IREM PARIS 7

Document pour la formation des enseignants

n°14

Décembre 2012

Probabilités, statistiques, simulations :

Quels scénarios pour la formation des enseignants du secondaire ?

Maha Abboud-Blanchard, Catherine Fauvé, Dominique Laval, Aline Robert, Sophie Rousse, Mireille Vuong

ISSN : 2102-488X

INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES
UNIVERSITE PARIS DIDEROT

TITRE :

Probabilités, statistiques, simulations : Quels scénarios pour la formation des enseignants du secondaire ?

AUTEUR/S :

Maha Abboud-Blanchard, Catherine Fauvé, Dominique Laval, Aline Robert, Sophie Rousse, Mireille Vuong.

RESUME :

Ce fascicule est le premier d'une série produite par le groupe « Ressources – Formations » de l'IREM de Paris 7. Il a pour thème l'enseignement des probabilités et des statistiques de la 3ème à la Terminale.
Un formateur peut y puiser des idées ou des éléments « prêts à l'emploi » pour construire ses scénarios de formation.
Le fascicule peut aussi être utilisé par un enseignant pour s'auto former, ou comme source d'activités analysées et documentées pour la classe.
Il peut également trouver sa place dans le cadre d'une réflexion sur la continuité de l'enseignement des probabilités et des statistiques du collège au lycée.

MOTS CLES :

Ressources ; formation des enseignants de mathématiques du secondaire ; scénarios de formation ; probabilités ; statistiques ; simulations.

IREM de Paris 7 – Université Paris Diderot
Directeur de publication Fabrice Vandebrouck – Reprographie Nadine Locufier
www.iremp7.math.jussieu.fr
Dépôt légal : décembre 2012 – ISBN : 987-2-86612-341-3

90

Ressources pour la formation

Fascicule 1

Probabilités, statistiques, simulations :
Quels scénarios pour la formation des enseignants du secondaire ?

Document produit par le groupe IREM « Ressources-Formations » :

Maha Abboud-Blanchard
Isabelle Bois
Catherine Fauvé
Nathalie Latron
Pierre Latron
Dominique Laval
Aline Robert
Sophie Rousse
Mireille Vuong

Sommaire

Introduction générale[1]

Ce fascicule est le premier d'une série destinée principalement aux formateurs de professeurs de mathématiques du secondaire. Il est produit par le groupe « Ressources-Formations » de l'IREM de Paris7, groupe créé en septembre 2010 à l'initiative d'Aline Robert. L'idée fondatrice du groupe est celle de l'exploitation des mémoires professionnels élaborés depuis 2002 dans le cadre du master de didactique de mathématiques de l'université Paris-Diderot, spécialité : formation des formateurs. Les membres du groupe sont principalement des anciens participants de ce master.
Un des éléments de la formation dans le cadre de ce master est l'élaboration d'un projet de stage de formation à destination des enseignants. Ce sont ces projets (que nous qualifions de mémoires professionnels) que le groupe se propose d'analyser pour en extraire (si possible) des ressources exploitables en formation initiale ou continue. Plusieurs modalités ont été choisies : reprendre la trame du projet initial, en choisir quelques éléments, mixer des éléments provenant de plusieurs mémoires... D'une façon générale les mémoires ont plutôt servi de « point de départ » pour concevoir ces ressources. Le groupe a analysé, actualisé, enrichi les mémoires et parfois même créé des activités supplémentaires. L'objectif de ces publications est de fournir à un formateur des ressources qu'il pourra utiliser pour *construire* son *propre scénario de formation.*
Ce travail de production engage aussi le groupe dans une réflexion plus «théorique» sur les ressources pour la formation : leurs finalités, leurs caractéristiques, leurs appropriations par des formateurs qui n'ont pas participé à leur conception...

Considérations théoriques

Les mémoires produits dans le cadre du master professionnel sont bien évidemment façonnés par les choix et les orientations des enseignements de ce master. Plusieurs publications ont déjà décrit les objectifs et le travail fait avec les participants de ce master notamment (Robert et al. 2012)[2]. Nous en inspirons et/ou extrayons des passages ci-après afin de mettre en lumière certaines considérations pouvant être utiles pour guider la lecture de ce document.

Objectifs et modalités du master professionnel

La formation de formateurs en master est centrée sur les rapports entre les analyses de pratiques des enseignants de mathématiques en classe et les activités que cela peut provoquer chez les élèves. Cela correspond à plusieurs hypothèses, sur lesquelles la formation s'appuie : le fait que les activités des élèves sont en lien direct avec leurs apprentissages (référés à des niveaux de conceptualisation), qu'elles sont en grande partie provoquées par l'enseignant, et qu'une entrée dans la formation professionnelle par le travail de l'enseignant, en classe et pour la classe, jugée intéressante, nécessite des formateurs qu'ils puissent analyser ce travail en lien avec ce que font les élèves. Il s'agit donc de faire acquérir des outils pour analyser à la fois les mathématiques enseignées et les activités (au moins potentielles) des élèves en relation avec les pratiques qui les provoquent, et aussi de donner des éléments sur le développement des pratiques, présupposé dans les scénarios de formation.
La formation en master est ainsi organisée autour de trois volets qui se développent tout au long de l'année :
⇨ des analyses de pratiques en classe, imbriquant des analyses de contenus (tâches) proposés aux élèves et de déroulements organisés par l'enseignant, à partir de vidéos, y compris issues des classes des participants, et débouchant sur des analyses de formation des pratiques ;
⇨ des compléments bibliographiques qui prennent la forme de résumés d'articles de la littérature professionnelle courante[3] ;

[1] Partie rédigée par **M. Abboud-Blanchard et A. Robert**
[2] Voir aussi plusieurs publications IREM, notamment les cahiers n° 3, 5 et 13.
[3] Notamment empruntées aux revues Petit x, Repères IREM, bulletins de l'APMEP ou brochures IREM.

⇨ un travail d'élaboration autonome, en petit groupes d'un dispositif de formation virtuel (mémoire professionnel sous forme de scénario de formation).

Dans ce document, les analyses des tâches utilisent donc les outils théoriques et méthodologiques mis en fonctionnement dans le master ainsi que le vocabulaire commun qui se construit tout au long de l'année.

Précisions sur les outils d'analyse

Il s'agit principalement de donner à un formateur les moyens pour analyser a priori les tâches proposées aux élèves, relativement à un niveau scolaire donné, un programme donné et une classe donnée. Ces analyses ont pour ambition de renseigner sur les activités mathématiques possibles des élèves, c'est-à-dire les mises en fonctionnement des connaissances attendues, inférées à partir de l'analyse des tâches. Elles aident aussi à apprécier, par la mise en regard des analyses a priori et des déroulements, ce qui se passe en classe, compte tenu du travail des élèves (conditions de production : nature, forme, aides, production finale visée...) et des interventions de l'enseignant. Cette mise en relation permet de saisir des adaptations imprévues et des modifications dues au déroulement, donnant accès aux activités a minima et a maxima des élèves.

Voici ci-après certains éléments qui guident l'analyse des tâches et auxquels nous faisons référence dans la suite de ce document.

⇨ Les énoncés proposés aux élèves portent sur des connaissances qui peuvent être anciennes, ou en cours d'acquisition : c'est une première distinction à prendre en compte vis-à-vis des activités et des apprentissages qu'ils peuvent induire. De plus, ces connaissances peuvent être ou non indiquées, on parle alors de fonctionnement de type mobilisable (si elles sont indiquées) ou disponible (sinon). Le travail des élèves n'est pas analogue selon qu'ils doivent rechercher les connaissances à utiliser, c'est-à-dire mettre en relation une propriété à démontrer et différents outils (travail du pourquoi ou du quoi) ou mettre en fonctionnement, même en l'adaptant, une propriété (travail du comment).

⇨ La question posée peut être fermée (montrer que...) ou nécessiter des conjectures, plus ou moins larges : Entre « calculer... » et « que peut-on dire de ... ? » il peut y avoir encore beaucoup de différence de travail. Une question fermée sans aucune indication peut cependant ne pas être abordée immédiatement.

⇨ Lorsque le travail de l'élève consiste à appliquer une propriété sans calcul supplémentaire ni reconnaissance (remplacer les données générales par des données particulières) on parle d'application simple et isolée ou immédiate. Dans le cas contraire, sept types d'adaptations se dégagent, qui peuvent intervenir simultanément :

A1. Les reconnaissances (plus ou moins partielles) des connaissances à utiliser et de leurs modalités d'application ...

A2. L'introduction d'intermédiaires – notations, points, expressions, calcul, tracé...

A3. Les mélanges de plusieurs cadres ou notions..., la modélisation, les changements de points de vue, les changements ou jeux de cadres (graphique, algébrique...) ou de registres (modes d'écriture), changements non indiqués et donc à la charge des élèves.

A4. L'introduction d'étapes, l'organisation des calculs ou des raisonnements (cela va de l'utilisation répétée d'un même théorème à un raisonnement par l'absurde faisant intervenir le théorème).

A5. L'utilisation de questions précédentes dans un problème, la critique de résultats ou des méthodes mis en relief les uns avec les autres. Il s'agit d'une adaptation intervenant dans des problèmes, qui amène à des mises en relation plus ou moins indiquées, qui nécessitent souvent de ne garder qu'une partie des informations, voire de les modifier avant de les utiliser.

A6. L'existence de choix – forcés ou non. La mise en œuvre d'une méthode à plusieurs pas correspond au choix forcé (par exemple, étude de fonction).

A7. La détection par les élèves d'un manque de connaissances adaptées au problème qu'ils se posent.
⇨ Les tâches proposées aux élèves sont qualifiées de robustes lorsque des déroulements variés peuvent assurer les activités attendues des élèves. Autrement dit, la robustesse d'une tâche est estimée par la stabilité des enjeux de savoir lors de sa mise « à l'épreuve » dans des contextes différents. Dans le cas contraire, la tâche peut être désignée par sensible, i.e. dont le potentiel en terme d'activité-élève dépend du déroulement en classe, ou bien par fragile lorsqu'un seul type de déroulement semble assurer la correspondance activité-prévue / activité-effective des élèves.

D'une analyse locale à une mise en perspective globale et à la prise en compte de modalités particulières de formation

Les analyses des tâches et des énoncés sont souvent relatives à une séance. Pour pouvoir les apprécier, il est important d'étudier leur inscription dans une programmation plus globale de l'enseignement des notions en jeu. Ceci amène à se poser des questions élargies comme par exemple les autres tâches, le cours, le programme, le niveau de la classe… et cela attire donc l'attention sur les choix globaux de l'enseignant, pour la classe, et sur les alternatives dont il dispose. Il est important aussi de pouvoir disposer d'éléments sur le relief des notions à enseigner, leur fonction en mathématiques, leur présentation dans les programmes, et ce qui contribue à définir le niveau de conceptualisation visé – les objets et outils à construire, avec les cadres er registres correspondant, le champ des problèmes associé, le niveau de rigueur attendu…
L'étude de séquences que nous proposons dans les scénarios de formation part certes des mathématiques à faire fréquenter aux élèves en classe. Néanmoins, elle prend en compte les dynamiques du projet d'enseignement (scénario pour les élèves), entre les cours (exposition des connaissances) et les exercices, entre la construction du sens et le travail plus technique, par l'intermédiaire de l'ordre dans lequel sont présentées les différentes parties du travail des élèves, des durées prévues pour les différentes phases, et aussi de la quantité et de la variété des tâches.

En outre, la différence entre ce qui est prévu et ce qui se passe réellement en classe est importante, c'est pourquoi certaines des modalités des scénarios de formation proposés dans ce document prévoient une mise en place de séances de classe pour pouvoir en étudier le déroulement. Cette approche du travail de l'enseignant in situ permettrait aux participants aux formations de relever et d'élaborer des indicateurs sur ce que l'enseignant met en place pour les élèves dans la construction attendue de connaissances.
Les ressources que nous mettons à disposition des formateurs prennent en compte l'ensemble de ces analyses d'activités possibles, parfois complétées par des études d'activités effectives. Viennent s'y ajouter des études plus globales de la notion mathématique en jeu, évoquées à propos du relief, du contexte à la fois institutionnel, social et personnel (pour l'enseignant) afin de donner accès à des recompositions respectant la complexité de la situation d'enseignement et celle des pratiques à former.

Introduction du fascicule

Les probabilités ont fait leur entrée dans les programmes de collège en 2008. Les nouveaux programmes de lycée (depuis 2009) font une large part à la simulation dans l'enseignement des probabilités et des statistiques. Ces thématiques ont généralement été peu vues par les enseignants au cours de leur cursus universitaire. De plus, elles font appel à l'utilisation d'outils technologiques souvent peu exploités dans la pratique quotidienne de l'enseignant, utilisation qui en soi complexifie l'activité d'enseignement.

Un besoin de formation se fait ressentir notamment au sein de la communauté des enseignants de lycée, mais aussi chez les enseignants de 3$^{\text{ème}}$ dans une perspective de liaison collège-lycée. Ce fascicule a vocation à être une ressource pour la formation sur ces thèmes d'actualité. Un formateur peut y puiser des idées ou des éléments « prêts à l'emploi » pour construire ses scénarios de formation. Le fascicule peut aussi être utilisé par un enseignant pour s'auto former, ou comme source d'activités analysées et documentées pour la classe. Il peut également trouver sa place dans le cadre d'une réflexion sur la continuité de l'enseignement des probabilités et des statistiques du collège au lycée.

Le fascicule est composé de deux parties :

Partie 1

Cette partie propose un scénario de formation reposant sur plusieurs demi-journées. Elles sont relativement indépendantes (demi-journées modulaires) et certaines comportent intentionnellement des activités en « trop » grand nombre, permettant ainsi au formateur d'en avoir une grande variété pour composer sa formation.
Cette structure permet au formateur de combiner de manière variée et souple les demi-journées tant dans l'ordre que dans le nombre.

Pour sa part, un enseignant peut trouver, en particulier dans les annexes, des ressources pour la classe (fiche élève et fiche professeur), des apports théoriques comportant parfois des éléments précisant les notions de simulation, de modélisation, d'expérimentation...

Partie 2

Cette partie est structurée de façon différente de la précédente. Il s'agit plutôt de proposer des exercices progressifs sur la notion de probabilité en 3$^{\text{ème}}$ et en 2$^{\text{nde}}$, complétés d'analyses de la tâche de l'élève. Cette progression va d'exercices d'introduction à des exercices d'approfondissement puis de synthèse, pour terminer par des pistes vers la classe de 1$^{\text{ère}}$.
Certains de ces exercices ont été testés dans les classes, ce qui permet de mettre en évidence des difficultés que peuvent éprouver les élèves.

Elle fournit au formateur un ensemble structuré d'activités élèves qui peuvent être un support de travail à faire avec les stagiaires. Les analyses et les alternatives proposées lui permettent d'avoir des éléments d'appui pour mener d'éventuelles mises en commun.

Cet ensemble d'activités représente également une ressource pour l'enseignant sur le thème des probabilités. Les énoncés peuvent être adaptés selon les objectifs de savoirs visés. De plus, certains apports devraient lui permettre de mieux comprendre les enjeux de l'enseignement de ce thème en 3$^{\text{ème}}$ et en 2$^{\text{nde}}$.

Partie 1[4]

La simulation en probabilités et en statistiques en 3ème et au lycée[5]

[4] Partie rédigée par **D. Laval et S. Rousse**

[5] D'après un mémoire de Master Professionnel de Didactique des Mathématiques présenté en juin 2005 par : C. Petitjean, C. Rosambert, L. Tadeusz, I. Lallier-Girot

Introduction

Cette ressource propose diverses demi-journées visant à permettre à des stagiaires de prendre conscience de l'importance de l'utilisation des simulations dans les cours de statistiques et de probabilités de la 3ème à la Terminale, et de la continuité des programmes en la matière.

C'est dans ce but que les activités proposées aux stagiaires restent ancrées ou proches des programmes.

Il est intéressant aussi d'y joindre un apport théorique sur le hasard et les tables de chiffres au hasard qui fait l'objet de la demi-journée 1.

Les situations proposées sont diverses ainsi que l'activité mathématique qui en découle.
Il est possible d'aborder le thème de la simulation dans le cadre de domaines non aléatoires mais ce n'est pas le sujet de ces demi-journées.

A noter que l'on peut trouver dans les annexes de cette partie des références à l'algorithmique introduite comme un « nouvel » outil disponible pour procéder à des simulations de phénomènes aléatoires dans les différents niveaux du lycée qui complètent les tâches proposées avec l'utilisation de calculatrices et/ou du tableur. Néanmoins l'utilisation de l'algorithmique reste facultative pour les stagiaires.

Les pages qui suivent décrivent quatre demi-journées, chacune axée sur des aspects différents de la simulation, suivies de deux demi-journées de retour d'expérience pour les stagiaires.
Elles peuvent s'articuler de différentes manières, et sont suffisamment indépendantes les unes des autres pour qu'un formateur puisse y « faire son marché ».

Le reste de ce document est constitué d'annexes comportant des documents élèves, documents stagiaires, commentaires, extraits de documents institutionnels...

Objectifs généraux

Ces demi-journées de formation sont destinées aux enseignants des classes de 3$^{\text{ème}}$ et de lycée d'enseignement général (3$^{\text{ème}}$, 2$^{\text{nde}}$, 1$^{\text{ère}}$ et terminale). Le public visé doit connaître les rudiments du tableur, voire de l'algorithmique. Ce n'est pas un stage d'initiation aux TICE.

Elles portent sur l'utilisation des simulations dans les chapitres concernant les statistiques et les probabilités de ces différentes classes.

Ce qui a motivé le choix de ce thème, c'est tout d'abord le constat que, parmi les professeurs de mathématiques, un certain nombre utilise les simulations de phénomènes aléatoires en classe avec réticence.

Voici quelques raisons de ce constat :

- manque de temps et donc souvent le choix est fait de ne traiter ces notions qu'en fin d'année car elles sont jugées moins importantes que d'autres ;
- manque de goût car le contenu mathématique n'apparaît pas aussi clair que pour les autres notions, de même que l'activité mathématique de l'élève n'est pas clairement identifiée ;
- peur de ne pas maîtriser ce qu'il « convient » de faire ;
- difficultés de gestion de l'outil informatique et de la calculatrice ;
- difficultés liées à la gestion et l'organisation du groupe classe.

L'importance de la simulation de phénomènes aléatoires dans le cursus des élèves de 3$^{\text{ème}}$ et de lycée n'est plus à démontrer, alors que beaucoup d'enseignants du secondaire n'y ont pas été familiarisés au cours de leur cursus étudiant.

C'est pourquoi les objectifs de ces demi-journées sont :

- de réfléchir sur ce qu'est le hasard et sur l'obtention de chiffres au hasard ;
- de réfléchir à l'enjeu mathématique et didactique de l'utilisation des simulations dans ces notions ;
- de donner des exemples d'utilisation de simulations et aborder aussi la modélisation ;
- de mettre en évidence le lien entre les données empiriques et les donnés théoriques ;
- de faire pratiquer des simulations et leurs applications dans les différents niveaux de classes envisagés en utilisant les moyens disponibles : l'ordinateur bien sûr mais aussi les calculatrices ou encore les tables de chiffres au hasard.

Pour atteindre ces objectifs, il est envisagé de donner aux stagiaires :

- un apport théorique sur l'obtention des nombres au hasard sous la forme d'un résumé d'article autour duquel pourra s'organiser un débat ;
- un apport pratique et dynamique sous forme d'activités diverses présentées sous différentes formes de travail : individuel ou par groupe de 2 ou 4, toujours suivies d'une mutualisation permettant des échanges de points de vue entre stagiaires et avec les formateurs ; ceci afin de permettre un enrichissement réciproque (formés et formateurs) ;
- provoquer de nombreux rappels aux textes officiels afin de mettre en évidence l'utilité des simulations et la continuité des notions mises en jeu sur les quatre années concernées ;
- pour que chaque stagiaire puisse faire le lien avec le terrain, chacun est invité à tester avec ses élèves certaines des activités élaborées pendant le stage. Le retour de ces expériences

vécues s'effectue au cours des deux dernières journées pour échanger et mettre à la portée de tous différentes alternatives.

Il pourrait avoir lieu dans un établissement possédant une salle équipée de 16 ordinateurs et le nombre de stagiaires serait limité à 16.

Descriptif du stage

Les demi-journées proposées peuvent être exploitées de manière complète ou partielle lors de stages sur la simulation, les statistiques, les probabilités ainsi que les applications de l'outil informatique à l'étude de phénomènes aléatoires.

Quelle que soit la combinaison des demi-journées retenue, il est conseillé de faire le stage entre les vacances de la Toussaint et celles de printemps, sachant qu'un temps d'expérimentation en classe est préconisé avant les deux dernières demi-journées.

Demi-journée 1

1. Présentation du stage
   Les objectifs du stage.

2. Résumé d'un article
   Avec mise en pratique de méthodes de génération de nombres aléatoires (méthode BBS).

3. Expérimentation et simulation autour de lancers de dés.

Demi-journée 2

1. Simulation par les stagiaires
   A l'aide d'une table de nombres au hasard, d'une calculatrice ou d'un tableur ou d'un logiciel de programmation, simulation de la longueur d'un segment puis calcul de la valeur exacte.
   Recueil des données des stagiaires sur ordinateur portable.
   Utilisation du vidéo projecteur pour mettre en évidence la fluctuation d'échantillonnage.

