

Actes du séminaire national de didactique des mathématiques

Année 2010

Edité par

Maha Abboud-Blanchard

Laboratoire de Didactique André Revuz

Université Paris Diderot – Paris 7

et

Annick Flückiger

Dimage, Université de Genève

Sommaire

Introduction.....	1
Séminaire national des 15 et 16 janvier 2010	3
Viviane DURAND-GUERRIER	5
Les relations entre Logique, Preuve et Apprentissages mathématiques : une question d'actualité en didactique des mathématiques ? (résumé)	
Thomas BARRIER	7
Jeux de validation, stratégies et modélisations	
Nadia DOUEK	29
Approche de la démonstration en collège	
Serge QUILIO	43
L'action du professeur et le temps des situations (résumé)	
Jean-Philippe GEORGET	45
Activités de recherche et de preuve entre pairs à l'école élémentaire : perspectives ouvertes par les communautés de pratique d'enseignants	
Jean Baptiste LAGRANGE, Michèle ARTIGUE, Claire CAZES, Jean-Michel GELIS, Fabrice VANDEBROUCK	67
Représenter des Mathématiques avec l'ordinateur	
Séminaire national des 26 et 27 mars 2010	101
André PRESSIAT	103
Argumentations autour du raisonnement et de la démonstration mathématique dans l'enseignement	
Jean-Louis IMBERT	125
L'intégration des TICE dans les pratiques mathématiques à l'école primaire (résumé)	
Fernando HITT	127
Les représentations fonctionnelles dans les processus d'apprentissage de la covariation comme prélude au concept de fonction dans un contexte d'apprentissage collaboratif, débat scientifique et d'auto – réflexion (ACODESA)	
Christine DEL NOTARO	145
Chiffres mode d'emploi. Exploration du milieu mathématique et expérience à l'école primaire autour de quelques critères de divisibilité.	
Claire MARGOLINAS, Olivier RIVIERE, Floriane WOZNIAK	173
L'énumération : reprise en vue d'une diffusion aux professeurs des écoles et prolongements (résumé)	
Michèle GANDIT	175
Etude épistémologique et didactique de la preuve en mathématiques et de son enseignement. Une ingénierie de formation	

Sommaire

En complément des actes 2009 : Séminaire national 16-17 octobre 2009	199
Éric Roditi	201
Le développement des pratiques enseignantes en mathématiques d'un professeur d'école : une étude sur dix années d'exercice	
Programmes des séminaires 2010	229

Le séminaire national de didactique des mathématiques, organisé par l'association pour la recherche en didactique des mathématiques ARDM est l'occasion d'échanges entre chercheurs ; c'est un moment fort auquel sont attachés les membres de la communauté didactique francophone.

Comme les années précédentes, les séminaires de 2010 ont été l'occasion de donner la parole à des chercheurs confirmés et des jeunes chercheurs pour présenter leurs travaux à travers les rubriques « usuelles » du séminaire.

La rubrique « Présentation de thèse » a ainsi permis à de jeunes chercheurs de faire connaître leurs recherches : ce fut le cas de Thomas Barrier et Jean-Philippe Georget en janvier, Jean-Louis Imbert, Christine Del Notaro et Michèle Gandit en mars.

La rubrique « Travaux en cours » a été l'occasion pour des chercheurs confirmés de mettre en discussion leurs avancées avec l'ensemble de la communauté ; Viviane Durand Guerrier, Nadia Douek, Serge Quillio en janvier et André Pressiat en mars ont accepté ce défi.

Le projet européen Rémath a été présenté dans le cadre de la rubrique « Travaux d'équipe » par un groupe du laboratoire de didactique André Revuz (LDAR) constituée de Michèle Artigue, Claire Cazes, Jean-Michel Gelis, Jean-Baptiste Lagrange et Fabrice Vanderbrook. Dans cette même rubrique, Claire Margolinas et Olivier Rivière de l'Université Blaise Pascal de Clermont Ferrand en équipe avec Floriane Wozniak de l'université Claude Bernard de Lyon 1 ont présenté leurs travaux sur la question de l'énumération.

Pour aller dans le sens d'un lieu d'échanges et de débats théoriques que nous souhaitons le plus ouvert possible aux différents courants de la didactique des mathématiques, nous avons souhaité donner la parole à des chercheurs confirmés usuellement plus éloignés de notre communauté ARDM : c'est la rubrique que nous avons intitulée « Hors les murs ». Merci à Fernando Hitt de l'université du Québec à Montréal d'avoir été le premier des intervenants de cette nouvelle rubrique.

La majorité des présentations font l'objet d'un texte dans ce volume. Certains des intervenants ont souhaité transmettre uniquement un résumé de leur présentation. En fin de volume se trouve un texte correspondant à une intervention du séminaire d'octobre 2009, celui d'Eric Roditi. Ce texte n'avait pu être inclus dans les actes 2009.

Le séminaire prévu en octobre n'a pu avoir lieu pour les raisons connues d'importants mouvements sociaux. Cette annulation n'a pas été sans complication pour un certain nombre de participants et nous remercions vivement les intervenants qui ont, sans exception accepté de reporter leur intervention en 2011. Ces actes ne concernent donc que deux séminaires sans le maintenant traditionnel « Colloquium de didactique des mathématiques » organisé en collaboration avec la Commission Française sur l'Enseignement des Mathématiques (CFEM) qui a du, lui aussi, être différé.

Merci aux différents intervenants, la qualité des présentations font de ce séminaire un moment clé de notre activité de chercheur en didactique des mathématiques. Merci à tous ceux qui ont d'une façon ou d'une autre contribué au bon fonctionnement de ce séminaire. Merci tout spécialement à Christophe Hache, directeur de l'IREM de Paris 7, dont l'extrême disponibilité et la compétence nous ont permis d'organiser ces journées et de préparer cette publication dans de bonnes conditions.

M. Abboud-Blanchard et A. Flückiger

Séminaire national des 15 et 16 janvier 2010

Les textes sont dans l'ordre chronologique de présentation pendant le séminaire.

Les relations entre Logique, Preuve et Apprentissages mathématiques : une question d'actualité en didactique des mathématiques ?

Viviane DURAND-GUERRIER

vdurand@math.univ-montp2.fr

Université de Montpellier2,

Institut de Mathématiques et de Modélisation de Montpellier UMR 5149 CNRS

Équipe ACSIO

Résumé

Dans le cadre de la 19ème étude ICMI « Proof and Proving in Mathematics Education » (<http://ocs.library.utoronto.ca/index.php/icmi/8>), j'étais responsable du groupe de travail « Argumentation and Proof », et à ce titre engagée dans la rédaction de deux chapitres du volume qui sera issu de la conférence. Je me propose de présenter en première partie de l'exposé une synthèse des travaux conduits dans le groupe de travail lors de la conférence qui s'est déroulée en mai 2009. Les textes complets des communications présentées dans le cadre de la conférence sont en ligne sur le site de l'Etude [1]. Dans une deuxième partie, je reprendrai une question qui traverse mon travail depuis plus de quinze ans, à savoir la place et le rôle de la logique formelle pour modéliser l'activité mathématique [2]. Dans une troisième partie, j'essayerai d'ouvrir des pistes concernant la question (controversée) de l'intérêt d'un enseignement des concepts logiques pour les apprentissages mathématiques, en identifiant quelques concepts et méthodes à retenir (les connecteurs logiques, la quantification, mais aussi les concepts métamathématiques de satisfaction, vérité, validité, syntaxe et sémantique, les règles d'inférences, la démonstration naturelle etc.), et quelles formes pourraient prendre un tel enseignement pour être efficace, ceci principalement à la transition secondaire-supérieur [3].

[1] Lin, F.L., Hsieh F.J., Hanna, G., De Villiers M. (2009) *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education*, Volume 1& 2, The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University Taipei, Taiwan

[2] Durand-Guerrier, V. : 1995 Place de la logique formelle comme outil d'analyse des connaissances mises en œuvre dans le raisonnement mathématique dans une perspective didactique, in G. Arsac, J. Gréa, D. Grenier, A. Thibergien, *Différents types de savoirs et leurs articulations*, La Pensée Sauvage. Grenoble.

[3] Durand-Guerrier, V., Njomgang Ngansop, J., Questions de logique et de langage à la transition secondaire-supérieur : l'exemple de la négation, à paraître dans les actes électroniques du colloque EMF 2009, 6 au 10 Avril 2009, Dakar, Sénégal.

Jeux de validation, stratégies et modélisations

Thomas BARRIER

LML, Université d'Artois

thomas.barrier@univ-artois.fr

Résumé

L'objectif principal de cet article est d'évaluer la pertinence des outils issus des approches dialogiques de la logique pour la modélisation de situations de validation. Je m'intéresse spécifiquement à la notion de fonction de stratégie en appui sur la sémantique selon la théorie des jeux de Hintikka. La recherche se construit sur une étude de cas dans l'enseignement supérieur. Le corpus analysé est composé de dialogues d'étudiants confrontés à l'évaluation d'une preuve en analyse réelle élémentaire. Une fonction de stratégie est dégagée de l'analyse a priori de la situation puis réinvestie pour interpréter a posteriori des extraits de dialogues. Le travail expérimental montre aussi les limites de ce type de modélisations. Un concept de jeux de description est introduit pour rendre compte de pratiques de validation dont la pragmatique échappe à l'approche dialogique explorée.

Mots clés

Modélisation, validation, dialogue, enseignement supérieur, analyse réelle

INTRODUCTION

La validation mathématique est un thème qui fait l'objet de travaux dans plusieurs disciplines, la didactique des mathématiques mais aussi la philosophie, la psychologie ou encore les mathématiques elles-mêmes. Les différentes approches disciplinaires ont chacune leurs propres préoccupations et perspectives. Par exemple, une recherche en théorie de la démonstration n'engendre par le même genre de démarche qu'une recherche sur la manière par laquelle les mathématiciens (amateurs, élèves ou professionnels) s'assurent effectivement de la validité d'une preuve. Dans cet article, je m'intéresse à l'activité mathématique de validation et plus spécifiquement aux pratiques langagières des élèves et des étudiants au sein de cette activité. Mon principal objectif est de contribuer à construire des outils de modélisation pour l'activité des sujets en cours d'apprentissage. Pour être plus précis, je propose ici une étude concernant l'utilisation de la notion de fonction de stratégie comme outil de modélisation des jeux de langage de la validation. Au niveau de la méthodologie générale, ma recherche s'appuie aussi bien sur des ressources issues de la philosophie du langage (et de la logique) que sur des ressources « propres » à la didactique des mathématiques. Ma principale hypothèse de travail est celle de la productivité des interactions entre les approches analytiques centrées sur les analyses du langage et les approches expérimentales. Ce texte, dont le contenu est emprunté à ma thèse (Barrier 2009a), se situe dans la continuité des recherches de Durand-Guerrier, en particulier de ses travaux récents mobilisant la théorie élémentaire des modèles de Tarski pour l'analyse didactique du raisonnement mathématique (Durand-Guerrier 2005, 2007, 2008). La sémantique selon la théorie des jeux de Hintikka, sur laquelle je vais m'appuyer, est en effet un prolongement pragmatique des travaux de Tarski.

Dans un premier temps, je vais situer le questionnement de cet article, lequel s'interroge sur la pertinence de l'usage de la notion de stratégie pour modéliser les pratiques de validation des élèves, dans le champ de la recherche en didactique des mathématiques. Il me semble en effet

que cette problématique émerge naturellement des ambitions de la Théorie des Situations Didactiques (TSD). Je présente ensuite la genèse de l'expérimentation sur laquelle est construite cette étude et en propose une analyse a priori. Cette expérimentation a été réalisée auprès d'étudiant-e-s en mathématique de l'université et d'étudiants-ingénieurs. Son domaine mathématique est celui de l'analyse réelle élémentaire. La tâche des étudiant-e-s a été de lire et d'évaluer deux preuves, empruntées à Liouville et à Cauchy, contenant des inférences dont la validité est discutable. La dernière partie présente et analyse le corpus de transcriptions recueilli. Je discuterai en particulier des potentialités de la notion de stratégie mais aussi des limites d'un tel outil, issu de la philosophie analytique, du point de vue de la modélisation didactique de l'activité de validation.

LE JEU : METAPHORE OU MODELISATION ?

Le formalisme en question

Voici ce que nous dit Brousseau dans un texte assez récent à propos de l'origine de la TSD et la notion de jeu mathématique :

La représentation des mathématiques la plus répandue est celle d'un système complètement déductif. Elle consiste en gros à considérer la logique mathématique et l'ensemble des énoncés constituant la connaissance actuelle d'une théorie mathématique comme un répertoire de règles. Le jeu consiste alors, conformément à ces règles, à construire de nouveaux énoncés valides portant sur les objets de la théorie. [...] Sur la même représentation théorique, il met en scène la production de certains théorèmes et axiomes de logique comme moyen de régler des conflits entre un proposant et un opposant. C'est exactement ce « jeu » proposé par P. Lorenzen en 1967 dans son ouvrage « Métamathématique » qui est à l'origine de la théorie des situations. (Brousseau 2002, pp.10-11)

La TSD regarde donc l'activité mathématique de preuve comme un processus d'échanges d'assertions entre deux joueurs au sein d'un dialogue réglé. Brousseau s'inspire ici de la logique dialogique de Lorenzen, laquelle propose un ensemble de règles logiques et structurantes pour le déroulement des jeux de validation. Ceci dit, je ne connais pas de travaux qui mobilisent explicitement cette référence à travers la mise en place de modélisations¹ de corpus de dialogues entre élèves. Elle me semble davantage fonctionner comme un soutien épistémologique en faveur d'un choix théorique effectué par la TSD. L'étude critique de cette référence est le principal objet de Barrier (2008). Je montre dans cet article qu'un certain nombre de situations de validation échappent aux possibilités de modélisation offertes par la logique dialogique. Ces situations rendent nécessaire une approche sémantique. Je ne reviens pas ici sur ces questions. Dans cet article, mon objectif est de contribuer à évaluer dans quelle mesure la notion de *jeu* qui est mobilisée par Brousseau en référence à Lorenzen, et à sa suite par un nombre conséquent de chercheur-e-s en didactique des mathématiques², peut être comprise selon son acceptation logico-mathématique (au sens de la théorie des jeux). Une réponse pourrait consister à dire que cette mesure est faible puisque la logique mathématique et la logique effective des individus et en particulier des élèves n'ont que peu de choses en commun. Cette analyse contribue certainement à expliquer le peu de succès rencontré par la logique dialogique dans les entreprises de modélisation

¹ Le terme de modélisation est polysémique. Dans ce texte, il renvoie à l'usage d'un « formalisme logico-mathématique qui représente un système » (Armatte 2005, pp. 92). En ce sens, l'usage des termes d'opposant et de proposant que Brousseau emprunte à Lorenzen ne constitue pas à lui seul une modélisation.

² Je pense notamment aux développements liés à la théorie de l'action conjointe pour laquelle « le mouvement « unificateur » de la théorisation consiste à décrire les pratiques comme des jeux. » (Sensevy, 2008, p. 40)

didactique. Cette position est par exemple celle de Toulmin (2003)³, ou encore, pour rester au plus près du sujet qui nous concerne, celle qui semble être exprimée ci-dessous par Sarrazy :

C'est la théorie des jeux et les travaux du logicien Paul Lorenzen desquels naîtra l'idée du diptyque proposant-oppo sant – qui deviendra ultérieurement, en Théorie des Situations, le schéma de base de la dialectique de la validation. Or, si en théorie des jeux le proposant et l'oppo sant disposent des connaissances nécessaires à cette dialectique, ce n'est pas le cas pour les élèves en situation scolaire. (Sarrazy 2005, pp.375-376)

Un des enjeux de ce texte est de traiter de la question de la pertinence de l'usage d'outils issus de la logique mathématique pour modéliser l'activité de validation d'un point de vue expérimental. Plus précisément, je souhaite interroger l'utilisation de la notion de stratégie qui est une notion qui se construit sur un langage formalisé et donc sur la possibilité d'une traduction formelle du langage naturel. Mon hypothèse de recherche est celle d'un certain espace pour la modélisation logico-mathématique des jeux de validation, un espace qu'il s'agit d'explorer. Avant d'en venir à une présentation plus précise du type de modélisations envisagées, je reviens rapidement sur les ambitions initiales de la TSD pour montrer en quoi l'étude présentée dans cet article s'inscrit dans cette perspective théorique.

Le recours à la modélisation en TSD

Dans un texte de synthèse concernant la théorie des situations, Brousseau explicite deux idées fondatrices à l'origine de « la modélisation des situations à usage didactique » (Brousseau 1997, pp. 3-5). La première est de nature épistémologique. Brousseau revient sur un premier renversement qu'opère la TSD (en particulier par rapport aux méthodes de la psychologie) : la connaissance se constitue chez l'élève comme un reflet des caractéristiques de la situation ; elle n'a de sens que relativement à des situations. La deuxième idée prolonge cette approche épistémologique sur le terrain de la modélisation. Il s'agit de construire des modélisations qui donnent toute leur place aux spécificités des situations :

Une deuxième idée, ou plutôt un autre renversement de point de vue a rendu ce projet concevable : Alors que les Skinner, Rosemblatt, Chomski, Suppes, Arbib, Estes, Papert... s'employaient à modéliser le comportement humain - et ses connaissances - par des stimulus-response models, des perceptrons, des automates ou des modèles stochastiques divers, il m'a semblé que l'on pourrait aussi modéliser les situations de la même façon, et particulièrement le milieu antagoniste du sujet. Ne peut-on pas étudier le jeu d'échec indépendamment du joueur ? (Brousseau 1997, pp. 4)

Ceci contribue à expliquer la volonté de s'appuyer sur la théorie des jeux. Il s'agit d'une part de spécifier un certain jeu dont la structure et les règles reflètent les caractéristiques essentielles de la situation et d'autre part de modéliser l'activité des sujets à l'aide des stratégies et tactiques qui sont ouvertes a priori au niveau du jeu modélisant. L'évolution des connaissances des élèves peut alors être interprétée a posteriori à travers l'observation de l'évolution des stratégies mises en œuvre. Le jeu de la course à 20 et la modélisation associée font figure de paradigme de ce type d'analyses. Une partie du jeu peut se modéliser par une succession d'états, un état (θ, n) étant la donnée d'un joueur et d'un entier naturel plus petit que 20. Une stratégie se décrit au niveau du modèle par une fonction qui a pour argument des

³ Et ce, en opposition radicale avec la tradition analytique en philosophie. Il évoque ce phénomène dans la préface de la dernière édition remaniée de son ouvrage *The Uses of Argument* :

« "It was, in the event, to my great advantage that *The Uses of Argument* found a way so quickly into the world of Speech Communication. The rightly named 'analytical' philosophers in the Britain and America of the late 1950s quickly smelled an enemy. The book was roundly damned by Peter Strawson in the BBC's weekly journal, *The Listener*, and for many years English professional philosophers ignored it. Peter Alexander, a colleague at Leeds, called it 'Toulmin's anti-logic book' [etc]." » (Toulmin 2003, Preface to the Updated Edition)

successions d'état et qui est à valeur dans l'ensemble des états. La multiplication des joueurs et des parties permet alors d'observer certaines régularités dans les comportements des élèves que l'on peut attribuer aux caractéristiques de la situation.

Ce rapide détour montre quel pouvait être l'ambition initiale de la TSD, même si comme le reconnaît Brousseau, celle-ci est assez démesurée :

De là au projet de modéliser ces situations et de les inventorier il n'y a qu'un pas ... dont il vaut mieux toutefois ignorer provisoirement l'ambition car modéliser les situations qui font utiliser ou découvrir les connaissances aux hommes, revient à vouloir modéliser non seulement le monde – le monde réel et le monde des idées – mais aussi son histoire (vaste programme !). (Brousseau 1997, p. 3)

Le recours à la modélisation apparaît comme une nécessité théorique si l'on souhaite faire du positionnement épistémologique de la TSD (« une connaissance pertinente modifie une tactique ou une stratégie » dit Brousseau dans le même texte) quelque chose d'opérateur.

Dans cet article, je vais essayer, pour une situation donnée en analyse réelle, de décrire de manière a priori une modélisation en termes de jeu de manière à être en mesure d'explicitement une notion mathématique de stratégie et d'y confronter le comportement de certains sujets. Je m'appuierai pour cela sur la sémantique selon la théorie des jeux de Hintikka, qui est le pendant sémantique de la logique dialogique de Lorenzen, plutôt que sur la notion d'automate utilisée par Brousseau dans le cadre de la course à 20.

Sémantique et Pragmatique

Après avoir présenté le contexte du recours à la modélisation dans la perspective de la TSD, je m'intéresse maintenant à la notion de stratégie dans le cadre de l'analyse logique de la validation mathématique. Dans sa note de synthèse en vue de l'obtention de l'HDR⁴, Durand-Guerrier (2005) s'intéresse aux *apports de la théorie élémentaire des modèles pour une analyse didactique du raisonnement mathématique*. Selon elle, la théorie élémentaire des modèles fournit un développement théorique susceptible de rendre compte des processus de va-et-vient entre la forme et le contenu dans les apprentissages mathématiques. Elle permet de questionner certains usages en lien avec les questions de nécessité logique et de certitude en explicitant la distinction entre validité logique et vérité dans un domaine d'interprétation (Durand-Guerrier 2008). De manière générale, les approches sémantiques permettent de mettre en évidence la contribution de la manipulation des objets au déroulement des processus de validation. Néanmoins, si la théorie élémentaire des modèles permet une distinction entre vérité, au sens vériconditionnel de l'adéquation d'un énoncé du langage-objet avec un fait dans un domaine d'interprétation, et validité, au sens de la déductibilité au sein d'un système, elle ne prend pas explicitement en compte la manière dont les individus parviennent à connaître la vérité des énoncés :

⁴ Habilitation à Diriger des Recherches.

Un défaut que l'on reproche aux définitions de la vérité à la Tarski, c'est leur abstraction excessive. Des auteurs soi-disant intuitionnistes et constructivistes ont, parmi d'autres, prétendu que de telles définitions caractérisaient simplement une relation abstraite entre les énoncés et les faits. Mais, toujours selon ce raisonnement, de telles définitions n'expliquent pas ce qui fait que cette relation est une relation de vérité. En particulier, ces relations abstraites ne sont pas reliées aux activités par lesquelles nous vérifions et nous falsifions en fait les énoncés de tel ou tel langage, qu'il s'agisse d'une langue naturelle ou d'un langage formel (interprété). Comme Wittgenstein aurait pu le dire, chaque expression appartient à un jeu de langage qui lui donne sa signification. Une spécification des conditions de vérité ne nous fournit pas un tel jeu, ainsi que Dummett l'a obstinément défendu. (Hintikka 2007, p. 51)

Pour cette raison, Durand-Guerrier est amenée à introduire la notion de pragmatique⁵, qui vient s'ajouter aux notions de syntaxe et de sémantique :

Depuis quelques années, l'ensemble de mes travaux fait apparaître la nécessité, pour l'interprétation des énoncés mathématiques en situation d'enseignement et d'apprentissage, d'une prise en compte des aspects syntaxiques, sémantique et pragmatique au sens de Morris. (Durand-Guerrier 2005, p. 6)

La nécessité de prendre en compte les moyens par lesquels les individus parviennent à aborder les notions sémantiques, celle de signification et de vérité en particulier, est également une préoccupation majeure de Hintikka. Cependant, les outils mis en œuvre dans sa sémantique selon la théorie des jeux – je dirais maintenant sémantique GTS pour Game-Theoretical Semantics – diffèrent de ceux utilisés par Gardies ou Durand-Guerrier dans la mesure où ils sont intégrés dans la formalisation (au sens de Gardies, les considérations pragmatiques sont de l'ordre de l'extra-logique).

Stratégie et la Sémantique GTS

La notion centrale utilisée par Hintikka pour aborder les aspects pragmatiques de la validation est celle de stratégie. De manière informelle, les conditions de vérité des énoncés ne sont plus exprimées par une relation abstraite à la manière de Tarski, mais par l'existence d'une stratégie gagnante pour le défenseur de l'énoncé dans un jeu de recherche et de résolution sur un domaine d'objets. La notion mathématique de stratégie vient expliciter les relations entre la syntaxe des énoncés et les faits matériels au sein du médium que constitue le jeu de langage.

Dans le cadre de cet article, je vais me restreindre à l'étude des stratégies qui rendent compte de la manipulation des quantificateurs et des objets auxquels réfèrent les termes de la théorie. Cette restriction me permet d'abréger la présentation de la structure des jeux sémantiques GTS⁶. D'autre part, elle n'a que peu de conséquences du point de vue des possibilités de modélisation concernant la situation qui sera étudiée. Hintikka considère d'ailleurs le traitement de la quantification comme très représentatif de son ambition théorique. Je commence par la manière dont il traite des énoncés existentiels :

⁵ Durand-Guerrier s'appuie sur une définition de Gardies qui utilise le terme de pragmatique « pour désigner par exemple la manière ou les manières mêmes dont la vérité peut accéder à la conscience du sujet connaissant (...) » (Gardies 1994, p. 188, cité dans Durand-Guerrier 2005, p. 117).

⁶ Pour une présentation plus complète, cf. Barrier (2008) pour un point de vue didactique ou Vernant (2009) pour une approche plus philosophique.

Prenons un exemple simple. Comment pouvez-vous (et devez-vous) vérifier un énoncé existentiel de la forme suivante :

$\exists x S[x]$ (2.1)

où $S[x]$ est sans quantificateur ? La réponse est évidente. Pour vérifier (2.1), on doit trouver un individu, disons b , tel que :

$S[b]$

soit vrai. Ici l'étymologie peut illustrer l'épistémologie. Dans plusieurs langues, l'existence s'exprime par une locution dont la traduction littérale serait « on peut trouver ». Pour la qualité du pudding, la preuve peut-être qu'on le mange, mais pour son existence, c'est qu'on le trouve. (Hintikka 2007, p. 53)

L'idée principale de la sémantique GTS est d'associer à chaque énoncé un jeu qui oppose deux joueurs. Si l'énoncé est existentiel, de la forme $\exists x P(x)$, alors le joueur qui défend l'énoncé choisit un objet a dans la structure d'interprétation. Le jeu se poursuit alors par la défense de $P(a)$ par le ce même joueur. Si l'énoncé est universel, de la forme $\forall x P(x)$, alors c'est le joueur qui attaque l'énoncé qui choisit un objet a dans la structure d'interprétation. Le joueur qui défend l'énoncé poursuit alors le jeu en défendant $P(a)$. Pour simplifier les choses, il peut être utile de supposer que $P(a)$ est un énoncé atomique (qu'il ne contient plus de constantes logiques telles que « et », « ou », « il existe », etc, comme par exemple l'énoncé « Vénus est une planète »). Dans ce cas, pour qu'un joueur gagne une partie d'un jeu construit sur l'énoncé $\exists x P(x)$, il doit trouver un objet a tel que $P(a)$ soit vrai. Pour qu'un joueur gagne une partie d'un jeu construit sur $\forall x P(x)$, il faut que le joueur adverse choisisse un objet a tel que $P(a)$ soit vrai. Par exemple, l'existence d'une stratégie gagnante pour un énoncé du type $\forall x \exists y, xRy$, où R est une relation, peut s'exprimer à partir de l'existence d'une fonction f du domaine d'interprétation dans lui-même et telle que $\forall x, xRf(x)$.

Ces considérations permettent de reformuler la question abordée dans cet article de la manière suivante : dans quelle mesure la notion mathématique de fonction de stratégie permet-elle d'intégrer les questions de pragmatique au niveau de la modélisation logico-mathématique dans un contexte d'apprentissage des mathématiques ?

Avant de présenter la situation didactique à l'étude, je développe rapidement ci-dessous quelques éléments expérimentaux qui bien que recueillis dans un contexte extra-mathématique me paraissent contribuer à donner de la consistance à la question précédente.

Exemple d'usage de la notion de stratégie

Dans ce paragraphe, je présente certains éléments issus d'une expérimentation de ma thèse qui avait ses objectifs propres⁷ (Barrier 2009a, 3.1). Cette expérimentation a été réalisée auprès d'étudiants volontaires de première année du premier cycle de l'INSA de Lyon⁸. Les étudiants ont travaillé par groupe (deux groupes, désignés plus loin par G1 et G2), en autonomie, dans un temps non limité, et en dehors de leur temps de formation ordinaire. Deux observateurs étaient présents, dont leur enseignant de mathématiques (moi-même). Leurs dialogues ont été enregistrés et en partie transcrits⁹. Je m'intéresse ici au premier alinéa du premier exercice de la fiche sur laquelle ils ont travaillé. La consigne de cet exercice est la suivante :

Pour chacune des propositions suivantes, dites si elle est vraie ou fausse en justifiant au mieux votre réponse et décrire un monde imaginaire dans lequel elle aurait une valeur de vérité différente.

⁷ A savoir discuter de certaines conclusions de Dubinsky & Yiparaki (2000).

⁸ L'INSA de Lyon est une école d'ingénieur. Les étudiants commencent par une formation généraliste (le premier cycle) avant d'intégrer un département de spécialité.

⁹ Ces transcriptions se trouvent dans le tome d'annexes de ma thèse.

Les analyses qui suivent concernent la première des quatre propositions soumises aux étudiants : *pour chaque planète du système solaire, il existe une étoile autour de laquelle elle tourne* (1).

Analyse a priori

Si l'on respecte l'ordre syntaxique d'apparition des quantificateurs (1) peut se formaliser par $\forall x \exists y, xTy$ (1). On peut observer que l'assertion (1) est moins informative que la version dans laquelle les quantificateurs sont inversés : *il existe une étoile autour de laquelle tourne chaque planète du système solaire* (2) dont une formalisation est $\exists y \forall x, xTy$ (2). Tous les modèles de (2) sont en effet aussi des modèles de (1) (dit autrement (1) est une conséquence logique de (2)). J'appelle P_1 cette propriété sémantique.

Le jeu sémantique de validation pour la proposition (1) consiste pour le proposant à fournir une étoile pour chaque choix d'une planète du système solaire par son interlocuteur. Il n'y en a donc qu'une seule stratégie possible pour le domaine d'interprétation considéré et celle-ci est gagnante. Cette stratégie est une fonction constante, elle peut donc être adaptée sans effort pour obtenir une stratégie gagnante pour le jeu sémantique associé à (2) pour lequel le choix de l'étoile par le Proposant précède celui des planètes par l'Opposant. Appelons P_2 la propriété pragmatique suivante : tout locuteur sachant établir la vérité de (1) sait également établir la vérité de (2).

On admettra que dans une conversation ordinaire, les locuteurs ne font pas de rétention d'information (maxime de la quantité de Grice). L'assertion (1) ne respecte pas cette règle dans la mesure où d'après P_1 , (2) est plus informative que (1), et d'après P_2 celui qui sait établir la vérité de (1), sait aussi établir celle de (2). Cette remarque conclut l'analyse a priori de la situation.

Analyse a posteriori

Les d'étudiants ont jugé la phrase proposée « louche ». Voici par exemple un extrait issu des débats du groupe G2 :

24. R : Il existe une étoile, ah ouais ça peut être une étoile différente... C'est louche.

25. A : Ouais c'est louche.

Et un autre provenant du groupe G1 :

94. K : Non mais, « il existe une étoile autour de laquelle tourne chaque planète du système solaire ».

95. T : « tourne chaque planète du système solaire ». Voilà dans ce sens-là, c'est vrai.

96. B : Moi, on dit ambigu ça.

97. K : Ca sent l'ambiguïté !

Ce phénomène peut être mis en relation avec le fait, relevé dans l'analyse a priori que l'assertion de (1) ne respecte pas les normes d'une conversation ordinaire. Cette propriété de l'assertion (1) a donc conduit les étudiants à émettre des doutes concernant sa vérité. Plus encore, elle a conduit dans le même temps le groupe G1 (en particulier B et T) à envisager une pragmatique de validation alternative :

20. B : Parce que « pour chaque planète il existe une étoile », c'est pas vrai, ça, c'est vachement pas vrai !
 21. K : Ben non !
 22. B : Ca veut dire que dans notre système solaire qui est à je sais plus combien/
 23. T : Y aurait huit étoiles.
 24. B : Y aurait neuf étoiles ou huit étoiles, ouais.
 25. K : Ben non.
 26. B : Donc c'est pas, ça c'est sûr, y a comme un souci déjà.
 27. T : Ouais.
 28. K : C'est pas marqué « il existe une unique étoile ».
 29. B : « Pour chaque », « il existe », moi je comprends.
 30. K : Ben oui !
 31. T : Ouais. Je comprends qu'il en existe neuf.

Ou à nouveau, plus loin :

129. B : Moi je dis, pour moi c'est faux. Pour moi, c'est faux. Parce que le fait/
 130. K : Parce que c'est pas précisé que c'est la même ni que c'est une différente.
 131. T : Mais oui, c'est/
 132. B : Pour moi, je comprends que c'est faux.
 133. T : Y a une ambiguïté sur le « une » là. Y a une ambiguïté sur le « une » là.

Ce qui me paraît intéressant ici est le fait que l'on puisse interpréter cette pragmatique alternative par la considération des fonctions de stratégie associées à l'énoncé (1). Les étudiants B et T semblent en effet se restreindre à l'usage de stratégies injectives. Cette restriction peut s'interpréter comme une tentative de rationaliser la communication de l'interlocuteur en faisant l'hypothèse qu'il est plus probable que celui-ci demande d'évaluer un énoncé faux qu'un énoncé qui ne respecte pas les règles conversationnelles.

Bien qu'assez loin du contexte de l'enseignement des mathématiques, cet exemple montre comment la notion mathématique de stratégie peut être mobilisée pour analyser les comportements langagiers des sujets. Dans la suite de cet article, nous nous intéressons à des situations de validation en analyse réelle élémentaire.

une étude de cas en analyse réelle

Le principal objectif de l'expérimentation que je vais décrire¹⁰ était la construction d'un corpus de dialogues sur lequel confronter la perspective sémantique et dialogique dégagée dans ma thèse. Cet article se concentre spécifiquement sur la question de la pertinence de l'usage de la notion de stratégie au niveau de la modélisation des situations de validation. L'expérimentation s'est déroulée auprès d'étudiant-e-s en L1 Maths-Info et en M1 Maths de l'Université Lyon 1 et d'étudiants-ingénieurs de première année de la filière FAS¹¹ du premier cycle de l'INSA de Lyon. Le contenu mathématique est celui de l'analyse réelle élémentaire. Le choix de l'enseignement supérieur et de ce contenu mathématique s'explique par le constat fait par plusieurs chercheur-e-s de difficultés consistantes concernant des apprentissages de certaines notions d'analyse comme celle de limite ou de borne supérieure. Du point de vue de la logique, ces difficultés peuvent se comprendre par la nécessité de mettre en place des pratiques de quantification relativement élaborées (Chellougui 2009, Durand-Guerrier & Arsac 2003). Ce choix est donc cohérent avec la perspective de cet article qui s'intéresse spécifiquement aux potentialités de la notion de stratégie pour rendre compte de la pragmatique de la validation associée aux quantificateurs.

¹⁰ Le travail expérimental présenté dans cet article a bénéficié de la participation de Thomas Blossier, Pierre Crépel, Viviane Durand-Guerrier et Nicolas Pelay à l'Université Lyon 1.

¹¹ Formation Active en Sciences. On pourra trouver une présentation de cette filière dans Ney & al (2008).

Approche épistémologique

La construction de l'expérimentation a commencé par un travail épistémologique concernant des pratiques mathématiques de validation au cours du XIX^{ème} siècle. Ce siècle voit les usages en analyse se modifier à travers la mise en place d'une syntaxe spécifique pour la quantification laquelle va permettre, notamment sous l'impulsion des travaux de Weierstrass, de préciser certains concepts fondamentaux comme celui de la continuité (Dugac 2003). Cette syntaxe rend disponibles des démonstrations plus rigoureuses de théorèmes importants comme le théorème des valeurs intermédiaires ou celui des accroissements finis. Le principal objectif de cette approche épistémologique était de repérer différentes pratiques de validation relevant de divers niveaux de formalisation. Mon hypothèse était que ce repérage serait susceptible d'éclairer a priori les stratégies potentielles de validation par les étudiants.

Pour l'essentiel, je me suis intéressé à des textes de Lacroix et de Duhamel¹². Cette sélection s'est appuyée sur le travail de Zerner (1986, 1994) à propos des traités français d'Analyse ayant eu une édition entre 1870 et 1914. Zerner analyse en particulier la percolation des fondements de l'analyse inspirés par l'école de Weierstrass au sein des traités français. Pour cela, il est amené à proposer une périodisation de ces traités en trois générations. La deuxième génération se distingue de la première génération par l'apparition d'une définition des infiniment petits comme des quantités ayant 0 pour limite, une définition des fonctions continues, mais surtout par la présence au début du calcul différentiel d'un principe sur lequel je reviendrai, le principe de substitution des infiniment petits. Dans les traités de troisième génération, ce principe n'y figure plus. Par contre, on y trouve une construction des nombres réels et les théorèmes sur les fonctions continues qui reposent sur cette construction et donc sur une pratique de quantification suffisamment élaborée. J'ai choisi de retenir un traité relevant de chacune des deux premières périodes. Les pratiques relevant de la troisième génération me paraissaient moins intéressantes puisque que plus proches des pratiques contemporaines.

Pour la première génération, j'ai retenu le traité de Lacroix dont la première édition date de 1802¹³ et pour la seconde celui de Duhamel (première édition en 1856). Au niveau du choix des preuves à étudier, je me suis principalement intéressé aux arguments concernant l'étude des fonctions réelles à une variable, ce qui correspond aux premières difficultés rencontrées par les étudiants nouvellement arrivés dans l'enseignement supérieur. L'étude générale des propriétés des fonctions est assez limitée dans les ouvrages de première génération, a fortiori dans Lacroix (1802). Elle est un peu plus développée dans les traités de deuxième génération, avec notamment l'apparition selon Zerner du théorème de Rolle. J'ai par ailleurs porté une attention plus importante aux preuves qui comportent des inférences qu'une lecture contemporaine peut considérer comme imprécises voire invalides. Il me semble que la centration de l'attention sur ce type de preuve permet de contribuer à lever les impressions d'homogénéité des pratiques de validation.

Ce travail épistémologique m'a permis d'une part d'identifier deux difficultés consistantes et d'autre part de préciser mes outils d'analyse en introduisant la notion de jeux de description.

Les jeux de description

Un fait marquant de la lecture des traités de Lacroix et Duhamel est que celui de Lacroix comporte beaucoup moins de « preuves » que celui de Duhamel. Dans le traité de Lacroix, beaucoup de questions que l'on traiterait aujourd'hui par un recours aux outils de la quantification sont abordées à un niveau descriptif. Voici par exemple comment celui-ci

¹² J'ai également étudié un mémoire de Bolzano sur lequel je ne reviens pas dans ce texte (Barrier 2009b).

¹³ J'utilise ici l'édition de 1837.

aborde la différentiabilité des fonctions :

Mais quelle que soit l'origine qu'on lui assigne [au calcul différentiel], il reposera toujours immédiatement sur un fait analytique antérieur à toute hypothèse, comme la chute des corps graves vers la surface de la terre, est antérieur aux diverses explications qu'on en a données : et ce fait est précisément la propriété dont jouissent toutes les fonctions, d'admettre une limite dans le rapport de leur accroissement avec ceux de la variable dont elles dépendent. (Lacroix 1837, §59)

La différentiabilité des fonctions est posée comme un fait. Dans le paragraphe précédent, Lacroix en proposait une validation prenant la forme d'une description des courbes admettant des tangentes (§58). D'une manière générale, ces pratiques reposant sur une description des objets familiers sont assez prégnantes. Lacroix propose par exemple au paragraphe suivant une interprétation géométrique des dérivées première et seconde à partir de quatre dessins (selon la monotonie et la convexité de la fonction¹⁴). Cela lui permet ensuite de décrire par l'observation de ces courbes des liens entre dérivée première et monotonie et dérivée seconde et convexité (§ 62). Ces pratiques ne sont néanmoins pas systématiquement associées au registre graphique. On trouve par exemple un argument fonctionnant dans cet esprit, mais exclusivement sur le registre langagier, qui laisse à penser que pour qu'une quantité ait pour limite 0, il est nécessaire qu'elle soit « multiple » de la variable :

En effet, la quantité $P-p$, s'évanouissant avec h , doit nécessairement avoir cet accroissement au nombre de ces facteurs ; et ce qu'on peut faire de plus général est de supposer sur $P-p=Qh^n$, l'exposant n étant positif, mais quelconque d'ailleurs, et Q ne devenant pas infini lorsque $h=0$. (Lacroix 1837, §6)

Dans cet argument, P représente un taux d'accroissement et p la limite de ce taux d'accroissement. L'argument est utilisé pour montrer un résultat que l'on pourrait formuler de la manière suivante « toute fonction dérivable admet un développement limité d'ordre au moins deux ». Il est invalide mais les contre-exemples¹⁵ concernant ce type d'assertions ne seront réellement disponibles que plus tard. Cet extrait peut selon moi être compris comme une description d'un ensemble d'objets davantage que comme une déduction dans la mesure où les fonctions dérivables explicitement considérées dans le traité possèdent effectivement un développement limité d'ordre au moins deux.

Ces observations ont servi de support à la construction d'une catégorie d'analyse pour les procédés de validation. Je propose de caractériser les *jeux de description* par les propriétés suivantes :

- (1) La logique des jeux de description est propositionnelle. En d'autres termes, la structure logique interne¹⁶ des propositions n'a pas d'influence pragmatique directe.
- (2) La pragmatique des jeux de description s'oppose à celle des jeux sémantiques à la Hintikka pour lesquels les stratégies sont explicitement réglées par la structure logique interne des assertions évaluées.
- (3) La finalité des jeux de description est davantage la production d'énoncés en adéquation avec les objets familiers que la construction d'une organisation déductive cohérente.
- (4) La pratique des jeux de description s'accompagne d'un recours au vocabulaire de la variation¹⁷. L'usage de ce vocabulaire contribue à structurer l'activité de validation.

Concernant cette dernière propriété, je fais l'hypothèse qu'il existe un lien épistémologique fort entre l'approche propositionnelle de la validation en analyse et l'usage du vocabulaire de la variation. Ce lien me paraît aussi fondamental que celui qui relie le calcul des prédicats et

¹⁴ Il fait donc une hypothèse implicite de convexité par morceaux.

¹⁵ Par exemple la fonction $x \rightarrow x^{3/2} \sin(1/x)$ en 0.

¹⁶ Je fais référence aux analyses en termes de variables logiques, de quantificateurs, de prédicats et de relations.

¹⁷ Selon Lacroix, le sujet d'étude du calcul différentiel est « le passage » des « quantités » par plusieurs états de grandeurs (Lacroix 1837, §1). Deux paragraphes plus loin, il donne le nom de variable à cette notion de quantité changeant de valeur.

des relations et les théories de la quantification.

Le passage de la première à la deuxième génération dans la classification de Zerner peut être vu comme une étape dans le processus de prise en compte de la structure interne des propositions dans la pratique mathématique. Il s'accompagne d'une augmentation du volume des démonstrations qui se complexifient au fur et à mesure que les règles des activités de recherche et de résolution se précisent.

Identification de deux difficultés consistantes

Comme dans l'ouvrage de Lacroix, le terme de grandeur est présent dans le traité de Duhamel et ce, aussi bien pour dénoter des suites et des fonctions que des nombres. Selon l'objet qui est visé, il peut à nouveau être associé aux qualificatifs de « constante » ou de « variable ». Ceci dit, l'usage du vocabulaire de la variation, associé dans le paragraphe précédent à la notion de jeu de description, cohabite avec des pratiques de démonstration plus analytiques. L'analyse de ces démonstrations m'a conduit à identifier deux principes qui, en toute généralité, sont invalides. Une évolution importante entre les ouvrages de Lacroix et de Duhamel concerne l'espace, physique et conceptuel, occupé par les notions de limite et d'infiniment petit défini comme une « grandeur variable dont la limite est zéro »¹⁸. Ces notions se substituent dans la pratique de la validation à celle de différentiabilité, considérée par Lacroix comme première, et permet à Duhamel d'avancer plus en profondeur dans l'étude des concepts fondamentaux de l'analyse. Les deux principes que je vais présenter contribuent à régler la manière dont ces notions peuvent être manipulées.

Le principe de substitution

Le premier principe sur lequel je vais m'arrêter est le principe, dit principe de substitution, que Zerner mobilise pour construire sa classification des traités. Sa présence en début d'ouvrage est caractéristique de la plupart des traités de deuxième génération. Dans le traité de Duhamel, il est présenté dès la préface comme un outil important de simplification des calculs. Il l'énonce plus loin sous forme de théorème :

Théorème. – La limite de la somme de quantités positives infiniment petites n'est pas changée, lorsqu'on remplace ces quantités par d'autres dont les rapports avec elles ont respectivement pour limite l'unité. (Duhamel 1856, §26)

Du point de vue de la validité, la question se situe au niveau de la relation entre l'augmentation du nombre de termes de la somme et la convergence individuelle des rapports entre grandeurs. Le langage utilisé, l'absence d'explicitation des variables en jeu (au sens moderne) et la quantification sur ces variables masquent ces difficultés.

Le principe d'uniformité

Pour présenter ce nouveau principe, je m'appuie sur la preuve proposée par Duhamel du précédent :

Soient, en effet, les infiniment petits

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_m,$

dont la somme tend vers une limite à mesure que leur nombre augmente indéfiniment.

Soient d'autres infiniment petits

$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_m,$

tels que les rapports

$\alpha_1/\beta_1, \alpha_2/\beta_2, \alpha_3/\beta_3, \dots, \alpha_m/\beta_m,$

aient tous pour limite l'unité.

Or on sait que si l'on a une suite de fractions dont les dénominateurs soient positifs et les

¹⁸ Cette évolution peut se repérer à l'évolution du titre des traités. Celui de Lacroix est intitulé *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral* et celui de Duhamel *Eléments de Calcul Infinitésimal*.

numérateurs de signes quelconques, la somme algébrique des numérateurs divisée par la somme des dénominateurs est intermédiaire entre les deux qui sont algébriquement la plus petite et la plus grande.

La fraction

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_m) / (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \dots + \beta_m)$$

sera donc comprise entre la plus grande et la plus petite des précédentes, et tendra nécessairement aussi vers l'unité : d'où il résulte que les limites de son numérateur et de son dénominateur sont égales ; la somme $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_m$ a donc la même limite que $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \dots + \beta_m$. Ce qu'il fallait démontrer. (Duhamel 1856, §26)

L'imprécision relevée à propos de la validité du principe de substitution est transférée à travers cette démonstration vers un autre principe, implicite cette fois, qui semble affirmer qu'étant donné des « grandeurs variables » ayant une même limite l , le minimum et le maximum de ces grandeurs variables (ou encore leur moyenne) va lui aussi avoir pour limite l . Ce principe sera réutilisé un peu plus loin par Duhamel dans une autre preuve (§69). Je propose de l'appeler principe d'uniformité. Comme le principe de substitution et même s'il ne dispose pas d'une appellation spécifique, il est également utilisé par d'autres auteurs de traités de deuxième génération comme par exemple Bertrand (1864, §11) ou Sturm (cf. Zerner 1986, p.15). L'identification de ces deux principes m'a servi de repère pour la construction de mon expérimentation.

Présentation de l'expérimentation

L'expérimentation que je vais décrire est organisée autour de la lecture et de l'évaluation par plusieurs groupes d'étudiants de deux preuves en analyse réelle. Ces preuves s'inspirent, à différents degrés, de textes mathématiques du XIX^{ème} siècle. La première preuve est empruntée au cours donné à l'école polytechnique par Liouville en 1847-1848. On peut en trouver des analyses mathématiques et didactiques dans Arsac & Durand-Guerrier (2001) et dans ma thèse. Je me contente ici de dire qu'elle s'appuie sur un usage du principe dit d'uniformité pour me concentrer sur la deuxième preuve qui a été proposée à des groupes d'étudiants.

L'idée de cette deuxième preuve provient d'un passage du Cours d'Analyse de Cauchy (1821) dans lequel celui-ci procède à une déduction qui possède certaine similarité avec une application du principe de substitution (annexe 1). Cette preuve a été adaptée de la manière suivante¹⁹ (figure 1).

¹⁹ J'ai laissé la coquille au niveau de l'indice de sommation qui devient n après avoir été k pour être fidèle à la version proposée aux étudiants.

Enoncé 1

On considère la suite définie par, pour tout entier naturel non nul n , $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

On a alors : $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = e$

[Rappel : $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = e$]

Preuve de l'énoncé 1 inspirée par le Cours d'analyse donné à l'école polytechnique en 1821 par Cauchy :

Soit m un nombre entier :

$$u_m = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = \sum_{k=0}^m C_m^k \frac{1}{m^k}$$

$$u_m = 1 + m \frac{1}{m} + \frac{m(m-1)}{2} \frac{1}{m^2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} \frac{1}{m^3} + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} \frac{1}{m^n} + \dots + \frac{1}{m^m}$$

$$u_m = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} \frac{m(m-1)}{m^2} + \frac{1}{3!} \frac{m(m-1)(m-2)}{m^3} + \dots + \frac{1}{n!} \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{m^n} + \dots + \frac{1}{m^m}$$

[On montre que u_m est croissante et majorée et donc qu'elle converge]

On montre maintenant que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers e :

En effet, si l'on regarde attentivement l'égalité

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} \frac{m(m-1)}{m^2} + \frac{1}{3!} \frac{m(m-1)(m-2)}{m^3} + \dots + \frac{1}{n!} \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{m^n} + \dots + \frac{1}{m^m}$$

On constate que le $(n+1)$ ième terme tend vers $\frac{1}{n!}$ quand m tend vers l'infini. On a donc

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots = e$$

Figure 1. – L'énoncé et la preuve distribuée aux étudiants.

Les crochets marquent la présence d'une ellipse par rapport à la version réellement proposée aux étudiants. Une première remarque peut être faite : il est sans doute historiquement et mathématiquement infondé d'identifier la déduction présentée dans cette preuve avec l'usage du principe de substitution. Le contexte historique d'usage du principe de substitution est en effet plutôt celui de l'intégration, des considérations sur les aires ou les longueurs d'arc (cf. Zerner 1986). Surtout, le principe de substitution s'applique à des sommes d'infiniment petits. La substitution de leur limite aux termes de la somme correspond donc à une situation mathématique différente. Pour autant, de fortes similarités existent sur le plan de la quantification et la preuve proposée par Duhamel du principe de substitution pourrait tout aussi bien s'appliquer dans ce cas-ci. Dans la preuve présentée aux étudiants, la déduction

ambigue a été insérée dans une argumentation plus vaste (et inutile²⁰) afin d'éviter qu'elle puisse être identifiée a priori comme suspecte. J'ai aussi choisi d'éviter autant que possible – c'est-à-dire jusqu'à la conclusion – le recours à la notion de série (et à plus forte raison de série entière, cf. annexe 1) qui n'est abordée qu'en deuxième année à l'université ou à l'INSA de Lyon. Je signale également que le résultat démontré est un résultat de première année très classique, qu'il est très probable que les étudiants le connaissent, et même qu'ils en aient déjà vu une preuve. Au-delà de son accessibilité et sa pertinence épistémologique, mon choix de cette preuve est également motivé par le fait qu'elle ait vraisemblablement connu une certaine diffusion si bien qu'elle a fait l'objet d'une critique spécifique dont l'auteur est... Liouville lui-même :

La démonstration dont on fait ordinairement usage pour prouver que cette limite a pour valeur le nombre $e = 1 + 1/1 + 1/(1.2) + \dots$ n'est pas suffisamment rigoureuse ; elle suppose en effet que pour tout $m = \infty$, le produit $(1-1/m)(1-2/m)\dots(1-(n-1)/m)$ se réduit à l'unité, ce qui est vrai quand n est un nombre déterminé indépendant de m , mais ne l'est plus quand on a par exemple $n = m$ ou $n = m - 1$, etc. (Liouville 1840, p. 208)

Eléments d'analyse a priori

Commençons par reformuler certains énoncés en jeu de manière à rendre disponible une analyse de la quantification. L'énoncé affirmant la convergence de la suite peut s'écrire (1) :

$$\forall \alpha > 0 \exists M \in \mathbb{N} \forall m \geq M, |s(m, m) - e| < \alpha$$

Avec pour une certaine suite double $v_{k,m}$:

$$\forall l \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N}, s(l, m) = \sum_{k=0}^l v_{k,m}$$

Ou alors de manière équivalente (2) :

$$\forall \alpha > 0 \exists M \in \mathbb{N} \forall m \geq M, \left| s(m, m) - \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \right| < \alpha$$

On peut également reformuler l'énoncé affirmant la convergence individuelle des termes de la somme (3) :

$$\forall \alpha > 0 \forall l \in \mathbb{N} \exists M \in \mathbb{N} \forall m \geq M, \left| s(l, m) - \sum_{k=0}^l \frac{1}{k!} \right| < \alpha$$

Selon les termes de l'analyse pragmatique GTS, la difficulté de l'évaluation de (2) réside dans le fait que le choix par le proposant de l'entier M doit se faire sous l'effet de deux contraintes simultanées (puisque s est une fonction de deux variables qui prend deux fois la même lettre en argument) alors qu'on ne sait a priori comment répondre à ces contraintes que de manière successive en s'appuyant sur la fonction de stratégie gagnante associée à (3) qui prend en argument le nombre de termes de la somme.

La validité de l'inférence conduisant à faire l'assertion (3) dépend évidemment des hypothèses que l'on peut faire sur les prémisses utilisées. On peut remarquer que sans hypothèses particulières sur la suite double $v_{k,m}$, la déduction de (3) à (2) est invalide. A contrario, si l'on prend en compte la nature présente de cette suite, la déduction peut être complétée sans grands bouleversements en une preuve valide.

Notons φ_α la fonction de l'ensemble des entiers naturels dans lui-même qui offre au proposant une stratégie gagnante (celle qui choisit les rangs les plus petits) dans le jeu dialogique associé à (3). L'étude de la validité de (2) peut alors se ramener à l'étude de la phrase ouverte $\varphi_\alpha(m) \leq m$. Il suffit de s'assurer que cette inégalité a lieu au moins pour les grandes valeurs de

²⁰ Si l'on considère que l'argument final fonctionne de manière isolé. La partie concernant la preuve de convergence pourrait néanmoins être mobilisée pour compléter la dernière inférence.

m.

Il serait intéressant d'étudier d'autres aspects de cette preuve, en particulier la présence d'une lettre d'indice dans l'écriture de la somme (cf. Barrier, 2009a). Je me concentre ici sur la problématique présentée en début d'article : dans quelle mesure la notion logico-mathématique de stratégie dégagée dans cette analyse a priori peut-elle être mobilisée pour modéliser les jeux de langage produits par les étudiants confrontés à la lecture et l'évaluation de cette preuve ?

Résultats

Recueil du corpus

L'expérimentation a été proposée à plusieurs groupes d'étudiant-e-s, deux groupes en Licence première année Maths-Info, deux groupes en Master première année de mathématiques et quatre groupes en première année à l'INSA de Lyon (filière FAS). Elle s'est déroulée à la fin de l'année universitaire 2007/2008. Les étudiants sont volontaires, ils ont été sollicités par leurs enseignants. Les sessions se déroulent par niveau et en dehors du temps de formation institutionnel.

Chaque session de l'expérimentation s'est déroulée selon le même schéma. Les expérimentateurs commencent par répartir les étudiants par groupe de trois ou quatre puis leur proposent une des deux preuves qui ont été travaillées pour servir de support à l'expérimentation. Le travail des étudiants est organisé en trois activités par l'intermédiaire de la consigne suivante qui leur est distribuée :

Première activité (10 à 20 min)

1. Situer historiquement le mathématicien dont il est question.
2. L'énoncé 1 vous paraît-il vrai ?

Deuxième activité (30 à 40 min)

1. Déterminer et mettre en évidence chacune des étapes de la preuve.
2. Analyser chacune des étapes de la preuve en cherchant si possible à les compléter et/ou les reformuler. Sont-elles complètes, rigoureuses, valides ?
3. La preuve est-elle valide ?

Troisième activité

1. Préparation de l'exposé (20 à 30 min) : vous devez faire un compte rendu d'une dizaine de minutes. Vous veillerez à bien séparer dans votre exposé la présentation de la preuve de votre analyse de celle-ci. Vous pouvez utiliser les supports que vous souhaitez (transparents, posters, craies, etc.) et vous répartir les tâches comme vous l'entendez dans la mesure où chacun participe à l'exposé.
2. Chaque groupe présente alternativement son travail (2 fois 10 min). L'autre groupe pose toutes les questions qu'il souhaite, pendant ou en fin d'exposé, afin de contrôler l'analyse qui est faite.

L'objectif de la première activité est de favoriser la dévolution de la situation d'évaluation de la preuve. Elle insiste sur son caractère historique et sur l'accessibilité du contenu mathématique. Une bibliographie photocopiée ainsi que des ouvrages généraux d'histoire des mathématiques sont fournis aux étudiants. Les groupes de l'INSA disposent par ailleurs d'ordinateurs avec un accès à Internet sur leurs bureaux. La deuxième activité est l'activité d'évaluation proprement dite. Les questions ont été pensées de manière à favoriser un travail d'évaluation local et précis. La troisième activité consiste en la préparation et la réalisation d'un exposé destiné aux étudiants ayant travaillé sur l'autre preuve. La nécessité de communiquer permet d'augmenter l'enjeu social de leur travail. La préparation est aussi susceptible de revigorer les débats qui pourraient avoir eu lieu au sein des groupes. Le minutage proposé l'est à titre indicatif. Il n'a pas été respecté.

A chaque groupe est associé un expérimentateur-tuteur. Sa tâche principale est de s'assurer du

bon déroulement du débat (circulation de la parole, investissement de chacun etc). Il intervient s'il s'avère nécessaire de relancer la dynamique du dialogue sans intervenir sur les contenus ou seulement s'il est sollicité sur les questions mathématiques techniques. Les débats de groupes ont été enregistrés, les exposés ont également été filmés. Chaque enregistrement a fait l'objet d'une transcription complète. Ces transcriptions sont disponibles dans le volume d'annexes de ma thèse.

Zooms sur quelques extraits

Il m'est impossible pour des questions d'espace de décrire ou de résumer l'ensemble des travaux des étudiants (les transcriptions occupent 350 pages). Au niveau de la méthodologie d'analyse, j'ai commencé par une lecture globale des transcriptions avant de procéder à plusieurs zooms adaptés à la problématique de cet article. Je vais ici me concentrer sur les travaux du groupe d'étudiants de L1 concernant la preuve inspirée par le cours d'Analyse de Cauchy. Les trois étudiants de ce groupe sont désignés par les lettres A, B et C.

Modélisation et langage de la variation

Les étudiants sont assez vite convaincus que l'énoncé proposé est vrai. Cette conviction est renforcée par un essai numérique. Ils repèrent assez rapidement la structure générale de la preuve. Après des considérations portant sur la partie concernant l'existence de la limite (dont ils ne repèrent pas le caractère redondant), les débats se concentrent sur le caractère rigoureux ou non de la dernière inférence de la preuve. Pour A et B, l'argument employé n'est pas rigoureux car certains termes se « rajoutent » à la somme « en même temps » que les premiers termes convergent. Selon C, ce phénomène ne pose pas de problème. Ce désaccord occupe un espace important dans le travail des étudiants. Le débat se termine par le constat de son irréductibilité, si bien que les étudiants décident de présenter les deux points de vue lors de leur exposé. En voici un extrait :

C : Alors, mon point de vue, c'est que oui, le passage de là à là, il... Et même la limite, c'est complètement clair puisque euh... Là, on s'intéresse au $(n+1)$ ième terme, on voit qu'il tend vers $1/n!$. Donc on sait que quand euh, quand m va commencer à devenir grand le $n!$, le $1/n!$, il va commencer à devenir très petit. Donc euh, leur point de vue à eux, c'était que au fur et à mesure que m augmente, on ajoute des termes au bout...

A : On va le dire parce que... Parce qu'il va nous magouiller ça, tu vas les mettre dans ta poche.

[...]

A : On voit pas, on pourrait pas le contredire parce que ça semble tellement bien marcher. Mais on se dit, il s'intéresse à un terme et hop, il fait tendre vers plus l'infini, donc ce terme il tend bien vers ça, mais pendant qu'il fait tendre vers plus l'infini, il y a des milliers de termes qui se rajoutent puisque, plus m augmente, à chaque fois qu'on augmente m de un, il y a un terme qui se rajoute. Du coup, il peut se ré-intéresser à ces termes et faire tendre vers plus l'infini pour que ces termes là tendent bien vers $1/n!$ et ainsi de suite... Mais à chaque fois qu'il fait tendre de plus en plus, enfin, vers l'infini euh... Enfin bon, c'est un point de vue.

B : Voilà en fait, c'est ce manque de termes, on pensait que c'était pas rigoureux parce qu'on pensait, ben à chaque fois, ça augmente, on ajoute quand même un terme positif et donc au bout d'un moment... On pense que c'est pas rigoureux parce qu'on sait pas vraiment, exactement vers quoi, vers où ça tend. Donc nous, on sait pas non plus mais euh...

D'une manière générale, les jeux de langage pratiqués par les trois étudiants mobilisent de manière importante le vocabulaire de la temporalité, de l'ordre et de la variation. Ce registre de vocabulaire intervient pour aborder des questions qui du point de vue de la logique mathématique seraient abordées à travers la manipulation des règles d'usage de la quantification. Je préciserai ceci par la suite. Voici un nouvel extrait qui provient cette fois du

travail de groupe des étudiants A, B et C concernant la validité de la preuve :

A : Mais est-ce que le fait qu'il tende vers plus l'infini, ça rajoute pas plus de termes et euh les termes, ils mettent plus de temps à tendre vers ce que l'on attend... Et en trottant, il y a plus de termes qui se rajoutent. Mais faudrait, enfin, vraiment voir... C'est quoi m .

B : Tu veux dire quoi, tu veux dire pour arriver enfin, pour converger vers e c'est ça ?

A : Ouais pour conv... En fait, tous les termes, ils convergent à une vitesse...

B : Tu veux dire en gros, par exemple, ces trois termes là, ils convergent à une certaine vitesse.

A : Et cette vitesse, elle est moins grande que le nombre de termes qui se rajoutent à chaque fois. Du coup, ils convergeront tous au bout d'un moment mais y en a tellement d'autres qui se rajoutent et que eux ont pas encore convergé puisqu'ils vont converger après, tu vois ?

C : Mais non.

B : Mais si, mais ça converge tout le temps en fait, à chaque terme, c'est juste que ça met plus de temps à tendre... Ça converge pas forcément comme tu dis avec le terme d'après, ça converge directement.

Il est assez clair, et peu surprenant, que les étudiants s'appuient sur la temporalité pour traiter de difficultés mathématiques dans un contexte où le vocabulaire technique leur fait défaut. L'analyse qui suit permet de préciser cette remarque en proposant une modélisation qui situe sur le plan logique la fonction épistémologique de ce vocabulaire. Les difficultés identifiées dans l'extrait ci-dessus correspondent au niveau de la modélisation dia-logique à la difficulté rencontré pour le choix de M dans le jeu associé à la validation de (2) (cf. analyse a priori). La fonction de stratégie φ_α associée à l'énoncé (3) définie dans l'analyse a priori permet de construire une interprétation des assertions des étudiants au sein de ce dialogue de validation. On peut par exemple considérer que cette fonction attribuée à l'entier naturel k le « temps nécessaire de convergence » pour les k premiers termes de la somme. L'affirmation selon laquelle des éléments *vont converger après* peut se comprendre (i) dans un sens fort comme la (méta)assertion selon laquelle cette fonction de stratégie est croissante au sens mathématique usuel ou (ii) dans un sens plus faible comme la (méta)assertion selon laquelle la fonction n'est pas majorée. Selon (i), il y a peu de chance que (2) soit valide puisque (i) implique que pour tout m , $\varphi_\alpha(m) \geq m$. L'interprétation plus faible (ii) laisse davantage ouverte la possibilité de la validité de (2).

La modélisation proposée explicite un rapport entre le langage employé par les étudiants et la structure logique des énoncés mathématiques en jeu. Elle permet notamment de mettre en évidence le fait que ce langage intervient dans l'activité de validation pour prendre en compte des aspects qui au niveau de l'analyse logique se situe essentiellement du côté de la quantification.

Pragmatique des jeux de langage

Il me paraît intéressant de proposer une interprétation des débats entre d'un côté A et B et de l'autre C en termes de structuration des jeux de langage. Dans les deux extraits ci-dessus, on peut observer que ce sont essentiellement A et B qui mobilisent des jeux de langage qui sont, sous une forme que j'ai décrit précédemment, des jeux de langage de validation 'quantifiés'. Ces jeux reposent sur l'usage d'une syntaxe particulière qui, bien qu'assez éloigné de la syntaxe traditionnelle de la quantification, médiatise leurs activités de validation. Cette observation invite à affiner la distinction réalisée lors de l'analyse épistémologique entre jeux de description et jeux de validation GTS. La structure des jeux de langage pratiqués par A et B ne relève clairement pas des jeux de validation tels qu'ils sont décrits par la sémantique GTS. Pour autant, leurs assertions semblent contraintes par la structure syntaxique des énoncés évalués. Il y a bien un rapport entre la structure de leurs jeux de langage et la structure logique des énoncés, un rapport que la modélisation présentée plus haut m'a permis d'éclaircir. Ces jeux se situent donc quelque part entre les jeux de description pour lesquels la

logique sous jacente est strictement propositionnelle et les jeux de validation codifiés par la sémantique GTS. Mon hypothèse est qu'il représente une étape dans le processus d'appropriation d'une logique adéquate pour la pratique de l'analyse dans l'enseignement supérieur.

D'un autre côté, C insiste davantage sur les spécificités de la somme étudiée. Par exemple :

C : Ce que tu comprends pas, c'est qu'un, un, un m factorielle c'est... Enfin le m factorielle devient vite très grand donc un sur m factorielle devient vite très petit donc euh...

Ou encore :

C : Je crois pas, moi ça me semble, moi ça me semble suffisant que même si tu ajoutes de plus en plus de termes... Même si il y a une infinité de termes, à partir d'un moment, à partir d'un moment ce sera tellement petit que... Ce sera pas important.

Son activité de validation ne semble pas prendre en compte la syntaxe des énoncés considérés. Les arguments de C sont presque exclusivement orientés vers la description des objets en jeu sans qu'il n'explicite de lien pragmatique sur la manière d'utiliser cette description cette pour valider l'inférence analysée. Ceci contribue à expliquer la consistance du désaccord entre les étudiants. Ils ne semblent pas parvenir à mettre en place un espace langagier partagé. Ce phénomène est à nouveau sensible plus tard au cours de l'expérimentation. Après l'exposé du groupe, les expérimentateurs décident de relancer le débat en introduisant dans le milieu une preuve d'un résultat faux selon lequel :

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{n+k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

La preuve est projetée au tableau. Elle repose sur la convergence vers 0 de chacun des termes de la somme. Cette fois-ci, un consensus se dégage autour du fait que l'énoncé est faux et que l'inférence employée est invalide. Pour autant, un désaccord persiste concernant la possibilité de se servir de cette preuve pour discuter de la validité de la preuve initiale :

Un expérimentateur : Hum, hum. Et dans la preuve du début euh, l'énoncé 1, est-ce qu'on fait ce genre de trucs ou pas ?

A : Ben ouais, moi j'aurais dit ça.

C : Mais...

B : Ah, ah ben du coup, ben du coup, on revient sur ce qu'on avait fait nous, à la fin.

A : Ouais, ouais c'est là quoi... On fait tendre tous les termes vers $1/n!$, et on en rajoute d'autres et ceux-là, on s'en est pas occupé.

C : Ouais, mais notre somme, on essayait pas de la faire tendre vers euh, vers zéro.

[...]

C : Si parce que là, là le premier terme déjà, il... Il donne une espèce de base, je me rappelle plus combien ça fait $1/3!$...

B : $1/6$.

C : $1/6$, ouais, il donne une espèce de base qui fait que c'est à peu près 2,67 et le reste ajoute des tout petits éléments de... De correction un peu.

Il est assez délicat de faire des hypothèses sur l'interprétation de la quantification des énoncés par C. On peut néanmoins noter que ces questions n'occupent que très peu de place au niveau de ses arguments explicites. Sa pratique de la validation relève de ce que j'ai appelé plus haut les jeux de description. Dans le cas présent, mon hypothèse est que la centration exclusive sur les objets au détriment de la syntaxe empêche C de percevoir la similitude syntaxique entre cette preuve et la précédente. Au contraire, la pragmatique à l'œuvre dans les processus de validation de A et B rend disponible la recherche d'une identité de forme entre les deux situations. Il me semble que la distinction au niveau de la forme langagière des activités de validation des étudiants contribue à expliquer sur un plan pragmatique leurs désaccords et la difficulté de les lever.

Discussion

Je reviens maintenant à ma problématique. Il s'agissait d'étudier la pertinence de la notion logico-mathématique de stratégie pour la modélisation des jeux de langage pratiqués par les étudiants dans un contexte de lecture et d'évaluation de preuves. Dans les analyses précédentes, je me suis appuyé sur cette notion pour modéliser des dialogues d'étudiants concernant la validité d'une inférence. Cette modélisation m'a permis d'explicitier certaines relations entre les stratégies ouvertes a priori dans les jeux de validation et les pratiques langagières des étudiants. Il me semble qu'un des objectifs de la TSD est précisément d'étudier la possibilité de ce type de mise en relation entre la structuration des situations (ici la structuration des énoncés à évaluer) et les comportements stratégiques effectifs des élèves. Cette étude suggère que la notion de stratégie issue des analyses dialogiques de la validation pourrait être un élément susceptible de contribuer à construire ces relations, au moins dans le contexte de l'enseignement supérieur et de l'analyse²¹.

Pour autant, il est assez clair que la pragmatique décrite par les règles de la sémantique GTS relève d'une approche 'idéalisée' de la pratique mathématique de validation. L'explication de Hintikka est fortement contrainte par ses objectifs qui relèvent essentiellement de la problématique des fondements des mathématiques. La question de l'activité de validation dans le contexte de l'enseignement nécessite sans aucun doute une appréhension plus large des questions pragmatiques. J'ai abordé cette question dans ce texte à travers l'introduction et l'étude de la notion de jeux de description. La définition que j'en ai donnée s'est construite principalement par défaut : il s'agissait de conceptualiser les jeux de validation dont la pragmatique ne se laissait pas (ou mal) décrire par les règles d'usage des constantes logiques telles qu'elles sont définies par la sémantique GTS. J'ai néanmoins proposé certaines caractéristiques pour décrire ces jeux, en insistant essentiellement sur la prise en compte ou non de la structure syntaxique des énoncés au cours de l'activité de validation. L'expérimentation a montré qu'il était nécessaire d'affiner cette classification pour parvenir à prendre en compte les processus didactiques de mise en place des jeux de langage nécessaires à la validation des énoncés en analyse. Elle a par exemple mis en évidence l'existence de jeux de validation qui bien que non réglés par les normes de la sémantique GTS prennent en compte la quantification des énoncés à travers un vocabulaire spécifique.

Conclusion

Cet article a abordé le thème de la modélisation des situations de validation. D'une manière générale, il s'agissait de questionner la pertinence du formalisme logico-mathématique pour la construction de modélisations qui contribuent à rendre compte de l'activité des élèves. J'ai choisi de me concentrer sur la notion de stratégie puisque cette notion me paraît être centrale au sein de la TSD. J'ai alors exploré sur une étude de cas dans l'enseignement supérieur les possibilités offertes par les fonctions de stratégie telles qu'elles sont définies par l'analyse GTS des jeux de langage. Une analyse a priori de la situation a permis de définir une stratégie de validation pour un énoncé en rapport avec la situation proposée aux étudiant-e-s. Cette stratégie a été réinvestie lors de l'analyse a posteriori d'extraits de dialogues pour interpréter le comportement langagier des étudiants. Cette mise en relation a notamment permis de préciser la fonction épistémologique du vocabulaire de la temporalité utilisé par deux étudiants de l'expérimentation. Il a en effet été possible de construire un parallèle entre certaines expressions des étudiants et des propriétés mathématiques de la fonction de stratégie modélisante.

Une difficulté importante à laquelle je me suis confronté dans ce travail tient au fait que les

²¹ Barrier (2008) propose des modélisations à partir d'une situation d'arithmétique en classe de terminale.

processus d'apprentissage agissent non seulement sur la manière de pratiquer les jeux de langage mais aussi sur la forme de ces jeux. Il est alors nécessaire de construire des outils d'analyse qui tiennent compte de la diversité des pragmatiques de la validation. Ce constat m'a conduit à introduire une notion de jeux de description à la structure plus souple que les jeux inspirés par la sémantique GTS. Les jeux de description sont des jeux de validation dans lesquels les pratiques langagières des joueurs ne sont pas contraintes par la structure interne des propositions. Leur logique est de nature essentiellement propositionnelle. Cette distinction faite, il serait intéressant d'analyser plus en détail les relations qui se tissent entre les jeux de description et les jeux sémantiques GTS. Il s'agit en particulier de saisir la dynamique de l'appropriation par les étudiants d'une pragmatique adéquate à la validation en analyse.

