers' practices. Ce livre est lui-même adapté du livre paru aux éditions Octarès en 2008 « La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants ». Nous regroupons dans cette brochure les chapitres du livre en français réécrits ou ajoutés pour la version anglaise. Chacun de ces deux ouvrages a pour objectif de regrouper des travaux en didactique des mathématiques, portant sur l'enseignement secondaire et supérieur, qui donnent une aussi grande importance aux acteurs (élèves et enseignants) qu'aux mathématiques et à la situation scolaire. Ces travaux s'inscrivent dans le cadre très général des théories de l'activité et du développement.

MOTS CLES :

Activité, pratiques enseignantes, didactique des mathématiques, apprentissages, technologies numériques, formation des enseignants

IREM de Paris 7 – Université Paris Diderot

Directeur de publication Fabrice Vandebrouck – Reprographie Nadine Locufier
www.iremp7.math.jussieu.fr

Dépôt légal : 2013 – ISBN : 978-2-86612-343-7