2. Production d'une séance
   A partir d'un thème qui leur est fourni, les stagiaires écrivent une séance où les élèves vont simuler. A la suite de ce travail, réflexion sur « comment élaborer avec les élèves une phrase bilan à noter dans le cahier de cours ».

Demi-journée 3

1. Choix d'exercices
   A partir de thèmes d'exercices qui leur sont fournis, les stagiaires choisissent un exercice pour un devoir. Visionnement d'une séance de TP filmée.

3. Exercice de première
   Exercice sur un jeu avec mise, à simuler. Utilité de l'exercice.

Demi-journée 4

1. Etude des intervalles de confiance à partir des documents officiels.

2. TP sur la simulation et la prise de décision.

3. Elaboration d'un devoir maison ou d'un devoir sur table

A partir de thèmes proposés, les stagiaires doivent élaborer un devoir avec son corrigé.

4. Présentation du questionnaire

Les stagiaires doivent tester une des séquences produites lors du stage dans leur classe et prévoir un compte rendu. Dans la semaine qui précède les deux dernières demi-journées, ils sont censés prévenir les formateurs du sujet qu'ils aborderont. Le compte rendu à ramener est un questionnaire à remplir.

Demi-journées 5 et 6

1. Retour des expérimentations

Les sujets abordés sont regroupés par niveau scolaire ou par thème, chacun illustré par une séquence du type : présentation/débat/synthèse.

2. Bilan du stage

Distribution d'une bibliographie

Evaluation du stage par les stagiaires, prolongements possibles, souhaités.

Descriptif détaillé des demi-journées

Demi-journée 1

1. Présentation du stage

Déroulement :

- Présentation des objectifs du stage
- Lecture des points des programmes concernés par le stage. *Annexe 1*
- Discussion et échange

Objectifs :

- Prendre en compte les attentes des stagiaires.
- Présenter les points du programme qui justifient les choix.

2. Résumé d'un article

Déroulement :

- Présentation d'un résumé de l'article « Aléas du hasard informatique » de Jean-Paul Delahaye paru dans « Pour la Science » en Mars 1998.[6] *Annexe 2*
- Activité sur une méthode de génération d'une suite de nombres au hasard. *Annexe 3*

Objectifs :

- Rentrer dans le sujet de la simulation en appréhendant ce qu'est un hasard calculé.
- Motiver les collègues sur la recherche de nombres aléatoires.
- Donner des pistes pour répondre aux questions des élèves sur le hasard que l'on simule.
- Comprendre comment est calculé le hasard et quel type de hasard on utilise.

3. Expérimentation et simulation

Déroulement :

- Tour de table sur les notions d'expérimentation et de simulation
- Travail sur les activités élèves : lancer d'un dé par expérimentation, par simulation *Annexes 4*. programmation sur logiciel algorithmique

Réflexion individuelle puis collective sur trois questions :
« Quel intérêt l'expérimentation peut-elle présenter ? Quels inconvénients y voyez-vous ? »
« Comment élaborer avec la classe, à la suite de ce TP, une phrase à noter dans le cours sur la fluctuation d'échantillonnage ? »
« Quelles sont les conditions pour que l'activité des élèves lors de l'utilisation de la calculatrice ou de l'ordinateur soit génératrice d'apprentissages (en mathématiques, sur l'instrument) ? Plus particulièrement, comment mettre les élèves en activité sur la tâche de production d'une formule qui simule l'aléatoire ? »

Objectifs :

- Réfléchir sur les avantages et les inconvénients de l'expérimentation élève.
- Montrer plusieurs façons de simuler, peser les avantages et les inconvénients des différents instruments (tableur, calculatrice par gestion de listes, programmation sur calculatrice ou ordinateur).
- Mettre en évidence la fluctuation d'échantillonnage.
- Mettre en évidence la stabilisation (loi des grands nombres).
- Voir un exemple d'approche fréquentiste des probabilités.

---

[6] http://www2.lifl.fr/~delahaye/HECI/AleasDuHasasrdInfo.pdf

- Aborder la gestion d'une classe lors d'une expérimentation ou d'une simulation.
- Aborder les articulations de la genèse instrumentale et des apprentissages mathématiques chez les élèves dans une situation de simulation.

Demi-journée 2

Le formateur pourra choisir deux des trois thèmes proposés.

1. Simulation par les stagiaires

Activité : « On prend au hasard deux points A et B d'un segment donné de longueur 1unité. »
On cherche à déterminer la probabilité que la longueur du segment [AB] soit plus grande que ½.
Pensez-vous pouvoir proposer une valeur de façon intuitive ?
Comment pourrait-on utiliser une table de chiffres au hasard pour conjecturer cette probabilité ?»
Annexes 5 et 6

Déroulement :
- Présentation orale du problème
- Discussion sur la façon dont on pourrait trouver un réel compris entre 0 et 1 avec une table de chiffres au hasard, question de la précision
- Proposition et collecte de protocoles pour utiliser une table de chiffres au hasard avec les élèves
- A l'aide d'une table de chiffres au hasard, d'une calculatrice, d'un tableur ou d'un logiciel de programmation, simulation de la longueur de 25 segments (*fiche stagiaire annexe 6*)
- Récupération des données par groupe de deux, présentation des résultats au vidéo projecteur :
Comparaison des résultats des groupes
Regroupement des données et comparaison avec des séries simulées et variables de taille 25, 50 puis 400
- En reprenant les points des programmes, discussion sur ce que peut permettre une telle activité et la présentation des résultats
- Calcul de la valeur exacte de la probabilité, comparaison avec la tendance des séries de taille 400

Objectifs :
- Montrer plusieurs façons de simuler, peser les avantages et les inconvénients des différents instruments (table de chiffres au hasard, tableur, programmation sur calculatrice ou ordinateur).
- Mettre en évidence la fluctuation d'échantillonnage.
- Mettre en évidence la stabilisation (loi des grands nombres).
- Voir un exemple d'approche fréquentiste des probabilités.
- Aborder la gestion d'une classe lors d'une simulation.

2. Production d'une séance

Déroulement :
- Présentation d'une feuille comportant des thèmes de simulation. *Annexe 7.1*
(L'annexe 7.2 présente plus amplement le premier thème de l'annexe 7.1.)
- Travail en groupes pour produire sur l'un des thèmes un TP (avec déroulement et gestion de la classe) où les élèves vont devoir simuler et calculer des fréquences. Les stagiaires peuvent choisir librement l'outil de simulation (table de chiffres au hasard, tableur, programmation sur calculatrice ou ordinateur) et changer la taille de l'échantillon en fonction de l'outil choisi.

Objectif :

- Permettre aux stagiaires de préparer une séance sur une tâche mathématique qui ne prend son sens que lorsqu'elle est illustrée par des exemples travaillés par les élèves.

Cette séance peut faire l'objet de l'expérimentation par le stagiaire dans le cadre de la préparation de la dernière journée.

3. Choix d'exercices en vue d'une élaboration d'un devoir (maison ou sur table)

Déroulement :

- Distribution d'une feuille d'exercices sur la simulation et les statistiques de seconde. *Annexe 8.1.*

(L'annexe 8.2 présente plus amplement les exercices 1, 3 et 5 de l'annexe 8.1.)

- Travail en groupe pour choisir un ou deux exercices pouvant figurer dans un devoir. Les stagiaires peuvent les adapter comme ils l'entendent.
- Analyse du ou des exercices choisis : points du programme testés, analyse de l'activité possible des élèves et des difficultés, temps nécessaire pour traiter l'exercice, barème par questions.
- Synthèse

Objectifs :

- Montrer aux stagiaires qu'on peut avoir une véritable activité mathématique sur la simulation.
- Les amener à fixer, à préciser des objectifs à évaluer : changer les idées courantes : « Il n'y a rien à évaluer sur cette partie du programme », « Il est trop difficile d'évaluer une simulation ».

Demi-journée 3

Quelques minutes sont consacrées à un rapide tour de table pour faire ensemble le bilan de la première journée en notant au tableau les interventions de chacun.

1. Etude d'un exercice de 1ère

Cet exercice propose d'étudier un exemple de série statistique obtenue à l'aide d'une simulation (avec un tableur, une calculatrice ou un logiciel de programmation) et d'en obtenir la moyenne et l'écart type « empiriques », puis de procéder à une modélisation afin d'obtenir l'espérance et l'écart type « théoriques ».

Déroulement :

- Distribution de l'exercice de 1ère. *Annexe 9*
- Recherche de l'exercice par les stagiaires qui pourront être seuls ou par deux
- Lecture de l'extrait des programmes de statistiques et probabilités de 1ère et débat dans le but de relever dans cet extrait l'utilité de cet exercice, sa place dans la progression, l'apport de l'utilisation des simulations.

Objectifs :

- Illustrer avec cet exemple d'exercice l'intitulé du programme concernant l'introduction fréquentielle aux probabilités.
- Faire le lien entre les caractéristiques « empiriques » et les caractéristiques « théoriques ».
- Montrer l'importance de l'utilisation des simulations et la continuité avec le programme de 2nde.
- Réinvestir ce qui a été vu lors de la première journée au niveau des simulations avec prolongement vers le programme de 1ère.

2. Etude de l'intervalle de fluctuation au cours des trois années de lycée, autour de documents institutionnels

Déroulement :
- Lecture de documents fournis. *Annexe 10*
- Etude individuelle ou par groupe de deux
- Synthèse

Objectifs :
- Mettre en évidence des différentes définitions et propriétés à aborder.
- Prendre conscience de la continuité des programmes des différentes classes.

3. Etude d'un exemple de prise de décision

Déroulement :
- Distribution des deux exercices, l'un à destination d'une 1ère S et l'autre à destination d'une 1ère S, ES ou L. *Annexes11.1 et 11.2*
- Recherche d'un des exercices par les stagiaires qui pourront être seuls ou par deux
- Echange dans lequel sont abordées les questions de l'utilité de l'exercice, sa place dans la progression, l'apport de l'utilisation des simulations

Objectifs :
- Illustrer avec ces exemples l'intitulé du programme concernant la prise de décision.
- Montrer l'importance de l'utilisation des simulations et la continuité avec le programme de 2nde.
- Réinvestir ce qui a été vu lors de la première journée au niveau des simulations avec un prolongement vers le programme de 1ère.

<u>Demi-journée 4</u>

4. Vidéo d'un TP

Nous proposons que le formateur projette une vidéo sur une séance de TP sur la simulation de phénomènes aléatoires.

Déroulement :
- Présentation du contexte de la vidéo
- Distribution du document des élèves
- Analyse du document élève : activité possible des élèves, connaissances mises en jeu, difficultés attendues…
- Présentation de quelques passages de la vidéo (environ 10') illustrant des moments clés
- Discussion et échange d'expériences

Objectifs :
- Montrer que cette activité peut être présentée aux élèves en un temps raisonnable.
- Montrer comment et pourquoi la séance fonctionne ou pas.
- Illustrer certains apprentissages des élèves et ce qui pourrait être évalué.

5. Création d'un DM ou d'un TP

Déroulement :
- Distribution de la fiche comportant les deux thèmes proposés. *Annexe 12*

- Elaboration du document élèves. Les stagiaires peuvent se mettre en groupe de deux ou trois ayant choisi le même thème
Comme ils n'enseignent pas nécessairement dans le même niveau de classe, les stagiaires d'un même groupe peuvent ne pas créer le même document.

Objectif :
Créer une séance de TP ou un devoir maison comprenant une simulation suivie d'un calcul de probabilités à l'aide d'arbres.
Cette séance peut faire l'objet de l'expérimentation par le stagiaire dans le cadre de la préparation de la dernière journée.

6. Questionnaire pour le retour des expérimentations

Déroulement :
Distribution et présentation de deux questionnaires : l'un sur une séance en classe à partir des productions de l'après-midi du jour 1 (point 4) ou du jour 2 (point 3), l'autre sur le DM ou DST élaboré dans l'après-midi du jour 1 (point 5) ou du jour 2 (point 3). *Annexes 13 et 14*

Objectif :
Ce questionnaire est conçu comme aide pour les stagiaires pour préparer le retour des expérimentations le jour 3. Ils ont pour consigne de tester une séance ou un devoir, au choix.

Demi-journées 5 et 6

Quelques minutes sont consacrées à un rapide tour de table pour faire ensemble le bilan des premières demi-journées et rappeler l'objet de ces deux dernières demi-journées.

Ces demi-journées sont consacrées au retour des expériences que les stagiaires auront effectuées dans leurs classes pour tester les séances et les devoirs qu'ils auront élaborés pendant le stage.
Chaque stagiaire revient avec :
- le sujet de son devoir, le corrigé, éventuellement quelques copies et un questionnaire (pour rendre compte des objectifs du devoir, des difficultés rencontrées dans son élaboration, des difficultés des élèves)
- un compte rendu détaillé élaboré à l'aide du questionnaire distribué à cet effet.

Déroulement :
Le contenu dépendra de ce que les stagiaires auront choisi de tester puisque tous auront élaboré soit une séance de cours, soit un devoir surveillé, soit un devoir maison.
Il sera cependant demandé aux stagiaires d'envoyer par mèl leur choix et leur questionnaire avant ces deux demi-journées afin de pouvoir préparer un déroulement. En effet, les comptes rendus peuvent être regroupés par niveau de classe (troisième, seconde, première et terminale), ou par thème.
Dans ces 4 groupes, les comptes rendus se feront sur le schéma suivant :
- une présentation
- suivie d'un débat
- synthèse

La fin de la dernière demi-journée consiste en :
- la distribution et présentation d'une bibliographie
- la synthèse de cette journée et bilan du stage

Objectifs :

Le travail des stagiaires avec leurs classes leur permet d'expérimenter la simulation en tant que vecteur d'une véritable activité mathématique de la part des élèves. La seule vidéo montrée aux stagiaires ne permet pas de mettre en évidence la diversité des situations et des possibilités pour traiter cette notion. L'échange des expérimentations et le débat qui s'en suivra, permettra en envisageant diverses alternatives de compléter la formation et d'aborder les problèmes de gestion des classes et de gestion du temps qu'elle pose.

Partie 2[7]

À propos des probabilités en troisième-seconde[8]

[7] Partie rédigée par **C. Fauvé et M. Vuong**
[8] D'après un mémoire de Master Professionnel de Didactique des Mathématiques présentée en juin 2010 par : Annalisa Bismut, ·Françoise Heulot, ·Rochdi Seddiki

Introduction

Cette ressource propose plusieurs exercices visant à permettre à des enseignants (qu'ils soient en stage ou pas) d'introduire ou/et d'approfondir des notions à connaître en 3ème et en 2nde, à propos des probabilités.
Elle est composée de trois parties. La première propose des exercices d'introduction des notions, la deuxième des exercices d'approfondissement et la troisième des exercices de synthèse.

La conception et l'analyse a priori de ces exercices se basent sur les programmes et les documents d'accompagnement des classes concernées, et aussi sur un tableau synthétique proposé par Y. Ducel[9] (2011) qui est reproduit en *annexe 15*.

En formation, les exercices présentés dans cette ressource peuvent être exploités selon différentes modalités :

- Les chercher.
- Rechercher dans les programmes à quelles notions ils font référence.
- Les classer dans l'ordre d'utilisation avec des élèves.
- Rechercher les difficultés que peuvent rencontrer les élèves.
- Rechercher des adaptations et réfléchir aux conséquences qu'elles entrainent.

Le formateur pourra mettre en commun le travail des stagiaires puis proposer une analyse didactique de certains de ces exercices.
Les stagiaires pourront également tester ces exercices dans leurs classes et en faire remonter les difficultés rencontrées par leurs élèves au cours d'une demi journée de stage, séparée des premières.

[9] IREM, Université de Franche-Comté

Bref descriptif des exercices

Pour la classe de $3^{\text{ème}}$

Deux exercices différents sont proposés, pour introduire la notion de probabilité par l'intermédiaire de la fréquence d'apparition des issues. L'un donne une approche fréquentiste de la probabilité, l'autre épistémique. (ref : Annexe 1 du projet d'accompagnement du programme de $3^{\text{ème}}$ du 17/03/2008)
Il est indiqué dans les programmes de $3^{\text{ème}}$ « la notion de probabilité est abordée à partir d'expérimentations qui permettent d'observer les fréquences des issues dans des situations familières... ».
Dans ces deux exercices, le mot « probabilité » ne sera pas encore introduit, on pourra parler « du nombre de chances ». Certaines modifications des données de ces exercices seront proposées afin de faire réfléchir les élèves aux conséquences qu'elles entrainent. Cela permet aussi à l'enseignant de mieux adapter le texte au niveau de la classe, ou de diversifier les questions pour des élèves de niveaux différents dans une même classe.
Un exercice sera ensuite proposé pour introduire le mot probabilité. Cet exercice qui ne nécessite pas un calcul de probabilité sensibilise les élèves aux expériences aléatoires à deux épreuves : cible puis urne. Il peut être réalisé concrètement dans la classe, et il est possible d'en modifier les paramètres en fonction des réactions des élèves.
Un dernier exercice est ensuite proposé. Il permet cette fois de faire calculer par les élèves une probabilité (exercice sur les billes). Ils pourront utiliser la formulation :
nombre de cas favorables/ nombre de cas possibles

Ces exercices ont été choisis car ils sont facilement réalisables concrètement dans une classe, ils sont progressifs, et chacun d'eux peut être modifié afin de s'adapter aux différents niveaux des élèves de troisième. Quelques pistes pour prolonger ces exercices de troisième et s'approcher du programme de seconde sont également proposées.

Pour la classe de 2^{nde}

Cinq exercices commentés sont proposés.
Le premier est un exercice d'introduction des probabilités à partir d'un travail de simulation.
Les autres exercices permettent aux élèves de réfléchir sur les notions d'événements, d'intersection et de réunion.
Il semble essentiel que les élèves pratiquent des outils variés leur permettant de représenter les expériences aléatoires : arbre, diagramme ou tableau.
En seconde, les élèves ne travaillent que sur un univers pour lequel on est en situation d'équiprobabilité, Ils ne doivent pas travailler avec les arbres pondérés.

Les trois parties suivantes visent successivement trois phases dans un scénario d'enseignement : introduction, approfondissement, synthèse. Dans chacune des parties, les exercices proposés en $3^{\text{ème}}$ précèderont ceux proposés en 2^{nde}.

Partie A

Exercices d'introduction : En 3ème

Dans ces deux premiers exercices, le travail se fait à partir des fréquences, le mot probabilité n'est pas encore introduit.

1er exercice : Boules blanches et urne

Une urne contient 15 boules. On sait qu'il y a des boules noires, des boules blanches et des boules rouges.
On tire au hasard une boule de l'urne, on regarde sa couleur, on remet la boule dans l'urne, puis on recommence.
On nous dit qu'après avoir répété cette expérience 1000 fois on obtient 403 fois une boule blanche.
a) Donner la fréquence d'apparition d'une boule blanche.
b) Pensez-vous que le nombre de chances d'avoir une boule blanche au tirage est de 4/10 ?
c) À l'aide de ces informations peut-on estimer que le nombre de boules blanches est 5 ? 6 ? 7 ? ou 8 ?
d) Peut-on déterminer le nombre de boules noires ?

Eléments importants pour la réussite des élèves :

a) Bien utiliser le mot fréquence et non probabilité, car il s'agit de sensibiliser les élèves à cette notion, le nombre de chances de...la fréquence exacte peut être calculée puisque l'expérience a été faite.
b) Le nombre de chances d'avoir une boule blanche correspond à une approximation de la proportion de boules blanches obtenues parmi les 1000 tirages. Il est important dans la question de ne pas parler de probabilité.
c) Sur les 15 boules peut-on estimer que le nombre de boules blanches est 5 ? 6 ?, 7 ?, ou 8 ? L'élève peut calculer le rapport 403/1000 et le comparer à $5/15 \approx 0{,}33$ ou $6/15 = 0{,}4$ ou $7/15 \approx 0{,}46$ ou $8/15 \approx 0{,}53$.

Aucun de ces résultats ne donnera 403/1000, mais on prendra celui qui est le plus proche de la fréquence. Une discussion peut avoir lieu entre les élèves, faut-il avoir l'égalité ? Les autres rapports sont plus éloignés de la fréquence.
Pour le nombre de boules noires, *a priori* les élèves devraient répondre que l'estimation est impossible, sauf les étourdis qui n'auraient pas vu qu'il y a trois couleurs.

Difficultés qui peuvent être rencontrées par les élèves :
Certains élèves peuvent être gênés du fait qu'ils sont habitués à avoir en mathématique des réponses exactes : on est sûr que le triangle est rectangle car... alors que là il s'agit d'estimation.
Dans le même ordre d'idées, si l'urne contient 15 boules dont 5 blanches, si une boule blanche est sortie 6 fois, on ne peut pas être sûr que la 7ème fois, une boule noire sortira (cas d'un tirage avec remise).
Cet exercice fait partie de ceux qui peuvent être donnés à toutes les classes de troisième, quel que soit le niveau ou le public, il fait partie des exercices comportant des tâches robustes.