Références

- ARMATTE M. (2005), La notion de modèle dans les sciences sociales : anciennes et nouvelles significations. *Mathematics and Social Sciences*, 172, 91-123.
- ARSAC G., DURAND-GUERRIER V. (2001), Logique et raisonnements mathématiques. Variabilité des exigences de rigueur dans les démonstrations mettant en jeu des énoncés existentiels. In Assude T., Grugeon B. (ed), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques* (pp. 55-83). Paris: IREM de Paris VII.
- BARRIER, T. (2008), Sémantique selon la théorie des jeux et situations de validation en mathématiques. *Education et Didactique*, 2(3), 35-58.
- BARRIER T. (2009a), *Une perspective sémantique et dialogique sur l'activité de validation en mathématiques*. Thèse de Doctorat. Université Claude Bernard Lyon 1, Lyon.
- BARRIER T. (2009b). Quantification et Variation en Mathématiques : perspectives didactiques issues de la lecture d'un texte de Bolzano. In Kourkoulos M., Tzanakis C. (ed), *Proceedings of the 5th International Colloquium on the Didactics of Mathematics* (Vol. 2), University of Crete, Rethymnon, Greece.
- BERTRAND J. (1864). *Traité de calcul différentiel et intégral (tome 1)*. Paris : Gauthier-Villard.
- BROUSSEAU G. (1997). La théorie des situations didactiques. *Cours donné lors de l'attribution à Guy Brousseau du titre de Docteur Honoris Causa de l'Université de Montréal*. [URL: http://pagesperso-orange.fr/daest/guy-brousseau/textes/TDS_Montreal.pdf].
- BROUSSEAU G. (2002), Les doubles jeux de l'enseignement des mathématiques. *Revue du Centre de Recherche en Education - Didactique des mathématiques, Questions éducatives*, 22-23, 83-155.
- CAUCHY A.-L. (1821), *Cours d'analyse de l'école royale polytechnique*.
- CHELLOUGUI F. (2009), L'utilisation des quantificateurs universel et existentiel en première année d'université, entre l'explicite et l'implicite. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 29(2).
- DUBINSKY E., YIPARAKI O. (2000) On student understanding of AE and EA quantification. In Dubinsky E., Schoenfeld A., Kaput J. (ed), *Research in Collegiate Mathematics Education IV* (pp. 239-270). Providence: American Mathematical Society.
- DUGAC P. (2003), *Histoire de l'analyse*. Paris: Vuibert.
- DUHAMEL J.-M. C. (1856). *Éléments de calcul infinitésimal*. Paris: Mallet-Bachelier.
- DURAND-GUERRIER V. (2005), *Recherches sur l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique. Apports de la théorie élémentaire des modèles pour une analyse didactique du raisonnement mathématique*. Habilitation à Diriger des Recherches, Université Claude Bernard Lyon 1, Lyon.
- DURAND-GUERRIER V. (2007), Retour sur le schéma de la validation explicite dans la théorie des situations didactiques, à la lumière de la théorie des modèles de Tarski. In Rouchier A. (ed), *Actes sur CD-Rom du colloque international de l'AFIRST "Didactiques : quelles références épistémologiques ?"*, 25-27 mai 2005, Bordeaux.
- DURAND-GUERRIER V. (2008), Truth versus validity in mathematical proof. *Zentralblatt für didaktik der mathematik*, 40(3), 373-384.
- DURAND-GUERRIER V., ARSAC G. (2003), Méthode de raisonnement et leurs modélisations logiques. Le cas de l'analyse. Quelles implications didactiques ? *Recherches en didactiques des mathématiques*, 23(3), 295-342.
- GARDIES J.-L. (1994). *Les fondements sémantiques du discours naturel*. Paris: Vrin.
- HINTIKKA J. (2007). *Les Principes des Mathématiques Revisités*. Paris: Vrin.
- HINTIKKA J., KULAS J. (1983). *The game of language. Studies in Game-Theoretical Semantics and its Application*. Dordrecht, Boston, Lancaster: Reidel.
- LACROIX S.-F. (1837). *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral*. Paris: Bachelier.
- LIUVILLE J. (1840). Sur la limite de $(1+1/m)^m$, m étant un entier positif qui croît indéfiniment. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, Sér. I, 5, 208.

- LILOUVILLE J. (1995). *Calcul Différentiel*. Paris: Ellipses.
- LORENZEN P. (1967), *Métamathématiques*. Paris: Gauthier-Villars.
- NEY M., BARRIER T., FREUD N., HILLION S. (2008), Pédagogie active et évaluation des compétences dans des disciplines fondamentales. In *Actes du cinquième colloque "questions de pédagogie dans l'enseignement supérieur". Enseigner, étudier dans le supérieur : pratiques pédagogiques et finalités éducatives* (pp. 281-288). Brest : TELECOM Bretagne.
- TOULMIN S. E. (2003), *The Uses of Argument*, Cambridge: Cambridge University Press.
- SARRAZY B. (2005), La théorie des situations : une théorie anthropologique des mathématiques ? In Salin M.-H., P. Clanché, B. Sarrazy (ed), *Sur la théorie des situations didactiques. Questions, réponses, ouvertures. Hommage à Guy Brousseau* (pp. 375-390). Grenoble: La pensée sauvage.
- SENSEVY, G. (2008). Le travail du professeur pour la théorie de l'action conjointe en didactique. Une activité située ? *Recherche et Formation*, 57, 39-50.
- VERNANT D. (2009), *Discours et Vérité. Analyses pragmatique, dialogique et praxéologique de la véridicité*. Paris: Vrin.
- ZERNER M. (1986). Sur l'analyse des traités d'analyse : les fondements du calcul différentiel dans les traités français, 1870-1914. *Cahier de didactique des mathématiques*, Université Paris 7, 30.
- ZERNER M. (1994), La transformation des traités français d'analyse (1870-1914), *Publication du Laboratoire Jean-Alexandre Dieudonné CNRS-URA 168*, 389.

Corollaire 1. — Si, dans l'équation (20) on remplace μ par $\frac{1}{\alpha}$ et x par αx , α désignant une quantité infiniment petite, on aura, pour toutes les valeurs de αx renfermées entre les limites $-1, +1$, ou, ce qui revient au même, pour toutes les valeurs de x renfermées entre les limites $-\frac{1}{\alpha}, +\frac{1}{\alpha}$,

$$(1 + \alpha x)^{\frac{1}{\alpha}} = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} (1 - \alpha) + \frac{x^3}{1.2.3} (1 - \alpha)(1 - 2\alpha) + \dots$$

$$\left(x = -\frac{1}{\alpha}, x = +\frac{1}{\alpha}\right).$$

Cette dernière équation devant subsister, quelque petite que soit la valeur numérique de α , si l'on désigne à l'ordinaire, par l'abréviation *lim* placée devant une expression qui renferme la variable α , la limite vers laquelle converge cette expression, tandis que la valeur numérique de α décroît indéfiniment, on trouvera, en passant aux limites,

$$(21) \quad \lim (1 + \alpha x)^{\frac{1}{\alpha}} = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \dots \quad (x = -\infty, x = +\infty).$$

Approche de la démonstration en collège

Nadia Douek
ndouek@wanadoo.fr
UMR ADEF Univ. de Provence
Univ. de Nice

Résumé

Je propose une approche de la démonstration en collège, conçue à partir d'analyses épistémologique et cognitive de l'activité de démontrer, de son rapport avec l'argumentation, des formes d'activité en classe qui la favorisent. L'encadrement théorique de ce travail offre des outils qui peuvent aider l'enseignant à organiser et gérer des séquences d'apprentissage de la démonstration. Je présenterai ces outils en les utilisant sur l'exemple d'une séquence sur la démonstration du théorème de Pythagore.

Mots clés:

Argumentation, démonstration, discussion mathématique, activité, sémantique, sémiotique.

Introduction

Dans un premier temps, je distinguerai l'activité de démontrer du produit (texte de démonstration) afin d'étudier l'activité. L'illustration de ce que j'appelle activité viendra avec son analyse. Je me base sur une analyse des différents modes de raisonnement dans l'activité de démonstration inspirée par les travaux de Lolli (voir Arzarello 2007) pour :

- mettre en évidence que la démonstration engage une variété d'activités assez complexes;
- montrer que l'argumentation a une part importante et multiple dans ces activités, et surtout que son aspect sémantique est fondamental;
- Montrer que les références qui soutiennent l'activité argumentative impliquée dans une démonstration ne sont pas toutes puisées dans des théories mathématiques, mais doivent avoir un caractère théorique (par exemple permettent une conclusion valide à un niveau général).

Je focaliserai sur l'argumentation dans le sens de Toulmin, et sur son rôle d'articuler les pas de raisonnement et les justifications mathématiques. Je présenterai une ingénierie didactique bâtie à partir de ces analyses. Elle fait une place importante à l'argumentation et en général à l'activité langagière orale et écrite dans différents dispositifs (productions individuelles, débat), sans exiger, dans un premier temps, que ces productions obéissent aux normes régissant habituellement les aspects formels des mathématiques scolaires. Je fais l'hypothèse que le registre du langage familier favorise la maîtrise sémantique (voir VI) et je me base sur des travaux de Duval (1998) et de Vygotsky (1985) sur le rôle de l'écrit dans l'organisation sémantique des arguments. L'ingénierie intègre ce type de tâches à un ensemble plus « complet » que la stricte demande de démontrer et inclut par exemple la production de conjecture. D'ailleurs, plus généralement, pour développer les activités diverses qu'engage une démonstration il me paraît indispensable de situer la démonstration en rapport à d'autres formes de pratiques (résolution de problème). Il s'agit de gérer la production d'une argumentation suffisamment élaborée pour qu'y soient exprimés et discutés les pas de raisonnement qui prouvent et les justifications sur la base de théories et savoirs mathématiques partagés par la classe.

Activité de démontrer et texte de démonstration

Le texte d'une démonstration doit obéir à des normes socio-culturelles propres à la communauté dans laquelle il est produit. Je m'intéresserai ici à l'activité qui précède le moment de la rédaction

d'une démonstration. Elle est complexe et mérite une attention particulière et un temps d'apprentissage suffisant. Je la considère prioritaire dans les premiers temps de l'apprentissage de la démonstration. En effet, je fais l'hypothèse de travail suivante: établir des normes de production de texte de démonstration de façon prématurée peut créer un obstacle à l'élaboration de la signification même de la démonstration et au développement de compétences essentielles à l'activité de démontrer.

Les activités qui devraient se déployer dans les phases qui précèdent la production du texte sont régies par des modes spécifiques de raisonnement qui ne seront pas nécessairement valide dans le cadre de la production du texte de démonstration.

Les différents modes de raisonnement

Je m'inspire de l'analyse que fait Lolli de l'activité mathématique et de la démonstration en particulier (voir Arzarello 2007) pour mettre en évidence trois modes de raisonnement nécessaires dans la démonstration et importantes à développer au niveau scolaire :

1- L'exploration heuristique : où l'on cherche à comprendre la situation, on interprète des énoncés, on vérifie à l'aide d'exemples, on cherche la limite de validité d'une expression, on change de registre ou de cadre ou parfois seulement la disposition de termes, on ajoute un point ou une ligne à une figure géométrique ...

2- L'organisation du raisonnement : quand on a trouvé quelques énoncés qui semblent utiles, on cherche à les organiser de façon à pouvoir tirer les conclusions voulues, on peut avoir à se demander: *quel théorème me permettrait de prouver tel énoncé dont j'ai besoin?* (raisonnement par abduction), *est-ce que les conditions de validité de tel théorème sont assurées?*, *comment écrire ces expressions autrement pour justifier telle relation?*

3- La production d'un texte déductif: l'organisation déductive des énoncés qui semblent pouvoir prouver.

Ces modes de raisonnement n'apparaissent pas les uns à la suite des autres, ils s'imbriquent et s'enrichissent généralement entre eux dans des morceaux de raisonnement plus ou moins grands. Leur séparation a pour but de concevoir des activités de classe pour les solliciter plus clairement et établir les pratiques qui leur correspondent, et dans la mesure du possible pour que les élèves apprennent à les mobiliser plus consciemment et plus librement tout en ne confondant pas certaines de leurs composantes qui, comme on va le voir ci-dessous, peuvent être incompatibles.

Ces modes de raisonnement sont différemment favorisés dans l'activité mathématique de l'école selon les contrats didactiques. Chacun a sa complexité et exige des compétences multiples et parfois spécifiques. En particulier, ils suivent différentes règles de validité, et peuvent mobiliser des registres sémiotiques différents les uns des autres.

Différentes règles culturelles de validité:

Le raisonnement par abduction est typique quand on organise un raisonnement (mode 2) mais n'est pas permis dans le mode 3 qui régit la production du texte de démonstration. Le passage vers le déductif n'est pas toujours facile, (voir exemple dans Pedemonte 2008).

L'utilisation des exemples donne souvent lieu à des arguments pertinents lors de l'exploration (mode 1), elle peut faciliter l'organisation du raisonnement (mode 2) mais n'offre pas d'arguments permis dans le mode 3. Les contre-exemples, eux permettent toujours de conclure.

Le raisonnement diagrammatique est fréquent dans le mode 2 mais généralement pas dans le mode 3 (selon les usages des domaines mathématiques).

Différents registres sémiotiques:

En général (mais ici moins de contrastes), dans le mode 1 le langage verbal ordinaire est

prédominant, les schémas, diagrammes ont plutôt leur place dans les modes 1 et 2; des formes plus standardisées de langage et de texte sont par contre exigées dans le mode 3.

Exemple de production typique du mode 1 de raisonnement:

$$\begin{array}{c}
 \underbrace{(2k+1) + (2k+3) + (2k+5)}_{3 \text{ numbers}} \quad \swarrow (3-2)-1 \\
 (2k+1) + (2k+3) + (2k+5) + (2k+7) \\
 \underbrace{\hspace{10em}}_{4 \text{ numbers}} \quad \swarrow (4-2)-1 \\
 \underbrace{\hspace{15em}}_{5 \text{ numbers}} + (2k+9) \quad \uparrow (5-2)-1
 \end{array}$$

Les élèves ont besoin de savoir rechercher et exploiter des exemples, mais ils doivent savoir la nature et la place de ce type d'activité dans un raisonnement mathématique. Beaucoup d'élèves ne s'autorisent pas le mode heuristique, ne prennent pas facilement la responsabilité d'organiser des arguments d'une façon qui les convainc et identifient le raisonnement mathématique à la production d'un texte caractérisé par une certaine forme et un certain registre sémiotique.

Il nous faut réfléchir aux conditions qui favorisent ces modes et surtout qui leur donnent du sens et leur place dans l'activité mathématique.

Des intentions favorisent le mode Heuristique:

Comprendre, vérifier si tel énoncé est vrai, dans quelle mesure il est vrai, voir comment ça marche... Ces intentions sont liées à des pratiques, dont il faut prendre conscience: Prendre un exemple... Mais alors, qu'est-ce qu'un exemple permet de conclure? Changer de cadre ou de registre... Qu'est-ce que cela apporte?

Il me semble nécessaire de rendre explicites ces intentions et le rôle de ces pratiques par rapport à ces intentions pour que ce mode de raisonnement ait sa place et se développe. Pour que ces pratiques aient du sens, il faut les provoquer, et il faut aussi développer une réflexion « méta » à partir de questions qui pointent ces intentions au sein de tâches qui amènent à ces pratiques. L'exploitation de productions d'élèves et le débat sont des moyens favorables.

Dans les habitudes scolaires, ce mode apparaît dans la production de conjecture bien plus que dans la production de démonstration.

Des questions favorisent la production et l'organisation des arguments:

Qu'est-ce qui me permet d'affirmer que ... ? Pourquoi ... permet de conclure que ... ? Les réponses dépendent d'arguments mathématiques théoriques, mais aussi d'exemples, d'arguments perceptifs, de similitudes formelles entre représentations sémiotiques. Elles peuvent être multiples, et relèvent de l'argumentation (voir la caractérisation adoptée ci-après ...). La part du sémiotique est essentielle, et pour cela il s'agit de favoriser l'argumentation en évitant de l'inhiber par le choix d'un registre mal maîtrisé.

Production d'un texte de démonstration:

Un texte de démonstration suit des règles de présentation et d'explicitation des justifications. Certaines des justifications qui ont permis d'avancer des énoncés utiles doivent être remplacées par

des références mathématiques théoriques, les abductions transformées en déductions. Les règles d'usage pour savoir quelles propositions avancées doivent être davantage justifiées et lesquelles peuvent être admises dans la pratique de la communauté ne sont pas facilement explicitées. L'écriture d'un texte de démonstration suppose en particulier de surmonter le piège des décalages entre les arguments qui suffisent au sujet et ceux qui sont nécessaires selon les pratiques de la communauté. Il en est de même des règles sur le rôle de figures ou de schémas dans le texte (voir Arsac 2009). Ces règles, pour avoir du sens et être construites (approchées plutôt!) en surmontant la complexité de leur usage, nécessitent des débats à leurs propos et l'aide de l'enseignant pour que l'élève exprime les différents statuts des propositions et leur enchaînement et intériorise graduellement ces règles en relation explicite (mais parfois contradictoire) avec ses propres conceptions.

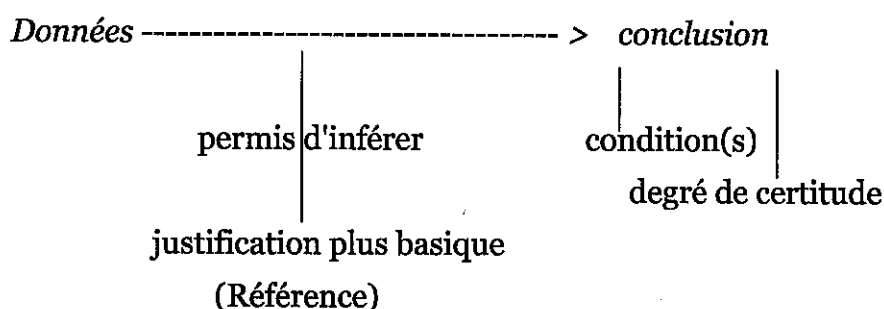
Vers les choix didactiques concernant les modes de raisonnement :

Ces modes de raisonnement ne sont donc pas séparés en phases successives dans l'activité, mais il y a souvent des phases où un mode est prégnant parce qu'une intention domine. En les distinguant on peut mieux gérer des choix didactiques afin de stimuler chacun d'eux, rendre conscientes chez les élèves différentes intentions qui suscitent ces différents modes, et développer des moyens conscients de passer d'un mode à un autre sans confusion des règles spécifiques.

Le choix didactique fondamental est de donner à l'argumentation une place centrale. Y sont liés les choix suivants: travailler l'expression verbale orale et écrite dans le registre familier; organiser des débats sur plusieurs niveaux d'argumentation (directe et méta) concernant les raisonnements, et les modes de raisonnement. Par exemple: amener dans le débat une question comme *Pourquoi tel calcul (ou tracé...) est-il un résultat utile ou stratégique?* afin de mettre en évidence la nécessité d'avoir une démarche à caractère téléologique quand on organise les arguments en vue de produire la démonstration ou la résolution du problème. Ou encore *Comment en est venue l'idée?* Afin de mettre en évidence des pratiques du raisonnement heuristique et qu'elles soient partagées.

L'argumentation

Je me réfère aux travaux de Toulmin sur l'argumentation. Sa structure, dans son aspect sémantique qui nous intéresse, est rendue visible par cette schématisation :



Toulmin appelle *domaine d'argumentation* celui des références dans lesquelles sont puisées les justifications. Si l'objet de l'argumentation est mathématique, et surtout si les justifications sont puisées dans une théorie mathématique, nous sommes dans le cas de construire une démonstration.

Mais l'argumentation est liée à la démonstration d'autres façons encore.

Dans l'**exploration heuristique d'un énoncé et dans la production d'arguments**, les essais sont poursuivis ou rejetés par une activité qui pourrait être explicitée en une argumentation (elle ne porte pas exactement sur l'énoncé à démontrer, en général). Ces argumentations restent souvent au niveau implicite, et le domaine d'argumentation peut ne pas être une théorie mathématique: la justification peut être basée sur la perception, ou l'analogie ...

Dans l'**organisation des arguments**, les raisonnements consistent à argumenter sur le modèle de Toulmin à propos des liens entre données et conclusions (qui constitueront des pas de la

démonstration en construction) et ce faisant à chercher la procédure, le théorème ou la théorie qui permet d'établir un pas de raisonnement. Le domaine d'argumentation est celui des références mathématiques et aussi métamathématiques (les règles de validité d'un raisonnement mathématique). L'activité est plus naturellement explicitée en une argumentation, mais celle-ci n'a pas nécessairement la structure déductive et linéaire de la production standard.

La structure convergente de l'argumentation dans une démonstration

En général une argumentation est constituée d'argumentations plus élémentaires organisées de diverses façons. Elles peuvent former une suite qui converge vers une conclusion, ou bien, être développées en parallèle comme quand on produit plusieurs explications, avec cette possibilité de redondance que l'on ne doit pas trouver dans le texte d'une démonstration. On peut parler de lignes d'argumentation: on peut avoir une unique ligne d'argumentation, des lignes parallèles ou encore on peut composer des lignes secondaires et une (ou des) ligne(s) principale(s). Dans une démonstration, les arguments doivent s'enchaîner de façon linéaire, chaque conclusion devenant la prémisse du pas suivant (voir Duval 1991). On peut les visualiser en ligne. Dans la plupart des cas, ces arguments sont produits par des argumentations plus élémentaires, des *blocs* développés à côté pour produire une des prémisses nécessaires qui va s'ajouter pour produire un nouveau pas de raisonnement. On peut visualiser cette structure comme un fleuve et ses affluents. Dans cette description de la forme d'une argumentation on peut percevoir des niveaux hiérarchiques possibles entre les arguments qui entrent dans une démonstration. Les élèves peuvent avoir des difficultés à situer un argument (une proposition), à comprendre son rôle par rapport à la conclusion (voir Knipping, 2008). C'est une des difficultés de l'introduction de la démonstration, et nous y reviendrons dans l'exemple en suggérant un accompagnement possible dans cet apprentissage.

Je caractérise donc l'argumentation dans le contexte de production de conjecture et de démonstration par sa fonction d'articuler et de relier et par sa forme de blocs de sous-argumentation liés entre eux par des lignes convergentes vers la conclusion finale.

Argumenter et démontrer

La démonstration est donc un cas particulier d'argumentation. Mais il y a des différences qui sont intéressantes à exploiter dans le but d'introduire les élèves à la démonstration:

- dans le texte d'une démonstration, les permis d'inférer sont puisés dans une théorie mathématique, un pas de raisonnement est soutenu par une unique justification que l'on expose, les conditions de validité d'une conclusion sont annoncées parmi les données, ce qui permet l'organisation linéaire et déductive des arguments;
- les argumentations produites lors d'explorations heuristiques et d'organisation de la démonstration sont plus *ouvertes* : le domaine d'argumentation est plus étendu, et les raisonnements ne sont pas nécessairement déductifs, ce peut être des inductions ou des abductions ou encore des analogies et des métaphores ;
- la légitimité d'une justification dépend de la phase d'élaboration de la démonstration.

Comparaison, explicitation et débats sont des moyens de mettre en évidence ces relations complexes et de développer les composantes importantes de l'activité de démontrer, en particulier les différents modes de raisonnement, et de clarifier les règles mathématiques impliquées.

L'argumentation est pour nous à la fois un moyen de reconstituer, ou de guider à former, le raisonnement que nous voulons voir développer par les élèves, et un outil didactique de l'enseignant pour, au niveau méta des discussions, guider les élèves dans les différentes formes de raisonnement et dans les relations entre ces formes en étant attentif à leurs règles culturelles spécifiques. Outil qui peut ainsi leur offrir une distance réflexive.

L'argumentation comme outil didactique

Pour développer le mode exploratoire

Pour aider les élèves à développer une pratique d'exploration, l'idée est de mettre en place des activités (par exemple, de conjectures ou d'explication de choses connues) et d'associer débat sur la validité de la conjecture ou de l'explication, et débat sur les procédés exploratoires engagés. L'argumentation sollicitée dans le débat sur l'exploration est conduite sur différents niveaux: *quels essais? justifier pourquoi tel essai, pourquoi le retenir ou le rejeter*. Les justifications sont ouvertes (elles ne découlent pas de théories mathématiques, mais les sollicitent). L'argumentation devrait mettre en évidence la composante téléologique de la démarche et permettre aux élèves de prendre conscience que cette ouverture est permise. Ce peut être une occasion de prendre conscience et connaissance de pratiques mathématiques comme le changement de cadre, de registre, transformation d'une figure, d'une expression, d'une question. L'enseignant offre les références (les usages mathématiques) sur lesquelles peuvent se baser ces argumentations.

Pour développer le mode d'organisation des arguments

L'idée de voir l'argumentation comme une pratique qui peut aider les élèves à constituer ou reconstituer un raisonnement et saisir l'importance d'organiser une suite de raisons me vient de ces phrases de Toulmin (1974) extraites de l'introduction de son livre : *Logic is concerned not with the manner of our inferring, or with questions of technique: its primary business is a retrospective, justificatory one - with the arguments we can put forward afterwards to make good our claim that the conclusions arrived at are acceptable because justifiable conclusions*¹.

Il me semble essentiel que cette reconstitution ait une composante subjective. Il s'agit d'aider les élèves non seulement à reconstituer la logique d'un raisonnement, mais à prendre conscience de cette étape de reconstitution qui ne s'identifie pas tout à fait à celle de la production d'une conclusion, et du fait qu'elle doit satisfaire leur besoin de cohérence. Bien sûr l'argumentation doit aussi prétendre à une certaine objectivité.

L'argumentation développée entre débat et récit d'un raisonnement.

Cette citation inspire l'hypothèse que si l'on veut aider l'élève à se saisir du fil logique d'une démonstration (et développer le mode 2 de raisonnement), il faut l'aider à faire son propre récit (individuel) de l'enchaînement des idées et des calculs impliqués dans le raisonnement. Le récit qui m'intéresse est celui qui met en évidence les liens entre les pas (ou étapes) de raisonnements et leurs rapports à la conclusion, qui relate les événements que sont les propositions d'idées et les calculs élaborés dans la validation d'une proposition. Il ne s'agit pas du récit des idées qui ont permis de produire la démonstration, comme c'est le cas dans les narrations de recherche, ni de comment les savoirs ont évolué dans le temps (voir Assude & Paquelier 2005). Le but est que les élèves reconnaissent les lignes d'argumentations impliquées, leurs éventuelles relations hiérarchiques, et leur rôles et places dans la combinaison logique qui produit la démonstration. Ce récit combine narration et argumentation. Son intérêt est d'être organisé par les liens sémantiques formés par le sujet. L'idée du récit reprend donc celle de la reconstitution après coup de Toulmin, mais aussi reprend l'idée de Duval (1998) et de Vygotsky (1985) sur le rôle structurant de l'écrit: l'écrit favorise la maîtrise consciente du raisonnement et de son organisation. Ces récits individuels ne peuvent généralement pas être produits spontanément dans les premiers temps de travail sur la démonstration. Ils nécessitent un travail préparatoire stimulé par des tâches bien choisies de construction de démonstration et par des débats à leur propos, afin de mettre en évidence des éléments de raisonnement sur le mode 2 et de faciliter leur appropriation par les élèves.

1 La logique n'est pas concernée par la manière d'inférer, ou par des questions de technique, son objet principal est celui retrospectif et justificatoire d'avancer après coup des arguments qui renforcent notre assertion que nos conclusions sont acceptables parce qu'elles peuvent être justifiées.

Les questions auxquelles on voudrait intéresser les élèves et que l'on voudrait voir influencer leur récit sont par exemple: *Comment viennent nos idées? Comment les exprimer? Comment s'assurer de leur validité? Qu'est-ce qui conditionne cette validité? Comment les organise-t-on pour comprendre? Pour communiquer?*

Dans ce but il importe de travailler l'expression verbale orale et écrite dans le registre familier. Celui-ci est mieux maîtrisé et favorise la prise en charge de l'aspect sémantique. Les besoins de précision que révèle ce registre peuvent être mis en évidence et justifient alors le passage à un registre mieux adapté, quand ceci s'avère nécessaire.

Le récit avec sa part de travail subjectif doit être alimenté et encadré (en amont ou en aval) par le débat collectif avec sa part de construction commune et de référence aux pratiques et règles de la communauté mathématique que représente l'enseignant. D'ailleurs, l'exigence d'organisation des arguments a du sens parce qu'elle conditionne les interactions. L'organisation des arguments peut naturellement devenir à son tour objet de débat.

Ceci justifie le choix d'organiser des débats sur plusieurs niveaux d'argumentation combinés en fonction des enjeux spécifiques:

- la procédure mathématique: comment fait-on ?
- les différentes raisons : pourquoi pense-t-on que c'est vrai ? Peut-on dire que c'est vrai mathématiquement ?
- les raisons d'une démarche: pourquoi fait-on ainsi ?
- et la forme de l'expression: comment se faire comprendre? Comment être précis? Peut-on l'exprimer autrement?

Ces différents niveaux d'argumentation peuvent concerner l'activité mathématique dans la phase heuristique, la phase d'organisation des arguments ou la phase de production d'un texte de démonstration, et peuvent permettre de cerner les changements de phase, leur nécessité et les règles de raisonnement et de représentation sémiotique.

Ainsi, l'argumentation, développée en classe entre débat collectif et récit individuel, sera un outil didactique pour gérer les différents modes de raisonnement et leurs relations et aura sa place dans le débat mathématique ouvert à partir de productions d'élèves.

L'ingénierie didactique et l'exemple

Le principe est donc de mettre en système récit de raisonnement et débat au sein d'une séquence de conjecture et démonstration pour créer une dynamique impliquant les élèves dans la variété des pratiques mathématiques de la démonstration et en particulier dans l'élaboration d'argumentation pour défendre, sur des bases communes, un raisonnement qu'ils trouvent cohérent et pour les engager dans la réflexion sur ceci. Le but est que les modes de raisonnement, leurs règles et leurs limites soient rendus visibles, discutés, et leurs relations mieux maîtrisées. Les questions de rédaction du texte de démonstration ne sont pas soulevées ici.

Avant d'illustrer ces réflexions théoriques par l'exemple, je présente succinctement, mais d'une façon générale, les activités principales que je considère importantes pour les élèves, et leur articulation dans les phases d'approche de la démonstration.

- Associer exploration et conjecture pour stimuler le mode 1 de raisonnement (ce qui n'exclut pas les autres modes);

- Stimuler la démonstration de conjecture(s) :

1 Soit l'unité cognitive entre production de conjecture et production de sa démonstration fonctionne et les étudiants sont en mesure de réorganiser leur conjecture en une démonstration (c'est plus facilement le cas avec l'algèbre, voir Pedemonte 2007),

2 Soit elle ne fonctionne pas et l'enseignant propose des tâches qui guident les élèves vers la démonstration.

- Engager la dynamique débat collectif/ récit individuel du raisonnement en partant de productions d'élèves, surtout pour stimuler le mode 2 de raisonnement (toujours sans exclure les autres modes). Dans le cas d'absence d'unité cognitive, les élèves ne sont pas en bonne condition pour comprendre la démonstration ni d'en tirer un apprentissage consistant. C'est alors que cette dynamique nous paraît plus particulièrement cruciale.

Ces activités articulées sont mises en place sur trois séquences pour traiter le théorème de Pythagore. Pour ce théorème il n'y a pas unité cognitive entre conjecture et démonstration: les arguments qui permettent la production de la conjecture ne sont pas ceux qui permettront de la prouver. La dynamique débat collectif/ récit individuel est mise en place dans la séquence préparatoire (une demande d'explication pour attirer l'attention sur certains aspects du théorème); puis à la suite de la production de conjecture pour favoriser le mode heuristique et entrer dans cette pratique du récit; et enfin à propos de l'organisation des arguments qui prouvent le théorème de Pythagore pour à la fois comprendre cette démonstration et surtout pour favoriser l'implication des élèves dans l'organisation du raisonnement.

L'organisation des séquences est conçue comme une conversation pour que les différentes voix aient leur place et jouent clairement leur rôle. Ces séquences commencent par une phase de conjecture où c'est la voix de l'élève qui est mise en valeur, avec sa part de subjectivité. Ensuite, les élèves sont guidés dans la démonstration à travers les étapes cruciales de la structure argumentative de la démonstration: des éléments de la voix de l'enseignant (qui représente la communauté mathématique scolaire) qui encadre celle de l'élève. Suit le débat: les élèves confrontent leurs voix entre eux et avec celle de l'enseignant. La séquence se clôt par une synthèse individuelle où devrait s'entendre la voix de l'élève telle qu'elle a évoluée.

1) Séquence préparatoire: Vérifier puis justifier l'inégalité triangulaire.

Cette séance devrait favoriser l'exploration et la préoccupation du sens d'un énoncé connu, l'interprétation des expressions, l'explicitation de raisonnements logiques. Les tracés sont encouragés pour donner le sens des rapports des distances. Et ceci permet de fonder l'expression verbale et trouver des éléments de justification. La justification demandée n'est pas théorique, comme l'exigerait une démonstration mathématique, puisqu'elle se base sur des arguments perceptifs (le plus souvent sur l'idée qu'en traçant au compas les deuxième et troisième segments, l'inégalité correspond au cas où les arcs se coupent). Les deux modes d'exploration et d'organisation des arguments sont sollicités. Mais on n'a pas là de démonstration. Il y a bien un risque d'incohérence du contrat didactique dans la mesure où l'on vise généralement à produire des démonstrations et des justifications mathématiques théoriques. Une solution à ce problème est de revenir en fin de parcours à une démonstration de l'inégalité par le théorème de Pythagore.

Tâche 1 :

Considérons l'énoncé : *dans un triangle de côtés a , b et c , la somme des longueurs $a+b$ est toujours supérieure à c* . Cette relation entre les mesures des côtés est-elle vraie ? toujours ? Pourquoi ? Préparez vous à expliquer comment vous avez vérifié et pourquoi vous pensez que c'est vrai, ou que c'est faux, ou qu'est ce qui vous fait douter ?

Aucun triangle n'est proposé par le professeur ; les élèves sont encouragés à dessiner quelques triangles pour une vérification dans le cas où cela ne vient pas de façon spontanée.

La raison stratégique pour laquelle cette séquence est proposée est de :

- Situer l'activité dans les cadres algébrique et géométrique et dans leur articulation, à propos de triangles (ce jeu de cadre, ici élémentaire, sera un des points délicats de la démonstration du théorème de Pythagore).

- Laisser voir une relation additive qui pourrait inspirer les élèves dans la deuxième étape et faciliter la conjecture du théorème de Pythagore.
- Explorer pour comprendre une proposition, pour vérifier sa validité.
- Argumenter pour valider/justifier la proposition.
- Prendre conscience de l'activité d'exploration et de son rôle, la décrire, faire partager les méthodes et différencier vérification et validation.

Cette séquence est organisée selon le cycle: production individuelle des justifications; débat sur les justifications à partir de productions d'élève; production de synthèse individuelle. Les questions qui guident le débat sont : *Quelle(s) justification(s)? Comment les exprimer? Sur quelles bases s'appuie-t-elle(s)?* Cette organisation est cohérente avec le système débat/récit, elle favorise l'expression verbale des démarches et des raisons.

La synthèse individuelle est un pas vers la production de récit qui sera demandée pour organiser les arguments qui démontrent le théorème de Pythagore dans la troisième séquence.

2) Séquence conjecture du théorème de Pythagore

En premier une séquence pour produire des conjectures, les discuter, considérer leur plausibilité et la pertinence de leur expression et établir une conjecture "convenable".

Tâche 2 : (individuelle)

Maintenant si l'on considère les carrés des longueurs, à la place des longueurs elles-mêmes, la situation est différente. Chercher s'il existe une relation entre les carrés des longueurs des côtés d'un triangle. Quand vous pensez que vous avez produit un énoncé valide (une conjecture), rédigez le clairement pour l'expliquer à vos camarades de classe.

Commentaire utile: Attention, dans le premier exercice vous deviez vérifier et justifier un énoncé que nous vous proposons, cette fois vous devez imaginer un énoncé et le vérifier... mais pas encore le valider. On travaillera les validations lors de la séance suivante.

Des triangles possédant angles droit, aigus ou obtus sont proposés en désordre, sur une feuille, les mesures des côtés sont indiquées (on pourra expliquer que les imprécisions de mesure poseraient des problèmes qu'on cherche à écarter).

Débat:

Ensuite une discussion collective guidée par le professeur est engagée sur différents niveaux : L'objet mathématique produit et sa signification; les méthodes d'exploration et de vérification ; l'expression des conjectures et des explications. Le but est de partager et débattre de la ou des conjectures, de leurs expressions et des façons de les produire, et d'atteindre et partager des expressions acceptables de la ou des conjectures (selon les standards mathématiques). Une conjecture incomplète ou fausse peut donner des opportunités intéressantes pour expliciter les éléments importants du théorème (en particulier les conditions de validité du théorème, c'est à dire l'angle droit) et leur rôle.

Tâche 3 : (individuelle)

Ecrire la conjecture telle qu'elle doit être énoncée. L'expliquer et l'illustrer par quelques exemples.

Cette tâche est favorisée par la discussion qui a eu lieu auparavant, et constitue (là aussi) une préparation à la production de récit qui sera demandée en fin de séquence, sans pour autant être un récit de démonstration. C'est aussi une opportunité d'évaluation.

Le professeur conclut avec l'énoncé standard du théorème de Pythagore.

Concernant l'apprentissage de la démonstration, cette première séance vise à inciter les élèves à

développer des raisonnements dans les modes 1 et 2 :

- Explorer (mesurer, calculer, raisonner par induction lors de la modélisation et l'éventuelle production d'expressions algébriques) ;
- Organiser l'exploitation des données collectées, les classer de telle façon que des règles soient trouvées, exprimer les résultats généraux d'une façon plus ou moins conventionnelle (le langage de tous les jours étant accepté), etc. ; discuter et justifier des propositions et organiser les étapes de l'exploration en relation avec le but à atteindre. Ceci développé majoritairement dans le mode 2.

Il faut noter que classer et modéliser font appel tout autant aux modes 1 que 2. Les intentions explicites de l'exploration et de l'organisation sont à mon avis un signe suffisant et satisfaisant. En effet, un objectif didactique principal est de mettre en valeur les divers processus de raisonnement que les élèves présentent, et leur conscience du processus constitue l'objectif principal.

3) Séquence de démonstration guidée : organisation des étapes du raisonnement

Etant donné que l'unité cognitive ne peut pas fonctionner avec ce théorème, les élèves sont guidés à travers la démonstration par des activités individuelles et collectives ; ensuite ils auront à reconstruire les lignes d'argumentation.

Nous avons choisi une démonstration classique du théorème de Pythagore.

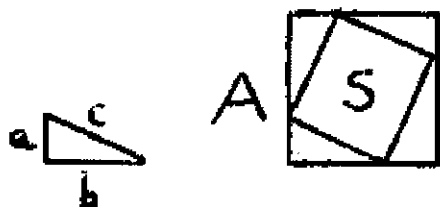
Tâche 4: Les élèves sont guidés dans la démonstration par un document :

“feuille de démonstration”

Ici nous étudions la démonstration du théorème que nous avons conjecturé, vous serez guidés dans la production de la démonstration.

On considère un triangle rectangle avec pour côtés a, b et c . On veut montrer que $a^2 + b^2 = c^2$.

Formons tout d'abord un carré nommé S à partir du grand côté du triangle (le côté c) et disposons quatre fois le triangle autour comme ci-dessous.



I) Expliquez pourquoi A est un carré ?

II) Essayez d'écrire l'aire de A de 2 manières différentes. Trouvez et expliquez les 2 manières.

III) Comment ceci peut nous aider à valider notre conjecture?

La question I (*Expliquez pourquoi A est un carré ?*) avait pour but de mettre en évidence le changement de cadre, l'exploration des relations géométriques, et de s'assurer de la rigueur de la démonstration en construction. C'est un choix qui s'est avéré naïf (ce n'est pas le moment de la rigueur mathématique, puisque le but principal est l'organisation des arguments et non la production d'un texte de démonstration aux normes). Et il s'est aussi avéré contre-productif : les élèves perdent presque tous de vue le but essentiel de démontrer leur conjecture. Cependant le but de mettre en évidence le changement de cadre et le rapport entre carré géométrique et carré algébrique doit être préservé. La tâche doit donc être modifiée. Pour l'instant elle s'est transformée en un échange collectif portant directement sur les rapports entre carrés géométriques et carrés algébriques et

numériques, et sur le fait que nous cherchons bien à avoir des carrés algébriques en relation entre eux, ce qui pourrait nous donner raison de considérer ces carrés géométriques. Nous laissons la démonstration du fait que A est un carré à la fin de séquence lors du retour collectif sur le récit de la démonstration.

La question II *Essayez d'écrire l'aire de A de 2 manières différentes. Trouvez et expliquez les 2 manières* mène les élèves aux calculs algébriques, sans qu'ils n'en voient le cheminement (ou la rationalité téléologique). Il est à noter que dans les expérimentations récentes l'idée que les expressions algébriques différentes sont égales parce qu'elles correspondent à la même aire n'a pas émergé spontanément et une fois énoncée, n'a pas été tout de suite saisie par nombre d'élèves. C'est ce qui devrait être l'objet de la question III.

La question III *Comment ceci peut nous aider à valider notre conjecture?* avait pour but général d'attirer l'attention sur la nécessité de rendre cohérents les différents moments précédents (construction des figures, analyse géométrique, calculs d'aires). Elle entame le travail de production du récit d'une argumentation, surtout en questionnant la rationalité téléologique des calculs effectués en II. Elle doit être reformulée pour questionner plus directement le rapport entre des écritures algébriques différentes d'une même aire. Dans l'expérimentation déjà citée, elle n'a pas été traitée car la II a été fortement guidée.

Dans la démonstration guidée le principe est de dévoluer des responsabilités de raisonnement aux élèves : produire et comprendre des blocs-arguments sur lesquels la démonstration est bâtie. Mais pour les amener comprendre la démonstration proposée, il nous faut aussi organiser leur responsabilité de questionner la démonstration globale et les pousser à avoir un rôle actif dans l'organisation sémantique qui relie les blocs-arguments en lignes convergentes.

Le débat

Au niveau mathématique:

Confrontation des raisonnements des élèves élaborés pour prouver les blocs d'arguments : A est un carré (sa démonstration devrait être laissée après la discussion métamathématique sur la validité mathématique des arguments),

Mise en commun et explicitation des points suivants: les calculs (premier calcul de l'aire de A, deuxième calcul de A), l'organisation des calculs est liée à l'organisation des figures, l'aire de A ne dépend pas de l'organisation des formes qui la constituent, la mise en équation.

Au niveau métamathématique, discussion de:

- Pourquoi certaines raisons sont indispensables: *Pourquoi calcule-t-on l'aire de A de deux façons différentes? Que signifie l'équation? A quoi sert-elle?... Pourquoi faut-il montrer que (ou bien ne faudrait-il pas montrer que) A est un carré?* (que l'on peut discuter avant de réaliser la démonstration). L'ordre des questions n'est pas conforme à la rédaction de démonstration mais cohérent avec la saisie du problème et la hiérarchie de résolution, et me semble être ce qui pourrait apparaître le plus naturellement dans un récit du raisonnement.
- Quels moyens pour trouver les relations? (le passage par le cadre géométrique, ...), pour justifier les arguments? (le calcul algébrique préserve la valeur de l'expression, les différentes représentations algébriques de l'aire de A correspondent à la même valeur)
- Comment exprimer les arguments/raisons et leurs relations?

Confronter les règles de raisonnement et les situer en rapport à des phases de raisonnement:

- dans la phase de production de conjecture nous avons utilisé des exemples et des mesures, cela nous donne des idées qu'on peut vérifier, qui nous convainquent davantage, mais ne suffisent pas pour démontrer...
- quand on écrira notre démonstration, il faudra s'assurer d'abord que A est bien un carré pour

baser les calculs qui suivent sur des données sûres mathématiquement.

Précisons que le débat n'a pas pour but une co-construction propre à la classe, ce sont les pratiques mathématiques portées par l'enseignant qui font référence.

Le récit individuel de reconstitution de la démonstration

Le texte attendu ne suit pas de règles spécifiques, mais il devrait refléter la réflexion sur l'articulation des arguments et sur les raisons qui permettent de faire certains pas. Exemple de texte attendu:

D'abord (*bloc 1*) on calcule l'aire de A, on peut le faire parce que nous savons que c'est un carré

Puis (*bloc 2*) nous trouvons une autre expression algébrique de l'aire

Nous faisons ces calculs parce que (*on pense au but final*) les mesures d'aire s'écrivent comme des carrés. Alors on pense que les carrés a^2 , b^2 et c^2 apparaîtront.

Comme les deux calculs correspondent à l'aire d'une même figure, on pourra écrire une équation et les carrés a^2 , b^2 et c^2 seront reliés (*on imagine comment rejoindre la ligne principale de l'argumentation*).

4) Analyse a posteriori, et suite ...

Les expérimentations ont montré que certains élèves n'ont pas pu faire le récit du raisonnement mais simplement celui de la suite des travaux de classe.

La relation entre cadres géométrique et algébrique est un enjeu important. D'une part ce changement de cadre n'est pas une pratique familière parce que le rapport entre les différentes représentations sémiotiques en jeu n'est pas formé chez la majorité des élèves. D'autre part le changement de cadre surprend car vu comme démarche qui quitte le but poursuivi. Il doit donc être replacé sur les deux plans: local (les signifiés sont les mêmes) et global (le jeu sur les représentations sémiotiques permet de construire des arguments).

Le fait que les expressions algébriques différentes correspondent à une même aire n'était pas toujours saisi, et surtout que ceci permet alors de considérer les expressions égales. Le manque d'interprétation des expressions algébriques semble être un frein à l'investissement de l'aspect sémantique du raisonnement.

Dans l'une des expérimentations le travail a été poursuivi. À partir des récits produits on a reconstitué deux récits, chacun mettant en valeur certaines caractéristiques d'un « bon récit ». Pour les fabriquer nous avons choisi des éléments indispensables à faire partager mais contrastés: l'un contenait beaucoup de justifications qui avaient l'intérêt d'expliquer la démarche générale, en particulier que l'égalité des expressions provient du fait qu'elles représentent la même chose. L'autre est succinct, clair, l'argumentation générale très bien articulée, mais présente très peu de justifications. La tâche individuelle était de comparer les récits et d'expliquer ce qu'il y a dans l'un qui manque dans l'autre et s'il manque des choses aux deux qui auraient mieux aidé à comprendre l'idée de la démonstration. La comparaison a été suivie d'une discussion collective de synthèse. Ces dernières étapes se sont avérées très utiles pour la majorité des élèves, et contrairement aux craintes des expérimentateurs elles n'ont pas lassé!

Conclusion et discussion

Ce travail fait partie d'une réflexion générale sur la distance entre les idées et les pratiques qui permettent de résoudre un problème (ici de démontrer) et l'expression exigée de ces pratiques afin qu'elles reflètent l'organisation épistémique propre au domaine. En particulier je tente de développer la réflexion sur comment aider l'élève à développer ces deux formes d'activité nécessaires dans la

démonstration (et qui pourraient sembler s'opposer) sans que l'une n'inhibe l'autre, et je propose quelques pistes pour répondre à cette question. Pour cela, l'analyse des différentes formes d'activités impliquées dans une démonstration (chez un sujet assez compétent) est essentielle. Elle a donné l'idée d'insérer des formes d'activité comme l'argumentation, et le récit de la preuve, dans les séquences didactiques. L'une met en scène dans la classe les débats qui se développent dans une communauté de mathématiciens intéressés par une question. Elle est « orchestrée par le professeur » qui transmet ainsi les questions importantes dans la pratique mathématique. L'autre, le récit, imite le monologue intérieur d'un mathématicien au travail, qui veut s'assurer de la cohérence et de la légitimité de sa démarche. Comme j'ai cherché à le montrer, l'argumentation est à la fois une forme d'activité qui permet de rendre explicites et conscientes les pratiques « efficaces », et un outil didactique pour faire les liens et les distinctions entre les formes d'activités. Quant à la production d'un récit de la démonstration, celle-ci est proposée comme moyen d'aider l'élève à internaliser la problématique d'une démonstration une fois « décortiquée » et débattue (par argumentation). Avec en particulier le but d'y travailler non pas en reproduisant la démonstration, mais en mettant en évidence ce qui fait sa logique et ce qu'elle demande comme activités « annexes » à la production des arguments et du texte de démonstration.

Ce deuxième outil didactique n'est pas encore encadré de façon théorique (comme nous parvenons à encadrer l'argumentation par certaines élaborations de Toulmin). Nous avons réussi à obtenir de tels récits mais chez assez peu d'élèves. Il est remarquable qu'on l'ai obtenu d'un façon très satisfaisante par une élève « bonne en français et mauvaise en maths » dans une situation qui n'est pas relatée ici. Les conditions qui favorisent cette production doivent encore être étudiées. Mais on peut penser qu'il importe d'enrichir l'activité langagière dans les travaux de mathématique. Y a-t-il nécessité de donner aux élèves des modèles de ce type de production? Dans quelles organisations de séances ou séquences ?

Et il se pose un problème pragmatique: nos séquences sont longues! une réflexion sur le temps didactique/temps de l'élève serait nécessaire. Car nous cherchons à privilégier un certain temps de l'élève, et ces formes d'outils font partie de l'organisation du temps didactique pour que celui de l'élève existe... mais est-ce bien un temps de l'élève? y trouve-t-il "son compte" ou se perd-il dans des questionnements qui s'enchaînent et se complexifient? Pour l'instant dans nos situations expérimentales bon nombre d'élèves semblent profiter de ce temps.

Ces questions continuent à nous préoccuper et nous cherchons à les approfondir dans diverses situations didactiques. Et cela demande le choix de situations favorables. Nous formons graduellement une collection de telles situations.

Tous mes remerciements à Nadine Bertolotti et Gilles Lataillade (le groupe IREM qui a permis la l'affinement de l'ingénierie didactique) et la réflexion sur la progression annuelle pour que cette situation puisse être accessible aux élèves. Sans eux ce travail n'aurait pas pu se développer.

Bibliographie

- Arsac, G. (2009). La démonstration: une logique en situation? Colloquium de didactique des mathématiques, Paris.
- Arzarello, F. (2007). The proof in the 20th century. In P. Boero (Ed.), *Theorems in school* (pp. 43-63). Rotterdam: Sense Publishers.
- Assude T & Paquelier Y (2005). Souvenirs et approche temporelle des apprentissages mathématiques, *Revue Canadienne de l'Enseignement des Sciences, des Mathématiques et des Technologies*, Vol.5.2, 223-239.

- Duval, R. (1991). Structure du raisonnement deductif et apprentissage de la démonstration. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 233-261.
- Duval, R.: 1998, 'Signe et objet, trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre représentation et objet' *Annales de didactique et de sciences cognitives*, vol.6, ULP, IREM de Strasbourg.
- Knipping, C. (2008). A method for revealing structures of argumentation in classroom proving processes. *ZDM*, 40 (3), 427-441.
- Morselli, F. (2007). *Sui fattori culturali nei processi di congettura e dimostrazione*. Ph. D. Thesis. Università degli Studi di Torino.
- Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics*, 66(1), 23-41.
- Toulmin, S. (1974). *The uses of arguments*. Cambridge: Cambridge U. P.
- Vygotsky, L. S.: 1985, *Pensée et langage*, Editions Sociales, Paris.

L'action du professeur et le temps des situations.

Serge QUILIO
serge.quilio@free.fr
UMR ADEF, INRP

Résumé

Ma communication présente une étude des leçons réalisées en classe pour la mise en oeuvre de l'ingénierie *Rationnels et Décimaux dans la scolarité obligatoire* (Brousseau, 1987). Pour cette étude, j'ai considéré ces leçons comme des leçons *ordinaires*, c'est-à-dire que le travail de description qui est mené considère l'action effective des professeurs dans le déroulement des leçons filmées au COREM de Bordeaux.

Je montrerai que le fonctionnement de cette ingénierie repose sur un travail chronogénétique et mésogénétique du professeur très particulier sur le plan langagier et dans l'usage des systèmes sémiotiques. Il s'agit de faire en sorte, dans certaines situations, que l'élève puisse actualiser un milieu ancien (par exemple la commensuration) dans une situation nouvelle (par exemple agrandir une pièce de puzzle). L'organisation temporelle gérée par le professeur permet d'envisager un temps didactique centré sur des situations et non organiquement sur des objets de savoir. Je m'appuierai ainsi sur le programme initié par Centeno (Centeno, 1992) pour préciser les spécificités du temps didactique produit par les situations et ses conséquences sur l'action effective des professeurs.

Brousseau, N&G, (1987), *Rationnels et Décimaux dans la scolarité obligatoire*, IREM de Bordeaux

Brousseau, G., (1998), *Théorie des situations didactiques*, La pensée sauvage

Centeno, J., (1995) *La mémoire didactique de l'enseignant*, Thèse posthume, LADIST, Bordeaux

Quilio, S., (2008), *Contribution à la pragmatique didactique. Une étude de cas dans l'enseignement des nombres rationnels et décimaux à l'école élémentaire*, Thèse de l'Université de Provence

Sensevy, G. & Mercier, A. (2007). *Agir ensemble : l'action didactique conjointe*. In G. Sensevy & A. Mercier (dir), *Agir ensemble : l'action didactique conjointe du professeur et des élèves*. Rennes : Presses Universitaires de Rennes.

Activités de recherche et de preuve entre pairs à l'école élémentaire : perspectives ouvertes par les communautés de pratique d'enseignants

Jean-Philippe Georget

Laboratoire André Revuz, Université Paris Diderot

IUFM Centre Val de Loire, Université d'Orléans

jean-philippe.georget@univ-orleans.fr

Résumé

Depuis plusieurs années, des chercheurs et des formateurs cherchent à favoriser la pratique d'activités de recherche et de preuve entre pairs (RPP) en classe de mathématiques. Le travail de thèse présenté ici s'appuie sur des outils classiques en didactique des mathématiques. Il est enrichi par la théorie des communautés de pratique (CoP) et par des concepts d'ergonomie des environnements informatiques pour l'apprentissage humain dont l'usage est élargi aux ressources destinées aux enseignants. Enfin, les potentiels de recherche, de débat, de résistance, de résistance dynamique, didactique, sont définis pour mieux caractériser les activités RPP. Une synthèse de l'analyse des expériences antérieures et de ressources destinées aux enseignants est présentée, ainsi qu'une synthèse de l'étude de la littérature concernant l'exploitation de la théorie des CoP en didactique des mathématiques. Une expérimentation, menée sur 3 années et s'appuyant sur une CoP d'enseignants de l'école primaire, a permis d'opérationnaliser cette théorie de manière nouvelle (participation/réification, objet frontière, courtage, trajectoire) dans le but de favoriser des évolutions de pratique. Des ressources présentaient aux enseignants des problèmes ouverts déjà expérimentés pour qu'ils en choisissent certains et les mettent en œuvre dans leur classe. L'ergonomie de ces ressources était affinée de façon à prendre en compte le paradoxe d'incomplétude des ressources concernant la quantité d'information utilisable et acceptable par un enseignant. Les analyses ont montré l'intérêt de l'approche proposée. Elles ont aussi mis en évidence des perspectives pour l'optimiser et le fait que la complexité, encore mal connue, des activités RPP est un facteur explicatif important de leur faible diffusion dans les pratiques enseignantes.

Mots clés

Communautés de pratique d'enseignants, problème ouvert, potentiels d'une activité de recherche, activité de recherche et de preuve entre pairs, ergonomie des ressources, travail collaboratif d'enseignants, paradoxe d'incomplétude des ressources.

Depuis plusieurs années, des chercheurs et des formateurs promeuvent des activités de classe qui visent à mettre les élèves dans une situation proche de celle du mathématicien. Plus précisément, il s'agit de situations où les élèves cherchent des mathématiques. De nombreux travaux se sont intéressés à ce domaine parmi lesquels ceux de Arsac et al. (1991), de Grenier et Payan (2002), de l'équipe ERMEL (1999) ou plus récemment de ceux de Ouvrier-Bufferet (2006) et de Hersant et Thomas (2008). Le contexte institutionnel de l'enseignement primaire, notamment au travers des programmes de 2002, en vigueur au début de ce travail, puis ceux de 2007, demandaient explicitement aux enseignants de pratiquer de *véritables problèmes de recherche* où les enseignants ne devaient donner ni la démarche ni la solution. De plus, des éléments d'information figuraient dans des documents d'accompagnement des programmes ou dans d'autres ressources tels les ouvrages ERMEL et la revue Grand N. Pour autant, les

pratiques de classe ne semblaient pas évoluer, les expérimentations antérieures ayant rarement diffusé au-delà de cercles d'initiés, ce qui est toujours le cas aujourd'hui.

En admettant que ces activités ont leur place à l'école primaire, il est légitime et logique de poser la question de l'écologie de ces pratiques de classe et de s'interroger sur les moyens d'action envisageables pour favoriser leur mise en œuvre. Les sections suivantes présenteront les principales hypothèses formulées dans le cadre du travail de thèse (Georget, 2009), son cadrage théorique et certains éléments de méthodologie qui seront illustrés par des exemples. Les principaux résultats obtenus et les perspectives de recherche ouvertes seront ensuite présentés et discutés.

Auparavant, il faut revenir sur l'expression *activités de recherche et de preuve entre pairs* utilisée dans le titre de cet article. Au départ de ce travail, il était question de centrer l'étude sur la pratique des *problèmes pour chercher* (Programmes de l'école élémentaire, 2002, 2007) et des *problèmes ouverts* (Arsac et al., 1991). Quel intérêt y a-t-il à introduire une nouvelle terminologie ? La première raison est que ces expressions sont fréquemment employées par les enseignants avec des acceptions très variées. D'autres expressions du même type existent : *situation problème* (Douady, 1986), *situation recherche* (Duchet et Mainguéné, 2003) ou encore *situation recherche en classe* (Grenier et Payan, 2002). Elles aussi sont utilisées dans différentes acceptions. Par exemple, une *situation-problème* peut être une simple situation qui pose problème aux élèves et une *situation de recherche (en classe)* une situation où... les élèves cherchent. Ce n'est pas que ces expressions soient mal définies par leurs auteurs mais il s'agit là d'une conséquence d'usages qui se développent chez les enseignants et qui ne peuvent être contrôlés a posteriori. La seconde raison est que les moments de recherche individuelle, quand ils existent, sont souvent prédominants dans les pratiques de classe par rapport à ce que l'on attend dans les situations de recherche, notamment en ce qui concerne les moments de débats entre pairs.

L'expression *activités de recherche et de preuve entre pairs* désigne des activités dont l'objectif est d'entraîner les élèves à la démarche de recherche en mathématiques et d'échanges entre pairs à la manière des mathématiciens professionnels. Elle met ainsi explicitement en valeur les moments d'interactions et de preuve que ces activités permettent de provoquer entre les élèves. Le terme *activité* souligne que le problème n'est que l'un des éléments à prendre en compte dans ces situations.

C'est à la fois une question de terminologie et de bonne dénotation des situations visées et un élément essentiel pour viser une intégration dans les pratiques existantes. Mieux nommées, ces activités montrent mieux leurs potentialités à faire faire des mathématiques aux élèves. De plus, cette nouvelle expression a l'intérêt supplémentaire de désigner un ensemble d'activités similaires, ce qui peut permettre de les reconnaître comme relevant d'une même catégorie et ensuite de les analyser comme telles et de les comparer.

Parmi les activités RPP, les activités *orientées notion/technique* (ONT) sont celles visant davantage l'introduction d'une notion ou d'une technique qu'à travailler une démarche générale de recherche en mathématiques. Cette distinction fait apparaître le caractère ONT comme une option possible et non obligatoire des activités RPP, ce qui peut aussi contribuer à mieux les décrire et à favoriser ces activités dans les classes.

1 Hypothèses et questions de recherche

Le constat sur la pratique des activités RPP dans les classes a amené la formulation des trois hypothèses principales suivantes. La première consiste à supposer que la pratique des activités RPP est particulièrement complexe pour les enseignants si on la compare à des situations de classe plus fréquemment observées telle la résolution d'exercices d'application directe du cours. Elle met en jeu des processus qui ne sont pas tous connus et qui sont interdépendants.

La deuxième hypothèse concerne les ressources liées aux activités RPP. En admettant que les manuels prédominent dans les genèses documentaires des enseignants (Gueudet et Trouche, 2009) et qu'ils contiennent peu d'activités RPP (Coppé et Houdement, 2002), il y a donc peu d'activités RPP dans l'espace de travail des enseignants. On suppose aussi que les ressources susceptibles d'aider les enseignants ne sont pas suffisamment accessibles, tant au niveau de leur contenu que de leur accès physique. L'apport des nouvelles technologies apparaît alors indispensable. La troisième hypothèse est relative à la distance entre les pratiques visées et les pratiques usuelles et à la complexité des pratiques d'enseignement (Robert et Rogalski, 2002). Elle consiste à supposer que les évolutions visées sont plus faciles pour un groupe d'enseignants que pour un enseignant isolé et qu'un travail collaboratif doit supporter ces évolutions et s'inscrire dans la durée avec l'aide de ressources adaptées et d'un accompagnement souple et multiforme. L'apport de la théorie des communautés de pratique (CoP) sera ici crucial.

Finalement, la thèse à l'origine de ce travail peut se formuler de la façon suivante : une communauté de pratique d'enseignants (CoP), supportée par les nouvelles technologies, est susceptible de favoriser la pratique d'activités de recherche et de preuve entre pairs (RPP) dans les classes. Pour ce faire, un travail sur l'ergonomie des ressources est nécessaire.

La recherche menée a suivi deux axes de questionnement, d'un côté celui des activités RPP et de l'autre celui du travail collaboratif. Comment expliquer le manque de diffusion des activités RPP et appréhender leur complexité ? Quelle est la qualité des ressources disponibles ? Quelles sont les conditions écologiques d'un travail collaboratif entre enseignants permettant des changements de pratique ?

2 Cadrage théorique

Ce travail s'inscrit dans quatre approches théoriques, la « Double approche » (Robert et Rogalski, 2002), les potentiels des activités RPP/ONT (Georget, 2009), les Communautés de pratique (CoP) (Wenger, 1998, 2002) et l'ergonomie des EIAH appliquée aux ressources (Georget à paraître, 2009 ; Tricot et al., 2003 ; Bastien et al., 1998).

2.1 Double approche

La double approche développée par Robert et Rogalski (2002) s'intéresse aux apprentissages des élèves et aux pratiques enseignantes. Une de ses caractéristiques est de postuler que la pratique d'un enseignant ne se réduit pas à son activité en classe. L'enseignant y est considéré comme un individu engagé dans une relation didactique avec ses élèves mais aussi comme un individu exerçant un métier avec ses contraintes et ses marges de manœuvre. La pratique enseignante y est analysée au travers de cinq composantes principales. Les *composantes cognitives et médiatives* s'intéressent au contenu mathématique proposé aux élèves et aux moyens que l'enseignant utilise pour mettre en relation les élèves avec ce contenu. La *composante institutionnelle* regroupe les éléments spécifiques des institutions avec lesquels l'enseignant travaille (les programmes, les manuels scolaires). La *composante sociale* regroupe les éléments de pratique spécifiques d'un ensemble d'enseignants, par exemple des conceptions et des habitudes de travail partagées. Enfin, la *composante personnelle* regroupe les éléments de pratique spécifiques d'un enseignant particulier.

La double approche s'intéresse aux apprentissages des élèves. Son entrée majeure est l'analyse des *tâches prescrites* aux élèves par l'enseignant, c'est à dire de ce que les élèves ont à faire. Plus finement, on distingue aussi les tâches attendues, les tâches redéfinies élèves et les tâches effectivement accomplies. L'activité des élèves est ce que ces derniers développent lors de la réalisation des tâches. Une entrée particulière qui a des conséquences méthodologiques importantes est de s'intéresser à l'*activité potentielle des élèves*, c'est à dire

celle que l'on peut évaluer a minima ou a maxima à partir des tâches prescrites (Rogalski, 2003).

2.2 Potentiels des activités RPP/ONT

L'intérêt porté à une meilleure caractérisation et à une meilleure exploitation des activités RPP a conduit à l'introduction de nouveaux concepts en didactique des mathématiques : le *potentiel de recherche* d'une activité RPP, son *potentiel de débat*, son *potentiel de résistance*, son *potentiel de résistance dynamique* et son *potentiel didactique* (Georget, 2009). Ces potentiels sont définis ci-après puis illustrés à l'aide du problème *Cordes* (ERMEL, 1999).

Dans ce problème susceptible d'être à l'origine d'une activité RPP, il s'agit de dénombrer le nombre de cordes qu'il est possible d'obtenir pour un nombre donné de points situés sur un cercle. À l'école primaire, ce problème peut être proposé à des élèves de cycle 3 (8-11 ans), en précisant ou non le nombre de points de départ. Ce nombre est une variable didactique de la situation (Brousseau, 1998). Si le nombre de points est petit, un simple comptage sur une figure permet de répondre à la question, ce qui est impossible quand il est suffisamment grand. Les élèves peuvent accéder à trois méthodes de résolution, n points étant donnés. La méthode additive consiste à considérer que le premier point est relié aux $n-1$ autres points, le deuxième à $n-2$ points... et l'avant dernier point n'est relié qu'au dernier point. Les élèves de ce niveau n'ont pas ou peu de connaissance de l'algèbre élémentaire mais cette méthode leur permet d'aboutir à une expression équivalente à $(n-1)+(n-2)+\dots+1$. La méthode multiplicative consiste à considérer que n points sont reliés chacun à $n-1$ points. Chaque corde étant comptée deux fois, une par extrémité, il faut diviser par 2. Les élèves aboutissent à une formulation équivalente à $n(n-1)/2$. Enfin, ils peuvent esquisser une méthode par récurrence. Connaissant le nombre de cordes pour $n-1$ points, l'ajout d'un n -ième point, correspond à l'ajout de $n-1$ nouvelles cordes.

Le premier objectif des activités RPP étant de développer les compétences des élèves en matière de recherche, il est logique de s'intéresser à leur potentiel de recherche, c'est à dire aux éléments qui permettent de s'assurer que les élèves pourront exercer leur capacité à chercher un problème mathématique nouveau qui ne soit pas une simple application de techniques déjà vues. Un critère d'évaluation de ce potentiel pourrait être le fait qu'il existe plusieurs solutions pour résoudre le problème. *Cordes* n'est pas un problème standard à l'école et les élèves ne savent pas a priori comment le résoudre. Plusieurs stratégies sont envisageables, trois méthodes de résolution sont accessibles aux élèves. Il a donc un potentiel pour permettre une recherche par les élèves.

Le deuxième objectif que l'on peut fixer aux activités RPP est celui de favoriser des débats d'ordre mathématique entre élèves. Il s'agit donc de s'assurer de son potentiel pour le faire. On peut par exemple évaluer ce potentiel en étudiant si des contradictions ou des doutes sur la validité de certaines propositions peuvent apparaître dans la classe. Dans le cas de *Cordes*, pour un grand nombre de points, si un élève propose une solution en se basant uniquement sur la figure, les autres élèves peuvent douter de la véracité de cette solution. Plusieurs propositions différentes peuvent aussi apparaître. Ce problème a donc un potentiel pour permettre des débats entre pairs de nature mathématique.

Il est aussi important de voir si le problème va résister aux élèves et surtout si cette résistance va varier dynamiquement au cours de leur recherche, ce sont le potentiel de résistance et le potentiel de résistance dynamique d'une activité RPP. Pour *Cordes*, les élèves sont susceptibles de chercher des cas simples et des cas plus résistants. Il est probable qu'ils ne trouveront pas tout de suite une solution correcte et qu'ils trouveront des propositions plus ou moins correctes au cours de la recherche. Ce problème a donc un certain potentiel de résistance face aux tentatives de résolution des élèves et cette résistance va varier au cours de

la recherche.

Enfin, il est pertinent de s'intéresser à ce que les élèves sont susceptibles d'apprendre dans le cadre d'une activité RPP donnée, que ce soit des notions mathématiques, paramathématiques ou méta-mathématiques (Chevallard, 1985). C'est son potentiel didactique. Lors de la résolution de *Cordes*, les élèves sont susceptibles d'apprendre des méthodes de résolution exploitables dans d'autres contextes comme des techniques de dénombrement. Ils peuvent aussi apprendre des éléments plus transversaux liés à la démarche de recherche en mathématiques : le statut des exemples, des contre-exemples, des preuves, etc.

Les cinq potentiels ayant été définis et illustrés, il est temps de revenir sur l'intérêt d'avoir exprimés ces caractéristiques sous forme de potentiels. La première raison de ce choix est liée à l'incertitude du déroulement de ces activités en classe. Ces potentiels peuvent en effet s'actualiser de façons diverses au cours d'une séance sous l'influence de plusieurs facteurs comme l'expérience des enseignants ou des élèves. La deuxième raison est que cette terminologie donne aussi une sorte de droit aux enseignants de faire une utilisation variée de ces activités, ce qui semble intéressant à prendre en compte pour qui étudie une intégration progressive de ces activités dans les pratiques existantes. Enfin, la troisième raison est que les potentiels décrivent des caractéristiques qui peuvent être obtenues de différentes manières, ce qui peut permettre de mieux les comparer.

2.3 Communautés de pratique

Pour analyser et prendre en compte un travail collaboratif dans la durée, la théorie des communautés de pratique (CoP) d'Etienne Wenger (1998) a paru être un moyen pertinent et novateur.

Afin de faciliter la communication de cette théorie et étant donné les usages pré-existants dans la littérature, il a été nécessaire de mettre au point une définition concise d'une CoP. Une CoP est un ensemble de personnes regroupées autour d'une entreprise commune – considérée comme objet et comme processus – négociée entre elles et relative à leur pratique (Georget, 2009). De telles communautés ne sont pas qu'harmonie, il peut y avoir des désaccords, des tensions et des ambiguïtés. Ses membres négocient le sens de leur activité dans deux processus, celui de participation et celui de réification.

Le *processus de participation* regroupe l'ensemble des façons d'être engagé dans une pratique. Pour un enseignant, ce peut être : exercer son métier en classe, préparer la classe, penser à son travail à un moment donné, etc. Plusieurs niveaux de participation et plusieurs types de trajectoires sont possibles. Quant au *processus de réification*, c'est celui qui conduit à chosifier notre expérience à l'aide d'objets, de symboles, d'attitudes, de concepts, d'histoires, etc. Ces « choses » s'appellent aussi des réifications.

Selon Wenger, une sorte d'équilibre est à rechercher entre ces deux processus. D'une part, la réification supporte la participation et d'autre part la participation permet aux réifications d'exister. Mais, une réification peut aussi freiner la participation ou ne pas permettre la participation si elle est trop définie ou, à l'inverse, si elle est trop peu définie.

Les CoP ne vivent pas isolées les unes des autres et ont des liens entre elles. Les *objets frontières* sont des réifications qui passent d'une communauté à l'autre sous une forme dénaturée (Georget, 2009). Un *courtier* est un membre de la CoP qui a une légitimité suffisante pour y introduire ces objets.

Les CoP évoluent avec le temps et des repères sont nécessaires. À cet effet, Wenger et al. (2002) ont proposé l'introduction de différents stades de développement d'une CoP. Le *stade d'incubation* est celui de la formation du germe d'une CoP, c'est à dire le regroupement des individus autour d'une sorte d'idée fédératrice. Il est suivi du *stade de fusion* où les relations et les moyens d'activité de la CoP se développent. Le *stade de la maturation* est ensuite celui du recrutement de nouveaux membres pour diffuser la connaissance acquise au sein de la

CoP. Il est suivi par le *stade de consolidation* qui est le stade marqué par l'identification et le travail sur les manques de la documentation de la CoP et par l'organisation de l'accueil des nouveaux membres. Enfin, le stade ultime est celui de la *transformation*. C'est la fin de la CoP qui peut prendre plusieurs formes. Pour appuyer l'apport de la définition d'une CoP donnée plus haut, il est intéressant de signaler une des formes de ce stade que Wenger et al. (2002) appelle l'*institutionnalisation de la CoP*, c'est à dire l'intégration formelle de la CoP dans une structure institutionnelle qui lui fait perdre son statut de CoP, notamment par son manque de liberté d'action. Les auteurs distinguent notamment l'*institutionnalisation de la CoP* de l'*institutionnalisation du recours à la CoP*, ce dernier consistant seulement à institutionnaliser la prise en compte de son travail sans impacter sur son fonctionnement. La liberté de la CoP de définir son entreprise commune constitue donc une qualité essentielle aux yeux des auteurs.

Wenger s'est d'abord intéressé aux communautés spontanées puis aux communautés intentionnelles. En effet, une CoP ne se décrète pas mais par contre il est possible de chercher à favoriser son émergence et son développement. Le titre de l'ouvrage de Wenger et al. (2002), *Cultivating communities of practice*, utilise une métaphore intéressante qui résume bien son approche, la métaphore de la culture, d'un jardin par exemple. La pratique de la culture d'un jardin amène bien à comprendre que le système « jardin » fonctionne en relative autonomie par rapport aux interventions du jardinier. Son rôle est pourtant essentiel au bon développement du jardin. Il consiste à trouver des déclencheurs de dynamiques du système, à garder un contrôle relativement souple sur son développement. Le jardinier de la CoP s'appelle le coordinateur.

Dans le cadre du développement d'une CoP d'enseignants, il s'est révélé nécessaire de récapituler un certain nombre de dimensions et principes présentés par Wenger et al. (1998, 2002) dans un unique outil d'émergence et de coordination d'une CoP qui peut servir de guide au coordinateur. L'outil sera illustré partiellement plus loin dans l'article. Il se résume par la liste d'items ci-après et qui sont explicités dans la thèse. Par exemple, l'item *Design et évolution* signifie par exemple que, dès le design du dispositif initial censé favoriser l'émergence d'une CoP, il faut se préparer à son évolution en laissant des marges de liberté de retravailler le design du dispositif à ses futurs membres pour qu'ils puissent y participer (*Identification/négociabilité*). Il faut aussi prévoir que tous les membres ne participeront pas avec la même intensité (*Degré de participation*) et que des échanges devront se faire entre certains membres en dehors de moments communs à tous (*espaces public/privé*).

- Design et évolution
 - Participation/réification
 - Conçu/émergent
 - Local/global
 - Identification/négociabilité
- Courtage, perspectives internes/externes
- Degré de participation
- Espaces public/privé
- Focus sur valeur
- Familier/exceptionnel
- Rythme

Cette section a montré que la théorie des communautés de pratique de Wenger offre déjà des outils pour aborder la question des ressources aux enseignants, par exemple l'*équilibre participation/réification* et la dimension *Identification/négociabilité*. Un regard sur l'ergonomie des ressources est pertinent et complémentaire.

2.4 Ergonomie des ressources

Il s'agit ici d'introduire en didactique des mathématiques des concepts jusqu'ici utilisés dans les recherches sur les environnements informatiques pour l'apprentissage humain (EIAH) et dont l'usage est élargi aux ressources destinées aux enseignants (Georget, à paraître), les concepts d'*utilité*, d'*utilisabilité* et d'*accessibilité*.

L'évaluation de l'*utilité* d'une ressource consiste à répondre à la question : la ressource remplit-elle son rôle ? Par exemple, une ressource proposée à un enseignant lui permet-elle de mettre en œuvre une activité RPP donnée. L'évaluation de l'*utilisabilité* consiste à rechercher les différentes possibilités d'utiliser la ressource. Plusieurs critères sont intéressants à mobiliser. Parmi ceux-là, l'*accessibilité* de la ressource est primordiale. L'accès physique mais aussi la compréhension du texte de la ressource sont-ils favorisés ? L'expérience et les habitudes de l'enseignant sont-ils respectés ? L'*adaptabilité* au contexte, aux besoins, aux souhaits de l'enseignant sont-ils possibles et comment ? Enfin, l'évaluation de l'*acceptabilité* est la détermination de la valeur que l'enseignant donne à l'utilité et à l'utilisabilité de la ressource et qui conditionne sa décision de l'exploiter.