Quelques alternatives ou modifications possibles de cet exercice :
Il est possible de demander d'abord aux élèves de définir les issues de cette expérience.
La valeur du nombre d'obtention d'une boule blanche est une variable didactique, cette valeur peut être modifiée :
Si la valeur donnée dans le texte est 400 au lieu de 403, l'élève pourra trouver l'égalité entre 400/1000 et 6/15, mais il pourra penser qu'il est impossible d'avoir avec 6 boules blanches sur 15, une expérience qui donne un résultat autre que 400 sur 1000 tirages.

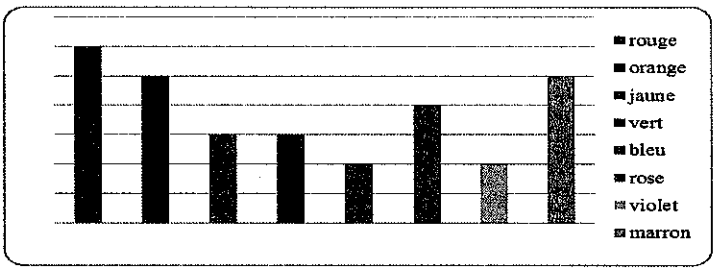
Si la valeur donnée est 430 sur 1000, la fréquence sera juste entre 0.4 et 0.46 et il ne pourra pas choisir entre 6 et 7 boules blanches.

Une expérience un peu semblable peut être réalisée concrètement dans des classes plus « difficiles », afin de motiver les élèves. Dans cette expérience, « un peu à l'envers », on peut fixer le nombre de boules blanches à une proportion de 0.4, faire le tirage 100 fois, avec remise, et compter le nombre de boules blanches tirées, 10 élèves feraient concrètement 10 tirages et l'on regrouperait les résultats.
On peut aussi demander à un groupe d'élèves de préparer une expérience analogue à celle de ce problème, de noter dans leur expérience le nombre de boules de chaque couleur, mises dans l'urne, de faire chez eux l'expérience de tirages, (un nombre de tirages avec remise assez grand) et de poser ces mêmes questions à leurs camarades, de comparer ensuite les réponses des camarades aux nombres notés. On peut alors introduire le fait que 100 tirages ce n'est pas suffisant, 1000 tirages c'est déjà mieux ...

Pourquoi choisir cet exercice ?
Il est simple à réaliser concrètement, il introduit la notion de fréquence et on aboutit au nombre de chances qui prépare la notion de probabilité.

2ème exercice : Les bonbons (extrait du document d'accompagnement « probabilités au collège » 2008)

La mère de Robert lui permet de prendre un bonbon dans un sachet. Robert ne peut pas voir les bonbons. Le nombre de bonbons de chaque couleur qu'il y a dans le sachet est illustré par le graphique suivant (une graduation correspond à un bonbon)[10] :



Quel est en pourcentage le nombre de chances que Robert prenne un bonbon rouge ?
A 10%
B 20%
C 25%
D 50%

Commentaires :
Ce tableau permet aux élèves de revoir les histogrammes simples. Les « bons » élèves trouveront rapidement la réponse, les élèves en difficulté pourront au moins interpréter ce tableau.
(Solution : 20%)

Difficultés qui peuvent être rencontrées par les élèves :
L'élève doit savoir lire le tableau, il ne connaît pas le nombre total de bonbons, il doit le calculer (Réponse : 30). Il doit ensuite calculer des pourcentages, et traduire que 6 sur 30 correspond à 20%. Cette version du texte nécessite pour les élèves un raisonnement intermédiaire.

Alternatives :
Dans une classe difficile ou de niveau faible, il est possible de demander d'abord le nombre de bonbons de chaque couleur, ainsi que le tableau des fréquences (en pourcentages) de chaque

[10]Les couleurs sont classées dans l'ordre indiqué par la légende

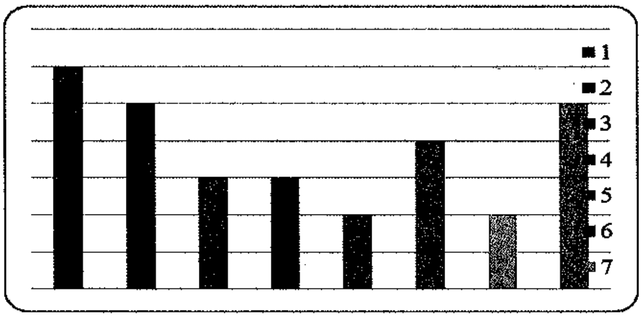
couleur ce qui permet d'obtenir des tâches simples et isolées et de revoir les notions supposées disponibles.

Le premier exercice (s'il a été fait !) aura fait comprendre aux élèves que le nombre de chances correspond à la fréquence.
Les tâches demandées sont alors :

- lecture graphique
- calcul d'une fréquence
- lien entre fréquence et nombre de chances

Prolongement de cet exercice :
On peut alors, à partir de cet exercice, définir une expérience aléatoire, « on tire un bonbon, on s'intéresse à sa couleur », chaque bonbon tiré serait un évènement élémentaire, et le nombre de chances de tirer un bonbon plutôt qu'un autre est le même, par contre le nombre de chances de tirer une couleur plutôt qu'une autre n'est pas le même. On peut dire ce qu'est un évènement élémentaire et former des évènements, et introduire les évènements incompatibles : « le bonbon est rouge » et « le bonbon est vert » par exemple, on peut introduire l'événement complémentaire : « le bonbon est vert » ou « le bonbon n'est pas vert. »
On peut introduire l'union et l'intersection d'évènement, mais cela correspond davantage au programme de seconde.
Une version « sensible » de cet exercice (proposée dans des classes de bon niveau) serait avec les mêmes données de départ de comparer le nombre de chances d'avoir « un bonbon vert ou rouge » avec la somme du nombre de chances d'avoir « un bonbon rouge » et du nombre de chances d'avoir « un bonbon vert. »
Il semble important alors de proposer un exercice analogue pour éviter que les élèves ne pensent que la probabilité de l'union est toujours la somme des probabilités, exercice dans lequel les évènements ne seraient pas incompatibles :

Par exemple : On considère des bonbons portant des numéros de 1 à 8, conformément au tableau suivant :



On peut alors considérer les évènements : le bonbon a un numéro inférieur à 4 et l'évènement le bonbon a un numéro supérieur à 2.

Pourquoi le choix de cet exercice ?
Avec toutes les alternatives proposées ci-dessus, cet exercice peut être adapté à de nombreuses classes et à l'intérieur d'une même classe, il est possible d'adapter le texte des exercices en fonction des objectifs de la séance et/ou du niveau des élèves. Cet exercice permet d'introduire de nombreuses notions du programme, sur un exemple simple et concret, facilitant ainsi la compréhension des élèves sur ces notions.
Le premier exercice d'introduction proposé, correspond à une approche fréquentiste de la probabilité, alors que pour le deuxième, il s'agit du « nombre de cas favorables sur nombre de cas possibles ».
A noter aussi que le vocabulaire peut être une difficulté pour les élèves : lorsqu'il est dit « une chance sur 6 », la probabilité est 1/6, le nombre de chances est en fait un quotient.

Exercices d'introduction : En 2$^{\text{nde}}$

Le but du premier exercice est de mettre en évidence la loi des grands nombres. On commence par donner un algorithme de simulation[11] qui permet d'expliquer aux élèves comment on définit et fait apparaître un nombre aléatoire sur la calculatrice et comment à partir de celui-ci, on peut simuler une expérience donnant une loi équirépartie (lancer de pièce - lancer de dé etc.).

Cet exercice peut être adapté de différentes façons :

Expérimentation

a- Les élèves lancent deux dés et s'intéressent à la somme S des deux faces.
Ils répètent cette expérience 50 fois et calculent la fréquence obtenue de chaque somme S dans cet échantillon de taille 50.

b- Les élèves forment des groupes de 2 et rassemblent leurs deux échantillons pour former un échantillon de 100.

c- Les élèves forment des groupes de 10 et rassemblent leurs deux échantillons pour former un échantillon de 1000.

Cette expérimentation permet à tous les élèves en difficulté ou non de se lancer dans une activité simple qui ne nécessite pas de leur part d'adaptation.

Les différentes tâches simples et isolées qu'ils auront à effectuer sont :

- Lancer deux dés
- Calculer la somme obtenue S
- Lister les différentes sommes S possibles
- Proposer un système de récolte des données
- Effectuer ceci 50 fois
- Calculer la fréquence obtenue pour chaque valeur de S

Simulation : sur tableur

Dans cette activité, les élèves doivent maitriser le langage du tableur qu'ils ont devant eux. Les tâches peuvent se révéler sensibles voire fragiles selon la familiarisation des élèves à l'outil tableur et à l'outil mathématique.
Le professeur peut proposer une feuille de calcul préparée comme celle-ci :

1er dé	2ème dé	S	
=ENT(ALEA()*6)+1			
ENT(nombre)	1		
	6		
5	4		
4	5		
2	6		

Les tâches à effectuer doivent être adaptées à l'outil TICE.
Le calcul des fréquences peut :

- soit être calculé « à la main » dans ce cas la tâche est simple
- soit être calculé sur tableur : ce qui demande plusieurs adaptations.

1er dé	2ème dé	S		S	2	3	4
4	2	6		Effectifs	=NB.SI($C$2:$C$51;2)		
4	3	7		Fréquences	NB.SI(plage; critère)		
3	4	7					
1	3	4					
6	4	10					

5	6	7	8	9	10	11	12	Total
6	6	8	7	8	6	2	0	50
0,12	0,12	0,16	0,14	0,16	0,12	0,04	0	1

[11] Voir partie 1

Simulation : avec calculatrice

On se propose d'étudier l'algorithme suivant donné en langage naturel :

- Tirer un nombre au hasard entre 1 et 6 et l'affecter à la variable R
- Tirer un nombre au hasard entre 1 et 6 et l'affecter à la variable V
- Calculer R + V et affecter cette somme à la variable S
- Afficher S

On a exécuté cet algorithme à différentes reprises et obtenu les distributions des fréquences présentées dans le tableau ci-dessous.

S	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Fréquence sur 50 expériences	0,04	0,06	0,12	0,08	0,16	0,06	0,14	0,16	0,1	0,08	0
Fréquence sur 100 expériences	0,06	0,04	0,12	0,1	0,13	0,11	0,11	0,15	0,1	0,06	0,02
Fréquence sur 1000 expériences	0,028	0,056	0,077	0,121	0,138	0,158	0,135	0,121	0,0 87	0,056	0,023
Fréquence sur 5000 expériences	0,0288	0,0554	0,0762	0,1124	0,1362	0,1652	0,14	0,1142	0,0866	0,0576	0,0274
Fréquence sur 10000 expériences	0,0299	0,0593	0,077	0,1135	0,1383	0,1624	0,136	0,1166	0,0831	0,0576	0,0263

(Dans cette présentation de l'activité, les élèves devront effectuer quelques adaptations ce qui semble être une tâche sensible, proche de la robustesse si les élèves sont familiarisés à l'algorithmique).

Quelle valeur obtient-on en additionnant tous les nombres d'une même ligne ?
Enoncer une phrase expliquant la dernière case de la première et de la dernière ligne.
Que peut-on conjecturer quant à la fréquence d'apparition de la somme 6 lorsqu'on augmente le nombre d'expériences ? *(La réponse attendue n'est pas immédiate, un dialogue devra avoir lieu entre le professeur et les élèves.)*
Qu'en est-il pour la fréquence d'apparition de chaque autre issue ? *(Cette tâche est simple lorsque les élèves ont bien compris la réponse précédente.)*

<u>Eléments importants pour la réussite des élèves :</u>

- Il est préférable que les élèves aient déjà travaillé sur tableur avant de se lancer dans cette activité.
- L'introduction de la notion de fluctuation est essentielle et doit être travaillée sur plusieurs exemples du même type.
- La notion de stabilisation autour d'une certaine valeur n'est pas évidente à percevoir pour les élèves.
- Le professeur peut aussi demander de représenter les fréquences par un histogramme et en jouant sur la touche F9, les élèves visualisent les phases de fluctuation et de stabilisation.

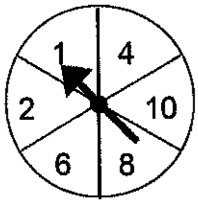
Partie B

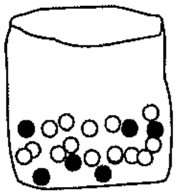
Exemples d'exercices d'approfondissement : En 3ème

Exercice avec cible et urne[12]

On commence à introduire le mot probabilité. Cet exercice sensibilise aussi les élèves aux expériences aléatoires à deux épreuves. Les tâches de cet exercice sont robustes car cet exercice fait sentir la notion de probabilité. Il est mentionné dans le programme de troisième : « […] *Les situations étudiées concernent les expériences aléatoires à une ou deux épreuves* ».

Un stand à la foire du printemps propose un jeu dans lequel il faut d'abord faire tourner une roulette. Ensuite, si la roulette s'arrête sur un nombre impair, le joueur peut tirer une bille dans un sac. La roulette est représentée ci-dessous, et le sac de billes contient 6 billes noires et 14 blanches. Des prix sont distribués aux joueurs qui tirent une bille noire. Suzy tente sa chance une fois.





On s'intéresse à la probabilité que Suzy gagne un prix.
Choisir la bonne réponse :

a) C'est impossible.
b) C'est peu probable.
c) Elle a une chance sur deux.
d) C'est très probable.
e) C'est certain.

On suppose maintenant que pour gagner un prix, il faut que la roulette s'arrête d'abord sur un nombre pair, puis que l'on tire une boule noire. On s'intéresse à la probabilité que Suzy gagne un prix.
Choisir la bonne réponse :

a) C'est impossible.
b) C'est peu probable.
c) Elle a une chance sur deux.
d) C'est certain.

<u>Notions importantes pour l'utilisation de cet exercice</u> :

Il s'agit d'une expérience aléatoire à deux épreuves. Il n'est pas question dans cet exercice de calculer les probabilités mais de voir ou de sentir ce qui est le plus probable, reconnaître s'il y a de grandes chances d'avoir un nombre impair puis s'il y a de nombreuses chances d'avoir une bille noire.

<u>Les difficultés que peuvent rencontrer les élèves :</u>

L'élève ne sait pas calculer le nombre de chances mais il doit comprendre qu'il y a un seul nombre impair sur la roue donc très peu de chances d'avoir un nombre impair 1 chance sur 6, et qu'il y a moins de billes noires que de billes blanches, donc moins de chances d'avoir une noire qu'une blanche.

L'élève peut donc éliminer les réponses « impossible », « certain », « une chance sur deux », ainsi que « c'est très probable » dans le premier cas, puisque dans les deux épreuves il a moins de chances de gagner que de perdre.

[12] Cf. les documents d'accompagnement du programme

Alternatives ou prolongements :

Dans de bonnes classes on peut montrer l'utilisation d'un arbre, mais c'est plutôt au programme des classes de lycée.

Dans la deuxième partie de l'exercice, il sera plus difficile de répondre ! L'élève pourra éliminer comme précédemment, impossible et certain, mais le nombre de chances d'avoir un résultat pair (5 chances sur 6) compensera-t-il celui d'avoir une boule noire (6 chances sur 20) ?

C'est alors en comptant tous les couples « gagnants » (par exemple (2,Noir)) par rapport au nombre de couples possibles que l'on peut expliquer aux élèves la bonne réponse .

Pourquoi choisir cet exercice ?

Cet exercice a été choisi car il peut être traité de différentes façons suivant le niveau de la classe, il peut également être réalisé concrètement facilement et il peut être enrichi en modulant le nombre de boules blanches ou noires ou en changeant les nombres sur la roue (multiples de 3 ou non ...), il introduit bien la probabilité de gagner ou perdre. Il peut être aussi utilisé en seconde car c'est une suite de deux épreuves indépendantes, et les élèves peuvent calculer les probabilités en utilisant des arbres.

Exemples d'exercices d'approfondissement : En 2nde

Premier exercice

Le but de cet exercice est d'introduire la schématisation de données sous la forme d'un tableau à double entrée (d'un diagramme), les notions d'intersection et d'union d'événements (notion du «et» et du «ou») d'une même expérience aléatoire et d'utiliser les formules du cours.

Un sondage réalisé auprès des ménages d'une certaine population montre que 48% d'entre eux possèdent une connexion Internet, 65% possèdent un lecteur DVD et 35% ont les deux équipements.

On note I l'ensemble des personnes possédant une connexion Internet et D l'ensemble des personnes possédant un lecteur DVD.

1. Compléter le tableau suivant :

Pourcentage	Dans D	En dehors de D	Total
Dans I			
En dehors de 1			
Total			

On interroge au hasard un ménage de cette population sur les équipements qu'il possède.

On note aussi I l'événement « le ménage possède une connexion Internet » et D « le ménage possède un lecteur DVD »

a. Quelle est la probabilité de I ? celle de D ?

b. Quelle est la probabilité de l'événement contraire de I ?

c. Quelle est la probabilité de l'événement: « le ménage possède les deux équipements » ?

Comment le note t-on ?

d. Définir à l'aide d'une phrase l'événement « I ou D ». Calculez sa probabilité. On peut aussi noter l'événement $I \cup D$.

(La réalisation de cette tâche (d) nécessite une adaptation, celle du passage du texte français au langage mathématique.)

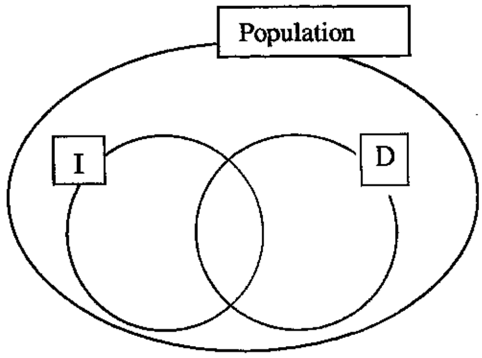
e. Quel est l'événement contraire de « I et D » ? Calculez sa probabilité avec deux méthodes.

2. Diagramme

Colorier en bleu l'événement I, en jaune l'événement D.

Quel est l'événement représenté par la partie bleu et jaune ?

Donner la probabilité de I ? de D ? de « I et D » ?
Quel est l'événement représenté par la partie coloriée ?
Déterminer la probabilité de « I ou D » ?
Quel est l'événement représenté par la partie blanche ?
Déterminer sa probabilité.



Commentaires :
Pour la question 1, un travail d'adaptation du texte doit être fait par les élèves, ce qui rend les tâches de cet exercice sensibles. La suite du travail est une succession de tâches simples et isolées.
Dans la question 2, la présentation même de la consigne rend l'exercice accessible à tous les élèves.

Il est important de travailler avec les élèves l'intersection et la réunion de deux événements d'un même univers.
Le problème du « ou » inclusif est une notion à travailler très régulièrement.
On sensibilise les élèves aux probabilités conditionnelles par ce type d'exercices.

Pois jaunes et lisses

Des étudiants en agronomie procèdent au croisement de deux variétés de pois, l'une ayant des graines jaunes et lisses, l'autre des graines vertes et ridées.
En première génération, appelée F1, les graines obtenues sont toutes semblables entre elles, elles sont jaunes et lisses.
Les étudiants croisent alors entre eux les individus de la génération F1, pour obtenir la génération F2.
L'observation de 5431 graines issues de la génération F2 montre que :

- 4 069 graines sont jaunes dont 3 057 lisses ;
- 341 graines sont vertes et ridées.

1. Reproduire et compléter le tableau suivant :

	graines jaunes	graines vertes	Total
graines lisses			
graines ridées			
Total			5 341

2. On tire au hasard une graine parmi les 5 431 de cet échantillon, tous les tirages étant équiprobables. Calculer la probabilité des événements suivants : A : « La graine est jaune » ; B : « La graine est lisse ».

3. On considère les événements suivants : A B ; A B ; $\overline{A}$ et $\overline{A}\cap\overline{B}$ où $\overline{A}$ et $\overline{B}$ désignent les événements contraires respectifs de A et B.
Définir chacun de ces événements par une phrase, puis calculer leur probabilité.
4. On prend, au hasard, une graine jaune.
Quelle est la probabilité de l'événement C « la graine est ridée » ?

Commentaires :
La compréhension de l'énoncé nécessite sans doute quelques explications.
Les questions 1 et 2 correspondent à une suite de tâches simples et isolées.
Dans la question 3, plusieurs adaptations seront demandées aux élèves :

- la traduction des symboles   et   en « et » ; « ou » »
- la définition du contraire

Le calcul des probabilités ne posant alors plus de problème.

La question 4 permet aux élèves de réfléchir sur la notion de probabilité conditionnelle (sans la nommer). C'est une question difficile pour eux.

Il est possible de demander aux élèves de reprendre les données du tableau en schématisant la situation par un arbre.
Doit-il être pondéré ? Le problème se pose, pour nombre d'élèves cela paraît assez évident. Le professeur doit-il l'interdire ou peut-il laisser les élèves libres de leur choix de modélisation.