Tricot (2003) a montré que ces concepts ne sont pas indépendants et son discours peut se transposer dans le domaine de l'enseignement. Pour ne prendre qu'un exemple de cette indépendance, il est clair que si une ressource liée à une activité RPP donnée ne peut pas s'adapter au contexte d'enseignement d'un enseignant, c'est à dire si son utilisabilité est insuffisante, alors elle lui permettra difficilement de mettre en œuvre cette activité. En d'autres termes la ressource s'avèrera peu utile, voire inutile. À l'inverse, il y a aussi une relative indépendance entre les concepts d'utilité, d'utilisabilité et d'acceptabilité. Une ressource peut être utile à un enseignant pour mener une activité avec ces élèves mais cette activité peut être d'une nature complètement différente de celle visée par son concepteur. Ici, la ressource est utilisable mais son utilité est faible du point de vue du concepteur. C'est par exemple le cas pour une activité RPP si une recherche a lieu dans la classe mais que les débats possibles ne sont pas exploités par l'enseignant.

Les concepts d'ergonomie permettent de formuler le *paradoxe d'incomplétude des ressources* (Georget, à paraître, 2009). Si une ressource est trop complète, par exemple si elle rentre trop dans les détails de l'activité à mettre en œuvre, les enseignants risquent de ne pas l'utiliser du fait de la quantité d'informations à traiter. Ces détails peuvent aussi être trop contraignants. Son acceptabilité est donc mise en défaut. À l'inverse, si la ressource est trop incomplète, les enseignants peinent à en tirer profit. C'est alors son utilité et son utilisabilité qui sont mises en défaut. Il y a bien ici un paradoxe puisque, alors qu'un concepteur cherche à donner toutes les clés d'une situation à l'enseignant pour qu'il puisse la mettre en œuvre, il lui faudra limiter l'information contenue dans la ressource afin qu'elle puisse remplir son office, c'est à dire permettre de mettre en œuvre une activité de classe. Mais, en limitant l'information qu'il donne, il compromet la bonne réalisation de la situation en classe. Ce paradoxe peut aussi s'interpréter avec la métaphore de l'équilibre participation/réification de Wenger.

3 Méthodologie

Un premier point de méthodologie du travail de thèse a consisté à mener une étude détaillée de la compatibilité et des contradictions éventuelles entre les cadres théoriques exposés précédemment, notamment entre la double approche et la théorie des CoP sur les questions de la stabilité et des évolutions de la pratique et sur des aspects plus méthodologiques. Cette étude a conclu à la complémentarité des cadres mobilisés. Un deuxième point a consisté à rechercher la validation de l'hypothèse sur les ressources existantes et à faire une synthèse des expérimentations antérieures menées autour des activités RPP et des CoP en didactique des mathématiques.

3.1 Étude de l'existant autour des activités RPP et des CoP

Étant donné le nombre important de ressources existantes destinées aux enseignants, l'étude s'est limitée à l'analyse des instructions officielles, des programmes et documents d'accompagnement, des ouvrages ERMEL et du numéro *Spécial points de départ* de la revue Grand N (IREM de Grenoble, 2003) car ils étaient les plus à même d'aider les enseignants. Après une analyse macro de chacune de ces ressources, l'étude a consisté en une analyse plus précise d'une activité extraite des ouvrages ERMEL et d'une autre extraite du *Spécial points de départ*. L'étude a confirmé en partie une des principales hypothèses de départ en montrant que l'ergonomie des ressources existantes pouvait être améliorée sur plusieurs points. Elles pourraient : (1) proposer les moyens d'une intégration progressive dans les pratiques existantes ; (2) donner davantage d'options de mise en œuvre pour une meilleure utilisabilité et (3) être plus utile en donnant les solutions et les démarches de résolution des problèmes, ceci afin que les enseignants soient mieux assurés avant d'arriver en classe.

L'analyse des expérimentations antérieures autour des activités RPP a consisté à consulter la littérature les concernant et présenter une synthèse du projet des auteurs, des rôles, motivations et contraintes des acteurs concernés (élèves, enseignants, chercheurs), de la nature des activités destinées aux élèves, des gains obtenus ou pressentis par les auteurs quant à la formation des élèves et des questions liées à l'extension des expérimentations. Les dispositifs suivants ont été analysés : les *problèmes ouverts* de Arsac et al. (1991) les *situations de recherche en classe* (SiRC) (Grenier et Payan, 2002), le *débat scientifique* (Legrand, 1988), les *ateliers de recherche en mathématiques* (ARM) (Eysseric, 2002) et *MATh.en.JEANS* (Duchet et Mainguéné, 2003). Il ressort de cette étude d'une part qu'il y a une assez grande variété dans les expérimentations et d'autre part que le dispositif *problèmes ouverts* offre, apparemment, un rendement intéressant sans pour autant être trop invasif dans les pratiques existantes. Il faut souligner ici qu'aucun des documents consultés ne présente d'étude scientifique précise de l'efficacité du dispositif sur les apprentissages des élèves.

Enfin, concernant les CoP d'enseignants de mathématiques, une revue de la littérature de recherche a cherché à cerner l'usage de la théorie de Wenger en didactique des mathématiques dans les revues *Recherche en didactique des mathématiques*, *Educational Studies in Mathematics*, *Journal of Mathematics Teacher Education*, *Teachers and Teaching Education*, ainsi que dans quelques autres ressources dont les travaux de Graven (2002). Cette étude montre que les usages des concepts de Wenger sont très variés et dépassent fréquemment le contexte des CoP. En particulier, différents concepts présentés par Wenger sont fréquemment utilisés hors du contexte d'une CoP et l'expression « communauté de pratique » n'est souvent qu'un synonyme de « communauté d'enseignants », ce qui légitime une fois de plus la nécessité de la définition d'une CoP donné en début de cet article. L'une des rares exceptions à ce constat est justement la thèse de Mellony Graven citée plus haut.

À la lumière de l'étude des travaux antérieurs, une expérimentation autour des activités RPP et basée sur une CoP d'enseignants avait donc tout son intérêt.

3.2 Expérimentation d'une CoP d'enseignants autour des activités RPP

L'objet de l'expérimentation était d'étudier si, et comment, une CoP d'enseignants ayant pour entreprise commune la pratique d'activités RPP pouvait être initiée. Pour ce faire, il s'agissait de proposer à des enseignants des ressources plus adaptées par rapport à l'existant et d'utiliser les ressources des nouvelles technologies pour ne pas se restreindre à une école et faciliter l'accès à ces ressources. Il s'agissait aussi de s'inscrire dans la durée et de se préparer à des évolutions variées du dispositif par un accompagnement souple et multiforme de la part du coordinateur/chercheur. L'outil de design pour l'émergence et la coordination d'une CoP

présenté plus haut a ici joué pleinement son rôle.

Le dispositif a fonctionné de la façon suivante. Des enseignants volontaires choisissaient les problèmes qu'ils voulaient mettre en œuvre sur un site Web à accès restreint. Les problèmes étaient au nombre de 5 les deux premières années, puis 9 la dernière année. Une organisation permettait au coordinateur/chercheur d'observer la majorité des séances menées. Pour partager leurs expériences, une proposition était faite de rédiger des comptes-rendus de séance et de les envoyer sur une liste de diffusion réservée aux enseignants et au coordinateur. Une seule réunion a été organisée l'année I, pour présenter le dispositif. D'autres réunions se sont révélées nécessaires et ont été organisées les années II et III, à raison de 4 par an. Pour autant, aucune réunion n'a permis de réunir tous les membres de la CoP, ce qui justifie encore le recours aux nouvelles technologies pour assurer un minimum de communication.

L'ensemble des modalités de travail était formulées sous forme de propositions et étaient donc susceptibles de modifications, conformément au cadre théorique des CoP. Ce dispositif de base était censé fournir des réifications permettant la participation des enseignants ainsi que des modalités de travail auxquelles les enseignants pouvaient adhérer mais qui étaient largement négociables. En l'état, les propositions étaient insuffisantes pour remplir leur fonction, ceci afin que les enseignants les complètent ou les adaptent pour les rendre opérationnelles. Par exemple, le contenu du compte-rendu n'était pas précisé et les réunions avec les enseignants ont permis chaque année des évolutions de cette modalité de travail. À l'inverse, devant certains manques de diffusion de comptes-rendus, le coordinateur a même proposé régulièrement d'arrêter la modalité compte-rendu. Les enseignants ont choisi de la conserver, malgré son coût. Les réunions étaient l'occasion de mettre le focus sur la valeur de la CoP, de mettre en évidence les gains du dispositif. Par exemple, elles étaient l'occasion de signaler que tel enseignant avait des techniques intéressantes à évoquer ou qu'il avait déjà expérimenté tel ou tel problème.

Les ressources mises à disposition sur le site Web étaient elles-mêmes des propositions à discuter et à améliorer. La ressource *Cordes* va permettre d'illustrer les choix effectués.

3.3 La ressource Cordes

L'idée de départ était de proposer aux enseignants des ressources faciles et rapides à consulter pour mettre en œuvre des activités RPP dans leur classe. Il fallait tenir compte de l'équilibre participation/réification et du paradoxe d'incomplétude des ressources. Il était donc important de ne pas accumuler trop d'information, de ne pas donner un côté long et figé à la ressource et de ne pas présenter des manières de faire qui risquaient de s'imposer plus ou moins implicitement aux enseignants. Un choix important a consisté à laisser volontairement des manques dans les ressources notamment en ne proposant pas de scénario mais plutôt des options d'utilisation. L'objectif était d'une part de déclencher des discussions généralement difficiles à provoquer entre enseignants et d'autre part de profiter des discussions pour améliorer plus pertinemment la ressource, ce que Folcher (2009) appelle une *conception dans l'usage*.

La ressource *Cordes* est présentée en annexe 1 et comprend différentes rubriques. La *présentation* du problème est faite à l'aide d'un court énoncé destiné aux enseignants, ce qui leur laisse toute latitude pour l'adapter à leurs élèves. Une succession de nombre de points à proposer aux élèves est suggérée sans être imposée. La ressource propose aussi d'aborder directement le cas général, c'est à dire sans fixer le nombre de points de départ. Des méthodes de résolution du problème sont données et, à partir de l'année II, sont illustrées par des images animées. La même année, les rubriques *Éléments de débats possibles* et *Autres éléments de l'activité* sont ajoutées. Elles visent, toujours avec des textes courts, à mieux informer les enseignants des caractéristiques de la situation auxquelles ils peuvent être confrontés et des choix qu'ils peuvent être amenés à faire en préparation ou en cours de séance. L'utilisabilité

de cette ressource est donc particulièrement travaillée pour favoriser son utilité et son acceptabilité et, *in fine*, pour favoriser la participation des enseignants à l'entreprise de la CoP.

3.4 Analyses

Une étude de l'activité de la CoP mais aussi des pratiques de classe s'imposait pour évaluer l'intérêt du design mis en place et pour chercher des liens entre ces deux axes d'analyse. Étant donné l'état de la recherche concernant ces deux axes, de nouveaux moyens d'analyse complémentaires ont dû être trouvés.

L'ensemble des données recueillies est synthétisé dans le tableau 1.

Données recueillies	Commentaires
Enregistrements vidéo/audio de séances et notes	Notes prises avant, pendant et après les séances observées
Comptes-rendus de séance	Recueil essentiellement par voie électronique ou lors d'entretiens
Enregistrements audio de réunions et notes	-
Contenu du site Web	-
Journal des connexions	-
Questionnaires de début et de fin d'expérimentation	Support écrit, parfois complété d'un entretien.
Données d'entretiens	Notes ou, plus occasionnellement, enregistrements. Recueil en fin d'années I et IV.

TAB. 1: Données recueillies durant l'expérimentation.

Concernant la pratique de classe des activités RPP, des analyses didactiques classiques ont été menées à l'aide des potentiels des activités RPP. Une première analyse s'est d'abord appuyée sur l'ensemble des observations et des enregistrements et s'est poursuivie par une analyse plus fine pour une enseignante, Mme S, qui était bien impliquée dans toutes les modalités du dispositif et dont la pratique reflétait assez bien les pratiques observées, mis à part celles d'un enseignant plus expert en matière d'activités RPP, M. H. Des analyses qualitatives et quantitatives complémentaires ont donc été faites à partir des narrations des 11 séances observées de cette enseignante dont 5 sont présentées dans la thèse, la première et la dernière étant justement consacrées au problème *Cordes*. Les graphiques de la figure 1 établis pour les années I et III illustrent l'analyse quantitative. Ce type de graphiques permet de mettre en évidence certaines évolutions de la pratique d'un enseignant avec les années ou tout du moins permettent de les interroger de manière globale.

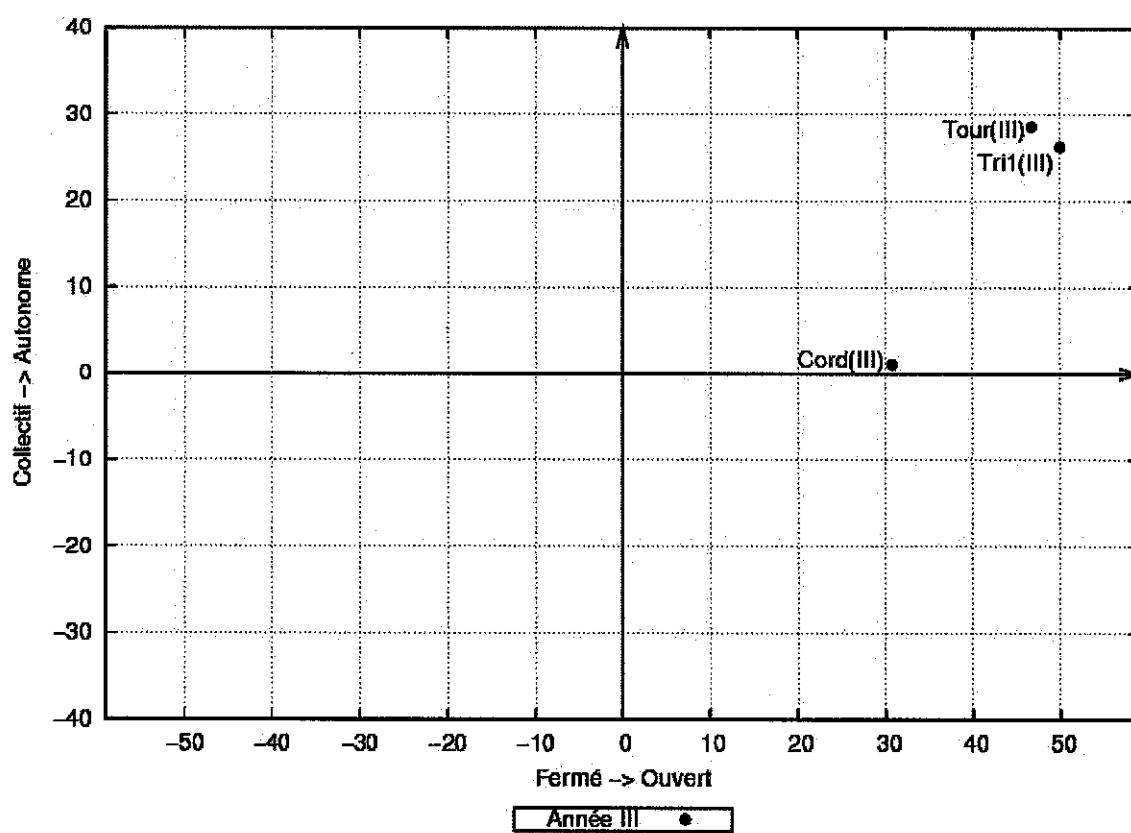
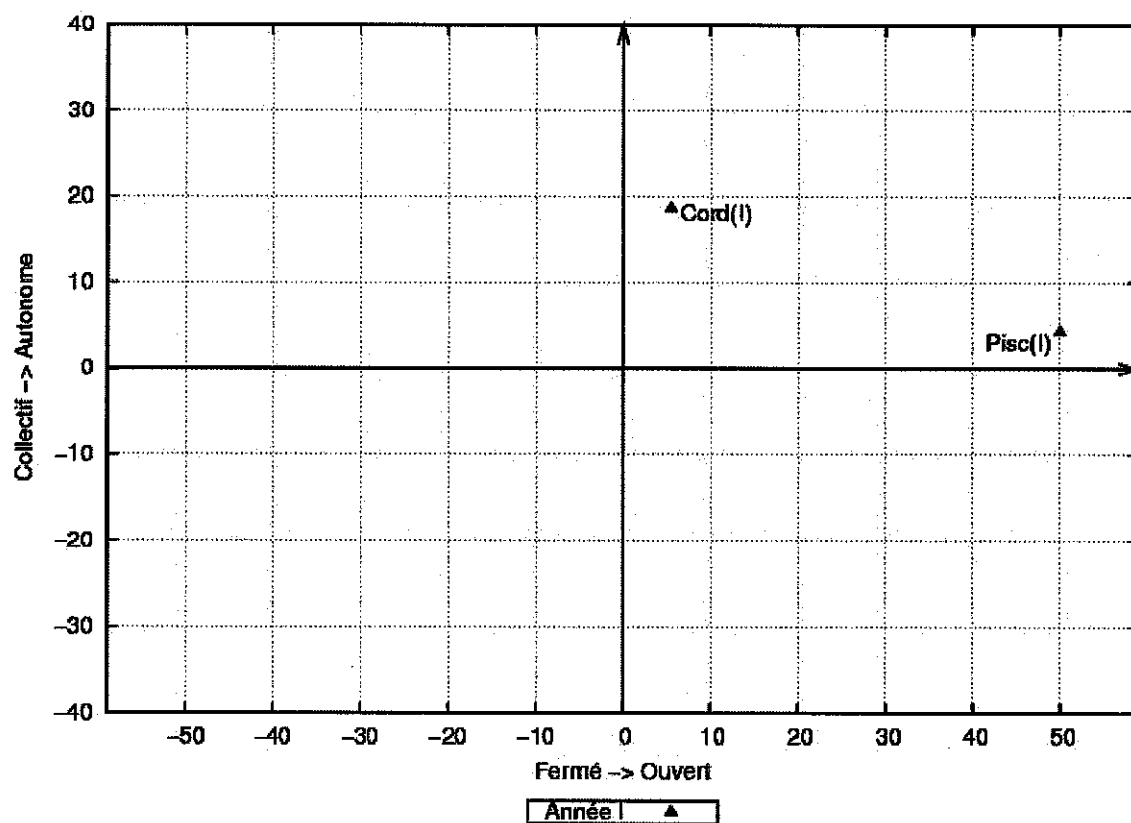


FIG. 1: Évolutions de pratique de Mme S entre les années I et III.

L'axe des abscisses représente la répartition du temps total entre les phases où la recherche est ouverte et celle où elle est fermée, c'est à dire dirigée par l'enseignante par des questions fermées. L'axe des ordonnées représente la répartition du temps où les élèves travaillent en autonomie, individuellement ou en groupes, par rapport à l'enseignante ou bien collectivement avec elle. Ici quatre problèmes différents sont présents et on trouve deux fois le problème *Cordes*. L'interprétation du graphique nécessite bien sûr de s'intéresser à ces problèmes particuliers et à l'analyse qualitative des séances. Il faut par exemple tenir compte du fait que les séances retenues sont des « premières séances », chacune consacrée à un problème particulier et qui ont pu être suivi d'une ou deux séances supplémentaires, ce qui est justement le cas de *Cordes* l'année III, à l'inverse de l'année I. Cependant, on peut noter qu'entre les années I et III, la pratique de Mme S s'oriente globalement vers des séances plus ouvertes et où les phases de résolution durant lesquels les élèves travaillent en phase autonome sont plus importantes, ce que confirme l'analyse qualitative.

Concernant plus spécifiquement l'activité de la CoP, plusieurs types d'analyses ont été menés. Des comptes-rendus ont été échangés entre les enseignants, ce qui n'était pas une évidence au départ de l'expérimentation. Moins de 50% des séances ont fait l'objet d'un compte-rendu. Les analyses quantitatives et qualitatives ont mis en évidence que des éléments de pratique des activités RPP y étaient abordés dès la première année, ce qui n'était pas une évidence a priori. Ainsi, les comptes-rendus ne se limitaient pas à évoquer les éléments de base choisis par les enseignants, c'est-à-dire la durée de la séance, l'énoncé proposé aux élèves et les réactions des élèves. Le compte-rendu, vu comme réification, a donc joué son rôle en permettant aux enseignants de participer à leur manière à l'activité de la CoP.

Les réunions ont aussi fait l'objet de plusieurs analyses. L'analyse qualitative a permis de repérer les sujets abordés selon les deux axes, activités RPP ou activité CoP. Ceci a déjà permis d'évaluer l'implication de chaque enseignant dans la CoP. L'analyse quantitative a permis de la compléter, ce qu'illustre le graphique de la figure 2 (*J* est le coordinateur).

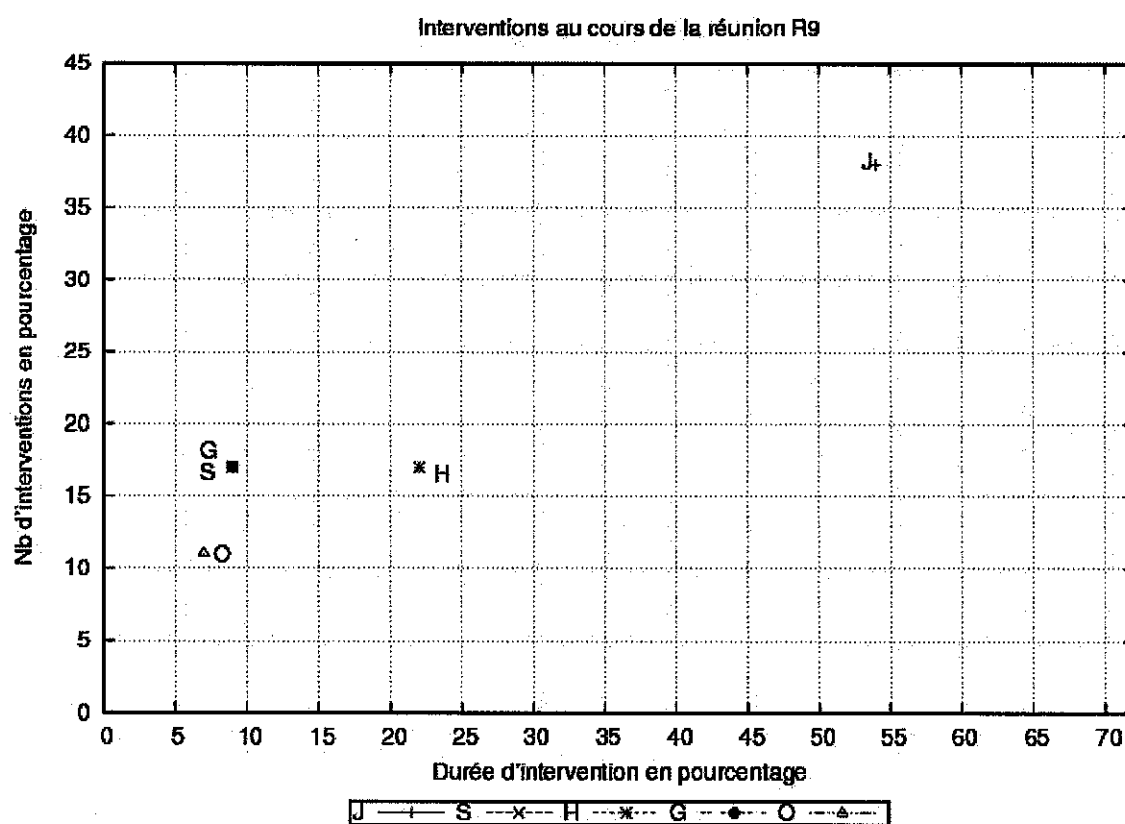
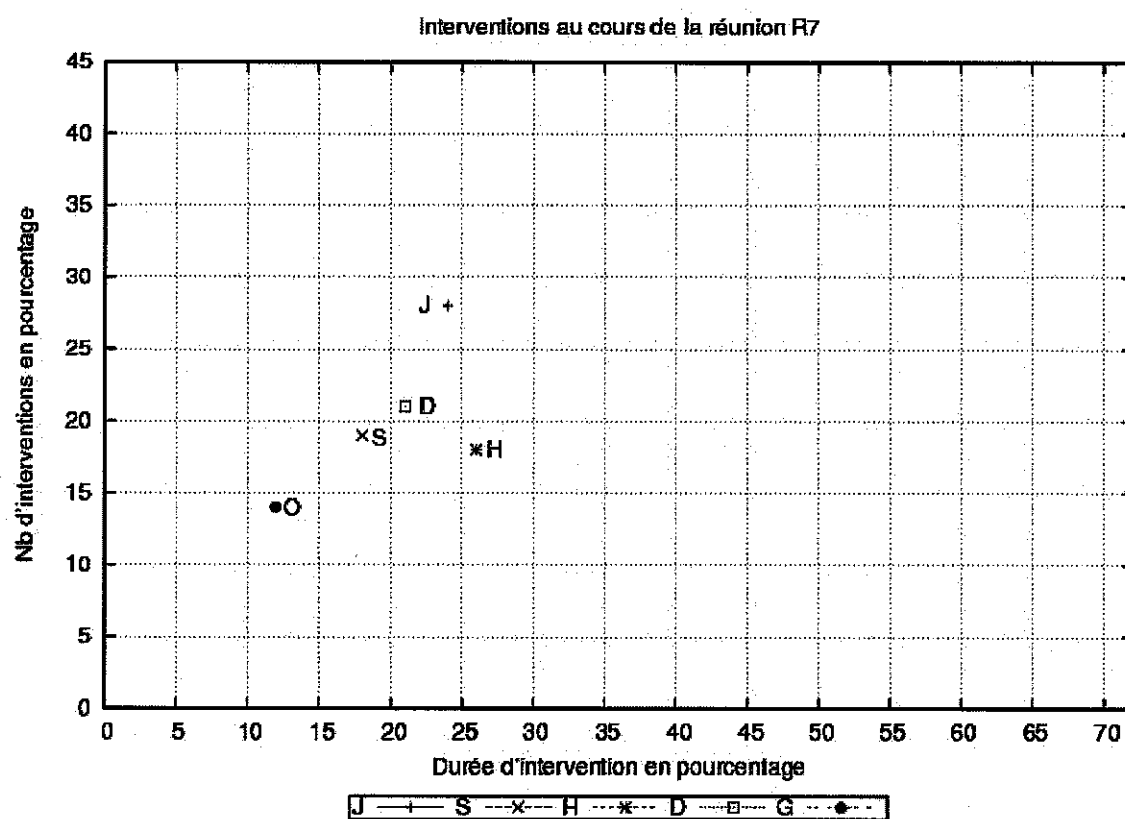


FIG. 2: Interventions des membres de la CoP en durée et nombre (réunions R7 et R9).

La comparaison des deux graphiques peut s'interpréter en disant que la réunion R7 a vu une participation plus homogène des enseignants (qui diffèrent entre les deux réunions) que lors de la réunion R9, ce qui est normal étant donné que cette dernière réunion visait à faire un bilan de l'expérimentation et était donc essentiellement menée par le coordinateur (J). D'autres analyses ont permis d'étudier les interventions *autonomes* des enseignants, c'est à dire celles qui répondaient à une intervention d'un autre enseignant, qui étaient spontanées ou qui allaient au-delà des sollicitations du coordinateur. Les différentes analyses ont permis à la fois d'étudier les sujets abordés lors des réunions et les évolutions de l'autonomie des enseignants dans ces réunions essentiellement menées par le coordinateur.

Les questionnaires ont permis de recueillir auprès des enseignants des informations sur les pratiques antérieures en matière d'activités RPP et de travail collaboratif entre enseignants. Des entretiens individuels ont ensuite permis d'évaluer leur satisfaction vis à vis du dispositif et d'évaluer la poursuite d'activités RPP l'année IV, c'est-à-dire un an après la fin de l'expérimentation. Ces différentes données ont été croisées avec les autres analyses.

Enfin, les problèmes ont été considérés comme des réifications à part entière et les taux d'adoption des problèmes ont été interprétés à l'aide des analyses de réunions, des comptes-rendus et des échanges informels entre le coordinateur et les enseignants. Ceci a permis de comprendre pourquoi certains problèmes avaient pu être choisis plus que d'autres. Par exemple, *Cordes* a été expliqué par un membre peu féru de mathématiques à une novice arrivée l'année III, ce qui l'a encouragée à le mettre en œuvre par la suite alors qu'elle pensait initialement ne pas le choisir. Ce type d'anecdotes est particulièrement importante si l'on suit la perspective de Wenger. En effet, quelques « détails » peuvent déclencher des dynamiques parfois insoupçonnées, ce qui est une caractéristique des systèmes complexes comme celui de la pratique d'un enseignant.

4 Résultats

Au total, 10 enseignants, volontaires et bénévoles, ont participé à l'expérimentation qui s'est globalement étendue sur 3 années. Ils étaient entre 5 et 8 selon les années et 2 nouveaux enseignants sont arrivés la dernière année. Au total, ces enseignants ont mis en œuvre 52 séances qui ont été observées et enregistrées en vidéo et ils ont rédigé 21 comptes-rendus de séance dont la majorité a été diffusée sur une liste de diffusion.

Les enseignants ont globalement apprécié le dispositif proposé et ont régulièrement mis en œuvre des activités RPP. Ceci constitue un premier résultat important si on le rapporte aux contraintes fortes pesant sur les enseignants : pratique nouvelle de classe nouvelle pour eux et peu répandue, observations et enregistrements des séances par le coordinateur, peu d'aide directe de sa part, activité bénévole sur une durée longue.

4.1 La pratique d'activités RPP

Il est remarquable, alors que le discours des enseignants pouvaient laisser penser le contraire, que des problèmes congruents à ceux proposés sur le site Web et des problèmes situés exclusivement dans le cadre des mathématiques ou peu appréciés initialement par certains enseignants aient été proposés aux élèves. C'est un résultat important pour ce dispositif expérimental relativement économique.

Les analyses montrent que les évolutions de pratique, quand elles existent, sont relativement lentes, voire difficilement décelables sans des analyses poussées, ce qui confirme l'intérêt de l'hypothèse supposant qu'il faut inscrire un tel dispositif dans la durée. Elles montrent aussi le poids important et direct de certains éléments de la composante sociale des pratiques. Par exemple, certains enseignants déclarent lors d'une réunion qu'il est préférable au cycle 3 de s'appuyer essentiellement sur un énoncé écrit, ce qui engendre un changement de pratique

chez Mme S qui privilégiait jusque là avec profit des présentations orales des problèmes. C'est aussi le cas de M. H, enseignant le plus expert en matière d'activités RPP, qui peine à promouvoir son « classeur de travaux en cours » face à l'idée davantage partagée qu'il faut toujours présenter la solution du problème aux élèves.

L'analyse des séances, mais aussi celles des réunions et des comptes-rendus, montrent que la pratique des activités RPP est complexe. Plusieurs dynamiques, dont certaines sont déjà connues, permettent de mieux comprendre les difficultés rencontrées par les enseignants à différents moments des séances. La contrainte habituelle de la durée des séances, qui n'est pas spécifique de l'enseignement secondaire, est présente mais est insuffisante pour expliquer les écarts entre les observations et les potentialités des activités proposées. En effet, ces écarts persistent lorsque l'activité est menée sur 2 séances ou plus.

De nouvelles dynamiques ont été mises à jour dans les déroulements des séances consacrées aux activités RPP. Pendant la présentation des problèmes, lors des 10 à 15 premières minutes de séances, le potentiel de recherche pourrait être plus développé. En effet, les enseignants ne définissent pas toujours suffisamment bien les problèmes, ce qui cause des difficultés jusque dans les phases de conclusion. Cette dynamique est régulièrement observée et discutée lors des réunions, ce qui la fait apparaître comme une composante sociale de la pratique des enseignants. Par exemple pour *Cordes*, la distinction entre cordes et diamètres et le fait que chaque point est l'extrémité de plusieurs cordes sont souvent gérés tardivement par les enseignants. Dans le problème *Plus grand produit*, le fait qu'une somme peut contenir plus de deux termes tarde lui aussi à apparaître dans les séances qui lui sont consacrées, comme le fait que la même couleur peut apparaître dans un même triangle dans le problème *Triangles colorés*. Tout se passe comme si les élèves devaient d'abord chercher à déterminer eux-mêmes l'espace de recherche du problème et ses subtilités. Le sentiment selon lequel donner des exemples équivaut à donner la démarche est assez largement partagé chez les enseignants. Ceci peut s'interpréter comme le fait qu'en s'abstenant de formuler complètement le problème, plus ou moins volontairement, les enseignants gardent toujours une maîtrise minimale du déroulement de la séance car ils savent à l'avance ce qu'ils pourront dire à minima en conclusion en revenant sur les implicites de l'énoncé. À cet égard, l'enseignant expert, M. H se distingue nettement de ses collègues et on observe une évolution significative sur ce point dans la pratique de Mme S. Les analyses détaillées de sa pratique tendent aussi à montrer qu'une présentation essentiellement orale serait plus rentable qu'une présentation basée essentiellement sur l'écrit.

Concernant les phases de recherche autonomes des élèves, elles font peu l'objet d'interventions intempestives des enseignants et peuvent généralement jouer leur rôle.

Les débats observés en classe sont de trois natures : des débats très dirigés par l'enseignant après un temps de latence plus ou moins long comme on en rencontre fréquemment dans les classes, des débats mathématiques centrés sur le problème comme on peut le souhaiter dans ce genre d'activités, mais aussi des débats mathématiques multi-directionnels qui s'écartent parfois longtemps de la résolution du problème proprement dit (par exemple sur le rôle des parenthèses dans l'écriture d'une expression), ce qui occasionne un sentiment d'insatisfaction chez l'enseignant et les élèves alors même qu'ils ont fait des mathématiques de manière intense.

Malgré un potentiel de débat sauvegardé en grande partie à l'issue des phases de recherche, l'analyse montre que les séances évoluent souvent d'une cohérence de pratique ouverte vers une cohérence de pratique fermée. La question de la durée des séances influe évidemment sur ce phénomène mais d'autres dynamiques sont à l'œuvre.

Des consignes de dévolution des débats peuvent être données par l'enseignant. Quand c'est le cas, elles sont régulièrement contrecarrées par d'autres dynamiques comme celles liées à la définition des problèmes évoquées ci-dessus. Elles le sont aussi par le fait que l'enseignant

valide certaines productions pendant les phases autonomes, limitant ainsi l'implication des élèves par la suite, ou qu'il laisse les débats s'égarer loin de la résolution du problème tout en restant mathématiques. Les consignes de dévolution des débats sont fréquemment inadaptées. Par exemple, on trouve peu de demandes de validation ou de consensus de la part des enseignants, ce qui ne favorise pas la dévolution des débats. Ces consignes sont plutôt remplacées par des consignes de partage des méthodes et de retour sur l'historique des recherches qui engendrent un désintérêt progressif des élèves. La question de déterminer la meilleure méthode est souvent hors sujet lorsqu'elle est posée. Le tâtonnement par essai/erreur est peu reconnu comme une méthode intéressante voire valide, les enseignants la sacrifiant fréquemment contre l'esthétique de solutions plus élaborées, même si elles sont souvent hors de portée des élèves au moment où elles sont exploitées. Le fait que l'enseignant demande des précisions à l'élève qui vient de présenter son travail avant de solliciter les autres élèves ou le fait que les productions soient fréquemment exploitées dans l'ordre croissant de pertinence sont aussi des facteurs qui jouent défavorablement pour que le potentiel de débat puisse s'exprimer pleinement.

Quant aux phases de conclusion, elles sont largement affaiblies par le déroulement de la séance qui les précède.

Par ailleurs, il existe aussi des dynamiques liées aux choix des matériels ou des représentations utilisées (ex. *Triangles colorés*, *Tours*) par les enseignants, des choix que le cadrage théorique de ce travail n'a pas toujours permis de prévoir.

En résumé, la complexité des séances d'activités RPP est telle qu'elle peut rendre invisibles ou inefficaces des évolutions des pratiques des enseignants, sans même prendre en compte les aléas de ce genre de séances. Il faut aussi signaler que les dynamiques présentées sont affaiblies dans la classe de l'enseignant expert, M. H, les mêmes déclencheurs n'impliquant pas les mêmes dynamiques avec des élèves habitués de ces activités, ce qui peut poser des problèmes dans les partages d'expériences au sein d'une communauté d'enseignants.

4.2 L'activité de la CoP

Le travail de thèse a permis d'opérationnaliser de façon relativement objective le concept de *trajectoire* introduit par Wenger. À partir du tableau présenté en annexe 2, ce concept a permis de synthétiser pour chaque enseignant les évolutions de sa pratique d'activité RPP et de sa participation à la CoP. Le schéma de la figure 3 auquel cette analyse a abouti montre bien la variété des trajectoires des enseignants au sein de la CoP, la trajectoire de Mme S traduisant ses évolutions de pratique, sa participation régulière aux modalités de travail de la CoP et son implication en termes qualitatifs (s'interroge, cherche des solutions) et quantitatifs.

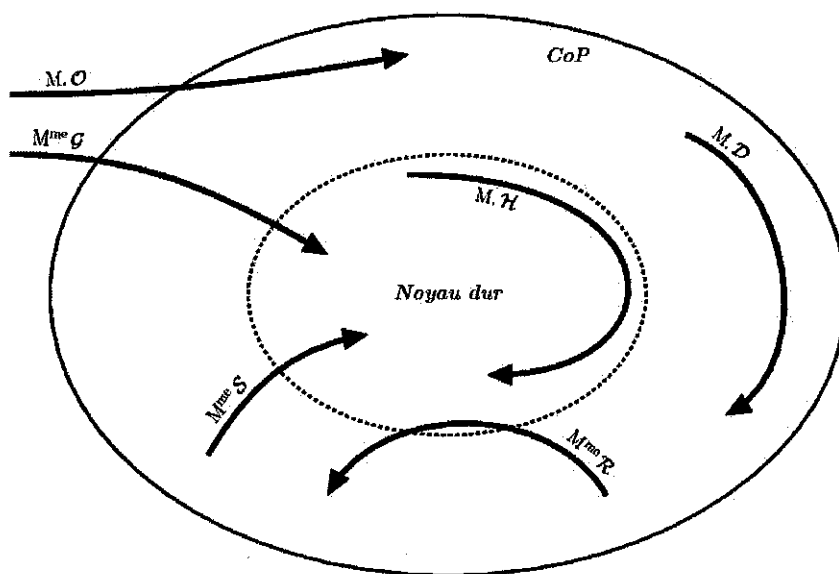


FIG. 3: Trajectoires au sein de la CoP

Un certain nombre de dynamiques positives sont à mettre sur le compte du design et de la pertinence des principaux choix effectués : souplesse et évolution du design, modalités pertinentes des comptes-rendus et des réunions. Cependant, la figure 3 montre aussi qu'une trajectoire, celle de Mme R, initialement dirigée vers l'intérieur se dirige ensuite vers l'extérieur et que deux autres restent périphériques, celles de M. D et M. O. Certaines optimisations du design initial de l'expérimentation sont souhaitables.

Les ressources pourraient être initialement plus riches que celles proposées au départ puisque des ajouts ont été acceptés avec intérêt par les enseignants. Elles pourraient aussi supporter des améliorations en bénéficiant davantage des possibilités offertes aujourd'hui par le Web. La plate-forme utilisée était simple à mettre en œuvre mais bénéficiait de fonctionnalités très basiques.

Un choix de coordination était celui d'un soutien minimal direct auprès des enseignants en prenant garde de ne pas endosser le rôle d'expert, renvoyant les demandes d'aide auprès des autres enseignants. Un travail collaboratif a minima et peu dynamique est apparu et a produit des premiers effets très intéressants sur les pratiques de classe. Cependant, les discussions entre enseignants restent difficiles à initier, malgré le fait que les ressources soient incomplètes, ce qui était censé constituer un premier terrain de discussion. Le constat est fait que les enseignants manquent d'outils pour que ce travail collaboratif soit plus fructueux. Le rôle du coordinateur est alors primordial, d'autant plus que certaines dynamiques exposées plus haut peuvent rendre invisibles les évolutions de pratique des enseignants. La coordination pourrait davantage s'appuyer sur l'introduction d'outils en tant qu'objets frontière permettant aux enseignants d'évaluer leur pratique et son évolution. À cet égard, les résultats concernant la pratique des activités RPP vus plus haut en fournissent de nouveaux. De plus, le travail de thèse a aussi abouti à la proposition d'un nouveau modèle de ce type de séances. En effet, au moins dans une perspective d'intégration progressive, le modèle « présentation ; recherche individuelle et en groupe ; mise en commun ; conclusion » proposé par Arsac et al. (1991) peut apparaître comme un piège car trop limité. Le modèle suivant paraît à la fois plus réaliste

et plus proche des séances réussies observées : « courte présentation ; courte recherche individuelle ; mise en commun centrée sur la compréhension du problème à chercher ; recherche individuelle plus longue ; mise en commun visant à mettre en évidence des solutions ou des embryons de solutions différentes ou d'un temps trop long pour aboutir ; recherche en groupes ; arrêt des recherches et préparation d'une présentation, que la recherche soit terminée ou non ; mise en commun de productions sélectionnées ; conclusion, éventuellement orientée vers une nouvelle séance ».

Enfin, le déroulement de l'expérimentation et son analyse ont montré que l'importance du nombre d'enseignants dans la CoP avait été sous-estimée. L'effectif considéré a limité non seulement certaines dynamiques de l'activité de la CoP mais aussi la validité des résultats obtenus. Il faut donc avoir des effectifs plus importants. Plus précisément, une expérimentation devrait comprendre un effectif d'une quinzaine d'enseignants si l'on se réfère aux écrits de Wenger.

5 Perspectives de recherche

Ce travail de thèse tend à montrer que l'approche CoP est un moyen envisageable pour enclencher des dynamiques de travail collaboratif similaires à celles trouvées dans les Lesson Studies au Japon (Miyakawa et Winslow, 2009) ou dans le travail de Liping Ma (1999) en Chine.

À moyen terme, il reste des données qui n'ont pas subi d'analyses poussées, notamment liés aux séances observées. D'autres dynamiques qui se développent lors des séances RPP restent sans doute à identifier, d'autres modèles de gestion sont peut-être pertinents à proposer. L'analyse en profondeur de la pratique de l'enseignant le plus expert pourrait aussi se révéler instructive. Certains liens entre les différentes analyses, entre l'activité de la CoP et la pratique de classe sont basés sur des hypothèses qu'il faudrait tester plus en profondeur dans d'autres expérimentations. Dans l'expérimentation menée, le premier objectif était de tenter de faire vivre un dispositif basé sur la théorie des CoP et la revue de littérature donnait peu de recul sur les options pertinentes à retenir. Le rôle de coordinateur pourrait être analysé plus en profondeur, ce qui serait par exemple plus simple dans une expérimentation où il n'y aurait pas de confusion entre les rôles de chercheur et de coordinateur. Des travaux restent à mener pour trouver des opérationnalisations de la théorie des CoP, comme outil de design et comme outil d'analyse, tant aux premiers stades de développement qu'aux suivants. Par ailleurs, des expérimentations engageant des chercheurs de plusieurs disciplines pourraient ouvrir de nouvelles voies.

Les activités RPP restent marginales dans la pratique des enseignants, même si elles peuvent tout de même produire des effets de bords intéressants sur cette pratique, c'est-à-dire des effets qui dépassent le cadre des activités RPP proprement dites. La dévolution des débats s'effectue difficilement et il y a peu d'évolution sur ce point. Il est possible que l'amélioration du design ait des effets significatifs sur ces évolutions. À plus long terme, la modélisation des activités RPP reste ouverte. De même, les effets sur les enseignants et les élèves (effets de bords) restent à étudier plus en profondeur.

Les ressources ont peu évolué mais l'expérimentation se situait essentiellement au stade d'incubation et de fusion, voire de maturation. Il reste à affiner les clés de gestion des différentes tensions dans le cadrage théorique utilisé. D'autres entrées complémentaires à celle des CoP et de l'ergonomie sont possibles, en se basant par exemple sur le travail déjà entamé à l'école d'été de l'ARDM de 2007 sur la documentation du professeur.

Références

Arsac, G., Germain, G., Mante, M. (1991). *Problème ouvert et situation problème*. Première

édition 1988. IREM de Lyon.

Bastien, J. M. C., Leulier, C., Scapin, D. (1998). L'ergonomie des sites Web. Éd. par J.-C. Le Moal et B. Hidoine. Chapitre rédigé dans le cadre du projet européen Commerce & Interactions (EP 22287). INRIA. URL : <http://www.adbs.fr/site/publications/ouvrages/9.php>.

Brousseau, G. (1998). *Théories des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Coppé, S. et Houdement, C. (2002). *Réflexions sur les activités concernant la résolution de problèmes à l'école primaire*. Grand N 69, p. 53–62.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques* 7.2, p. 5–31.

Duchet, P. et Mainguéné, J. (2003). Les "apprentis-chercheurs" de MATH.EN.JEANS. *Actes des journées COPIRELEM*, La Roche sur Yon, 17-19 Mai 2002. IREM des Pays de la Loire, p. 167–178.

http://mathenjeans.free.fr/amej/mej_quoi/publi_sur_mej/03apprentichercheurs.pdf

ERMEL (1999). Apprentissages numériques et résolution de problèmes, CM2. Hatier.

Eysseric, P. (2002). Les ateliers de recherche en mathématiques (expérimentation dans les classes et formation des professeurs des écoles). *Grand N* 70, p. 7–34.

Folcher, V. (2009). Conception pour l'usage, conception dans l'usage : quelles ressources pour quelles activités ? in I. Bloch, F. Conne (eds.), *Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques. Cours de la 14e école d'été de didactique des mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Georget, J.-P. (à paraître). Apport de l'ergonomie des EIAH pour l'analyse et la conception de ressources destinées aux enseignants de mathématiques. *Enseignement des mathématiques et développement : enjeux de société et de formation. Actes du colloque Espace Mathématique Francophone 2009*. Éd. par EMF 2009.

<http://educmath.inrp.fr/Educmath/ressources/actes-en-ligne/emfgt6/2jpgeorget.pdf>

Georget, J.-P. (2009). *Activités de recherche et de preuve entre pairs à l'école élémentaire : perspectives ouvertes par les communautés de pratique d'enseignants*. Thèse de doctorat. Université de Paris 7.

Graven, M. (2002). *Mathematics Teacher Learning, Communities of Practice and the Centrality of Confidence*. Thèse de doctorat. University of the Witwatersrand, South Africa.

Grenier, D. et Payan, C. (2002). Situation de recherche en classe : essai de caractérisation et proposition de modélisation. *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*. Éd. par V. Durand-Guerrier et C. Tisseron. ARDM et IREM de Paris 7, p. 189–203.

Gueudet, G., Trouche, L. (2009). Vers de nouveaux systèmes documentaires des professeurs de mathématiques ? in I. Bloch, F. Conne (eds.), *Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques. Cours de la 14e école d'été de didactique des mathématiques*, p. 109-133, Grenoble : La Pensée Sauvage.

Hersant, M. et Thomas, Y. (2008). Quels savoirs mathématiques dans les problèmes pour chercher à l'école élémentaire ? Le cas de problèmes d'optimisation au cycle 3. Communication personnelle. Résumé d'un atelier proposé au XXXVe colloque de la COPIRELEM.

IREM de Grenoble (2003). Spécial Grand N Points de départ. IREM de Grenoble.

Legrand, M. (1988). Rationalité et démonstration mathématiques, le rapport de la classe à une communauté scientifique. *Recherches en didactique des mathématiques* 9.3, p. 365–406.

Ma, L. (1999). *Knowing and Teaching Elementary Mathematics, Teacher's Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States*. Mahwah, New Jersey, London: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

- Miyakawa, T. et Winslow, C. (2009). Un dispositif japonais pour le travail en équipe d'enseignants : étude collective d'une leçon. *Revue éducation et didactique* 3.1.
- Ouvrier-Buffet, C. (2006). Des définitions pour quoi faire ? Paris : Éditions Fabert.
- Robert, A. et Rogalski, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et de la technologie* 2.4, p. 505–528.
- Rogalski, J. (2003). Y a-t-il un pilote dans la classe ? Une analyse de l'activité de l'enseignant comme gestion d'un environnement dynamique ouvert. *Recherches en didactique des mathématiques* 23.3, p. 343–388.
- Tricot, A., Pléat-Soutjis, C., Camps, J-F., Amiel, A., Lutz, G., Morcillo, A. (2003). Utilité, utilisabilité, acceptabilité : interpréter les relations entre trois dimensions de l'évaluation des EIAH. *Environnements informatiques pour l'apprentissage humain*. Éd. par C. Desmoulins et al. ATIEF INRP, p. 391–402.
- <http://hal.ccsd.cnrs.fr/docs/00/00/16/74/PDF/n036-80.pdf>
- Wenger, E. (1998). *Communities of Practice, Learning, Meaning and Identity*. Cambridge University Press.
- Wenger, E., McDermott, R., Snyder, W. (2002). *Cultivating communities of practice : a guide to managing knowledge*. Harvard Business School Press.

Annexes

Annexe 1 : la ressource Cordes

Présentation

On place un certain nombre de points sur un cercle.

Est-il possible de trouver le nombre de cordes (segment joignant deux points du cercle) ?

Exemples

On peut commencer par 6 points sur un cercle disposés de façon irrégulière. On obtient 15 cordes.

On peut ensuite passer à 10 points ce qui donne 45 cordes. Les élèves ont peu de chance de pouvoir les compter de façon sûre.

On peut aborder, sans obligatoirement le poser comme tel, le cas général en proposant de chercher une méthode pour trouver relativement facilement le nombre de cordes pour 32 points, 210 points, etc.

Solutions

Si on place n points sur un cercle, le nombre de cordes est égal à : $n(n-1)/2$. Par exemple, pour 6 points, le nombre de cordes est égal à $(6 \times 5)/2 = 15$.

Preuve 1

La preuve revient à calculer la somme $(n-1) + \dots + 3 + 2 + 1$.

On effectue, on choisit un des points. Il permet d'obtenir $(n-1)$ cordes. En prenant un autre point, on obtient une corde de moins, c'est à dire $(n-2)$ et ainsi de suite jusqu'à l'avant-dernier point qui ne peut être joint qu'au dernier point, ce qui donne une seule corde.

Le calcul de la somme $(n-1) + \dots + 3 + 2 + 1$ s'effectue de la manière suivante. On effectue :

$$\begin{array}{ccccccc} (n-1) & + & \dots & + & 2 & + & 1 & + \\ 1 & + & \dots & + & (n-2) & + & (n-1) & \end{array}$$

ce qui donne : $n + n + n + \dots + n$ ($n-1$ fois)

Par conséquent, on a calculé que 2 fois la somme recherchée est égale à $(n-1) \times n$. Il faut

donc diviser cette expression par 2 pour obtenir la somme elle-même.

Preuve 2

Il y a n points. Chaque point est relié à $(n-1)$ points. Mais, avec cette méthode, chaque corde est comptée 2 fois (une fois par extrémité). On obtient donc $n(n-1)/2$ cordes.

[Animations et texte d'explication dans le cas de 6 points]

Éléments de débats possibles

- méthode pour être sûr de compter toutes les cordes sans en oublier
- moyen de communiquer sa démarche (les élèves peuvent proposer plusieurs types de codage, par exemple basés sur des couleurs)
- des élèves peuvent proposer la preuve basée sur la multiplication sans qu'ils soient capables de l'expliquer dans un premier temps : cette preuve ne peut être considérée comme valide sans une explication acceptée par la classe. À l'issue des débats, l'enseignant peut en proposer une explication.
- efficacité des différentes formules : elle dépend du nombre de points considéré

Autres éléments de l'activité

- certains élèves risquent de confondre *cordes* et *diamètres*
- un nombre élevé de points oblige la recherche d'une méthode générale
- proposer des cas qui se succèdent (5 points, 6 points, etc.) risque d'induire la preuve par récurrence

Annexe 2 : tableau des éléments pris en compte pour déterminer les trajectoires

Ens.	Trajectoires	Comptes-rendus <i>Taux transmission</i> <i>Variations</i>	Réunions <i>Participation & autonomie</i> <i>Variations présence</i> <i>Commentaires</i>	Activités RPP préalables non-ONT	ONT	Eff. sur la prat. d'activ. RPP
M ^{me} S	Vers intérieur	44% ↘	Participation ++, Autonomie ± ↗ / max Questions récurrentes	Oui	–	Visibles
M. H	Intérieure	56% ↗	Participation ++, Autonomie ++ Options multiples, historique de pratique, accueil novices ↗ max, max	Oui	Oui	Faibles
M. D	Périphérique	0% →	Participation ++, Autonomie ++ ↘ Intérêt pour la CoP, influence limitée	Non	Non	Non avérés
M ^{me} R	Vers int. puis vers ext.	33% ↘	Participation -, Autonomie ± ↘ Attente soutien, intérêt pour ERMEL	–	Oui	Faibles
M ^{me} G	Vers intérieur	67% –	Participation -, Autonomie + 3/4 Options RPP et CoP	Non	Non	Visibles
M. O	Périphérique	0% –	Participation -, Autonomie ± 3/4 Constats et questions	Oui	–	Non avérés

Représenter des Mathématiques avec l'ordinateur

Jean Baptiste LAGRANGE, Université de Reims et LDAR, Université Paris Diderot
jean-baptiste.lagrange@univ-reims.fr

Michèle ARTIGUE, LDAR, Université Paris Diderot

Claire CAZES, Université Pierre et Marie Curie et LDAR, Université Paris Diderot

Jean-Michel GELIS, Université de Cergy et LDAR, Université Paris Diderot

Fabrice VANDEBROUCK, LDAR, Université Paris Diderot

Résumé

Remath est un projet européen (IST4-26751) associant six laboratoires en Italie, Grande-Bretagne, Grèce et France. Le projet s'est donné pour but de mieux comprendre comment la question des représentations est conceptualisée dans différents cadres et contextes et comment ceux-ci influent sur le "design" de la recherche et l'interprétation des observations. L'article développe cette problématique, puis se centre sur le cas de Casyopée, le logiciel développé par notre équipe et dédié à l'enseignement/apprentissage des fonctions. Il précise les représentations manipulées par ce logiciel et la prise en compte de cadres théoriques et du contexte dans la conception. Il présente les questions de recherche posées par les deux équipes ayant expérimenté Casyopée, les expérimentations mises en place et les résultats de l'analyse croisée en les situant en relation avec les cadres privilégiés par les deux équipes (approche instrumentale, TSD et TA d'une part, médiation sémiotique d'autre part). La conclusion replace ces résultats dans le cadre général de ReMath et fait le bilan des avancées tant sur les représentations que sur la mise en correspondance des cadres théoriques.

Mots clés

Représentations, Ordinateur, Casyopée, Remath, Analyse Croisée, Approche Instrumentale, Théorie Des Situations Didactiques, Théorie Anthropologique, Médiation Sémiotique.

Introduction

L'activité mathématique est vue par de nombreux courants de recherche en didactique et en "éducation mathématique" comme un travail sur des objets qui ne sont pas accessibles directement, mais par le biais de "représentations", c'est-à-dire d'entités matérielles supports de ce travail. Ces entités permettent des jeux d'actions et rétroactions auxquelles il est possible d'attribuer un sens mathématique. Le développement de technologies numériques pour l'enseignement des mathématiques est considéré par certains de ces courants de recherche comme apportant une contribution particulière en élargissant la diversité des représentations et des moyens de les manipuler. Morgan, Mariotti et Maffai (2009) présentent notamment ce point de vue avant de souligner que la relation entre représentation et objet s'inscrit dans des conventions sociales marquées par la culture d'une communauté. Il en résulte que, s'agissant des processus d'apprentissage; on ne peut pas se limiter à un point de vue strictement cognitif, qui considérerait de façon isolée l'interaction de l'élève et des représentations numériques : il faut intégrer la relation entre représentation et objet dans un processus d'apprentissage considéré de façon globale. L'ambition de la recherche rapportée dans cet article est d'étudier les conditions pour dépasser un simple point de vue cognitif, et pour replacer la problématique "représentations numériques" dans l'ensemble du processus d'apprentissage tant au niveau de l'institution éducative et du curriculum que dans les pratiques en classe.

Tableau 1: Le projet ReMath

Sixième programme cadre européen, projet Numéro IST4-26751

<http://remath.cti.gr/>

Equipes impliquées

Instituto Technologie Didattiche, Italie (ITD)

University of Athens, Educational Technology Lab, Grèce (ETL)

Università degli Studi di Siena, Italie (UNISI)

Université Joseph Fourier, France (MeTAH)

Université Paris 7 Denis Diderot, France (DIDIREM)

University of London, Institute of Education, GB (LKL)

Objectifs

Réconcilier la technologie et la pédagogie

La technologie et la pédagogie doivent être considérés ensemble car, d'un point de vue pédagogique, il ne sert à rien d'équiper les classes en technologie si les stratégies éducatives et les activités à proposer aux élèves ne sont pas repensées.

Approcher les processus cognitifs dans l'apprentissage des mathématiques sur la base des représentations

Il s'agit de considérer que l'accès aux objets mathématiques passe par des représentations de ces objets, de voir l'impact des outils technologiques sur l'apprentissage des mathématiques par le filtre des représentations et de rechercher comment la question des représentations est posée dans différents cadres théoriques.

Aider les professeurs et les élèves

Le projet ReMath offre aux professeurs et aux élèves des outils qui ne s'adressent pas seulement à la cognition individuelle, mais bien à la situation d'apprentissage dans son ensemble.

Intégrer les efforts dans le contexte européen

Méthodologie

Un processus cyclique: (a) développer six artefacts digitaux dynamiques "state-of-the-art" pour représenter des mathématiques (b) développer des scénarios d'usage de ces artefacts à forte plus-value éducative (c) mener une recherche de terrain par expérimentation croisée dans des contextes éducatifs réalistes.

Résultats attendus

- Un cadre théorique intégré relatif aux représentations des mathématiques dans l'apprentissage basé sur des résultats d'expérimentations.
- Un impact concret sur l'enseignement des mathématiques en Europe, grâce à la construction d'un environnement d'apprentissage intégré.

Réaliser ce programme suppose de disposer d'environnements numériques présentant une diversité de choix relatifs aux représentations et à leur rôle dans l'activité et l'apprentissage numérique. Cela suppose également de pouvoir expérimenter dans des situations d'enseignement/apprentissage réalistes plutôt qu'en condition de laboratoire, et dans des contextes variés. L'occasion en a été donnée par un « Projet Européen de recherche à cible spécifique » qui a associé six équipes de recherche de quatre pays européens (*Tableau 1*).

Le sixième programme cadre européen comprenait une priorité "Technologies de la société de l'information", nouvelle terminologie pour les Technologies de l'information et de la communication, et à l'intérieur du programme de travail de cette priorité un objectif stratégique 2.4.10 « l'apprentissage amélioré par la Technologie », une nouvelle terminologie pour e-learning. Cet objectif se déclinait en deux sous objectifs, l'un plutôt sociologique sur l'apprentissage des individus et des organisations, et un autre plutôt cognitif qui peut se traduire par : « contribuer à de nouvelles compréhensions des processus d'apprentissage en explorant les liens entre l'apprentissage humain, la cognition et les technologies. »

Le projet ReMath s'est constitué en réponse à ce second objectif, mais, en cohérence avec les préoccupations exprimées ci-dessus, nous avons insisté sur le fossé qui existe entre les potentialités de la technologie et les espoirs placés dans ses apports à l'enseignement/apprentissage d'une part et la réalité décevante des usages d'autre part et donc sur la nécessité de dépasser un simple point de vue cognitif de façon à ce que les travaux réalisés constituent une aide à l'élève et à l'enseignant dans l'utilisation des technologies. Nous avons mentionné notre ambition d'intégration des efforts de recherche des six équipes, elle aussi cohérente avec ce type de projet. En effet, la participation de six équipes travaillant non seulement dans trois contextes nationaux différents, mais aussi avec des approches différentes des questions liées aux représentations des objets mathématiques dans des environnements numériques était une richesse potentielle pour aborder ces questions, mais constituait également un défi, celui de parvenir à une explicitation de ces contextes et de leur rôle, ainsi qu'à une mise en cohérence de ces approches. Notons que d'emblée, la question des cadres théoriques associés à ces approches a été posée, l'idée étant qu'une confrontation des approches sur des situations concrètes de création et d'expérimentation d'environnements numériques permettrait de mieux apprécier le rôle que chaque équipe fait jouer au(x) cadre(s) dans lesquels elle inscrit son approche, ainsi que la contribution spécifique que chaque cadre est susceptible d'apporter à la question des représentations numériques. Notre hypothèse était que cette meilleure appréciation des rôles et apports des cadres théoriques était susceptible d'aider à réduire le décalage souligné ci-dessus entre les potentialités de la technologie et la faiblesse des usages réellement constatés.

Le projet avait donc comme objectif de produire :

- un ensemble d'environnements numériques tirant parti des potentialités de représentation et d'interaction offertes par l'ordinateur,
- un ensemble de scénarios d'utilisation expérimentés dans différents contextes,
- un cadre théorique intégré fédérant les différentes approches des représentations dans l'apprentissage des mathématiques, et permettant d'explicitier les finalités des scénarios et de rendre compte des résultats des expérimentations.

Le travail théorique était donc conçu en coordination avec des cycles de conception et d'expérimentation. Notons que, à la différence de projets qui considèrent des technologies déjà existantes (géométrie dynamique, tableur, calculatrices) de façon figée, le projet s'intéressait à des environnements numériques (ou DDA, digital dynamic artefacts, Tableau 2) produits par les équipes à partir de leur approche du rôle des représentations, et que ces équipes faisaient évoluer en fonction des avancées résultant des expérimentations. Ainsi, le projet avait une approche globale du "design" didactique incluant la création d'artefact et de scénarios d'usages et leur évolution en fonction d'expérimentations. La mise en ligne d'un "espace d'apprentissage numérique multilingue" (Math.Di.L.S. <http://remath.cti.gr>) était une autre production visée; il s'agissait de mettre à disposition sous forme accessible d'une part aux chercheurs et d'autre part aux enseignants les résultats du projet, c'est-à-dire (1) les six DDAS, (2) treize scénarios d'utilisation, en deux versions, l'une pour des chercheurs, l'autre pour des enseignants, avec des indications venant des expérimentations, (3) les dix huit rapports (deliverables, dont les principaux sont listés dans le Tableau 3) explicitant la démarche. Parmi les rapports on notera que D1, D9, D18 portent sur le cadre théorique, D4, D8, D16 portent sur le travail de conception et de développement des environnements eux-mêmes, D7, D10, D17 portent sur les scénarios, et D11 et D13 portent sur l'expérimentation. La temporalité des rapports (colonne de droite du tableau) montre bien l'imbrication des différentes dimensions du projet.

Tableau 2: Les six environnements (DDA)

Aplusix, est un logiciel d'aide à l'apprentissage de l'algèbre pour les élèves de collèges et de lycées, conçu et développé à l'Université Joseph Fourier de Grenoble. L'extension dans

ReMath offre la possibilité d'opérer (1) des conversions entre les expressions et équations algébriques usuelles et des représentations "en arbre" complètes quand tous les nœuds sont les opérandes ou hybrides, certains nœuds contenant des sous-expressions (2) des calculs sur ces représentations. Les représentations dans Aplusix sont compatibles avec les systèmes de représentation "usuels" des expressions et équations. La représentation en arbres est choisie pour sa flexibilité, les nœuds pouvant se situer à différents niveaux de l'expression.

Casyopée, environnement géométrique et algébrique dédié à l'apprentissage des fonctions est conçu et réalisé en partenariat avec l'IREM de Rennes, l'INRP et le Laboratoire de Didactique André Revuz de l'Université Paris Diderot (LDAR). Casyopée est orienté vers la résolution de problèmes sur et avec des fonctions, la modélisation et la preuve. Il apporte des aides spécifiques à l'élève dans ces activités grâce au calcul formel. Les représentations des fonctions sont conçues comme aussi proches que possible des représentations habituelles tout en offrant des possibilités nouvelles, notamment par une organisation dynamique des objets et la gestion de paramètres dans les définitions de fonction et d'objets géométriques.

AlNuSet est un logiciel d'apprentissage de l'algèbre, des ensembles numériques et des fonctions conçu par l'Institut pour les Technologies Didactiques (ITD) du CNR de Gênes. Il comprend trois environnements dynamiques de représentations: la droite numérique, une boîte à outil de manipulation algébrique et un espace graphique cartésien. L'utilisateur peut construire et explorer des expressions algébriques en pilotant la variable le long de la droite numérique. La droite numérique, les expressions algébriques et les graphes sont standards, mais les actions possibles sur ces représentations font de AlNuSet un système de représentations tout à fait innovant.

Mopix est un logiciel développé à l'Institute of Education à Londres, permettant de construire des animations et des simulations par le biais d'«équations» (au sens de formules algébriques) qui affectent dynamiquement aux objets des propriétés de position, de forme, de taille, de couleur... Ces équations sont définies en fonction du temps et sont conformes à la notation fonctionnelle standard. L'innovation est plutôt dans les objets que ces équations servent à animer et à contrôler.

Malt est un environnement programmable développé à l'Université d'Athènes permettant la manipulation dynamique des objets géométriques 3D. Les objets sont créés soit en ajoutant des solides prédéfinis à l'environnement, ou en programmant une tortue pour qu'elle trace un nouvel objet. Des "outils de variation" (curseurs) permettent de manipuler dynamiquement les objets construits par la tortue. La nouveauté par rapport à la géométrie dynamique est que ce sont les paramètres des procédures suivies par la tortue qui sont manipulés et non directement les objets.

Cruislet est un micro monde permettant le pilotage d'un ou plusieurs avions en différents modes au sein d'un système de navigation virtuel 3D au dessus de la Grèce. Le pilotage s'effectue dans deux systèmes de coordonnées, cartésien absolu et polaire relatif. Il peut s'effectuer pas à pas ou à l'aide de procédures LOGO. Les systèmes de coordonnées sont standards, bien que peu abordés dans l'enseignement. L'environnement lui-même permet de créer des situations originales et les représentations des mouvements des avions par la programmation permettent d'approcher de façon nouvelle des courbes dans l'espace.

<i>Tableau 3: les rapports (deliverables)</i>	
Nom du rapport	N° du mois du projet
Del 1 : Integrated theoretical framework Version A	m6
Del 4 : First Version of the Dynamic Digital Artefacts	m12
Del 7 : Scenario Design, First Version	m15
Del 8 : Release Version of Dynamic Digital Artefacts	m18
Del 9 : Integrated theoretical framework Version B	m18
Del 10 : Scenario Design, Refined Version	m18
Del 11 : Research design	m20
Del 13 : Design-Based Research: process and results	m30
Del 16 : Refined Version of Dynamic Digital Artefacts	m33
Del 17 : Scenario Design, Final Version	m36
Del 18 : Integrated theoretical framework Version C	m36

Dans la suite de l'article, nous allons nous centrer sur Casyopée, le DDA développé par notre équipe. Nous montrerons quelles préoccupations ont conduit à sa création et à l'évolution majeure qu'il a connue dans le projet ReMath, et comment le développement a été conditionné par ces préoccupations, mais aussi le rôle joué par des considérations empiriques. Nous préciserons comment divers cadres théoriques permettent de comprendre son fonctionnement et d'apprécier les choix de développement. Puis nous montrerons comment l'analyse croisée des deux expérimentations de Casyopée en France et en Italie permet de tirer parti d'approches différentes des questions liées aux représentations des objets mathématiques dans un environnement numérique. Dans une dernière section, nous replacerons le cas de Casyopée dans le cadre général de ReMath et nous ferons le bilan des avancées.

Casyopée un "artefact numérique dynamique"

Casyopée est un environnement d'apprentissage centré sur le concept de fonction. Le développement de Casyopée s'est logiquement inscrit dans le contexte de ReMath en s'appuyant et se référant explicitement à des travaux théoriques clairement identifiés.

Nous rappelons ici des éléments sur la genèse de Casyopée, dont une première version préexistait au projet ReMath et qui fut considérablement enrichi pendant son déroulement. Nous présentons ensuite les trois cadres théoriques qui ont guidé l'extension de Casyopée avant de détailler les choix de mise en œuvre et de montrer en quoi ils s'inscrivent dans les cadres théoriques requis. Un exemple illustrera ces deux derniers points.

Le projet Casyopée

Les premiers travaux qui ont conduit à la conception de Casyopée datent de 2001. Il s'agissait, dans le cadre d'une recherche soutenue par l'INRP, de répondre aux difficultés d'instrumentation identifiées lors de l'usage de systèmes de calcul formel avec des élèves de lycée, dans des situations d'apprentissage de l'algèbre et de l'analyse (Artigue 2002, Lagrange 2005). De précédentes recherches avaient établi que l'intégration de tels systèmes dans des situations d'apprentissage posait problème, en induisant, pour les élèves, des genèses instrumentales longues et hasardeuses que l'enseignant peinait à organiser et à réguler. L'environnement Casyopée fut conçu pour organiser les échanges avec un noyau de calcul formel qu'il incluait. Il offrait aux élèves diverses représentations d'une fonction (graphique, formelle, numérique), la possibilité de transformer des expressions en fonction du but qu'ils s'assignaient. Il leur permettait de différencier les différents statuts de variables (variables de

fonctions, inconnues d'équations, paramètres) et d'appliquer les théorèmes du curriculum relatifs au sens de variation et au signe des fonctions. L'objectif global de l'environnement était de donner du sens aux outils de l'analyse et de l'algèbre, en particulier à travers des situations de modélisation de phénomènes.

Avec son inscription dans le projet ReMath, Casyopée entrait, à partir de décembre 2005, dans une nouvelle phase de son développement. Cette évolution fut fortement guidée par les cadres théoriques que nous explicitons ci-dessous. Cette réflexion fut consignée dans un document appelé *DDA epistemological profile* (Del 18) qui détaillait, outre les activités envisageables : (1) les fonctionnalités de la fenêtre symbolique de l'environnement, en termes de calculs sur les expressions, d'actions sur les représentations graphiques et les possibilités de preuves ; (2) les spécifications de la fenêtre de géométrie dynamique, en termes d'objets géométriques disponibles et d'actions sur ces objets, ainsi que les caractéristiques du panneau de création de mesures, dépendantes ou indépendantes ; (3) les liens entre ces fenêtres et panneau, en terme d'exploitation, dans la fenêtre de géométrie dynamique, d'objets issus de la fenêtre symbolique (telles que les représentations graphiques de fonctions) ou d'exportation, vers la fenêtre symbolique, de mesures ou de couples de mesures sous forme d'expressions ou de fonctions.

Cadres théoriques

Des cadres, comme la théorie des situations didactiques (Brousseau 1997), l'approche anthropologique du didactique (Chevallard 1992) ou l'approche instrumentale (Rabardel 1995), ont participé à l'orientation générale de l'environnement avant même le projet ReMath. L'évolution dans le cadre du projet impliquait la prise en compte plus particulière des représentations et interactions avec les représentations. Nous nous sommes appuyés pour cela sur trois autres cadres théoriques.

Le premier concerne une conception de la notion de fonction, vue comme co-variation entre mesures ou grandeurs. De nombreux travaux ont mis en évidence l'importance de cette approche dans les premiers apprentissages de l'analyse au lycée. Radford (2005) propose des situations dans lesquelles le concept de fonction s'appuie sur l'expérience de dépendances au sein d'un système physique et se construit à partir des variations mutuelles de ses objets. Arzarello et al. (2004) approchent la notion de fonction dans le contexte de mouvements d'éléments matériels mesurés au moyen de capteurs reliés à une calculatrice. Le recueil des données relatives au temps et aux distances en jeu permet de représenter ces mouvements sous formes de graphes ou de tables numériques. La géométrie dynamique (Falcade 2007) offre également la possibilité de faire l'expérience de la co-variation de grandeurs. Des outils propres à la géométrie dynamique (déplacement des objets, visualisation de leurs traces, définition de macros) appliqués à différents objets géométriques (segments, demi-droites, figures) permettent aux élèves d'approcher la notion de dépendance fonctionnelle et d'en faire l'expérience. D'autres recherches (Comin 1999) s'attachent à montrer l'importance, sur le plan épistémologique, de l'introduction des fonctions à partir de la dépendance entre grandeurs (au sens où toute variation de l'une entraîne la variation de l'autre), approche explicitement mentionnée dans les programmes du lycée et leur commentaire.

Le second cadre théorique dans lequel s'inscrit le développement de Casyopée est celui des registres de représentations sémiotiques de Duval (1995). Ces registres permettent d'assurer les activités suivantes : (1) la formation de représentations ; (2) leur traitement à l'intérieur du registre ; (3) la conversion d'un registre vers un autre registre de représentation. Duval affirme que les capacités de conversions entre registres jouent un rôle essentiel dans la conceptualisation. Dans leur étude sur la place des tableaux de valeurs et de variations dans le curriculum français, Coppé et al. (2007) exploitent le cadre de Duval en retenant les registres numérique, graphique et algébrique. Tall (1996) s'est, de son côté, focalisé sur la construction de représentations par les élèves, à partir d'interactions opérées par des gestes et des actions

au sein d'un environnement donné. Dans la lignée de ses propositions, nous qualifierons par la suite d'*énactives* des activités fondées sur des actions de l'élève sur l'environnement proposé.

Le troisième et dernier cadre théorique que nous proposons concerne les différents types d'activités. Kieran (2007) a proposé une classification des activités algébriques en trois catégories : générationnelles, transformationnelles et *global/méta*. Le premier type d'activité concerne la formation des objets de base que sont les expressions et équations. Le second porte sur la production de nouveaux objets algébriques à partir de règles telles que le regroupement de termes semblables, le développement, la factorisation. Le dernier type d'activités se caractérise par le fait que les fonctions y apparaissent comme outils de résolution. Ces dernières peuvent en conséquence être considérées de façon plus générale, par le biais de l'utilisation de paramètres ou de familles de fonctions. Ces activités conduisent à des justifications et des preuves telles qu'il en apparaît, par exemple, dans des problèmes de modélisation. Ce cadre avait déjà été proposé pour classifier les activités algébriques des élèves dans la version de Casyopée préexistant à ReMath (Lagrange 2005). Il s'agit d'un cadre orienté vers le contenu mathématique en jeu et donc susceptible d'interagir directement avec les cadres "représentations" considérés pour l'extension dans ReMath. L'intervention de ces cadres conduit à une classification beaucoup plus riche, comme les sous-sections suivantes vont le montrer.

Le développement de Casyopée

Le choix d'un domaine de modélisation fut l'une des premières décisions prises pour développer Casyopée dans ReMath. L'objectif était de définir et de mettre en place un domaine pourvu de fonctionnalités, où l'élève puisse faire l'expérience de la co-variation de mesures. Le choix s'est très vite porté sur la géométrie dynamique pour différentes raisons. Les contraintes du projet ReMath rendaient difficile le recours à des systèmes physiques. La géométrie dynamique plane, en revanche, est apparue comme parfaitement adaptée aux objectifs du projet. Elle présentait en effet le double avantage d'être très présente dans la culture scolaire au lycée (donc plus facile d'appropriation que d'autres domaines d'expérience) et accessible en terme de mise en œuvre informatique. Il n'a cependant pas été possible de lier Casyopée à un logiciel de géométrie dynamique existant. En effet, les objectifs du projet supposaient des liens étroits et des correspondances fortes entre l'environnement initial Casyopée et le module de géométrie dynamique, en particulier tous les objets géométriques créés par l'utilisateur devaient avoir, comme les objets symboliques de la version initiale, une définition formelle dans le noyau de calcul. Ce n'est pas impossible à faire à partir d'un logiciel existant, mais cela aurait demandé une transformation en profondeur et donc une négociation ingérable dans la temporalité du projet avec les concepteurs du logiciel retenu. Une construction ex-nihilo d'un module de géométrie dynamique et de ses fonctionnalités usuelles fut donc choisie.

En application des cadres théoriques retenus (dont l'introduction des fonctions comme co-variations de grandeurs), trois familles d'objets ont été définies dans Casyopée : (1) les figures géométriques, constituées des objets traditionnels de la géométrie dynamique et munies des fonctionnalités usuelles telles que le déplacement de points ; (2) les grandeurs, qui peuvent être indépendantes (par exemple, une distance comportant un point libre sur segment) ou dépendantes (par exemple l'aire d'une surface dépendant de la grandeur précédente) ; (3) les fonctions, traitées dans une fenêtre symbolique dotée de toutes les fonctionnalités nécessaires, liées aux représentations graphiques, aux valeurs numériques et aux différentes expressions, éventuellement déterminées par l'utilisateur. Ces différents objets et leurs représentations ont été agencés à l'interface de façon à faciliter les changements de registres pour l'élève.

L'un des principes adoptés pour développer Casyopée fut, en effet, de faire prendre en charge par l'environnement les activités de traitement liées aux différents registres, afin de permettre

à l'élève de se consacrer aux activités de conversion entre registres et de lui assurer, selon l'analyse de Duval (95), les meilleures conditions pour conceptualiser. L'autre axe fort qui guida la conception de Casyopée fut la volonté de pouvoir traiter, au sein de l'environnement, les différents types d'activités et de faciliter les liens entre activités de différents types. Le

Tableau 4 présente une vue synthétique de ces deux points essentiels. Le paragraphe suivant revient sur quelques articulations qu'il explicite et qu'il détaille, en mettant en évidence les représentations des différents objets et leurs relations.

Liens entre quelques représentations et activités

		Types de Représentations et d'activités			
		Enactives Iconiques	Algébriques		
			Génération- nelles	Transformation- nelles	GlobalMeta
Niveaux de repré- sen- tation	Covariations dépendances dans un système physique	Déplacer des éléments. Observer les transformations du système			Considérer des objets et grandeurs "génériques". Interpréter
	Covariations dépendances entre grandeurs ou mesures	Faire varier des grandeurs. Observer les variations des mesures	Construire une formule pré-algébrique. Choisir la variable.		
	Fonctions mathématiques	Percevoir les propriétés des graphes et tables	Construire une expression algébrique de la fonction (domaine, formule)	Calculer ou reconnaître des expressions équivalentes. Choisir une forme appropriée	Considérer des familles de fonctions. Utiliser des paramètres. Démontrer.

Nous illustrons nos propos, dans ce paragraphe, en nous appuyant sur une situation de modélisation présentée Tableau 5. Cette situation fut proposée en novembre 2007 et novembre 2008, lors d'expérimentations du projet ReMath, à des élèves de 2 classes de 1^{ère} S de l'académie de Rennes et a été, comme on le verra à la section suivante, reprise par l'équipe italienne pour son expérimentation de Casyopée.

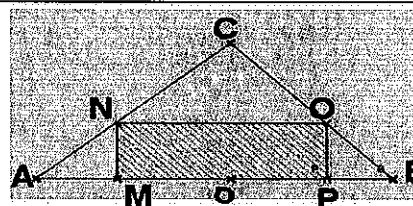
Tableau 5 : Situation de modélisation d'une situation géométrique

Le point M est ici un point libre sur le segment [AO]. La présence des paramètres a, b et c assure la généralité du problème.

Soient a , b et c trois paramètres positifs. On considère les points $A(-a; 0)$, $B(b; 0)$ et $C(0; c)$.

On construit le rectangle MNOP avec M sur [OA], N sur [AC], Q sur [BC] et P sur [OB].

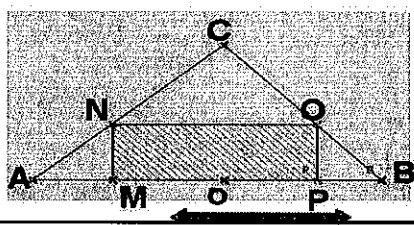
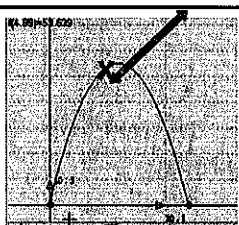
Peut-on construire un rectangle MNQP d'aire maximale ?



Le Tableau 6 montre les liens et les articulations organisés, au sein de l'environnement, entre activités de type énaactives/iconiques portant sur différents objets. A ce stade de la résolution,

l'élève a déjà défini les objets nécessaires, qui comprennent ici : (1) la figure, construite pour l'essentiel à partir du point libre sur segment M ; (2) un couple de grandeurs, constitué de la grandeur dépendante dénotant l'aire du rectangle et de la grandeur indépendante, valide ici, AM ; (3) la fonction, dont l'expression et le domaine ont été calculés par l'environnement sur commande de l'élève et qui modélise les variations de l'aire du rectangle en fonction de la distance précédente. La correspondance entre les différentes représentations associées à ces trois objets est assurée de façon dynamique. En effet, tout déplacement du point libre M sur le segment [AO] entraîne une actualisation des valeurs numériques associées au couple de grandeurs, ainsi qu'un ajustement du point mobile du graphe de la fonction, point qui repère la configuration courante de la figure. Notons que nous sollicitons ici les registres numérique d'une part et graphique d'autre part, pour évoquer les objets respectifs couple de grandeurs et fonction. Réciproquement, le point mobile du graphe peut être glissé le long de la courbe à l'aide de la souris. La modification de sa position va alors induire un déplacement du point mobile M de la figure géométrique et le recalcul des valeurs numériques du couple de grandeurs afin d'assurer la cohérence de l'ensemble.

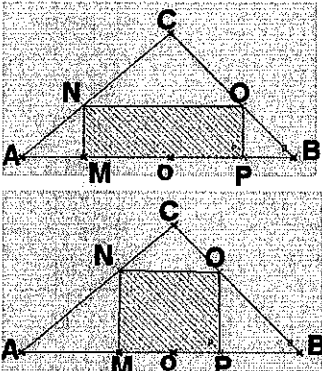
Tableau 6 : Liens entre activités de même nature, impliquant des objets de types différents

	Enactives Iconiques	Illustration
Système physique	Déplacer des éléments. Observer les transformations du système	
Grandeurs ou mesures	Faire varier des grandeurs. Observer les variations des mesures	SELECTION valeur 4.962 -> 69.362 calcul $AM \rightarrow MN \cdot NO$
Fonctions mathématiques	Percevoir propriétés des graphes et tables	$f: MA \rightarrow MN \cdot NO$ $f(x) = \frac{(-b-a) \cdot c \cdot x (\frac{x}{a} - 1)}{a}$ 

Le Tableau 7 revient sur l'articulation entre activités de type éactif/iconique d'une part et algébrique générationnelle d'autre part, ces activités impliquant un même type d'objet, ici les grandeurs. L'utilisateur peut définir, de sa propre initiative, différents couples de grandeurs, l'une dépendante, l'autre indépendante (définies dans un registre symbolique spécifique aux grandeurs), avant de se livrer à une exploration de type iconique pour explorer le lien de dépendance entre ces grandeurs directement sur la figure. Notons qu'une observation de ce même lien est aussi accessible dans le registre numérique associé aux grandeurs.

Tableau 7 : Liens entre activités de type différent, impliquant le même type d'objets

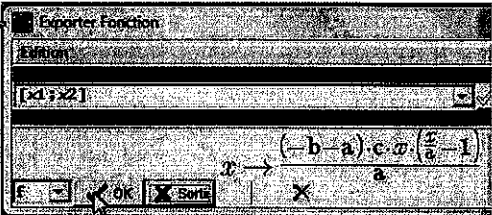
	Enactives Iconiques	Algébriques Générationnelles

Grandeurs mesures	Faire varier des grandeurs. Observer les variations des mesures	Construire une formule pré-algébrique. Choisir la variable.
Illustration		SELECTION valeur 4.962 → 69.362 calcul $AM \rightarrow MN \cdot NO$ SELECTION valeur 6.242 → 71.384 calcul $AM \rightarrow MN \cdot NO$

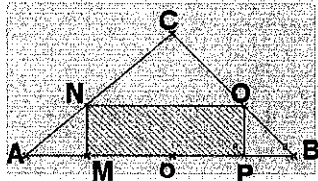
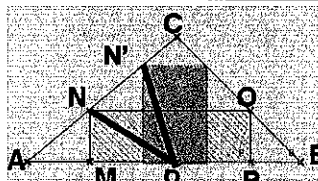
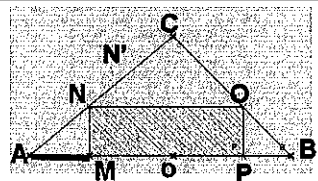
Le Tableau 8 propose un exemple d'activité de conversion entre registres assistée par Casyopée. L'utilisateur a proposé, à ce stade de la résolution, un couple de grandeurs à partir duquel il souhaite calculer une fonction qui modélise la situation. L'environnement prend alors à sa charge la spécification du domaine de définition de la fonction visée, ainsi que la détermination de son expression. Notons que si l'initiative de la conversion appartient à l'élève conformément au principe annoncé plus haut, toute une part du travail dévolue généralement à l'élève¹ dans la conversion est ici prise en charge par Casyopée. Il s'agit là d'une option retenue par les concepteurs de l'environnement, pour des raisons d'ordre technique aussi bien que didactique. En effet, dans le contexte papier/crayon, la détermination de l'expression d'une fonction calculée à partir d'un couple de grandeurs est généralement assurée par l'application de théorèmes de géométrie (tels que Pythagore ou Thalès). La base de connaissance de Casyopée n'inclut pas de tels théorèmes dont l'utilisation imposerait, en outre, de conférer à l'environnement une expertise particulièrement aboutie dans le but d'établir des relations entre grandeurs ou de prouver leur non dépendance. En fait, Casyopée détermine l'expression de la fonction, en éliminant un paramètre interne géométrique qui existe nécessairement entre grandeurs dépendante et indépendante, démarche propre à l'environnement et hors de portée des élèves. Pour autant, l'impossibilité d'exploiter avec les élèves cette connaissance n'a pas été jugée rédhibitoire par rapport aux objectifs généraux de l'environnement. En effet, calculer le domaine de définition et l'expression algébrique de la fonction, à partir d'un couple de grandeurs valide, constitue un véritable sous-problème susceptible d'accaparer l'élève et de le détourner de sa démarche générale de résolution. Cet état de fait peut freiner les changements de registres chez l'élève et compromettre le processus de conceptualisation des fonctions. Notre choix revient donc à privilégier la prise d'initiative par l'élève de l'étape de conversion, avec à sa charge, le choix de variables indépendante et dépendante adéquates, en tirant éventuellement parti des feedbacks de l'environnement.

Tableau 8 : Passage entre activités algébriques générationnelles relatives à deux objets de types différents.		
	Algébriques Générationnelles	Illustration

¹ Mais bien souvent traitée par le professeur dans la réalité des classes.

Grandeurs ou mesures	Construire une formule pré-algébrique. Choisir les variables	calcul $AM \rightarrow MN \cdot NO$
Fonctions mathématiques	Construire une expression algébrique de la fonction (domaine, formule)	

Le Tableau 9 présente quelques interactions relatives à la spécification d'un couple de grandeurs. Cette activité de type algébrique générationnelle montre comment s'opère le choix des différentes grandeurs. Une grandeur dépendante, « convenablement » variable (ce qui est le cas de l'aire du rectangle ayant pour sommet le point libre sur segment M), est définie par la seule donnée d'une expression bien formée de distances (premier exemple de la figure 6). La spécification d'une grandeur indépendante, est en revanche plus fine. De nombreuses raisons peuvent invalider le choix d'une telle grandeur et ne pas assurer la dépendance fonctionnelle cherchée. La grandeur dépendante peut, par exemple, ne pas être fonction de la grandeur supposée indépendante ou cette dernière peut ne pas être en relation bijective avec les différentes configurations possibles. C'est le cas du second exemple de la figure 6, dans lequel une même valeur de la distance ON correspond à deux configurations distinctes de la figure et donc, à deux valeurs différentes de l'aire étudiée. Le troisième exemple de la figure 6 montre l'acceptation d'une proposition d'une grandeur indépendante, sans autre justification de la part de l'utilisateur, l'environnement prenant en charge cette tâche de traitement comme nous l'avons annoncé et souhaité.

Tableau 9 : Une activité de traitement liée au couple de grandeurs		
L'activité est prise en charge par Casyopée sur proposition de l'utilisateur : le choix d'une grandeur dépendante et d'une grandeur indépendante		
Variable dépendante MN.NO	Variable indépendante : ON	Variable indépendante : AM
		
		

Cadres théoriques et contraintes du développement

Le développement de Casyopée s'est déroulé d'une façon particulière. La théorie des situations didactiques, l'approche anthropologique du didactique et l'approche instrumentale ont inspiré les premiers développements avant le projet ReMath. Ils n'ont pas induit des directions précises dans l'extension, mais ont inspiré une orientation générale du travail et leurs apports pour l'analyse des usages ont été précieux, comme on le verra dans la section qui suit. D'autres cadres, que nous avons évoqués dans cette section, ont en revanche fortement guidé l'évolution de Casyopée dans ReMath et ont permis de concevoir des

interactions. Ils ont été utilisés pour fonder la notion de fonction sur la co-variation de mesures ou de grandeurs, et classer les activités qui lui donnent sens.

Si la prise en compte de cadres théoriques dans la conception et le développement d'artefacts joue ainsi un rôle évident dans le développement, il existe aussi des contraintes qui conduisent à des compromis. En premier lieu, toute réalisation informatique a un coût de développement. La conception et la mise en œuvre du module de géométrie dynamique de Casyopée, pièce essentielle sur le plan théorique (car permettant l'apprentissage des fonctions à partir de co-variations de grandeurs), a par exemple mobilisé une part importante des forces de développement. Il était dès lors tentant de limiter les capacités de ce module, pour ne garder qu'un sous-ensemble suffisant pour traiter une classe de problèmes de modélisation, par exemple des aires de polygones dépendant d'une longueur comme dans l'exemple ci-dessus. Un tel choix a été refusé au nom d'une certaine fidélité épistémologique : sans cercles, par exemple, il n'y aurait pas de géométrie dynamique. Cependant ce refus a été particulièrement coûteux car la conception de Casyopée impose de traiter tous les objets de façon formelle, et les intersections de cercles, par exemple, traités numériquement par les logiciels de géométrie dynamique classiques, sont beaucoup plus difficiles à traiter de façon formelle que les intersections de droites. En second lieu, certaines connaissances mathématiques peuvent être difficilement implantables en machine. Cet effet relève de la transposition informatique (Balacheff 1994) qui s'attache à étudier la transformation des connaissances opérée par les dispositifs informatiques. Comme nous l'avons signalé plus haut, les concepteurs de Casyopée ont ainsi dû renoncer à une explicitation, accessible aux élèves des calculs dans la conversion entre registres symboliques permettant d'inférer une fonction à partir d'un couple de grandeurs en dépendance fonctionnelle. Les élèves se réfèrent usuellement, en papier/crayon, à des théorèmes de géométrie plane non implantés dans l'environnement, alors que celui-ci procède par élimination formelle de paramètres géométriques présents dans les grandeurs en jeu. Comme nous l'avons expliqué, le renoncement présent n'altère pas fondamentalement les objectifs généraux fixés par les cadres théoriques retenus. Il témoigne simplement des compromis à faire, entre des orientations générales prometteuses fondées sur une réflexion de haut niveau et la nécessaire opérationnalité exigible d'un environnement d'apprentissage.

L'expérimentation croisée Franco Italienne

Nous étudions, dans cette partie, deux expérimentations parmi les treize réalisées dans ReMath, les expérimentations UNISI et DIDIREM mettant en œuvre le même logiciel Casyopée. Dans Remath, chaque expérimentation a été conçue par chaque équipe dans le respect de ses propres cadres théoriques mais, pour être comparables et permettre des croisements d'analyse, elles partagent un certain nombre de critères. En effet, elles s'effectuent dans des classes ordinaires sur un public d'élèves âgés d'environ 18 ans et pendant une durée d'une dizaine d'heures. L'objet de cette section est, d'éclairer la problématique des "représentations numériques" en considérant certains éléments du contexte d'apprentissage et principalement ici l'influence des cadres théoriques propres à chacune des équipes sur la mise en place et l'analyse de l'expérimentation.

Nous rappelons d'abord brièvement les cadres théoriques de chacune des équipes en insistant sur les outils spécifiques utilisés pour les analyses a posteriori. Pour bien comprendre comment ces cadres agissent sur la conception et l'analyse des expérimentations, il est nécessaire d'entrer dans un niveau de précision assez fin. C'est pourquoi nous présentons d'abord rapidement les scénarios globaux de chacune des expérimentations en insistant sur la manière dont ils sont influencés par les cadres théoriques. Une comparaison détaillée de ces scénarios a déjà été présentée (Cazes et al 2008 ; 2009). Puis nous montrons comment ces

cadres induisent des analyses différentes de données récoltées par chaque équipe sur des séances précises de ces scénarios.

Cadres théoriques utilisés par chacune des équipes

Chacune des équipes se réclame de la perspective socio constructiviste et fait référence à des cadres théoriques issus de la théorie générale de l'activité développés par les successeurs de Vygotski. Rappelons que cette théorie considère que le sujet apprend en agissant et étudie la manière dont l'activité du sujet est médiée par différents systèmes d'artefacts. A partir de cette filiation commune, l'histoire et les contextes scolaires et culturels ont conduit les équipes à développer des cadres d'analyse différents l'un de l'autre.

La théorie de la médiation sémiotique.

Bartolini Bussi et Mariotti (2008) partent de la constatation que l'utilisation d'un artefact pour la réalisation d'une tâche, dans un certain contexte social, conduit à la production de signes qui, d'une part, sont reliés à l'utilisation de cet artefact (les signes artefact) et d'autre part, peuvent être reliés à des notions mathématiques intervenant dans l'utilisation de cet artefact et pour la réalisation de cette tâche. Ces notions sont exprimées dans un système de signes partagés, ce sont les signes mathématiques. Ces chercheurs nomment « potentiel sémiotique de l'artefact » l'ensemble des relations possibles entre l'artefact, les tâches qu'il permet d'effectuer, l'émergence de signes que son utilisation peut produire et les signes mathématiques partagés impliqués. Ainsi, dans une leçon de mathématique mettant en œuvre l'usage d'un artefact pour accomplir une tâche, les élèves sont amenés à produire des signes personnels qui peuvent être mis en relation avec des signes mathématiques partagés. Mais, comme le signalent ces auteurs, la construction de telles relations ne va pas de soi. Bien au contraire, c'est un objectif à assumer par l'enseignant. L'enseignant va intentionnellement orienter son action pour permettre aux élèves d'établir ces relations et de faire évoluer leurs signes personnels vers des signes mathématiques partagés. Selon la théorie de la médiation sémiotique, l'évolution de ces signes est facilitée par l'itération de "cycles didactiques" consistant en la succession des activités sémiotiques suivantes:

- Activités d'utilisation de l'artefact pour effectuer certaines tâches. (Pour renforcer l'émergence de signes, les étudiants peuvent travailler en petits groupes).
- Production individuelle de narrations de recherche.
- Discussion collective orchestrée par l'enseignant.

L'action de l'enseignant est cruciale à chaque étape de ce cycle didactique. Il doit tout d'abord concevoir des tâches mettant en jeu le potentiel sémiotique de l'artefact. Il doit ensuite observer l'activité des élèves, collecter et analyser, du point de vue sémiotique, leur production écrite. Enfin, il doit gérer la discussion collective afin de faire évoluer les signes individuels vers des signes mathématiques partagés. Cette théorie permet d'analyser les expérimentations a posteriori en utilisant le concept de chaîne sémiotique et d'action sémiotique de l'enseignant. Une chaîne sémiotique est une séquence de signes émises par différents acteurs et illustrant le passage des signes artefact à des signes mathématiques partagés. Les actions sémiotiques de l'enseignant s'observent dans la discussion collective ; elles peuvent être, par exemple, un « retour à la tâche », « une focalisation sur un point ou un terme précis », « une demande de synthèse » ou encore « une effectuation de synthèse »

Cadres théoriques utilisés par l'équipe DIDIREM

L'équipe DIDIREM dans son expérimentation est influencée par plusieurs approches théoriques complémentaires, principalement : l'approche instrumentale et la Théorie des Situations Didactiques (TSD) mentionnées plus haut à propos de la conception de Casyopée. Nous en présentons brièvement les aspects qui ont influencé les chercheurs dans la construction et l'analyse de l'expérimentation croisée.

L'approche instrumentale (Artigue 2002) est issue de la théorie de l'activité et plus particulièrement de l'approche ergonomique (Rabardel 1995). Rabardel fait une distinction entre un artefact (matériel ou symbolique) et un instrument. Plus précisément, l'instrument est un ensemble constitué d'un artefact et de ses schèmes d'utilisation. Un artefact ne devient un instrument pour un sujet donné que par un processus, appelé genèse instrumentale, par lequel le sujet va construire des schèmes d'utilisation personnels ou s'approprier des schèmes sociaux préexistants. Ce processus est indissociable du processus d'apprentissage global de notions mathématiques impliquées dans l'utilisation de l'artefact. L'approche anthropologique inspirée de Chevallard (1992) donne un éclairage supplémentaire (Lagrange 2000). Elle souligne, comme les approches socio culturelles, l'idée que les mathématiques sont le produit d'une activité humaine relative à un contexte socio culturel spécifique. C'est pourquoi les objets mathématiques ne sont pas des objets abstraits universels mais plutôt des entités issues de pratiques relatives à des institutions particulières, c'est-à-dire des "praxéologies". Contrairement à des approches courantes des instruments technologiques, cette approche donne un rôle central aux techniques dans la conceptualisation comme pont entre les types de tâches et les théorisations (Hitt et Kieran 2009). La Théorie des Situations Didactiques (TSD) (Brousseau, 1997) issue d'une perspective constructiviste, caractérise le sujet apprenant par un système de connaissances qui va agir sur un « milieu » antagoniste. Idéalement, ce milieu réagit aux actions du sujet par des rétroactions qui sont interprétées par le sujet et vont lui permettre de reconstruire, sans la médiation de l'enseignant, son système de connaissances de manière appropriée. L'apprentissage du sujet s'effectue donc dans ce jeu d'actions/rétroactions et ce cadre permet aux chercheurs de construire des situations adéquates et à potentiel adidactique. Au fur et à mesure de l'apprentissage, l'enseignant conduit une institutionnalisation de la connaissance pour lui donner son statut mathématique officiel. Pour effectuer l'analyse a posteriori des expérimentations, nous avons utilisé des développements plus récents de cette théorie (Hersant et Perrin-Glorian 2005). Ces chercheurs ont étudié les interactions entre les sujets, apprenants et enseignant, en cherchant à préciser différents aspects du contrat didactique. Leur méthode consiste à introduire une structuration du contrat didactique en différents niveaux. Depuis l'objet général de l'activité de l'enseignant et des connaissances à acquérir par les élèves, niveau macro, jusqu'au niveau micro des interactions concernant les actions locales. Hersant et Perrin-Glorian cherchent ensuite à caractériser les différents milieux dans lesquels s'effectuent les actions (milieu matériel évoqué, milieu objectif, milieu fictif...). Enfin, la transcription des interactions étudiée est découpée en différents épisodes. Ces épisodes sont caractérisés par le statut du type de connaissances en jeu (ancienne, nouvelle, en construction), leur type de mise en fonctionnement (situation problème, application, rappel, institutionnalisation) et enfin la recherche de l'acteur qui a la responsabilité de cet épisode, c'est-à-dire, l'initie, contrôle la parole ou encore valide les déclarations.

Comparaison des scénarios des deux expérimentations

Les équipes du projet ReMath ont élaboré un modèle conceptuel de scénario pédagogique, nommé Plan Pédagogique (Bottino et al. 2008) permettant de décrire et de comparer les scénarios. Un Plan Pédagogique (PP) a une structure récursive : chaque PP est conçu comme un arbre dont les feuilles sont également des PP. Plusieurs composantes sont attachées à chaque PP telles que les buts éducatifs visés, les activités proposées aux élèves, les caractéristiques du DDA utilisé et la manière dont elles sont utilisées, les raisons et les justifications théoriques des choix effectués. Un outil en ligne (Pedagogical Plan Manager, PPM) a été développé pour permettre à toutes les équipes de présenter leur PP global dans un même format. Le Tableau 10 donne les deux entrées dans le PPM relatives aux deux scénarios.

Tableau 10 : vue synthétique des scénarios UNISI et DIDIREM à travers le PPM

UNISI	DIDIREM
Modelling in Casyopee (alien) - Didactical cycle 1 - familiarization - Problem of Optimization 1 - Discussion 1 - Problem of Optimization 2 - Discussion 2 - Didactic cycle 2 - Problem of Optimization 1 - revised - discussion on parametrization	Approaching functions with Casyopee (familiar) - associated functions - introduction - targeted functions - different expressions of a function - functions and geometry: variables and equations - Introduction (to divide a triangle in pieces of fixed area) - Application (to divide a rectangle in pieces of fixed area) - function and geometry: optimisation

Les buts éducatifs de l'équipe UNISI dans son PP (Tableau 10 à gauche) sont : (a) accompagner l'évolution des représentations personnelles des élèves concernant la notion de fonction jusqu'à une représentation mathématique d'une fonction comme une co-variation incluant les notions de variable et intervalle de variation de cette variable ; (b) faire évoluer la notion de modélisation d'une situation algébrique depuis une représentation personnelle jusqu'à une notion mathématique. Le PP de UNISI a une structure itérative : les activités des élèves avec Casyopée suivies de la production de rapports sur leurs activités alternent avec les discussions collectives. Cette structure est conçue pour favoriser chez les élèves, la production de sens personnel associé à l'utilisation de Casyopée puis l'évolution de ce sens vers les connaissances mathématiques visées. Ce processus est sans cesse alimenté par l'enseignant dont le rôle est crucial. Le rôle de l'enseignant est pris en compte explicitement dans l'établissement du PP, qui donne des indications sur la gestion de classe (notamment l'organisation d'une discussion). Les activités proposées aux élèves sont des problèmes d'optimisation généraux dans un cadre géométrique. A titre d'exemple, le problème 1 est très proche du problème d'optimisation étudié dans la section précédente (Tableau 5). La réflexion sur la résolution de ces problèmes, sans nécessairement que cette résolution soit effective, est l'étape indispensable pour atteindre les buts éducatifs fixés. C'est pourquoi, la familiarisation avec l'outil doit être considérée dans cette perspective : les élèves sont engagés à réfléchir constamment sur les effets produits par leurs actions sur l'outil et les tâches sont choisies dans ce but.

L'équipe DIDIREM a pour but pédagogique dans son propre PP (Tableau 10 à droite), d'aider les élèves à construire ou enrichir leurs connaissances dans deux domaines : les fonctions comme objets algébriques et les fonctions comme moyen de modéliser des situations de géométrie dynamique et de résoudre des problèmes d'optimisation. L'expérimentation s'étend sur une durée de 3 mois et est en interaction forte avec la progression mathématique globale de la classe. Elle attache d'une part une grande importance à une utilisation progressive de l'outil et d'autre part au fait de travailler conjointement les commandes manipulatoires sur Casyopée et les connaissances mathématiques. C'est pourquoi dans la première séquence les élèves travaillent uniquement dans le module algèbre de Casyopée. C'est l'occasion d'introduire la notion de fonction associée et de réviser les paraboles. Ensuite la seconde

séquence est centrée sur le module géométrie et permet de travailler les notions de calcul géométrique et de choix de variables. Enfin, la troisième séquence est l'occasion de réinvestir les connaissances acquises en travaillant alternativement dans chacun des deux modules et d'aborder, seulement à ce moment, le problème de modélisation. Ce problème repose sur la situation présentée dans la section précédente Tableau 5. Dans ce PP, toutes les tâches proposées ont un important contenu mathématique étroitement lié au curriculum. Elles sont conçues pour permettre aux élèves de progresser vers la solution et de construire les connaissances visées en s'appuyant sur les rétroactions. Le rôle du professeur n'est pas théorisé précisément : il doit seulement introduire les sessions par des séances collectives, aider les élèves pendant les séances sur Casyopée sans dénaturer le potentiel adidactique des situations, puis enfin institutionnaliser les connaissances nouvelles à la fin de chacune des sessions.

Il apparaît clairement, à travers ce bref résumé, que les cadres théoriques ont modelé la conception des scénarios. En effet, on constate que les problèmes d'optimisation étudiés sont quasi identiques et les fonctionnalités du DDA utilisées pour les résoudre sont également les mêmes. Cependant les buts pédagogiques diffèrent, ils sont exprimés pour l'équipe UNISI en termes de représentations sémiotiques à faire évoluer depuis des conceptions personnelles construites dans le travail d'effectuation de tâches avec le DDA, jusqu'à des conceptions partagées construites dans les discussions qui suivent. En revanche les buts de DIDIREM concernent la construction de notions nouvelles ou la consolidation de notions en cours d'apprentissage, ces acquisitions s'obtenant au cours de la réalisation effective de tâches en binôme et grâce à l'aspect adidactique des tâches proposées. Le scénario UNISI, en accord avec la théorie sémiotique, met donc l'accent sur les phases d'expression et sur le rôle de l'enseignant pendant la discussion, tandis que DIDIREM, en accord avec l'approche instrumentale et la théorie des situations, insiste sur le choix des tâches et sur un apprentissage conjoint de connaissances mathématiques et de connaissances liées au DDA. Le paragraphe suivant permet de comprendre comment ces choix, propres à chaque équipe, influencent également le déroulement comme l'analyse des séances.

Analyse croisée de données recueillies

Conformément au schéma de travail dans ReMath, les deux équipes ont chacune recueilli des données comparables telles que la transcription de séances, l'historique du travail des élèves avec le DDA et des copies d'écran. Dans un premier temps, chaque équipe a analysé sa propre expérimentation en se référant à ses propres cadres théoriques. Cette analyse se révélant limitée, car n'impliquant pas de réelle confrontation des cadres, il a été décidé d'opérer des "analyses croisées" pour chaque DDA, chaque équipe analysant, avec ses propres outils, les données recueillies par l'autre équipe et ces analyses étant ensuite confrontées. UNISI et DIDIREM ont ainsi mené une analyse croisée des deux expérimentations de Casyopée qui est rapportée dans cette sous-section.

La première difficulté a été de choisir des données adéquates pour ces analyses croisées. En effet, les modalités d'utilisation de Casyopée étant différentes, les expérimentations n'ont, en fait, pas exactement fourni le même type de données. Ainsi, l'élément essentiel de l'expérimentation pour UNISI est la discussion collective et il n'y a pas de moment équivalent dans l'expérimentation française. Les deux équipes ont alors décidé de sélectionner des données illustrant un moment fondamental pour chacune de leur expérimentation et pouvant être analysé avec les outils de chacune des équipes. Finalement, UNISI a retenu une transcription d'une discussion collective et DIDIREM une transcription d'un dialogue entre deux élèves suivi d'une intervention de l'enseignant pendant une séance d'utilisation de Casyopée en salle informatique. La seconde difficulté était la méthode d'analyse. Les équipes avaient le choix entre analyser ces transcriptions chacune de leur côté avec leurs propres cadres théoriques puis comparer, ou faire une analyse commune "dialoguée", c'est-à-dire

essayer d'articuler leurs cadres théoriques sur l'analyse d'extraits très précis de leçons dont elles connaissaient bien le contexte. Le but de ReMath étant d'essayer de trouver des voies de communication entre équipes de chercheurs, nous avons opté pour la seconde possibilité. Voici des éléments de résultats de ces deux analyses croisées dialoguées.

Analyse croisée dialoguée de l'expérimentation UNISI

La transcription étudiée est issue de la discussion 2 (5^{ème} leçon). C'est un exemple illustrant la manière dont l'enseignant va chercher à faire évoluer les signes individuels formés à partir de l'utilisation de l'artefact en signes mathématiques partagés. Des extraits sont donnés dans les Tableau 11 et Tableau 12.

Tableau 11 : un premier extrait de la séance d'UNISI

1. **Professeur :** "[...] Quelles sont les principales difficultés rencontrées quand vous essayez de résoudre cette sorte de problème, quelle sorte de problème sommes nous en train d'étudier? ...Quelle est la chose importante qu'il est nécessaire de faire ? Vous devez essayer de dégager des aspects communs et ensuite essayer de les appliquer à tous les problèmes analogues que vous rencontrerez avec ou sans le logiciel. Parce que... le logiciel vous guide parce qu'il met l'accent sur un certain nombre d'étapes. Cor, veux-tu essayer de commencer?"
2. **Cor :** "[...] Tout d'abord nous devons choisir le triangle en donnant les coordonnées [Cor rappelle les étapes pour construire la situation géométrique avec Casyopée]"
5. **Luc :** "Mais d'abord nous devons choisir un point mobile [...]"
6. **Professeur :** "Est ce que tout le monde est d'accord [...] Comment pourrions nous nommer cette première partie? [...]"
7. **Élèves :** "Construction"
8. **Professeur :** "Luc vient de mentionner quelque chose [...] voyez vous quelque chose de similaire dans les deux problèmes?"
9. **Sam :** "Il faut toujours choisir un point libre qui varie, dans ce cas l'aire considérée..."
10. **Professeur :** "Donc nous avons une figure qui est..."
11. **Élèves :** "Mobile."
12. **Professeur :** "Mobile, ... dynamique. Passons à la seconde étape. Andrea, quelle est la prochaine étape? [...]"
13. **And :** "L'observation de la figure nous montre... nous devons étudier cette figure et observer l'effet causé par une modification de la variable ..."
14. **Professeur :** "Ok, alors, tout le monde a fait ça n'est ce pas?"
15. **Sil :** "On calcule l'aire du triangle et du parallélogramme on les ajoute et en bougeant le point mobile on peut observer comment elle [la somme des aires] varie"

Des analyses compatibles de l'introduction de la discussion

Les deux équipes constatent que dans l'item1 (Tableau 11), le professeur initie la discussion en explicitant ses objectifs : arriver à une formulation consensuelle et décontextualisée des différentes notions mathématiques en jeu dans la résolution de problèmes du même type que les deux problèmes que viennent de rencontrer les élèves pendant les sessions précédentes. Pour ce faire, le professeur demande aux élèves de rappeler les problèmes cherchés dans les sessions précédentes et la manière dont ils ont essayé de les résoudre. Il oriente explicitement

la discussion vers la recherche de similarités entre les deux problèmes étudiés ainsi que vers les stratégies de résolution.

Du point de vue de UNISI, le professeur spécifie le motif de l'activité: partage et décontextualisation des notions en jeu pour résoudre des problèmes généraux. Il demande de se souvenir de la tâche effectuée avec Casyopée pour faire émerger les signes personnels puis de généraliser pour promouvoir l'évolution des signes personnels vers des signes mathématiques partagés. La référence explicite au logiciel facilite la production de signes liés à l'artefact et exploite son potentiel sémiotique. Du point de vue de DIDIREM, le professeur prépare le milieu de la discussion que nous appelons le milieu objectif (Hersant et Perrin-Glorian 2005). Il fait également référence au milieu matériel (avec le logiciel) et évoque un milieu « fictif » sans le logiciel et avec un problème générique. L'objectif du professeur est donc celui d'une double décontextualisation, du point de vue des tâches et du point de vue du logiciel. Ceci semble très différent de ce qui peut se passer dans la classe française où, en référence à l'approche instrumentale, un des objectifs visés est une appropriation de l'artefact par l'élève lui permettant de transformer ce logiciel en un instrument pour lui-même.

Des unités d'analyse différentes suivant les équipes

Dans les items 2 à 15 (Tableau 11) la discussion se poursuit comme l'a demandé le professeur, les élèves, ensemble, rappellent la résolution des deux problèmes initiaux. Les chercheurs UNISI sont conduits à identifier des chaînes sémiotiques à partir de l'étude des signes employés par les élèves. Dans une première chaîne sémiotique construite collectivement, un lien est établi entre les signes de l'artefact (« *point mobile* ») et les signes mathématiques (« *variable* »). Les éléments de cette chaîne sont : « *point mobile* » (item 5), « *point libre* » (item 9), « *variable* » (item 13) et « *point mobile* » (item 15). Il est important de noter que cette chaîne va dans les deux sens depuis les signes de l'artefact jusqu'aux signes mathématiques et vice versa. Cette chaîne montre que les élèves peuvent : (a) raisonner et agir sur des objets géométriques comme sur des variables, et (b) enrichir leur représentation du concept de variable en l'associant à un mouvement.

Une seconde chaîne sémiotique, permet de lier la représentation de fonction à une co-variation de deux variables. Les éléments de cette chaîne sont les suivants : « *un point libre qui varie...l'aire* » (item 9) « *l'effet causé par une modification de la variable* » (item 13) et « *en bougeant le point mobile on peut observer comment elle [la somme des aires] varie* » (item 15).

Le signe « *point mobile* » est lié à la tâche, au logiciel et il peut être lié au signe mathématique « *variable* ». Il y a plusieurs possibilités pour faire ce lien mais l'intervention du professeur est nécessaire, il choisit de mettre l'accent sur la contribution de Luc. Après l'intervention du professeur, Sam prend la parole mais il utilise le terme « *point libre* » au lieu de « *point mobile* ». De plus, il introduit un autre élément variable (l'aire) ainsi qu'un lien entre les deux, ce qui constitue le début de la seconde chaîne sémiotique. Cela risque d'entraîner prématurément la discussion vers des considérations algébriques avant de bien établir le lien entre variable et variation d'une figure géométrique. C'est pourquoi le professeur intervient en introduisant le terme « *figure* » qui maintient l'attention des élèves sur l'aspect géométrique.

L'équipe DIDIREM analyse quant à elle l'objet de l'activité des acteurs, ce qui la conduit à analyser aussi la suite de la discussion (Tableau 12) et à la séparer en deux épisodes. Dans un premier épisode, de l'item 2 à l'item 12 (Tableau 11), les élèves accomplissent la tâche demandée par le professeur, c'est-à-dire rappeler les caractéristiques des deux situations problèmes précédemment cherchés. L'objectif du professeur semble être de faire émerger l'aspect dynamique commun à ces deux situations, il ajoute lui-même d'ailleurs ce terme à la discussion (*Mobile, ... dynamique*). La fin de cet épisode est clairement marquée par le professeur (« *Passons à la seconde étape* ») qui prend la responsabilité de l'épisode à tous les niveaux : conduite de la discussion (macro) et validation des réponses (micro). Un second

épisode est ensuite initié à l'item 13, toujours par le professeur, qui vise à dégager une seconde étape commune de résolution (items 16 à 24, Tableau 12).

DIDIREM repère dans ces épisodes tout d'abord un « jeu sur les milieux » orchestré par l'enseignant. Dans l'épisode 1, de 2 à l'item 5, Cor et Luc partagent une micro-responsabilité. Cor évoque le milieu matériel de la seconde situation et Luc complète mais en restant toujours au niveau du milieu matériel du même problème, tandis que le professeur se situe dans le milieu objectif de la discussion. Luc (item5) fait uniquement référence à la seconde situation problème mais le professeur reprend son intervention (item 8) en y associant l'idée de similarité entre les deux problèmes. On observe de même un basculement entre les milieux dans le second épisode. Dans ce cas, le professeur fait appel au milieu matériel (items 16, 18 et 20) dans le but de faire émerger la notion de calcul géométrique ; c'est une action de « retour à la tâche », mais ses intentions se situent au niveau d'un milieu fictif (tâche générique avec ou sans logiciel). Plus tard ayant obtenu un consensus sur calcul géométrique, (items 23 et suivants) elle demandera aux élèves de s'abstraire du milieu matériel (item 67).

Tableau 12 : un second extrait

(à partir de 30, seules certaines interventions du professeurs sont rapportées.)

16. **Professeur** : « oui, disons dans la seconde phase, quelle commande particulière du logiciel utilisez-vous ... ? Silvia essaie de te souvenir ou regarde sur ta narration de recherche. J'ai construis la somme des aires. Dans l'autre problème, vous avez l'aire du... »
17. **Élèves** : « rectangle »
18. **Professeur** : « bien, quelle commande utilisiez-vous alors ?
19. **Un élève** : « Un truc, ...un truc avec le bouton,... je ne me souviens plus »
20. **Professeur** : « oui un bouton très particulier, comment s'appelait-il ? »
21. **Élèves** : « OM au carré..., racine de OM... »
22. **Professeur** : « Pouvons nous nous rappeler ce bouton, ce moyen qu'il y avait de conduire cette partie de la résolution »
23. **Élèves** : « Geometric calculation » (en anglais dans le texte)
24. **Autres élèves** : « Dynamic geometry » (en anglais dans le texte).
25. **Un élève** : « non, geometric calculation, car dynamic geometry c'est le terme pour signifier que la figure bouge »
26. **Professeur** : « donc si on veut lui donner un nom ...que va-t-on dire ?... geometric calculation comme elle a dit ? Etes-vous tous d'accord ? »
27. **Un élève** : « non, en italien »
28. **Un autre élève** : « je ne vois pas pourquoi on dirait un terme anglais »
29. **Professeur** : « Exactement,... faisons cela puisque nous n'avons pas le logiciel (qui était en anglais) devant nous. Donc trouvons un terme en italien qui... »
30. **Des élèves** : « Calcolatore geometrico »
- ...
33. **Professeur** : « Calcolatore, certains d'entre vous n'aimez pas calcolatore, pourquoi n'aimez vous pas calcolatore ? »
- ...
37. **Professeur** : « alors est-ce qu'on l'appelle calcolo ? Est-ce que cela convient ? »
-

67. **Professeur** : « Mmh, très bien, ...tout le monde est d'accord.[...] Maintenant à quoi cela pourrait correspondre dans une résolution sans le logiciel... »

DIDIREM poursuit son analyse des deux épisodes en comparant l'effet de médiation sémiotique visiblement recherché par le professeur dans ce dialogue qu'il dirige étroitement, à "l'effet Topaze" repéré dans ce type de dialogue par (Brousseau 1997 p25). L'intervention de Luc (item 5 « *point mobile* ») permet à l'enseignant de remplir son premier objectif mais sa propre intervention (item 6) l'oblige à rompre le micro contrat établi où la responsabilité était partagée entre Cor et Luc. Elle reprend donc la main et on pourrait identifier un effet Topaze lorsqu'elle demande (item 10) de terminer sa phrase par un mot. Cependant, ici, le traitement de ces effets est différent car le professeur recherche un consensus comme le montre la suite de la discussion. On voit bien ici des différences avec un strict effet Topaze : le professeur n'a pas en tête une réponse précise, elle cherche d'abord à obtenir un consensus et les élèves ne cherchent pas à produire une hypothétique réponse attendue par le professeur mais bien à exprimer leur opinion.

Hersant et Perrin-Glorian (2005) lorsqu'elles étudient des discours de classe françaises parlent de régulation du contrat didactique et de gestion des ruptures. Ainsi la notion de contrat didactique peut permettre d'analyser des discussions collectives. Dans le cas d'UNISI, où le professeur s'appuie sur des signes personnels construits pendant des résolutions de tâches pour faire émerger par la discussion des signes mathématiques, un contrat particulier est initié. Il repose sur un jeu délicat entre différents milieux ainsi que sur un partage des responsabilités, le professeur orchestrant la discussion mais cherchant une validation partagée par le plus grand nombre. Dans ce cas, certains effets négatifs de l'effet Topaze sont évités. Cependant, il est difficile de dire si après cette discussion, les élèves sauraient effectivement résoudre les situations problèmes évoquées.

Analyse croisée dialoguée de l'expérimentation DIDIREM

Les données analysées proviennent de la troisième leçon qui est une séance en salle informatique avec Casyopée.

Rappel et analyse de la tâche par DIDIREM

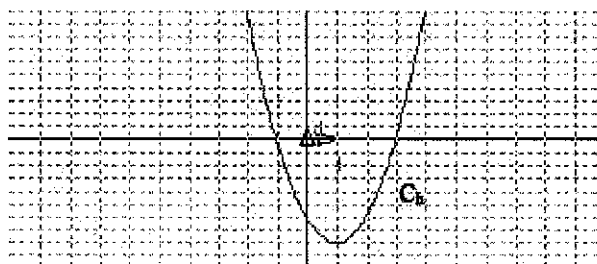
Les connaissances visées sont des connaissances nouvelles et concernent les formes d'écriture équivalentes du trinôme du second degré $2x^2 - 4x - 6$:

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + s ; g(x) = a[(x - k)^2 + m] ; h(x) = a(x - u)(x - v).$$

Voici un extrait de la fiche de travail distribuée aux élèves.

Dans le fichier cible1, on représente graphiquement une fonction h dont l'expression est cachée. La fonction h est un trinôme du second degré.
Il s'agit de déterminer l'expression de trois fonctions f, g et p dont les graphes se superposent avec celui de h . On cherche ainsi à obtenir trois formes équivalentes $f(x)$, $g(x)$ et $p(x)$ de $h(x)$.

NB : Dans le fichier cible1, les paramètres servant à définir les fonctions sont déjà créés.



1. Trouver les valeurs des paramètres, puis développer.
2. Indiquer la ou les méthodes utilisées.
3. Donner quand cela est possible une interprétation des paramètres.

A ce stade du scénario, seul le module algébrique de Casyopée est utilisé. La tâche se situe dans le seul cadre fonctionnel (Douady 1986) mais deux registres de représentation (Duval 1996), algébriques et graphiques, sont en jeu. Comme l'indique l'énoncé, cette tâche est subdivisée en trois sous-tâches. Pour effectuer la sous-tâche 1, trouver les valeurs des paramètres et développer, l'élève doit : (a) établir des conversions entre ces registres (Duval 1996) ; (b) prendre conscience qu'une même fonction peut avoir différentes écritures algébriques (traitement dans le registre algébrique). De plus, cette tâche met en jeu la notion de paramètre qui est une notion en construction chez ces élèves, ce qui ajoute de la difficulté. Les élèves doivent : (c) reconnaître qu'ils travaillent avec une famille de fonctions et que cette famille est la famille particulière des paraboles. Ils doivent indiquer les méthodes utilisées (sous-tâche 2) et enfin, ils doivent interpréter géométriquement les paramètres (sous-tâche 3), ce qui ajoute encore une complexité supplémentaire.

Les extraits proviennent du dialogue des élèves (J) et (L) travaillant ensemble mais disposant chacune d'un ordinateur équipé de Casyopée.

Place différente assignée au logiciel par chacune des équipes

Cet extrait se situe au début de la séance ; les deux élèves tapent la formule de l'écriture de $g(x)$.

J. « Bon OK, on fait l'autre, OK, ... »

L. « Donc créer fonction ça fait : a moins ...x moins k au carré plus m »

J. « Bon ben le graphe il est comme ça regarde y a pas grand-chose à faire... Ah erreur de syntaxe, j'ai une erreur de syntaxe »

L. « Ben oui t'as ouvert 2 parenthèses t'en a fermé 3 »

L. « Ah oui exact... donc voila, ... on la coche. »

Il s'agit ici simplement de faire une saisie sur Casyopée. C'est la seconde fois que les élèves utilisent individuellement Casyopée. C'est un point important et positif pour les chercheurs DIDIREM que la rétroaction consécutive à une erreur de saisie soit efficace et que les élèves puissent tout de suite corriger leur erreur. Il n'y a, en revanche, aucun commentaire de l'équipe UNISI ce qui, en soi est un résultat. Cela illustre le fait que les observations concernant le logiciel ne sont pas une préoccupation d'UNISI. Même si l'on doit modérer ce résultat par le fait que l'équipe DIDIREM est aussi conceptrice de Casyopée et donc particulièrement intéressée par tous les phénomènes liés à son utilisation, cela confirme que la posture des deux équipes vis-à-vis de l'utilisation d'un logiciel est différente.

Opinions compatibles des deux équipes concernant la réalisation de la sous-tâche 1

Cet extrait se situe au moment où les élèves ont piloté les paramètres de la seconde forme $g(x)$; elles ont trouvé les valeurs correctes des paramètres et développent l'expression algébrique. Elles comparent ensuite cette expression développée à celle de $f(x)$.

L. « ça fait ben c'est la même identité remarquable déjà, ça fait pareil »

J. « C'est $x^2 - 2x + 1$ on multiplie par 2 on ajoute -4 donc ça fait $2x^2 - 4x + 2 + (-4)$ »

L. « Donc ça fait $2x^2 - 4x - 6$, ben ça fait pareil »

L. « C'est peut-être logique »

J. « Ah ben oui c'est normal »

L. « Oui je trouve la même, ben oui, c'est ça c'est obligé de toutes façons »

J. « Oui je trouve la même »

J. « Ben oui c'est obligé de toutes façons »

L. « Ben oui c'est normal »

J. « A mon avis on se trompe pas vu qu'on les superpose au truc »

La situation telle qu'elle a été anticipée par l'équipe DIDIREM fonctionne. Le potentiel adidactique joue son rôle. Il y a bien une double validation obtenue à partir de la comparaison des graphes et des formules algébriques développées. La situation et les rétroactions fonctionnent correctement, s'y ajoute une comparaison orale dans le dialogue entre les deux

élèves. L'équipe UNISI analyse cette situation du point de vue des signes qui peuvent émerger lors de l'utilisation de l'artefact pour sa résolution. Du point de vue d'UNISI, les élèves ont correctement exploité le potentiel sémiotique de la situation et de l'artefact.

Divergence d'interprétation sur la gestion de la sous-tâche 2 effectuée par le professeur

Cet extrait se situe juste après que les élèves ont appelé le professeur pour obtenir des explications sur la réalisation de la sous tâche 2 (Indiquer la ou les méthodes utilisées).

J. « Monsieur dans les méthodes comment on peut mettre ? »

Professeur. « Ah »

J. « Parce que nous il n'y a pas vraiment de méthode »

L. « Oui c'est avec le ... »

Professeur. « Votre méthode ça consistait à faire quoi finalement ? »

J. « Ben on regardait le graphique par exemple là fallait la décaler... donc on pouvait agir sur le paramètre »

Professeur. « Mais la façon dont vous avez décalé, est-ce que vous avez pensé à quelque chose plus ou moins consciemment... »

J. « Ben oui par exemple k »

Professeur. « Vous pensiez quand même à des... quel type de transformation ? »

J. « Ben des translations »

Professeur. « Bon des translations et le choix ... »

Dans l'analyse de DIDIREM, cet extrait est issu d'une situation d'apprentissage dans un méso contrat initié par l'enseignant et où les élèves ont pour mission d'expliquer leur méthode de résolution. A l'intérieur de ce méso contrat, un micro contrat est initié par une élève (J) qui appelle le professeur pour demander de l'aide. Les élèves doivent expliquer leur méthode. Pour ce faire, elles ont besoin, comme dans un extrait précédent de la discussion italienne, de traduire en termes mathématiques leurs actions et sur Casyopée. Le professeur, doit pour les aider, enrichir le milieu en y injectant des notions mathématiques (...quel type de transformation). A la différence du cas de la discussion italienne, l'enseignant doit ici intervenir en quelque sorte « à chaud », sans recul face à l'action.

Du point de vue de UNISI, la première intervention du professeur (*Votre méthode ça consistait à faire quoi finalement ?*) correspond à une tâche identifiée dans les actions sémiotiques : le « retour à la tâche ». L'élève fait, de lui-même, le lien entre observation et vocabulaire de mouvement « ...fallait la décaler donc on pouvait agir sur le paramètre » mais le lien entre mouvement et transformation géométrique reste à faire. Or, l'expression « quel type de transformation » employée par le professeur n'a pas forcément l'effet souhaité d'aider les élèves à faire ce lien. Elle risque d'être immédiatement décodée comme un terme mathématique auquel les élèves répondent dans le même registre par le terme « translation ». En d'autres termes, la chaîne sémiotique, depuis « là fallait la décaler donc on pouvait agir sur le paramètre », signes liés à l'artefact et son utilisation, jusqu'à « translation », terme mathématique, est un peu rapide. Donc, bien que le terme « translation » soit un terme mathématique, peut-être reste-t-il dans ce cas, attaché à l'artefact car le professeur n'a pas, à ce stade, demandé de décontextualisation.

Points de vue différents sur la sous-tâche 3 et sur l'apprentissage

Ce dernier extrait est un dialogue entre les mêmes élèves essayant d'interpréter le paramètre *a*.

L. « Bon alors a c'est l'agrandissement »

J. « Non a c'est pas l'agrandissement »

L. « Attends a »

J. « Non c'est e l'agrandissement »

L. « Si ...regarde a là regarde là je mets 2 ...hop et 1 ...et 2,... elle s'écarte »

J. « C'est l'agrandissement donc (écrivant) a c'est l'agrandissement »

Dans cet épisode, les élèves donnent une interprétation correcte du paramètre a . Au début, elles ne sont pas d'accord. Alors l'élève (L) utilise le logiciel pour prouver qu'elle a raison. L'équipe DIDIREM analyse cet extrait en remarquant que, dans ce cas, Casyopée n'est pas utilisé pour produire un résultat ponctuel mais bien pour donner du sens à une notion mathématique possédant une certaine généralité. En revanche, du point de vue de l'équipe UNISI et de la médiation sémiotique, le sens attribué à cette notion demeure contextualisé à l'utilisation de l'artefact. Pour UNISI, une décontextualisation serait nécessaire.

Bilan de l'analyse croisée dialoguée

Ces analyses croisées ont permis d'illustrer, sur des exemples précis, des différences entre les deux équipes aussi bien dans le déroulement des sessions que dans l'analyse des données recueillies. Ces différences sont reliées aux choix théoriques effectués par les équipes et illustrent aussi la cohérence du travail de chaque équipe. Dans les deux approches, l'élève doit faire évoluer ses connaissances mathématiques vers un « mieux » à acquérir et l'enseignant a pour missions de préparer, accompagner et acter cette évolution. Mais l'acquisition de ce « mieux » s'effectue par des itinéraires différents suivant les deux équipes. Dans le cas d'UNISI, l'itinéraire choisi est à dominante « sémiotique » ; en effet l'organisation de l'expérimentation repose sur l'expression de signes mathématiques et sa validation sur des déclarations consensuelles et décontextualisées à la fois de l'outil et de la tâche. Dans le cas de DIDIREM, l'itinéraire prévu est à dominante « cognitive » ; en effet, l'organisation des sessions comme sa validation repose sur des effectuations de tâches précises et sur la transformation du DDA en un instrument personnel dont l'élève a acquis le maniement.

Des liens entre les deux cadres théoriques ont déjà été initiés. Ainsi Haspekian (2005) introduisant la notion de *distance instrumentale* entre l'environnement papier/crayon et l'environnement d'un DDA suggère de prendre en compte le vocabulaire introduit dans le DDA et ses différences, ou sa distance, avec le vocabulaire purement mathématique. Plus récemment, Falcade (2006) a cherché à décrire le déroulement d'une « discussion » telle que l'entend l'équipe UNISI en termes de règles appliquées à l'intérieur d'un contrat didactique spécifique. Nous pensons que l'analyse dialoguée a permis d'avancer sur ce dernier point en montrant l'intérêt d'identifier les milieux en jeu dans une discussion ainsi qu'en portant un nouveau regard sur un « effet Topaze revisité ». De même, le dialogue entre les deux équipes a donné des pistes de développement à l'équipe DIDIREM sur la manière d'accompagner l'enseignant dans les phases d'institutionnalisation.

Retour à une perspective globale sur le projet ReMath

Dans cette dernière partie, nous revenons à une perspective plus globale sur le projet ReMath et essayons d'en tirer les leçons. Comme cela a été précisé dans l'introduction, il y avait à l'origine de ReMath l'ambition de contribuer à la capitalisation des apports des nombreux travaux didactiques qui se sont intéressés au potentiel offert par les technologies numériques en termes de représentation. Les acteurs de ce projet étaient sensibles à la fois à la richesse de ces apports mais aussi au problème posé par leur capitalisation. Ils voyaient dans la fragmentation des approches théoriques mobilisées, elle-même non indépendante de la diversité des contextes et des cultures éducatives, dans la diversité des technologies considérées, un obstacle essentiel à cette capitalisation, et une raison de l'impact très limité de ces apports sur la réalité des classes. Il fallait donc, comme cela a été rappelé dans l'introduction, se donner les moyens d'affronter de façon systématique et productive cette diversité, ce qui a conduit aux choix initiaux (*Tableau 1*).

La diversité dans ReMath

La diversité des DDAs

La diversité est présente dans ReMath d'abord au niveau des DDAs considérés. Ces logiciels se différencient d'abord par les domaines et objets mathématiques concernés : l'algèbre pour

Aplusix et Alnuset, les fonctions pour Casyopée, la géométrie 3D pour MaLT et Cruislet, la cinématique pour MoPIX. Tous permettent d'approcher et travailler ces objets au moyen de représentations multiples directement manipulables et interconnectées, et sont réellement innovants dans ce domaine, mais les représentations, les moyens d'action sur ces dernières et les possibilités d'évolution de ces représentations ne sont en rien identiques (cf. Tableau 2). Pour travailler sur les expressions algébriques, par exemple, Aplusix conjugue deux registres de représentation principaux dynamiquement connectés : le registre symbolique et le registre des arbres, tandis qu'Alnuset a étendu à l'univers algébrique la droite numérique et met ce nouveau système de représentation au service de l'approche de l'équivalence d'expressions ou de la résolution d'équations. Aux objets physiques de MoPIX sont associés des fonctions qui en définissent les caractéristiques et en programment le mouvement, des mouvements qui s'expriment aussi à travers des représentations graphiques. Les objets manipulés dans Cruislet sont des avatars (avions ou hélicoptères) que l'on peut positionner sur une représentation 3D de la Grèce et déplacer en mode direct en utilisant des vecteurs définis en coordonnées sphériques ou en définissant une destination en termes de latitude, longitude et altitude, ou encore en réalisant des programmes dans le langage LOGO. Comme Cruislet, MaLT offre des possibilités de programmation en LOGO, ici associées à un système de curseurs, pour définir le mouvement d'une tortue 3D, et ainsi créer et animer des objets dans l'espace. Ces représentations se distinguent aussi quant à leur distance avec les systèmes de représentation standard en mathématiques, ceux offerts par les DDA éducatifs usuels, et ceux privilégiés par l'enseignement. De ce point de vue, Aplusix et Casyopée sont certainement les deux DDA pour lesquels la distance est minimale et, en cela, ils se distinguent fortement de MoPIX, MaLT et plus encore Cruislet. Enfin, au-delà de ces différences, les différents DDA se distinguent aussi par les visions épistémologiques et didactiques qui ont sous-tendu leur développement. La distinction entre les statuts procéduraux et structuraux des expressions algébriques est ainsi centrale dans Aplusix et Alnuset, les connections entre différents niveaux d'activités sur les fonctions sont centrales dans Casyopée comme cela a été expliqué plus haut, tandis que le développement de MoPIX, MaLT et Cruislet est porté par une vision des mathématiques comme outils de simulation et de création avec des visées plus ou moins pré-définies. Ces différences sont bien sûr elles-mêmes étroitement liées aux cadres théoriques sur lesquels s'appuient les différents concepteurs et, par exemple, les proximités qui apparaissent dans la description ci-dessus entre MoPix, MaLT et Cruislet ne sont en rien surprenantes pour celui qui connaît l'approche constructionniste partagée par leurs concepteurs (Harel et Papert, 1991). C'est cette diversité que nous allons notamment considérer dans la section suivante.

La diversité théorique

La diversité dans ReMath est en effet aussi théorique. Les parties précédentes de cet article, bien qu'elles soient centrées sur un DDA et sur le travail de deux des six équipes impliquées dans ReMath font déjà apparaître cette diversité. Elle intervient dès le début du projet à la fois à un niveau macro-didactique, dans le rapport au sémiotique qui est crucial dans ce projet et dans les approches plus spécifiques des contenus mathématiques abordés. Au niveau macro-didactique, ont été déjà mentionnées la théorie des situations didactiques, la théorie anthropologique du didactique, le constructionnisme, la théorie de l'activité. Ce sont effectivement les principaux cadres en jeu. Au niveau sémiotique, nous avons déjà mentionné le cadre développé par Duval autour de la notion de registre de représentation et la théorie de la médiation sémiotique, mais il faudrait y rajouter la sémiotique sociale de Halliday (1978) utilisée par les collègues de l'équipe LKL qui a développé MoPIX et la sémiotique de Pierce qui fonde la vision de l'équipe ITD qui a développé Alnuset. Enfin la plupart des équipes font référence dès le début du projet aux travaux de Rabardel et donc à une approche instrumentale. Au niveau des domaines concernés, la distinction procédural/structural semble

partagée par les équipes œuvrant dans le domaine de l'algèbre et des fonctions, mais la structure décrite plus haut pour le domaine fonctionnel est propre à l'équipe DIDIREM. Dans le cas de la géométrie 2D et 3D, si la distinction entre dessin et figure géométrique semble une référence partagée, les concepts spécifiques restent plus flous. On observe donc une diversité qui reflète bien, même si six équipes seulement sont concernées, des orientations majeures de la recherche dans ce champ. Cette diversité, il faut le souligner, est cependant déjà pré-structurée au début du projet mais les connexions existantes sont essentiellement des connexions internes aux équipes qui chacune mobilisent différents cadres théoriques, et non des connexions partagées. Et dans le cas de la référence commune aux travaux de Rabardel, rien ne permet d'assurer au début du projet que les lectures faites de l'approche instrumentale de Rabardel soient pleinement cohérentes, médiées qu'elles sont par des cadres macro-didactiques substantiellement différents.

La diversité institutionnelle et culturelle

A la diversité théorique s'ajoute celle des systèmes d'enseignements et plus généralement des cultures éducatives, qui n'est d'ailleurs pas sans influencer par les conditions et contraintes qu'elle introduit sur les deux diversités précédemment examinées. Quatre pays sont concernés : Angleterre, France, Grèce et Italie. Ce sont tous des pays européens mais leurs systèmes et cultures éducatives présentent des différences substantielles qui deviendront de plus en plus visibles au fur et à mesure que se développeront les expérimentations et leurs analyses. Comparées à la Grèce et l'Italie, l'Angleterre et la France apparaîtront ainsi comme des pays où la pression institutionnelle est plus forte, mais avec des contraintes de nature différente. En Angleterre, elles sembleront liées en priorité à la pression évaluative, notamment externe, alors qu'en France il s'agira d'une pression institutionnelle plus globale et diffuse qui imprègne tout le système et ses acteurs.

On voit donc que, même limité au contexte européen, le projet ReMath se situait dans un contexte lui permettant d'embrasser le problème de la capitalisation des apports de la recherche, de la conception des artefacts numériques à leurs usages effectifs dans les classes. Comme expliqué dans l'introduction, la question de l'intégration théorique a constitué le fil conducteur du projet. C'est donc naturellement sur cette question que nous allons nous centrer dans ce qui suit pour analyser les avancées permises par le projet et en tirer les leçons.

L'intégration théorique dans ReMath

La vision de l'intégration théorique développée dans ReMath

Ces dernières années, de nombreux chercheurs se sont penchés sur la question des relations entre cadres théoriques en éducation mathématique, par exemple au sein d'ERME comme en témoigne l'existence d'un groupe centré sur ces questions aux trois derniers colloques CERME, le travail ayant conduit à diverses publications et notamment au numéro spécial 40.2 de la revue ZDM publié en 2008. Il est donc particulièrement important de situer la vision de ReMath par rapport à ces travaux. La vision de ReMath, si l'on considère l'échelle proposée dans ce numéro (Prediger et al. 2008) est ambitieuse. Elle se situe en effet dans la partie droite de cette échelle qui concerne les niveaux supérieurs d'intégration. Mais, même si le terme d'intégration est utilisé, il est clair aussi que l'ambition n'est pas celle de la construction d'un cadre théorique unifié ayant vocation à soutenir la recherche dans ce domaine et sa capitalisation à un méta-niveau. La vision de l'intégration de ReMath est en effet portée davantage par une métaphore de réseau, la recherche de connexions et complémentarités même si elle n'exclut en rien celle de possibilités d'intégrations partielles.

Cette vision est par ailleurs soutenue par une approche fonctionnelle de la théorisation. Cette vision, héritée du projet européen TELMA qui est à l'origine de ReMath (Artigue et al., 2009), considère que les cadres et concepts théoriques sont des outils élaborés par les chercheurs pour répondre à des besoins précis émergeant du développement interne du champ

ou des problèmes posés par les rapports entre recherche fondamentale et appliquée, entre recherche et pratique, ou encore à l'interface entre champs de recherche. Remonter des objets théoriques à leurs raisons d'être en étant sensibles aux caractéristiques contextuelles qui, à différents niveaux, ont façonné le développement de ces objets et conduit à leur état présent, est ainsi perçu comme une stratégie productive pour penser les relations possibles entre cadres théoriques et respecter leurs cohérences respectives dans les mises en relation et tentatives d'intégration effectuées. Dans ReMath, cette approche fonctionnelle s'appuie sur la notion de *fonctionnalité didactique* et sur le langage des *sensibilités* (concern en anglais) introduits dans TELMA². L'expérience de TELMA a conduit de plus à introduire une distinction entre rapport *métaphorique* et *opérationnel* aux concepts théoriques et à faire préciser, dans le cas d'un rapport opérationnel sur quels outils précisément s'appuyait ce rapport opérationnel. La recherche intégrative est aussi portée par l'élaboration progressive d'une *base théorique partagée* sur les représentations à partir d'un noyau minimal et c'est autour de ce noyau minimal et de son évolution, ainsi que des apports des études croisées de cas qui ont joué un rôle clef dans l'établissement de connections que nous allons organiser la présentation des résultats globaux de cette recherche.

Vers une base théorique partagée sur le sémiotique

Le noyau sur lequel l'accord s'est établi à l'issue de la première année du projet était volontairement minimal et exprimé dans des termes non connotés théoriquement. Il attestait le consensus existant sur une conception ternaire de la notion de représentation : « A representation is something which stands for something else from someone's point of view » (cf. DEL13). Le lecteur familier avec les travaux de Pierce fera aisément la relation avec cette perspective sémiotique mais le consensus exprimé sous cette forme n'obligeait pas l'allégeance à cette perspective.

Le projet s'est donné divers outils pour progresser à partir de ce noyau initial : la question de recherche commune et sa reformulation par chaque équipe dans le cadre de ses expérimentations³, des « guidelines » établis pour accompagner la construction des scénarios expérimentés, leur implémentation et l'analyse des données recueillies, mais aussi l'analyse réflexive qui a accompagné le développement des DDAs et la synthèse opérée à la fin du projet en termes de profil épistémologique pour chacun d'eux (cf. DEL18). Enfin, les études de cas croisées ont permis de mettre à l'épreuve les consensus établis et de les synthétiser autour de 9 positions précisant ce noyau initial et son usage possible pour étudier les fonctionnalités didactiques de DDAs. Comme c'était le cas pour le noyau initial, ces positions sont exprimées dans un langage qui évite le plus possible la dépendance à un cadre théorique spécifique et accompagnées de commentaires qui précisent les raisons d'être et les limites de ces accords. L'expression choisie prend aussi en compte la demande des évaluateurs externes du projet d'une formulation accessible aux utilisateurs potentiels de la plateforme Math.Di.L.S. mentionnée dans l'introduction, au-delà des seuls chercheurs.

Nous nous limitons ici à donner une vision très synthétique de ces 9 positions (Tableau 13) renvoyant le lecteur au DEL18 pour les commentaires et justifications associés. En relisant la première section de cet article à la lumière de ces 9 positions, on comprend comment elles

² Par fonctionnalité didactique d'un artefact numérique, on désigne les caractéristiques de l'artefact et les modalités d'usage qui peuvent favoriser les processus d'enseignement/apprentissage relatifs à un certain but. Une fonctionnalité didactique est ainsi définie autour de trois composantes : des caractéristiques de l'artefact, un but éducatif et des modalités d'usage. Le langage des sensibilités associe à chacune de ces composantes un ensemble de sensibilités. L'attention accordée à ces différentes sensibilités varie d'une équipe à l'autre et les différences observées dans les niveaux d'attention comme dans la façon dont ces sensibilités sont prises en charge sont utilisées pour approcher les cadres théoriques dans leur fonctionnalité.

³ "Comment les représentations identifiables dans un DDA peuvent-elles être mises en relation avec des buts pédagogiques spécifiques et le fait de les atteindre ?"

enrichissent la perspective adoptée par les concepteurs de Casyopée limitée à une approche registres et cadres exprimée dans les trois premières positions : la complexité des activités avec ce DDA n'est pas réductible aux traitements dans les registres et conversions entre registres (position 4), la dimension sociale des représentations est peu prise en compte dans les activités pour lesquelles le DDA est conçu (position 5). On comprend aussi le rôle joué par l'expérimentation croisée et l'analyse "dialoguée" dans la synthèse que constituent les positions 6, 7 et 8: des expérimentations dans des contextes différents, sous-tendues par des approches théoriques ont conduit à dégager des principes pour l'explicitation et l'évaluation des potentialités didactiques d'un DDA. La position 9 se concrétise pour Casyopée par l'élaboration d'un cadre intégrant des approches didactiques des fonctions comme Kieran (2007) et Tall (1996).

Tableau 13 : Expression synthétique en 9 positions

1. Les objets mathématiques ne sont pas des entités directement accessibles à nos sens. Pour y accéder, leur donner du sens, travailler dessus et échanger avec d'autres à leur propos, nous en utilisons des représentations externes. Nous construisons aussi des représentations internes qui nous permettent d'y accéder mentalement.
2. Concernant les représentations des objets mathématiques, il faut adopter une perspective ternaire. Une représentation est quelque chose qui signifie autre chose du point de vue de quelqu'un. Il est aussi important de reconnaître la dimension sociale et culturelle des représentations.
3. Le concept de registre sémiotique de représentation est utile pour aborder la diversité des systèmes qui ont été développés pour représenter les objets mathématiques, les règles régissant la formation et la transformation des représentations au sein de ces systèmes, et le rôle crucial joué par les connexions entre registres sémiotiques dans l'apprentissage des mathématiques.
4. Donner du sens aux objets et processus mathématiques est une activité complexe mobilisant une diversité de systèmes et activités sémiotiques. Une analyse en termes de registres sémiotiques des représentations ne rend compte que partiellement de cette diversité. La notion de multimodalité (Edwards, Radford, Arzarello 2009) est utile pour aborder la complexité des systèmes et activités sémiotiques, et donc pour mieux comprendre le potentiel sémiotique des artefacts numériques.
5. La dimension culturelle des représentations des objets mathématiques est essentielle. Donner du sens aux objets et processus mathématiques à travers ces représentations est essentiellement une activité sociale. La notion de chaîne sémiotique est utile pour approcher les processus d'évolution des significations dans le discours en classe, et comprendre le rôle d'outil de médiation potentiellement joué par les DDA.
6. Pour comprendre le potentiel didactique d'un DDA ou en d'autres termes pour identifier ses fonctionnalités didactiques, il est important d'identifier son potentiel en termes de représentations c'est-à-dire analyser les fonctionnalités du DDA en termes de représentations. Cela inclut l'analyse de ce qu'il permet comme diversité des représentations et comme façons de traiter ces dernières, comme connexions entre les représentations, en termes d'évolution des représentations, et comme possibilités offertes aux interactions sociales.
7. Pour évaluer le potentiel d'un DDA en termes de représentation, il est important de distinguer les fonctions didactiques pensées par les concepteurs et celles résultant de l'interprétation, des élaborations et même des transformations effectuées par les utilisateurs.
8. Pour considérer les fonctionnalités didactiques d'un DDA dans un contexte éducatif spécifique, il est important d'évaluer la distance entre le DDA et le contexte éducatif en termes de représentations.
9. Des idées générales sur les représentations ne peuvent que partiellement appuyer l'identification des fonctionnalités didactiques pour un DDA et un domaine mathématique donné. Des perspectives épistémologiques et didactiques spécifiques et des connaissances concernant le domaine en jeu sont également nécessaires.

Les connexions permises par les études croisées

Comme cela a été précisé au début de ce texte, après une première analyse de chaque expérimentation par l'équipe concernée et une première synthèse des résultats ainsi obtenus dans le DEL13, il a été décidé d'entreprendre des études croisées systématiques autour des expérimentations concernant un même DDA. Six études croisées ont été ainsi réalisées et elles se sont révélées particulièrement fructueuses pour appréhender des potentialités de

connections théoriques dont les analyses menées jusque là laissaient supposer l'intérêt sans permettre pour autant de les mettre réellement à l'épreuve. Rétrospectivement, cinq types de connections nous semblent avoir émergé de ces études de cas et de la synthèse qui en a ensuite été réalisée. Elles concernent respectivement :

- La théorie des situations didactiques et la théorie de la médiation sémiotique
- Les différentes perspectives instrumentales
- Les différentes perspectives sémiotiques
- Le constructionisme et la sémiotique sociale
- Le constructionisme et la théorie des situations

Dans l'espace limité de cet article, il est impossible de présenter toutes ces connections. Le corps de cet article a, nous l'espérons, permis au lecteur de comprendre comment l'analyse croisée menée concernant l'expérimentation de Casyopée avait permis de renforcer les articulations productives entre la théorie des situations didactiques et la théorie de la médiation sémiotique que des recherches comme la thèse de Falcade (Falcade & al. 2007) avaient déjà contribué à faire émerger. Dans cette partie, pour compléter ces analyses, nous évoquerons deux cas : celui de la connexion des différentes perspectives instrumentales et celui des rapports entre théorie des situations didactiques et constructionisme.

La connexion entre approches instrumentales

Comme nous l'avons déjà souligné, dès le début du projet, la plupart des équipes engagées font référence à l'approche instrumentale développée par Rabardel, et plus précisément à la distinction que ce dernier effectue entre artefact et instrument, à la notion de genèse instrumentale et aux processus d'instrumentation, voire d'instrumentalisation associés, ainsi qu'à l'idée de schème. Mais le travail mené va montrer que derrière ces références communes qui permettent d'engager la communication se cachent des rapports sensiblement différents à ces notions, des usages sensiblement différents de ces notions dans la conception des DDAs, l'identification de leurs fonctionnalités didactiques, l'élaboration des scénarios, leur implémentation, comme l'analyse et l'interprétation des données recueillies. Ces différences sont la conséquence du fait que, dans chacune des équipes, les conceptualisations de Rabardel doivent trouver leur place dans un édifice théorique préexistant, la TAD et la TSD pour les équipes DIDIREM et MeTAH par exemple, la théorie de la médiation sémiotique pour l'équipe UNISI et le constructionisme pour l'équipe ETL. Et c'est en les resituant dans ces systèmes théoriques, ce que permettent les analyses croisées, qu'elles deviennent intelligibles et que l'on peut en apprécier les effets.