Partie C

Exemples d'exercices de synthèse : En 3ème

L'élève cette fois utilisera le nombre de cas favorables/nombre de cas possibles.

Des sacs de billes (exercice donné au brevet des collèges)
Trois personnes, Aline, Bernard et Claude ont chacune un sac contenant des billes. Chacune tire au hasard une bille dans son sac.

Le contenu des sacs est le suivant :
Sac d'Aline: 5 billes rouges
Sac de Bernard: 10 billes rouges et 30 billes noires
Sac de Claude: 100 billes rouges et 3 billes noires

a) Laquelle de ces personnes a la probabilité la plus grande de tirer une bille rouge ?
b) On souhaite qu'Aline ait la même probabilité que Bernard de tirer une bille rouge.
Avant le tirage, combien de billes noires faut-il ajouter pour cela dans le sac d'Aline ?

Notions importantes pour l'utilisation de cet exercice :
Grâce à l'exercice précédent sur les bonbons on peut penser que l'élève aura compris que la probabilité correspond au nombre de chances et se calcule dans ces exercices par « nombre de cas favorables/nombre de cas possibles ». La formule peut être donnée ou rappelée. Il y a équiprobabilité sur le tirage d'une bille, mais pas sur sa couleur, suivant l'univers choisi (ensemble des billes ou couleurs rouge-noire).

Différentes méthodes qui peuvent être utilisées par l'élève :

a) Il peut alors calculer dans chaque cas la probabilité de tirer une boule rouge et comparer les fractions obtenues.
Ou bien, l'élève sans calcul peut « voir » qu'Aline est sûre de tirer une boule rouge, que Claude a beaucoup de chance d'en avoir une rouge car il a beaucoup plus de rouges que de noires et que Bernard a peu de chances puisqu'il a moins de rouges que de noires.
b) Pour la deuxième question, l'élève doit travailler sur l'égalité de rapport car la proportion de rouges par rapport aux noires doit être la même chez Aline et chez Bernard. Certains élèves peuvent essayer de mettre le problème en équation : soit x le nombre de boules noires ajoutées à Aline et il faudra alors résoudre cette équation, il y a alors deux possibilités, soit en utilisant le rapport des rouges sur les noires, soit le rapport des rouges sur le total, c'est-à-dire $5/x=10/30$ ou bien $5/(5+x)=10/(10+30)$. Dans les deux cas on obtient $x=15$.

D'autres élèves verront que Bernard a trois fois plus de noires que de rouges et diront qu'Aline doit avoir aussi trois fois plus de noires que de rouges, d'où 15 noires.

Pourquoi choisir cet exercice ?
Il est facilement réalisable en classe, il permet d'utiliser la formule « nombre de cas favorables/nombre de cas possibles », pour calculer cette fois des probabilités. La question b) laisse aux élèves une certaine autonomie dans le choix de la méthode à utiliser, et permet éventuellement l'utilisation d'une équation ainsi que la recherche de sa résolution.

Exemples d'exercices de synthèse : En 2nde :

Dans une station de ski, 40 jeunes effectuent un stage sportif.
16 ont choisi un stage de ski et les autres un stage de surf.

En ski, il y a 10 filles mais en surf, il y en a 16.
On choisit au hasard un jeune de ce groupe.
On note :
K : « le jeune choisi fait du ski » et F : « le jeune choisi est une fille»

1. Représenter la situation.
2. Déterminer les probabilités : $p(\mathrm{K})$ et $p(\mathrm{F})$.
3. On nomme les événements suivants :

S : « le jeune choisi fait du surf » et G : « le jeune choisi est un garçon»

a) Exprimer par une phrase $\mathrm{S} \cap \mathrm{F}$ et déterminer $p(\mathrm{S} \cap \mathrm{F})$.
b) Exprimer par une phrase $\mathrm{G} \cup \mathrm{K}$ et déterminer $p(\mathrm{G} \cup \mathrm{K})$.

Commentaires : Les exercices précédents sur Dvd-Internet ou les Pois (etc.) ont permis aux élèves de se familiariser avec la représentation d'un énoncé par un tableau ou un diagramme. L'énoncé ici suggère l'utilisation d'une telle représentation sans en imposer une.

Difficultés des élèves :
Cet exercice, en première lecture ne semble pas différent des autres mais le choix des événements « Ski » et « Filles » perturbe les élèves. Le problème vient du fait qu'ils ont du mal avec la notion de contraire et/ou d'intersection.
En ce qui concerne la construction du tableau, la difficulté vient du fait qu'il faut comprendre que le contraire de « Ski » est « Surf ». Si les élèves prennent une colonne Ski et une autre Filles, ils ne peuvent pas déterminer l'intersection.

En ce qui concerne la construction du diagramme, la difficulté est la création de zones « inutiles » : les élèves créent une zone « Ski » et une autre « Filles » avec intersection, mais ils font l'erreur de créer aussi des zones « Garçons » et « Surf ».

Pourquoi choisir cet exercice ?
La construction du tableau ou du diagramme n'étant pas demandée, cela oblige les élèves à réfléchir sur les notions de contraire, d'intersection et d'union.
L'activité de l'élève n'est pas fondée sur la simple imitation d'exercices déjà traités.

Somme de deux dés avec tableau

On lance deux dés, l'un est vert l'autre est bleu, à 6 faces équilibrés et on s'intéresse à la somme des nombres inscrits sur leurs faces supérieures.

a) Décrire l'univers de cette expérience aléatoire.
b) Justifier le fait que la probabilité d'obtenir 2 est 1/36.
c) Déterminer la probabilité d'obtenir 4.
d) Déterminer la probabilité d'obtenir 5.
e) Quelle est la somme que l'on a le plus de chances d'obtenir ? Préciser sa probabilité.

Commentaires

Le professeur peut aider les élèves en leur demandant de compléter ce tableau :

Vert/bleu	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Prolongement possible : on ne différencie plus les dés par leur couleur.

Autre exercice :

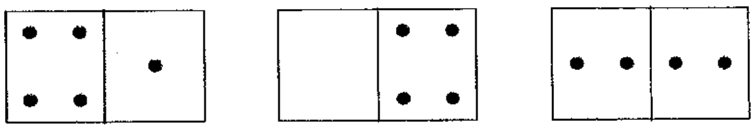
Une enquête effectuée auprès de 100 ménages nous apprend que 20 ménages ont un chien, 25 ménages ont un chat et 8 ménages ont à la fois un chien et un chat.
1. Représenter cette situation.
2. On choisit au hasard un de ces ménages.
On note A l'événement: « Le ménage possède un chien » et B l'événement: « Le ménage possède un chat ».
a. Déterminer la probabilité de A et celle de B.
b. Décrire par une phrase l'événement $A \cap B$ et donner sa probabilité.
c. Déterminer la probabilité de l'événement: « Le ménage possède au moins l'un de ces deux animaux ».
d. Déterminer les probabilités de événements $\overline{A \cup B}$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$?

En route vers la 1ère

Ces deux exercices permettent d'introduire la notion de variable aléatoire. Ils ne peuvent être proposés qu'à une classe qui fonctionne bien sous forme de travail discuté en classe.

Dominos

Un jeu de dominos est constitué de 28 dominos distincts. On rappelle qu'un domino est partagé en deux parties, chacune portant un nombre de 0 à 6 représenté par des points. Un double est un domino dont les deux parties portent le même nombre. Exemples de dominos :



1. Écrire la liste des 28 dominos distincts.
2. Un joueur tire un domino au hasard.
a. Quelle est la probabilité qu'il obtienne un double ?
b. Quelle est la probabilité d'obtenir un domino dont la somme des nombres situés sur les deux parties soit divisible par 3 ? (On rappelle que 0 est divisible par tout entier non nul.)
c. À chaque domino tiré on associe la différence entre le plus grand et le plus petit nombre. Par exemple, si le domino tiré porte le nombre 1 et le nombre 4, on prend la valeur 4−1 = 3.
Quelles sont les valeurs maximum et minimum que l'on peut obtenir ?
Compléter le tableau ci-dessous.

Différence X						
Probabilité associée						

Quelle est la valeur moyenne de X ?
Donner une interprétation de ce résultat.

Boules

On tire au hasard une boule d'une urne contenant deux boules rouges notées R_1 et R_2, une boule verte notée V et deux boules bleues notées B_1 et B_2. On ne remet pas la boule tirée et on effectue un second tirage d'une boule.
On appelle résultat un couple dont le premier élément est la boule obtenue au premier tirage et le second, celle obtenue au second tirage, par exemple (R_1, B_2).
1. Déterminer à l'aide d'un tableau ou d'un arbre l'ensemble des résultats possibles.
2. On complète la situation précédente par une règle du jeu :
- pour chaque boule rouge tirée, on gagne 1 euro ;
- pour chaque boule verte tirée, on gagne 2 euro ;
- pour chaque boule bleue tirée, on perd 2 euro.

a. Lister les gains possibles (une perte est considérée comme un gain négatif) et déterminer la probabilité de chacun de ces gains.
b. Calculer le gain moyen d'un joueur. Le jeu est-il équitable ?

Ce travail peut être proposé en partie en classe sous forme d'une activité discutée puis prolongée par un devoir à la maison par exemple.

Paradoxe du duc de Toscane et lancer de dés avec différents points de vue

Objectifs
- Résoudre un paradoxe historique.
- Utiliser un tableur pour effectuer et représenter des simulations d'expériences aléatoires.
- Faire observer l'importance de la fluctuation d'échantillonnage.
- Favoriser la prise d'initiatives pour les propositions de prolongements.

I) Paradoxe
Donner le contexte historique du paradoxe du Grand Duc de Toscane.
Donner la présentation du paradoxe.

II) Faire des simulations.

Partie A

1) Simulation d'une série de 1000 lancers. Créer une feuille de calcul dans un tableur.
Pour simuler le lancer d'un dé on utilise deux fonctions:
la fonction ALEA qui génère aléatoirement un réel de l'intervalle [0; 1 [en multipliant par 6 et ajoutant 1, on obtient un réel de l'intervalle [1; 7[, puis la fonction ENT donne la partie entière.
Ecrire la formule suivante dans la case Al :
=ENT(6*ALE()+l)+ENT(6*ALEA()+ 1)+ENT(6* ALEA()+ 1)
Valider, puis recopier la formule en glissant vers le bas jusqu'à Al00.
Sélectionner les cellules de Al à A100.
On obtient ainsi 100 lancers de 3 dés.
2) Dépouillement des résultats:
La fonction NB. SI permet de comptabiliser une valeur dans une plage de cellules données. Par exemple =NB.SI($A$1:$A$100;9) retournera le nombre de fois que la valeur 9 apparaît dans les cellules de Al à A100.
Recopier et compléter ce tableau:

Somme	9	10
Nombre d'apparitions		
Fréquence		

3) Sélectionner les cellules de Al à A100, copier la formule en glissant vers la droite jusqu'à la colonne J.

On obtient ainsi 1000 lancers de 3 dés.

Partie B

Après avoir réédité l'expérience plusieurs fois à l'aide de la touche F9 répondre aux questions.
Quelle somme semble apparaître le plus souvent?
Les constatations du Grand Duc de Toscane sont-elles exactes? Est-il nécessaire de simuler un plus grand nombre de lancers?

III) Comment peut-on élucider ce problème ?
4) On ne s'intéresse qu'aux issues qui donnent la somme 9.
Compléter alors l'arbre donné aux élèves, et donner la probabilité d'obtenir le nombre 9.
5) On ne s'intéresse qu'aux issues qui donnent la somme 10.
Construire alors l'arbre qui correspond à ces issues et donner la probabilité d'obtenir le nombre 10.
6) Que peut-on conclure ?

Activité en classe

Analyse mathématique :
L'objectif est de comparer les probabilités d'obtenir 9 et 10 lorsqu'on fait la somme des numéros sortis lors du lancer de trois dés.

Contexte historique :
Ce problème fait référence au paradoxe historique du Duc de Toscane dont voici une brève présentation.
Galilée (1554-1642) est surtout connu pour ses travaux en astronomie, faisant suite à son invention de la lunette astronomique. Cependant, il rédigea vers 1620 un petit mémoire sur les jeux de dés pour répondre à une demande du Duc de Toscane (Galilée est alors Premier Mathématicien de l'Université de Pise et Premier Philosophe du Grand Duc à Florence). Galilée est ainsi l'un des premiers avec Cardan à avoir écrit sur le « calcul des hasards », mais leurs écrits n'ont été publiés qu'après la célèbre correspondance entre Pascal et Fermat qui marque « officiellement» le début de la théorie des probabilités.
Le mémoire de Galilée n'a été édité qu'en 1718.
À la cour de Florence, de nombreux jeux de société étaient alors pratiqués. Parmi ceux-ci, l'un faisait intervenir la somme des numéros sortis lors du lancer de trois dés. Le Duc de Toscane, qui avait sans doute observé un grand nombre de parties de ce jeu, avait constaté que la somme 10 était obtenue légèrement plus souvent que la somme 9.

Paradoxe
Le paradoxe, que le Duc avait exposé à Galilée, réside dans le fait qu'il y a autant de façons d'écrire 10 que 9 comme sommes de trois entiers compris entre 1 et 6 :
$10 = 6 + 3 + 1 = 6 + 2 + 2 = 5 + 4 + 1 = 5 + 3 + 2 = 4 + 4 + 2 = 4 + 3 + 3$ (6 possibilités)
$9 = 6 + 2 + 1 = 5 + 3 + 1 = 5 + 2 + 2 = 4 + 4 + 1 = 4 + 3 + 2 = 3 + 3 + 3$ (6 possibilités)

Le point de vue probabiliste:

L'idée est de déterminer les différentes combinaisons à l'aide d'un arbre.
On se rend vite compte que dessiner un tel arbre se révèle fastidieux. On va donc en réaliser une partie à l'aide d'un tableur qui dénombrera les effectifs de chaque valeur.

Si on détermine les différentes sommes obtenues lorsque le premier dé donne 1, il suffit d'ajouter 1 pour avoir les sommes quand le premier dé donne 2 et ainsi de suite. Recopier et compléter, dans une nouvelle feuille de calcul, le tableau.

Déterminer la probabilité d'obtenir 9, puis celle d'obtenir 10.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Dé 1	Dé 2	Dé3	Somme quand Dé1 vaut 1	Somme quand Dé1 vaut 2	Somme quand Dé1 vaut 3	Somme quand Dé1 vaut 4	Somme quand Dé1 vaut 5	Somme quand Dé1 vaut 6
2	1	1	1	3	4	5	6	7	8
3	1	1	2	4	5	6	7	8	9
4	1	1	3	5	6	7	8	9	10
5	1	1	4	6	7	8	9	10	11
6	1	1	5	7	8	9	10	11	12
7	1	1	6	8	9	10	11	12	13
8	1	2	1	4	5	6	7	8	9
9	1	2	2	5	6	7	8	9	10
10	1	2	3	6	7	8	9	10	11
11	1	2	4	7	8	9	10	11	12
12	1	2	5	8	9	10	11	12	13
13	1	2	6	9	10	11	12	13	14
14	1	3	1	5	6	7	8	9	10
15	1	3	2	6	7	8	9	10	11
16	1	3	3	7	8	9	10	11	12
17	1	3	4	8	9	10	11	12	13
18	1	3	5	9	10	11	12	13	14
19	1	3	6	10	11	12	13	14	15
20	1	4	1	6	7	8	9	10	11
21	1	4	2	7	8	9	10	11	12
22	1	4	3	8	9	10	11	12	13
23	1	4	4	9	10	11	12	13	14
24	1	4	5	10	11	12	13	14	15
25	1	4	6	11	12	13	14	15	16
26	1	5	1	7	8	9	10	11	12
27	1	5	2	8	9	10	11	12	13
28	1	5	3	9	10	11	12	13	14
29	1	5	4	10	11	12	13	14	15
30	1	5	5	11	12	13	14	15	16
31	1	5	6	12	13	14	15	16	17
32	1	6	1	8	9	10	11	12	13
33	1	6	2	9	10	11	12	13	14
34	1	6	3	10	11	12	13	14	15
35	1	6	4	11	12	13	14	15	16
36	1	6	5	12	13	14	15	16	17
37	1	6	6	13	14	15	16	17	18
38									

Bibliographie

Décaillot, A.M. (2006). Présentation du texte «Notes historiques sur le calcul des probabilités» de Georg Cantor suivie de la traduction en français. *Journ@l Electronique d'Histoire des probabilités et de la statistique*, vol 2 n° 1b.

Delahaye, J.P. (1998). Aléas du hasard informatique. *Pour la science* n°245.

Ducel, Y. (2011). Les probabilités en Troisième et en Seconde. Continuité des apprentissages. Conférence aux journées de l'APMEP 2011.
http://www.apmep.asso.fr/IMG/pdf/Caen_110406_DOCUMENT-SUPPORT_conference.pdf

Parzysz, B. (2003). L'enseignement de la statistique et des probabilités en France : évolution au cours d'une carrière d'enseignant. *Brochure APMEP* n°143.

Robert, A. (2008). La double approche didactique et ergonomique pour l'analyse des pratiques d'enseignants de mathématiques. In F. Vandebrouck (Ed.), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp. 59-68). Toulouse : Eds Octarès.

Robert, A., Lattuati, M. & Penninckx, J. (2012). *Une caméra au fond de la classe de mathématiques. (Se) former au métier d'enseignant du secondaire à partir d'analyses de vidéos.* Presses Universitaires de Franche Comté.

Documents à consulter

Document d'accompagnement « probabilités au collège » de 2008. Eduscol.education.fr/
Document d'accompagnement « ressources pour la classe de première générale et technologique – statistiques et probabilités » de juin 2011, Eduscol.education.fr/
Programmes de 3ème et seconde. Eduscol.education.fr/

Des outils pour une liaison collège –lycée professionnel –lycée général et technologique; inspection de mathématiques. Académie de Créteil.
http://www.ac-creteil.fr/mathsciences-lp/EGM_B0056.html

La page de FREDERIC LAROCHE riche en exercices divers et variés
http://laroche.lycee.free.fr/profs.htm

Annexes

Annexes de la partie 1

Annexe 1 : documents officiels - simulations en statistiques et probabilités
Annexe 2 : résumé de l'article « Aléas du hasard informatique »
Annexe 3 : construction de suites aléatoires de 0 et de 1
Annexe 4 : lancer d'un dé
Annexe 5 : extraits d'une table de nombres au hasard
Annexe 6 : deux points au hasard sur un segment
Annexe 7 : thèmes de simulation
Annexe 8 : exercices de simulation
Annexe 9 : exercice niveau 1ère
Annexe 10 : points du programme relevant de l'étude des intervalles de fluctuation
Annexe 11 : prise de décision
Annexe 12 : thèmes de devoir maison ou de TP
Annexe 13 : compte rendu d'expérimentation d'un devoir
Annexe 14 : compte rendu d'expérimentation d'une séance avec les élèves

Annexes de la partie 2

Annexe 15 : tableau synthétique sur les probabilités en $3^{ème}$ et 2^{nde}

Annexe 1

Documents officiels - simulations en statistiques et probabilités en $3^{\text{ème}}$ et au lycée d'enseignement général

Rappelons les points des différents documents officiels de $3^{\text{ème}}$, 2^{nde}, $1^{\text{ère}}$ et Terminale relatifs à l'activité de simulation :

En troisième :
Dans la colonne « commentaires » du programme on peut lire : « la notion de probabilité est abordée à partir d'expérimentations qui permettent d'observer les fréquences des issues dans des situations familières. » Le programme se réfère donc à l'expérimentation.
Par ailleurs, le document d'accompagnement « probabilités au collège » de 2008, après avoir présenté l'approche fréquentiste de la probabilité par des expérimentations, énonce : « Dans un second temps, pour disposer facilement d'un grand nombre d'épreuves et interpréter graphiquement les résultats, on peut faire usage d'une simulation sur un tableur. »

En Seconde :
Dans le document d'accompagnement « Ressources pour la classe de 2^{nde} - probabilités et statistiques » de 2009, on peut lire : « Des notions de probabilités sont enseignées en classe de $3^{\text{ème}}$ à partir de situations familières permettant, entre autres, de rencontrer des probabilités qui ne soient pas uniquement définies à partir de considérations intuitives de symétrie mais qui prennent appui sur l'observation d'épreuves répétées et la stabilisation des fréquences... Il s'agit de bien inscrire l'enseignement de la classe de 2^{nde} en continuité avec celui du collège. »
Le programme de seconde de 2009 énonce : « Pour des questions de présentation du programme, les cadres relatifs à l'enseignement des statistiques et des probabilités sont présentés séparément à la suite l'un de l'autre. Pour autant, ces enseignements sont en relation étroite l'un avec l'autre et doivent faire l'objet d'allers et retours.
Objectifs visés par l'enseignement des statistiques et probabilités à l'occasion de résolutions de problèmes dans le cadre de l'échantillonnage :
- faire réfléchir les élèves à la conception et la mise en œuvre d'une simulation ;
- sensibiliser les élèves à la fluctuation d'échantillonnage, aux notions d'intervalle de fluctuation et d'intervalle de confiance et à l'utilisation qui peut en être faite. »

En Première ES, L et S :
Extraits du programme :

Contenus	Capacités	Commentaires
Probabilités Variable aléatoire discrète et loi de probabilité. Espérance.	Déterminer et exploiter la loi d'une variable aléatoire. Interpréter l'espérance comme valeur moyenne dans le cas d'un grand nombre de répétitions.	À l'aide de simulations et d'une approche heuristique de la loi des grands nombres, on fait le lien avec la moyenne d'une série de données. (De même pour la variance en $1^{\text{ère}}$ S)
Modèle de la répétition d'expériences identiques et indépendantes à deux ou trois issues.		□ On peut simuler la loi géométrique tronquée avec un algorithme. (en 1ère S seulement) □ On peut simuler la loi binomiale avec un algorithme.