L'analyse croisée menée autour de Casyopée montre ainsi que la combinaison théorique qui porte l'approche instrumentale développée au sein de l'équipe DIDIREM conduit à mettre l'accent sur l'imbrication du développement des connaissances mathématiques et liées à l'artefact, à construire donc des scénarios qui permettent de faire vivre par les élèves cette imbrication de façon productive, dans des situations présentant un fort potentiel adidactique, puis à opérer une double institutionnalisation soutenant l'évolution conjointe de ces deux formes de connaissance. Les discussions collectives qui ont une importance cruciale dans l'expérimentation menée par UNISI sont menées, quant à elles, hors salle informatique et les interactions entre enseignant et élèves qui servent de cadre au développement de chaînes de médiation sémiotique ont un but clairement affiché par l'enseignant : opérer une double décontextualisation vis-à-vis de l'artefact comme du contexte étroit de la tâche. L'ambition de tissage des formes de connaissance qui est au centre de l'approche instrumentale telle que vue par DIDIREM ne fait pas sens pour l'approche instrumentale portée par la théorie de la médiation sémiotique qui voit dans l'artefact avant tout un outil de médiation sémiotique.

De la même façon, les analyses croisées qui ont engagé l'équipe ETL, en particulier l'analyse croisée menée avec l'équipe DIDIREM à propos de l'expérimentation de Cruislet, ont permis de faire émerger une autre façon d'exprimer la sensibilité instrumentale, cette fois en

cohérence avec le cadre théorique constructionniste qui est la référence fondamentale de cette équipe. L'influence de la TAD a façonné dans l'équipe DIDIREM une approche instrumentale particulièrement sensible au poids des contraintes institutionnelles qui conditionnent la légitimité de praxéologies impliquant tel ou tel usage de tel ou tel artefact. Ce poids de la TAD sur l'approche des questions instrumentales a été particulièrement visible dans la préparation de la première expérimentation de Cruislet vu la distance à laquelle ce DDA se situe des artefacts numériques qui sont utilisés dans le système éducatif français pour l'enseignement des mathématiques. Rétrospectivement, il apparaît qu'elle a rendu plus difficile l'identification et l'exploitation des potentialités didactiques de ce DDA. L'analyse croisée a aidé à comprendre à quel point l'analyse des potentialités et contraintes de l'artefact inhérente à toute approche instrumentale pouvait être différente si l'on se situait dans une approche constructionniste. Il a aussi aidé à rendre intelligible par tous l'importance accordée par l'équipe ETL à la notion de *half-baked microworld*, c'est-à-dire à la conception de DDAs en un sens inachevés mais riches de potentialités d'instrumentalisation impliquant des constructions symboliques. Les tâches proposées aux élèves permettent cette instrumentalisation et le développement associé des représentations dans des directions que l'on ne cherche pas à contrôler précisément parce que, en cohérence avec la perspective constructionniste, on fait l'hypothèse que, quelle que soit la forme prise par le développement, il sera producteur de connaissance. On voit ici émerger, en contraste avec une instrumentalisation réglée où, tout en reconnaissant l'existence de fonctions constituantes et de fonctions constitués, on essaie souvent de limiter la distance entre ces deux fonctions, une instrumentalisation qui se veut créative et des choix de design de l'artefact mis au service de cette instrumentalisation créative.

Théorie des situations didactiques et constructionnisme

C'est à travers l'analyse croisée des expérimentations concernant le logiciel Cruislet qui impliquaient les équipes DIDIREM et ETL qu'a pu se développer la réflexion sur les rapports entre théorie des situations didactiques et constructionnisme. A priori de telles connections n'avaient rien d'évident mais l'expérimentation de Cruislet, a en effet été source de déstabilisations productives. Le caractère très innovant de ce logiciel, plus proche d'environnements d'usage social tels Google Earth que des logiciels scolaires, les notions mathématiques sous-jacentes : vecteurs de l'espace, coordonnées sphériques, le rôle joué dans ce DDA par la programmation en langage LOGO, tout ceci en faisait un objet dont l'inscription dans le système scolaire du lycée en France était problématique. L'équipe, en accord avec les enseignants impliqués, a alors décidé d'organiser l'expérimentation dans le cadre du dispositif auxiliaire que constituent les TPE, en classe de première S (Le Feuvre, Meyrier, Lagrange 2010).

Le scénario élaboré prévoyait d'organiser une première rencontre avec ce logiciel sur trois séances autour de tâches relativement ouvertes de simulation de voyages sous contraintes et de défis, après une première phase de découverte collective de cet espace de navigation et des commandes associées. Les tâches proposées étaient très distantes des tâches scolaires usuelles mais elles cherchaient à être réalistes et en phase avec ce DDA. Il était espéré que certains élèves choisiraient ensuite de poursuivre le travail avec ce logiciel dans le cadre de leur projet de TPE, ce qui en fait ne s'est pas produit, les élèves considérant l'entreprise trop risquée. Développer l'ingénierie didactique correspondant aux trois séances initiales a posé de réels problèmes, les analyses et anticipations nécessaires à l'analyse a priori se révélant difficiles dans cet environnement nouveau et de plus encore en développement. Ces difficultés de l'analyse a priori et les conséquences qu'elles ont eu sur le déroulement effectif de la première expérimentation, les interactions avec le milieu adidactique ne fonctionnant pas comme prévu, mais aussi la façon dont les leçons de cette première expérimentation ont été exploitées pour mettre en place une seconde expérimentation, ont bien mis en évidence des caractéristiques

essentielles d'une ingénierie didactique portée par la TDS : l'importance de l'analyse a priori et de la réflexion mathématique et épistémologique qui la sous-tend, la vision du design didactique comme un processus où via le choix des tâches, le pilotage des variables didactiques, des conditions de l'interaction des élèves avec le milieu, du partage des responsabilités mathématiques entre élèves et enseignant, on cherche à contrôler et optimiser des trajectoires d'apprentissage individuelles et collectives, dans le contexte contraint de la classe.

Cette ambition de contrôle et d'optimisation du design, l'importance accordée à l'analyse a priori ne se retrouvaient pas dans l'expérimentation menée par ETL, ce qui expliquait en partie pourquoi nos collègues grecs se sentaient bien plus à l'aise. Certes cette équipe avait, elle aussi, dû trouver un contexte favorable à l'expérimentation de ce DDA, tout aussi distant du curriculum grec du lycée que du curriculum français, mais le terrain une fois trouvé, elle n'avait pas ressenti de difficulté à réaliser son projet. En accord avec sa perspective constructionniste, elle n'avait pas cherché à se fixer un objectif didactique précis. Ce qui était essentiel pour elle, était d'assurer que le scénario ménagerait un espace suffisant aux élèves pour leur permettre de développer une activité mathématique intéressante et en faire sens. Le scénario était vu comme un objet qui serait régulé « in itinere » en fonction des réactions et avancées des élèves, dans un contexte offrant par ailleurs une bien plus grande liberté que le système français et bien moins soumis à la pression temporelle (l'expérimentation a ainsi pu se développer sur une vingtaine d'heures). Mais, en dépit de ces différences fortes, comme nous l'écrivions dans le DEL18, lorsque l'on analyse les deux scénarios didactiques et les tâches proposées aux élèves, on perçoit dans les deux cas l'influence d'une vision socio-constructiviste de l'apprentissage résultant d'interactions avec un milieu adidactique approprié (même si dans le cas de la TSD ceci se conjugue avec une dimension essentielle d'acculturation). Et dans les deux cas, la dimension sociale de ces processus d'interaction est reconnue comme centrale. Un type de tâche comme "Guess my flight!" (Devine mon vol !), qui joue un rôle important dans la seconde phase du scénario élaboré par ETL, peut être ainsi vu comme support tout à fait pertinent pour une situation de communication, et la façon dont il est exploité, le rôle attribué à la programmation en langage LOGO, donnent à cette partie du scénario, effectivement, les caractéristiques d'une situation de communication efficace. Ce n'est bien sûr pas le langage qu'utilise ETL pour en parler mais il est intéressant de remarquer que ce type de situation est en fait une adaptation d'un type de situation (« Guess my rule ! ») déjà utilisé par l'équipe avec d'autres micromondes et joue sur des leviers familiers à ceux qui partagent la culture constructionniste associée au langage LOGO. Ce n'est pas un hasard si, alors même qu'ils offrent des possibilités de manipulation directe, les deux DDAs dont le développement a impliqué ETL incluent des possibilités de programmation, et si tous les scénarios produits par ETL exploitent ces possibilités et pas seulement l'action directe.

En conclusion

Le paysage qui résulte des analyses croisées brièvement évoquées ici, mais aussi des profils épistémologiques et plus globalement de l'ensemble du travail réalisé dans le cadre de ReMath est ainsi un paysage enrichi en termes de connexions relativement à la question des représentations dans les situations d'apprentissage. Certaines pre-existaient à ReMath mais le projet a permis de les faire sortir des équipes où elles s'étaient développées, et cette exportation les a consolidées et enrichies. Elle a aussi permis une meilleure intelligibilité de leur raison d'être. D'autres ont émergé au cours du projet et sont, à son issue, encore fragiles. Mais elles nous aident déjà, comme nous avons essayé de le montrer, à mieux comprendre à quels besoins répondent les constructions théoriques que nous développons les uns et les autres ou sur lesquelles nous nous appuyons quand nous cherchons à identifier les potentialités que les artefacts numériques offrent en termes de représentation pour

l'apprentissage des mathématiques et à les exploiter. Le travail mené nous aide aussi à comprendre comment ces constructions théoriques façonnent la conception des artefacts numériques et particulièrement les représentations qu'ils offrent, l'identification de leurs fonctionnalités didactiques et les scénarios d'usage qui en découlent, à comprendre la cohérence et le potentiel de choix didactiques très éloignés de ceux que nous aurions personnellement faits. En ce sens, le travail réalisé a permis au sein de ReMath sans aucun doute de progresser dans la visée de capitalisation des acquis de la recherche dans ce domaine, et il a aussi permis de développer des outils conceptuels et méthodologiques pour poursuivre le travail dans cette direction. Mais faire que ces avancées soient partagées et ces outils opérationnels au-delà du cercle ReMath et de son voisinage immédiat reste un défi. Il est clair que beaucoup de connaissances construites sont encore très contextualisées. Les connexions établies par exemple ont pris sens pour chacun de nous via différents épisodes, éléments, analyses du projet ReMath, via une histoire qu'il est impossible de partager. Peuvent-elles prendre sens pour ceux qui n'ont pas vécu cette aventure ou une expérience proche, à la lecture d'articles comme celui-ci ? Et quel degré de familiarité avec les nombreux cadres théoriques qui sont mobilisés dans les analyses cela nécessite-t-il ?

Bibliographie

- Artigue, M. (2002), Learning Mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectic between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7(3), 2002, p 245–274.
- Artigue M., Cerulli M., Haspekian M., Maracci M. (2009). Connecting and Integrating Theoretical Frames : The TELMA Contribution. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 14.3, 217-240.
- Arzarello, F. & Robutti, O. (2004). Approaching functions through motion experiments, *Educational Studies in Mathematics*, Special Issue CD Rom.
- Balacheff N. (1994). Didactique et intelligence artificielle. *Recherches en didactique des mathématiques* 14 (1/2), 9-42.
- Bottino, R., Earp, J., Olimpo G., Ott, M., Pozzi, F., Tavella, M., 2008, Supporting the Design of Pilot Learning Activities with the Pedagogical Plan Manager in Kendall, Samways (eds) *Learning to Live in the Knowledge Society*, Springer Boston
- Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics 1970–1990*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Cazes C., Marraci M., Marriotti M.A., Vandebrouck F. (2009) , Casyopée in the classroom: two different theory-driven pedagogical approaches, in *Conference of European society of Research in Mathematics Education (CERME 6)*, Lyon, France Janvier 2009.
- Cazes C., Marraci M., Marriotti M.A., Vandebrouck F. (2008) , La « cross expérimentation » Franco-italienne, in *Acte du Colloque approches plurielles en didactique des mathématiques*, Paris Septembre 2008.
- Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(1), 77–111.
- Comin, E. (2005). Variables et fonctions, du collège au lycée : méprise didactique ou quiproquo institutionnel, *Petit x*, 67, p 33-61.
- Coppé S., Dorier J.L., Yavuz I. (2007). De l'usage des tableaux de valeurs et des tableaux de variations dans l'enseignement de la notion de fonction en France en seconde, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 27 (2), p 151-186.
- Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil / objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 7.2, 5-31.

- Duval R. (1995), *Semiosis et Noesis*, Berne, Peter Lang , 1995.
- Edwards, L., Radford, L., Arzarello, F. (Eds.) (2009). Gestures and Multimodality in the Construction of Mathematical Meaning. *Educational Studies in Mathematics*. Special Issue. 70 (2).
- Falcade, R. (2006) *Théorie des Situations, médiation sémiotique et discussions collective, dans des séquences d'enseignement avec Cabri- Géomètre pour la construction des notions de fonction et graphe de fonction*. Grenoble: Université J. Fourier : Unpublished doctoral dissertation.
- Falcade R., Laborde C., Mariotti M. A. (2007), Approaching functions: Cabri tools as instruments of semiotic mediation. *Educational Studies in Mathematics*. 66.3, 317-333
- Hersant, M. & Perrin-Glorian, M.J. (2005). Characterization of an ordinary teaching practice with the help of the theory of didactic situations, *Educational Studies in Mathematics* 59, 113–151.
- Halliday M.A.K. (1978) *Language as Social Semiotic: The Social Interpretation of Language and Meaning*. London : Edward Arnold.
- Harel, G., & Papert, S. (Eds.). (1991). *Constructionism*. Norwood, NJ: Ablex.
- Herbst, P., Brach. C. (2006). Proving and 'doing proofs' in high school geometry classes: What is 'it' that is going on for students and how to they make sense of it? *Cognition and Instruction*, 24. 73-122.
- Haspekian, M. (2005). An "instrumental approach" to study the integration of a computer tool into mathematics teaching: the case of spreadsheets. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 10(2), 109-141.
- Hitt, F., Kieran, C. (2009) Constructing Knowledge Via a Peer Interaction in a CAS Environment with Tasks Designed from a Task–Technique–Theory Perspective, *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 14.2, 121- 152
- Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. In Lester, (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707-762). Greenwich, CT.
- Lagrange, J.-B. (2005) Curriculum, classroom practices and tool design in the learning of functions through technology-aided experimental approaches. *International Journal of Computers in Mathematics Learning* 10: 143–189.
- Lagrange, J.-B. (2000), 'L'intégration d'instruments informatiques dans l'enseignement : Une approche par les techniques', *Educational Studies in Mathematics*, 43, 1-30.
- Le Feuvre, B., Meyrier, X., Lagrange, J.B. (2010) Apprendre des notions mathématiques, géographiques et algorithmiques à l'aide d'un environnement de navigation 3D au-dessus de la Grèce. *MathémaTICE* <http://revue.sesamath.net/spip.php?rubrique65> (à paraître aussi dans *Repères IREM*)
- Morgan, C., Mariotti, M.A., Maffai, L. (2009) Representation in Computational Environments: Epistemological and Social Distance. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 14.3 241-263
- Prediger, S., Arzarello, F., Bosch, M., Lenfant, A. (Eds.) (2008). *Comparing, combining, coordinatins-networking strategies for connecting theoretical approaches*. *ZDM* 40(2).
- Prediger, S., Bikner-Ahsbahs, A., Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: first steps towards a conceptual framework. *ZDM* 40(2), 165-178.
- Rabardel P. (1995). *Les hommes et les technologies – Approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin, Paris.
- Radford, L. (2005). Kant, Piaget, and the Calculator. Rethinking the Schema from a Semiotic-Cultural Perspective. In Hoffmann, Lenhard, Seeger (Eds.), *Activity and Sign – Grounding Mathematics Education*. Festschrift for Michael Otte. Dordrecht: Kluwer.

Tall, D. (1996). Functions and calculus. In Bishop A.J. et al. (eds.) *International Handbook of Mathematics Education*, pp. 289-325

Séminaire national

des 26 et 27 mars 2010

Les textes sont dans l'ordre chronologique de présentation pendant le séminaire.

Argumentations autour du raisonnement et de la démonstration mathématique dans l'enseignement

André PRESSIAT
Laboratoire de didactique André REVUZ
IUFM Centre Val de Loire
Université d'Orléans
andre.pressiat@wanadoo.fr

Résumé

Les travaux de didactique des mathématiques sur le raisonnement et la démonstration montrent un foisonnement de cadres théoriques, forgés à l'aide d'emprunts à d'autres champs scientifiques, notamment dans leurs développements récents (du siècle dernier, mais surtout des cinquante dernières années, pour l'essentiel). Les travaux conduits autour de l'argumentation y figurent en bonne place, en permettant de questionner l'articulation entre argumentation et démonstration, notamment en termes de rupture ou de continuité. Parallèlement, face aux difficultés d'enseignement de la démonstration au collège, les instructions officielles ont choisi de "distinguer le raisonnement (constitué de la recherche, de la découverte et de la production d'une preuve) de la démonstration formalisée qui en est la forme aboutie afin de dégager comment on peut dans les classes favoriser le raisonnement [...]".

Les travaux qui viennent d'être évoqués, et qui pourraient être étendus aux autres disciplines scolaires, prennent place dans un environnement social et culturel où règne avec une efficacité renouvelée une rhétorique qui n'ose pas toujours dire son nom. Un récent ouvrage d'Angenot, sous-titré "Traité de rhétorique antilogique", montre que les outils de cette rhétorique sont parfois difficiles à distinguer de ceux utilisés dans les argumentations scientifiques ou même dans le raisonnement mathématique. Pour ce qui concerne les sciences, les travaux de I. Hacking sur les "styles de raisonnement scientifiques" dans son cours au Collège de France (2006) font apparaître plusieurs "styles" concernant les mathématiques, et fournissent une lecture nouvelle des travaux de Lakatos.

Comment donner une intelligibilité à l'ensemble de ces travaux à l'intérieur de la communauté de la didactique, mais également comment faire connaître à l'extérieur son positionnement par rapport à eux ? Les trois premières parties de l'exposé tenteront d'apporter quelques éléments de réponse et seront illustrées à l'aide d'une relecture de quelques travaux.

La dernière pointera des conditions qui se sont mises en place dans l'enseignement de la démonstration en France sans toujours être imposées par les instructions officielles, et qui sont souvent vues comme des contraintes. L'étude se focalisera sur les domaines de la géométrie au niveau du collège.

Mots clés : Démonstration, argumentation, rhétorique, logique, conditions et contraintes, besoins trophiques.

I Renouveau de la rhétorique et démonstration

Les travaux de Perelman

Dans l'article qu'il consacre à la "Nouvelle Rhétorique" dans l'Encyclopædia Universalis, Benoît Frydman la définit ainsi :

La Nouvelle rhétorique est un courant philosophique du 20^e siècle, parfois appelé aussi « école de Bruxelles », qui, sous la conduite de son fondateur Chaïm Perelman, a contribué à renouveler l'intérêt de la pensée contemporaine pour l'argumentation, en mettant en évidence le rôle central de celle-ci dans le traitement des questions pratiques.

Les questions pratiques visées concernent la vie des hommes et leurs actions, et relèvent de la morale, du droit ou de la politique. La Nouvelle rhétorique s'intéresse au raisonnement qui

guide la solution de telles questions : il existe bien une logique propre au raisonnement pratique, mais celle-ci ne se réduit pas à la logique formelle, telle qu'elle a été conçue d'après l'idéal des démonstrations mathématiques. Il faut réintégrer les questions pratiques au champ de la pensée, en ajoutant à la logique formelle, une logique informelle, celle de l'argumentation, dont les techniques ont été étudiées depuis l'Antiquité par la rhétorique. La Nouvelle rhétorique entend réhabiliter cette discipline, longtemps méprisée et discréditée par la philosophie. La rhétorique, telle que la conçoit Perelman à la suite d'Aristote, constitue la méthode de raisonnement adaptée à la solution des questions qui sont susceptibles de plusieurs réponses vraisemblables, entre lesquelles il faut pourtant trancher et prendre une décision. Elle procède par la confrontation des thèses opposées en vue de déterminer la meilleure solution. L'ouvrage de référence est le *Traité de l'argumentation* de Chaïm Perelman et Lucie Olbrechts-Tyteca (1958). L'article de Frydman se poursuit ainsi :

Après cet ouvrage fondateur, la Nouvelle rhétorique se tournera principalement vers le droit, et singulièrement vers le discours judiciaire, dans lequel elle découvrira un gisement particulièrement abondant de techniques argumentatives. Perelman, entouré de plusieurs philosophes du droit, mais surtout des plus grands juristes de son temps, se lance ainsi dans l'étude de la logique juridique, dont il va complètement renouveler les bases. Depuis les Lumières, la pensée moderne s'était attachée à réduire l'activité du juge à une simple mission d'exécution de la loi et le jugement à un acte de pure logique déductive, par lequel le juge applique mécaniquement le sens clair de la loi aux faits de la cause. La Nouvelle rhétorique montre que ce « syllogisme judiciaire » (qui est en réalité lui-même une figure de rhétorique, l'enthymème) occulte, plus qu'il ne décrit le raisonnement du magistrat. Celui-ci se construit pour l'essentiel en amont, dans la formulation des prémisses, lorsqu'il s'agit d'interpréter la loi et de qualifier les faits. C'est là que surgissent inmanquablement les controverses qui nourrissent les procès dont le juge doit décider l'issue. Tout jugement implique donc un choix entre plusieurs options de la solution juste. Pour la Nouvelle rhétorique, la jurisprudence deviendra, plus qu'un terrain privilégié d'investigation, un véritable modèle de pensée, que Perelman invite d'ailleurs les philosophes à substituer au paradigme mathématique qui les a tant fascinés depuis Platon. Perelman s'intéresse non pas tant au procès et aux plaidoiries des avocats (comme les traités rhétoriques de l'Antiquité), qu'au juge qui doit non seulement prendre une décision, mais motiver celle-ci, c'est-à-dire convaincre qu'elle est juste, en justifiant publiquement des bonnes raisons qui la sous-tendent.

Dans Perelman (1997), l'auteur reformule l'enjeu de ce dernier ouvrage, intitulé "L'empire rhétorique" (Quatrième de couverture) :

La rhétorique n'est pas la discipline qui s'occupe essentiellement des figures de rhétorique : celles-ci ne sont plus qu'un outil parmi d'autres pour persuader et convaincre un auditoire. Dans toute sa généralité, elle constitue une théorie de l'argumentation, qui se sert de raisonnements qu'Aristote qualifiait de dialectiques. En ce sens la rhétorique, qui englobe la dialectique des Anciens, est le pendant de la logique formelle, car c'est l'instrument indispensable à toute pensée qui ne se réduit pas à un calcul. Toute délibération, toute discussion, toute controverse, toute présentation d'idées nouvelles qui fait appel à la raison, est obligée d'y recourir. [...] L'étude des techniques d'argumentation, et de leurs présupposés, longtemps négligée par le rationalisme classique, d'inspiration mathématique, est présentée dans ses perspectives historiques et philosophiques. Résumant les thèses du *Traité de l'argumentation*, elle montre à la fois les raisons de la dégénérescence de la rhétorique, et les conditions qui contribuent à la renaissance d'une rhétorique renouée.

Il se fait plus mordant dans le dernier chapitre, précisément intitulé "L'empire rhétorique", sur la morale provisoire de Descartes, qui le conduit à respecter les règles et opinions dominantes, en se refusant à les modifier pour toute raison "non évidente", conformément à son souci d'évidence généralisée.

Paradoxalement, le rationalisme mathématique, allant de pair avec le rejet de toute opinion, donc de tout échange d'opinions, de tout recours à la dialectique et à la rhétorique, aboutit, en pratique, à l'immobilisme et au conformisme en droit, en morale, en politique et en religion.

Puis il met ce constat en rapport avec la question de l'enseignement des sciences et des mathématiques, tel qu'il le percevait à l'époque (1977) :

L'enseignement des sciences s'inspire jusqu'aujourd'hui de l'approche cartésienne. Dans les domaines qui échappent à la controverse, il n'est pas d'usage de se référer aux opinions de tel ou tel savant. Les thèses enseignées sont considérées comme vraies, ou comme admises par hypothèses, mais on n'éprouve guère le besoin de les justifier.

C'est ainsi que les axiomes, dans les sciences mathématiques, considérés d'abord comme des évidences, furent présentés par la suite comme des conventions de langage, sans que la façon d'exposer un système formel se ressente de ce changement de perspective, pourtant fondamental. En effet, s'il ne s'agit pas d'évidences, mais d'hypothèses ou de conventions, pourquoi choisir telle hypothèse ou telle convention plutôt que tel autre ? Ces questions sont considérées, par la plupart des mathématiciens, comme étrangères à leur discipline.

On voit donc la place que les mathématiques ont occupée dans l'élaboration par Perelman de la Nouvelle Rhétorique : celle d'un modèle de rationalité qu'il juge inadéquat pour les "questions pratiques", et auquel il veut substituer le paradigme de la jurisprudence comme modèle de pensée pour la philosophie, modèle qu'il retourne contre les façons (dominantes, de son point de vue) d'enseigner les mathématiques.

L'école suisse : Vignaux, Grize

L'argumentation devient alors un domaine d'étude à part entière, comme en témoigne le titre de l'ouvrage suivant écrit par deux logiciens suisses :

L'Argumentation. Essai d'une logique discursive (Droz, Genève - Paris, 1976) de Georges Vignaux. Dans la préface, Jean-Blaise Grize, écrit :

L'argumentation se rapproche bien davantage du théâtre que de la géométrie. Elle crée un monde plus proche de celui de Calderon que de celui d'Euclide.

Le concept fondamental de Vignaux est celui de théâtralité (Voir Tutescu 2005).

Tenir un discours devant quelqu'un, le faire pour intervenir sur son jugement et sur ses attitudes, bref pour le persuader ou, tout au moins pour le convaincre, c'est en effet lui proposer une représentation. Celle-ci doit, comme au théâtre, le toucher, l'émouvoir.

Il est surprenant que ces travaux n'aient guère transpiré dans le domaine de la didactique. Il n'en est pas de même pour l'ouvrage *The Uses of Argument* de Stephan Toulmin qui paraît également en 1958.

Les travaux de Toulmin

Cet ouvrage, contesté en Angleterre lors de sa publication, a reçu un accueil chaleureux aux Etats-Unis, au point qu'on le qualifie comme représentatif de la "rhétorique argumentative américaine" (Voir Tutescu).

St. E. TOULMIN rejette le syllogisme déductif comme modèle du raisonnement correct et poursuit l'œuvre des pragmatistes qui, après Peirce, interprètent les lois de la logique comme des guides pratiques de la recherche. Il favorise le modèle syllogistique de l'argumentation dans le trajet implicite de l'enthymème. (L'enthymème est un syllogisme tronqué, incomplet, dans lequel on sous-entend soit une prémisse, soit la conclusion).

Ce modèle a été beaucoup utilisé en didactique des mathématiques (par exemple, Pedemonte 2008 : voir le paragraphe III). En voici une présentation concise, tirée d'un article que l'on trouve en ligne (http://www.lsri.nottingham.ac.uk/mji/files/MQP9h_dist.pdf) :

Toulmin advocated an approach to analysing arguments that dramatically departed from existing approaches to formal logic. He was less concerned with the logical validity of an argument, and more worried about the semantic content and structure in which it fits. Indeed, this led to one contemporary describing *The Uses of Arguments* as 'Toulmin's anti-logic book' (a description reported by Toulmin). This manner of analysing argumentation has become known as 'informal logic' in order to emphasise its differences from formal logic.

Toulmin's scheme has six basic types of statement, each of which plays a different role in an argument. The *conclusion* (C) is the statement of which the arguer wishes to convince their audience. The *data* (D) is the foundations on which the argument is based, the relevant evidence for the claim. The *warrant* (W) justifies the connection between data and conclusion by, for example, appealing to a rule, a definition or by making an analogy. The warrant is supported by the *backing* (B) which presents further evidence. The *modal qualifier* (Q) qualifies the conclusion by expressing degrees of confidence; and the *rebuttal* (R) potentially refutes the conclusion by stating the conditions under which it would not hold. It should be noted that, in any given argument, not all of these roles will necessarily be explicitly verbalised.

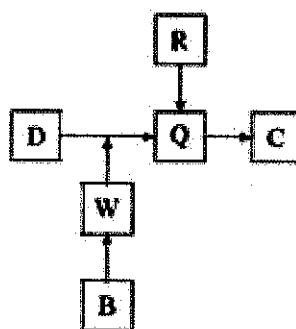


Figure 1

*Toulmin's model of a general argument. The argument would read
 "D, and since W (given B) we can Q conclude C, unless R".*

La volonté de prendre de la distance par rapport à la validité d'un point de vue formel ainsi que celle de valoriser les aspects sémantiques sont clairement formulées. Mais, comme le dit M. Meyer (2008, page 66), Toulmin "recherche une logique naturelle qui soit un calque de la logique formelle moyennant des qualifications qui la rendent aussi imparable qu'elle".

L'argumentation et les linguistes français

La conception des linguistes français Oswald DUCROT et J.-Cl. ANSCOMBRE fournit une acception *stricto sensu* de l'argumentation. L'argumentativité est - selon eux - un trait inhérent du langage.

Leurs travaux ont été utilisés par D. Lacombe et R. Duval en didactique des mathématiques.

L'École d'Amsterdam: F. H. van EEMEREN et R. GROOTENDORST

Frans H. van Eemeren et Rob Grootendorst (Travaux de 1984 à 1996) renouent avec l'ambition de séparer nettement rhétorique et argumentation (Voir Tutescu).

Ils proposent une position prescriptive fondée sur une approche quasi-logique débouchant sur un modèle normatif des actes de langage accomplis lors d'une discussion

critique. Pour ces deux auteurs hollandais, l'argumentation se réduirait à une théorie de l'enthymène, accompagnée, d'une part, d'un catalogue de sophismes à proscrire et, de l'autre, d'une mise à l'écart de l'*ethos* (présentation de soi) et du *pathos*.

La théorie générale de l'argumentation de Michel Meyer

Michel Meyer est professeur à l'Université Libre de Bruxelles. Dans *Principia Rhetorica* (2008), il propose une théorie générale de l'argumentation qui a l'ambition de tenir compte de toutes les approches existantes. Son ouvrage est décrit ainsi en quatrième de couverture :

La rhétorique connaît aujourd'hui un incroyable renouveau. De la séduction à la publicité, de la vie politique aux sciences humaines, elle se retrouve partout. Comment faire la synthèse de toutes ces orientations ? [...].

Le fondement adopté est le questionnement, car on discute de questions qui sont plus ou moins problématiques, comme on négocie des points de vue qui s'opposent, incarnent des alternatives entre lesquelles il va bien falloir choisir. Cette conception, qui systématise la force et l'impact du problème, est entièrement nouvelle en rhétorique. Ses hypothèses sont minimales, et sa fécondité vérifiée dans des publications savantes antérieures. Elle permet d'articuler aussi bien la théorie littéraire que l'argumentation utilisée dans la vie de tous les jours, au tribunal ou dans les médias. [...] Michel Meyer offre ainsi une synthèse inégalée sur la rhétorique, la première depuis celle de Perelman parue il y a maintenant un demi-siècle.

La mise en avant des questions se retrouve en didactique des mathématiques, notamment chez Chevallard. Le livre de Meyer est d'une grande richesse, qu'il est difficile de montrer ici. Il définit la rhétorique ainsi :

La rhétorique est la négociation de la distance entre des individus à propos d'une question donnée.

L'avantage d'une telle définition est de mettre sur un pied d'égalité le locuteur (*ethos*), son auditoire (*pathos*) et le langage (*logos*) par lesquels ils expriment leurs questions et leurs réponses. Par contre, le questionnement, la distance et la notion de négociation ne vont pas de soi. En les approfondissant, c'est toute la rhétorique, ses principes, son unité qui vont se déployer sous nos yeux.

Il met en évidence plusieurs lois d'unité de la rhétorique et de l'argumentation (loi d'unité du champ, loi de distance entre les individus).

La première est formalisée ainsi :

$$r_1 \rightarrow q_1 \cdot q_2$$

Quand on dit "Il fait froid" (r_1), ce dont il est question est bien sûr le temps qu'il fait (q_1), mais ce qui fait question est la réponse à apporter "Que faut-il faire ?" (q_2). La réponse de q_2 est r_2 ("Il faut mettre son manteau") et de là on déduit que dire r_1 signifie qu'on veut dire r_2 : $r_1 = r_2$. Mais on peut exprimer cela autrement et soutenir qu'il fait froid implique qu'il faille mettre son manteau, que c'est un argument, une raison pour agir de la sorte : $r_1 \rightarrow r_2$. Alors que la première interprétation $r_1 = r_2$ relève de la rhétorique comme procédé, la deuxième $r_1 \rightarrow r_2$ nous plonge dans l'argumentation : il faut découvrir r_2 parmi les nombreuses réponses qui découlent de r_1 ; inversement, pour arriver à faire conclure r_2 , l'orateur doit trouver r_1 comme argument. La question qui se pose avec une formule comme " r_1 " c'est " r_2 " est celle de savoir ce qui est escamoté dans le rapport entre r_1 et r_2 .

La rhétorique a pour fonction de rendre identique ce qui ne l'est pas littéralement, par économie. Le contexte de l'interlocution joue un rôle essentiel. Appelons "contexte" le savoir partagé dont pensent disposer les interlocuteurs sur la question en jeu. [...].

Le contexte est le savoir de ce savoir de l'autre.

La formulation de cette loi permet d'éclairer d'une lumière nouvelle le recours au "cours dialogué".

La deuxième est la loi de la distance entre les individus. Que signifie négocier cette distance ? C'est le fait, pour les individus, donc pour l'ethos et le pathos, de traiter leur différence au sujet d'une question qui les lie, un lien qui peut aller de la complicité à l'affrontement, de "résoudre" cette différence, voire leur différend. Cette négociation de la distance entre individus n'est pas sans rapport avec la négociation du contrat didactique entre un professeur et la classe. La loi de la distance entre individus dans la rhétorique telle qu'elle est définie par Meyer met en relation la variation ΔL du logos avec la distance entre les individus $\Delta(E, P)$, relation qu'il formule ainsi : $\Delta L = \Delta(E, P)$, en explicitant la signification de ce signe "=" : une équivalence du point de vue rhétorique. Le logos est mobilisé pour travailler sur la distance (la diminuer, la maintenir ou l'accroître) en utilisant des "figures de pensée" qui expriment la manière dont l'orateur exprime à l'auditoire ses réponses sur la distance qui les sépare. Les travaux de Meyer permettront sans doute de mieux comprendre comment les ressources rhétoriques des professeurs leur permettent de faire durer le contrat didactique et de comprendre pourquoi ce dernier se manifeste surtout par ses ruptures.

Travaux de synthèse sur l'argumentation : Christian Plantin

Christian Plantin les décrit ainsi sur son site personnel :

Ma conception de l'argumentation, formée par les travaux de Ducrot sur l'argumentation dans la langue, a été réorientée vers le discours, dans les années 80, par les travaux de Perelman, et les travaux anglo-saxons, notamment Hamblin.

J'ai bénéficié du dynamisme scientifique et institutionnel de van Eemeren & Grootendorst depuis 86. Ma vision du dialogue a pris une dimension nouvelle avec mon intégration à l'UMR GRIC, "Groupe de recherche sur les interactions conversationnelles", puis ICAR (Interactions, Corpus, Apprentissages, Représentations). Cette orientation vers le dialogue et l'interaction a été déterminante pour la suite de mes travaux sur l'argumentation. Ces travaux ont pris en compte, dès le départ, l'ensemble des recherches internationales sur ce thème. J'ai dû effectuer un travail important sur différentes théories afin d'évaluer leurs spécificités, leurs compatibilités, et d'articuler leurs apports. Cela s'est concrétisé par la création d'un modèle dialogal de l'argumentation, dont la validité est maintenant éprouvée sur des données très diverses orales ou écrites.

Les travaux de Plantin ont été utilisés en didactique des sciences :

Buty C. (dir.), Plantin C. (dir.), Muller Mirza N. (Préf), 2009, *Argumenter en classe de sciences*, Collection Didactiques, apprentissages, enseignements, INRP.

Ils ont également été utilisés dans certains travaux de didactique des mathématiques (par exemple, Anne-Cécile Mathé, *Elaboration d'une référence partagée : un exemple en géométrie des solides en classe de CM1-CM2*, dans Guerrier, Héraud, Tisseron (2006).

Plantin précise son point de vue sur l'argumentation et la démonstration :

J'ai adopté une perspective continuiste argumentation / démonstration, qui permet de dépasser l'opposition de l'argumentation à la démonstration, de l'argument à la preuve, dans laquelle se complaisent les théories courantes de l'argumentation, à l'exception de celle de Grize. L'accent est ainsi mis sur le rôle de l'argumentation dans la construction de la preuve et de la démonstration. En bref, on dira que, pour paraphraser Quine, la démonstration travaille avec le langage ordinaire et les processus argumentatifs courants jusqu'au moment où elle a un intérêt décisif à les abandonner. Les contextes d'apprentissage des sciences apparaissent comme des situations privilégiées pour l'étude de ce processus.

On rapproche donc la démonstration, monologale dans son produit mais dialogale dans ses processus et l'argumentation, processus fondamentalement dialogal. La démonstration est construite argumentativement, par une série de micro-ruptures, se situant à des niveaux différents, par exemple : amélioration des définitions des termes, objets, règles et modalités référentielles ; expulsion des redondances, et des perceptions

non pertinentes ; éliminations de la subjectivité et de la multiplicité des voix ; remplacement du langage naturel par une langue formelle faisant appel au calcul.

Les travaux de synthèse d'Angenot

Marc Angenot a fait ses études à l'université libre de Bruxelles où il a été l'élève de Perelman. En 1985, il a écrit "La critique de la raison sémiotique", ouvrage qui a été traduit en anglais, et qui confronte les théories sémiotiques de Charles S. Pierce et d'Umberto Eco, qu'il juge toutes deux "oubliées du fait social". Pour Angenot, la rhétorique de l'argumentation ne devrait être qu'une composante d'une discipline émergente à laquelle il a consacré son énergie et sa créativité depuis les années 1980 : l'analyse du discours. Il occupe la chaire d'étude du discours social à l'Université Mc Gill à Montréal. Dans un ouvrage récent (*Dialogue de sourds, Traité de rhétorique antilogique*, Mille et une nuits, 2008), il éclaire son ambitieux projet :

J'ai voulu montrer que la question des divergences de logiques et de coupures argumentatives se pose constamment dans les analyses concrètes et qu'il fallait la prendre globalement, que les analyses partielles et les concepts disponibles dans la tradition rhétorique restreinte sont à la fois peu opératoires, contradictoires entre eux et de facture archaïque. [...] Ma proposition a été de renverser la démarche heuristique un peu routinière des études rhétoriques, des études sur la doxa, les croyances et les opinions publiques. [...] Il appartient à la rhétorique d'objectiver et interpréter les hétérogénéités "mentalitaires" et les dialogues de sourds constatés et de classer les logiques divergentes qui sous-tendent les ainsi nommées idéologies. Les raisonnements et plus largement les façons de schématiser le monde en discours sont des choses qui peuvent s'observer dans leurs origines, leurs récurrences, leurs dominances et leurs efficacités. [...] Ces raisonnements et ces récits de soi et du monde intègrent indissolublement des expériences, des souffrances et des espérances, des intérêts – y compris des intérêts désintéressés.

Le lecteur aura compris que son projet concerne peu les sciences dures (il admet la transcendance de la raison pure, mathématique et logique, mais pense que celle-ci n'éclaire pas la raison communicationnelle). En revanche, il défend l'idée qu'il n'existe pas de conception stable et unifiée de la raison comme en témoignent les débats des logiciens, des philosophes et des épistémologues, et précise ainsi son objet (p. 418-419) :

Il n'existe pas de théorie de l'argumentation qui puisse subsister isolément, dans une autonomie heuristique absolue. [...] Pas de rhétorique ni de dialectique sans topique, c'est-à-dire en termes modernes sans histoire du discours social, de la production historico-sociale du probable, de l'opposable et du vraisemblable. Pas de rhétorique ni de dialectique séparables d'une narratologie et d'une sémiologie du descriptif et plus généralement des schématisations qui sous-tendent le discours et que le discours manifeste en énoncés. C'est dans la co-occurrence du descriptif, du narratif et de l'argumentatif que s'enclenchent les mécanismes de déduction et d'induction mais aussi de l'abduction à l'origine de tout processus intellectuel puisqu'il s'agit de "cadrer" des faits hétérogènes en une intelligibilité d'ordre nomothétique, paradigmatique ou séquentielle. Enfin, la dialectique (au sens d'Aristote) est dialogique : l'énonciateur se construit un destinataire, mais aussi des adversaires, des témoins, des autorités, des objecteurs et des interlocuteurs. Tout débat d'idées suppose non un espace vide où construire une démonstration, mais l'intervention dans un discours social saturé, cacophonique, plein d'idées à la mode, de préjugés, de platitudes et de paradoxes, où tous les arguments possibles sont déjà utilisés, marqués, interférés et parasités.

Notre attention se portera sur les deux premiers chapitres de son ouvrage, respectivement intitulés "L'art d'argumenter, des sophistes aux post-modernes : vingt-cinq siècles de disputes" et "Règles du débat et de l'argumentation".

Pour Angenot, il existe un abîme entre la raison (faculté humaine homogène postulée) et l'ensemble des faits nommés *raisonnement*, et une autre discordance à explorer entre *raisonnement* et *argumentation*.

Rapports entre raisonnement et raison

Il définit comme raisonnement *toute inférence* : non seulement le syllogisme, mais l'induction, le raisonnement conditionnel, l'hypothétique, l'abduction, le contrefactuel, le raisonnement par analogie. Il considère que le raisonnement peut désigner aussi bien l'acte de pensée que son expression dans le discours.

Les définitions courantes données pour le raisonnement : "opération mentale par laquelle, de jugements donnés, on tire un jugement nouveau", et en particulier le modèle scolaire : proposition admise transformation conclusion nouvelle", cachent selon lui

« le fait que le raisonnement humain, in petto ou communiqué en paroles, n'a ni fin ni cesse, car les raisonnements s'enchaînent à de nouveaux raisonnements, s'étayent les uns les autres et ont toujours besoin pour se valider de raisons additionnelles ».

« Raisonner, argumenter, ne revient donc pas à être raisonnable ni se conformer à la raison : [...] il n'est pour s'en convaincre que de rappeler qu'il n'est rien de plus ratiocineur, de plus abondant producteur de raisonnements que les esprits chimériques, prophétiques, quérulents et suspicieux ».

« Le raisonnement, parce qu'il consiste à connecter le constaté empirique, le notionnel et le taxinomique, le virtuel, l'axiologique, le conjectural, le contrefactuel, l'imaginaire, permet non d'être nécessairement "raisonnable", mais permet paradoxalement de tourner le dos à l'empirie, de la dénier, de la sophistiquer ou de lui substituer en partie un autre monde, religieux, idéologique, autistique. [...] Le talent pour raisonner et la bonne volonté ne garantissent pas qu'on restera dans les limites de la simple raison, au contraire ».

« Raisonner, c'est, au plus élémentaire de ses opérations de base, *distinguer* et *identifier* et rien, ni dans le langage ni dans le rapport de l'intelligence au monde, n'interdit clairement de créer des distinctions déraisonnables et des amalgames fallacieux. ».

Rapports entre raisonnement et argumentation

Angenot insiste sur la continuité entre les deux, sur le partage des mêmes sortes de questions.

« Même dans le "for intérieur", on peut soutenir que l'acte de raisonner est *transsubjectif*. [...]. Qui raisonne "dans sa tête" le fait pour un auditoire virtuel. Argumenter est au fond premier. »

« Cependant, la rhétorique a pour objet propre le processus de communication dans lequel le raisonnement (ou ce qui est donné pour tel) est utilisé pour influencer les autres. Le discours argumentatif comporte en règle générale une thèse accompagnée de propositions destinées à la soutenir, à "augmenter sa probabilité" ou à réfuter des objections. [Cette thèse] doit se rendre publique pour que le sujet soit tenu de la "défendre". [...] Car d'autres peuvent l'"attaquer" ou simplement la tenir à distance, lui refuser leur assentiment et alors, le discoureur doit produire encore du discours pour en persuader. Raisonner en public, à l'adresse d'un auditoire, c'est tenir compte de ce que le public est prêt à admettre et ne peut se ramener à "penser tout haut" au risque de perdre son public et l'indisposer. ».

Angenot note qu'il est douteux que les argumentations qui abondent dans ce monde persuadent et ne prétendent qu'à ce but :

« Au cours d'une vie, rares sont les moments où l'on se laisse convaincre et où l'on parvient à emporter l'adhésion de notre interlocuteur, préalablement attaché à une opinion autre que la nôtre. ».

Il souligne que le sens du mot *persuasion* reste ambigu. Il critique la distinction établie par Chaïm Perelman, qui était un philosophe du droit, entre "persuader" et "convaincre" : alors que "convaincre" ne se fait que par le recours aux seuls arguments rationnels, "persuader" s'autorise les figures et toutes les ressources de l'éloquence.

« "Persuader" et "convaincre" ne sont que deux pôles abstraits entre lesquels tous les degrés de modulation existent : convaincre intimement ou persuader "en principe", faire admettre la plausibilité, faire prendre en considération, ébranler les certitudes, "faire voir" un aspect des choses ».

« Persuader psychologiquement ou convaincre rationnellement, cette alternative est à la fois forcée et non arbitraire. Elle traverse cependant de son soupçon toute l'histoire de la rhétorique et lui est consubstantielle. ».

« Persuader, au gré des psychosociologues, c'est amener quelqu'un par quelque moyen que ce soit à faire quelque chose : acheter un gadget, adopter un mot d'ordre politique, signer une pétition, tester un produit ... Si le quidam est conduit à faire ce qu'on attend de lui et qu'il n'aurait pas fait spontanément, on se demande quels facteurs l'ont "persuadé". Certes, "persuasion" se distingue toujours dans ce contexte de : coercition, avantages matériels offerts, pression du groupe. Elle suppose toujours le recours aux seuls moyens langagiers ou sémiotiques. *Mais elle n'évoque pas du tout l'idée d'argumentation.* »

Tous les professionnels de la persuasion, communicateurs, agents politiques, publicitaires, prônent et utilisent exclusivement des moyens extra-rationnels (suggestion, répétition, martèlement ...) ou pré-rationnels (images émotives, etc.), ils n'ont jamais recours à des arguments en forme et les déconseillent formellement à leurs clients.

« La persuasion politique [diffère] toutefois du publicitaire : dans le monde démocratique, une apparence ou un quantum de rationalité est nécessaire. Il faut fournir au citoyen au moins quelque chose comme des projets et des arguments qu'il pourra évaluer, répéter, endosser et tester. Mais les spécialistes ne comptent pas sur ces éléments rationnels mais sur les slogans, les mythes, les "images" et leur synergie. »

« Plusieurs psychosociologues montrent au contraire que de bonnes raisons sont utiles à procurer aux gens, mais qu'elles doivent l'être *a posteriori*. Il faut d'abord faire adopter à la "cible" une attitude par des moyens subliminaux où la raison n'a aucune part, ensuite procurer aux gens des raisons, des raisons de se sentir bien – et finalement leur faire croire que leur attitude tient à ces raisons ultérieures. »

Les règles du débat

Nous n'en donnerons ici que la liste : reconnaissance de l'égalité des participants ; accord sur l'"existence" du sujet du débat ; mesure de l'écart entre les débatteurs ; disposition à argumenter ; disposition à changer d'avis ; interdiction de sortir de l'argumentatif ; règle du plus exigeant ; règles pratiques (par exemple, je ne dois énoncer et prouver que ce qui est non connu de tous, pertinent et non réputé évident) ; règles relatives à la conclusion du débat ; règle ultime : l'exigence et le postulat de sincérité.

Discussion sur la validité des sophismes

Angenot dresse un inventaire des différents sophismes :

- Homonymies fallacieuses, polysémies, variations sémantiques, changements d'extension et de compréhension logiques
- Négligence de l'objection principale : substitution commode à ce qui est argumenté par l'autre camp d'un "homme de paille" : une thèse différente, caricaturale, ridicule et plus facile à abattre
- Démonstration correcte, mais qui ne vaut que d'un certain point de vue, généralisation abusive donc
- Pétition de principe : s'appuyer sur ce qui est à démontrer, supposer pour vrai ce qui est en question
- L'argument est valide – simplement il ne prouve pas ce qui est en question, ni n'est susceptible d'augmenter l'assentiment à la thèse soutenue ; tout au plus constitue-t-il un indice indirect
- Sophisme qui, alléguant des conséquences fâcheuses, apparaît comme une réfutation décisive de ladite théorie
- L'argument ad personam : sophismes prétendus qui tiennent à la personne de l'argumentateur ou en tirent un indice soupçonneux, sinon même une réfutation directe de ses idées
- L'argument ad hominem : démarche ou stratégie qui consiste à se placer "sur le terrain de l'adversaire", de ses intérêts et de ses visées, sans avoir à les partager ni à feindre de le faire, pour le convaincre de l'échec de sa démarche
- L'argument d'autorité
- Le sophisme de l'approbateur : "Nullement antisémite lui-même, monsieur X ne donne pas moins dans son livre des munitions aux pires des antisémites" • ...

En conclusion, il juge qu'aucun n'est constamment mauvais, qu'ils sont tous soutenus par du pathos et qu'en tous cas, on est dans une zone grise.

Normes de l'argumentation

Là encore, nous n'en donnons que la liste :

Validité : produire des arguments rationnels ; règle de pertinence ; règle de réfutabilité ; règle de cohérence et de non-contradiction.

Discussion sur la validité des types d'arguments autres que les syllogismes

La liste des questions abordées est éloquente :

Problèmes relatifs à l'induction généralisante ; le raisonnement explicatif-causal ; problèmes relatifs au raisonnement par alternative et dilemme (Si je ne parviens pas à démontrer A par voie directe, je pose qu'on a ou bien A ou bien B, sans tierce possibilité ; or il est aisé de montrer que B est impossible, absurde, résolument mauvais, donc A.). ; Le raisonnement apagogique ou par l'absurde (Variante du raisonnement par alternative : ou A ou non A. Or A est absurde, intolérable, ... donc nonA.) ; le raisonnement abductif ou inférence à la meilleure explication (Que dois-je faire face à un ensemble de phénomènes divers, inexpliqués et concomitants ? Inventer une thèse qui, si elle était vraie, rendrait raison des phénomènes considérés.) ; le raisonnement probabiliste, prévisionnel et conjectural ; les raisonnements contrefactuels (les contrefactuels sont des conditionnels contraires aux faits. Si Kennedy avait survécu à l'attentat de Dallas, ...) ; le raisonnement par analogie ; les raisonnements axiologiques (Le raisonnement axiologique est la création d'une connexion entre le réel et le virtuel-idéal. Axiologiser consiste à coller sur les données empiriques des signes transcendants : juste, injuste, beau, noble, vrai, égalitaire ...).

Après avoir élargi la définition d'un raisonnement, et reformulé en conséquence les relations entre raisonnement et argumentation, Angenot montre que l'argumentation fait l'objet de règles et de normes que l'on peut expliciter, que les sophismes sont situés dans une zone grise, et tout en dressant une liste des arguments qui ne sont pas des syllogismes, étudie les problèmes que posent l'emploi de tels arguments. Il décrit ainsi un paysage complexe mais relativement structuré, peu connu et peu employé dans les travaux en didactique, sauf en ce

qui concerne les travaux de Peirce, qu'il met particulièrement en valeur, mais dans un cadre beaucoup plus vaste.

Cet emploi des travaux de Peirce est un point commun entre Angenot et Hacking. Mais ce dernier focalise son attention, contrairement au premier, sur les sciences dures, et cherche à décrire les différents raisonnements qui y sont pratiqués. Ses travaux à ce sujet concernent ce qu'il appelle les styles de raisonnement scientifiques. Ils sont disponibles en ligne sur le site du Collège de France (Voir l'adresse en bibliographie).

II Les styles de raisonnement scientifiques (I. Hacking)

La locution "style de raisonnement scientifique" est adaptée de l'historien des sciences A. C. Crombie. Selon lui :

« Nous pourrions distinguer dans le mouvement scientifique classique six styles de pensée ou méthodes d'enquête et de démonstration scientifique. Trois styles ou méthodes ont été développées dans l'étude des régularités individuelles et trois autres dans celles des régularités de population ».

Voici sa liste, dans ses propres termes : la méthode par postulats et dérivation des conséquences (l'établissement de postulats simples) en mathématiques ; l'exploration et la mesure expérimentale de relations observables plus complexes ; la construction hypothétique de modèles analogiques ; la mise en ordre du divers par la comparaison et la taxonomie ; l'analyse statistique des régularités dans les populations et le calcul des probabilités ; la dérivation historique du développement génétique.

Crombie les appelle des "styles de pensée scientifique dans la tradition européenne", et c'est le titre qu'il a donné à un ouvrage qui en fait l'étude (1994). C'est une œuvre en trois tomes et 2 456 pages, dont le sous titre est : L'histoire du raisonnement et de l'explication, particulièrement dans les sciences et les arts mathématiques et biomédicaux. Hacking garde la dénomination de Crombie, mais modifie leurs noms :

Les mathématiques (1), Le style géométrique (1a) Le style combinatoire (1b).

Le style du laboratoire (des instruments, de la création des phénomènes, de la mesure). (2)

Le style galiléen (de la modélisation hypothétique). (3)

Le style taxinomique. (4)

(5a) Le style des probabilités (5b) Le style statistique.

Le style "historico-génétique". (6)

Ce qu'on appelle "La méthode scientifique" n'est que la combinaison fructueuse des styles (2) et (3). On dit trop souvent que la science se résume essentiellement au laboratoire et aux modèles théoriques. L'un des mérites des catégories de Crombie, selon Hacking, est que les mathématiques pures, la statistique et la taxinomie figurent parmi les sciences.

Les citations suivantes mettent en évidence les points forts du traitement par Hacking de la démonstration mathématique.

Quand il est question de « dire la vérité », cela suppose qu'il y ait des gens qui parlent. La véracité a donc deux aspects presque indépendants. Premièrement, la véracité requiert que la personne qui parle donne des informations exactes – entièrement conformes à la réalité. Deuxièmement, qu'il soit sincère, qu'il dise ce qu'il croit être vrai.

Il est évident que la démonstration introduit de nouveaux critères d'exactitude. Mais ce qui est plus intéressant, c'est qu'elle *diminue la pression sur la sincérité*. En effet, les preuves sont publiques, elles sont accessibles à tous ceux qui peuvent les comprendre.

L'une des conditions de la véracité, la sincérité, est remplacée par l'évidence, l'évidence en-soi. Je ne pense pas ici à l'évidence des postulats, mais à *l'évidence des démonstrations qui sont synoptiques*.

Notons que, par contraste avec les démonstrations synoptiques, *les calculs longs n'ont pas cette sorte d'évidence en-soi*. Il faut répéter le calcul, ou utiliser deux personnes pour faire le même calcul, ou utiliser des astuces comme la comptabilité en partie double, brillante invention du quinzième siècle.

Digression : la logique

Un paragraphe remarquable de son cours au Collège de France d'où sont tirées les citations qui précèdent concerne la logique. Il l'intitule "digression", pour justifier la place qu'il assigne à la logique dans sa théorie des styles de raisonnement scientifiques, en suivant Peirce.

Peirce, comme Kant et quelques autres philosophes avant lui, est un fétichiste de la symétrie. [...] Il pense que la logique est divisée en trois parties : la déduction, l'induction, et la méthode qui utilise les hypothèses, c'est-à-dire la méthode de l'inférence à la meilleure explication. Pour rendre cette triade symétrique, il appelle le troisième élément "abduction". Le mot vient de la logique scolastique, où il a une signification différente : il désigne un syllogisme dont la conclusion n'est pas certaine. Bon : la conclusion d'une inférence à la meilleure explication n'est pas certaine, et le mot "abduction" complète l'assonance dans ce vers logique rigoureusement triadique : Déduction, induction, abduction. Les trois parties de la logique, selon Peirce.

La logique, dans le sens très généreux de Peirce, *est antérieure à tous les styles de pensée scientifique* dans la tradition européenne. Pas besoin d'un Thalès pour faire la première déduction.

La pratique de l'induction – prévoir le futur sur la base du passé, apprendre par l'expérience – est une condition de survie pour une espèce.

Il en va de même pour l'abduction. Je soupçonne que la première fois que quelqu'un est parvenu à exprimer de façon cohérente sa surprise devant une chose inhabituelle, il a aussitôt produit une inférence à la meilleure explication.

Tout en prenant quelque distance avec la division en trois parties faite par Peirce, Hacking l'entérine tout en la banalisant. La raison expliquant cette attitude peut être trouvée dans le paragraphe qu'il consacre au livre de Lakatos "Preuves et réfutations", qui est reproduit ci-dessous.

Preuves et réfutations : le dialogue

Le livre de Lakatos consiste en un dialogue dans une classe de mathématiques entre un professeur et ses élèves, qui sont en train d'apprendre un théorème de géométrie. On trouve en note des références à l'histoire qui correspondent aux conversations dans la classe. Chaque élève joue le rôle d'un partisan de telle ou telle philosophie des mathématiques. Chaque philosophie a des réactions tout à fait différentes aux preuves et aux réfutations qui émergent dans la discussion.

Preuves et réfutations est un formidable projecteur qui éclaire certains aspects du raisonnement mathématique tel qu'il a lieu dans la réalité, c'est-à-dire les mathématiques en action, où la déduction n'est qu'une partie d'une mosaïque beaucoup plus vaste. Aujourd'hui je ne retiendrai de Lakatos que quelques éléments extraits de toute une batterie d'idées surprenantes ou iconoclastes. Par exemple, la tradition dit qu'une

déduction n'ajoute rien aux prémisses. Dans le dialogue de Lakatos : « Pensez-vous réellement que la déduction accroisse le contenu ? » – « Bien sûr ! N'est-ce pas là le miracle de l'expérience mentale déductive ? ... Si une déduction n'accroissait pas le contenu, je ne l'appellerais pas déduction mais "vérification". ». Lakatos cite Henri Poincaré comme l'origine de cet usage du mot.

Il est fascinant de voir comment, au cours de l'exposé de Lakatos, de nouveaux énoncés mathématiques (une suite de mots qui n'avaient jamais été assemblés auparavant) prennent effectivement naissance sous nos yeux. Leur apparition dans le dialogue correspond à l'émergence des idées nouvelles dans l'histoire du théorème d'Euler.

Le groupe décrit par Lakatos, dans la salle de classe, se met à essayer de prouver la conjecture. Au début, cela se fait dans un langage très simple, puis, à mesure que le raisonnement avance, on arrive à des néologismes. [Par exemple], nous avons l'élève cartésien-euclidien qui parle avec ces nouvelles définitions parfaitement claires. Lakatos dit, avec ironie, « Epsilon est probablement le premier disciple d'Euclide à avoir jamais apprécié la valeur heuristique du processus de preuve. »

Parmi le professeur et ses élèves, il y a ceux qui disent qu'on a établi des conventions, et ceux qui disent que non. La thèse des conventionnalistes porte non seulement sur les termes, mais aussi sur de nouvelles connexions conceptuelles. Mais au niveau le plus superficiel, une chose est claire. Il y a des énoncés nouveaux, des énoncés qui n'existaient pas avant un certain point de l'histoire de la démonstration, des énoncés qui étaient impensés et qui auraient été impensables sans l'idée de la preuve. Mais qu'en est-il des conditions de vérité ?

Le théorème, l'énoncé qui figure à la fin de la dialectique des preuves et réfutations, est, au sens propre, sinon « analytique », du moins « rendu analytique » ou « analytifié ». « Vrai en vertu de la signification des mots », une signification créée au cours de la construction de la preuve et de la fabrication des définitions et des lemmes. La preuve, pour l'instant, en tout cas, fournit les critères définissant la vérité de la proposition.

Preuves et Réfutations est un livre foisonnant, mais j'y ai trouvé (ou inventé ?) un thème que les lecteurs de Lakatos ont tendance à ignorer. Dans cette lecture de Lakatos, la preuve fournit de nouveaux critères définissant ce qui est la vérité ! À l'issue de la dialectique de *Preuves et Réfutations*, dont le point culminant est un théorème démontré, le sens des mots dans le théorème a été raffiné à un point tel que le théorème est vrai, en effet, en vertu de ce que signifient les mots.

Et voilà une explication étonnante de la stabilité du style de pensée mathématique.

Le positivisme logique soutenait que toute vérité mathématique est vraie en vertu de la signification des mots employés pour l'exprimer. Par un retournement brusque et inattendu, la philosophie de Lakatos donne soudain un sens à cette thèse peu plausible.

On trouve chez Euclide des traces de ce processus de preuve, même si elles sont discrètes. Dans les définitions des figures quadrilatères (définition 22), Euclide introduit le rhomboïde (figure quadrilatère qui a les côtés et les angles opposés égaux les uns aux autres, mais qui n'est ni équilatérale ni rectangle), et ce mot n'est plus utilisé par la suite. Comme les droites parallèles n'ont pas encore été définies, Euclide n'introduit pas le parallélogramme. Il apparaît pour la première fois dans l'énoncé de la proposition 34. En fait, la proposition 33 donne un moyen de construire un tel quadrilatère, ce qui assure son existence. Dans cette proposition, le terme "parallélogramme" n'est pas employé, mais une fois cette construction établie, Euclide peut l'introduire dès le début de la proposition 34, car il est "transparent". D'ailleurs, la démonstration de la proposition 34 donne implicitement la définition d'un parallélogramme (dans le quadrilatère ACDB, les côtés AB et CD d'une part, AC et BD de l'autre sont parallèles). Le théorème, ici la proposition 34, est « Vrai en vertu de la signification des mots », une signification créée au cours de la construction de la preuve et de la fabrication des

définitions (qui est ici implicite) et des lemmes (ici, la proposition 33). On est loin ici des définitions des quadrilatères données a priori, sans justification du choix de ces définitions.

III. Références de chercheurs en didactique

Du côté de la nouvelle rhétorique

Dans le I, les références empruntées par des chercheurs en didactique aux auteurs appartenant au domaine de la nouvelle rhétorique ont été indiquées lors de la présentation des travaux de ces auteurs. Le travail en sens inverse consistant à prendre comme corpus les recherches en didactique et à rechercher systématiquement les références empruntées à ce domaine n'a pas été fait à l'occasion de cette présentation.

Balacheff (1999) dans la Lettre de la Preuve lance un débat autour de l'argumentation, en demandant si elle est un obstacle. Il évoque les travaux de Perelman, Toulmin et Ducrot. Il résume en une formule la place qu'il croit possible pour l'argumentation en mathématiques :

L'argumentation est à la conjecture ce que la démonstration est au théorème.

Il conclut cependant que l'argumentation est un obstacle épistémologique à l'apprentissage de la démonstration, et pense que "ce serait une erreur épistémologique que de laisser croire aux élèves, par quelque effet Jourdain, qu'ils seraient capables de production de preuves mathématiques quand ils n'auraient qu'argumenté". Il ajoute que "le point fort qui sépare l'argumentation et la démonstration est la nécessité pour cette dernière d'exister relativement à une axiomatique explicite", et met en cause l'inquiétude ou l'opposition qui se manifeste à l'égard de la mise en jeu d'une telle axiomatique.

Raymond Duval, dans son article de Petit x n°31, intitulé "Argumenter, démontrer, expliquer : continuité ou rupture cognitive ?" fait référence à Ducrot, Grize, Perleman et Toulmin. Il convoque également Piaget et des auteurs d'autres champs (Pragmatique et Psychologie du Raisonnement).

Un paradoxe ?

Alors que la "nouvelle rhétorique" s'est construite pour se démarquer de la logique mathématique formelle, les chercheurs en didactique vont y chercher des outils pour analyser et interpréter le passage de l'argumentation à la démonstration. Le constat d'insatisfaction qui en résulte conduit certains à amender ou compléter leurs modèles (Voir l'exemple 2 ci-dessous).

Du côté des mathématiciens, logiciens, épistémologues et philosophes

D'autres préfèrent partir des travaux des mathématiciens mais également des logiciens pour éclaircir aux yeux des professeurs l'emploi qu'ils pourraient faire de travaux de logiciens (Tarski, Wittgenstein, Quine). On pense ici aux travaux de Viviane Durand-Guerrier dont (2006a) donne une idée d'ensemble, et qu'elle a eu l'occasion de présenter dans ce séminaire depuis plusieurs années. La thèse de V. Deloustal-Jorrand (2004) "L'implication mathématique : étude épistémologique et didactique" s'inscrit dans une problématique voisine.

On a vu précédemment l'emploi que les travaux de Charles Saunders Peirce et Imre Lakatos ont pu susciter chez Hacking. Les travaux de Georges Polya, et notamment son interprétation de l'abduction de Peirce sur le raisonnement plausible sont utilisés dans l'exemple 2 ci-dessous, ainsi que dans d'autres travaux de didactique (Thèse de Cabassut).

L'article de William P. Thurston (1994) "On proof and progress in mathematics" est souvent cité.

Paolo Boero a récemment utilisé les travaux d'Habermas, que Meyer analyse dans son ouvrage de 2008 après avoir traité ceux de Perelman, Toulmin et Burke.

Il existe enfin un courant de recherche, la logique dialogique, dont l'un des acteurs, Laurent Keiff, dans la présentation qu'il fait de son domaine dans l'article qu'il a rédigé pour la Stanford Encyclopedia of Philosophy, déclare qu'il est le résultat d'une longue tradition, parallèle à celle qui étudie les dialogues concrets comme ceux qui apparaissent dans les langages naturels, et en particulier les régularités logiques qui y apparaissent. Il cite comme représentants de cette tradition parallèle la nouvelle rhétorique de Perelman, la théorie de l'argumentation de Toulmin, et d'autres auteurs anglo-saxons. La logique dialogique également appelée "sémantique des jeux" s'est constituée à partir des travaux de Paul Lorenzen et Lorenz, qui ont proposé le concept de dialogue pour définir la notion de proposition d'une manière constructive :

Fully spelled out it means that for an entity to be a proposition there must exist a dialogue game associated with this entity, i.e., the proposition A , such that an individual play of the game where A occupies the initial position, i.e., a dialogue $D(A)$ about A , reaches a final position with either win or loss after a finite number of moves according to definite rules: the dialogue game is defined as a finitary open two-person zero-sum game. (Lorenz).

L'approche dialogique fournit une sémantique pour la logique classique et pour la logique intuitionniste. Dans Fontaine & Redmond (2008), le lecteur trouvera une introduction à la logique dialogique propositionnelle (LP), du premier ordre (LPO) et modale (LM).

Il y a eu des tentatives pour réunir les deux traditions de la logique du dialogue, par exemple, l'article de Prakken (2005), intitulé "Coherence and Flexibility in Dialogue Games for Argumentation" disponible à l'adresse suivante :

<http://www.cs.uu.nl/groups/IS/archive/henry/jlc05.pdf>

L'ouvrage de Fontaine & Redmond est le résultat des travaux du groupe de recherche "Pragmatisme Dialogique" dirigé par S. Rahman, en collaboration avec une UMR de l'université Lille 3 – Charles de Gaulle. D'autres ouvrages et articles sont l'œuvre de Denis Vernant, professeur à l'Université Pierre-Mendès-France de Grenoble. Ils ont servi d'appui aux travaux présentés par Thomas Barrier lors de la séance du 15 janvier 2010 du présent séminaire : une perspective sémantique et dialogique sur l'activité de validation en mathématiques.

Dans Vernant (2006), intitulé "Introduction à la logique standard", l'auteur présente la logique des propositions, la logique des prédicats et la logique des relations en distinguant pour chacune d'elles : le langage, les procédures d'évaluation, les présentations & les propriétés métalogiques (consistance, complétude, décidabilité). Trois présentations sont proposées dans chacun des cas : axiomatique, inférentielle et dialogique.

Les "besoins trophiques" pour comprendre et saisir l'intérêt de ces travaux sont donc très importants, ce qui constitue un problème à résoudre par la communauté des chercheurs en didactique.

Deux exemples

Exemple 1 : les premiers travaux de Raymond Duval (1989)

Les enjeux de la recherche en question étaient les suivants :

- comment faire prendre conscience de l'écart entre statut et sens d'un énoncé ?
- comment faire comprendre que la démonstration repose sur une opération de substitution plus porche d'une démarche de calcul que de la démarche d'argumentation en interaction sociale.

Le recours à une représentation non-discursive a été justifié et envisagé. Les auteurs précisent :

Pour être vraiment pertinent, le recours à une représentation non-discursive exige que l'on respecte les deux conditions suivantes :

- dissocier les tâches heuristiques et les tâches d'organisation déductive
- articuler le registre de la représentation et celui de l'expression individuelle dans le langage naturel.

Les auteurs mettent en garde les professeurs qui voudraient s'inspirer de leurs travaux :

Les réseaux doivent être conçus et élaborés par les élèves eux-mêmes. C'est dans cette construction que les élèves se trouvent réellement confrontés aux exigences et au fonctionnement d'une organisation déductive. Cette tâche de construction exige, en particulier, que les élèves considèrent les énoncés en fonction de leur statut : placer, dans un réseau, les hypothèses au point de départ et l'énoncé but à l'arrivée est loin d'être une opération d'emblée évidente pour beaucoup.

Les exemples de productions ci-dessous illustrent leur diversité. En conclusion, les auteurs remarquent que les élèves assimilent et développent plus rapidement et plus finement des stratégies heuristiques lorsqu'ils ont pris conscience de la façon dont fonctionne une démonstration.

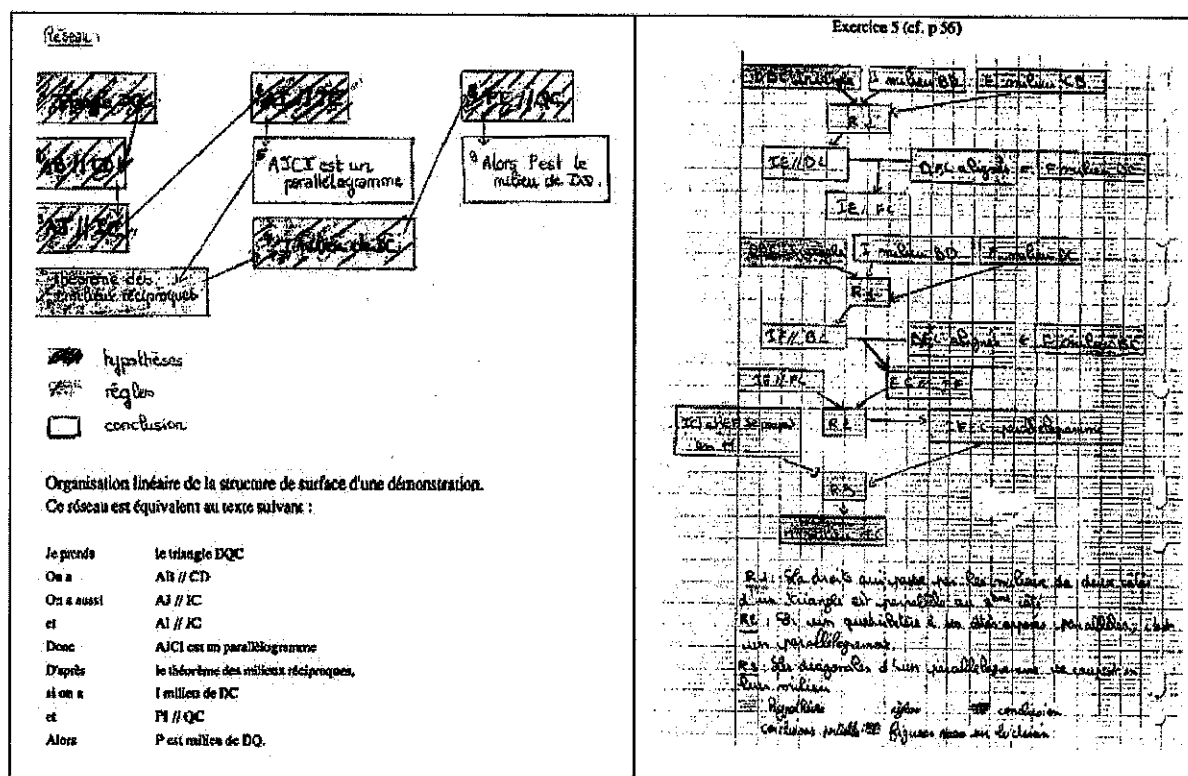


Figure 2 – Deux réseaux construits par les élèves

Les références sur l'argumentation qui sont citées sont Grize, Ducrot, et Toulmin (dans une moindre mesure), mais leur emploi n'est guère détaillé.

On a parfois reproché à ce travail de négliger la phase heuristique de recherche des idées pour la démonstration. Or cette phase est supposée avoir été faite auparavant. La conclusion de l'article signale que le travail fait lors de cette expérience en classe améliore par la suite l'assimilation et le développement de leurs stratégies heuristiques.

Dans la diffusion de ces travaux, il est arrivé que les réseaux, au lieu d'être à la charge des élèves après neutralisation de la phase heuristique, aient été d'emblée fabriqués par les professeurs ou manuels, le travail de l'élève consistant à conduire à la fois la phase heuristique et la phase d'organisation en réseau en complétant les "trous" laissés dans le réseau embryonnaire fourni par le professeur ou le manuel. Il n'est guère étonnant qu'une telle manière de faire n'ait pas montré une grande efficacité ...

Exemple 2 : les travaux récents de Bettina Pedemonte (2008)

Les références sur l'argumentation reposent essentiellement sur Toulmin (mais presque toutes sont citées). D'autres références sont également citées : Thurston ; Polya et Peirce à propos du raisonnement plausible et de l'abduction :

$$\begin{array}{l} \text{If A then B} \\ \hline \text{B true} \\ \hline \text{A more credible} \end{array}$$

Mais l'auteur introduit le modèle cK ϕ de Balacheff dans celui de Toulmin :

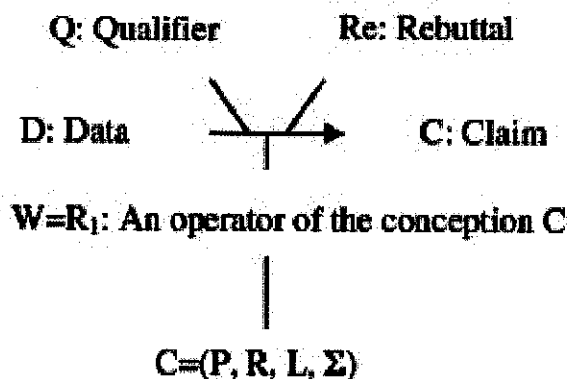


Figure 3
Le modèle de B. Pedemonte

L'article propose l'analyse et la comparaison de l'argumentation supportant une conjecture et de la démonstration, et ceci de deux points de vue :

- celui du système de référence :
 - le système de représentation (le langage, l'heuristique, la figure) ;
 - le système de connaissances (conceptions, théorèmes) d'argumentation et de preuve.
- la structure du lien logique entre affirmations : abduction, induction, déduction.