En Terminale :
Les statistiques sont abordées sont l'angle des intervalles de fluctuation et de l'estimation (intervalles de confiance).
Extrait du programme :
« Le recours aux représentations graphiques et aux simulations est indispensable.»

Annexe 2

Résumé de l'article « Aléas du hasard informatique »

L'auteur de cet article, Jean-Paul Delahaye, est directeur adjoint du laboratoire d'informatique fondamentale de Lille du CNRS et a écrit plusieurs livres donc le plus connu est sans doute « le fascinant nombre Pi » (Editions Belin, 1997).L'article présenté ici est paru dans la revue « Pour la Science » en mars 1998, et reste d'actualité d'après son auteur.

Dans un premier temps sont présentées les différentes utilisations du hasard : pour les simulations, pour la cryptographie, en théorie de l'information. J. P. Delahaye distingue donc trois types de hasard : faible, moyen, et fort, adaptés à chaque utilisation. Il donne un exemple de méthode de création de suites pour chacun des cas.

Le hasard faible est en général créé à partir de générateurs congruentiels : on part de trois nombres entiers, M qui fixe l'intervalle dans lequel les nombres de la suite vont être engendrés, a et b entre 0 et M – 1. Puis on choisit un point de départ $x(0)$ entre 0 et M – 1. On définit alors la suite par récurrence : $x(n+1) = a\,x(n) + b \bmod M$. Si on veut une suite de 0 et de 1, on regarde par exemple la parité de $x(\mathrm{n})$, si on veut une suite de nombres entre 0 et 1, on divise chaque $x(n)$ par M. Une telle suite est nécessairement périodique (de période au plus égale à M) mais une analyse mathématique de ces suites a permis de montrer dans les années 1960 que si M, a et b vérifient certaines propriétés dites structurelles, la suite ainsi produite est équitablement distribuée. D'autre part, la suite générée est ensuite soumise à des tests sur les fréquences des chiffres et des suites de ces chiffres, mais ... « mathématiques et tests peuvent disqualifier une suite, mais pas en assurer la qualité ».

Les suites définies comme précédemment sont inutilisables en cryptographie car *prévisibles*, c'est-à-dire telles que la donnée de quelques valeurs permet de recalculer la suite « en un temps plus petit qu'un polynôme de la taille de ses paramètres », par exemple $n^3 + 2n^2 + 12$ si n est la taille des paramètres. Une suite sera *imprévisible* si ce temps est de l'ordre de 2^n ou 3^n. Il faut donc remarquer que dans ce deuxième type de hasard, hasard moyen, utilisé en cryptographie, l'imprévisibilité est plus importante que l'uniformité. Le générateur mis au point par L. Blum, M. Blum et M. Shub (dénommé BBS), que nous étudierons par la suite, est vraisemblablement un bon candidat mais la démonstration de son efficacité repose sur un conjecture jugée vraisemblable mais non démontrée... avis aux candidats...

Le hasard fort est défini par l'impossibilité absolue de la prédiction et pour cela il faut qu'on ne puisse pas décrire la suite aléatoire en utilisant moins de place que celle qu'elle occupe (définition de Pier Martin-Löf en 1965), ce qui disqualifie tout programme d'ordinateur. Pour obtenir un tel hasard, il faut donc combiner des suites obtenues par des générateurs physiques (par exemple fondés sur le bruit thermique ou sur la diode Zener) et des générateurs algorithmiques comme l'a fait G. Marsaglia, de l'université de Floride, pour éditer un CD-ROM de plus de quatre milliards de bits aléatoires.
J. P. Delahaye termine en donnant quelques exemples d'utilisations de suites aléatoires et les limites de certaines méthodes et conclut « on ne se méfie jamais assez du hasard ».

Cet article est intéressant à plusieurs points de vue : il permet de donner un début de réponse à des questions souvent posées par les élèves lors de l'utilisation de la touche *rand* de la calculatrice : « comment la calculatrice peut-elle choisir des nombres au hasard ? » ; « j'ai la même suite que mon voisin, il n'y a pas de hasard ! ».
Il explique aussi de façon assez simple comment construire une suite de nombres aléatoires. Si on a un peu de temps, cela peut faire l'objet d'une activité assez riche. Il montre enfin que la recherche en mathématiques est vivante et que des problèmes économiques importants, sécurité des cartes bancaires par exemple, ont besoin de nouveaux résultats mathématiques.

Annexe 3

Construction de suites aléatoires de 0 et de 1

A – Le procédé de L. Blum, M Blum et M. Shub (BBS)

Méthode :

- On choisit deux entiers premiers de la forme $4m + 3$ et on appelle n leur produit.
- On prend comme graine un entier x premier avec n.
- On calcule $x(0) = x^2 \bmod n$ puis $x(i+1) = x(i)^2 \bmod n$.
- La parité de $x(i)$ donne la suite pseudo-aléatoire de bits obtenus par ce procédé.

Exemple :

Choix des valeurs de départ : $19 = 4 \times 4 + 3$; $11 = 4 \times 2 + 3$; 19 et 11 sont premiers.

Alors $n = 19 \times 11 = 209$; on choisit $x = 70$; x est premier avec 209.

Premières itérations :	$70^2 = 4900 = 23 \times 209 + 93$	donc $x(0) = 93$;	parité : 1
	$93^2 = 8649 = 41 \times 209 + 80$	donc $x(1) = 80$;	parité : 0
	$80^2 = 6400 = 30 \times 209 + 130$	donc $x(2) = 130$;	parité : 0
	$130^2 = 16900 = 80 \times 209 + 180$	donc $x(3) = 180$;	parité : 0
	$180^2 = 32400 = 155 \times 209 + 5$	donc $x(4) = 5$;	parité : 1

Activité :

Construire par cette méthode avec une calculatrice deux suites de 10 bits (c'est-à-dire de 0 et de 1) aléatoires en prenant p et q dans $\{19 ; 23 ; 31 ; 43\}$ et en choisissant x premier avec $n = pq$.

1ère suite										
2e suite										

B – Combinaison de deux suites

Méthode :

On combine deux suites de bits aléatoires obtenues $x(i)$ et $y(i)$ termes à termes par l'opération *ou-exclusif (xor)* : $0 \oplus 0 = 0$; $0 \oplus 1 = 1$; $1 \oplus 0 = 1$; $1 \oplus 1 = 0$.

On obtient une nouvelle suite de bits pseudo-aléatoires $z(i)$ plus imprévisible que les deux précédentes.

Activité :

Combiner les deux suites précédentes par ce procédé dans le tableau suivant :

3ème suite										

Annexe 4.1

Lancer d'un dé : expérimentation – fiche élève

Expérience : on lance un dé à 6 faces et on note le nombre qui apparaît sur la face du dessus.
On répète cette expérience 50 fois de suite.
Estimer combien de fois chaque face apparaîtra : ……………………………………………
Objectif de la séance : ……………………………………………………………………

1. Echantillon de taille 50

Noter les résultats des différents lancers dans le tableau ci-contre :

Remplir le tableau des fréquences correspondant aux 50 résultats obtenus ci-dessus :

	Dénombrement	Effectif	Fréquence en %
1			
2			
3			
4			
5			
6			
		50	

2. Echantillon de taille 100

Tableau des fréquences de mon groupe :
Il rassemble les résultats de mon voisin et les miens.

Face	Effectif	Fréquence en %
1		
2		
3		
4		
5		
6		
	100	

Tableau des fréquences d'un autre groupe :
Il rassemble les résultats de deux autres élèves.

Face	Effectif	Fréquence en %
1		
2		
3		
4		
5		
6		
	100	

3. Echantillon de taille 200

Tableau des fréquences des deux groupes ci-dessus : il rassemble les résultats de mon groupe et de l'autre.

Face	Effectif	Fréquence en %
1		
2		
3		
4		
5		
6		
	200	

Tableau des fréquences de deux autres groupes.

Face	Effectif	Fréquence en %
1		
2		
3		
4		
5		
6		
	200	

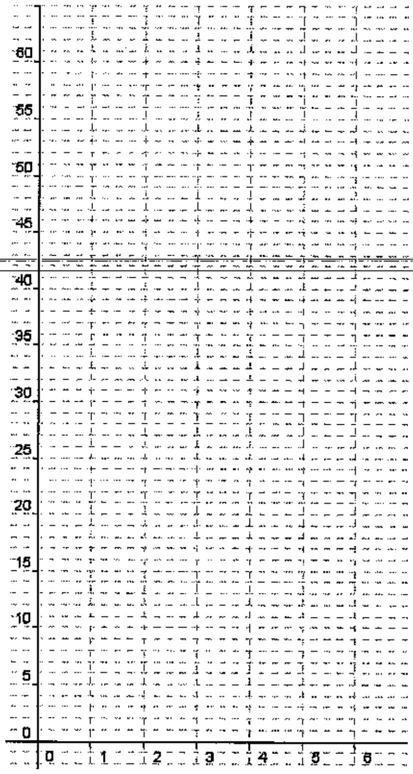
4. Echantillon de taille 400

Faire le tableau des fréquences en rassemblant les résultats de 2 groupes de 200 résultats.

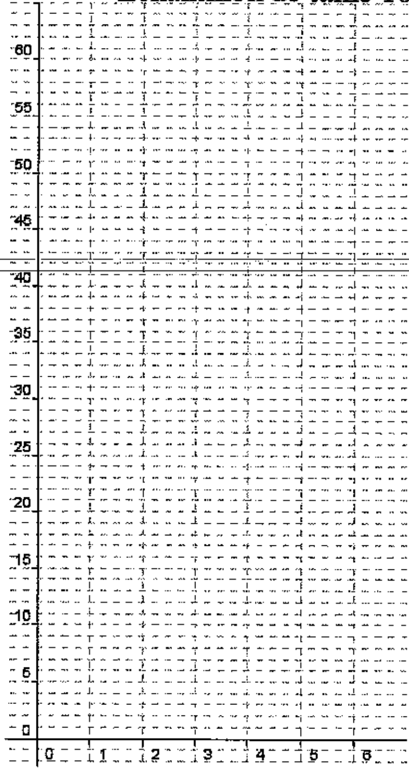
Polygone des fréquences obtenues en lançant un dé 50 fois, 100 fois, 200 fois et 400 fois

Sur le premier polygone, reporter ses résultats et les relier d'un couleur puis reporter ceux de son voisin et les relier d'une autre couleur.
Sur le 2[e] polygone, reporter les résultats de son groupe et les relier d'une couleur puis reporter ceux de l'autre groupe et les relier d'une autre couleur…

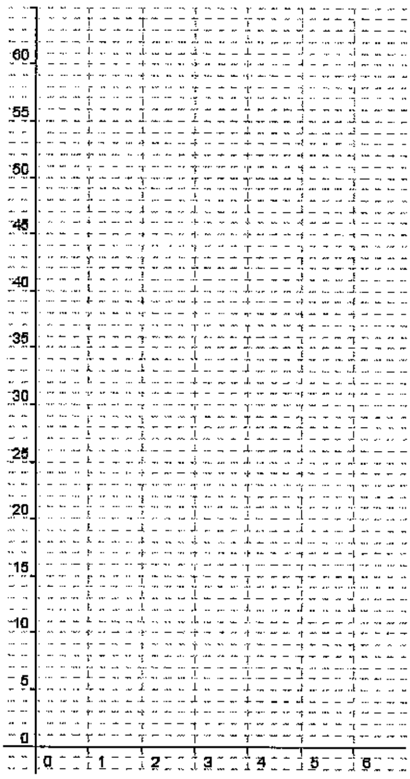
Echantillon de taille 50



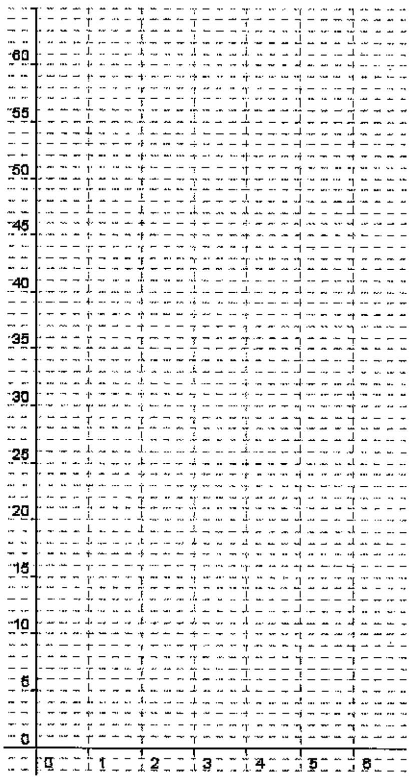
Echantillon de taille 100



Echantillon de taille 200



Echantillon de taille 400



Annexe 4.2

Lancer d'un dé : expérimentation – fiche professeur

Niveau : 3^{e} ou 2nde
Thème : statistique : expérimentation
Durée : environ une heure
Modalité : en classe entière
Matériel : un dé pour deux élèves et une calculatrice
Prérequis : - notion de fréquence
- passage d'un tableau de fréquences au polygone des fréquences

Objectifs :
Pour cette expérience, la quasi-totalité des élèves connaissent intuitivement le modèle théorique d'équiprobabilité, c'est pourquoi l'expérimentation n'aura pas uniquement pour but de tester ce modèle. Le but principal de la séance est de découvrir expérimentalement les phénomènes de fluctuation des fréquences à la fois au niveau des échantillons de même taille et de taille différente.
Une activité de simulation de lancer de dé sur calculatrice ou sur tableur est un prolongement naturel à cette expérimentation.

Déroulement possible :
1. Présentation de l'activité
Le professeur indique que chaque élève aura à lancer un dé à 6 faces 50 fois.
Avant l'expérimentation, il demande aux élèves d'écrire une conjecture sur le nombre de fois qu'apparaît chacune des faces au cours de 50, 100, 200, 400, 800 lancers. Il fait écrire l'objectif de la séance : « tester mon estimation ». C'est donc l'objectif annoncé aux élèves mais derrière celui-ci le professeur vise ceux énoncés dans le paragraphe précédent.

2. Expérimentation
Par groupe de deux élèves, l'un lance le dé 50 fois et l'autre note le résultat obtenu. Recommencer en inversant les rôles.

3. Première utilisation des résultats
Chaque élève obtient un tableau de 50 chiffres de 1 à 6, puis il complète le tableau de fréquences pour un échantillon de taille 50.
Un transparent identique à la feuille des polygones des fréquences distribuées aux élèves est rétroprojeté au tableau (ou un document numérique est utilisé via le tableau blanc numérique).
Les 5 ou 6 élèves les plus rapides l'utilisent pour reproduire leur propre graphique au tableau, chacun avec une couleur différente. Ceci met en valeur la fluctuation des fréquences pour un échantillon de taille 50.
Discussion des résultats obtenus pour les différents échantillons de taille 50.
Aura-t-on les mêmes observations pour des échantillons de taille plus importante ?

4. Deuxième utilisation des résultats
On collecte les résultats de la phase précédente pour remplir les tableaux des échantillons de taille 100, 200, 400 et compléter les polygones des fréquences.
Les 5 ou 6 élèves les plus rapides, et de groupes différents, vont reproduire leur graphique au tableau, chacun avec une couleur différente, pour des échantillons de taille 100, 200, 400.

5. Discussion
Voir les objectifs ; les élèves peuvent constater la diminution de l'amplitude des fréquences quand la taille de l'échantillon croît. On peut faire calculer, par regroupement de deux échantillons de taille 400, le tableau de fréquence associé à un échantillon de taille 800.

Annexe 4.3

Lancer d'un dé : expérimentation – commentaires

On peut considérer que l'expérimentation met en œuvre des tâches sensibles, au sens qu'elles sont nécessaires pour comprendre l'utilité de la simulation : le fait que la simulation engendre rapidement un échantillon de grande taille.
Par ailleurs, l'expérimentation permet de mieux comprendre la notion d'aléatoire vs pseudo aléatoire, ainsi que le fait qu'on utilise un modèle probabiliste - d'équiprobabilité - pour l'activité de simulation du lancer d'un dé.
Ces tâches sont aussi robustes, en ce sens qu'elles favorisent la mise au travail de tous les élèves de façon autonome. Elles les confrontent à leurs a priori concernant la fluctuation d'échantillonnage et la loi des grands nombres sous jacente.

Les formateurs et les stagiaires peuvent se poser ensemble un certain nombre de questions :

- L'apparition des probabilités en 3^{e}, abordées à partir d'expérimentations, fait que de nombreux élèves ont déjà lancé des dés l'année précédente. Quelle est alors la pertinence de cette activité si elle est proposée en 2nde ? Faire lancer des dés peut paraître comme une perte de temps, dans un programme chargé...

Quelques éléments de réponse : bien que les nouveaux programmes préconisent une approche expérimentale des statistiques et des probabilités en 3^{e}, de nombreux élèves n'ont pas eu l'occasion d'expérimenter en 3^{e}.
En l'absence éventuelle d'expérimentation, l'utilité de la simulation n'apparaît plus de façon aussi claire. Aussi, la manipulation de l'expérimentation, conjointe à celle de la simulation, permettent de générer auprès des élèves des questionnements intéressants sur les différences entre les deux modes de générations d'expériences aléatoires.

- La notion de fréquence n'est toujours pas maîtrisée par de nombreux élèves, bien qu'étudiée depuis la classe de 5^{e}. La reprendre avant de passer au travail sur tableur permet d'alléger celui-ci. Cette reprise aussi peut être faite dans un autre contexte.

- La notion de polygone des fréquences n'est pas au programme de collège ni à celui de lycée. Mais c'est un mode de représentation assez habituel sur tableur. Les courbes représentatives de fonctions sont au programme de 3^{e}, et au cœur de celui de 2nde, particulièrement le fait de relier ou non les points. Dans ce contexte, la réflexion, avec les élèves, portant sur la nature du polygone des fréquences peut être riche. D'autres types de représentation de données, au programme, peuvent néanmoins être utilisés à bon escient.

- Les modalités de cette activité (partage des données avec d'autres élèves) peuvent rebuter certains enseignants. C'est l'occasion, en formation, de discuter les avantages et inconvénients de ce type de séance.

C'est l'occasion de questionner les déroulements possibles :

  - Faisons-nous faire les lancers de dés à la maison ou en cours ?
  - Les élèves utilisent-ils tous le même dé (mais alors comment gérer cela ?) ? Les élèves utilisent-ils chacun un dé différent ? Dans ce cas, une question pertinente peut être posée concernant les qualités physiques, variables d'un dé à l'autre.

Un avantage de cette séance est qu'elle ne nécessite aucun matériel pédagogique autre qu'un dé et une calculatrice : les contraintes matérielles sont minimales.

Annexe 4.4

Lancer d'un dé : simulation sur tableur – fiche élève

Objectifs de la séance : ....
....

1. Simulation sur tableur

a) On veut simuler à l'aide d'un tableur le lancer d'un dé équilibré. On va utiliser deux fonctions dont dispose le tableur :

= ENT : calcule la partie entière d'un nombre

= ALEA() : produit un nombre au hasard de [0 ; 1[

Avec la formule = 6*ALEA(), *on obtient un nombre* ....

Avec la formule = 6*ALEA()+1, *on obtient un nombre* ....

Avec la formule = ENT(6*ALEA()+1), *on obtient un nombre* ....

b) Préparer une feuille de calcul que vous intitulerez « 100 lancers » dans l'onglet en bas à gauche, afin d'obtenir la feuille suivante :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	Echantillon de 100 lancers											n° de la face	effectifs	fréquences
2												1		
3												2		
4												3		
5												4		
6												5		
7												6		
8												total		
9														

Rentrer la formule = ENT(6*ALEA()+1) dans la cellule A2 puis la recopier jusqu'à J11.

On obtient alors un échantillon de taille 100. Pourquoi ?...
....

c) Nous allons utiliser une autre fonction du tableur

=NB.SI(plage de données ; critère) : compte le nombre de cellules du tableau répondant au critère

Ainsi sur la feuille de calcul, dans la cellule M2, la formule =NB.SI(A2:J11;L2) calcule le nombre de lancers qui donnent un résultat égal au contenu de la cellule L2 (face 1).

Dans la cellule M3, la formule =NB.SI(A2:J11;L3) calcule le nombre de lancers qui donnent un résultat égal au contenu de la cellule L3 (face ......).

Dans la cellule M4, la formule =NB.SI(A2:J11;L4) calcule le nombre de lancers qui donnent un résultat égal au contenu de la cellule ...... (face ......).

Etc.