À propos des notions de conjecture, il est précisé qu'une conjecture est un triplet : un énoncé, une argumentation, un système de conceptions. Une conjecture n'est pas toujours le résultat d'une argumentation (c'est alors "un fait"). L'argumentation peut être reliée à la conjecture de deux façons :

- dans une argumentation constructive, elle contribue à la construction de la conjecture, et donc la précède.
- dans une argumentation structurante, elle la justifie et vient donc après.

Voici les hypothèses qui sont testées :

H1 : dans la résolution de problèmes portant sur des propriétés numériques, *l'argumentation structurante* devrait favoriser une *continuité* dans le système de référence *entre argumentation constructive et démonstration*.

Contrairement au cas de la géométrie, les étudiants n'auront probablement pas de difficulté avec la continuité structurelle dans la construction de la démonstration.

H2 : Un pas *abductif* dans *l'argumentation structurante* pourrait être utile pour *maintenir le lien* entre le système de référence de *l'argumentation constructive* et le système de référence *dans la démonstration*.

Les problèmes à résoudre ont les énoncés suivants :

Problème 1 : Prends n'importe quel nombre s'écrivant avec deux chiffres et échange l'ordre des chiffres ; tu as maintenant deux nombres ; soustrais le plus petit du plus grand ; que peux-tu dire au sujet du résultat ?

Problème 2 : Que peux-tu dire à propos de $(p - 1)(q^2 - 1)/8$ si p et q sont des nombres impairs ?

Voici les résultats.

Pour les étudiants qui arrivent à faire une démonstration :

- le contrôle des conceptions mobilisées dans *l'argumentation structurante* a pu être validé dans le champ arithmétique et dans le champ algébrique. La continuité dans le système de référence est fondée sur le fait suivant : les *conceptions des étudiants sont valides* dans les deux champs, et elles sont *exprimées par les étudiants dans les deux champs*.

- l'*argumentation structurante* contient des *pas abductifs*, ce qui réduit sans doute l'écart entre le champ arithmétique dans lequel prend place l'*argumentation* et le champ algébrique de la démonstration.

Pour les étudiants qui n'y arrivent pas :

- pas d'*argumentation structurante* contenant des *pas abductifs*.

- dans un cas, une conception mobilisée par l'étudiant ne peut pas être généralisée dans le champ algébrique.

- dans l'autre, la conception de l'étudiant aurait pu être validée dans le champ algébrique, mais l'étudiant n'y arrive pas car dans l'*argumentation structurante*, le contrôle était dans le champ arithmétique et pas dans le champ algébrique.

Conclusion :

- les conceptions mobilisées dans l'*argumentation* sont utiles pour construire une démonstration si elles peuvent être validées (et pas seulement mobilisées) dans les deux champs arithmétique et algébrique.

- c'est justement dans ce but que les pas abductifs dans l'*argumentation structurante* peuvent être utiles pour favoriser la continuité dans le système de référence (contrairement à ce qui se passait en géométrie).

La lecture de ce travail de recherche très intéressant exige la maîtrise de cadres et théories assez complexes. Là encore, les "besoins trophiques" sont très importants et la question d'une diffusion des travaux sans simplification outrancière se pose. L'auteur l'assure en Italie, en répondant à des demandes faites par les professeurs à propos de difficultés qu'ils ont identifiées, difficultés que le travail fait dans la recherche permet d'éclairer. Les conditions de réussite mises à jour dans l'étude concernaient des étudiants souhaitant devenir professeurs

des écoles. La question de l'élargissement du public visé vers le collège ou le lycée mérite d'être posée.

IV. Conditions et contraintes de l'enseignement de la démonstration au collège en France

Terminons par une esquisse rapide des conditions et contraintes de l'enseignement de la démonstration au collège en France, en respectant les niveaux de co-détermination de Chevallard. Certaines conditions se sont mises en place sans toujours être imposées par les instructions officielles, et sont souvent vues comme des contraintes (conditions que le professeur ne peut changer).

Niveau de la civilisation occidentale :

L'emprise de la rhétorique dans la vie sociale ne laisse guère de place à la démonstration. Elle est celle qui compte, qui a la plus grande visibilité, symboliquement mais aussi objectivement.

Niveau Société :

La fragmentation savante de la production de connaissances sur l'argumentation évolue. La place de la démonstration dans les manuels scolaires en est un indice.

Niveau Ecole :

La fragmentation disciplinaire de l'argumentation entre les disciplines littéraires et scientifiques (Voir les textes officiels de français en 3^e et de lycée sur le texte argumentatif ; sur la démarche d'investigation en sciences).

Niveau pédagogique :

Complexité de la question des aides inter-disciplinaires concernant l'argumentation (Maths/Français, par exemple, et les ressources à ce sujet dans l'académie de Lyon).

Niveau de la discipline "Mathématiques"

Quelles sont les démonstrations faites par le professeur (autres que celles qu'il "commande" aux élèves) ?

Niveau du domaine géométrique

Des constats

Sur l'articulation GI / GII (au sens de Kuzniak) :

- Le passage non problématisé en GII ;
- Le "coloriage" en GII d'objets déjà-là en GI (parallèles et équidistance de points de l'une à l'autre, par exemple).
- La transformation rapide d'un énoncé vérifié en GI en un énoncé admis en GII, sur lequel on s'appuie pour faire des démonstrations.
- La fréquence de telles "transformations" (taille et répartition des îlots déductifs dans une mer d'énoncés admis).
- Les énoncés de GII justifiant les constructions faites en GI sont souvent admis, car la TGD (théorie géométrique disponible) ne permet pas de les démontrer, ou est volontairement silencieuse sur ce point, alors qu'elle ne l'est pas sur la réciproque d'un tel énoncé.

Sur le langage concernant les énoncés conditionnels :

- Sa réduction au seul "si P alors Q", au détriment de "Q si P" ou "P seulement si Q" ou même (à discuter !) "non P ou Q".
- Ce qui accentue la ressemblance entre l'énoncé et sa réciproque.

Conclusion rapide

Le travail fait dans les trois premières parties montre l'abondance des travaux sur le thème de l'argumentation. Ces travaux sont souvent cités, sans que leur emploi soit véritablement explicite à partir des travaux d'origine. L'analyse faite de certains d'entre eux (partie I et II essentiellement) vise à combler partiellement cette lacune.

Au fil de cette analyse, il apparaît que les travaux dans le champ de la rhétorique et de l'argumentation ne sont pas seulement en rapport avec l'enseignement de la démonstration, mais également avec les nombreuses argumentations ou figures rhétoriques que le professeur déploie pour négocier un contrat pédagogique, un contrat didactique, mais également parfois un contrat que l'on pourrait qualifier de social ou de civilisationnel.

Les conditions et contraintes évoquées dans la dernière partie en fournissent quelques exemples sur un domaine d'enseignement particulièrement en difficulté.

Bibliographie

- ANGENOT M., 2008, *Dialogue de sourds, Traité de rhétorique antilogique*, Mille et une nuits.
- BALACHEFF N., 1999, *L'argumentation est-elle un obstacle ? Invitation à un débat ...* in La lettre de la preuve : <http://www.lettredelapreuve.it/OldPreuve/Newsletter/990506Theme/990506ThemeFR.html>
- BUTY C. (dir.), PLANTIN C. (dir.), Muller Mirza N. (Préf), 2009, *Argumenter en classe de sciences*, Collection Didactiques, apprentissages, enseignements, INRP
- DAVID R., NOUR K., RAFFALLI C., 2001, *Introduction à la logique, Théorie de la démonstration, Cours et exercices corrigés*, Dunod.
- DURAND-GUERRIER V., 2006a, Vérité versus validité logique dans la classe de mathématiques. Entre analyses épistémologique et didactique, résumé de communication sur le site : <http://www.so-ph-a.org/sopha2006/logique/durand-guerrier.html>
- DURAND-GUERRIER V., HERAUD J.-L., TISSERON C. (coords.), 2006b, *Jeux et enjeux de langage dans l'élaboration des savoirs en classe*, PUL.
- DOUAIRE J. (dir.), 2004, *Argumentation et disciplines scolaires*, Collection Didactiques, apprentissages, enseignements, INRP.
- EGRET M.-A., DUVAL R., 1989, Comment une classe de 4^e a pris conscience de ce qu'est une démarche de démonstration, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, p. 41-64A.
- FONTAINE M., REDMOND J., 2008, *Logique dialogique. Une introduction. Volume 1 : Méthode de Dialogique : Règles et exercices*, Cahiers de Logique et d'Epistémologie, Series Editors : Dov Gabbay and Shahid Rahman , Volume n°5, College Publications (en collaboration avec l'Université de Lille 3). <http://www.collegepublications.co.uk>
- HACKING I., site du Collège de France où ses cours sont disponibles : http://www.college-de-france.fr/default/EN/all/historique/ian_hacking.htm
- MEYER M., 2008, *Principia Rhetorica. Une théorie générale de l'argumentation*, Fayard.
- PLANTIN C. page personnelle sur Internet : <http://icar.univ-lyon2.fr/membres/CPlantin/>.
- PEDEMONTE B., 2008, Argumentation and algebraic proof, *ZDM*, 40, p. 385-400.
- PERELMAN C., OLBRECHTS-TYTECA L., 1958, *Traité de l'argumentation : La nouvelle rhétorique*, Presses Universitaires de France, Paris.

- PERELMAN C., 1997, *L'empire rhétorique. Rhétorique et argumentation*, Librairie philosophique Vrin (Troisième tirage, le premier datant de 1977).
- TOULMIN S., 1958 – 1993, *Les usages de l'argumentation*, PUF, Paris.
- TUTESCU M., 2005, *L'Argumentation* sur le site :
<http://ebooks.unibuc.ro/lls/MarianaTutescu-Argumentation/5.htm>
<http://ebooks.unibuc.ro/lls/MarianaTutescu-Argumentation/6.htm>
- VERNANT D., 2006, *Introduction à la logique standard*, Champs Université, Flammarion.
- VIGNAUX G., 1976, *L'Argumentation. Essai d'une logique discursive*, Droz, Genève – Paris.

L'intégration des TICE dans les pratiques mathématiques à l'école primaire

Jean-Louis IMBERT
IUFM Midi-Pyrénées, UT2 Toulouse
jean-louis.imbert@toulouse.iufm.fr

Résumé

L'étude que je vais présenter porte sur la difficulté des enseignants de l'école élémentaire à intégrer des Technologies Numériques dans leurs pratiques mathématiques. Je l'explique par les contraintes provenant à la fois d'influences externes à la classe et de raisons internes à la classe. Cette communication porte principalement sur les raisons internes à la vie de la classe. J'utilise un cadre théorique à plusieurs dimensions (théorie des situations didactiques, théorie anthropologique et dimension instrumentale).

L'observation de séances de mathématiques intégrant des TICE met en évidence des éléments d'un "Auto apprentissage" des enseignants et les limites pour qu'il aboutisse, ce que j'illustrai à travers l'étude d'un enseignant.

ASSUDE T. & GÉLIS J-M (2002), La dialectique ancien-nouveau dans l'intégration de Cabri-géomètre à l'école primaire, *Educational Studies in Mathematics*, pp. 259-287.

BROUSSEAU G. (1995), L'enseignant dans la théorie des situations didactiques. In NOIRFALISSE R., PERRIN-GLORIAN M.J., (Éd.) *Actes de la VIIIe école d'été de didactique des mathématiques*, pp. 3-45, Clermont-Ferrand : IREM.

TROUCHE L. (2005), Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques : nécessité des orchestrations, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 25/1, pp. 91-138, Éditions La Pensée Sauvage, Grenoble.

Les représentations fonctionnelles dans les processus d'apprentissage de la covariation comme prélude au concept de fonction dans un contexte d'apprentissage collaboratif, débat scientifique et d'auto – réflexion (ACODESA)

Fernando Hitt

Université du Québec à Montréal et Université de Genève

hitt.fernando@uqam.ca

Résumé

Dans ce séminaire nous voulons présenter quelques résultats issus de notre programme de recherche depuis 2006. Dans un contexte d'un enseignement par compétences (Programme du MELS, 2007 en Québec) nous voulons discuter une approche dans une perspective interactionniste sociale sur l'acquisition du concept de covariation comme prélude au concept de fonction en 3^e secondaire (14 ans) de l'école québécoise. Nous étudions le rôle des représentations fonctionnelles dans la résolution de situations problèmes et problèmes dans un environnement d'apprentissage collaborative, débat scientifique et auto réflexion (ACODESA), avec deux groupes de 3^e secondaire. Les résultats montrent l'importance des représentations fonctionnelles dans l'apprentissage du concept de covariation comme prélude au concept de fonction. Aussi, sous cette méthodologie ACODESA, les résultats ont été meilleurs avec un groupe de 24 élèves qu'avec l'autre groupe de 36 élèves. L'étude montre aussi que pour certains élèves non habitués à une approche d'apprentissage collaborative peut résulter difficile et même décevant.

Mots-clés :

Représentation fonctionnelle, covariation, méthodologie ACODESA.

Introduction

Notre projet de recherche sur la construction du concept de fonction date de quelques années. Dans le cadre d'un enseignement par compétences, notre projet date de 2006 et il a été centré dans l'apprentissage du subconcept de covariation comme prélude au concept de fonction dans un contexte d'apprentissage collaboratif avec des élèves de 3^e secondaire au Québec.

Le programme du Ministère d'Éducation, du Loisir et du Sport MELS (2007) du Québec fait une place importante aux situations problèmes (SP), de sorte que la première compétence disciplinaire du domaine de mathématiques est « Résoudre une situation problème » (RSP), la deuxième est « Suivre un raisonnement mathématique » (SRM) et le troisième de « Communiquer avec un langage mathématique » (CLM). Le MELS fait référence à la notion de compétence élaborée par Perrenoud (1999) :

Une compétence est une capacité d'action efficace face à une famille de situations, qu'on arrive à maîtriser parce qu'on dispose à la fois des connaissances nécessaires et de la capacité de les mobiliser à bon escient, en temps opportun, pour identifier et résoudre de vrais problèmes.

Le discours dans le programme du MELS va promouvoir, chez les enseignants, une idée de résoudre des problèmes et ensuite d'apprendre à communiquer de façon précise les démarches individuelles. Le programme du MELS, dans le contexte des mathématiques, prend en compte la compétence CLM comme une communication finale précise, où l'élève doit montrer une maîtrise d'articulation entre représentations. Quand le programme présente cette compétence

CLM, elle fait référence à la notion de registre de représentation donnée par Duval (1993, 1995), en restreint sa définition à quatre registres :

Un *registre de représentation sémiotique* est un système de « traces perceptibles » (représentation) qui comporte des règles de conformité, de transformation et de conversion. Les registres de représentation sémiotique en mathématique sont d'ordre linguistique, symbolique, iconique et graphique. (MELS, 2007, p. 2)

Le programme du MELS comme Duval font une description de construction de concepts de façon individuelle. Chez Duval il est clair que le discours est lié à l'analyse de constructions de connaissances d'un point de vue constructiviste, mais dans le programme du MELS ce n'est pas clair, la description du programme est centrée sur l'élève, mais le ministère préconise que l'approche est socioconstructiviste. Sauve (2000, p. 2) en citant Marie-Françoise Legendre (en parlant du programme du MELS) à écrit: « Une approche socioconstructiviste de l'apprentissage prend appui sur l'apport de plusieurs disciplines, apporte Marie-Françoise Legendre. Celles-ci ne disent pas comment faire, mais aident à déterminer sur quoi faire porter les interventions. »

En conséquence, la lecture que beaucoup des enseignants au Québec font du programme du MELS (2007), est de faire suivre à l'élève une approche individuelle de résolution de situations problèmes (situations variées du monde réel), de suivre un raisonnement mathématique adéquat dans la résolution de problèmes d'application, et de communiquer de façon précise avec un langage mathématique les résultats trouvés de façon individuelle.

Dans le programme du MELS (idem), une situation problème doit satisfaire les caractéristiques suivantes :

- la situation n'a pas été présentée antérieurement en cours d'apprentissage;
- l'obtention d'une solution satisfaisante exige le recours à une combinaison non apprise de règles ou de principes dont l'élève a fait ou non l'apprentissage;
- le produit, ou sa forme attendue, n'ont pas été présentés antérieurement.

Entre les lignes on peut se rendre compte que les auteurs du programme du MELS ont pris en considération la théorie des situations didactiques de Brousseau (1998), mais sans expliciter le rôle de la notion d'obstacle et l'importance de dépasser l'obstacle à travers de la résolution d'activités élaborées *ad hoc*. En fait, on peut se rendre compte que les auteurs du programme du MELS ont retenu l'importance de promouvoir une pensée divergente (voir plus loin pour plus de précision sur ce type de pensée) en proposant des activités ouvertes, mais que celles-ci ne sont pas obligatoirement liées à un obstacle.

En essayant de suivre les indications du programme du MELS, les auteurs de manuels proposent au début de chaque thème, section ou chapitre, des situations problèmes où il y a une activité pour les élèves, de collecte de données liée à une situation de la vie réelle, ils demandent de structurer les données et de faire une analyse (en général, ces problèmes traitant le thème sur l'environnement). En fait, les auteurs proposent une situation ouverte où les élèves doivent trouver une façon de structurer les données de façon à tirer l'information importante en utilisant différents modes de représentation. Dans le programme du MELS, les auteurs signalent le mode suivant :

Devant une situation se prêtant à un traitement mathématique, l'élève exploite l'information lorsqu'il recueille des données, cerne les éléments pertinents de cette situation, résume des informations, fait une synthèse de ses connaissances, ou encore interprète, produit ou valide un message. Ce faisant, il est amené à dégager des liens entre ses acquis et ses découvertes, à discerner l'essentiel de l'accessoire et à juger de la validité de l'information ou d'une solution à partir de certains critères.

L'importance de promouvoir un apprentissage dans une ambiance collaborative n'est pas explicite comme c'est le cas dans le travail de Brousseau. Tout semble indiquer que les auteurs du programme du MELS ont conçu ce programme d'un point de vue constructiviste et que les porte-paroles du MELS utilisent un discours socioconstructiviste.

Voici un exemple d'un manuel pour introduire le thème de fonction linéaire. Les auteurs Boucher et al., (2007, p. 77) dans le manuel « Intersection » pour des élèves de 3^e secondaire, proposent une « situation problème » liée à la quantité d'eau douce sur la planète (voir énoncé encadré)

L'eau est abondante sur la Terre. Elle couvre environ 70% de la surface du globe. Cependant, seule une infime partie de cette eau est de l'eau douce accessible aux êtres humains. Selon les Nations Unies, la quantité moyenne d'eau disponible par habitant était de 7600 kilolitres par année en l'an 2000, pour une population mondiale de 6,1 milliards de personnes. En 2005, cette quantité était de 7132 kilolitres par habitant, pour une population mondiale de 6,5 milliards de personnes. On considère que la situation mondiale serait critique si la quantité d'eau disponible par habitant descendait sous le seuil des 1700 kilolitres par année. À partir d'une population mondiale de combien de personnes la quantité moyenne d'eau disponible par habitant sera-t-elle sous le seuil critique ?

Figure 1. Situation problème proposée dans un manuel scolaire.

Si l'intention est que les élèves développent un raisonnement mathématique qui les orienterait vers les fonctions linéaires, alors, en prenant en compte l'information fournie par le manuel, ils vont promouvoir chez les élèves, une croyance que l'accroissement de la population mondiale est linéaire !

La tâche telle quelle, va promouvoir une pensée convergente au lieu d'une pensée divergente. Bien loin de demander aux élèves de réfléchir sur les différentes variables en jeu (accroissement de la population mondiale, décroissement de la quantité d'eau douce dans le monde, le temps) et les possibles relations fonctionnelles, les auteurs posent une question qui ferme la situation, et par conséquent, elle n'est pas une situation problème, mais un problème. En fait, dans le programme du MELS il n'y a pas de distinction entre exercice, problème et situation problème.

Dans notre contexte de l'apprentissage des mathématiques, ça veut dire que lorsque les élèves ont développé certaines compétences, celles-ci leur permettent de résoudre des situations problèmes en mobilisant des connaissances de façon précise. Ils ont des schèmes opératoires qui permettent de résoudre des situations problèmes liées aux savoir-faire plutôt que des savoirs. Mais, comment faire développer ces compétences chez les élèves ? Quels éléments théoriques devons-nous prendre en compte pour la construction d'activités ? Quelle méthodologie d'enseignement choisir ?

Cadre théorique

Dans le texte qui suit, nous présenterons certains résultats d'une recherche qui a commencé en 2006. Cette recherche est liée aux processus d'enseignement des mathématiques dans le cadre d'une implantation de programmes visant le développement de compétences. Comme nous l'avons exprimé avant, le curriculum au Québec (MELS, 2007) a accordé une grande importance aux situations problèmes (SP), de sorte que la première compétence disciplinaire

du domaine des mathématiques est : « Résoudre une situation problème ». Nous voulons montrer l'importance du concept de covariation entre variables comme prélude au développement du concept de fonction et l'importance du rôle des représentations fonctionnelles dans la construction de concepts mathématiques, dans un contexte de résolution de situations problèmes (SP) dans un environnement d'apprentissage collaboratif, de débat scientifique (Legrand, 1993, 2001) et d'autoréflexion (méthodologie ACODESA, Hitt, 2006; Hitt, 2007 ; Hitt et Passaro, 2007).

Puisque nous sommes intéressés aux processus de modélisation mathématique dans un contexte de résolution de SP, nous devons d'abord faire la distinction entre exercice, problème et situation problème. En général, dans la littérature, les définitions de *problème* sont données en termes de défi sans faire référence explicitement à une théorie sur la construction des connaissances. Dans ce qui suit, nous allons nous situer dans une approche théorique de construction de concepts sous l'angle des représentations pour élaborer une définition de *problème* et d'*exercice*.

Au début des années quatre-vingt (voir Janvier, 1987), une communauté de didacticiens s'est intéressée aux problèmes d'apprentissage et d'enseignement des mathématiques sous l'angle des représentations. Par la suite, dans une approche théorique sur les représentations, Duval (1993, 1995) a développé un cadre théorique sur la construction de concepts mathématiques liée à l'articulation de registres de représentation. Selon Duval, un concept mathématique ne peut pas être développé avec une approche centrée sur une seule représentation, car cette seule représentation ne peut pas exprimer toutes les caractéristiques du concept en jeu. L'articulation entre les différentes représentations du concept devient donc nécessaire et, en conséquence, la conversion entre représentations doit être un élément présent dans les tâches proposées aux élèves.

Cette approche nous permet de proposer une définition de problème dans un contexte d'apprentissage à travers la coordination entre représentations (voir Hitt, 2004, p. 353) :

Exercice (E):

Quand une tâche mathématique fait appel à une procédure déjà établie par un individu, nous pouvons classer cet énoncé comme un exercice.

Problème (P):

Si une tâche mathématique ne fait pas appel à une procédure connue, et qu'elle nous oblige à la construction de représentations internes particulières et à les connecter d'une part, et si cela nous permet d'exprimer sur papier des idées pour faire des liaisons avec des procédures d'autre part, alors, cette tâche sera pour nous un problème.

La distinction entre exercice et problème est une désignation locale. Ce qui est un exercice pour un individu peut être un problème pour un autre. En accord avec nos définitions, nous pouvons faire une interprétation de ce qui est une situation - problème (dès maintenant, on utilise la notation SP) pour la mettre dans un contexte théorique des représentations :

Situation - problème (SP): Nous appellerons situation - problème, une tâche mathématique liée à un contexte dont la tâche est facile à comprendre (ce qui n'implique pas qu'elle soit facile à résoudre). C'est-à-dire, si la lecture de la tâche en contexte provoque une réflexion et favorise la recherche de solutions possibles, y compris des solutions partielles, alors cette tâche mathématique est une situation - problème. En général, la mathématique à utiliser dans une situation - problème n'est pas explicitée dans la tâche. C'est grâce à l'interaction de l'élève avec la situation que les représentations spontanées apparaissent et que la mathématique peut alors émerger, soit individuellement, soit dans la discussion entre les membres, lors d'un

travail d'équipe, offrant la possibilité de construire un modèle mathématique partiel ou complet qui, à son tour, explique la situation.

Notre approche théorique intègre plusieurs aspects des théories constructivistes (théories basées sur la construction individuelle des connaissances) que nous essayons d'inclure harmonieusement dans une démarche d'interaction sociale de l'apprentissage des mathématiques.

Une conséquence de l'utilisation des SP, selon notre interprétation, est que les SP doivent servir à déclencher une pensée divergente (dans le sens de Guilford, 1967) ou un processus heuristique. En d'autres termes, les SP doivent favoriser une ouverture de pensée, qui va promouvoir l'émergence des représentations fonctionnelles (voir Hitt, 2006, 2007) qui guideront l'action des étudiants dans leurs approches de résolution. La résolution de problèmes et d'exercices est nécessaire pour que la connaissance devienne un savoir (dans les sens de Conne, 1992).

Dans cet ordre d'idées, notre approche théorique sur le rôle des représentations fonctionnelles est très proche de celle de Bourdieu (1980), avec sa notion d'*habitus* :

Les conditionnements associés à une classe particulière de conditions d'existence produisent des *habitus*, systèmes de *dispositions* durables et transposables, structures structurées prédisposées à fonctionner comme structures structurantes.

La structure structurante dans notre cas est la structure mentale construite par l'élève, liée à la production d'un schéma, qui lui permet de comprendre la tâche (SP ou problème) et lui donne la possibilité de s'engager dans un processus de résolution de la SP ou du problème, c'est-à-dire, que la structure structurante est liée à l'organisation d'un plan d'attaque. Bourdieu fait la distinction entre habitude et *habitus*: « L'habitude est considérée spontanément comme répétitive, mécanique, automatique, plutôt reproductive que productrice... ».

Ainsi, les *habitus*, selon Bourdieu, produisent des anticipations chez l'élève qui sont des sortes d'hypothèses pratiques fondées sur l'expérience passée, leur évolution dans un milieu socioculturel est très importante. Alors, si l'on considère que les représentations fonctionnelles se développent dans une interaction sociale, elles contiennent aussi, des caractéristiques propres aux individus, qui sont susceptibles d'être transformées vers les représentations institutionnelles. Les représentations fonctionnelles ne sont pas construites à travers des activités qui promeuvent une pensée convergente, ne sont pas construites mécaniquement, sont des représentations qui émergent quand l'élève est face à une tâche non - routinière, et ses représentations servent comme pont pour comprendre et pour organiser l'action qui vient tout de suite après cette construction. Sous cette perspective, la SP, le problème et l'exercice ont les rôles respectifs suivants dans la classe des mathématiques:

- La SP est utilisée lorsque l'on tente d'introduire un nouveau concept mathématique. De ce point de vue, la SP favorise la production des représentations et la nécessité de construire des articulations entre elles (c'est-à-dire, la SP développe la pensée divergente), dans un contexte d'interaction sociale. En fait, elle favorise la production de représentations fonctionnelles (d'*habitus* dans le sens de Bourdieu) par les élèves. De ce point de vue, la SP aide à l'évolution des *habitus*, surtout si l'élève est placé dans un milieu socioculturel pour la construction sociale des connaissances.
- Le problème en tant que promoteur d'une pensée convergente. Cette approche favorise, dans un contexte d'interaction sociale, le développement des représentations fonctionnelles via les processus de validation en équipe et discussion globale en grand groupe. Cette approche nous permet de promouvoir un développement des *habitus* (implicitement dans un contexte de processus d'institutionnalisation des

connaissances),

- L'exercice en tant que promoteur de la pensée convergente. Cette approche permet la consolidation des connaissances dans l'apprentissage (l'institutionnalisation des représentations), dans un contexte de travail individuel pour la construction du savoir.

Puisque les problèmes et les exercices sont bien connus de la communauté des didacticiens et enseignants, nous allons nous restreindre aux SP, élaborées selon notre approche théorique.

Méthodologie

Dans notre programme de recherche, les SP ont été choisies pour constituer un bloc d'activités, enchaînées dans les sens de Glaeser (1999, p. 82), pour couvrir le thème sur la modélisation mathématique en 3^{ème} secondaire (14 ans) et pour promouvoir l'apprentissage du concept de covariation entre variables comme prélude au concept de fonction (Hitt et Passaro, 2007; Hitt *et al.*, 2008 ; Gonzàlez *et al.*, 2008 ; Hitt et Morasse 2009).

Nous avons adapté cinq SP pour développer le concept de covariation : le photographe, le jacuzzi, le randonneur, les carrés et les ombres. Les deux premières ont été conçues pour promouvoir, principalement, l'utilisation des représentations verbales, schématiques, arithmétiques et graphiques. Avec les trois autres, la représentation algébrique vient s'ajouter à la liste des représentations. Deux groupes de 3^{ème} secondaire (24 et 36 élèves) ont travaillé sur ces activités pendant 13 cours dans une ambiance d'apprentissage collaboratif, débat scientifique et d'auto réflexion (méthodologie ACODESA, Hitt, 2006 et 2007). En résumé, la méthodologie est la suivante :

- Travail individuel : production de représentations fonctionnelles pour comprendre la tâche ;
- Travail en équipe sur la même tâche. Processus de discussion et validation. Raffinement des représentations fonctionnelles ;
- Débat (qui peut devenir un débat scientifique). Processus de discussion et validation (raffinement des représentations fonctionnelles) ;
- Retour individuel sur la tâche (travail individuel: reconstruction et auto - réflexion) ;
- Institutionnalisation. Processus d'institutionnalisation et utilisation des représentations institutionnelles.

Notre méthodologie fait appel à un travail individuel et à un travail d'équipe. L'élève doit avoir une idée de ce qu'il va faire pour confronter ses idées avec celles de ses co-équipiers. C'est à ce moment que commence l'apprentissage collaboratif. Parfois, il n'y a pas de discussion, mais d'autres fois, des élèves déclenchent un débat qui peut se transformer en un débat scientifique (Legrand, 1993 et 2001). Le retour individuel sur la tâche permet à l'élève de faire une reconstruction de ce qui a été fait dans son équipe et lors du débat. Finalement, le processus d'institutionnalisation est fait par l'enseignant.

Les activités sont les suivantes :

Activité	Type de représentation demandé
Le photographe	Langage naturel, schéma, et autre type de représentation.
Le randonneur	Langage naturel, schéma, un autre type de représentation et représentation graphique.
Le jacuzzi	Langage naturel, schéma, un autre type de

	représentation, représentation algébrique et représentation graphique.
Les carrés	Langage naturel, schéma, un autre type de représentation, représentation algébrique et représentation graphique.
Les ombres	Langage naturel, schéma, un autre type de représentation, représentation algébrique et représentation graphique.

Tableau 1. Activités proposées aux élèves

Le photographe (résumé).





Un photographe professionnel se promène près de la statue de Jacques Cartier. Il la photographie de différents endroits sur le trottoir pour choisir, plus tard avec les photos qu'il aura prises, les endroits qui lui permettront d'obtenir les meilleures photos.

Pour chaque photo qu'il prend, il note l'endroit où il se trouve sur le trottoir et la distance qui le sépare de la statue....

À chaque point où le photographe se trouve, la distance entre lui et la statue varie. Décris ce phénomène avec tes mots et fais un dessin de la situation pour l'illustrer de façon à montrer les différentes possibilités.

Figure 2. Résumé de la 1ere activité, le photographe.

Travail individuel et productions liées aux représentations fonctionnelles

Un photographe professionnel se promène près de la statue de Jacques Cartier...

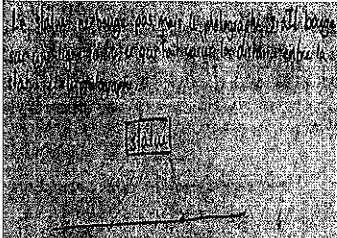
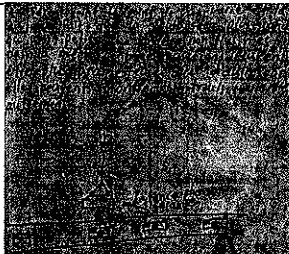
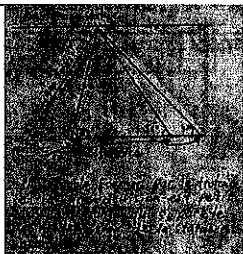




Figure 3. Productions individuelles, activité "Le photographe"

Travail en équipe

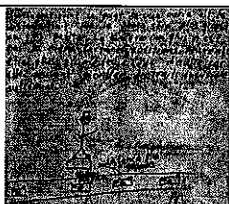
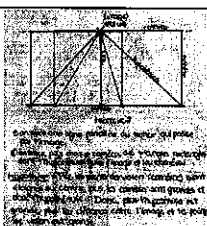
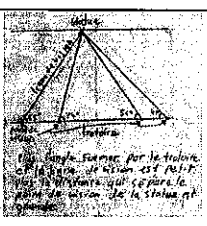
		
Travail individuel	Travail en équipe	Reconstruction individuelle à la maison

Figure 4. Évolution des représentations d'un élève en accord avec la méthodologie ACODESA.

Le randonneur (résumé).

La 2^e activité, le randonneur, était cruciale dans notre expérimentation. Nous avons pris en compte les résultats de l'expérimentation de Passaro (2007) avec des élèves de 2^e secondaire. Dans notre cas, notre expérimentation était conçue pour des élèves de 3^e secondaire au Québec. L'activité a 12 pages (voir annexe). À continuation nous montrons seulement l'énoncé principal de l'activité.

Un randonneur entreprend une longue randonnée en forêt. Il suit une piste qui lui permet de revenir à son point de départ à la fin de la randonnée. Durant sa promenade, il ne repasse jamais au même endroit et il ne fait qu'un seul tour de piste.

Un poste de secours est situé à l'intérieur de la région délimitée par la piste. Un grand mât avec un drapeau permet au randonneur de repérer l'emplacement du poste de secours quel que soit l'endroit où il se trouve sur la piste.

Trace une piste de ton choix et place le poste de secours à l'intérieur en respectant l'énoncé.

Ma piste de randonnée :

Figure 5. Résumé de la 2^e activité, le randonneur.

Résultats avec le groupe de 24 élèves.

Les élèves ont conçu une piste de façon individuelle pour comprendre l'énoncé et après ils ont discuté en équipe pour faire une proposition. Les propositions par équipe, ont été dessinées au tableau et l'enseignant a demandé aux élèves de choisir une seule piste. Les élèves ont rejeté les pistes en donnant différents types d'arguments. Par exemple, le cercle a été rejeté parce que si l'on prend en compte la distance parcourue par le randonneur et la distance du randonneur au poste de secours, il n'y a pas de variation. La piste au dessous du tableau a été rejetée parce que on ne peut pas savoir exactement comment mesurer la distance du randonneur au poste de secours, ils disaient que le randonneur pouvait être au milieu de la piste, ou marcher par l'intérieur ou l'extérieur de la piste.

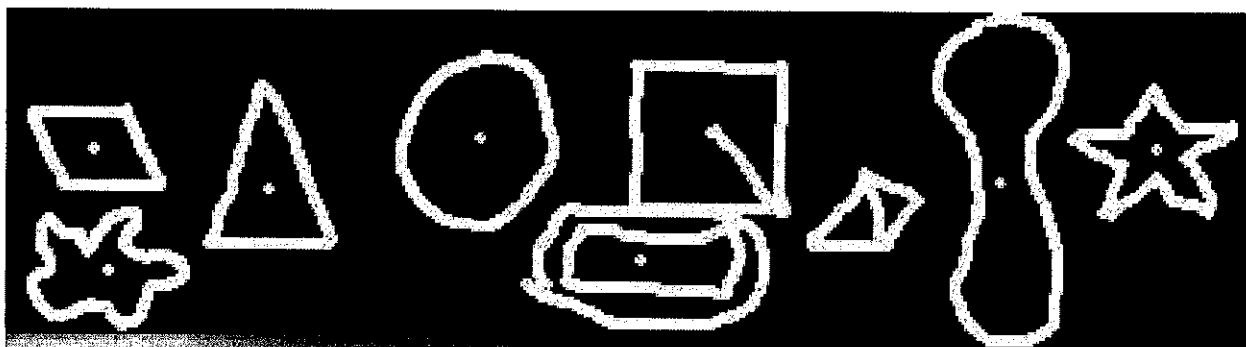


Figure 6. Différentes propositions des pistes (groupe de 24 élèves).

Finalement, les élèves ont choisi la piste carrée, et ils ont commencé à travailler en équipe. Voici quelques productions des équipes.

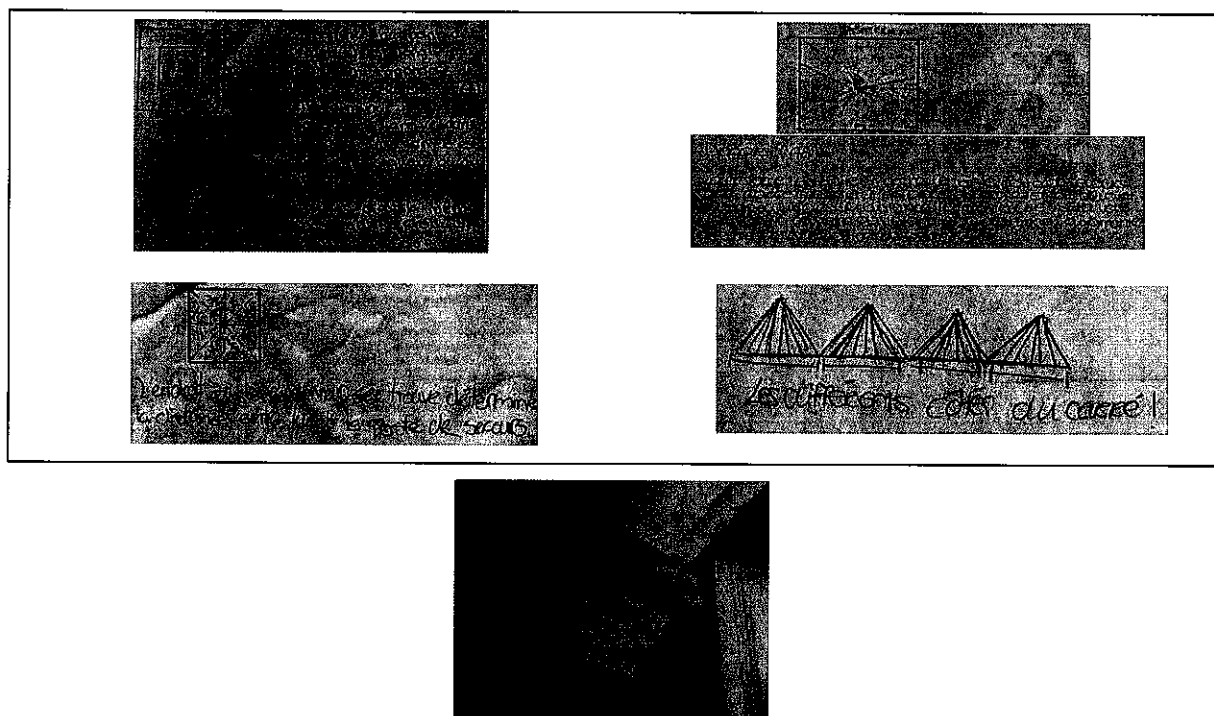


Figure 7. Productions des élèves relativement à la situation du randonneur

Une fois arrivé à la représentation schématique, presque toutes les équipes se sont arrêtées sans savoir comment continuer avec les instructions demandées de produire différentes représentations. Face à la question : Qu'est-ce que nous pouvons faire qui soit différent de ce que nous avons fait déjà pour transmettre l'information de la situation à un autre élève? Les élèves n'ont pas pu continuer. Alors, l'enseignant a suggéré d'utiliser le matériel prévu pour travailler cette situation (fil à souder, corde, pailles de bois, etc).

C'est exactement la manipulation du fil à souder et les pailles de bois qui ont servi pour faire une représentation physique de la situation, et aussi avec la possibilité de déplier leur piste (voir Figure 8).

Pendant que les élèves travaillaient en équipe, quelqu'un de l'administration a sonné à la porte et l'enseignant est allé voir qui avait sonné. Pendant que lui était absent, l'interaction entre les élèves a tout de suite changé. Par exemple, dans une équipe qui a été filmée, une des filles de l'équipe a dit : « comme dans la vie réelle, sont les filles qui travaillent et les garçons regardent... ». Un des garçons a protesté d'immédiat en disant

que lui était responsable d'écrire la discussion du groupe ; l'autre garçon lui, a commencé à raconter une histoire de ce qu'il allait faire dans la vie pour ne pas travailler du tout...

Ce qui est intéressant est que quand l'enseignant est retourné pour voir ce que l'équipe a fait, il a été surpris par leur production. Alors, il a posé la question suivante : « Cette façon là de représenter donne une bonne idée des représentations des distances? ...Une fois que ça s'est déroulé est-ce que ça vous semble familier, ça, vous fait penser à quelque chose? ». Et c'est le garçon qui était responsable d'écrire la discussion de l'équipe qui a répondu, pendant qu'une des filles tenait la piste déroulée : « Ça ressemble à un graphique de proportion si l'on veut là... l'axe horizontal.. Axe vertical... plan cartésien... ». Le garçon avait suivi les démarches des deux filles et avait réfléchi autour de la situation pendant qu'il prenait des notes sur la discussion. Dans son explication à l'enseignant, il a signalé qu'en réalité il y avait « une infinité de pailles » et avec un mouvement de la main il a montré l'allure d'une courbe continue. L'enseignant lui a demandé de répéter ce qu'il venait de dire, et le garçon probablement a pensé qu'il avait fait une faute et il a répété le même discours, mais cette fois-ci il a montré l'allure de la courbe comme si elle avait des pics. C'est cette représentation qui est restée chez ses compagnons (voir Figures 8 et 9).

Il y a eu deux types de réactions. Une des filles a dit : « lui est fou, lui est fou... », et l'autre qui semble être la chef du groupe a réagi : « Tu fais un plan cartésien? ». Le cours est fini à ce moment, et l'enseignant a demandé à cette équipe de faire une présentation à toute la classe pour le cours suivant. Il faut dire que les autres équipes sont arrivées plus au moins à la même conclusion, mais dans les autres équipes ils ont utilisé de petits bouts de corde au lieu de pailles en bois. Dans le cours suivant, c'est la chef de l'équipe qui a fait la présentation avec un des garçons (voir Figure 8).



Figure 8. Représentations à l'aide des matériaux produits par un des équipes.

Dans les discussions avec l'enseignant sur la méthodologie ACODESA, nous avons mis l'accent sur l'importance de promouvoir un débat entre les élèves. La fille qui était au tableau a parlé des différences entre la représentation physique et la représentation graphique au tableau, « à cause de l'échelle... », l'enseignant a demandé si tout le monde était d'accord, mais le groupe semblait ne pas avoir saisi ce que la fille voulait dire au juste par échelle et l'enseignant n'a pas insisté sur ce sujet. L'enseignant a questionné alors sur l'allure de la courbe en disant « Ok. Bon, moi c'est cette ligne-là [pointillé sur le graphique, Figure 8], je veux qu'on clarifie ça, es-tu d'accord pour relier ça comme ça toi? Qu'est-ce que ça implique? ». La fille a changé l'allure de la courbe en dessinant une courbe continue.

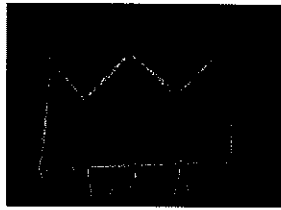


Figure 9. Représentation graphique d'une des équipes.

L'enseignant a demandé si tout le monde était d'accord. Alors, c'est à ce moment qu'un autre garçon timidement a signalé que de son point de vue l'allure de la courbe devrait être différente. Il est passé au tableau et à partir de là, le débat a commencé. En même temps deux filles se sont levées pour aller au tableau. Une des filles était membre de l'équipe qui avait fait la présentation à toute la classe. Ce qu'elle a dit c'était que la représentation graphique du garçon était liée à une piste non carrée et elle a dessiné la piste (piste au milieu de la Figure 10). Cette fille qui parle plus fort a attiré l'attention de l'enseignant. L'autre fille plus timide allait retourner à sa place quand l'enseignant a aperçu ce qu'elle avait dessiné au tableau. Il a demandé à la fille d'expliquer sa procédure et ce qu'elle a dit est : j'imagine un cercle et je vais dessiner seulement « les parties des pailles » à l'extérieur du cercle; si je déroule le cercle, j'obtiens une représentation graphique comme celle-ci (voir représentations à droite de la Figure 10).

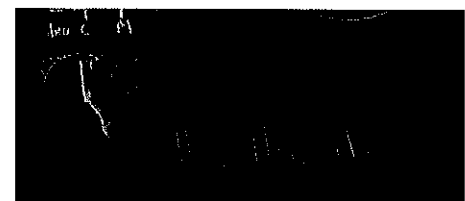
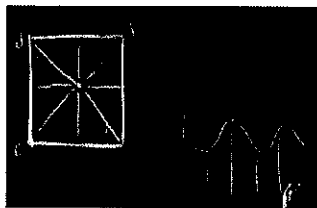


Figure 10. Le débat a commencé et les élèves ont proposé différentes courbes.

Tout le monde a parlé en même temps, chacun voulant donner son opinion, et l'enseignant pour contrôler la situation a demandé de retourner au travail en équipe et de vérifier les procédures pour se décider sur la représentation graphique liée à la situation du randonneur. Les équipes sont retournées au travail et elles ont décidé de prendre en compte davantage d'emplacements du randonneur, en général ; dans toutes les équipes, les productions sont similaires à la représentation montrée dans la Figure 11.



Figure 11. À l'aide de plus d'emplacements, les élèves sont arrivés à la représentation graphique.

Selon la méthodologie ACODESA, on doit ramasser les productions des élèves et demander une reconstruction à la maison. Les élèves ont fait la reconstruction individuelle sans problème.

Le randonneur, processus inverse (résumé)

L'activité : Étant donnée une représentation graphique liée à la piste carrée, trouver la position du poste de secours.

Figure 12. Résumé de la 2^e activité, le randonneur processus inverse.

Ce qui nous a frappés c'est que pour le processus inverse du randonneur les élèves avaient développé des stratégies pour localiser le poste de secours. Par exemple, quand une des équipes a présenté la représentation graphique de la Figure 13 les élèves ont dit que si la distance initiale était zéro, alors le poste de secours était exactement sur la piste et au début de celle-ci; et comme le graphique était symétrique, le poste de secours devrait être placé dans un coin du carré (voir représentation d'une élève dans la Figure 13 à droite).

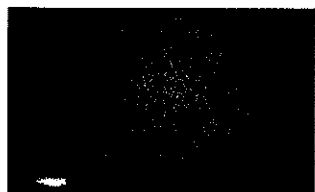


Figure 13. Proposition d'une équipe et réponse immédiate des élèves.

Étape d'institutionnalisation

L'enseignant, après le travail des élèves sur les cinq activités, a pris en considération leurs résultats et a procédé à une phase d'institutionnalisation en montrant les représentations standard dans la résolution des situations problèmes.

Résultats

Les élèves, avec l'aide du matériel ad hoc, ont construit un pont entre le schéma et la représentation graphique. C'est-à-dire que les SP ont joué un rôle important dans le développement des structures structurantes (*habitus*). Les élèves dans cette expérimentation, ont développé des connaissances liées à l'acquisition du concept de covariation en travaillant les trois premières activités (photographe, jacuzzi et randonneur). Les deux autres activités se sont transformées en problèmes puisque les élèves ont développé, avec les trois premières, des compétences pour résoudre des problèmes. Ce qui est important, aussi, c'est que la représentation algébrique a émergé en travaillant sur les deux dernières activités (les carrés et les ombres) et elles ont ainsi servi à la consolidation des connaissances. C'est-à-dire, à la transformation des connaissances en savoir et leur utilisation pertinente, montrant que ces élèves, en général, ont développé des compétences dans la résolution des situations problèmes.

La méthodologie ACODESA a bien fonctionné avec le groupe de 24 élèves promouvant une construction sociale des connaissances. Par contre, pendant la résolution des SP avec le groupe de 36 élèves, il y avait beaucoup de bruit ; et pour l'enseignant c'était difficile de gérer les discussions. Il faut signaler que l'enseignant travaillait pour la première fois avec cette méthodologie, et comme nous venons de le dire, les activités se sont bien déroulées avec le groupe de 24 élèves. Nous avons constaté, en accord avec ce que l'on trouve dans la littérature, qu'avec plus de 30 élèves une méthodologie d'apprentissage collaboratif est beaucoup moins efficace.

Les membres d'une des équipes ont parlé avec l'enseignant et ils ont demandé à « travailler comme avant », avec une approche magistrale, où l'enseignant donnait des exemples et les

élèves pouvaient les appliquer aux exercices demandés. Ces élèves ne sont pas habitués à une approche d'apprentissage collaborative et ils ont trouvé décevant le travail de résolution des situations problèmes.

Remerciements

La recherche présentée dans ce document a été réalisée grâce à la subvention Fonds de la Recherche sur la Société et la Culture du Québec (Appui # 008-SE-118696) et Conseil de Recherche en Sciences Humaines du Canada (No. 410-2008-1836, CID 130252). Nous remercions aussi les élèves qui ont participé à cette recherche.

Références

- Boucher, C., Marotte L. et Coupal M. (2007). Intersection mathématique 2^e cycle secondaire 1^{er} année. Éditorial Chenelière Éducation. Québec.
- Bourdieu, P. (1980). *Le sens pratique*. Paris, Éditions de Minuit.
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Paris: La pensée sauvage.
- Conne F. (1992). Savoir et Connaissance dans la Perspective de la Transposition Didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 12, no. 2.3 pp. 221-270.
- Duval R. (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 5(1993) 37-65.
- Duval R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissage intellectuels*. Peter Lang, Suisse.
- Glaeser G. (1999). Une introduction à la didactique expérimentale des mathématiques. *La Pensée Sauvage Éditions*. France.
- Gonzalez A., Hitt F. & Morasse C. (2008). The introduction of the graphicrepresentation of functionsthrough the conceptoco-variation and spontaneousrepresentations. A case study. In Figueras, O. & Sepúlveda, A. (Eds.). *Proceedings of the Joint Meeting of PME-32, and PME-NA XXX*, Vol. 3, pp. 89-97. Morelia, Michoacán, México: PME.
- Glaeser G. (1999). Une introduction à la didactique expérimentale des mathématiques. *La Pensée Sauvage Éditions*. France.
- Guilford J. P. (1967). *The Nature of Human Intelligence*. McGraw-Hill Book Company.
- Hitt F. (2004). Une comparaison entre deux approches, enseignement des mathématiques sans ou avec logiciels et calculatrices symboliques. In Giménez J., FitzSimons G. and Hahn Corine (2004) Actes de la CIEAEM-54, Vilanova i la Geltrú. Spain, pp. 351- 359.
- Hitt, F. (2006). Apprentissage en collaboration, débat scientifique et auto-réflexion (ACODESA). *En Actes de la Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques (CIEAEM-58)*, Srni, République Tchèque, pp. 121-126.
- Hitt F. (2007). Utilisation de calculatrices symboliques dans lecadred'uneméthoded'apprentissagecollaboratif, de débats scientifique et d'auto-réflexion. In M. Baron, D. Guin et L. Trouche (Éditeurs), *Environnements informatisés et ressources numériques pour l'apprentissage. conception et usages, regards croisés* (pp. 65-88). Éditorial Hermes.
- Hitt F., et Passaro V. (2007). De la résolution de problèmes à la résolution de situations problèmes: le rôle des représentations spontanées. *Actes de la Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques (CIEAEM-59)*. Dobogókő, Hongrie, juillet, 2007, pp. 117-123.

Hitt F., Gonzalez A. & Morasse C. (2008). Visualization and students' functional representations in the construction of mathematical concepts. An example: The concept of co-variation as a prelude to the concept of function. In ICME-11, Topic Study Group 20 (TSG 20), Visualization in the Teaching and Learning of Mathematics, July 6-13, 2008, Monterrey, N. L., Mexico. <http://tsg.icme11.org/tsg/show/21>.

Hitt F. & Morasse C. (2009). Développement du concept de covariation et de fonction en 3ème secondaire dans un contexte de modélisation mathématique et de résolution de situations problèmes. Proceedings CIEAEM 61 – Montréal, Québec, Canada, July 26-31, 2009. "Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica)", Supplemento n. 2, 2009. G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy). http://math.unipa.it/~grim/cieaem/quaderno19_suppl_2.htm

Janvier C. (1987). Representation and Understanding: The notion of Function as an Example. In C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 67-71). Lawrence Erlbaum Associates.

Legrand M. (1993). Débats scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse. *Repères*, no. 10, 123-159, janvier 1993.

Legrand M. (2001). Scientific debate in mathematics courses », in Derek Holton (dir.), *The teaching and learning of mathematics at university level : An ICMI Study*, 127-135, Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

Ministère de l'Éducation du Loisir et du Sport. Programme de Formation, Deuxième Cycle du Secondaire. (Nov-2007). <http://www.mels.gouv.qc.ca/DGFJ/dp/menusec.htm>.

Perrenoud, P. (1999). Construire des compétences, tout un programme ! *Vie pédagogique*, n° 112, pp. 16-20.

Sauvé, Pascale. 2000. Le socioconstructivisme et les grandes orientations de la réforme. *Le Virage* Vol. 2, no 3 • 16 février 2000.

Annexe : Activité du randonneur

Page 1	
Nom de l'élève :	Directives : ▪ Pour le travail individuel/initial, utilise un stylo à encre noire. ▪ Pour le travail d'équipe (ou spécifier en quel moment), si tu modifies ton travail, utilise un stylo à encre rouge. ▪ Après le bilan avec la classe (ou spécifier en quel moment), si tu modifies ton travail à nouveau, utilise un stylo à encre verte. Activité : Le randonneur
Noms des membres de l'équipe :	

	
-------------------------	--

Page 2

Un randonneur entreprend une longue randonnée en forêt. Il suit une **piste fermée (ou un circuit)** qui lui permet de revenir à son point de départ à la fin de la randonnée. Durant sa promenade, il ne repasse **jamais au même endroit** de la forêt et il ne fait qu'un seul tour de piste.

Un **poste de secours** est situé à l'intérieur de la région délimitée par la piste. Un grand mât avec un drapeau permet au randonneur de repérer l'emplacement du poste de secours quel que soit l'endroit où il se trouve sur la piste.

Trace une piste de ton choix et place le poste de secours à l'intérieur en respectant l'énoncé.

Ma piste de randonnée :

Page 3

La distance entre le randonneur et le poste de secours varie selon l'endroit où se trouve le randonneur sur la piste. Décris cette variation

Page 4

Trouve une nouvelle manière de présenter le phénomène décrit à la page 3 sans que le dessin de la piste y apparaisse.

Page 5

En utilisant la réponse à la question précédente, décris en mots de quelle façon la distance entre le randonneur et le poste de secours varie selon les endroits où se trouve le randonneur sur la piste.

Page 6

Vous allez maintenant exploiter la façon de présenter le phénomène que vous avez utilisé à la page 4 pour étudier le processus inverse. C'est-à-dire que vous allez tenter de déterminer l'emplacement du poste de secours à partir de la représentation du phénomène (la distance entre le randonneur et le poste de secours varie selon l'endroit où se trouve le randonneur sur la piste).

*Avec les membres de ton équipe, vous changez l'emplacement du poste de secours EN LE GARDANT SECRET, CAR CHAQUE ÉQUIPE CHOISIT **SON** NOUVEL EMPLACEMENT.*

Page 7

Dessinez à nouveau la piste et identifiez le nouvel emplacement du poste de secours avec un point de couleur :

Page 8

Présentez le phénomène, c'est-à-dire comment la distance qui sépare le randonneur du poste de secours varie selon l'endroit où se trouve le randonneur sur la piste.

Page 9

À FAIRE DANS LE CAHIER D'ÉQUIPE !

Les représentations vont circuler dans la classe, observez celles des autres équipes.

Vous devez les interpréter, c'est-à-dire trouver **quel est l'emplacement du poste de secours choisi par les autres équipes.**

Pour chaque représentation, un responsable écrit son nom. Ensuite, le nom de l'équipe qui a produit la représentation, puis il trace une **esquisse** de la piste avec l'emplacement du poste de secours.

Chaque membre de l'équipe DOIT être responsable d'au moins une production.

Nom de l'équipe	Esquisse de leur représentation et emplacement du poste de secours
Nom du responsable:	
Nom de l'équipe	Esquisse de leur représentation et emplacement du poste de secours
Nom du responsable:	

Nom de l'équipe	Esquisse de leur représentation et emplacement du poste de secours
Nom du responsable:	

Page 10

Vous allez à nouveau exploiter la façon de présenter le phénomène que vous avez utilisé à la page 4 pour étudier le processus inverse. Vous allez maintenant tenter de déterminer la forme de la piste et l'emplacement du poste de secours à partir de la représentation du phénomène (la distance entre le randonneur et le poste de secours varie selon l'endroit où se trouve le randonneur sur la piste).

Avec les membres de ton équipe, vous changez la forme de la piste et vous choisissez l'emplacement du poste de secours **EN GARDANT CES INFORMATIONS SECRÉTES CAR CHAQUE ÉQUIPE CHOISIT SA PISTE ET L'EMPLACEMENT DU POSTE DE SECOURS.**

Dessinez une nouvelle piste et identifiez l'emplacement du poste de secours avec un point de couleur :

Page 11

À FAIRE DANS LE CAHIER D'ÉQUIPE !

Les représentations vont circuler dans la classe, observez celles des autres équipes.

Vous devez les interpréter, c'est-à-dire trouver **quel est l'emplacement du poste de secours choisi par les autres équipes.**

Pour chaque représentation, un responsable écrit son nom. Ensuite, le nom de l'équipe qui a produit la représentation, puis il trace une **esquisse** de la piste avec l'emplacement du poste de secours.

Chaque membre de l'équipe **DOIT** être responsable d'au moins une production.

Nom de l'équipe	Esquisse de leur représentation et emplacement du poste de secours
Nom du responsable:	
Nom de l'équipe	Esquisse de leur représentation et emplacement du poste de secours
Nom du responsable:	
Nom de l'équipe	Esquisse de leur représentation et emplacement du poste de secours
Nom du responsable:	

Améliorons la nouvelle représentation.

As-tu des propositions pour améliorer la représentation?

Si oui, prends-les en note :

Bilan : Pour cette représentation, dans la classe, les autres élèves ont proposé :

Chiffres mode d'emploi.

Exploration du milieu mathématique et expérience à l'école primaire autour de quelques critères de divisibilité.

Christine DEL NOTARO

Université de Genève

Christine.DelNotaro@unige.ch

Résumé

Ce travail de thèse entre dans une perspective de recherche à propos des connaissances mathématiques de l'élève dans l'enseignement des critères de divisibilité ; nous cherchons à comprendre quelle est la part de l'expérience qu'il peut se construire à propos du monde des nombres et comment on peut tenter de convoquer cette expérience lors d'une interaction entre expérimentateur et élève. À travers l'étude du fonctionnement du milieu, nous tentons de cerner comment s'organisent les différents milieux de la tâche, d'en analyser les *réponses* et d'examiner en outre les moyens de faire vivre un savoir. Pour travailler ces questions, nous avons utilisé les informations recueillies lors d'observations directes dans les classes dans le but de construire une suite de situations expérimentales. Dans cette optique nous nous inspirons des travaux de Bloch (1999 & 2002), qui se situent dans une perspective de « *recherche d'une dialectique scientifique entre analyse théorique et contingence* ». Nous nous servons de sa modélisation pour décrire les trois pôles que nous souhaitons faire se répondre, à savoir *la théorie, l'expérimentation et la contingence*. Les travaux de Conne (1992) guident nos propres réflexions théoriques, notamment ses écrits sur *Savoir et Connaissance*, ainsi que les travaux de l'équipe DDMES (2003) sur *l'investigation du milieu et le jeu de tâches* (Favre, 2008). À partir de quelques observations d'une même leçon sur les critères de divisibilité par 4 dans des classes dites ordinaires, nous avons mis en évidence un phénomène didactique que nous nommons *saturation du milieu* : professeurs et élèves sont submergés par un afflux de connaissances dans le milieu qu'ils ne parviennent pas à synthétiser. Le professeur, pour reprendre le contrôle de la situation, et pour couper court à cette abondance d'informations, valide à la place des élèves et recourt à l'institutionnalisation. On observe dans sa gestion qu'il filtre les affirmations des élèves pour ne retenir que celles axées sur un état et non pas sur un processus, afin d'aboutir plus rapidement à une conclusion.

Mots clés

Phénomène de saturation du milieu, interactions de connaissances, expérience et expérimentation, critères de divisibilité, élèves de 11-12 ans, transposition didactique.

I. Introduction

Lors de notre présentation au séminaire national du 27 mars 2010, nous avons tenté de faire part du raisonnement qui a présidé à toute notre recherche ; c'est ce que nous allons restituer dans cet article. Notre travail de thèse se situe entre *intuition et mouvement* ; il s'autoalimente et s'enrichit au gré des observations et des déplacements de connaissances, fussent-ils du côté des élèves ou de l'expérimentatrice.

« L'intuition est globale et instantanée, elle perçoit la chose dans son ensemble et d'un seul coup, comme fait le regard : *tota simul*. Le raisonnement est progressif, c'est un mouvement de pensée qui conduit des prémisses à la conclusion en passant par un ou plusieurs intermédiaires. » Blanché (1973)

Notre raisonnement s'est échafaudé à partir de deux intuitions ; la première concerne un phénomène didactique observé dans des leçons ordinaires de stagiaires, que nous avons nommé *saturation de milieu*. Cette première intuition a été un fil conducteur de la recherche ; c'est autour de celle-ci que la réflexion s'est construite. Elle a finalement pris la forme d'un phénomène didactique lorsque, après l'avoir observée à maintes reprises auprès des élèves, nous avons tenté de la catégoriser. Ce phénomène montre en effet une certaine consistance, tout en méritant évidemment d'être encore approfondi.

La deuxième intuition découle de la première : il y a une nécessité à adjoindre la question de l'expérience des élèves, pour comprendre véritablement ce qui fait saturer le milieu. Le fait de sonder de quoi est constituée cette expérience nous a permis de la mettre en relation avec les possibles causes de saturation. L'importance de la prise en compte de l'expérience est pour nous indéniable aujourd'hui, si l'on veut comprendre de quelle manière se construisent les connaissances.

Pour montrer où et comment le milieu sature lorsque l'élève est privé de son expérience, nous nous sommes inspirée de la notion de fait numérique introduite par Conne (Conne 1987) en l'élargissant afin de caractériser les connaissances, présentant ainsi des « niveaux d'états de connaissances ». Nous utilisons des guillemets, bien consciente des glissements de sens possibles. Le terme de « niveaux » n'indique en aucun cas une hiérarchie, mais plus exactement une amplitude dans les connaissances des élèves, en rapport avec un objet mathématique précis.

Notre présentation s'est construite sur trois axes dont nous allons maintenant rendre compte de manière plus détaillée, en insistant toutefois sur le phénomène de *saturation du milieu*.

1. Construction du raisonnement et problématisation : exposé des observations d'une série de tâches sur la divisibilité et explicitation de la construction de notre raisonnement autour du phénomène de saturation du milieu.
2. Analyse des données, où sont mis en évidence les éléments-clés et les liens entretenus entre les concepts de saturation, expérience et fait numérique, ainsi que la manière dont ce dernier concept a dû être réorienté pour être opérationnel pour notre analyse.
3. Résultats. Nous avons extrait les résultats les plus saillants retirés de cette recherche, qui sont autant de pistes à suivre et à développer.

L'organigramme présenté au séminaire avait pour but de restituer les méandres de ce raisonnement et d'en fixer quelques traces, qui vont être précisées au fil de ces pages.

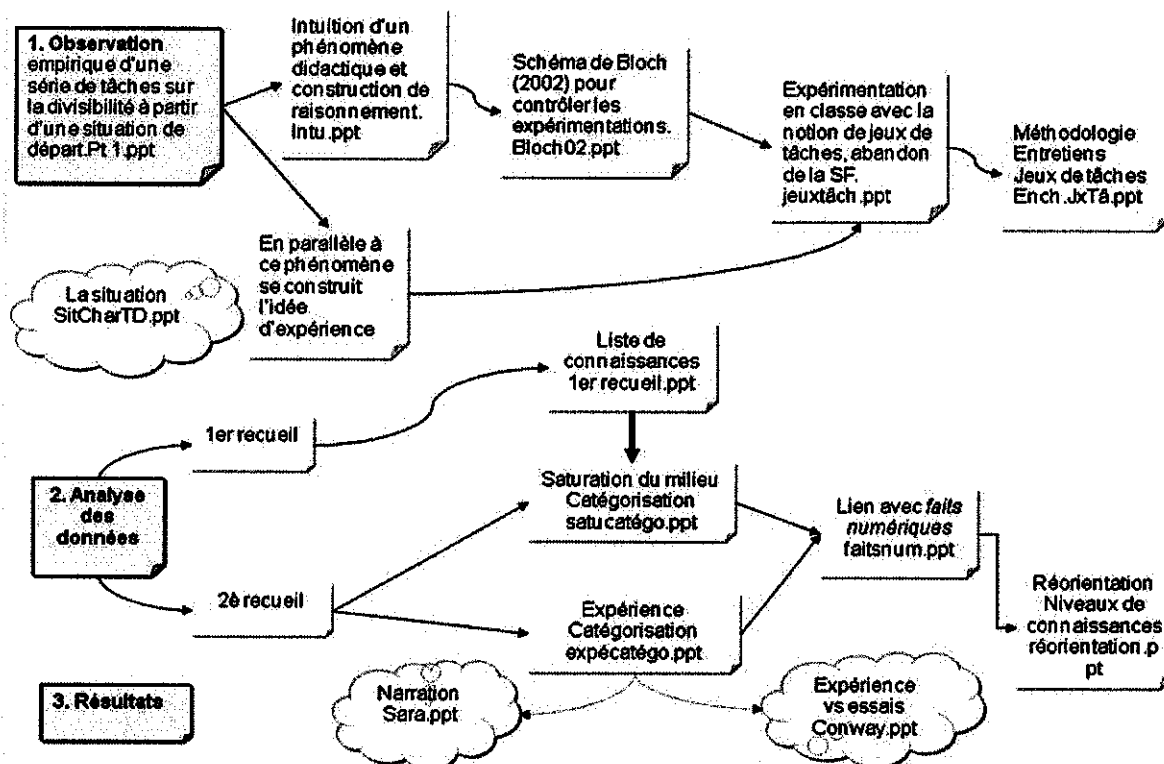


Figure 1. Organigramme de la présentation

II. Observation empirique d'une tâche portant sur la divisibilité

Le contexte

Nous avons suivi quelques enseignantes-stagiaires en dernière année de formation et filmé leurs enseignements. Nous nous sommes arrêtée sur quelques leçons qui tournaient autour des critères de divisibilité car il nous semblait que « quelque chose » ne marchait pas bien : les élèves revenaient fréquemment sur ce qu'ils disaient et donnaient des réponses contradictoires. Les stagiaires quant à elles, montraient une certaine difficulté à mener leurs leçons et semblaient à chaque fois soulagées de la clore. Ayant assisté à ce moment-là, à quelques-uns de leurs cours dans le cadre de leur formation en didactique des mathématiques, nous avons observé que la situation en question semblait au contraire assez dynamique et appréciée des étudiants, et qui plus est, formatrice par rapport à la notion d'*analyse a priori*.

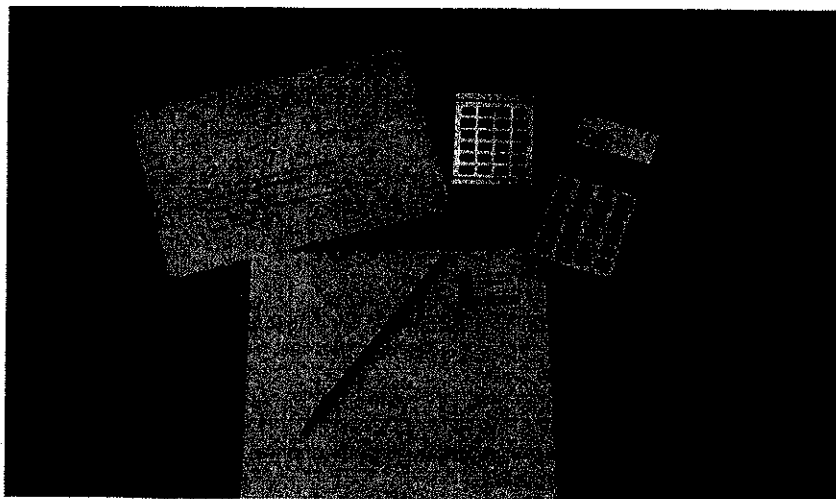
La situation

Il s'agit de la situation de Charrière (1991) qui pose la question de comment compléter un nombre (2.7.) afin qu'il soit divisible par 4. Cette situation est marginale dans le sens qu'elle figure dans un cahier de recherche publié par l'un des services du département de l'instruction publique genevoise (le service de la recherche pédagogique, qui par ailleurs n'existe plus), mais pas dans les moyens officiels d'enseignement. Elle est marginale également, parce que les enseignants qui proposent ce type de recherche en classe sont rares. Enfin, l'exploration que nous en avons faite l'est encore plus, puisque cela ne se pratique pas du tout à l'école primaire : les enseignants ne procèdent pas pour eux-mêmes à l'exploration d'une situation à laquelle ils raccrocheraient celle de leurs élèves. Que ce soit par manque de temps, d'intérêt ou autre ne nous importe pas ici ; nous retenons comme un fait neutre et objectif que les

enseignants n'explorent pas le milieu de la tâche qu'ils vont soumettre à leurs élèves autrement qu'en pensant aux stratégies développées par ceux-ci. Ils pensent la tâche via leurs élèves, certes, mais pas pour eux-mêmes.

EXEMPLE 35

DIVISIBILITE



2 . 7 . : 4
milliers centaines dizaines unités

- A. Trouve (et écris) toutes les façons de compléter ce nombre pour que la division par 4 ne donne pas de reste.
- B. Remplace le 7 des dizaines par un autre chiffre (1, 2, 3, ...):
- Combien y aura-t-il, dans chaque cas, de nombres divisibles par 4?
Essaie d'énoncer des lois.

Note : pour B, utilise une calculatrice de poche ou bien travaille avec deux autres camarades et répartissez-vous la tâche.

Figure 2. Tâche de Charrière

Il s'agit d'une situation qui invite l'élève à explorer les nombres à travers la notion de critère de divisibilité ; c'est donc en apparence une situation très ouverte, si l'on se réfère à la définition qu'en donnent Arsac, Germain et Mante (1991).

Il y a 20 possibilités pour compléter le nombre, pour la question A: 2072, 2076, 2172, 2176, 2272, etc. Et 230 autres multiples de 4, pour la question B (puisque'il y en a 250 en tout)¹.

¹ Si on remplace le chiffre des dizaines par 1, 3, 5, 9, nous obtenons 2x10, donc en tout, 20x4 = 80 possibilités. Si on remplace par 0, 2, 4, 6, 8 : 3x10 => 30x5 = 150 possibilités. Autrement dit, lorsque le chiffre de la dizaine est pair, nous avons 3 possibilités et lorsqu'il est impair, nous en avons 2. On voit déjà l'ouverture pour l'élève sur la distinction chiffre/nombre et parité/impairité, ainsi que les prolongements possibles.

III. Du point de vue de la transposition didactique

Cette situation de départ est intriquée dans un processus de transposition didactique, au sens de Chevallard (1981) fort intéressant ; il se trouve en effet que cette situation a des fonctions différentes selon l'utilisation qu'en fait chacun des acteurs de l'institution qu'il représente. Elle a de ce fait subi quelques distorsions au passage, si l'on considère qu'elle a été tour à tour conçue par la noosphère pour l'enseignement, reprise en formation initiale par les formateurs universitaires et, enfin, utilisée en classe par des professeurs stagiaires en contrat de formation. Reprenons chacune de ces utilisations afin de comprendre de quoi elles sont composées :

- a. Situation conçue par un service de recherche² pour initier les élèves à la recherche mathématique. Telle qu'elle a été formulée par Gérard Charrière, cette situation invite l'élève à explorer les nombres à travers la notion de critère de divisibilité ; elle n'a pas été conçue à partir d'un objet mathématique dans le but de l'enseigner, mais dans le but de faire rencontrer le nombre aux élèves, de les encourager à mettre en œuvre des connaissances antérieures et à dégager des lois de fonctionnement concernant le critère de divisibilité par 4.

Pour notre part, nous y voyons des prémisses à la constitution d'expérience, bien que le but ne soit pas explicite. En effet, prospecter le domaine des nombres, expérimenter et mettre en œuvre des connaissances ou, encore, dégager des lois, sont bien de l'ordre de l'expérience que l'on peut aménager autour d'un savoir mathématique. Le critère de divisibilité se révèle être dans les intentions didactiques, un prétexte à l'exploration mathématique et non pas à l'enseignement d'une notion précise. N'est pas associé aux critères de divisibilité, par exemple, un travail sur les nombres premiers, totalement absents de l'enseignement. Pas plus que ne sont approchés les thèmes de la décomposition de nombres en facteurs premiers, ou, encore, les puissances en lien avec la divisibilité. Les puissances, en revanche, font l'objet d'un chapitre tout autant envisagé comme une succession de *faits numériques*, dont l'étude en reste au niveau manifeste³.

- b. Situation reprise en formation initiale pour initier les étudiants à l'analyse a priori. La situation a été reprise en formation initiale dans le but d'illustrer la notion d'*analyse a priori*, selon la *Théorie des Situations Didactiques*, de Guy Brousseau (1998). Cette situation, apparemment très ouverte, permet en effet de s'exercer à l'anticipation de procédures d'élèves, qui se révèlent généralement beaucoup plus inattendues que ne l'imaginaient les étudiants. Elle permet aussi de se pencher sur la notion de stratégies de base, visées ou expertes. C'est par rapport aux stratégies de base des élèves que les étudiants sont le plus surpris, évidemment, car cette appellation recouvre la totalité des stratégies possibles des élèves, aussi bien celles qui sont correctes que celles qui sont erronées. Les stratégies visées étant celles attendues en rapport au degré scolaire ou aux intentions du professeur et les stratégies expertes faisant référence à une résolution canonique. La situation se prête également à l'acculturation aux notions de relance du professeur, qui peuvent être relativement nombreuses dans ce cas, ou de variable didactique de la tâche, ici également variées.

Les étudiants sont eux-mêmes initiés à l'exploration mathématique et au réinvestissement de leurs propres connaissances, quelquefois enfouies pour eux aussi.

- c. Situation utilisée par les professeurs stagiaires pour enseigner les critères de divisibilité par 4. Deux étudiantes observées en stage ont décidé de reprendre cette situation en classe afin d'enseigner les critères de divisibilité par 4 à des élèves de 5^{ème} primaire. De cette

² SRP : service de la recherche pédagogique (1991)

³ Selon Conne, 1987&2004, explicité plus loin.

situation exploratoire, elles dégagent une intention didactique : l'enseignement de ce savoir, en conservant la même consigne que celle qui a été donnée en cours, consigne elle-même inchangée par les formateurs universitaires.

Ce type de situation est un modèle qui vise d'une part à initier les élèves à la recherche et à l'exploration mathématique, d'autre part, à initier les professeurs à des activités initiatrices pour les élèves. On peut donc parler de modèle d'animation didactique pour le professeur.

Nous relevons encore que lorsque le contenu mathématique est sollicité ; c'est-à-dire lorsque le professeur stagiaire élabore un projet d'enseignement autour de ce contenu, le milieu résiste fortement, comme nous le décrirons. Ce phénomène de résistance s'exprime par ce que nous avons nommé une *saturation* : un trop-plein d'informations qui devient difficile à gérer.

De ce modèle d'animation, il était tentant de glisser vers un modèle d'enseignement : un pas qui a été franchi par les stagiaires. Nous observons là une transposition de dispositifs. Cette transposition nous a par la suite donnée l'occasion d'observer une multitude de micro-phénomènes, qui nous ont fait saisir la nécessité de nous pencher sur un phénomène plus large et tout à fait nouveau, que nous avons nommé : le phénomène de *saturation du milieu*.

Ainsi, le savoir concernant les critères de divisibilité par 4 a été transposé trois fois, à travers trois projets d'enseignement différents : d'initiation d'élèves à la recherche mathématique, il passe à l'initiation d'étudiants à un concept de didactique des mathématiques, puis à une situation d'enseignement.

De nos observations, nous retirons qu'au-delà des intentions, il n'est pas fait état d'un véritable travail sur les critères et relations de divisibilité ; on reste dans une zone très superficielle, malgré les promesses d'expériences qui pourraient y être liées.

Aucune étape du processus précédemment décrit n'est faite de commentaire sur les critères en soi ; que ce soit une présentation mathématique des notions plus complexes qui se cachent derrière celle de critère de divisibilité ou d'une simple mention dans le fascicule du maître, voire, dans le cours de formation. Du côté des moyens d'enseignements officiels⁴, nous verrons que d'autres critères de divisibilité sont évoqués de manière très allusive.

Il y a une sorte de naturalisation du critère de 4, en particulier, et des autres critères également. Ce critère ne va pas être approfondi outre mesure, une fois les lois dégagées par les élèves et / ou les étudiants ; quant à faire des liens avec d'autres critères, des comparaisons ou une recherche plus élaborée, rien n'est prévu et, de fait, les enseignants et stagiaires observés ne se posent pas la question. C'est un savoir qui semble survivre, seul et autonome, et dont les règles de fonctionnement (les lois dégagées) restent à l'état de constat, ne permettant pas de faire de ponts vers d'autres notions, de tisser d'autres liens, pourtant nombreux. Les élèves sont encouragés à explorer le nombre et à en tirer des conclusions pour le moins passagères, mais qui mériteraient toutefois d'être approfondies. Nos expérimentations montreront de quelle manière les élèves s'emballent à la moindre sollicitation à creuser quelque peu le sujet.

Comme nous l'avons spécifié, le contenu mathématique n'est pas le point d'ancrage de cette situation, dans la mesure où des objectifs comme *initier les élèves à la recherche* ou encore *initier les étudiants à l'analyse a priori* peuvent s'appliquer à n'importe quel contenu. La divisibilité par 4 n'apparaît pas comme un savoir visé à proprement parler dans ce type de situation. Il s'agit, pour les enseignants observés, d'enseigner les critères de divisibilité

⁴ Nous entendons strictement les manuels que reçoivent tous les enseignants.

comme un *truc*, comme une règle permettant de reconnaître rapidement, sans effectuer la division, si un nombre donné est divisible ou non par un autre.

Dans le premier passage transpositif, symbolisé par la flèche partant de la noosphère à la formation des enseignants, elle-même liée à la recherche en didactique des mathématiques, le but du système représenté est de montrer que ces savoirs sont censés circuler entre l'école et la formation initiale des enseignants.

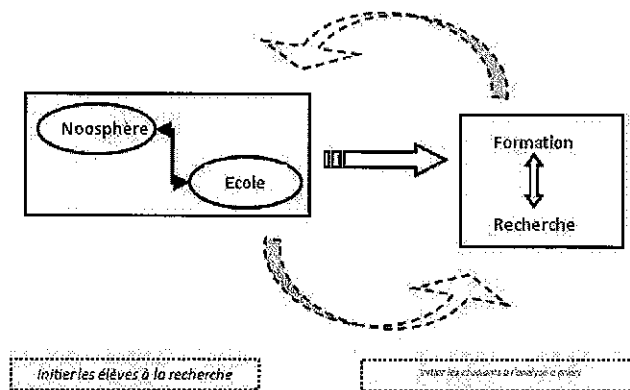
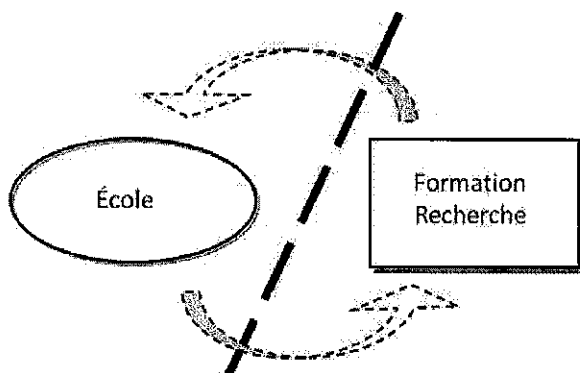


Figure 3. Circulation des savoirs

Dans notre exemple, ce mouvement de circulation part de la *situation Charrière*, créée pour l'école, et se dirige vers la formation des enseignants, puis s'en retourne de la situation de formation vers le système scolaire, peut-être enrichi au passage. Les vecteurs de cette circulation sont les étudiants eux-mêmes, qui, devenus enseignants, reprendraient la situation pour initier à leur tour leur élèves à la recherche, et ainsi de suite. Force est de constater que cela ne circule pas aussi bien qu'on le souhaiterait, l'une des causes étant le fait que les professeurs stagiaires ou les professeurs chevronnés utilisent cette situation à des fins d'enseignement des critères et non comme situation de recherche.



À ce moment-là, le système s'obstrue.

C'est lors du passage à une intention d'enseignement que le système se grippe, faisant place au phénomène de *saturation*. Nous avons évoqué que lorsque les enseignants commencent à se perdre eux-mêmes dans les dédales des connaissances des élèves, ils ont tendance à couper court en recourant à une institutionnalisation (ou ce qu'ils prennent comme telle), comme pour éliminer les connaissances *surnuméraires* indésirables. Beaucoup de

connaissances sont mises en œuvre par la situation dans un milieu qui devient trop riche et trop indifférencié et qui va finir par saturer, tant du côté de l'élève que de l'enseignant.

Les enseignants qui tentent d'enseigner les critères à l'aide de cette situation et chez qui l'on n'observe aucune forme de saturation du milieu sont ceux qui tiennent les rênes du savoir de manière très contrôlée, recourant à un système de question / réponse qui ne laisse pas de place à la recherche et à l'exploration. Peut-être ont-ils éprouvé ce phénomène antérieurement et tentent-ils d'y pallier par un contrôle très rigoureux. Ces premiers constats nous conduisent à questionner la consistance de ces savoirs lorsque ceux-ci sont basés sur l'enseignement de *faits numériques* et à proposer une première problématisation d'un phénomène, la *saturation*

du milieu, où nous montrons que dans le lot de connaissances surabondantes, on ne parvient pas à les faire passer à l'état de connaissances utiles, donc de savoir (Conne, 1992).

Quelle existence des critères de divisibilité dans les programmes scolaires? En consultant les programmes et plans d'études, du primaire jusqu'au secondaire inférieur, nous avons constaté que les propriétés structurelles des entiers relatifs ne sont plus un objet d'enseignement. Entre, d'une part, la volonté du Cycle d'Orientation (secondaire inférieur) de ne pas étudier les critères de divisibilité comme un chapitre de la théorie des nombres et, d'autre part, celle du primaire de les utiliser pour le calcul réfléchi, c'est le choix du calcul qui est clairement fait et stipulé. Au primaire, l'étude de ce chapitre semble vouloir s'ouvrir vers l'étude du nombre sous des aspects très variés, mais il s'étrique soudainement pour se conformer à la clause de l'utilité. Par ailleurs, cette clause apparaît de manière très marquée au secondaire inférieur où, par exemple le critère de 4 sera éliminé car considéré comme trop compliqué à retenir, alors qu'il fait l'objet d'une tâche en 6^e primaire (11-12 ans), au profit des critères de 2, 5, 10, 3, considérés comme utiles. On constatera tout de même avec étonnement que le critère de 3 n'est pas associé à ceux de 6 et 9.

Ainsi, l'enseignement des critères et leur sens sont généralement liés à leur utilité : un critère de divisibilité est une règle permettant de reconnaître rapidement, sans effectuer la division, si un nombre entier positif donné est divisible ou non par un autre. Dans cette optique, le critère de divisibilité comme outil de vérification lié à la structure des nombres, se doit donc d'être plus économique que l'algorithme de division et relativement simple à mémoriser ; en d'autres termes, il doit être à la fois *utile*, *efficace* et *rentable*. Nous avons constaté qu'il existait une sorte de hiérarchie de complexité des critères de divisibilité dans l'échelle de laquelle le critère de 4 se trouve au dernier échelon et se verra remplacé par « diviser deux fois par deux ».

Les quelques indications pour le maître dans la méthodologie de 6^e année mettent bien ceci en évidence.

Les termes encadrés (par nous) sont représentatifs de cette intention d'*utilité* et dénotent un souci d'*efficacité*, au sens de *rentabilité* et ne mettent pas en jeu l'exploration du nombre.

Les critères de divisibilité sont **utiles** en **calcul réfléchi**. Les élèves savent déjà reconnaître des multiples de 2 (nombres pairs), de 5 (nombres se terminant par 0 ou 5), de 10, de 100 et peut-être aussi de 50 et de 25. En sixième, les critères permettant de reconnaître ces multiples peuvent être formulés à peu près correctement.

Mais là encore, dans l'esprit du thème, ce n'est pas la formulation qui compte, mais la **méthode** qui a permis la découverte des critères: une hypothèse, sa vérification sur de très nombreux exemples puis, en cas de confirmation systématique de l'hypothèse, son adoption comme règle.

Les critères de divisibilité par 3 et par 9 sont caractéristiques de cette démarche hypothético-déductive, mais leur justification n'entre pas en ligne de compte en sixième année.

Même si un critère ne peut être « saisi » par tous, il peut se révéler fort pratique et d'un **usage** facile. L'élève qui **n'arrive pas** à le découvrir pourra au moins le **vérifier**. Dans l'activité L. 20 par exemple, certains constateront la relation entre la somme des chiffres d'un nombre et le reste de sa division par 9; d'autres ne feront qu'un **simple exercice** destiné à consolider les notions de dividende, diviseur, quotient et reste.

Figure 4. Extrait de la méthodologie de 6^e année

Associée aux indications méthodologiques, l'unique activité prévue pour « découvrir » les critères de divisibilité dans le livre de l'élève se résume à une pâle réplique de la situation de Charrière. Les autres exercices proposés sont, quant à eux, des exercices d'application.

19.

En n'observant que le dernier chiffre d'un nombre, peux-tu savoir si ce nombre possède ou ne possède pas certains diviseurs?

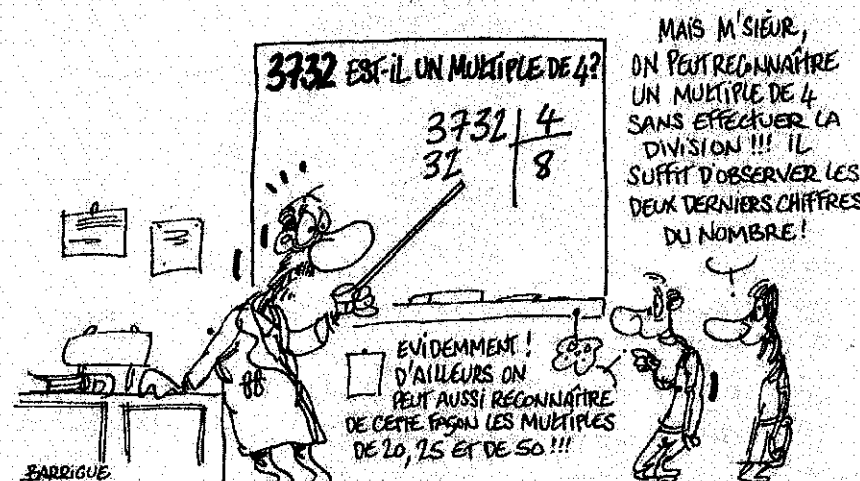


Figure 5. Exercice 19 du livre de l'élève de 6^e année.

L'énoncé semble ouvrir de la même manière vers une exploration du nombre, mais les propos contenus dans la caricature l'excluent aussitôt, puisqu'elle contient les réponses et même la marche à suivre. La tâche propose également une application de quelques autres critères que *les élèves savent déjà utiliser*, si l'on en croit la méthodologie, et qui seront repris dans des exercices d'application. Nous isolons plusieurs parties dans ce dessin ; prenons la première question : *en n'observant que le dernier chiffre d'un nombre, peux-tu savoir si ce nombre possède ou ne possède pas certains diviseurs*. Cette première partie ne se rapporte pas au contenu de l'illustration ; c'est une sorte de mise en train, un rappel concernant les multiples de 2 et de 5, censés être connus. Autrement dit, on demande à l'élève s'il existe un critère qui consiste à regarder le dernier chiffre du nombre [et le comparer au diviseur], tel que ce critère soit un moyen de savoir si un nombre possède ou pas tel ou tel diviseur. La réponse est bien évidemment oui : en ne regardant que le dernier chiffre, on peut savoir si un nombre est divisible par 2 ou par 5.

La deuxième question est *3732 est-il un multiple de 4 ?* Telle qu'elle est disposée dans le dessin, avec l'algorithme situé juste en dessous, elle implique un changement de perspective : on ne demande plus de réfléchir sur les nombres, mais de faire une division, autre moyen de savoir, si un nombre est divisible. On notera une erreur au passage : le premier chiffre du quotient est 9 ($9 \times 4 = 36$) et non par 8, puis l'on soustrairait 36 de 37, et non pas 32.

Il est probable que l'on veuille rappeler l'algorithme dans cette partie du dessin, même sous forme erronée et humoristique, dans le but de montrer toutes les façons de répondre à cette question. L'algorithme de la division étant le moyen calculatoire de procéder, c'est comme si la seule observation des nombres était risquée, comme si l'on craignait que le calcul en pâtisse ; on le rappelle du reste dans la méthodologie par cette phrase que nous avons déjà relevée : *les critères de divisibilité sont utiles en calcul réfléchi*. Quant à l'erreur, si l'effet recherché est de montrer la faillibilité de l'algorithme, c'est réussi ! L'illustrateur aurait-il été victime lui aussi de l'abondance des informations et des connaissances mises en jeu dans cet

exercice ? Les auteurs eux-mêmes n'auraient-ils pas relevé l'erreur ? Ou n'est-ce qu'un trait d'humour ?

Quelques paradoxes

Nous avons relevé les paradoxes suivants, concernant l'enseignement des critères de divisibilité :

- Nous observons en premier lieu que ces critères ont une place en formation puisque l'on considère qu'il est formateur pour les étudiants d'explorer le milieu constitué par les critères de divisibilité et que cela leur donnera, vu la richesse du problème, des pistes dans le domaine de l'analyse à priori.
- Sur différents sites internet, il y a pléthore de recherches, d'explications, de jeux, d'exercices, ou encore, de devinettes sur le thème de la divisibilité.
- À l'école cependant, ces critères de divisibilité n'ont pas de place. Pourquoi n'a-t-on pas pensé cet enseignement pour les élèves ?

Les critères de divisibilité ne sont pas investis par les professeurs, pas plus que les recherches ouvertes. Étant donné que les seules références à ce savoir passent, dans l'enseignement suisse romand du moins, par la situation Charrière en ce qui concerne Genève (quasi confidentielle !), ou par l'exercice 19 présenté ci-dessus pour les moyens d'enseignements romands officiels, ce constat nous a encouragée à enquêter auprès des élèves afin de voir de quels éléments était constitué ce milieu.

De l'intuition d'un phénomène didactique à la construction d'un raisonnement

Du point de vue du professeur et de l'élève, nous avons observé que la situation les submergeait rapidement. Les élèves sont dépassés par l'émergence dans le milieu de nombreuses connaissances suscitées par la situation et le professeur est quant à lui débordé par cet afflux de connaissances manifestées par les élèves. Il ne parvient pas à y mettre de l'ordre autrement qu'en coupant court à cette abondance d'informations, ce qu'il fait en validant à la place des élèves pour institutionnaliser le savoir. Nos observations montrent que le professeur va trier les réponses des élèves pour ne garder que celles qui sont utiles à son institutionnalisation.

Par rapport à l'organigramme de notre présentation, nous laisserons plusieurs points en retrait dans cet article, pour concentrer la réflexion sur le phénomène de saturation du milieu.

IV. Exemple de saturation du milieu

Élèves et stagiaire en proie à une confusion grandissante

Examinons quelles manifestations de la saturation du milieu on peut observer dans la contingence, en parcourant un extrait de l'un des protocoles qui se révèle significatif à ce sujet, où l'on voit que la professeure-stagiaire décide de faire une mise en commun au terme de la leçon.

Les élèves travaillent par groupes de quatre ; il s'agit d'une professeure stagiaire qui a procédé de la façon suivante : elle a tout d'abord laissé s'exprimer chaque groupe, puis a fait une mise en commun finale avec tous les élèves, tous groupes confondus.

Si l'on réduit le protocole en quelques phrases-clé, on voit que les connaissances des élèves se font et se défont, qu'elles ne sont pas stables : ce qui est accepté à un moment est refusé plus loin, remis en question ou finalement repris comme étant exact, avant d'être à nouveau mis en doute. *Saturation* signifie ici à la fois trop de choses et trop de répétitions des mêmes choses.

Les élèves trouvent du neuf et tournent en rond. Pour couper court, la professeure-stagiaire institutionnalise sur le calcul, et ce faisant, elle raccroche avec le programme.

Dans la première mise en commun à laquelle elle procède, elle demande à chaque groupe de s'exprimer l'un après l'autre :

- 1^e gr.) à la centaine, on peut mettre n'importe quel chiffre pourvu qu'il soit pair.
- 2^e gr.) à l'unité, c'est 6 ou 2.
- 3^e gr.) à l'unité, on peut mettre n'importe quel chiffre mais pair.
- 4^e gr.) à l'unité, ça peut être seulement 2 et 6.
- 5^e gr.) à la dizaine, 7 peut être remplacé par n'importe quoi quand il y a le bon chiffre du livret⁵ de 4.
- 6^e gr.) à la dizaine et à l'unité, les 2 derniers chiffres sont dans le livret de 4.

À ce moment-là, juste avant la mise en commun avec la classe entière, les élèves sont d'accord pour affirmer en substance que le nombre formé par les deux derniers chiffres est pair et multiple de 4. La professeure-stagiaire décide alors de confronter les résultats de chaque groupe et procède à une mise en commun générale, tous groupes confondus.

Il apparaît que les temps forts de la mise en commun s'agencent autour des notions suivantes⁶:

1. Parité du chiffre de l'unité
2. Parité du nombre formé par les deux derniers chiffres
3. Table de 4 (jusqu'à 12x4)
4. Multiples de 4 (notion d'ensemble infini)
5. Règle de formation des multiples de 4

Les connaissances s'organisent de la manière suivante : en premier lieu, les élèves se fixent comme objectif de vérifier la parité du chiffre de l'unité, puis ils énoncent leur représentation de la table de 4 et reviennent ensuite sur l'importance de la parité du chiffre de l'unité. La parité est confirmée, stabilisée, puis utilisée pour formuler leurs représentations d'un nombre pair à deux chiffres. Ils reviennent à la table de 4, la confirment et s'expriment sur la constitution d'un nombre de deux chiffres de la table de 4. À ce moment-là, des élèves résistent, réfutent ce qui est avancé et en reviennent à la parité de l'unité. Ils poursuivent en avançant l'argument de la parité d'un nombre à deux chiffres, réfutent ensuite l'utilité de la table de 4, puis en reviennent à la parité, comme condition suffisante, et terminent par la nécessité du nombre d'appartenir à la table de 4.

À partir de ces constats, nous avons établi deux considérations qui ont guidé notre recherche :

1. Les connaissances prennent une utilité indépendamment les unes des autres et, bien que l'on puisse identifier des savoirs épars, il n'y a pas, ou trop faiblement, d'articulation entre ces connaissances.

À propos de faible articulation entre les connaissances, nous adhérons à l'idée évoquée par Brun et al. (1994) :

« Contrairement aux apparences, c'est moins de lacunes à caractère numérique ou numéral dont les erreurs de division présentées témoignent que d'un contrôle (au sens d'exploitation adaptée des connaissances disponibles) encore incertain ou fragile, comme si cette curiosité qu'est l'algorithme résistait encore à l'exploration que l'élève a pu en

⁵ Le mot *livret* en suisse romande signifie *table*.

⁶ Lire l'extrait du protocole en annexe 1.

faire jusque là. C'est pourquoi notre stratégie didactique serait précisément de considérer un algorithme comme une curiosité à explorer au moyen des connaissances numériques et numérales dont on dispose, jusqu'à ce qu'on en trouve la clé. C'est l'hypothèse qui nous guidera pour le montage de situations didactiques. »

Nous souscrivons à cette notion de contrôle incertain ou fragile de l'élève, lorsque nous évoquons la faible articulation entre les connaissances. Le fait qu'une connaissance puisse être abandonnée au profit d'une autre, sans que les élèves soient en mesure d'établir des liens entre elles, est du même ordre que la notion de fragilité du contrôle. L'enjeu réside bien dans les relations que l'élève fera ou non entre les connaissances qui lui sont accessibles.

Les critères de divisibilité peuvent eux aussi être considérés comme une curiosité à explorer pour en trouver la clé. Toutefois, nous ambitionnons de dépasser la curiosité (à prendre au sens de *chose qui provoque la curiosité du sujet*), pour comprendre le jeu des connaissances qui s'établit dans les différents milieux. C'est la raison pour laquelle nous nous intéresserons particulièrement aux connaissances émises par les élèves et tenterons de dégager celles, plus enfouies, qui en sont à l'origine.

2. Les connaissances peuvent se faire obstacle les unes aux autres ; par exemple, la notion de chiffre fait obstacle à la notion de nombre, ou encore, le savoir de la parité fait obstacle au savoir de la divisibilité par 4.

De ce constat, il résulte que :

- le milieu s'enrichit : les connaissances en induisent d'autres qui ne permettent pas forcément d'agir sur la situation (les nombres pairs tout seuls ou les multiples de 4 tout seuls, etc.),
- les représentations s'amalgament,
- le savoir n'est pas approché.

Nous avons observé d'une part que ce fait se reproduit et que l'on peut également le reproduire à certaines conditions ; nous avons donc pensé qu'il y avait là l'ébauche d'un phénomène didactique. Ayant observé ce phénomène à maintes reprises, et même dans d'autres circonstances – par exemple, entre étudiant-chercheur et élèves – la nécessité d'une modélisation pour nos expérimentations s'est, tout d'abord, faite ressentir, puis dans un deuxième temps, la nécessité d'une catégorisation afin de circonscrire quelque peu le phénomène et tester sa consistance. La catégorisation effectuée dans notre travail de thèse nous a permis de l'analyser et de construire un raisonnement autour de cette intuition première. Il demande bien entendu à être affiné à la lueur de prochaines expérimentations en classe.

Pour construire nos expérimentations, nous nous sommes inspirée du schéma de Bloch (2002)⁷ qui nous a permis de réaliser la nécessité de faire se répondre trois pôles dans l'étude du milieu didactique : le milieu théorico-épistémologique, le milieu expérimental a priori et la contingence. Le texte de Bloch (2002) développe la thèse qu'il y a différents niveaux de modèles de *milieu* dans la *Théorie des situations* et propose une classification des éléments théoriques *milieux*, selon s'ils sont du côté du savoir, de l'expérimentation ou de la contingence. L'analyse des relations entre ces trois différents modèles de milieux donne des pistes théoriques pour leur construction.

En ce qui concerne la catégorisation de la *saturation du milieu*, elle apparaît sous la forme suivante dans notre méthodologie : après avoir passé en revue les vingt-huit protocoles représentant la première année de recherche dans une classe et relevé systématiquement le

⁷ Cf. Annexe 2.

phénomène sous forme de liste de connaissances⁸ (recensement de toutes les connaissances manifestées par les élèves à propos d'une même tâche), les vingt-et-un protocoles de la deuxième année de recherche ont été traités sous l'angle de la *saturation du milieu*. En parallèle à ce phénomène, s'est profilée également la notion d'*expérience* qui entretient un rapport direct avec la *saturation*, comme cause potentielle de présence ou d'absence du phénomène. Nous la mettrons en relation avec les notions d'*exploration* et d'*expérimentation*. L'analyse des données a donc été élaborée selon ces deux axes : *saturation du milieu* et *expérience*, dont nous allons rendre compte maintenant.

Causes possibles de saturation du milieu

1) Du côté de l'élève

a) Il se produit un conflit cognitif, en aval de la saturation :

Les connaissances se font obstacle mutuellement ; ce qui fait saturer le milieu est une sorte de confusion extrême.

b) Il y a une instabilité des connaissances et/ou une ébauche de nouvelles connaissances

Une connaissance chasse l'autre et prime ; le caractère partiel des connaissances amène à une saturation du milieu due à de l'incompréhension ou au fait que les connaissances ne s'organisent pas entre elles. On pourrait parler d'*îlots* de connaissances, sans lien entre eux.

2) Du côté du milieu

a) Le milieu est « trop riche » ou « trop pauvre » :

Certaines situations peuvent être identifiées a priori comme plutôt ouvertes ou plutôt fermées ; nous souhaitons montrer une tendance plus qu'une catégorisation. La nature de la tâche et l'intention projetée font varier les procédures. Nous avons comparé deux situations que l'on peut cataloguer comme potentiellement saturante (*la situation Charrière*) ou comme probablement non saturante (*Les cinq pas à zéro*) :

La situation Charrière	Les cinq pas à zéro ⁹
2. 7. ÷ 4 Trouve toutes les façons de compléter ce nombre pour que la division par 4 ne donne pas de reste. Remplace le 7 des dizaines par un autre chiffre : combien y aura-t-il, dans chaque cas, de nombres divisibles par 4 ? Essaie d'énoncer des lois.	Prends n'importe quel nombre entier entre 1 et 999 et essaie de le ramener à 0 en cinq pas, ou moins, en utilisant seulement les nombres de 1 à 9 et les quatre opérations de base : +, -, x, ÷. Le même nombre peut être utilisé plusieurs fois, mais tu dois écrire une seule opération par ligne.
Recherche d'une règle. Les connaissances s'articulent les unes aux autres. Il faut décontextualiser, oublier le calcul qu'on a effectué au départ : on cherche une loi. Il y a un fait de départ, qu'on doit oublier pour généraliser ensuite. Il faut théoriser certaines notions, se poser (re-poser) certaines questions, revenir même à des questions élémentaires afin de construire du <i>neuf</i>. La recherche d'une règle aboutit à l'organisation d'une logique au moyen de l'expérience, puis procède à des retours sur la recherche de règles, et ainsi de suite. Décontextualisation ↔ généralisation Saturation possible Théorisation de certaines notions	Recherche de cas particuliers. Les connaissances s'articulent sur des faits : toutes les connaissances sont réalisées. Chacune est liée à un calcul, et se trouve validée par le fait qu'elle produit. Aucune contradiction (source de saturation) ne peut apparaître. Ce sont des connaissances particulières, qui aboutissent à un fait, une application. Il s'agit de connaissances-en-acte, pas de théorisation nécessaire. Le fait de départ est la généralisation qu'on doit retrouver par induction. On part d'un fait généralisé qu'on doit retrouver par analogie. Généralisation ↔ Induction Ne peut pas saturer Pas de théorisation Application ↔ déduction

⁸ Cf. Annexe 3.

⁹ Inspiré de la situation de Kieran & Guzman (2007).

Du côté du professeur ou du chercheur

- a) *Concernant le professeur.* Une déstabilisation (provocation d'instabilité) due, ainsi que nous l'avons déjà vu, à la conduite de la situation (p. ex. : les enseignants-stagiaires avec la situation Charrière) ou encore, à la gestion de la tâche d'un professeur chevronné (les 5 pas); la première n'est pas recherchée et la deuxième est contrôlée; le professeur cherchant à l'éviter. L'une des stratégies d'évitement observée consiste à procéder à des rappels d'une leçon à l'autre (lesquels sont pris en charge par les manuels ou les enseignants, mais pas par les élèves), mais aussi à utiliser la paraphrase (par le professeur ou faire paraphraser aux élèves ce qui a été fait ou est en train de s'exécuter), ne laissant aucune place au doute et à la réflexion propre de l'élève. Exemple où P procède à un « question-réponse » très dirigé pour contrôler et éviter tout dérapage :

P : Pourquoi est-ce que tu commences par ajouter 4 ?

El : Pour que ce soit un multiple de 9.

P : Comment tu sais que ce n'est pas un multiple de 9 ?

El : Parce que la somme des chiffres du nombre ne donne pas un multiple de 9

P : Pourquoi tu veux un multiple de 9 ?

El : Pour diviser par le plus grand nombre.

Exemple où P anticipe à la place de E :

P : J'ai envie de vous reposer la question d'un nombre impossible à ramener à 0 en 5 pas. Qui pense que non ? (Très peu : 3-4 élèves). Qui pense que oui ? (La majorité pense que tous les nombres sont réductibles à 0 en 5 pas.)... Bon, un autre nombre ? (A ce moment, P questionne E6, sachant qu'il a trouvé 851, il reste 5 minutes avant la fin de la leçon). E6 propose 851, c'est parti ! Alors ?

E6 : On n'a trouvé qu'en 6 pas pour l'instant

(Les élèves n'y avaient pas pensé → suggestion de P, utilisant la réponse d'E6)

- b) *Concernant le chercheur.* La saturation liée à la conduite de la situation par le chercheur peut être délibérée ou non. La déstabilisation incitée par le jeu de contre-suggestions peut être une cause de saturation. Elle a pour but de tester la résistance de l'élève au milieu, de comprendre la manière dont se construisent les connaissances.

Exemple :

Exp. : « Un élève a dit : 4444 est un M4 car $4+4+4+4 = 16$ et 16 est un M4. Qu'en pensez-vous ? »

Lo : Ça doit se terminer par 6 ou 2

An : Et 8 aussi ? Non.

Lo : ça doit se terminer par 2, 6, 8, 0 et 4

An et Lo : avec 1 par exemple à la dizaine, il y aura 2 ou 6 et les pairs, 0, 4, 8

Exp. : alors 4444 ?

An et Lo : cet énoncé n'a pas de sens car le nombre n'a rien à voir avec $4+4+4+4$; il faudrait faire $4000+400+40+4$.

Exp. : mais si l'on additionne $4+4+4+4$, ça fait 16, et 16 est bien un multiple de 4 ?

An et Lo : essaient avec 444'444 : c'est un multiple de 4 et 6666 aussi, ça fait 24.

Exp. : donc avec le critère de Nicolas, on peut dire que 444'444 et 6'666 sont des multiples de 4

An et Lo : oui...non... pas 6666 ... Les nombres qui marchent, il y a déjà 44, car $4+4=8$, 8 est M4 et 48, car $4+8=12$, 12 est M4

Exp. : 2222, il marche ?

An et Lo : oui, ça fait 8 et 8 est M4

Exp : mais si je regarde la règle des deux derniers chiffres, ça ne marche pas

An et Lo : mais pourquoi alors... ? On peut faire 22 divisé par 4, mais ça donne pas un multiple de 4

Lo : c'est possible que dans 2228, il n'y a pas besoin d'additionner les deux premiers ? Par exemple, $2+8=10$, 10 n'est pas M4. Il n'y a pas besoin de dire $2+2+2+8=14$ et 14 n'est pas un multiple de 4.

Exp. : 1128 ?

An et Lo : non, ça ne marche pas

Effets de la saturation du milieu sur les connaissances des élèves

1) Rabattement d'un critère sur un autre.

Lorsque que le milieu sature, nous avons observé que l'élève utilise un critère (mieux connu ou disponible à cet instant) à la place d'un autre. Par exemple : rabattement du critère de trois sur le critère de 4.

2) Extension d'une nouvelle connaissance.

L'émulation d'une connaissance fraîchement acquise a pour effet qu'on en *fait trop*, on *en rajoute*. Par exemple, l'extension d'une nouvelle connaissance amène une confusion dans le sens qu'on ne retrouve plus l'origine de cette connaissance et l'on se perd.

Dé-saturation : ce qui permet de dissiper la saturation du milieu

Nous avons observé quelques causes permettant de balayer une saturation ; elles peuvent être de nature différente et provenir de sources diverses. Quelques pistes :

1) Du côté du milieu.

Le milieu renvoie l'élève à une connaissance stable ; un certain ordre se rétablit.

2) Du côté de l'élève.

Il procède à la reformulation de savoirs ou de connaissances antérieurs qui lui permettent une réappropriation des connaissances.

3) Du côté chercheur (ou du professeur).

Notre postulat s'exprime ici : nous pensons qu'une façon de faire en sorte que la saturation se dissipe lorsqu'elle n'est pas souhaitable – c'est-à-dire lorsqu'elle ne fait pas office de moteur pour l'exploration – réside en une action du chercheur sur l'expérience des élèves, par un aménagement du milieu en termes de jeu de tâches. (Nous ne traiterons cependant pas ici la question du jeu de tâches).

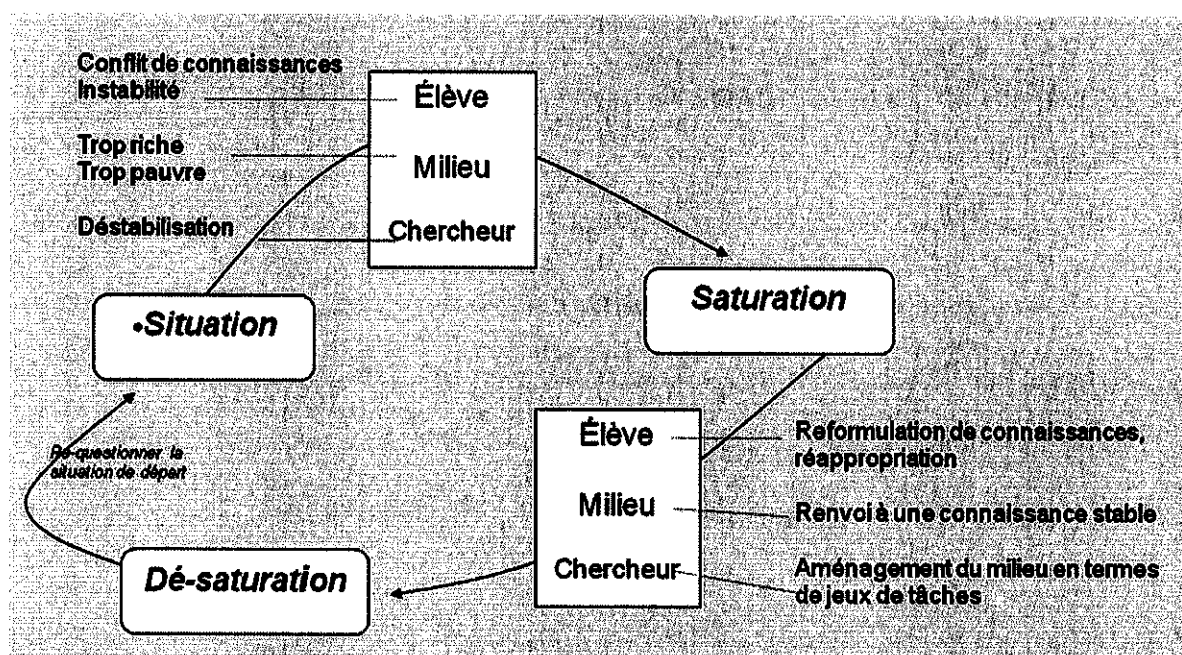


Figure 6. Modélisation du phénomène de saturation / dé-saturation

V. Liens entre saturation du milieu, faits numériques et expérience

Faits numériques

Afin de comprendre le lien entretenu avec la notion d'expérience, nous avons fait un détour par la notion de fait numérique, car c'est dans l'un de ces trois niveaux d'analyse que l'expérience s'exprime. Nous reprenons la définition de Conne (1987) et l'appliquons au critère de divisibilité par 4 :

«... [un fait numérique] se manifeste à un certain niveau, s'explique à un niveau supérieur et repose à un niveau inférieur »

Niveau manifeste : c'est la régularité de la formation des multiples de 4 qui se manifeste sur l'écriture des nombres en base 10. Les multiples de 4 sont formés d'un chiffre de l'unité pair et d'un chiffre de la dizaine pair ou impair. Lorsque le chiffre de la dizaine est pair, celui de l'unité vaut 0, 4 ou 8 et lorsque le chiffre de la dizaine est impair, celui de l'unité est 2 ou 6.

Niveau sous-jacent : il s'agit d'un niveau de connaissances et de faits relativement indifférenciés, par exemple les notions suivantes : la parité, les multiples de 2, la table de 4, les multiples de 4, etc. ainsi que nous l'avons développé par ailleurs (Del Notaro, 2007).

Niveau supérieur : cela concerne ici les règles très générales et "supérieures" d'associativité de la multiplication, de distributivité de la multiplication sur l'addition, de caractère euclidien de l'anneau des entiers, etc.

Nous avons, dans un premier temps, tenté d'utiliser ces descriptions sans réel succès, comme nous allons le voir. Il nous a fallu élargir la gamme des phénomènes observés, en examinant également les notions d'exploration et d'expérience. Les processus de saturation ou de désaturation sont de nature dynamique, et ceux d'exploration et d'expérience, de nature plus procédurale. C'est donc à partir de la réflexion en termes de faits numériques que nous avons élaboré notre analyse de données ; nous pensions alors pouvoir les analyser avec cette théorie et afin de permettre d'organiser nos données de manière à la rendre opérationnelle, nous avons élaboré un premier schéma pour les analyser. Cependant, cela fonctionnait jusqu'à un certain point au-delà duquel nous butions sur nos données, elles résistaient à ce schéma... Nous avons compris par la suite le glissement de sens qui avait eu lieu ; néanmoins, nous avons vu trop de choses à travers cette lunette pour qu'elles soient mises de côté et avons récupéré ces observations pour construire notre propre théorisation.

Le fait d'avoir confronté l'idée à la contingence a amené à trouver de nouveaux liens, à intégrer cette idée dans un schéma plus vaste et à préciser celle qui a présidé à ce dérapage. Le glissement de sens consiste donc en une distorsion de la notion de faits numériques : à partir du schéma des faits numériques, on peut faire des inférences sur les objets mathématiques, alors que nous cherchions à caractériser les connaissances. Nous avons ainsi repensé notre schéma, axé cette fois-ci sur les connaissances, et dégagé trois niveaux également, pour compléter celui de Conne (1987), sur les faits.

Nous proposons l'articulation suivante des éléments des deux schémas, qui a permis de dépouiller nos données, les reliant ainsi à l'expérience :

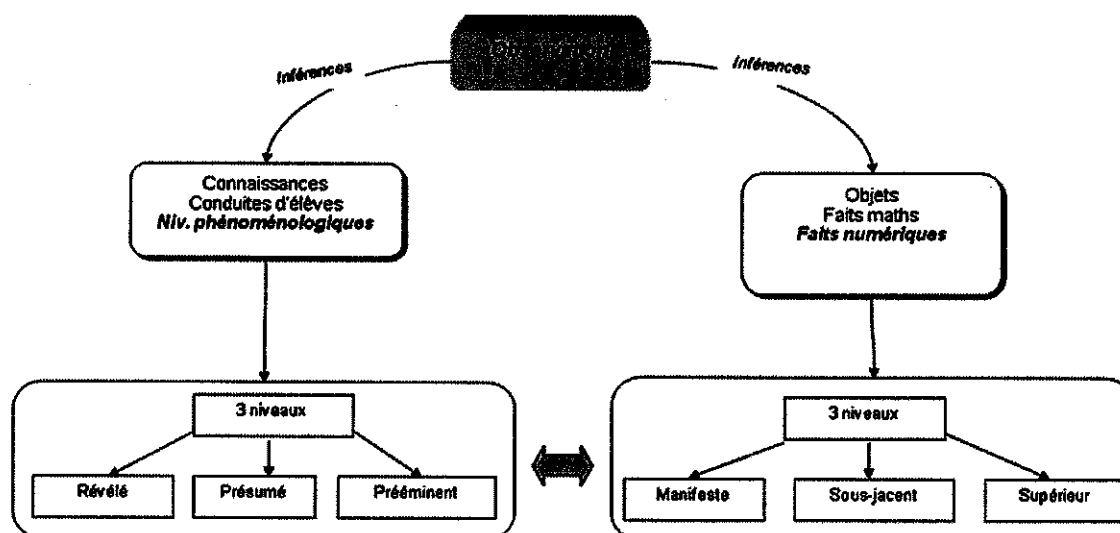


Figure 7. Articulation des deux schémas

Il est construit à partir des trois procédés suivants : observation – abduction – déduction. Sur le plan des objets, nous avons donc les niveaux manifeste, sous-jacent et supérieur et sur le plan des connaissances, les niveaux révélé, présumé et prééminent.

Pourquoi cette terminologie ? Nous avons choisi le terme *révélé*, qui définit ce qui se produit effectivement (que nous avons observé). En effet, lorsque l'élève aborde un fait numérique tel qu'un critère de divisibilité, il y a une disponibilité immédiate des connaissances à un premier degré, qui fait que la connaissance est révélée tout de suite. En d'autres termes, il s'agit de tout ce que l'élève voit comme régularités dans un fait numérique, les règles qu'il va inférer et les logiques qui vont sous-tendre son action.

Le terme *présumé* est relatif au bagage supposé présent pour aborder la tâche. Les connaissances présumées ne se voient qu'une fois activées par l'élève qui se trouve confronté à un objet. Dans ce niveau s'exprime ce que l'élève convoque comme anciennes connaissances et qu'il met dans le milieu pour traiter le fait numérique ; il s'agit de toutes les connaissances observables (par contraste avec le sous-jacent, qui n'est pas visible). C'est une sorte de niveau infra-conscient, d'où les connaissances sortent sans avoir été anticipées. Ce niveau vient alimenter en informations le niveau révélé (à mettre en lien avec le manifeste), produit beaucoup d'informations et c'est là que nous rencontrons la possibilité d'une saturation du milieu. En effet, à cette *liberté d'expression* non contrôlée, ou d'exploration et de plaisir à faire des expériences, s'associe ce phénomène de saturation qui accompagne le processus. Elle fait office, dans ce cas, de prise sur le changement, qui n'est que l'une de ses nombreuses facettes : la mise en ordre de leurs connaissances tire les élèves vers un niveau plus élevé. Pour sortir de la confusion occasionnée par une saturation, il faut pouvoir accéder à ce niveau supérieur qu'est le niveau prééminent.

Enfin, nous avons choisi *prééminent* pour indiquer le stade supérieur des connaissances auxquelles on peut s'attendre, relativement à une classe d'âge. Par contraste avec le niveau supérieur du fait numérique, qui est le niveau mathématique du savoir savant, nous allons considérer, dans la transposition de ce savoir savant, le niveau prééminent comme étant le niveau le plus élevé par rapport à la classe d'âge considérée.

Le fait numérique a une fonction de révélateur, de prise de conscience des connaissances plus profondes, que nous prenons en compte pour tenter de comprendre comment dépasser, pour les élèves, le simple constat de ce fait. Pour ce faire, nous analysons ce que nous appelons les *connaissances présumées*, en écho au *niveau sous-jacent*. Ce qui figure dans ce niveau présumé, c'est ce que les élèves savent déjà sur les nombres et ce dont ils peuvent rendre compte à l'occasion d'un fait nouveau. Dans ce niveau de connaissances multiples et diverses,

il règne une certaine confusion. À l'image du niveau sous-jacent, qui est constitué de connaissances relativement indifférenciées, les connaissances du niveau présumé fument sans anticipation, dépassant souvent, voire, submergeant, les élèves, qui n'en ont pas conscience. Il y a donc à ordonner ces connaissances, et c'est là notre thèse, pour pouvoir aller dans un niveau plus élevé. Nous soutenons en effet que, dans l'expérience, les éléments du niveau présumé, en s'accommodant, aident à prendre de la distance avec le niveau révélé pour arriver à un niveau plus général, supérieur. C'est avec le matériel du niveau présumé des connaissances de l'élève que nous jouons : nous injectons de nouvelles connaissances dans le milieu afin de cerner l'expérience. Ce qui nous intéresse est donc de voir comment tout cela s'articule, quel rôle cela joue dans la transformation des connaissances en savoirs et comment, en mettant de l'ordre dans le présumé, l'élève est tiré vers un niveau supérieur.

Pour terminer, relevons la dialectique entre les deux schémas : au niveau manifeste du fait répond le niveau révélé par l'élève. Dans les critères de divisibilité par 4, ce que l'élève relève comme régularités et comme règles est bien de l'ordre du niveau manifeste du fait. En revanche, le niveau présumé des connaissances anciennes que l'élève donne à voir questionne le niveau sous-jacent ; ces deux niveaux peuvent se superposer ou non. En tous les cas, le présumé se donne à voir là où le sous-jacent est rendu invisible, dans la mesure où il contient absolument toutes les connaissances a priori utiles pour pouvoir aborder le fait. En ce qui concerne notre fait de divisibilité par 4, les différences objet / sujet peuvent être caractérisées de la façon suivante ; le lien avec la saturation : dans ce type de travail où une situation induit tellement de connaissances et où on les laisse se manifester, le phénomène de saturation est un élément quasiment omniprésent. Le milieu sature, des connaissances doivent être remises dans le milieu. Le lien que nous faisons entre les niveaux de connaissances et la saturation réside dans le passage du présumé au prééminent. Qu'est-ce que cela signifie ? Nous avons observé que le fait numérique crée une saturation au niveau révélé, laquelle est nourrie par les connaissances que nous avons appelées présumées. Cette saturation oblige à faire le saut d'un niveau à l'autre, elle est une prise sur le changement : ce qui se voit d'un fait numérique oblige à convoquer d'anciennes connaissances qui vont devoir être réorganisées pour se transformer en savoirs, permettant ainsi d'aller dans un niveau mathématique supérieur : notre niveau prééminent.

« Critères de divisibilité par 4 » : Les trois niveaux du fait numérique vs les trois niveaux de connaissances de l'élève	
Niveau manifeste Régularités manifestées par l'écriture des nombres et du fait que la décomposition $C(n) + DU(n)$ se lit sur l'écriture des nombres.	↔ Niveau révélé Ce que l'élève voit comme régularités dans le fait ; ce niveau peut se superposer au manifeste.
Niveau sous-jacent Ensemble de tout ce qu'il faut savoir pour <i>saisir</i> ce qui est manifeste. Ici, c'est d'une part une certaine familiarité avec les écritures chiffrées de nombres et la forme qu'elles peuvent avoir et, d'autre part, une familiarité avec les chiffres et la division, pour les principes les plus élémentaires.	↔ Niveau présumé Ensemble de ce que l'élève a convoqué comme connaissances concernant le fait ; ici, il s'agit de la parité, des multiples de 2, de la table de 4, des multiples de 4. Ce niveau donne à voir des éléments du niveau sous-jacent, propres au sujet. Nous le considérons comme le niveau de l'expérience dans lequel s'effectuent les réorganisations pour accéder au niveau prééminent.
Niveau supérieur Explication des faits au niveau mathématique le plus élevé par rapport aux axiomes des structures concernées. Dans notre fait, ce sont les règles très générales d'associativité de la multiplication, de distributivité de la multiplication sur l'addition, de	↔ Niveau prééminent Niveau <i>optimal</i> des connaissances des élèves. Il constitue une petite partie du niveau supérieur ; il s'agit du niveau le plus <i>élevé</i> par rapport à la classe d'âge considérée. Il s'agit ici du savoir que l'on pourrait qualifier de <i>visé</i> .

Nous espérons montrer par là, les liens qui existent entre *niveau sous-jacent* et *niveau présumé*, en mettant en évidence comment *l'expérience*, qui s'exprime dans le *niveau présumé*, est en lien avec les éléments du *sous-jacent*. Ce faisant, nous souhaitons montrer l'utilité, la nécessité du détour par le *niveau de l'expérience*.

Expérience

Le deuxième axe de notre analyse des données est celui de l'expérience, dont nous allons décrire les contraintes entretenues avec l'exploration du milieu.

L'analyse de l'exploration du milieu et de l'expérience montre comment le jeu avec le milieu permet d'accéder à des niveaux plus enfouis de connaissances et d'affaiblir ainsi la saturation qui en découle.

Les élèves ont une expérience de la division, pour l'avoir déjà rencontrée et utilisée. Cette expérience leur donne une certaine connaissance (représentation) de cet objet. Ils savent effectuer l'algorithme, résoudre des problèmes, etc. Il faut donc que le sujet puisse aller chercher dans cette expérience, les représentations et/ou les connaissances qui lui permettront de pouvoir les différencier. À l'instar de Briand (2007), nous nous efforçons de « (...) *ne pas ignorer les découvertes apparemment anodines qui sont la marque d'une re-construction de l'expérience par le discours ou/et dans l'écriture naissante* » (p. 19). Nous les considérons en effet comme des indices très forts de la mise en place de connaissances, ainsi que nous l'avons observé dans nos expérimentations.

L'expérience est liée à l'expérimentation. Les liens que nous cherchons à catégoriser entre *Exploration*, *Expérience* et *Expérimentation* sont de l'ordre de la contrainte mutuelle, de même que les liens entre l'expérience de l'élève et celle du chercheur sont à considérer en termes d'interaction. Ces notions sont souvent indissociables, mais nous tenterons toutefois de les isoler, afin de nous permettre de catégoriser l'expérience. Nous avons notamment cherché à comprendre en quoi l'expérience de l'élève autour d'une notion mathématique (et l'exploration qui lui est subordonnée) lui permettent de *remonter* vers des niveaux supérieurs.

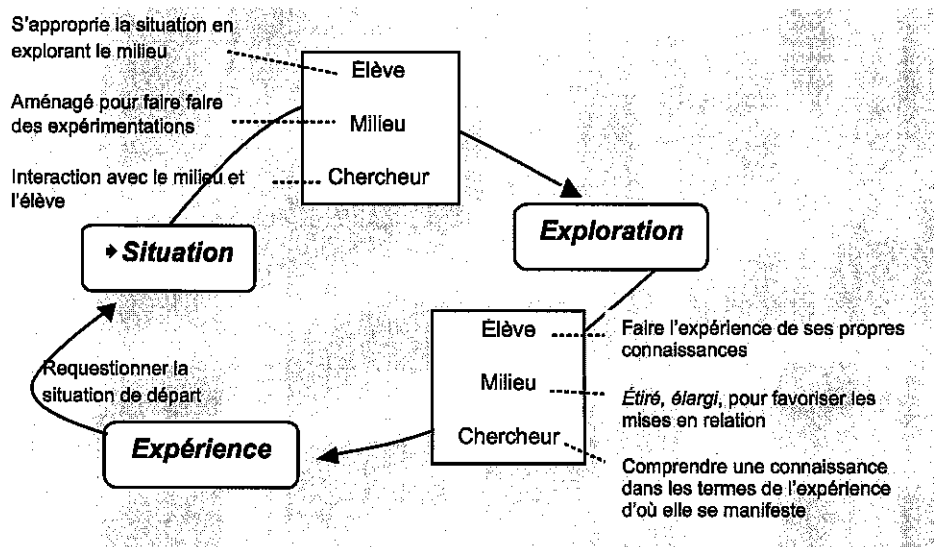


Figure 8. Rapport de contraintes mutuelles

Dans notre catégorisation de l'expérience, nous traitons l'élève en interaction avec le milieu et le chercheur, dans la mesure où ce dernier est impliqué dans le processus.

Nous distinguons l'exploration du milieu et l'expérience du côté de l'élève, bien que ces deux composantes soient liées, et l'expérimentation, que nous situons du côté du chercheur. Sans plus de développement, voici la catégorisation utilisée pour notre analyse.

Du côté de l'élève

1. **Exploration.** Expérimenter ses connaissances (faire l'expérience de ses propres connaissances), les mettre à l'épreuve, les réinvestir :
 - 1.1. Pour *faire ressortir* les connaissances; les *mettre en évidence* ; les faire fonctionner
 - 1.2. Pour permettre de les différencier
2. **Expérience.** Se constituer des expériences :
 - 2.1. Pour favoriser le travail de mises en relation (aller dans le niveau prééminent)
 - 2.2. Pour réajuster ses connaissances ; les connaissances sont fonction de l'expérience.
 - 2.2.1. Sur quoi repose le fait que l'on est en train d'explorer (niveau sous-jacent)

Du côté du chercheur

3. **Expérimentation.** Faire faire des expériences aux élèves.
 - 3.1. Pour comprendre une connaissance dans les termes de l'expérience d'où elle se manifeste.
 - 3.2. Pour les mettre en situation de dépasser le niveau manifeste.

L'analyse de nos séances a été effectuée en croisant les niveaux de connaissances décrits plus haut¹⁰ et les catégorisations *Saturation – Expérience*. En voici un exemple : la première séance concernant la *situation Charrière*.

Séance A1	Connaissances et procédures exprimées par les élèves	Catégorisation Saturation ↔ Dé-saturation	Catégorisation Exploration ↔ Expérience
❶ niveau révélé	« On a une technique : ça doit finir par 2 ou 6, toujours » « On a regardé toutes les possibilités » « On a fait toutes les possibilités »		Exploration : les élèves font fonctionner ce qu'ils appellent une technique
❷ niveau présumé	« Tous les pairs, ça devrait marcher, 2472, 2476 » « Je regarde si c'est seulement les nombres pairs mais c'est pas ça » « On essaie d'abord avec les pairs, mais ça marche sûrement aussi avec les impairs »	Début de saturation : Conflit cognitif. E3 prend en compte « tous les pairs » et « 0 ça marche pas » de E2 et conclut que ce ne sont pas seulement les nombres pairs. Il conçoit que cela peut marcher avec des nombres impairs	Expérience : faire varier le chiffre est une technique d'expérience dont les élèves infèrent une règle « ça doit finir par 2 ou 6, toujours »

❶ : Les élèves restent au niveau révélé de la formation de suites de nombres

❷ : Quelques incursions dans le niveau présumé, en invoquant notamment les nombres pairs et impairs, notions sur lesquelles ils s'appuient pour tenter de répondre à la question « Trouve toutes les façons de compléter ce nombre ... »

Un début de saturation s'exprime à partir du moment où des connaissances antérieures se manifestent et se bousculent dans un certain désordre, comme par exemple lorsque les élèves essaient de faire le lien entre ce qu'ils voient au niveau révélé et ces connaissances émergentes. Ils croient reconnaître une règle en lien avec les nombres pairs, ce qui est vrai, mais partiel. Ils ont néanmoins une technique d'expérience : ils font varier les chiffres de

¹⁰ Rappel :

- Niveau révélé : ce que l'élève « voit » de la tâche.
- Niveau présumé : anciennes connaissances, niveau où les informations affluent en surnombre : c'est là que le milieu sature ↔ niveau de l'expérience.
- Niveau prééminent : niveau de conversion des connaissances en savoirs.

l'unité, de la dizaine et de la centaine. Leur logique est de fixer la valeur de l'unité et de faire dans un premier temps varier la centaine, puis de fixer, dans un second temps, la valeur du chiffre de la centaine et de faire varier celle du chiffre de l'unité.

Ils en déduisent que de modifier la centaine ne change rien au fait que le nombre soit un multiple de 4 ou non ; en revanche, ils s'aperçoivent que de modifier l'unité, cela aura une incidence sur le chiffre de la dizaine.

La règle au niveau des connaissances présumées (parité : 2 ou 6) est sous le contrôle de la règle du niveau des connaissances révélées, qu'ils ont devinée.

Les connaissances du niveau présumé, comme la parité, alimente le niveau révélé de beaucoup d'informations, avec, pour conséquence, un début de saturation.

VI. Résultats

Retour sur les hypothèses présidant à l'analyse des données

Hypothèse 1 : Les élèves effectuent des va-et-vient dans la convocation de leurs connaissances, entre niveau de connaissances révélées (celles qu'ils voient) et niveau de connaissances présumées (l'expérience).

Lorsque les élèves travaillent sur la forme du nombre, ils sont dans le niveau révélé de leurs connaissances. Ce niveau peut faire obstacle à un travail plus approfondi, car il y a une sorte de naturalisation dans l'action, à faire fonctionner un objet, ce qui peut évidemment masquer les éléments qui se trouvent dans le présumé. Ils font effectivement un va-et-vient entre les niveaux révélé et présumé. Lorsque l'objet le questionne, l'élève se livre à des explorations approfondies, ce qui lui permet de faire ressortir des connaissances enfouies dans son expérience.

L'idée que les élèves procèdent à des allers-retours entre leurs essais au niveau révélé (sorte de milieu pour l'action) et leurs explorations plus approfondies (au niveau présumé) peut être prise pour une Lapalissade. Néanmoins, son explicitation à titre d'hypothèse nous a permis de constater que c'est bien lorsque les élèves se laissent aller à leurs explorations que le milieu sature, car c'est là que s'expriment à foison les éléments de leur expérience.

Hypothèse 2 : Il est possible de catégoriser ces niveaux en termes de saturation du milieu et/ou d'expérience afin d'objectiver une observation.

Nous sommes effectivement parvenue à catégoriser nos trois niveaux de connaissances en termes de saturation du milieu et/ou d'expérience. Nous avons obtenu des résultats qui vont majoritairement dans le sens de nos hypothèses concernant la catégorie à laquelle nos niveaux sont apparentés. Les résultats ne sont pas aussi tranchés que ce qui était attendu, mais une orientation assez forte s'est néanmoins profilée au terme du dépouillement.

Nous avons observé que la saturation se donnait à voir parfois au niveau *révélé*, ce qui confirme que les élèves font des va-et-vient entre les niveaux.

En ce qui concerne le niveau *présumé*, nous observons que lorsque le niveau manifeste de l'objet fait obstacle, les explorations des élèves font ressortir des connaissances que nous situons à ce niveau *présumé*, car elles apparaissent comme anciennes (la parité) et plus enfouies. Cela occasionne certes conflits et saturation, mais il n'en demeure pas moins que, même confrontés à une grande instabilité de leurs connaissances, les élèves explorent le milieu et recourent à leurs expérimentations, qui font le lit de l'expérience.

Le niveau *prééminent* est le niveau *optimal* des connaissances des élèves ; il constitue une petite partie du niveau supérieur. Ce niveau est de l'ordre de l'*Exploration* ↔ *Expérience* et n'est pas un niveau où le milieu sature. Cela n'est pourtant jamais aussi catégorique et l'on

peut repérer des indices de confusion, d'hésitation, de doute ; toutefois, mis à part un seul cas, nous n'avons pas repéré de saturation.

Hypothèse 3 : Découlant de la précédente, nous soutenons qu'il est possible de montrer la conversion des connaissances en savoirs.

Au terme de notre recherche, nous avons dû nuancer quelque peu cette affirmation. Nos données montrent que les élèves effectuent bel et bien des liens nombreux entre les différentes connaissances qui apparaissent au niveau révélé et que leur exploration les mène passablement loin dans les mathématiques qu'ils peuvent aborder. À partir de ce constat, nous pouvons supposer une conversion des connaissances en savoirs. La question reste ouverte de savoir si l'on peut effectivement la montrer. Le résultat que nous pouvons néanmoins mettre en avant est que lorsqu'il y a conversion, c'est souvent dans ce niveau qu'elle intervient.

Thèse : Les niveaux de connaissances RPP (révélé, présumé, prééminent) mis en évidence s'articulent aux catégorisations Saturation ↔ Dé-saturation et Exploration ↔ Expérience. Le fait de dévoluer le problème permet une mise en ordre des connaissances – fusant au niveau présumé – qui passe par le contrôle du savoir (une action sur le niveau prééminent de ses connaissances).

Les processus cognitifs, tout comme la constitution de l'expérience, sont inéluctables ; pour en arriver au jeu dans le *prééminent*, il faut que les connaissances les plus enfouies du niveau *présumé* aient pu remonter. Bien que nous pensions ces trois niveaux comme toujours imbriqués, voire enchâssés, nous observons que le *prééminent* n'est pas présent dès le début dans notre dépouillement. En effet, l'un des résultats étonnants issu de l'analyse des données est que le niveau *prééminent* n'est présent dans notre dépouillement qu'à partir de la séance 13 (sur 21). Cela est lié au travail de la dévolution, qui s'avère extrêmement long. Nous considérons ceci comme un autre résultat, car si l'on connaît l'importance de la dévolution en tant que didacticien, il nous semble en revanche que les enseignants ne prêtent pas assez attention à ce processus, sans doute par ignorance de cette notion ainsi que du lent travail de la constitution des connaissances et de l'expérience. L'élève doit pouvoir jouer avec un milieu qui va lui renvoyer la possibilité d'explorer ses connaissances, même indifférenciées, de les expérimenter, même si elles mènent à saturation. On favorise ainsi le travail dans le niveau *prééminent*.

Il y a donc un enjeu ici pour l'enseignement. La question se pose de savoir si l'on accepte vraiment cette idée de dévolution du problème et ses conséquences ; c'est-à-dire, les actions mathématiques qu'on laisse faire ou non aux élèves.

La saturation du milieu est un phénomène observable

C'est dans le passage de la validation à l'institutionnalisation, que le milieu sature. Lorsque le professeur valide à la place de l'élève et reprend ces éléments de validation pour mener à bien son institutionnalisation, il y a un risque d'afflux de connaissances diverses et non reliées entre elles dans le milieu. La validation doit être à la charge de l'élève afin que le processus d'institutionnalisation prenne sens.

Ce concept de *saturation du milieu* rend compte d'un phénomène dont nous sommes certaine que la plupart des enseignants, ou toute personne acculturée au monde de la classe, reconnaîtra. L'intérêt de ce concept réside dans son appréhension face aux mathématiques et sa confrontation à la contingence, en ce qu'il procède du savoir et intervient lorsque le savoir est déployé en connaissances, mais que ces connaissances sont trop nombreuses et se bousculent sans s'accommoder entre elles.

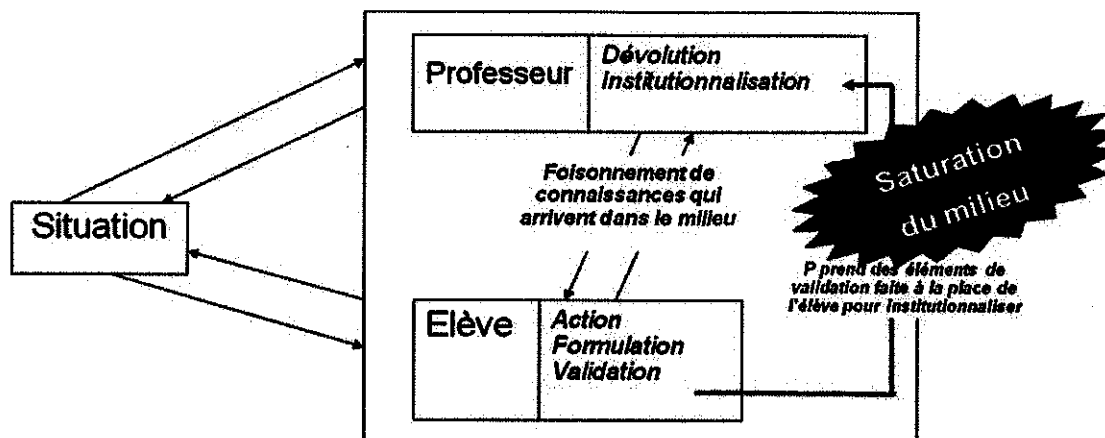


Figure 9. Saturation du milieu

En ce qui concerne le terme de *saturation*, il nous est nécessaire pour qualifier ce phénomène, car les simples termes de *profusion*, de *foison* ou encore, de *confusion*, ne sauraient rendre la mesure de ce qu'il véhicule. Lorsque les choses en arrivent à ce point, il faut comprendre que toutes les connaissances antérieures remontent à la surface de manière incontrôlée par l'élève et indifférenciée, car elles ne sont pas reliées entre elles. Le milieu se congestionne. Si le professeur agit comme nous l'avons décrit, ce n'est pas à cause d'un manque quelconque, mais bien parce que face à un tel phénomène, il ne sait plus que faire, tant il est submergé lui aussi. Le milieu est bel et bien saturé : *plus rien* ne passe. Il faut faire quelque chose et chacun agit en fonction de ses moyens.

Si ce concept est connu et quelque peu théorisé par le professeur, il peut être considéré comme une aide à la constitution des connaissances ; ainsi avons-nous parfois exploité la situation nous-même pour pousser les élèves à formuler leurs connaissances.

Autres résultats

Nous avons fait état dans notre thèse de plusieurs autres résultats ; nous en retenons deux que nous livrons ici :

- La distinction chiffres / nombres est véritablement affaire de contenu et pas seulement de vocabulaire. Les chiffres sont des attributs du nombre *qui disent des choses sur le nombre (des ostensifs)*. Le savoir (le contenu) est l'attribut des attributs du nombre : l'écriture du nombre est constituée par des chiffres ; lorsque l'on dit que *les deux derniers chiffres d'un nombre nous informent sur le fait qu'il est ou non un multiple de 4*, les chiffres caractérisent le nombre. Pour les assembler, il faut respecter que si le chiffre des dizaines est pair, le chiffre des unités est 0, 2, 4 et s'il est impair, le chiffre des unités est 2 ou 6. Ce savoir est l'attribut des chiffres du nombre.
- L'interaction de connaissances entre élèves et expérimentateur *On peut faire faire des mathématiques en faisant celles que l'on sait faire*. Assertion abrupte s'il en est, mais illustrative néanmoins de l'enjeu que nous avons défendu tout au long de notre travail : l'interaction de connaissances entre l'expérimentatrice et l'élève, ainsi que l'intégration des connaissances du chercheur ou du professeur dans le dispositif. Pour le chercheur, rester en dehors de ce dispositif fait courir le risque de passer à côté de la question épistémologique. Cette théorie change de ce qui se fait habituellement à l'école, où l'on donne des activités aux élèves dont on sait pertinemment que les enseignants ne contrôlent pas le savoir (prenons même la question des critères de divisibilité par 4 !) ; on sait que ce savoir est contrôlé jusqu'à un certain point mais

que le savoir savant a à voir avec des mathématiques beaucoup plus complexes. Le renversement consiste à dire qu'au lieu de chercher dans le concept ce que contrôle le chercheur / professeur, on assume que ce soit dans son implication mathématique (son enthousiasme, son plaisir). Autrement dit, il s'agit de faire des maths – qui plus est, qui plaisent aux élèves – avec ce que l'on sait, et non pas avec ce que d'autres, les concepteurs des situations, ont pensé à notre place. Que ce soit un enseignant ou un chercheur, ce rapport est le même.

VII. Références bibliographiques

- ARSAC, G., GERMAIN, G., MANTE, M. (1991). Situations-problème et problèmes ouverts. IREM de Lyon.
- BLANCHÉ, R. (1973). Le raisonnement. Presses universitaires de France, Paris.
- BLOCH, I. (1999). L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse en première scientifique. *Recherche en didactique des mathématiques* 19/2, 135-193, Grenoble : La Pensée Sauvage.
- BLOCH, I. (2002). Différents niveaux de modèles de milieux dans la théorie des situations. *Actes de la XI^e Ecole d'été de didactique des mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- BRIAND, J. (2007). La place de l'expérience dans la construction de mathématiques en classe. *Petit x*, 75, 7-33 IREM de Grenoble.
- BROUSSEAU, G. (1998). Théorie des situations didactiques. Didactique des mathématiques 1970-1990. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- BRUN, J. (1994). Evolution des rapports entre la psychologie du développement cognitif et la didactique des mathématiques. *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- CHARRIÈRE, G. & al. (1991). Sur les pistes de la mathématique en division moyenne, *cahier n° 40 du Service de la Recherche Pédagogique*, Département de l'instruction publique, Genève.
- CHASTELLAIN, M. (2002). *Mathématiques sixième année. Méthodologie – commentaire, Livre et Fichier de l'élève*. COROME, Neuchâtel.
- CHASTELLAIN, M., MICHLIG, Y., JAQUET, F. (1985). *Mathématiques sixième année. Méthodologie – commentaire, Livre et Fichier de l'élève*. COROME, Neuchâtel.
- CHEVALLARD, Y. (1981). La Transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné. Grenoble : La pensée Sauvage.
- CONNE, F. (1987). Un peu d'épistémologie élémentaire : Clin d'œil à F. Gonseth à propos de l'enseignement de la numération à l'école élémentaire. *Journées de travail Math 1-4*, Chaumont, 30-31 janvier 1997, 51-58.
- CONNE, F. (1992). Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique. *Didactique des mathématiques*, Delachaux et Niestlé, Lausanne, Paris, 1996.
- CONNE, F. (2000). La théorie des situations comme ouverture sur l'expérience et l'expérimentation dans le domaine des connaissances et savoirs numériques à l'école primaire. *Actes du Colloque sur la Théorie des Situations*, 26-28 juin 2000, DAEST, Université Bordeaux 2.

- CONNE, F. (2004). Une vue sur l'enseignement des mathématiques au primaire et au secondaire en Suisse romande. *Colloque GDM, 3 Rivières*, Québec, 7 mai 2002.
- CONNE, F. (2008). L'expérience comme signe didactique indiciel. *Recherche en didactique des mathématiques*, 28/2, 219-264, Grenoble : La Pensée Sauvage.
- DEL NOTARO, C. (2007). Observation de milieux non différenciés dans la contingence à propos d'une tâche sur les relations de divisibilité. CD-Rom. *Activité humaine et conceptualisation : questions à Gérard Vergnaud*. (M.Merri coord.) Presses Universitaires du Mirail (Toulouse).
- KIERAN, C. & GUZMAN, J. (2007). Interaction entre calculatrice technique et théorie : émergence de structures numériques chez des élèves de 12 à 15 ans dans un environnement calculatrice. *Environnements informatiques, enjeux pour l'enseignement des mathématiques*, 61-74, Genève: De Boeck.