Compléter les cellules M2 à M7 par les formules permettant d'obtenir les effectifs de chacune des issues.

d) Réaliser de nouvelles simulations en appuyant sur la touche F9.

e) *Quelle instruction doit-on placer dans N2 pour calculer la fréquence d'apparition de la face 1 ?*..

f) Compléter la colonne des fréquences.

g) Réaliser de nouvelles simulations en appuyant sur la touche F9 et commencer à remplir le 1er tableau du paragraphe 2)

2. Exploitation des simulations

a) Echantillon de taille 100 : compléter le tableau ci-dessous concernant les résultats obtenus pour 10 simulations de 100 lancers d'un dé.

Distribution des fréquences des échantillons de taille 100

issues	n°1	n°2	n°3	n°4	n°5	n°6	n°7	n°8	n°9	n°10	moyenne des fréquences
1											
2											
3											
4											
5											
6											
étendue											

Commenter les résultats par rapport aux objectifs écrits au début : ………………………………
………

b) Copier la feuille de calcul intitulée « 100 lancers » et la coller dans une deuxième feuille que vous intitulerez « 400 lancers ». La modifier afin de simuler des échantillons de taille 400. Compléter le tableau ci-dessous concernant les résultats obtenus pour 10 simulations de 400 lancers d'un dé.

Distribution des fréquences des échantillons de taille 400

issues	n°1	n°2	n°3	n°4	n°5	n°6	n°7	n°8	n°9	n°10	moyenne des fréquences
1											
2											
3											
4											
5											
6											
étendue											

Commenter les résultats : ……………………………………………………………………………
………

Annexe 4.5

Lancer d'un dé : simulation sur tableur – fiche professeur

Niveau : 3^e ou 2^{nde}
Thème : statistique : simulation
Durée : environ une heure
Modalité : en salle informatique
Matériel : un ordinateur pour deux élèves, équipé d'un tableur
Prérequis : - notion de fréquence
- utilisation basique d'un ordinateur

Objectifs :
Pour cette simulation, les élèves peuvent avoir fait l'expérimentation de l'annexe 4.1 et y avoir dégagé les phénomènes de fluctuation des fréquences à la fois pour des échantillons de même taille et de taille différente.
Les élèves y prennent conscience qu'une simulation se programme.
Ils peuvent prendre conscience qu'il s'agit d'un modèle (ici d'équiprobabilité) qui est simulé, et non pas d'une expérience ; qu'on peut estimer l'adéquation du modèle avec l'expérience grâce à la comparaison des phénomènes de fluctuation de fréquences autour de « mêmes valeurs ».
Ils se rendent compte de la stabilisation des fréquences lorsque la taille des échantillons augmente.

Déroulement possible :
1. Présentation de l'activité

Si les élèves ont effectué une activité d'expérimentation, le professeur doit les amener à se poser la question « obtient-on la même chose avec la simulation qu'avec l'expérimentation ? »
Il fait inscrire aux élèves sur leur fiche, dans « objectifs de la séance » :
- Savoir réaliser une simulation sur tableur
- Répondre à la question « obtient-on la même chose qu'avec l'expérimentation ? »

C'est l'objectif annoncé aux élèves mais derrière celui-ci le professeur vise ceux énoncés dans le paragraphe précédent.

2. Simulation sur tableur

La question 1.a) est traitée en classe entière.
Seul ou par groupe de deux, les élèves effectuent les simulations.

3. Exploitation des résultats

Si les élèves sont en binôme, l'un lit les résultats des simulations à l'autre élève qui complète le tableau de distribution des fréquences pour 10 échantillons de taille 100. Ceci met en valeur la fluctuation pour un échantillon de taille donnée, ici 100, qui peut être comparée à ce qui a été obtenu lors de l'expérimentation.

Les élèves complètent le tableau de distribution des fréquences pour 10 échantillons de taille 400. Ceci met en valeur la fluctuation pour un échantillon de taille donnée, ici 400, qui peut être comparée à ce qui a été obtenu lors de l'expérimentation.

On peut encourager les élèves les plus rapides à simuler des échantillons de tailles bien supérieures.

Annexe 4.6

Lancer d'un dé : simulation sur tableur – commentaires

Cette activité comporte des tâches robustes : les formules ne sont pas à la charge des élèves, elles sont soit données, soit explicitées en classe entière ; l'implémentation sur tableur est assez simple, la séance ne comporte pas d'algorithmique dans le sens de la programmation. Chaque lancer de dé est matérialisé dans les cellules.
Le fait que le tableur génère un nouvel échantillon à chaque manipulation peut gêner les observations des élèves. Le tableur permet d'y remédier par une commande.
Enfin, les élèves voient bien les fluctuations d'échantillonnages.

Concernant l'introduction de la formule =ENT(6*ALEA() +1), on peut observer dans les pratiques des enseignants différentes tendances :

- Une affirmation dans le style « La formule =ENT(6*ALEA() +1) permet de générer un nombre entier aléatoire compris entre 1 et 6 ».
- Une explication des formules =ENT(nombre) et =ALEA() suivie d'une recherche de la formule visée ou d'une autre équivalente. La recherche peut être faite individuellement, en groupe ou en classe entière.
- Une introduction pas à pas, soit comparable à l'activité de l'annexe 4.4, dans laquelle les élèves, individuellement, en groupe ou en classe entière sont chargés d'expliciter chaque étape, soit sous forme d'affirmations successives.

La formule =ALEA.ENTRE.BORNES (1 ; 6) permet elle aussi de générer un nombre entier pseudo aléatoire entre 1 et 6 et d'alléger la séance. Dans le cas de l'utilisation de cette formule, les apprentissages mathématiques sont cependant amoindris.
Une réflexion des stagiaires sur la question de la génération d'un nombre aléatoire entre 1 et 6 est souhaitable, d'autant plus qu'elle porte sur un sujet plus vaste : les apprentissages des élèves mis en activité sur calculatrice ou sur ordinateur.

Un point n'est pas abordé dans la fiche élève : un ordinateur ne génère pas de l'aléatoire, mais du pseudo-aléatoire. Ce point est important pour que les élèves puissent comprendre qu'une simulation n'est pas une expérimentation.
Par ailleurs certains élèves peuvent comprendre l' « escroquerie » des formules =ENT(6*ALEA() +1) et =ALEA.ENTRE.BORNES(1 ; 6) qui supposent qu'un modèle d'équiprobabilité soit sous-jacent à la programmation de la simulation.

La séance comporte des tâches sensibles : elle permet de se focaliser sur les bases de la simulation sans problème de modélisation ni de programmation majeur, sans utilisation de mathématiques compliquées.

La feuille de calcul peut être préparée par l'enseignant, ou peut être réalisée par les élèves. La première option permet un gain de temps, la seconde permet de donner plus d'autonomie aux élèves et de construire davantage leurs savoirs en statistiques. En particulier, les élèves ont l'occasion de réfléchir à la différence entre un tableau d'échantillonnage de lancers et un tableau de données avec effectifs et fréquences.

La génération de 100 lancers peut être questionnée, puisque les fréquences en % et les effectifs sont alors égaux. On peut penser que la question e) n'a d'ailleurs aucun intérêt.

On peut se demander quel est l'apport du tableau de fréquences de 10 échantillons de taille 100 par rapport à un seul échantillon de taille 1000. Une réponse est que celui-ci permet d'observer les fluctuations d'échantillonnage.

Les élèves se prêtent volontiers à remplir les tableaux d'exploitation des simulations. Le calcul de l'étendue est une tâche robuste, les élèves constatant sans équivoque la fluctuation et la taille de cette étendue pour un petit nombre de lancers, puis son amoindrissement dans le cas d'un plus grand nombre de lancers.

La question de l'utilisation de la poignée de recopie et des problèmes qu'elle engendre si le $ n'est pas inséré dans les formules n'est pas abordée dans le scénario proposé.
On peut laisser les élèves constater le problème et le corriger à la main sans $ lors de cette séance ; ce qui motive l'utilisation du $ à une séance suivante.

On peut aussi se poser la question de l'utilité de cette simulation, alors que l'enseignant pourrait proposer directement, par exemple, celle de la somme des nombres obtenus en lançant deux dés. En effet, l'obtention de fréquences proches de $\frac{1}{6}$ lors d'un échantillon de grande taille est une évidence pour beaucoup d'élèves. Mais cette première simulation permet une bonne prise en main du tableur sur un exemple simple, et une comparaison avec les résultats de l'expérimentation.

Annexe 4.7

Lancer d'un dé : simulation sur calculatrice – fiche élève

On conçoit que si on lance un dé à 6 faces, non truqué, chacun des 6 numéros 1, 2, 3, 4, 5 et 6 a environ une chance sur 6 de sortir.
Dans cette activité, nous nous proposons de comparer les résultats fournis par plusieurs séries de lancers.

1. Echantillonnage à la calculatrice TI :
Tout d'abord, vérifier que les listes sont vides.
Pour simuler un lancer de dé, il est possible d'obtenir, à la calculatrice, des nombres aléatoires égaux à 1, 2, 3, 4, 5 ou 6.
On utilise la fonction **randInt**, en tapant **MATH PRB** puis **5 : randInt (1,6) ENTER.**
Pour obtenir une liste de 50 nombres aléatoires égaux à 1, 2, 3, 4, 5 ou 6, on tape **seq(randInt(1,6),I,1,50,1)** puis on valide avec **ENTER.**
On obtient la fonction **seq** en tapant : **LIST OPS** puis **5 : seq(** . Pour rentrer cette liste dans L_1, on tape **STO→**L_1.
Pour dresser la liste des 1 apparus, on tape L_1 **TEST 1 := 1 ENTER STO→**L_2.
Puis pour connaître le nombre de 1, il suffit de faire la somme de la liste 2 en faisant **QUIT** puis **sum(**L_2**)** et valider. **sum** s'obtient en tapant **LIST MATH** puis **sum(**.
Effectuez une série de 50 lancers de dés avec votre calculatrice et complétez le tableau

valeurs	1	2	3	4	5	6
effectifs						
fréquences						

2. Regroupez les résultats de votre série de lancers avec celle de votre voisin, puis complétez le tableau associé à cette nouvelle série de 100 lancers.

valeurs	1	2	3	4	5	6
effectifs						
fréquences						

3. Les fréquences obtenues lors de ces trois séries de lancers sont différentes. Vous observerez que pour chacune des valeurs, la distribution des fréquences **fluctue**.
Ce phénomène est appelé fluctuation d'échantillonnage.

4. Regrouper dans le tableau suivant les fréquences obtenues par 6 échantillons de taille 100 de la classe.
Représenter sur un même graphique les six distributions des fréquences.
Comment calcule-t-on les fréquences de chacune des valeurs dans l'échantillon total des 600 lancers à partir des fréquences de ces valeurs dans chacun des échantillons ? ……………..
…………………………………………………………………………………………………..
Finir de remplir le tableau. Représenter sur le graphique précédent les fréquences de l'échantillon total.

valeurs	1	2	3	4	5	6
fréquences échantillon 1						
fréquences échantillon 2						
fréquences échantillon 3						
fréquences échantillon 4						
fréquences échantillon 5						
fréquences échantillon 6						
fréquences échantillon total						

Annexe 4.8

Lancer d'un dé : simulation sur calculatrice – fiche professeur

Niveau : 2nde
Thème : statistique : simulation sur calculatrice
Durée : environ une heure
Modalité : en classe entière
Matériel : une calculatrice scientifique (ici Texas Instruments)
Prérequis : notion de fréquence

Objectifs :
Les élèves y prennent conscience qu'une simulation se programme.
Ils peuvent prendre conscience qu'il s'agit d'un modèle (ici d'équiprobabilité) qui est simulé, et non pas d'une expérience ; qu'on peut estimer l'adéquation du modèle avec l'expérience grâce à la comparaison des phénomènes de fluctuation de fréquences autours de « mêmes valeurs ».
Ils se rendent compte de la stabilisation des fréquences lorsque la taille des échantillons augmente.

Déroulement possible :
Pour cette simulation, les élèves peuvent avoir fait l'expérimentation de l'annexe 4.1 et y avoir dégagé les phénomènes de fluctuation des fréquences à la fois pour des échantillons de même taille et de taille différente.
Cette fiche élève est très guidée. Les élèves peuvent la faire seuls, jusqu'à la question 4. Le professeur peut projeter le tableau vide de la question 4 ; 6 élèves parmi les plus rapides viennent le remplir. Ainsi, tous les élèves travaillent sur les mêmes données. Le graphique est lui aussi projeté, la correction et la discussion en classe entière sont simplifiées.
Celle-ci permet de mettre en avant le fait que l'amplitude des fréquences diminue quand la taille de l'échantillon croît.
Pour le cas où une expérimentation a été faite, les comparaisons avec la simulation par calculatrice sont opportunes.

Annexe 4.9

Lancer d'un dé : simulation sur calculatrice – commentaires

Cette activité comporte des tâches robustes : les formules sont données, la séance ne comporte pas d'algorithmique dans le sens de la programmation. Les élèves voient bien les fluctuations d'échantillonnages.

Un point important n'est pas abordé dans la fiche élève : une calculatrice ne génère pas de l'aléatoire, mais du pseudo-aléatoire. Ce point est important pour que les élèves puissent comprendre qu'une simulation n'est pas une expérimentation.
Par ailleurs certains élèves peuvent comprendre l' « escroquerie » de la commande **randInt (1,6)** qui suppose qu'un modèle d'équiprobabilité soit sous-jacent à la programmation de la simulation.

Contrairement au tableur, les lancers de dé ne sont pas matérialisés dans les cellules.

A moins que les élèves aient déjà une bonne pratique de la gestion des listes sur leur calculatrice, la simulation est très guidée (c'est le cas de la fiche élève proposée en annexe 4.7). Par ailleurs, dans cette activité, la commande **randInt (1,6)** est imposée sans explication. Elle est du premier des trois types vus en annexe 4.6.
Globalement, cette activité est donc questionnable en termes d'apprentissages : elle est productive mais peu constructive.

La difficulté de la gestion de la classe lorsque les élèves n'ont pas tous la même marque de calculatrice peut être abordée avec les stagiaires.

Cependant, le fait que ce travail puisse être fait dans une salle quelconque constitue un atout.

Annexe 4.10

Lancer d'un dé : simulation sur *AlgoBox* – fiche élève

Objectifs de la séance :

- Apprendre à simuler un phénomène aléatoire via un logiciel de programmation.
- Comprendre la structure d'un algorithme avec une boucle itérative et des tests conditionnels programmés sur ordinateur.

But de l'activité : On lance un dé équilibré à 6 faces *n* fois, et on note la fréquence d'apparition de chacune des six faces.

Voici un algorithme programmé sur le logiciel *AlgoBox* permettant de simuler plusieurs lancers d'un dé équilibré à 6 faces et de calculer la fréquence d'apparition de chacune des six faces.

```
VARIABLES
    face EST_DU_TYPE NOMBRE
    n EST_DU_TYPE NOMBRE
    i EST_DU_TYPE NOMBRE
    face_un EST_DU_TYPE NOMBRE
    face_deux EST_DU_TYPE NOMBRE
    face_trois EST_DU_TYPE NOMBRE
    face_quatre EST_DU_TYPE NOMBRE
    face_cinq EST_DU_TYPE NOMBRE
    face_six EST_DU_TYPE NOMBRE
    Somme EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
    face_un PREND_LA_VALEUR 0
    face_deux PREND_LA_VALEUR 0
    face_trois PREND_LA_VALEUR 0
    face_quatre PREND_LA_VALEUR 0
    face_cinq PREND_LA_VALEUR 0
    face_six PREND_LA_VALEUR 0
    LIRE n
    POUR i ALLANT_DE 1 A n
        DEBUT_POUR
        face PREND_LA_VALEUR ALGOBOX_ALEA_ENT(1,6)
        SI (face==1) ALORS
            DEBUT_SI
            face_un PREND_LA_VALEUR face_un+1
            FIN_SI
        SI (face==2) ALORS
            DEBUT_SI
            face_deux PREND_LA_VALEUR face_deux+1
            FIN_SI
        SI (face==3) ALORS
            DEBUT_SI
            face_trois PREND_LA_VALEUR face_trois+1
            FIN_SI
        SI (face==4) ALORS
            DEBUT_SI
            face_quatre PREND_LA_VALEUR face_quatre+1
            FIN_SI
        SI (face==5) ALORS
```

```
                    DEBUT_SI
                    face_cinq PREND_LA_VALEUR face_cinq+1
                    FIN_SI
               SI (face==6) ALORS
                    DEBUT_SI
                    face_six PREND_LA_VALEUR face_six+1
                    FIN_SI
               FIN_POUR
          face_un PREND_LA_VALEUR face_un/n*100
          face_deux PREND_LA_VALEUR face_deux/n*100
          face_trois PREND_LA_VALEUR face_trois/n*100
          face_quatre PREND_LA_VALEUR face_quatre/n*100
          face_cinq PREND_LA_VALEUR face_cinq/n*100
          face_six PREND_LA_VALEUR face_six/n*100
          AFFICHER face_un
          AFFICHER face_deux
          AFFICHER face_trois
          AFFICHER face_quatre
          AFFICHER face_cinq
          AFFICHER face_six
          Somme PREND_LA_VALEUR
          face_un+face_deux+face_trois+face_quatre+face_cinq+face_six
          AFFICHER Somme
FIN_ALGORITHME
```

1) a) Que permet de calculer la formule : « ALGOBOX_ALEA_ENT(1,6) » ?
b) Ecrire l'algorithme correspondant en langage naturel, en précisant les **entrées**, le **traitement** et les **sorties** (on structurera la présentation afin de bien voir le début et la fin de chaque traitement).
c) Expliquer le rôle des variables n, *face* et *face_un*.
d) Que représentent les valeurs affichées en sortie ?
e) Les fréquences affichées pour chaque face en sortie, sont-elles données sous forme d'écriture décimale ou en pourcentage ?
2) Réécrire un algorithme donnant les mêmes résultats mais en utilisant des **listes** de nombres.

3) La probabilité d'obtenir une face i, où $i \in \{1;2;3;4;5;6\}$ est de $\frac{1}{6}$.
On souhaite mesurer les écarts observés entre les résultats et cette valeur théorique pour chacune des faces.
a) Ajouter à l'algorithme initial les lignes permettant d'afficher ces écarts.
b) Programmer sur *AlgoBox* ce nouvel algorithme.
c) Tester plusieurs fois le programme avec $n = 500$.
Atteint-on parfois des écarts inférieurs à 1 % ? Peut-on l'expliquer ?
d) Tester plusieurs fois le programme avec des valeurs de n de plus en plus grandes.

Annexe 4.11

Lancer d'un dé : simulation sur *AlgoBox* – fiche professeur

Niveau : 2^{nde}
Thème : statistiques – probabilités : simulation sur *Algobox*
Durée : environ une heure
Modalité : en demi-groupe en salle informatique
Matériel : un ordinateur équipé du logiciel *AlgoBox* par élève
Pré-requis : notion de fréquence. Utilisation du logiciel *AlgoBox*. Connaissance du langage et de la structure d'un algorithme : **entrée des données, traitement des données, sorties des résultats.** Passage du langage naturel au langage pseudo-codé. Connaissance de certaines instructions algorithmiques : **affectation d'une valeur à une variable, instruction conditionnelle, boucle itérative, liste de nombres.**

Objectifs :

- Prendre conscience qu'une simulation peut se formaliser par un algorithme puis se programmer.
- Travailler sur la transition *langage naturel – langage pseudo-code.*
- Pouvoir voir l'algorithme dans la modalité « *algorithme à modifier pour une autre simulation* », si les élèves ont fait les activités des **annexes 4.4** et **4.10.**
- Avec le tableur de l'**annexe 4.4** et le langage naturel et le programme *AlgoBox* de l'**annexe 4.10**, l'enseignant et l'élève ont trois registres de représentation d'algorithmes[13] et l'élève peut examiner la cohérence des modifications.
- Vérifier si c'est cohérent dans l'exécution sur ordinateur.
- Prendre conscience que l'expérience est simulée par l'intermédiaire d'un modèle sous hypothèse d'équiprobabilité et qu'on peut estimer l'adéquation du modèle avec l'expérience grâce à la comparaison des phénomènes de fluctuation de fréquences autours de « mêmes valeurs ».
- Se rendre compte de la stabilisation des fréquences lorsque la taille des échantillons augmente.

Déroulement possible :
Pour la simulation : les élèves peuvent avoir fait la simulation de l'**annexe 4.4** et y avoir dégagé les phénomènes de fluctuation des fréquences à la fois pour des échantillons de même taille et de taille différente.
Cette fiche élève est présentée comme un TP que les élèves peuvent faire seuls.
Le professeur peut projeter l'algorithme donné et le faire tourner devant les élèves.
La correction et la discussion en demi-groupe peuvent se faire en deux temps :

- d'abord les **questions 1) et 2)** ;
- puis la **question 3).**

[13] Voir les travaux dans le cadre d'une thèse de Didactique des Mathématiques de D. Laval

Annexe 4.12

Lancer d'un dé : simulation sur *AlgoBox* – commentaires

Cette activité comporte des tâches robustes : un algorithme complet est donné.

Les élèves voient bien les fluctuations d'échantillonnages. La question 3) permet de mettre en avant le fait que les différents écarts des fréquences à la valeur théorique $\frac{1}{6}$ diminuent quand la taille de l'échantillon croît.

Un point important n'est pas abordé dans la fiche élève : l'ordinateur, comme le calculatrice, ne génère pas de l'aléatoire, mais du pseudo-aléatoire. Ce point est important pour que les élèves puissent comprendre qu'une simulation n'est pas une expérimentation.
De plus comme cela est déjà mentionné dans les commentaires (**annexe 4.9**) de l'**annexe 4.7**, certains élèves peuvent comprendre l'« escroquerie » de la commande **ALGOBOX_ALEA_ENT(1,6)** qui suppose qu'un modèle d'équiprobabilité soit sous-jacent à la programmation de la simulation.

Contrairement au tableur, les lancers de dé ne sont pas matérialisés dans les cellules, ce qui rapproche de l'utilisation de la calculatrice.

On demande à l'élève une pratique de la gestion des listes dans le cadre de l'algorithmique. Toutefois la **question 2)** sur les listes n'est pas obligatoire pour répondre à la question 3).
Dans cette activité l'élève est peu guidé, l'activité est constructive.

Par ailleurs, dans cette activité, la commande **ALGOBOX_ALEA_ENT(1,6)** est imposée sans explication.

La difficulté de la gestion du travail en salle informatique peut être abordée avec les stagiaires.

Le fait que ce travail doit être fait dans une salle informatique et en demi-groupe peut constituer une difficulté pour l'organisation de la séance.

On peut étudier les avantages et les inconvénients de la programmation sur *AlgoBox* par rapport à la programmation sur calculatrice proposée en **annexe 4.7**.

Annexe 5

EXTRAITS D'UNE TABLE DE NOMBRES AU HASARD[14]

02 22 85 19 48 74 55 24 89 69 15 53 00 20 88 48 95 08
85 76 34 51 40 44 62 93 65 99 72 64 09 34 01 13 09 74
00 88 96 79 38 24 77 00 70 91 47 43 43 82 71 67 49 90
64 29 81 85 50 47 36 50 91 19 09 15 98 75 60 58 33 15
94 03 80 04 21 49 54 91 77 85 00 45 68 23 12 94 23 44
42 28 52 73 06 41 37 47 47 31 52 99 89 82 22 81 86 55
09 27 52 72 49 11 30 93 33 29 54 17 54 48 47 42 04 79
54 68 64 07 85 32 05 96 54 79 57 43 96 97 30 72 12 19
25 04 92 29 71 11 64 10 42 23 23 67 01 19 20 58 35 93
28 58 32 91 95 28 42 36 98 59 66 32 15 51 46 63 57 10
64 35 04 62 24 87 44 85 45 68 41 66 19 17 13 09 63 37
61 05 55 88 25 01 15 77 12 90 69 34 36 93 52 39 36 23
98 93 18 93 86 98 99 04 75 28 30 05 12 09 57 35 90 15
61 89 35 47 16 32 20 16 78 52 82 37 26 33 67 42 11 93
94 40 82 18 06 61 54 67 03 66 76 82 90 31 71 90 39 27
54 38 58 65 27 70 93 57 59 00 63 56 18 79 85 52 21 03
63 70 89 23 76 46 97 70 00 62 15 35 97 42 47 54 60 60
61 58 65 62 81 29 69 71 95 53 53 69 20 95 66 60 50 70
51 68 98 15 05 64 43 32 74 07 44 63 52 38 67 59 56 69
59 25 41 48 64 79 62 26 87 86 94 30 43 54 26 98 61 38
85 00 02 24 67 85 88 10 34 01 54 53 23 77 33 11 19 68
01 46 87 56 19 19 19 43 70 25 24 29 48 22 44 81 35 40
42 41 25 10 87 27 77 28 05 90 73 03 95 46 88 82 25 02
03 57 14 03 17 80 47 85 94 49 89 55 10 37 19 50 20 37
18 95 93 40 45 43 04 56 17 03 34 54 83 91 69 02 90 72

[14] Kendall et Babington Smith, table tirée de Christian Labrousse, Statistique, Tome2, Dunod, Paris, 1962

Annexe 6

Deux points au hasard sur un segment

Le problème posé

« On prend au hasard deux points A et B d'un segment donné de longueur 1 unité. »
On cherche à déterminer la probabilité que la longueur du segment [AB] soit plus grande que ½ .
Pensez-vous pouvoir proposer une valeur de façon intuitive ?
Comment pourrait-on utiliser une table de chiffres au hasard pour conjecturer cette probabilité ?»

La méthode statistique

On note X la longueur AB. X est une variable aléatoire. Pour estimer la valeur de $p\left(X \geq \frac{1}{2}\right)$, on va répéter un certain nombre de fois le tirage au sort des points A et B.
La série des valeurs de X obtenues constitue un échantillon statistique.

Résultats

Effectuer une simulation de 25 tirages de deux points et compléter les tableaux suivants :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Abscisse de A													
Abscisse de B													
AB													

	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Abscisse de A												
Abscisse de B												
AB												

Quelle est la fréquence de l'évènement $X \geq \frac{1}{2}$ dans cet échantillon ?

Annexe 7.1

Thèmes de simulation

1. Lancer de deux dés

On lance 50 fois deux dés à six faces. Déterminer la fréquence de chacune des sommes possibles.

2. Nombre de coups consécutifs égaux

On lance 100 fois une pièce de monnaie. Déterminer le nombre maximum de coups consécutifs donnant le même résultat.

Les thèmes suivants font appel à une modélisation plus complexe.

3. Promenade sur un tétraèdre

Une partie consiste à choisir un sommet d'un tétraèdre et parcourir les sommets de manière aléatoire jusqu'à revenir au sommet initial.

Déterminer sur 20 parties le nombre moyen de coups nécessaires pour revenir au point de départ.

4. Le lièvre et la tortue

On lance un dé. Si le 6 sort, le lièvre gagne. Sinon, la tortue marque un point. Elle gagne si elle atteint quatre points avant que le lièvre gagne. Déterminer sur 20 parties le nombre moyen de réussites du lièvre et de la tortue.

5. Les spaghettis

On coupe un spaghetti en trois et on considère l'évènement : les trois morceaux forment les trois côtés d'un triangle. Calculer la fréquence de cet évènement sur 20 simulations.

6. Approximation de pi

On considère un carré de côté 2 et le cercle de rayon 1 inscrit dans le carré. On tire au hasard un point du carré. Déterminer la fréquence de l'évènement « le point est à l'intérieur du cercle » sur 100 tirages.

7. Les chèvres et la voiture

Dans un jeu télévisé aux USA, on confrontait un candidat à trois portes fermées, en lui indiquant qu'il y avait une voiture cachée derrière l'une des trois et des chèvres derrière les deux autres. Le candidat devait désigner un des portes. L'animateur ouvrait alors l'une des autres portes, dévoilant une chèvre. Puis le candidat devait désigner l'une des portes encore fermées, il gagnait ce qu'il y avait derrière.

Simuler 20 parties. Le candidat avait-il intérêt à rester sur le même avis, à changer d'avis, ou cela était-il sans importance ?

8. Les naissances

On recommande aux couples souhaitant fonder une famille d'avoir des enfants jusqu'à ce qu'il y ait une fille et un garçon.

Déterminer sur 20 couples le nombre moyen d'enfants par famille.

Annexe 7.2

Thème n°1 : lancer de deux dés
Ce thème est intéressant à plusieurs titres :
Les élèves qui, dans l'ensemble, ne perçoivent pas de prime abord les différents cas de lancers en fonction de la somme obtenue sont confrontés à leur idée d'équiprobabilité ou de quasi-équiprobabilité. Historiquement, le paradoxe du duc de Toscane en est une bonne illustration.
Il permet sur un exemple simple de simulation d'aborder la non équiprobabilité.
En plus, le calcul de la probabilité théorique est tout à fait abordable pour des élèves de 3^e ou de 2nde et peut faire l'objet d'une activité en aval.

La simulation par table de chiffres au hasard est difficile, puisque 6 ne divise pas 10.
La programmation sur calculatrice ou sur ordinateur est possible.
Cependant, ce thème se prête bien à la simulation sur tableur et peut faire suite à l'activité qui est présentée en annexe 4.3 sur le lancer d'un dé. En voici un exemple :

A. Un exemple de fiche élève en classe de 3^e ou de 2nde :

Statistiques : simulation de la somme des nombres obtenus en lançant deux dés

1. Conjecture
a) On note s la somme des deux nombres. Quelles sont les valeurs possibles pour s ? ....
....
b) Prévoir la fréquence d'apparition d'une des issues après un grand nombre de lancers :
....

2. Simulation avec l'ordinateur
a) Préparer une feuille de calcul sous OpenOffice Calc, afin d'obtenir la feuille suivante :

E1 valeur de s

	A	B	C	D	E	F	G
1	issue du dé n°1	issue du dé n°2	somme s		valeur de s	effectif	fréquence en %
2							
3							
4							
5							

On veut simuler à l'aide du tableur le lancer de deux dés équilibrés. On va utiliser les mêmes fonctions dont dispose le tableur que lors de la simulation d'un lancer de un dé.
Dans la colonne A, on veut simuler le lancer d'un 1er dé ; dans la colonne B, celui d'un 2nd dé ; dans la colonne C, on veut faire apparaître la somme des deux nombres obtenus dans les colonnes A et B.
Rentrer les formules nécessaires dans les cellules A2, B2 et C2.

b) Recopier ces trois cellules jusqu'à la ligne 201. De cette façon, qu'a-t-on simulé ? ....
....

3. Exploitation des résultats
a) Dans la suite, vous utiliserez le symbole $ dans les formules afin de « geler » une ligne ou une colonne.
Compléter les cellules E2 à E12 avec les 11 issues possibles.
En E13, inscrire « total »
Compléter les cellules F2 à F12, puis les cellules G2 à G12, par les formules nécessaires, afin d'obtenir respectivement un tableau d'effectifs et un tableau de fréquences.
Compléter les cellules F13 et G13 afin d'obtenir respectivement l'effectif total et la somme des fréquences.

b) Réaliser de nouvelles simulations en appuyant sur la touche F9, en choisir une et remplir la 1ère ligne du tableau ci-dessous.
Modifier la feuille de calcul afin d'obtenir un échantillon de taille 5000. Remplir la 2e ligne du tableau.

	Somme des faces	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Simulation de 200 lancers	fréquence											
Simulation de 5000 lancers	fréquence											

c) Commenter les résultats obtenus entre autres par rapport à la conjecture émise à la question 1.
....
....
....
Que pourrait-on faire pour affiner, confirmer les différentes remarques ? ....
....
Le faire et commenter :...
....

B. Quelques commentaires concernant la fiche élève :

De même que pour la simulation du lancer d'un dé, la feuille de calcul peut être préparée par l'enseignant ou être laissée à la charge des élèves.

Suivant le niveau des élèves, leur capacité d'organisation et donc d'avoir à leur disposition un cahier ou un classeur comportant le travail effectué en amont, ainsi que le temps qui s'est écoulé entre les deux séances de simulation, on peut ou non mettre des rappels sur les fonctions du tableur.

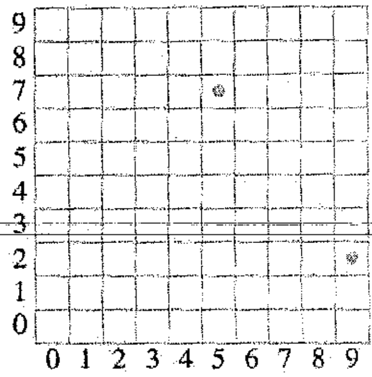
Dans le cas de la création d'échantillons de taille 100 on peut se poser les mêmes questions de pertinence quant aux calculs de fréquences que dans la simulation du lancer d'un dé.

Un retour à l'expérimentation, par exemple à la maison, en amont ou en aval de cette activité de simulation, peut se questionner.

Annexe 8.1

Exercices de simulation

Exercice 1 : les galettes aux écus (d'après Indice Bordas 2nde, 2000)
Un boulanger fait des galettes aux écus. Pour les placer au hasard, il mélange les écus à la pâte : pour 100 galettes, il met 100 écus et mélange soigneusement. Puis il coupe la pâte en 100 morceaux de même volume. Ces morceaux de pâte se transformeront en galettes.
Combien de galettes contiendront, en moyenne, 0, 1, 2, 3, ou plus de 3 écus ?
Pour répondre à la question, on simule la situation de la manière suivante :
Le grand carré de la figure représente la pâte, et les 100 petits carrés, les galettes. Pour les 100 écus mêlés à la pâte, on prend 100 tranches de deux chiffres au hasard (utiliser une table de chiffres au hasard) qui donnent les « coordonnées » des écus successifs.
Le premier écu est dans la galette (7 ; 5) ; le deuxième dans la galette (2 ; 9) ; etc.
Recopier et compléter, d'une part la figure, d'autre part le tableau suivant :

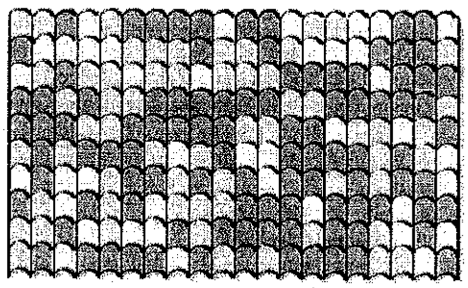


Nombre d'écus par galette	0	1	2	3	Plus que 3
Nombre de galettes					

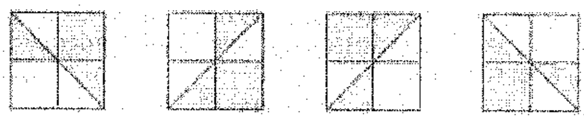
En programmant cette situation, vérifier que la distribution des écus est proche de la distribution « théorique » :

Nombre d'écus par galette	0	1	2	3	Plus que 3
Nombre de galettes	36,6	37	18,5	6,1	1,8

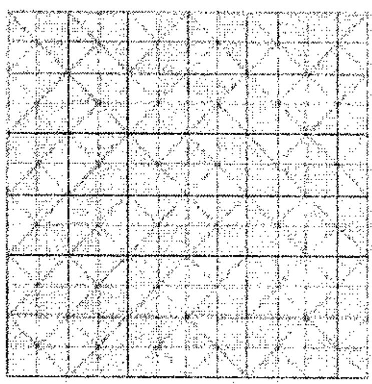
Exercice 2 : des œuvres aléatoires (d'après Indice Bordas 2nde, 2000)
Les tables de chiffres au hasard permettent de simuler des compositions non régulières mais respectant certaines proportions de manière parfois assez esthétique.
a) Voici par exemple un toit de tuiles réalisé aléatoirement mais de manière à respecter la proportion de 30% de tuiles rosées, 50% de rouges et 20% de jaunes.
Tirer, à votre tour, une suite de 200 chiffres au hasard, associant respectivement les chiffres 0 ; 1 ; 2 aux tuiles rosées. 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 aux tuiles rouges et 3 ; 4 aux tuiles jaunes, et dessiner le résultat.



b) Voici un autre exemple obtenu en disposant au hasard les quatre motifs de base suivants sur un quadrillage 6 x 6 :



On a obtenu cette composition à partir d'une table de chiffres au hasard en prenant des chiffres deux par deux et en associant le premier motif aux nombres de 0 à 24, le second aux nombres de 25 à 49, le troisième aux nombres de 50 à 74 et le quatrième aux nombres de 75 à 99. Ecrire une suite de 72 chiffres compatible avec cette composition.
Inventer vos propres motifs et vos propres proportions, simuler des tirages au hasard et dessiner « vos » créations.



Exercice 3 :
Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.
Une urne contient 50 boules comprenant 13 blanches, 20 rouges et 17 noires.
a) Expliquer comment utiliser une table de chiffres au hasard pour simuler le tirage au hasard d'une boule de l'urne.
Utiliser ce procédé pour simuler 10 tirages successifs (la boule tirée étant remise à chaque fois dans l'urne) et donner leurs résultats.
Calculer la distribution des fréquences des trois couleurs sur cet échantillon.
b) On a procédé à 100 tirages successifs et on a obtenu les couleurs suivantes :
R/R/R/R/N/R/N/B/N/R/N/R/N/B/N/R/B/R/N/B/N/B/N/R/B/N/N/R/R/R/B/B/N/N/N/R/R/R/R/
R/B/R/N/R/R/N/N/B/B/N/N/B/R/R/R/R/R/R/R/R/B/N/R/R/B/N/N/N/R/N/N/N/N/N/B/R/R/R/
N/B/R/B/B/N/R/R/R/R/B/R/R/R/R/B/N/R/B/B/R/N/N.
On appelle désormais épreuve la répétition de tirages jusqu'à ce que les trois couleurs soient apparues. En utilisant la liste de résultats ci-dessus, calculer, sur les huit premières épreuves, le nombre moyen de tirages nécessaires pour que les trois couleurs soient apparues.
c) On a répété successivement 50 épreuves. Le nombre moyen de tirages pour les 50 épreuves a été de 6,8 et nombre moyen de tirages pour les 30 premières a été de 5,2. Déterminer le nombre moyen de tirages pour les 20 dernières épreuves.

Exercice 4 :
1. On dispose d'une pièce truquée qui, lorsqu'on la lance, tombe sur Pile avec une probabilité de ¼ et sur Face avec une probabilité de ¾. Expliquer comment utiliser une table de chiffres au hasard pour simuler le lancer de cette pièce.
2. En utilisant cette méthode et une table de chiffres au hasard, indiquer les résultats des 10 premiers lancers et les représenter par un histogramme.
3. André et Bernard utilisent cette méthode pour jouer au jeu suivant :
- André gagne dès que la séquence Pile Face Pile apparaît
- Bernard gagne dès que la séquence Pile Pile Face apparaît

En utilisant les 10 lancers ci-dessus et en continuant la simulation si nécessaire, indiquer qui a gagné les trois premières parties.

4. André et Bernard veulent simuler le lancer d'une pièce qui tombe sur Pile avec une probabilité de 1/3 et sur face avec une probabilité de 2/3. Expliquer comment utiliser une table de chiffres au hasard pour simuler le lancer de cette pièce. Comment simuler le lancer de cette pièce avec la calculatrice, le tableur, ou un logiciel de programmation ?

Exercice 5 : (d'après le site de G. Constantini)
On lance deux dés bien équilibrés et à 6 faces numérotées de 1 à 6. On fait le produit des résultats obtenus. Si le produit est un nombre pair, on perd 2 €. Par contre, si le produit est un nombre impair, on gagne 5 €. Le but de l'exercice est d'étudier si ce jeu est intéressant pour le joueur.

1. Laquelle de ces formules permet de simuler le produit des résultats des deux dés ?
   =ENT(24*ALEA() + 1)
   =ENT(36*ALEA() +1)
   =ENT(6*ALEA() + 1)*ENT(6*ALEA()+1)
   =(ENT(6*ALEA()+1))^2
2. Une simulation de 100 parties avec un tableur a donné les résultats suivants :

Gain du joueur	- 2 € (pair)	5 € (impair)	Total
Effectif	70	30	100

   Calculer, avec le tableau ci-dessus, le gain moyen du joueur :
   ....
   D'après cette simulation, le jeu est-il favorable au joueur ? ....

3. On va maintenant étudier les fréquences théoriques.
   a. Compléter le tableau suivant donnant tous les produits possibles en lançant deux dés :

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

   b. En déduire la distribution des fréquences théoriques pour les résultats pairs et impairs :

Gain du joueur	- 2 €	5 €	Total
Fréquence			1

   Calculer le gain moyen du joueur à partir des fréquences théoriques : ....
   ....
   D'après la théorie, le jeu est-il favorable au joueur ?
4. Quel phénomène permet d'expliquer la différence entre la conclusion obtenue après simulation et la conclusion obtenue après étude théorique ?.....................................
   ....

Annexe 8.2

Commentaires sur l'exercice 1 : les galettes aux écus
Cet exercice est riche : il comporte deux modélisations du problème sous des formes très différentes.

Tout d'abord, la situation est modélisée par un quadrillage, sur lequel les galettes sont repérées dans le même esprit qu'à la bataille navale. Cette modélisation est proche, spatialement, du problème réel.
Les élèves utilisent une table de chiffres au hasard afin de générer des « coordonnées » pour les écus. L'utilisation de la table est, dans cet exercice, directe, puisqu'un premier chiffre fournit « l'abscisse » du 1er écu, un 2^{e} chiffre fournit « l'ordonnée » de ce même écu, un 3^{e} chiffre « l'abscisse » du 2^{e} écu, un 4^{e} chiffre fournit « l'ordonnée » de ce 2^{e} écu, etc.
La fin de cette première partie consiste en un décompte.

La seconde modélisation est laissée à la charge des élèves.
Ils peuvent programmer sur tableur, ou sur un logiciel d'algorithmique. Dans les deux cas, la modélisation est éloignée de la réalité de l'expérience, et devient complexe. Elle demande une grande abstraction et une bonne connaissance des possibilités de l'outil utilisé, ainsi qu'une importante prise d'initiative.

La programmation sous tableur peut se faire en générant 100 nombres aléatoires entre 1 et 100, symbolisant le numéro de la galette dans laquelle va l'écu. En utilisation la formule =NB.SI(plage;critère), on compte le nombre de 1, de 2,... de 100. Puis, toujours avec la même formule, on compte le nombre de « galettes » ayant 0, 1, 2, 3, ou plus que 3 écus.

La programmation sous forme algorithmique est plus lourde. Elle suppose la gestion d'une liste de longueur 100, de boucles du type « pour i allant de 1 à 100 », d'affectations du type « a prend la valeur a + 1 » pour le comptage.

Cet exercice est long, il ne peut être traité en temps limité mais constitue un devoir maison intéressant. Selon le « passé de la classe » et son niveau, une partie de la 2nde modélisation peut être prise en charge soit par l'énoncé, soit par un traitement en classe.

Commentaires sur l'exercice 3 :
La première question suppose de prendre les chiffres deux à deux dans la table de chiffres au hasard, puis d'affecter par exemple les 26 premiers à la couleur blanche, les 40 suivants à la couleur rouge, et les 34 autres à la couleur noire. Suivant que ce type de question a déjà été traité ou non, elle demande de la part des élèves plus ou moins de prise d'initiative.

La 2^{e} question demande une bonne compréhension de la consigne.

La 3^{e} question demande de mettre en œuvre une connaissance ancienne (abordée dès la classe de 4ème) : la moyenne pondérée. La reconnaissance de cette connaissance dans ce contexte peut être source de difficulté. Ensuite, les élèves ont à résoudre une équation du 1er degré, algébriquement ou arithmétiquement.

Suivant le « passé de la classe », cet exercice peut servir en devoir maison ou devoir en classe.

Commentaires sur l'exercice 5 :
Cet exercice paraît être un bon candidat pour un devoir en classe : il ne suppose pas l'utilisation de l'ordinateur ni de la calculatrice, il peut se faire en temps limité.

La question 1 permet de tester la compréhension qu'ont les élèves de la génération de nombres entiers aléatoires de 1 à 6 dans une situation à modéliser a priori nouvelle pour eux.
La question 2 est un calcul de moyenne, qui peut être un bon précurseur à la notion d'espérance mathématique. Elle conduit à un jeu apparemment favorable au joueur.
La question 3 est un calcul de probabilités et d'espérance mathématique. L'énoncé peut être modifié dans ce sens. La tâche est simple, l'énoncé la découpe par l'intermédiaire des deux tableaux à compléter.
La question 4 permet de tester la compréhension qu'ont les élèves de la fluctuation d'échantillonnage.

Annexe 9

Exercice niveau $1^{ère}$

Enoncé de l'exercice :

Un joueur disposant de 50 € s'engage dans une partie de PILE ou FACE avec la règle suivante :
Si FACE apparaît, il perd sa mise ;
Si PILE apparaît, il gagne le double de sa mise.
La joueur commence par miser 1 €, et rejoue en doublant sa mise tant qu'il perd ; il s'arrête dès qu'il gagne ou qu'il ne peut plus miser.
La pièce est supposée équilibrée.

1. Simulation :
   a) ~~Procéder à une série de 500 simulations de ce jeu.~~
   b) Calculer la moyenne empirique du gain algébrique du joueur.
   Version $1^{ère}$ S : calculer la variance empirique.

2. Modélisation par une loi de probabilité :
   a) Déterminer le nombre maximal N de lancers que le joueur peut réaliser.
   b) Calculer l'espérance de gain du joueur.
   Version $1^{ère}$ S : calculer la variance.

Activité des stagiaires :

1. Faire l'exercice.
2. Quelles sont les notions mises en jeu, quelles sont les activités possibles et les difficultés attendues des élèves ? Bien distinguer les élèves de série S et ceux de séries ES et L ; en particulier, les élèves de série S disposent de la formule donnant la somme des n premiers termes d'une suite géométrique.
3. Quelle est son utilité ?
4. Où le placer dans la progression ?

Annexe 10

Points du programme relevant de l'étude des intervalles de fluctuation

En Seconde :

Contenus	Capacités	Commentaires
Échantillonnage Notion d'échantillon. Intervalle de fluctuation d'une fréquence au seuil de 95%. Réalisation d'une simulation.	- Concevoir, mettre en œuvre et exploiter des simulations de situations concrètes à l'aide du tableur ou d'une calculatrice. - Exploiter et faire une analyse critique d'un résultat d'échantillonnage.	Un échantillon de taille n est constitué des résultats de n répétitions indépendantes de la même expérience. À l'occasion de la mise en place d'une simulation, on peut : - utiliser les fonctions logiques d'un tableur ou d'une calculatrice, - mettre en place des instructions conditionnelles dans un algorithme. L'objectif est d'amener les élèves à un questionnement lors des activités suivantes : - l'estimation d'une proportion inconnue à partir d'un échantillon ; - la prise de décision à partir d'un échantillon.

En Première ES, L et S :

Avec la notion de variable aléatoire et la découverte de la loi binomiale, le programme de Première fournit les outils mathématiques qui permettent, en prenant appui sur la réflexion initiée en Seconde autour de la prise de décision, de construire un intervalle de fluctuation et d'établir une démarche de prise de décision valables en toute généralité pour une proportion et une taille d'échantillon quelconques. Ce thème se prête en particulier à la mise en œuvre d'algorithmes et de raisonnements logiques et, au-delà, à une adaptation de ces raisonnements au domaine de l'aléatoire et de l'incertain.

Contenus	Capacités	Commentaires
Échantillonnage Utilisation de la loi binomiale pour une prise de décision à partir d'une fréquence.	Exploiter l'intervalle de fluctuation à un seuil donné, déterminé à l'aide de la loi binomiale, pour rejeter ou non une hypothèse sur une proportion.	L'objectif est d'amener les élèves à expérimenter la notion de « différence significative » par rapport à une valeur attendue et à remarquer que, pour une taille de l'échantillon importante, on conforte les résultats vus en classe de seconde. L'intervalle de fluctuation peut être déterminé à l'aide d'un tableur ou d'un algorithme.

En Terminale :

Contenus	Capacités	Commentaires
Intervalle de fluctuation	Connaître, pour n assez grand, l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % : $\left[p-1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}, p+1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$ où p désigne la proportion dans la population.	On admet le résultat ci-contre, qui est conforté grâce à la simulation (Terminale ES et L). Avec les exigences usuelles de précision, on pratique cette approximation dès que $n \geq 30$, $n\,p \geq 5$ et $n\,(1-p) \geq 5$. En majorant $1{,}96\sqrt{p\,(1-p)}$, on retrouve l'intervalle de fluctuation présenté en classe de seconde. La problématique de prise de décision, déjà rencontrée, est travaillée à nouveau.

Estimation Intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95. Niveau de confiance.	- Estimer une proportion inconnue à partir d'un échantillon (Terminales ES et L). Estimer par intervalle une proportion inconnue à partir d'un échantillon (Terminale S). - Déterminer une taille d'échantillon suffisante pour obtenir, avec une précision donnée, une estimation d'une proportion au niveau de confiance 0,95.	Les attendus de ce paragraphe sont modestes et sont à exploiter en lien avec les autres disciplines. On énonce que p est élément de l'intervalle $\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}}, f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ avec un niveau de confiance de plus de 95 %, où f désigne la fréquence observée sur un échantillon de taille n. Avec les exigences usuelles de précision, on utilise cet intervalle dès que $n \geq 30$, $n\,p \geq 5$ et $n\,(1-p) \geq 5$. La simulation de sondages sur tableur permet de sensibiliser aux fourchettes de sondage. Il est important de noter que, dans d'autres champs, on utilise l'intervalle $\left[f-1{,}96\frac{\sqrt{f(1-f)}}{\sqrt{n}}, f+1{,}96\frac{\sqrt{f(1-f)}}{\sqrt{n}}\right]$ qu'il n'est pas possible de justifier dans ce programme.

Annexe 11.1

Prise de décision – mesure de radioactivité[15]

On mesure en laboratoire, avec un compteur Geiger, un objet pouvant être « radioactif ». Le compteur est réglé selon une certaine sensibilité et on effectue une mesure à un mètre de l'objet, pendant dix secondes.
L'instrument compte 37 désintégrations ou « coups ». Cependant, avec ce réglage et dans ces conditions, une mesure de « bruit de fond » (correspondant à l'environnement du laboratoire) donne en moyenne un comptage de 30 coups.
La question qui se pose est de savoir si la différence observée est assez importante pour considérer l'objet comme « radioactif ».

On suppose que dans le laboratoire, durant chaque centième de seconde, le compteur est aléatoirement susceptible de compter un coup de bruit de fond avec une probabilité p.

1. a. Justifier que $p = 0{,}03$.
b. On souhaite simuler à l'aide d'un tableur la situation décrite ci-dessus.
Quels sont les résultats possibles de la formule **= ENT(ALEA() + 0,03)** ?
b. Pourquoi a-t-on une probabilité de 0,03 de voir afficher la valeur 1 par la formule **= ENT(ALEA() + 0,03)** ?

1. a. Simuler en colonne A un comptage de bruit de fond pendant 10 secondes, puis recopier vers la droite pour obtenir la simulation de 100 comptages.
b. Calculer la moyenne des 100 comptages simulés. Est-elle proche de 30 coups ? (Faire F9 pour obtenir d'autres simulations.)
c. Un comptage supérieur ou égal à 37 coups vous semble-t-il exceptionnel ?

2. a. Déterminer les paramètres n et p de la loi binomiale suivie par la variable aléatoire X modélisant un comptage de bruit de fond pendant dix secondes.
b. Sur une nouvelle feuille, calculer une table fournissant $P(X \leq k)$ pour k allant de 0 à 1 000.

3. Soit N est le plus petit entier tel que : $P(X \leq N) \geq 0{,}95$. On dira qu'il y a radioactivité significative si le nombre de coups est supérieur ou égal $N + 1$.
a. Déterminer la valeur de N.
b. On observe un comptage de 37 coups. Peut-on considérer que la radioactivité est significative ?
c. Quelle est la probabilité de considérer que la radioactivité est significative alors que c'est un bruit de fond ?

4. On considère un objet radioactif pour lequel, durant chaque centième de seconde, le compteur est aléatoirement susceptible de compter un coup avec la probabilité 0,05. On considère la variable aléatoire Y modélisant le comptage des désintégrations pendant dix secondes.
a. Donner les paramètres de la loi binomiale suivie par Y.
b. Déterminer la probabilité de ne pas détecter comme radioactif l'objet considéré.

---

[15] Source : d'après les ressources pour la classe de première générale et technologique – statistiques et probabilités – juin 2011, p. 71

Annexe 11.2

Prise de décision – santé publique

Partie I : Étude des fluctuations d'échantillons

Une urne contient 40 % de boules noires et 60 % de boules blanches. On prélève au hasard une boule (chaque boule a les mêmes chances d'être prélevée).
Pour simuler le tirage d'une boule dans cette urne, il suffit avec un tableur d'entrer dans la cellule A1 la formule : **=ENT(ALEA() + 0,4)**.

1. a. Quels sont les résultats possibles de la formule **=ENT(ALEA() + 0,4)** ?
b. Pourquoi a-t-on une probabilité de 0,4 de voir afficher la valeur 1 par la formule **=ENT(ALEA() + 0,4)** ?
c. Préciser ce que simule cette formule en lien avec l'urne.

2. On prélève au hasard avec remise 100 boules dans l'urne. Cela constitue un échantillon de taille 100.
Pour simuler cet échantillon sur le tableur, il suffit de recopier le contenu de la cellule A1 jusqu'en A100.
En entrant en A102 une formule que l'on déterminera, calculer la fréquence f des boules noires observées sur cet échantillon.

3. On souhaite visualiser les résultats de 50 échantillons de taille 100 à la fois.
a. Sélectionner les cellules de A1 à A102 puis recopier vers la droite jusqu'à la colonne AX.
b. Sélectionner la ligne 102, puis cliquer sur l'icône de l'assistant graphique, choisir Nuages de points et cliquer sur Terminer.

4. a. Pourquoi les 50 échantillons de taille 100 ne donnent-ils pas la même fréquence ?
b. Sur 50 échantillons de taille 100 apparaissant sur le graphique, combien, en moyenne (faire plusieurs fois F9), donnent une fréquence f n'appartenant pas à l'intervalle [0,3 ; 0,5] ?
c. Sur un échantillon de taille 100, est-il rare d'observer 45 % de boules noires ? Est-ce possible ?
d. Sur un échantillon de taille 100, est-il rare d'observer 50 % de boules noires ? Est-ce possible ?
e. Sur un échantillon de taille 100, est-il rare d'observer 70 % de boules noires ? Est-ce possible ?

5. a. Reprendre les questions 2. à 4. avec 50 échantillons de taille 1000.
b. Quelle différence observe-t-on, sur le graphique, entre le comportement des fréquences des échantillons de taille 100 et celui des fréquences des échantillons de taille 1000 ?
c. Le hasard peut-il faire « n'importe quoi » ? Expliquer votre réponse.

Partie II : Une application au cas de la ville de Woburn

La ville de Woburn aux États-Unis a connu 9 cas de leucémie parmi les 5969 garçons de moins de 15 ans sur la période 1969-1979.
La fréquence des leucémies pour cette tranche d'âge aux États-Unis est égale à 0,00052.
(Source : Massachussets Departement of public Health).
Les autorités concluent qu'il n'y a rien d'étrange dans cette ville.

Le but de cette partie est d'étudier la conclusion des autorités.
La population des États-Unis étant très grande par rapport à celle de Woburn, on peut considérer que l'échantillon résulte d'un tirage avec remise et simuler des tirages de taille n avec un tableur.

1. On peut considérer que les garçons de Woburn constituent un échantillon de taille n = 5969 extrait de la population des États-Unis.

a. En s'inspirant de la partie I, simuler à l'aide du tableur 100 échantillons de taille 5969 prélevés au hasard dans une population de garçons où la probabilité de leucémie est p = 0,00052 (cas « normal »), pour étudier si les observations de Woburn, dans le cas des garçons, sont ou non « statistiquement anormales ».

b. Quelle est votre conclusion concernant les cas de leucémies observés chez les garçons à Woburn? Justifier votre réponse.

2. Dans cette question, on souhaite déterminer un intervalle de fluctuation au seuil de 95 %, pour commenter la conclusion des autorités.

a. Justifier que l'on ne peut pas utiliser l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % vu en seconde.

b. On utilise alors un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % d'une loi binomiale associée à une variable aléatoire X.
Déterminer les paramètres de cette loi binomiale.
A l'aide du tableur ou d'un logiciel algorithmique, déterminer :

- le plus petit entier a tel que $P(X \leq a) > 0{,}025$;
- le plus petit entier b tel que $P(X \leq b) \geq 0{,}975$.

c. Conclure.

Annexe 12

Thèmes de devoir maison ou de TP

Partie commune aux deux thèmes :
Le but est de créer une séance de TP ou un devoir maison comprenant une simulation suivie d'un calcul de probabilités à l'aide d'arbres.
Le document doit amener les élèves à :
- Simuler la situation via l'utilisation d'un tableur ou d'un langage de programmation.
- Conjecturer la probabilité cherchée.
- A l'aide d'un arbre, déterminer cette probabilité.

Thème 1 à destination des classes de 3e et de 2nde : *le paradoxe du duc de Toscane*
En jouant plusieurs fois au dé, le Duc de Toscane aurait remarqué qu'en lançant trois dés et en faisant la somme des chiffres de la face supérieure, il obtenait plus souvent la somme 10 que la somme 9. Cette constatation le surprenait car chacune de ces sommes peut être obtenue de six façons différentes. Par exemple, la somme 10 est obtenue dans : 1 + 3 + 6 ; 1 + 4 + 5 ; 2 + 2 + 6 ; 2 + 3 + 5 ; 2 + 4 + 4 ; 3 + 3 + 4.
Comment expliquer ce paradoxe ?

Thème 2 à destination des classes de 1ère et de Terminale (nécessitant une modélisation plus complexe) : *le robot*
Soit un **robot R** qui part du centre d'une table quadrillée comme ci-dessous :

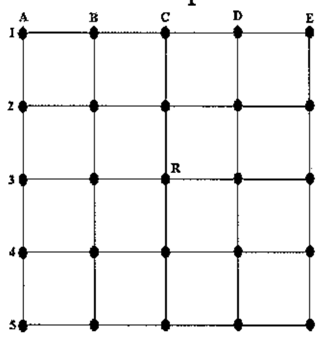


Fig. 2

Il peut parcourir trois pas au hasard. Chaque pas est représenté par un segment parallèle aux bords, dont les extrémités sont des nœuds du quadrillage. Par exemple [C3C2].
Le **robot R** peut revenir sur ses pas.
Quand à la suite d'un pas le **robot R** se trouve sur un des quatre rebords de la table (ex. : C1), le robot tombe et la « partie » est terminée.
Le **robot R** part du nœud central du quadrillage, indiqué sur la figure en C3.
Déterminer la probabilité que le robot chute avant la fin du parcours de trois pas ou au troisième pas.

Annexe 13

Compte rendu d'expérimentation d'un devoir
A remplir par le stagiaire avant la dernière journée de stage

1. Le contexte

Classe :

Type d'établissement (collège, lycée polyvalent, lycée professionnel, ZEP, autre ...) :

Position du devoir à l'intérieur de la séquence statistiques et probabilités :

Position dans la progression annuelle :

S'agit-il d'un devoir maison ou d'un devoir de contrôle ?

2. Enoncé

Le stagiaire doit prévoir en nombre suffisant des photocopies du document distribué aux élèves.
Apporter aussi le barème et le corrigé polycopié distribué aux élèves s'il y a lieu.

3. Bilan

Qu'ont fait les élèves ? Quelles difficultés ont-ils rencontrées ? Eventuellement moyenne des notes à l'exercice.

Le devoir était-il bien adapté aux objectifs ? Quelles alternatives voyez-vous aujourd'hui ? Argumenter.

Apporter, si possible, des copies d'élèves qui illustrent vos réponses.

Annexe 14

Compte rendu d'expérimentation d'une séance avec les élèves
A remplir par le stagiaire avant la dernière journée de stage

1. Le contexte

Classe :

Type d'établissement (collège, lycée polyvalent, lycée professionnel, ZEP, autre…) :

Position de la séance à l'intérieur de la séquence statistiques et probabilités :

Position dans la progression annuelle :

Points du programme vus antérieurement et réinvestis à cette occasion :

2. Contenu de la séance

Le stagiaire doit prévoir en nombre suffisant des photocopies du document distribué aux élèves.

3. Déroulement

Durée :

Qu'ont fait les élèves ?

Quelles difficultés ont-ils rencontrées ?

Quelles aides leur avez-vous apportées ?

4. Bilan

Les objectifs ont-ils été atteints ? Argumenter.

Quelles alternatives à cette séance voyez-vous aujourd'hui? Eventuellement, quelles améliorations ?

Annexe 15

Document extrait de Ducel (2011) : « Document support pour l'exposé APMEP « Les probabilités en Troisième et en Seconde », APMEP Caen, 06 avril 2011

Continuité *Troisième/Seconde* **(Réflexions)**

Troisième	Seconde
Introduction du vocabulaire et définitions: expérience aléatoire, issue, univers des possibles, événement, probabilités.	Reprise et approfondissement du vocabulaire : modèle.
Sensibilisation au fait qu'un événement est décrit par la liste de ses issues (issues favorables), approche intuitive de la notion d'événement.	Définir un événement comme un ensemble d'issues. Événement considéré comme un sous-ensemble de l'univers des possibles.
Sensibilisation aux notations d'un événement : conjonction et réunion de deux événements sur des cas très simples.	Utilisation des notations « ET » et « OU » et des symboles ensemblistes correspondants. Négation d'un énoncé. Travail de logique à partir des événements.
Sensibilisation à la règle de calcul : dans le cas de deux événements A et B incompatibles : $P(A \text{ ou } B)= P(A)+P(B)$	Mise en place et utilisation de la formule générale $P(A \text{ ou } B)+P(A \text{ et } B)=P(A)+P(B)$[16]
Sensibilisation au risque encouru dans le choix du paramètre p d'une situation de type « Pile ou Face ».	Quantification du risque et estimation de p par intervalle de confiance
Sensibilisation à la notion de modèle probabiliste.	Utilisation du vocabulaire : modèle probabiliste. Sensibilisation à la comparaison de modèles et à la réflexion sur la modélisation.
Expériences à une épreuve et sensibilisation aux expériences à deux épreuves.	Travail sur des expériences à deux épreuves, sensibilisation à des généralisations possibles.
Utilisation concrète d'arbres de dénombrement avec peu de branches : construction explicite. Sensibilisation aux arbres de dénombrement avec un nombre important de branches.	Utilisation d'arbres de dénombrements avec un nombre important de branches. Nécessité de ne pas dessiner toutes les branches : construction implicite.
Sensibilisation à la simulation. Construction de situations aléatoires décrites par un même modèle probabiliste explicitées sous des habillages différents.	Utilisation de la simulation informatique pour estimer des probabilités à partir du modèle déterminé, pour illustrer les résultats de statistique inférentielle au programme.

[16] ou encore $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$