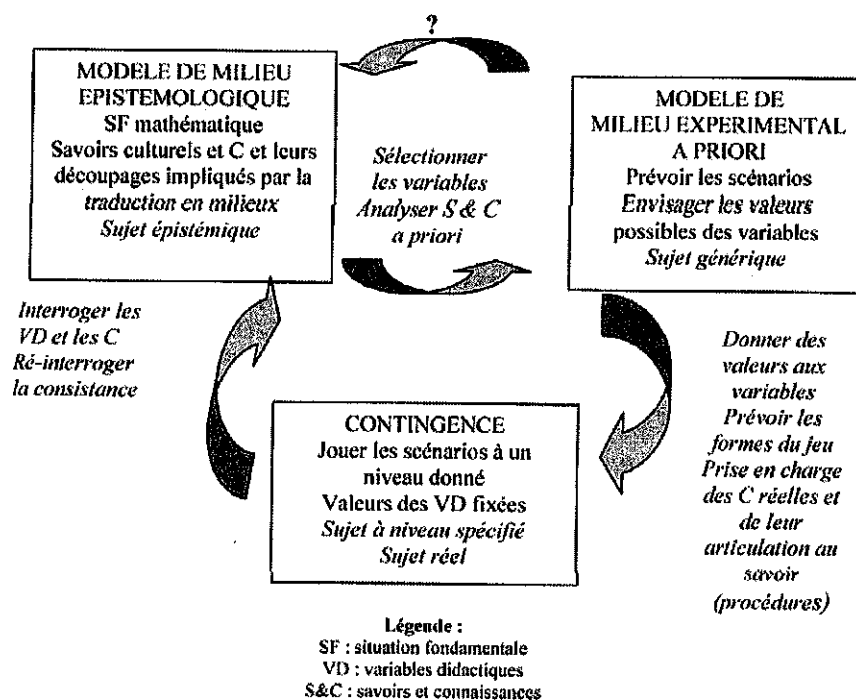
VIII. Annexes

1. Extrait de protocole de la mise en commun de P

1. P à la classe : est-ce que vous êtes d'accord ?	<i>P reprend avec tous les élèves, les constats énoncés comme vrais jusqu'alors</i>
2. E1 : non	<i>A partir de là, c'est la « dérive » : le milieu commence à saturer</i>
3. P : est-ce que vous pensez que c'est uniquement parce que les deux derniers chiffres font partie du livret de 4 qu'il n'y aurait pas de reste ou est-ce que c'est juste le dernier chiffre qui est important	
4. E1 : c'est juste le dernier chiffre	<i>E1 effectue un retour sur l'unité et « sème » le doute: on regarde juste le dernier chiffre</i>
5. E2 : au premier exercice là c'est pas possible le 7 c'est pas dans le livret de 4	<i>E2 énonce sa représentation du livret de 4 : chacun des deux chiffres formant le nombre doit être M4</i>
6. P : alors le 7 c'est pas dans le livret de 4 mais il parlait des deux derniers chiffres qui font partie du livret de 4	
7. E2 : c'est pas le livret de 4 c'est les chiffres pairs	<i>La parité intervient ici comme connaissance stable ; on voit le va-et-vient entre formation des M4 et parité</i>
8. P : Tristan pense que c'est les chiffres pairs qui sont importants, c'est égal s'ils sont dans le livret de 4 ou pas qu'est-ce que tu penses ?	
9. E3 : ils vont être pair	<i>E3 apporte sa confirmation de la parité comme une connaissance stable</i>
10. P : oui ils vont être pair mais donc t'as remplacé par exemple t'as essayé 78	
11. E3 : non parce que 7 c'est impair	<i>E3 énonce sa représentation des nombres pairs : chacun des deux chiffres doit être pair</i>
12. P : donc les deux derniers chiffres sont importants quand même	<i>P tient à sa définition et tente de les ramener, percevant la dérive et ne sachant que faire</i>
13. E4 : par ex. 2076 divisé par 4 ça fait pas de reste parce que 76 c'est dans le livret de 4	<i>Reprise en compte d'une autre connaissance qui semble stable, le livret de 4</i>
14. P : d'accord donc c'est la même idée que ton camarade ce qui est important c'est les deux derniers chiffres	
15. E5 : mais 78 c'est pas dans le livret de 4	<i>E5 joue le jeu, répond sur le même registre du livret de 4</i>
16. P : quelqu'un disait que c'étaient les chiffres pairs qui étaient importants c'est pas suffisant alors	
17. E5 : faut que ce soit 76 comme ça c'est dans le livret de 4	<i>Nouvelle invocation du livret de 4</i>
18. P : donc ça marche avec 6 et 2 c'est ce qui est important c'est ça ... tu veux dire 76 et 72	<i>P tente à nouveau de les ramener à la règle qu'elle a prévue d'enseigner</i>

19. E6 : c'est plutôt les deux derniers chiffres	<i>Confirmation : les 2 derniers chiffres forment un nombre multiple de 4</i>
20. E5 : mais si la dizaine c'est 6 l'unité ça va pas être comme unité 2 et 6 ça va changer	<i>Si $D=6$, $U \neq 2$ ou 6, E5 fait état d'une connaissance qui se construit : règle de formation des M4</i>
21. P : alors est-ce que vous êtes tous d'accord que les deux derniers chiffres doivent être M4...	<i>Le P ignore la remarque de E5 et revient sur les deux derniers chiffres ; le milieu sature pour P qui tente de revenir sur sa règle</i>
22. Els : non	<i>Les élèves ne sont pas d'accord ; ils sont déstabilisés et réfutent ce qui a été admis jusqu'alors ; on observe que les connaissances se font et se défont, qu'elles sont instables</i>
23. P : pour que ce soit divisible par 4 et le reste donne 0, alors il faut m'expliquer pourquoi vous n'êtes pas d'accord	
24. E7 : parce qu'on a dit que c'était 2 et 6	<i>Retour sur l'unité, à l'argument du début de la mise en commun</i>
25. P : alors je répète il y en a plusieurs qui ont dit ça pour que ce soit divisible par 4 les deux derniers chiffres doivent être multiples de 4 ça donne un reste de 0 le chiffre des centaines, des milliers il n'est pas important est-ce que vous êtes d'accord ... qui n'est pas d'accord avec ça ... donc vous êtes tous d'accord alors...	
26. Els : oui	<i>Le milieu sature pour les élèves également ; ils n'ont plus de contre-argument</i>
27. P : donc vous avez tous constaté la même chose ... vous êtes d'accord que si on remplace, ce chiffre (la centaine) n'a pas d'importance quand on divise par 4 c'est pas important on trouvera de toutes façons 0, c'est ces deux derniers chiffres qui sont importants donc vous êtes tous d'accord avec ça	
28. Els : oui	
29. E8 : mais ils doivent être pairs	<i>E8 revient à la charge avec la parité</i>
30. P : donc est-ce que les multiples de 4 peuvent être des chiffres impairs	
31. Els : non	
32. P : donc forcément ça sera un chiffre pair mais est-ce que c'est suffisant	
33. E8 : oui	<i>E8 se raccroche à la parité ; c'est cette connaissance qui entre en conflit avec celle des M4</i>
34. P : mais il faut que ce soit un M4 quand même	<i>P tente de rétablir les acquis</i>
35. E8 : pas obligé	<i>Pas obligé qu'ils soient M4, Pair ça suffit</i>
36. P : pas obligé ? donc tant qu'il est pair ça marche	
37. Els : oui / non	<i>Pair ça suffit / ça suffit pas</i>
38. P : qui est-ce qui veut répondre à votre camarade	
39. E9 : alors eh 78 ça marche pas	<i>Pair ça suffit pas</i>
40. P : mmhh pourquoi	
41. E9 : parce que 78 est pas dans le livret de 4	<i>E9 invoque la table de 4 La concurrence des connaissances entre la parité et la formation des M4 se règle ici à l'aide des connaissances sur la table de 4</i>
42. P : d'accord ... t'as entendu ce qu'il a dit ?	
43. E8 : oui	
44. P : donc quand tu divises par exemple 2078 tu vas diviser par 4 avec ta calculatrice et puis tu verras qu'il y a un reste d'accord ? Alors je crois qu'on va s'arrêter là. Notez ce qu'on a constaté dans vos cahiers.	<i>P arrête sa leçon là : elle coupe court aux objections des élèves, valide à leur place et institutionnalise</i>

2. Schéma de Bloch (2002)



3. Extrait de la liste de connaissances

1 ^{re} séance	Pour donner un nombre qui se divise par 3 - Il faut compter de 3 en 3 depuis 90, qui est un M3, jusqu'à 108 - 108 n'est pas dans table de 3 mais dans table de 9 car $108 = 9 \times 12$ mais comme $3 \times 3 = 9$, alors ça marche : 108 est dans la table de 3 - 12 est aussi dans la table de 3, car ils sont multiples l'un de l'autre ($9 \times 12 = 108$) - Si on peut dire : $3 \times 3 = 9$ et 9 est dans la table de 108 alors 3 est dans la table de 108, on peut dire aussi pour 36, puisque 36 est le triple de 12. - Il y a 4 tables, car on a 12, 9, 3, 36 (9×12 et 3×36). 108 est dans les tables de 12, 9, 3, 36 - Il y a 6 aussi, 6×18 ; c'est pas étonnant puisque 6 et 18 sont dans le livret de 3. - 108 se trouve dans 12 livrets. $1 \times 108, 2 \times 54, 3 \times 36, 4 \times 27, 6 \times 18$ et 9×12 - Est-ce que les nombres qui divisent 108, c'est les mêmes que les livrets où on trouve 108 ? Els : non pas du tout, c'est pas la même chose Pour savoir si un nombre se divise par 3, 6 - Pour 1532, il faut additionner les chiffres. 1532 est dans la table de 11 car $RN = 11$ ($1+5+3+2 = 11$) - Ça marche aussi pour les M4 ; 435 est un M4 puisque $4+3+5 = 12$ et que 12 est un M4 - Logiquement, ça devrait marcher avec 3, 6 et 9 - $435 \div 6 = ?$ on peut le diviser car $4+3+5 = 12$ et 12 est M6 - Ça ne marche pas avec 2 (435 est un nombre impair et pas pair) ; si c'est pas possible avec 2, alors c'est pas possible avec 6 non plus. - Pour 378, $3+7+8 = 18$, et puis 18 est M3, M6 et M9
2 ^e séance	À propos des M6 - Ça marche si ça finit par 6, ou s'il n'y a que des 6 (666) - 185 et 145 : marche pas avec 6 car $6 > 5$ (ss-entendu : ne finit pas par 6) - Ça doit pas finir par un impair - 108 ça marche, car c'est comme 18 (6×3) il n'y a qu'un zéro entre deux Nombres « étonnants » - 585, M3 et M9 et ça finit par 5

- 435, M3 seulement, pourquoi pas 9
- 603 : pourquoi pas M6, puisqu'il y a 6 centaines
- 156 : M3 et M6 pourquoi pas M9
- 1728 ça marche pour les M3, M6 et M9. Mais pourquoi M9, puisque $3 \times 9 = 27$???
- 122 finit par 2 ; $2 < 3$ c'est pour ça que ça marche pas (c.-à-d. $\neq$ M3)

***Nombre*s qui marchent pour les M3, 6 et 9, après essais par divisions**

- 108, 216, 432, 864

À propos des règles de divisibilité par 3, 6 et 9

Pour qu'un nombre soit à la fois M3, M6 et M9, il faut ...

- ... que le dernier chiffre soit un nombre pair
- ... qu'on additionne et que ça fasse toujours 18
- ... que quand on additionne ça fasse 18 ou bien qu'il finisse par 6 des fois
- ... que ce nombre soit pair et quand il s'additionne, qu'il fasse 9 ou 18

L'énumération : reprise en vue d'une diffusion aux professeurs des écoles et prolongements

Claire MARGOLINAS

Laboratoire PAEDI, IUFM d'Auvergne Université Blaise Pascal Clermont-Ferrand & Groupe DéMathE, INRP

claire.margolinas@univ-bpclermont.fr

Olivier RIVIERE

IUFM d'Auvergne Université Blaise Pascal Clermont-Ferrand & Groupe DéMathE, INRP

olivier.riviere@univ-bpclermont.fr

Floriane WOZNIAK

Laboratoire LEPS- LIRDHIST, Université Claude Bernard Lyon 1 & Groupe DéMathE, INRP

floriane.wozniak@iufm.univ-lyon1.fr

Résumé

Depuis 2003, le groupe DéMathE de l'INRP travaille en vue de la diffusion aux professeurs des écoles de certains résultats de recherche en didactique des mathématiques. Notre travail s'est engagé à partir d'une conception de la diffusion des travaux de recherche qui ne considère pas les descriptions d'ingénieries comme étant les seuls candidats au développement de la pratique d'enseignement des mathématiques des professeurs et qui s'attache à transposer pour les professeurs l'épistémologie didactique qui est à la source de la construction des ingénieries didactiques.

Nous nous sommes d'abord intéressés à l'énumération (Briand, 1999). En effet : d'une part nos observations en classe nous ont montré que les difficultés d'énumération sont permanentes et, le plus souvent, ignorées par le professeur (Margolinas, Wozniak, Canivenc, De Redon, & Rivière, 2007); d'autre part, le travail de Briand nous semblait tout à fait exemplaire et très complet sur le sujet ; enfin, il avait déjà donné lieu à une diffusion destinée au grand public (Briand, Loubet, & Salin, 2004). Ce travail, qui était au départ un travail de « simple » développement, a conduit à des travaux de recherche plus ou moins approfondies. D'une part, sur le travail documentaire des enseignants, ce qui nous semblait indispensable pour développer de nouvelles ressources (Margolinas & Wozniak, 2009). D'autre part sur l'énumération. En effet, les premières situations que nous avons observées étaient très proches de celles qui avaient été étudiées par Briand, mais le travail d'élucidation entrepris nous a permis de comprendre que des variables peu étudiées (Margolinas & De Redon, 2008) jouaient un rôle dans des situations, ce qui nous contraint à revisiter ce concept.

Briand, J. (1999). Contribution à la réorganisation des savoirs prénumériques et numériques. Étude et réalisation d'une situation d'enseignement de l'énumération dans le domaine prénumérique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(1), 41-76. Briand, J., Loubet, M., & Salin, M.-H. (2004). *Apprentissages mathématiques en maternelle*. Paris Hatier.

Margolinas, C., & De Redon, M.-C. (2008). Connaissances naturalisées dans le champ du numérique à l'articulation école maternelle / école primaire. In A. Rouchier & I. Bloch (Eds.), *Perspectives en didactique des mathématiques* (pp. *cd-rom*). Grenoble: La pensée sauvage. Margolinas, C., & Wozniak, F. (2009). Place des documents dans l'élaboration d'un enseignement de mathématiques à l'école primaire. In I. Bloch & F. Conne (Eds.), *Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques* (pp. 135-146). Grenoble: La pensée sauvage. Margolinas, C., Wozniak, F., Canivenc, B., De Redon, M.-C., & Rivière, O. (2007). Les mathématiques à l'école ? Plus complexe qu'il n'y paraît ! Le cas de l'énumération de la maternelle... au lycée *Bulletin de l'APMEP*, 471, 483-496.

Etude épistémologique et didactique de la preuve en mathématiques et de son enseignement

Une ingénierie de formation

Michèle GANDIT

Maths-à-modeler (Institut Fourier) & IUFM
Université Joseph Fourier, Grenoble

michele.gandit@ujf-grenoble.fr

Résumé

En étudiant, d'une part, le *contrat didactique usuel* relatif à la preuve dans l'enseignement secondaire, d'autre part, les *conceptions des enseignants* sur la preuve, nous mettons en évidence un décalage important, d'un point de vue épistémologique, entre la preuve en mathématiques et la preuve telle qu'elle vit en classe, au collège et au lycée. Les exigences fortes des enseignants, relatives à la forme d'un écrit de démonstration, proposée dès le début de l'apprentissage, *empêchent* les élèves d'accéder à la preuve comme un moyen de valider, de réduire le doute, d'expliquer, donc de se construire un rapport à la preuve plus conforme à celui des mathématiciens. Un changement s'avère ainsi nécessaire dans les pratiques des enseignants, pour que la preuve soit abordée en classe, de manière plus satisfaisante sur les plans épistémologique et didactique. Nous montrons qu'il est pertinent, et possible, d'amorcer ce changement par un travail sur les conceptions des enseignants relativement à la preuve, son apprentissage et son enseignement. Pour ce faire, nous proposons une *ingénierie de formation* fondée sur trois problèmes : dans un premier temps, elle montre le rapport existant des élèves à la preuve, ce qui permet d'exhiber certains malentendus entre le professeur et les élèves ; dans un second temps, les enseignants sont mis en situation de recherche de problèmes et produisent des preuves. Les résultats obtenus à partir des problèmes choisis permettent à la fois de préciser le rapport des enseignants à la preuve et d'amorcer avec eux une réflexion sur leurs pratiques.

Mots clés

Preuve ou démonstration, formation des enseignants, situation de recherche, conception, pentagone, angle, recherche d'un centre.

Introduction

Ce texte présente notre travail de thèse (Gandit 2008) préparée au sein de l'équipe *Maths-à-modeler* de l'Institut Fourier, sous la direction de Charles Payan et Denise Grenier. Cette étude a été menée en lien étroit avec le métier de professeure de mathématiques dans un lycée et celui de formatrice – formation continue, dans le cadre de l'IREM, et initiale, à l'IUFM – des enseignants de mathématiques du second degré. Les visites dans les classes de collège et de lycée, les échanges avec les enseignants au cours des stages de formation continue et avec les professeurs stagiaires dans le cadre de l'IUFM, ont permis, au cours de ces quinze dernières années, de cerner le *rapport des enseignants à la preuve en mathématiques* – preuve et démonstration seront employés indifféremment avec le même sens – et aussi à son enseignement et apprentissage. La pratique du métier en lycée et les observations des élèves, de collège et de lycée, réalisées au cours des visites en classe ont amené à une caractérisation du *rapport des élèves à la preuve*. L'ingénierie de formation proposée s'est construite au fur et à mesure de nos actions de formation.

Entre la preuve en mathématiques et la preuve en classe un décalage important

La preuve est difficile à enseigner

La preuve en mathématiques est à la fois l'outil pour construire les mathématiques et le moyen de communiquer. C'est aussi à la fois un *processus* et un *produit*. La preuve vise à lever le doute, valider, établir la vérité, convaincre, mais aussi expliquer, ces différentes fonctions ayant pour cadre une rationalité propre aux mathématiques. La preuve, en tant que produit pour communiquer, est l'aboutissement d'un travail d'écriture, qui accompagne le processus tout au long de son déroulement. Sous ces deux aspects de processus et de produit, elle se construit lentement au cours d'une longue période expérimentale, dans la recherche d'un problème, dans une *lente maturation* (Poincaré 1908).

Du fait de sa nature de processus qui évolue d'une question de départ vers une réponse qui doit être irréfutable, la preuve est difficile à enseigner. Les enseignants rencontrent des difficultés sur ce plan. En attestent les questions posées en formation et les copies qu'ils apportent — dans la suite, nous en analysons deux — et devant lesquelles ils se sentent démunis. On peut distinguer quatre sources différentes à cette difficulté d'enseignement. La première est l'importance du saut conceptuel qu'il est nécessaire de faire faire aux élèves pour qu'ils puissent entrer dans le processus. En effet ils doivent saisir d'abord qu'il faut passer d'un point de vue pragmatique à un point de vue plus théorique (Balacheff 1987), ensuite que ce processus s'inscrit dans une logique spécifique, qui diffère de celle qui régit la vie de tous les jours (le *bon sens* ne suffit pas), enfin comprendre le caractère de nécessité des énoncés mathématiques (Gandit & Massé-Demongeot 1996). Ces trois éléments essentiels ne suffisent cependant pas à eux seuls à décrire cet écart conceptuel. La seconde difficulté pour les enseignants est de présenter le produit fini, la preuve (ou démonstration), qui est en fait l'aboutissement d'un travail d'écriture, destiné à lever le doute, convaincre, expliquer, avon-nous dit. Certains arguments ne vont pas figurer dans cette production finale, alors qu'ils ont été utiles au cours du processus : ce sont les *trous*, utiles pour augmenter l'intelligibilité d'une preuve. D'autres arguments sont absolument indispensables, leur absence rendant la preuve non valide. A cause de cette nécessaire disparité dans l'explicitation des arguments, la présentation du produit fini ne peut permettre à elle seule de faire comprendre aux élèves comment il se constitue. Une troisième source de difficulté pour les enseignants réside dans le manque de visibilité du travail d'écriture qui accompagne le processus jusqu'au produit fini : on ne voit en général que ce dernier, généralement un texte¹, qui est un aboutissement, plus formalisé, dans lequel n'apparaît plus nécessairement la démarche. Enfin une quatrième difficulté tient à l'évaluation d'une preuve : par exemple, il est difficile pour le professeur de repérer, dans une production d'élève, si tel trou est légitimé par le souci de l'élève de se faire mieux comprendre ou s'il vient du fait que l'élève n'a pas compris.

Le professeur étant tenu de faire réussir les élèves et l'objet à enseigner étant difficile d'accès, cette situation de conflit didactique se résout, dans l'enseignement actuel, depuis une quinzaine d'années², par un changement d'objet d'enseignement : *on écarte l'enseignement du processus et on enseigne directement à écrire un certain type de produit fini, qu'on appelle une démonstration*. On devrait dire que l'on apprend aux élèves à reproduire des textes qui sont conformes à un format donné (nous y reviendrons), c'est en ce sens que doit s'entendre *Enseigner à écrire une démonstration*, on n'apprend pas aux élèves à cheminer dans le

¹ Texte au sens large, ce peut être un texte accompagné de figures diverses, ou même seulement une figure. Voir les *preuves sans mot* sur le site de Maths-à-modeler.

² En attestent des copies analysées et notre expérience de formatrice IUFM

processus. Le rôle de l'écriture, qui devrait être d'accompagner celui-ci jusqu'au produit fini, de rendre compte de son avancement dans la levée du doute, l'explication, l'établissement de la vérité n'est alors plus le même. Pour l'élève, il s'agit en effet d'apprendre à écrire en conformité avec un modèle donné, d'apprendre à écrire le *signifiant* sans nécessairement saisir le *signifié* (Vergnaud 1990). Nous évoquons plus loin les *malentendus* qui en découlent. Cette nouvelle difficulté didactique – enseigner à écrire un texte suivant un format strict – se résout actuellement, comme souvent dans ce type de situation, par l'enseignement d'un *algorithme d'écriture de preuve*, ce qui

- [...] permet momentanément un partage clair des responsabilités. Le maître montre l'algorithme, l'élève l'apprend et « l'applique » correctement : sinon il doit s'exercer mais son incertitude est presque nulle. (Brousseau 1998)

L'incertitude du professeur est presque nulle aussi : il peut expliciter l'algorithme d'écriture et ce qu'il produit, qui est alors désigné aux élèves comme étant une démonstration. Ce glissement de l'enseignement/apprentissage de la preuve vers celui de l'écriture d'un certain type de texte entraîne un *décalage important entre la preuve telle qu'elle vit dans la communauté mathématique et la preuve en classe*. De multiples exemples illustrent ce saut épistémologique dans les manuels utilisés actuellement au collège en France (voir figure 1) ou dans les préparations de cours ou encore dans le déroulement réel des séances en classe (Demongeot & Gandit 2003 ; Gandit 2004, 2008).

Apprendre (et enseigner) à écrire une preuve est nécessaire, nous ne le nions pas. Une démonstration est un texte particulier. Ce que nous montrons, c'est que cet enseignement se situe *a priori*, au moment où il s'agirait de faire entrer l'élève dans le processus de preuve. Une hypothèse de notre travail est que l'apprentissage de la preuve ne s'initie pas par un travail d'écriture soumise à des contraintes formelles, en dehors du processus de preuve.

Le contrat didactique usuel relatif à la preuve dans les classes

La figure 1 montre une approche de la démonstration tout à fait représentative du vécu actuel de la majorité des élèves de collège. On voit la preuve réduite à un exercice formel de manipulation de propriétés vues en cours, suivant une structure codifiée, en trois phases, la première étant introduite par *on sait que* et la dernière par *donc*, cette manipulation ayant lieu à partir d'une situation pauvre, où le résultat est évident. Ce formalisme est proposé aux élèves sous deux formes : un tableau en trois colonnes ou un texte très codifié que nous nommons *texte-algorithme*.

Comment rédiger une démonstration à partir d'une figure codée

Énoncé En utilisant les codages portés sur la figure ci-contre :

1. Expliquer pourquoi la droite (d) est la médiatrice du segment $[AB]$.
2. Démontrer que les longueurs CA et CB sont égales.

Solution

1. On sait, grâce aux codages de la figure, que la droite (d) est perpendiculaire au segment $[AB]$ et qu'elle coupe ce segment en son milieu. Donc, par définition, la droite (d) est la médiatrice du segment $[AB]$.

2. Les longueurs CA et CB semblent égales sur la figure.

Or, les mesures effectuées sur une figure ne constituent pas une preuve :

il faut apporter des arguments qui permettent d'affirmer que les longueurs CA et CB sont égales.

Pour cela, on effectue une **démonstration**, grâce à un raisonnement déductif.

• On peut d'abord répondre aux trois questions suivantes.

– Quelles sont les données de l'énoncé ?

Les données de l'énoncé sont : « La droite (d) est la médiatrice du segment $[AB]$ » et

« Le point C appartient à la droite (d) ».

– Que veut-on démontrer ?

On veut démontrer que les longueurs CA et CB sont égales.

– Quelle propriété peut-on alors appliquer ?

La propriété que l'on peut appliquer est : « Si un point appartient à la médiatrice d'un segment, alors ce point est équidistant des extrémités de ce segment. »

• On peut ensuite utiliser un schéma de démonstration.

Les données	→	La conclusion
On sait que ...	On utilise la propriété	On en déduit que ...
(d) est la médiatrice du segment $[AB]$. C appartient à la droite (d) .	« Si un point appartient à la médiatrice d'un segment, alors ce point est équidistant des extrémités de ce segment. »	$CA = CB$

• On rédige la démonstration.

On sait que la droite (d) est la médiatrice du segment $[AB]$ et que le point C appartient à (d) .

Or, si un point appartient à la médiatrice d'un segment, alors ce point est équidistant des extrémités de ce segment.

Donc le point C est équidistant des points A et B : $CA = CB$.

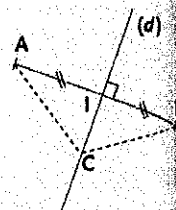


Figure 1 : Un extrait de la page 152 du manuel de mathématiques pour la classe de cinquième, collection Prisme, 2006, éd. Belin

Dans le manuel (figure 1), il s'agit de la *première* rencontre de l'élève avec la preuve. Celle-ci est abordée, comme nous l'avons dit, directement par le produit final et non par le processus. Ce dernier ne peut être appréhendé que dans des situations qui présentent un fort enjeu de vérité, qui suscitent le besoin d'expliquer, de réduire le doute. Or ce n'est pas le cas dans cette page de manuel. Les mots *expliquer* et *démontrer* semblent avoir des sens différents. Une démarche est tout de même indiquée : on s'interroge d'abord sur les données, ensuite sur ce qu'on veut démontrer, puis on cherche la propriété à appliquer, on déroule enfin *l'algorithme d'écriture de preuve*. On ne se préoccupe pas d'abord du problème à résoudre – il n'est

d'ailleurs pas question de *problème* dans cette page –, on doit seulement lire correctement les données codées, comme si le codage et la sélection des données étaient indépendants du projet de preuve³ (Demongeot & Gandit 2003). En effet relever comme donnée utile – hypothèse reprise pour le pas de démonstration – que C appartient à d est complètement lié au projet de conclure que $CA = CB$. Or ceci n'apparaît pas du tout dans la présentation chronologique du questionnement (d'abord les données, puis ce qu'on veut démontrer...). Et pourquoi ne sélectionnerait-on pas comme donnée que le triangle CIB est rectangle en I ? L'expert ne se pose pas cette question car, lui, il sélectionne les données au cours de la recherche de la démonstration, en fonction du but à atteindre. Ce *contrat didactique d'ostension* (Brousseau 1998) se décline en *règles*, actuellement en vigueur dans les classes de collège, et aussi de lycée. La figure 1 en illustre deux : celle du *on sait que/or/donc* et celle du *tableau en trois colonnes*. La première établit qu'une démonstration s'articule en différents pas ternaires, hypothèse/règle⁴/conclusion, l'hypothèse étant introduite par *on sait que*, la conclusion par *donc*, la règle justifiant le passage de la première à la seconde étant éventuellement introduite par *or*. La seconde propose une présentation de la démonstration dans un tableau à double entrée : chaque ligne représente un pas, chacune des trois colonnes correspond respectivement à l'hypothèse, la règle et la conclusion du pas, cette dernière étant recyclée en hypothèse du pas suivant (Duval 1991).

Beaucoup de professeurs, notamment les stagiaires en début de formation, sont attirés par cette présentation de la preuve. Cependant une réflexion sur les apprentissages réalisés – dans le cadre d'un mémoire professionnel, par exemple – conduit certains d'entre eux à un abandon, voire un rejet brutal :

- Il m'est difficile de savoir si le tableau a permis aux élèves d'avoir une perception différente du statut de la proposition mathématique. Et pour être tout à fait honnête, il m'importe peu de le savoir à présent que je sais cette technique être le pire ennemi de la démonstration. (Jamgotchian 2005)

Il est ainsi possible de faire évoluer le contrat usuel relatif à la preuve en classe. La raison de vouloir un tel changement n'est pas seulement l'écart mis en avant sur le plan épistémologique. A celle-ci s'ajoute la constatation du comportement dénué de sens qu'il induit chez beaucoup d'élèves sur le plan de la preuve.

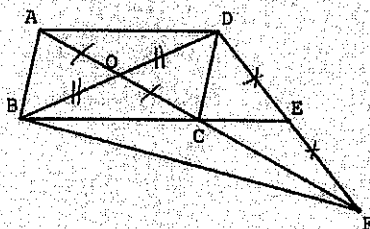
La copie (voir figure 2) d'Angélique, élève d'une classe de quatrième (13 ans), concerne un contrôle à l'issue d'un chapitre consacré au triangle. Dans ce chapitre, on apprend à appliquer le théorème de Thalès et sa réciproque dans le cas des milieux des côtés.

³ Nous explicitons ce point plus loin, avec la copie d'Yvan.

⁴ Ce qui est ici nommé *règle* peut être une propriété, une définition, un théorème.

Exercice :

On considère la figure ci-dessous :



- 1) Démontrer que $ABCD$ est un parallélogramme.
- 2) Démontrer que les droites (AD) et (BC) sont parallèles.
- 3) Montrer que C est le milieu de $[AF]$.

1) Je démontre que $ABCD$ est un parallélogramme.

Je sais que O est le milieu de $[AC]$ et que O est le milieu de $[BD]$.

J'utilise le théorème 2 : si un segment joint les milieux des 2 côtés d'un triangle, alors sa longueur est égal à la moitié du 3^{ème} côté.

Donc $ABCD$ est un parallélogramme.

2) Je démontre que les droites (AD) et (BC) sont parallèles.

Je sais que O est le milieu de $[AC]$ et aussi le milieu de $[BD]$.

J'utilise le théorème 3 : si une droite passe par le milieu des deux côtés d'un triangle alors cette droite passe aussi par le 2^{ème} et le 3^{ème} côté de ce triangle.

Donc les droites (AD) et (BC) sont parallèles.

3) Je montre que C est le milieu de $[AF]$.

Je sais que E est le milieu de $[DF]$ est que CD et CE sont parallèles.

J'utilise le théorème 1 : si une droite passe par le milieu d'un côté, alors cette droite est parallèle au 3^{ème} côté.

Figure2: La copie d'Angélique

Sur le plan mathématique, ce texte n'a pas de sens. On fait l'hypothèse qu'Angélique a cru respecter le contrat, sur la forme. Ses réponses sont introduites par *je démontre que*, elles correspondent aux questions posées et – sauf dans la troisième, inachevée – aux conclusions introduites par *donc*. A quelques variantes près, la *règle du on sait que/or/donc* est respectée. L'hypothèse du pas, introduite ici par *je sais que*, contient des informations correctes tirées du codage de la figure. Cependant si, conformément au contrat, le deuxième temps du pas consiste bien en une règle, annoncée par *j'utilise le théorème*, celle-ci n'est pas adaptée au passage de l'hypothèse à la conclusion. On le constate dans les réponses aux trois questions. Les hypothèses des propriétés citées ne sont cependant pas sans rapport avec les données introduites par *je sais que*, on y retrouve des mots communs. Ainsi, par exemple dans la première réponse, il est question de deux milieux de segments dans ce qui est retenu comme hypothèse et il apparaît bien aussi deux milieux dans l'hypothèse du théorème 2. Enfin, conformément à une autre règle de contrat selon laquelle les démonstrations sont des mises en œuvre des connaissances vues en cours, Angélique s'astreint à utiliser les trois théorèmes étudiés habituellement dans ce chapitre. Le cas *Angélique* n'est pas atypique. Sa copie est tout à fait représentative des productions d'un grand nombre d'élèves, issues de classes diverses, depuis une quinzaine d'années. Nous renvoyons à Demongeot & Gandit (2003) et Gandit (2004) pour une analyse d'autres copies, révélatrices du même malaise dans l'apprentissage de la démonstration. La figure 3 montre l'une d'entre elles, l'énoncé correspondant étant le suivant :

BLE est un triangle isocèle de sommet L . La parallèle à (LE) passant par B et la parallèle à

(LB) passant par E se coupent en U . Prouver que (BE) et (LU) sont perpendiculaires.

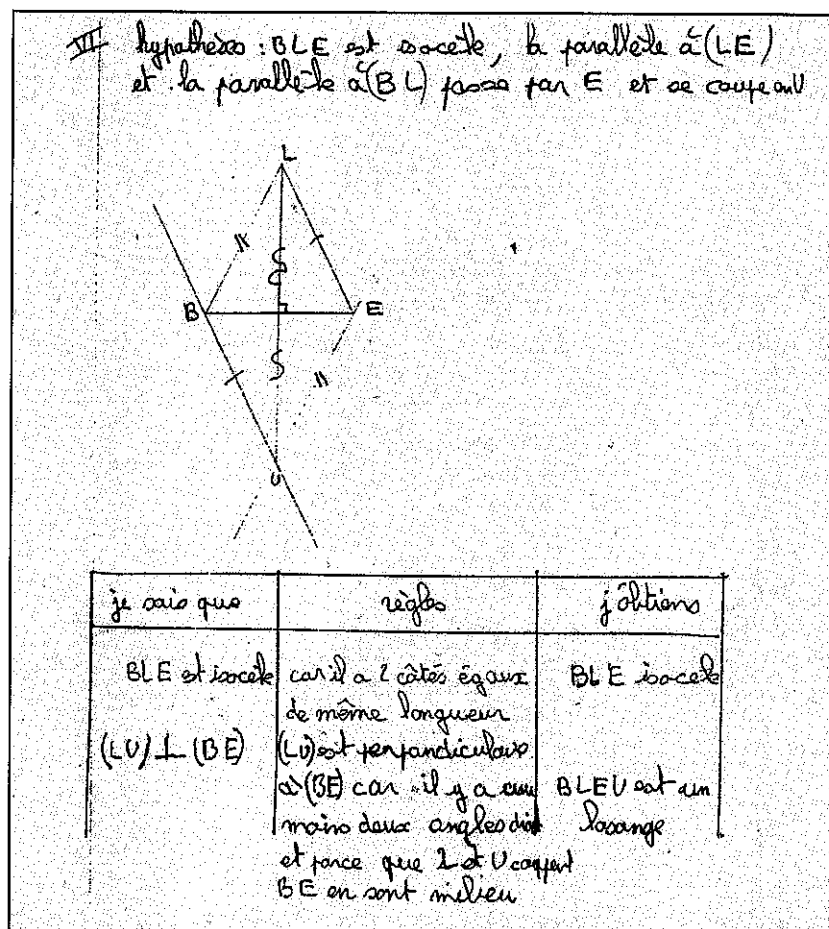


Figure 3 : La copie d'Yvan

Nous dirons seulement ici que cette copie révèle une troisième règle de contrat, selon laquelle, pour faire une démonstration en géométrie, on fait une figure qu'on accompagne des hypothèses et d'un codage. Or ces actions : écrire les hypothèses, faire une figure, la coder, le professeur les accomplit au service du processus de preuve, et non pas seulement en préalable à l'écriture du texte final :

- Pour l'expert, ces tâches préalables n'ont rien de préalable : elles entretiennent des liens étroits entre elles et s'ancrent complètement dans la recherche et l'écriture de la démonstration. Pour la classe, le travail de démonstration a été découpé. Les tâches en question perdent leur sens et leur fonction, car le projet qui sous-tend le travail, l'intentionnalité, ne se découpe pas. Et l'élève qui en reste au décryptage et à l'exécution de ces tâches explicites, qui ne reconstruit pas le projet implicite, peut-il comprendre ce qu'est le texte de démonstration visé ? (Demongeot & Gandit 2003).

A elle seule la remarque qu'Yvan a écrit trois fois dans sa copie, *BLE est isocèle*, dont une fois, en hypothèse, et une fois, en conclusion du même pas de démonstration, montre combien cet élève est loin de l'idée d'écrire une preuve.

Changer les pratiques des enseignants

Ces comportements d'élèves conduisent à s'interroger. On pourrait se dire que les élèves sont en difficulté et se tourner vers les pratiques de remédiation, actuellement très répandues. Ce n'est pas notre choix. Nous interprétons en effet ces comportements d'élèves en termes de *malentendus* et nous nous sommes au contraire tournée vers les *pratiques des enseignants*, qui peuvent conduire des élèves à écrire des textes à ce point dépourvus de sens. *Comment changer les pratiques d'enseignement pour que la preuve soit abordée en classe, de manière plus satisfaisante sur le plan épistémologique ? Comment conduire les enseignants à s'interroger eux-mêmes sur leurs pratiques ? Quelles sont les conceptions des enseignants sur la preuve elle-même et sur son enseignement ?*

Les malentendus

Les enseignants des classes d'Yvan et d'Angélique étaient convaincus que ces élèves étaient en échec. Et ils l'étaient certes par rapport à la tâche qui consiste à produire ce texte-algorithme ou à remplir ce tableau en trois colonnes. Nous avons cependant choisi de considérer que ces élèves n'étaient pas nécessairement en échec par rapport à la preuve elle-même et qu'il s'agissait plutôt d'un *malentendu*. Nous le caractérisons de la manière suivante : le professeur propose à l'élève des tâches⁵ en rapport avec un objectif d'apprentissage précis, ces tâches s'inscrivent en rupture avec cet objectif sur le plan épistémologique, l'élève ne réussit pas les tâches demandées, le professeur en conclut que l'élève est en échec par rapport à l'apprentissage visé. Dans les cas *Angélique* et *Yvan*, l'objectif d'apprentissage du professeur est d'*écrire une preuve*. Or sa pratique – à savoir enseigner à remplir des tableaux en trois colonnes ou écrire des textes-algorithmes – ne vise, pensons-nous, que l'apprentissage d'un type d'écriture, nécessairement incompréhensible pour qui n'est pas auparavant entré dans un processus de preuve. Le professeur pense au contraire que l'apprentissage de la forme du texte permet à l'élève de comprendre ce qu'est une preuve. Le *malentendu* réside ainsi dans le *diagnostic d'échec* que le professeur renvoie à l'élève.

Nous avons défini plusieurs types de malentendus. Nous donnons un autre exemple : le *malentendu* sur la *réussite*. En effet la réussite d'un élève dans les tâches d'écriture explicitées ci-dessus n'atteste pas non plus qu'il a compris ce qu'est une preuve. Il faut dire que le *contrat didactique usuel relatif à la preuve* est performant à court terme, d'où sa résistance, depuis plus de dix ans, malgré quelques injonctions officielles. Globalement les élèves réussissent à écrire ces textes-algorithmes, mais sans pour autant avoir compris ce qu'était une preuve.

Cet éclairage sur les productions d'élèves en termes de malentendus plutôt qu'en termes de difficultés des élèves ouvre la voie vers une réflexion sur les pratiques existantes. Il peut permettre de sensibiliser les enseignants à la reconnaissance que certaines pratiques sont inopérantes, et ainsi renvoyer à la formation, afin de réduire ces malentendus.

Les pratiques des enseignants

Il est possible de faire évoluer ces pratiques, avons-nous dit. Nous en avons des exemples concernant les professeurs stagiaires (Jamgotchian 2005). Les évolutions sont plus difficiles à repérer de l'extérieur dans le cas des professeurs expérimentés. Les pratiques de ces derniers sont aussi beaucoup plus stables que celles des professeurs stagiaires, donc plus difficiles à faire évoluer :

⁵ Qu'il considère comme pertinentes par rapport à l'objectif d'apprentissage qu'il s'est fixé.

- Former des pratiques serait [...] réussir à donner à chaque enseignant des moyens pour « optimiser » à son échelle les composantes cognitives et médiatives de ses pratiques, en tenant compte des contraintes, variables selon les classes. « Donner des moyens » signifierait donner des connaissances, des moyens d'apprécier leur portée et leurs limites, des moyens de les critiquer et de les adapter. » (Robert 2005)

Nous ne développerons pas les contraintes auxquelles les enseignants sont soumis, nous dirons seulement que tout changement de pratique va se heurter *aux habitudes profondes du milieu*, comme elles sont nommées par Robert (2005). Ces contraintes et habitudes nous ont confortée dans le choix de travailler sur les *conceptions* des enseignants relativement à la preuve et à son enseignement/apprentissage. Elles constituent à notre sens un levier possible pour changer les pratiques.

Les conceptions des enseignants sur la preuve

Il s'agit de notre principal objet d'étude. Il a conduit à l'élaboration de l'ingénierie de formation annoncée, qui, à son tour, a permis de saisir des conceptions. Interrogée sur ce qu'est une démonstration, Emilie, professeure de lycée stagiaire, répond :

- Une démonstration est un texte qui part des hypothèses, des données. Par un enchaînement de pas (hypothèse, propriété, conclusion), elle permet d'aboutir à la conclusion finale, c'est-à-dire la question posée. Elle doit être indépendante de toute figure, c'est-à-dire le texte doit se suffire à lui-même pour la compréhension.

Cette conception de la démonstration apparaît étroitement liée⁶ au *contrat didactique usuel relatif à la preuve*, donc aux pratiques d'enseignement. Celles-ci peuvent être remises en cause par la formation – nous en avons vu un exemple –, toutefois pas de manière immédiate. Un travail de fond est nécessaire, qui passe, pensons-nous, par *un travail sur les conceptions des enseignants relativement à la preuve*. Notre hypothèse de travail est qu'elles empêchent l'entrée des élèves dans la preuve ; les pratiques qui en découlent s'opposent à l'accès des élèves à la signification de la preuve au niveau du savoir mathématique. Nous entendons *conception sur la preuve* au sens d'un modèle pour rendre compte des comportements des professeurs, mis en situation de prouver ou d'enseigner la preuve. Par rapport aux enseignants, il est difficile – voire impossible, comme nous allons le voir dans les productions obtenues au cours de l'ingénierie – de séparer *la preuve en mathématiques* et *la preuve enseignée*, tant ces deux points de vue interfèrent l'un sur l'autre. Ce modèle est caractérisé par des pratiques, des modes de représentation, des situations d'enseignement de la preuve. Nos divers éléments de méthodologie (questionnement direct, choix par les enseignants de situations d'enseignement, analyse de manuels, résolution de problèmes) nous ont permis de saisir ce que nous avons appelé des *composantes locales de conception*. Ainsi la citation d'Emilie permet d'en illustrer trois, très courantes parmi les enseignants. Tout d'abord : *une démonstration est un enchaînement de pas ternaires, construits sur le mode hypothèse/règle/conclusion ; la preuve s'apprend ou se reconnaît si l'on suit ce formalisme*. Son domaine de validité se restreint à certains types de démonstrations construites sur le mode du raisonnement déductif. Le texte-algorithme et le tableau en trois colonnes, visibles sur la figure 1, en sont deux éléments du système de représentation symbolique. Nous avons déjà évoqué des situations d'enseignement où se révèlent des pratiques caractéristiques de cette première composante, la *règle de contrat du on sait que/or/donc* en est une conséquence. Il vient ensuite : *une démonstration est un texte qui explicite totalement le raisonnement, les arguments ne sont pas triés en fonction de leur pertinence, ils sont tous écrits ; une figure ne peut remplacer une partie du texte*. Enfin : *la démonstration s'apprend dans le cadre de la*

⁶Nous verrons aussi plus loin que les enseignants, amenés à écrire une preuve, produisent des textes conformes à ce contrat, même en dehors de la classe.

géométrie plane. Cette dernière est remise en cause assez fortement dans les programmes actuels, mais pas nécessairement dans les pratiques.

Nous avons abouti à la mise au point d'une liste de ces composantes locales de conceptions (Gandit 2008, p. 38), qui constitue une grille d'analyse. Nous l'avons utilisée concernant les manuels et les programmes, les situations choisies pour enseigner la preuve, le suivi des professeurs stagiaires. Cette analyse fait ressortir que certaines de ces composantes locales se retrouvaient systématiquement regroupées, comme le groupement de trois issu de la citation d'Emilie. Il a ainsi émergé de notre étude, entre autres, une conception globale dominante, sous laquelle fonctionnent bon nombre d'enseignants, expérimentés ou débutants : *la preuve est un moyen de mettre en œuvre les connaissances du cours (et seulement celles-là), elle s'apprend dans un contexte où le doute est absent, où il n'y a pas d'enjeu de vérité ; on suit un modèle de rédaction donné, qui montre l'enchaînement de pas ternaires, sur le mode hypothèse/règle/conclusion*.

Pour amener les enseignants à réfléchir à une approche de la preuve en classe plus satisfaisante sur le plan épistémologique, nous avons conçu une ingénierie de formation en deux temps : montrer d'abord le rapport existant des élèves à la preuve, mettre ensuite les enseignants en situation de recherche de problèmes et de production de preuves.

Une ingénierie de formation

Présentation

Notre hypothèse est que les contradictions qui apparaissent au cours de cette phase de production de preuves peuvent conduire les enseignants à réexaminer leurs pratiques. Cela les amène aussi à être plus sensibles à des analyses, des suggestions, des ouvertures qui sont ensuite proposées. Mais la confrontation des enseignants à la preuve en dehors de la classe ne peut pas à elle seule conduire à un retour sur les pratiques existantes. Les enseignants doivent percevoir le lien avec la classe, percevoir que certaines pratiques sont inopérantes. Ainsi l'ingénierie débute par *l'explicitation de malentendus*, qui peut mettre en position de reconsidérer les pratiques, en faisant voir le rapport existant des élèves à la preuve et en montrant son décalage avec le rapport attendu. Cette première partie de l'ingénierie est illustrée dans le paragraphe suivant. Les enseignants *entrent ensuite dans un processus de preuve* : ils cherchent un problème, par groupes de trois ou quatre, puis rendent une production personnelle. Les trois problèmes sont répartis suivant les groupes. La troisième phase de l'ingénierie, s'appuyant sur les textes produits, amène à un retour sur les pratiques et une réflexion sur le rapport de l'élève à la preuve, qu'elles contribuent à construire. Plus précisément, les enseignants disposent d'abord d'un petit moment pour s'appropriier les deux problèmes qu'ils n'ont pas cherchés. Par groupes, ils examinent ensuite des productions sur les problèmes, sélectionnées suivant certains critères (voir plus loin) et qui ont été rédigées par des enseignants ou par des élèves. Ils doivent y repérer ce qui relève d'une preuve et ce qui n'en relève pas, des éléments liés aux spécificités des problèmes. Pour chacun d'eux, on procède ensuite à une institutionnalisation au niveau mathématique, puis au niveau didactique, relativement à l'enseignement de la preuve.

Phase 1 : explicitation de malentendus

Cette phase est importante. Nous avons retenu de nos expérimentations successives que son omission était néfaste pour la suite de la formation. Des copies, des faits d'élèves (Demongeot & Gandit 2003, Gandit 2008) sont analysés et les malentendus sont pointés. Nous avons déjà donné des exemples. Voici un autre type de malentendu qu'il est important

d'expliciter, il concerne le *rapport existant des élèves à la preuve*. La production de la figure 4, par exemple, induit en formation une réflexion sur les diverses façons dont l'élève peut comprendre *ceun* devant quadrilatère.

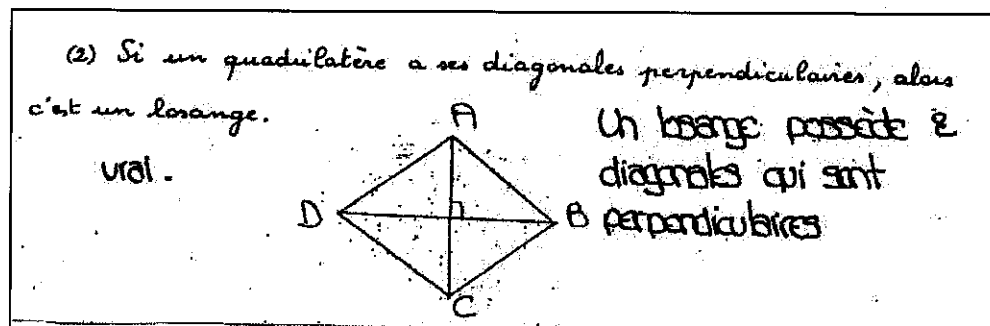


Figure 4 : Une copie d'élève de troisième

La quantification est sous-entendue⁷ dans cet énoncé proposé à l'élève, comme elle l'est habituellement en géométrie. Pour l'expert, pour le professeur, il n'y a pas d'ambiguïté sur la signification à accorder à la phrase. Il s'agit bien de considérer l'ensemble de tous les quadrilatères qui ont leurs diagonales perpendiculaires pour se prononcer sur le vrai ou le faux. Mais l'élève, lui, considère *un* exemple de quadrilatère qui a des diagonales perpendiculaires et qui est aussi un losange ; cela lui permet d'illustrer que la phrase dit vrai. Et il ajoute une légende à côté de son dessin. Peut-on conclure que cet élève ne comprend pas la différence entre condition nécessaire et condition suffisante ? Ce qu'on peut seulement en déduire, c'est la nécessité, pour l'enseignant, d'expliciter la signification du *un*, s'il veut ensuite aider l'élève à se construire un rapport adéquat au sens du vrai et du faux en mathématiques, à la différence entre condition nécessaire et condition suffisante (Gandit & Massé-Demongeot 1996). L'enseignant doit ainsi compter sur ce rapport existant, construit souvent sur des malentendus tels que celui-ci, afin d'asseoir le rapport attendu. Il prend également conscience qu'en classe, par contrat, on travaille très souvent sur le vrai en se gardant de parler du faux. Il s'agit ainsi de pointer des savoirs rarement institutionnalisés en classe, toutefois indispensables pour permettre l'entrée des élèves dans le processus de preuve.

Phase 2 : les trois problèmes

Le Centre de Secours : Dans une vaste région se trouvent quatre villages de même importance ; on veut construire un centre de secours muni d'un hélicoptère de façon à pouvoir atteindre le plus rapidement possible le village le plus éloigné. Où placer le centre de secours ?

Le Pentagone : Somme des angles d'un pentagone.

Le Polymino : On considère un polymino carré privé d'une case (voir figure 5). Est-il possible de le paver avec des dominos ? Un domino est constitué de deux cases contiguës.

⁷Nous renvoyons à Durand-Guerrier (2005) qui montre que cet implicite n'est pas partagé par de nombreux élèves, au lycée et même au-delà.

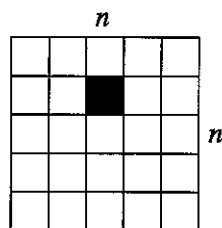


Figure 5 : Un carré de côté n avec un trou (une case noire)

Les variables qui ont guidé le choix de ces problèmes sont liées aux pratiques des enseignants et à leurs conceptions sur la preuve. Nous renvoyons à Gandit (2008) pour une analyse de ces problèmes sur les plans mathématique et didactique. Nous ne donnons ci-dessous que quelques-unes de leurs spécificités. Le paragraphe suivant aborde les résultats qu'ils ont permis d'obtenir concernant les enseignants face à la preuve et leur exploitation dans la phase 3 de l'ingénierie.

LeCentre de secours a été étudié sur un échantillon d'environ quatre-vingts enseignants, cent cinquante pour les deux autres. Pour aborder chacun d'eux, le niveau de connaissances requis est élémentaire, ils peuvent être tous trois réinvestis en classe. Il est d'ailleurs intéressant, en formation, de disposer de copies d'élèves sur ces problèmes, qui sont examinées sur le même plan que celles des enseignants. Au premier abord, le *Centre de secours* et *lePentagone* semblent plus proches des pratiques habituelles que *le Polymino*. Ils permettent tous les trois de restaurer les fonctions fondamentales de la preuve : établir la vérité, convaincre, expliquer. Ces problèmes se complètent sous plusieurs aspects, notamment au niveau des types de preuves qu'ils génèrent, assez différents. Cette diversité permet en formation une réflexion sur différents aspects des pratiques des enseignants, comme nous allons le voir dans le paragraphe suivant.

Phase 3 : les résultats obtenus et leur exploitation en formation

L'aspect formel de la preuve est remis en cause

Les productions obtenues sur *le Polymino* rompent avec l'aspect formel usuel de la preuve, comme le montre la figure 6 : peu de mots, pas de suite de pas ternaires, des dessins... On sort du cadre logique habituel, relevant du calcul sur les propositions (Durand-Guerrier & Arsac 2003), on raisonne sur des objets. La preuve de l'existence de tel objet n'est pas du même type que celle que tel autre n'existe pas. Il est ainsi question de différents types de preuves (par exhibition, par forçage), qu'il est intéressant d'étudier aussi en classe. Exploiter avec les élèves la copie de quatrième (figure 6) permet de faire ressortir les différences entre les types de preuves qui sont abordés, de réfuter la conjecture émise, donc de faire vivre le faux dans la classe. Outre cet objet de réflexion pour la formation, la validité de ces preuves est à discuter : celle de gauche comporte-t-elle des *trous* ou suffit-elle à convaincre ?

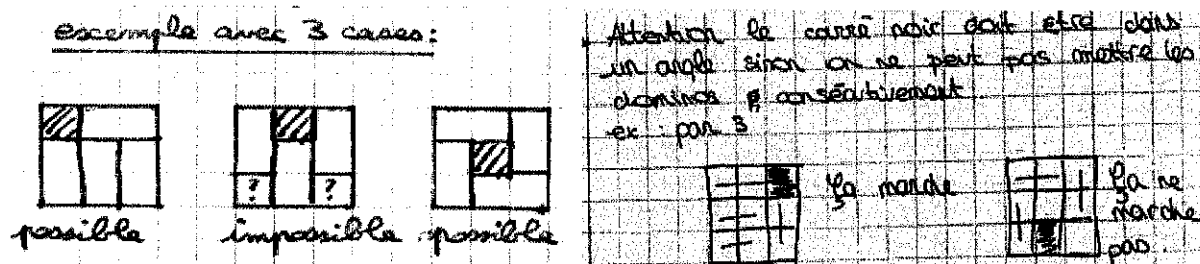


Figure 6 : A gauche une production d'enseignant, à droite une production d'élève de quatrième, sur le Polymino

Ces productions sont surtout à mettre en regard de celle de la figure 7, sur le Pentagone, où l'aspect formel est frappant.

Cas d'un pentagone convexe

→ on fait un dessin

→ on "découpe" notre pentagone en un quadrilatère + un triangle

→ on utilise les propriétés suivantes:

" Dans un triangle la somme des mesures des angles vaut 180° "

" Dans un quadrilatère la somme des mesures des angles vaut 360° " (cette dernière propriété peut se démontrer en "découpant" le quadrilatère en deux triangles)

→ on conclut en considérant la somme des mesures des angles du pentagone comme la somme des mesures des angles dans un triangle plus celle dans un quadrilatère.

$$180^\circ + 360^\circ = 540^\circ$$

Donc: la somme des mesures des angles dans un pentagone convexe est 540° .

Figure 7 : Une copie d'enseignant sur le problème du Pentagone

Au premier abord, le Pentagone apparaît beaucoup plus simple que les deux autres

problèmes. Certains enseignants écrivent des démonstrations en suivant les règles du contrat usuel en vigueur dans leurs classes, en se plaçant dans le cas du pentagone convexe, voire régulier, avant de s'apercevoir éventuellement qu'il existe d'autres cas de pentagones. Cette preuve fait apparaître les différentes étapes, comme dans la copie d'Angélique (figure 2) : *on fait un dessin, on utilise les propriétés suivantes, on conclut*. Elle est représentative d'environ un quart des productions d'enseignants que nous avons obtenues sur ce problème. En formation, l'étude d'une telle copie permet de pointer la contradiction entre cette surabondance d'arguments par rapport à ce qui est simple et le *trou* qui apparaît dans la preuve. Rien n'est dit en effet de l'existence de la triangulation ; on affirme seulement qu'on découpe le pentagone... On raisonne sur des objets dont on oublie de prouver qu'ils existent. Plus des trois quarts des productions ne mentionnent pas l'existence d'un tel découpage. Comme le montre la figure 8⁸, on ne peut pas choisir n'importe quel sommet au départ pour trianguler un pentagone. Autrement dit, une diagonale d'un pentagone n'est pas nécessairement incluse dans l'intérieur du pentagone.

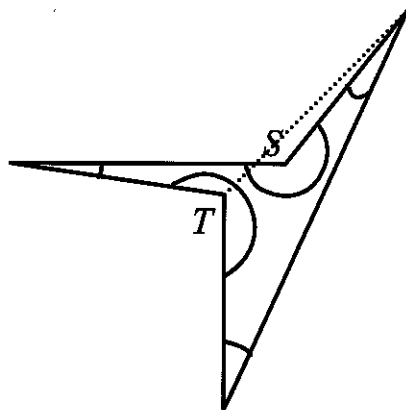


Figure 8 : On ne peut pas trianguler ce pentagone en partant du sommet *T* puisqu'il existe au moins une diagonale issue de *T* qui ne reste pas à l'intérieur du pentagone

La considération d'autres cas de pentagone amène (devrait amener) au questionnement sur l'existence d'un découpage, même dans un cas simple (celui de la figure 7). Il semble ainsi important d'évoquer la convexité du pentagone, parce qu'elle apparaît dans le raisonnement, et non pas *a priori*.

Ainsi, durant cette troisième phase de l'ingénierie, est étudiée une production montrant une preuve rédigée de façon très formelle et très détaillée, dans un cas simple, ne comportant pas de question sur l'existence d'une triangulation, pauvre au niveau du nombre de cas étudiés (voir figure 7). Il s'en dégage, outre l'aspect contradictoire du texte explicité ci-dessus, la conception sous-jacente de la preuve comme un calcul sur les énoncés, organisé en pas ternaires. On fait référence à la *règle du on sait que/or/donc*. On amène les enseignants à considérer qu'on pourrait remplacer cette règle par la suivante : on ne rédige une preuve qu'après avoir cherché un problème, avec pour objectif de réduire le doute et de convaincre le lecteur, en dehors de tout cadre formel imposé. Une production de ce type permet aussi de

⁸Certes, le pentagone de la figure 8 n'est pas convexe, alors que la production de la figure 7 n'évoque que le pentagone convexe. Celle-ci est néanmoins incomplète sur la question de l'existence du découpage. C'est la considération d'un cas de pentagone non convexe qui permet de réaliser que l'existence du découpage n'est pas aussi évidente qu'on peut le penser au premier abord.

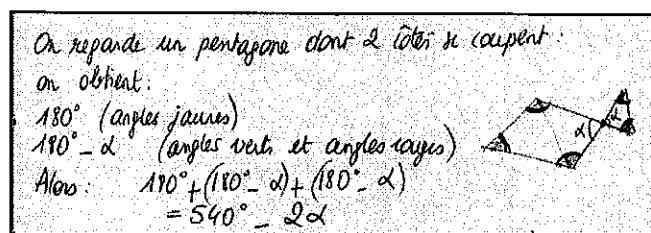
montrer que, malgré l'apparence de rigueur d'un tel texte – qui masque un vide au niveau du sens du problème et sur le plan de l'épistémologie de la preuve –, des points importants sont omis. Il faut cependant souligner qu'une preuve ne peut pas *tout dire*, mais que les arguments doivent être triés en fonction de leur pertinence. C'est l'entrée dans le processus de preuve qui va guider dans les choix à faire au niveau de la rédaction finale. Ceci permet de remettre en cause l'obligation souvent faite à l'élève d'écrire *tous* les pas de démonstration jusqu'aux plus petits⁹. L'élève doit apprendre à hiérarchiser les arguments, il ne faut pas l'obliger à expliciter *ces petits pas* de démonstration sous prétexte que cela lui fait mieux comprendre la démonstration, ce que nous contestons.

L'expérimentation, les cas particuliers retrouvent une place dans la preuve

Il ressort aussi des productions précédentes (figures 6 et 7) la nécessité de se dégager de la représentation exclusive de la preuve comme un calcul sur les énoncés. La résolution des trois problèmes nécessite en effet d'envisager toute une classe d'objets, de prouver leur existence, d'étudier leurs propriétés ou démontrer qu'ils ne peuvent pas exister (voir figures 6 et 8). Ces ensembles d'objets sont appréhendés par l'étude de *cas particuliers* : par expérimentation sur des cas simples, on peut ainsi facilement produire des *résultats* sur ces problèmes. Ceci est à mettre en regard d'une règle du contrat didactique usuel en classe, qui consiste à demander systématiquement aux élèves de ne pas considérer de cas particuliers. L'étude en formation d'une production comme celle de la figure 3 amène à pointer cette contradiction. Elle permet aussi de réfléchir à ce qu'on appelle un *résultat en mathématiques* : l'étude, preuve comprise, d'un cas particulier non trivial, en est un. De tels résultats doivent être valorisés dans les copies d'élèves qui ne parviennent pas à résoudre le problème dans le cas général (comme celle de la figure 6).

Il apparaît la nécessité de définir un objet pour avancer dans la preuve

Dans le problème *du Pentagone*, particulièrement, la contradiction engendrée par l'absence de définition d'un objet ne conduit pas les enseignants à définir cet objet. Dans beaucoup de cas, cette contradiction est même volontairement évitée ou cachée (figure 11). La considération de différents cas de pentagones, amenée par la progression dans la preuve, avons-nous dit, conduit à envisager des cas de pentagones pour lesquels il est difficile de considérer l'*intérieur* (voir figure 9). Pour de tels pentagones, qu'appelle-t-on un *angle* ? Le point de vue naïf sur l'angle, adopté pour traiter le cas des polygones non croisés ne fonctionne plus puisqu'il utilise la notion d'*intérieur* et que, pour un pentagone croisé, il n'y a pas d'intérieur. On doit ainsi prendre l'initiative de définir l'objet *angle* pour poursuivre la preuve, l'absence de définition conduisant au résultat que la somme des angles ne serait pas un invariant, comme le montre la figure 9.



⁹ Est-ce d'ailleurs possible ?

De même :

$$(180 - \alpha) + (180 - \alpha - \beta) + (180 - \beta) = 540 - 2\alpha - 2\beta$$

PLC 2 - 2006 - C - 5



Figure 9 : Deux cas dans une production d'un groupe d'enseignants sur le Pentagone (en premier, le Poisson)

Cette production contient une définition implicite des angles d'un pentagone et aboutit au résultat que la somme des angles est une fonction d'un angle α , voire de deux angles α et β . Dans le cas du *Poisson*, la somme des angles varierait donc suivant l'aplatissement du pentagone, plus ou moins grand, obtenu en réduisant ou augmentant l'angle α . Et s'il y a deux points de croisement, il semble donc utile de considérer neuf angles pour aboutir à l'expression de la somme des angles. Cette définition de l'angle demande à être interrogée, d'autant plus que ce type de formule apparaît souvent après l'étude d'un pentagone avec cinq, trois ou un seul point de croisement, où il est montré que la somme des angles est égale à 180° , sans qu'il soit question de considérer les angles au croisement des côtés, comme on le voit à la figure 10 :

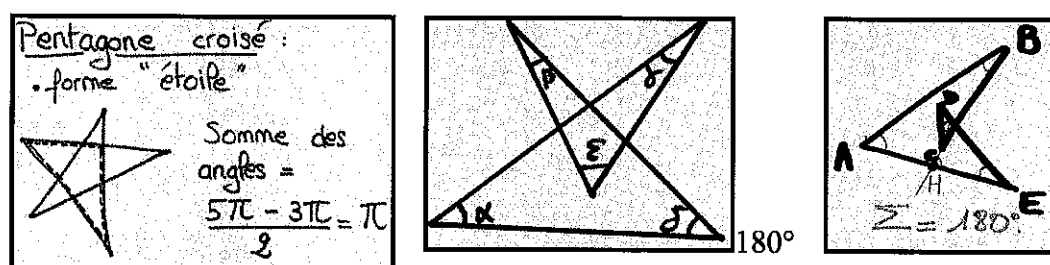


Figure 10 : Extraits de trois productions d'enseignants sur le problème du pentagone

Tout ceci devrait ainsi conduire à se demander ce qu'est un angle du pentagone¹⁰. Le choix d'une définition adéquate permet en effet de traiter tous les cas de pentagones de manière cohérente. Nous renvoyons à Gandit (2008) et donnons quelques éléments en annexe à ce texte (annexe 1). Mais ce n'est pas le cas, en général. Certains enseignants concluent comme la production de la figure 11 :

¹⁰et même ce qu'est un pentagone.

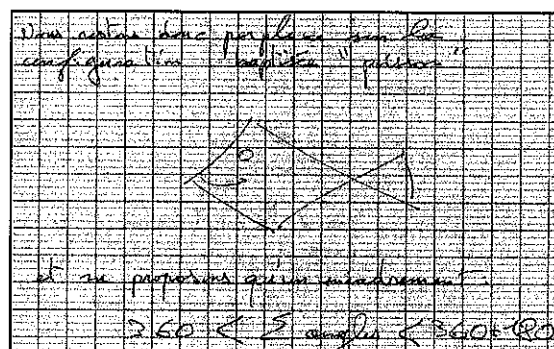


Figure 11 : Extrait d'une production d'enseignant sur le problème du pentagone

En formation, nous proposons de retenir une production qui contient l'étude de la configuration *Poisson* comportant la formule $540 - 2\alpha$. Outre la nécessité de définir un objet mathématique, elle permet aussi d'envisager la position de l'élève auquel on propose toujours des définitions *a priori*, sans qu'il en saisisse la nécessité (il ne distingue pas la plupart du temps une définition d'un théorème ; pour lui, c'est une phrase qui est marquée *dans le cours*). Une telle production devrait également mettre en évidence que l'incohérence n'est pas le seul fait des élèves. Elle naît souvent d'un malentendu sur les objets en jeu : elle vient dans ce problème du fait que les objets en jeu (les angles du pentagone) ne sont pas clairement perçus. C'est une position très courante chez la plupart des élèves aussi. Nous poursuivons ci-dessous sur cette similitude de comportement entre professeurs et élèves.

Des points communs dans les comportements entre professeurs et élèves face à la preuve amènent à reconsidérer la posture de l'élève

Les productions sur le *Pentagone*, qui envisagent d'autres cas que le pentagone convexe, présentent souvent une suite d'études de cas – convexes, non convexes non croisés, différents croisés – sans que cette suite réponde à une nécessité. Outre qu'elles permettent un retour en formation sur le raisonnement par disjonction de cas, il est intéressant d'en faire ressortir que c'est la considération de la généralité du problème qui donne lieu à une disjonction de cas. La question concerne *un* pentagone, mais il s'agit bien de répondre pour tous les cas. Et ces différents cas se reconnaissent dès qu'on s'interroge sur l'existence des objets : nous avons vu que la question de l'existence de *l'intérieur* d'un pentagone se pose lorsqu'il s'agit de considérer l'existence d'un découpage en triangles. La progression dans la généralité du problème se fait par l'émergence de cas particuliers, qui s'avèrent des contre-exemples. Au niveau de la classe, ceci permet d'envisager la position de l'élève face à cette généralité. La difficulté pour l'élève de comprendre le *un* générique, utilisé notamment en géométrie (voir figure 4), qui traduit l'universalité du propos mathématique, est à rapprocher de celle de l'enseignant qui n'envisage que le cas du pentagone convexe ou d'autres, sans être exhaustif. Comprendre que l'élève puisse ne pas saisir¹¹ la signification de ce *un*, envisager ensuite comment éviter ce malentendu pour l'élève : ce sont des objectifs de formation visés par l'étude de ce type de production. Il en ressort également que ce n'est pas dans le *cours*, dans une liste de méthodes bien établie – nous y reviendrons plus loin – qu'on peut trouver comment avancer dans la preuve de ce problème, mais bien plutôt dans la capacité à être critique par rapport à la démarche empruntée, être en permanence en recherche d'un éventuel contre-exemple qui pourrait contredire ce qu'on affirme. Ceci pourrait par suite donner lieu à une nouvelle règle de contrat à faire vivre en classe : dans l'écriture d'une preuve, adopter un

¹¹ Il s'agit du type de malentendu déjà signalé à partir de la figure 4.

regard critique sur ce qu'on écrit, en recherchant d'éventuels contre-exemples. Ceci nécessite que l'élève ait les clés pour reconnaître le faux et le vrai et qu'il puisse exercer une responsabilité scientifique dans la classe (Legrand1990, Gandit & Massé-Demongeot 1996)

Le recours systématique à un catalogue de méthodes peut cacher le problème à résoudre

Les trois problèmes génèrent du faux. Le *Centre de secours*, particulièrement, donne lieu, rapidement, à des conjectures fausses, dont certaines sont facilement réfutées. Par exemple, beaucoup de productions d'enseignants proposent l'isobarycentre des quatre villages comme lieu du centre de secours, ce qui est faux comme le montre le contre-exemple de la figure 12.

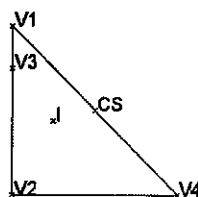


Figure 12 : Le point I est l'isobarycentre des quatre points V_1 , V_2 , V_3 , V_4 , mais le centre de secours est mieux placé au point CS.

Le recours au barycentre est très représentatif (plus de la moitié des productions obtenues à ce jour sur le problème) de l'inadéquation des méthodes proposées pour traiter ce problème. Nos expérimentations montrent que le *Centre de secours* donne lieu, très majoritairement, à des manipulations d'objets mathématiques (barycentre, intersection de diagonales, centre de cercle circonscrit...), sans que ceux-ci répondent à une problématique de recherche mathématique. Ce n'est qu'après un temps assez long que les enseignants perçoivent la difficulté du problème ou n'entrent jamais, sans vraiment s'en apercevoir, dans la question posée ; ils en sont détournés par le recours à un catalogue de méthodes qui s'avèrent, en réalité, étrangères au problème, et empêchent de voir celui-ci. Il s'agit là d'un résultat didactique obtenu sur ce problème. Dans la troisième phase de l'ingénierie, l'étude d'une production où apparaît une telle liste de méthodes (voir en annexe¹² 2), extérieures au problème, questionne les pratiques : on enseigne en effet à l'élève, en phase d'apprentissage de la preuve, à recourir systématiquement à une boîte à outils ou à un ensemble de fiches-méthodes¹³. Ceci est à mettre en relation avec la conception dominante (déjà explicitée) selon laquelle la preuve n'est vue que comme un moyen de mettre en œuvre les connaissances du cours.

Conclusion

De la phase 3 de l'ingénierie, nous avons dégagé essentiellement l'institutionnalisation au niveau de la formation sur la preuve. Il est néanmoins nécessaire de la faire précéder d'un

¹² Voir Gandit (2008) pour d'autres productions.

¹³ La partie *cours* du chapitre *Démontrer en géométrie* du manuel de 4^{ème} de la collection *Prisme* (édition 2007, Belin) n'est constitué que de fiches-méthodes, comme, par exemple, *Pour démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme*.

bilan sur le plan mathématique, sur la résolution des problèmes. Il s'agit aussi de mentionner les raisons de leur choix. Nous renvoyons à Gandit (2008).

Certains autres éléments de la thèse n'ont pas été abordés dans ce texte, notamment, la preuve en mathématiques et dans certains travaux de didactique, les attendus des enseignants par rapports à leurs élèves, l'analyse des manuels et des programmes, l'analyse mathématique et didactique de chacun des problèmes (nous l'avons déjà signalé)... Seuls certains éléments de la méthodologie ont été cités.

Si nous dénonçons les pratiques actuelles sur le plan de l'enseignement de la démonstration, il reste que l'écriture du texte final de preuve, d'une *démonstration*, relève d'un apprentissage qui doit se faire dans la progressivité. Il doit se différencier, dans l'enseignement, de l'écriture du texte qui accompagne le processus de preuve, évoluant de la *narration de recherche* (Sauter 1998) à une preuve plus formalisée, en passant par ce que nous désignons par *écrit de recherche*. Une suite à ce travail serait ainsi de réfléchir à cette progressivité dans l'apprentissage de l'écriture d'une preuve et dans son enseignement, tout en conservant le contexte de problèmes possédant des spécificités analogues à celles du *Centre de secours*, du *Polymino* ou du *Pentagone*, avec un fort enjeu de vérité. Les *situations de recherche en classe* (Grenier 2010) développées dans *Maths-à-modeler* constituent un matériau adapté à cette réflexion sur l'écriture de preuve, son apprentissage et son enseignement.

Bibliographie

- Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation, *Educational Studies in Mathematics* 18, éd. D. Reidel Publishing Company, 147-176.
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des Situations Didactiques*, éd. La Pensée Sauvage.
- Demongeot, M.-C. & Gandit, M. (2003). Faire la figure, coder, écrire les hypothèses, démontrer que... *Petit x*, n°63, éd. IREM de Grenoble, 30-50.
- Durand-Guerrier, V. (2005). *Apports de la théorie des modèles pour une analyse didactique du raisonnement mathématique, Recherches sur l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique, un cas exemplaire de l'interaction entre analyses épistémologique et didactique*. Habilitation à Diriger des Recherches en didactique des mathématiques, Université Claude Bernard, Lyon 1.
- Durand-Guerrier, V. & Arsac, G. (2003). Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Spécificité de l'analyse. Quelles implications didactiques ? *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 23/3, éd. La Pensée Sauvage, 295-342.
- Duval, R. (1991). Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration, *Educational Studies in Mathematics* 22, Netherlands, éd. Kluwer Academic Publishers, 233-261.
- Gandit, M. & Massé-Demongeot, M.C. (1996, rééd. 2001). *Le vrai et le faux au collège et au lycée*, éd. IREM de Grenoble.
- Gandit, M. (2004). Preuve ou démonstration, un thème pour la formation des enseignants de mathématiques : première partie. *Petit x*, n°65, éd. IREM de Grenoble, 36-49.
- Gandit, M. (2004). Preuve ou démonstration, un thème pour la formation des enseignants de mathématiques : deuxième partie, *Petit x*, n°66, éd. IREM de Grenoble, 49-82.
- Gandit, M. (2008). *Etude épistémologique et didactique de la preuve en mathématiques et de son enseignement ; une ingénierie de formation*, Thèse de doctorat, Université J. Fourier Grenoble 1.
- Grenier, D. & Payan, C. (1998). Spécificités de la preuve et de la modélisation en mathématiques discrètes. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 18/1, éd. La Pensée Sauvage, Grenoble, 59-100.
- Grenier, D. (2010). Changer le rapport des élèves aux mathématiques en intégrant l'activité de

recherche dans les classes. *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*, année 2009, éd. ARDM et IREM de Paris 7, 161-177.

Legrand, M. (1990). Rationalité et démonstration mathématiques, le rapport de la classe à une communauté scientifique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* vol. 9/3, éd. La Pensée Sauvage, Grenoble, 365-406.

Poincaré, H. (1908). *L'invention mathématique, Conférence faite à l'Institut Général Psychologique à Paris, au siège de la société*

(<http://www.archive.org/stream/linventionmath00poin#page/n1/mode/2up>)

Robert, A. (2005). Des recherches sur les pratiques aux formations d'enseignants de mathématiques du second degré : un point de vue didactique. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 10, 209-249.

Sauter, M. (1998). Narration de recherche, une nouvelle pratique pédagogique. *Repères-IREM*, n°30, éd. Topiques, 9-21.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 10/2.3, éd. La Pensée Sauvage, Grenoble, 133-170.

Des manuels

Math 4^e, collection Prisme, programme 2007, éd. Belin.

Math 5^e, 2006, nouveau programme, collection Prisme, éd. Belin

Mémoire professionnel

Jamgotchian, H. (2005). *Le tableau et le graphe dans l'apprentissage de la démonstration*.

Mémoire professionnel PLC2, IUFM de l'académie de Grenoble.

Annexe 1

Définir un angle d'un pentagone

Le choix de définir un *angle* permet de traiter le problème du *Pentagone* de manière cohérente. Nous donnons ci-dessous quelques éléments.

On désigne par P un pentagone, considéré comme une ligne brisée fermée, constituée de segments de droite. On définit un *angle de P* comme un angle en un sommet de P . Or, en un sommet S de P , on peut considérer deux angles. Dans le cas d'un pentagone non croisé, on peut considérer un *angle à l'intérieur de P* et un *angle à l'extérieur de P* (figure 13¹⁴).

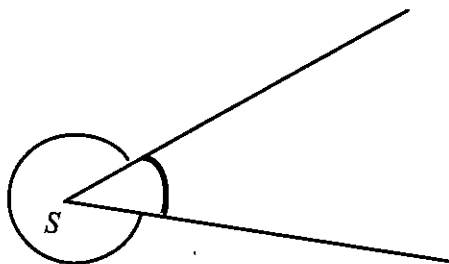


Figure 13 : Si l'on choisit un sens de parcours, l'un de ces deux angles est l'angle à droite, l'autre est l'angle à gauche.

On peut choisir de définir un *angle en S* comme l'angle du plus petit cône affine issu de S qui contient l'intersection d'un voisinage arbitrairement petit de S avec l'intérieur de P . Cette définition ne convient plus pour les pentagones croisés puisque, dans ce cas, il n'y a plus ni intérieur, ni extérieur. Comment alors choisir entre les deux angles en S d'une autre manière (qu'en distinguant intérieur et extérieur) qui conviendrait aussi pour les croisés ? On décrit la ligne fermée qui constitue P après avoir choisi l'un des deux sens de parcours, cette idée de *parcours orienté* permettant ainsi d'envisager, en un sommet S , un *angle à droite* et un *angle à gauche* (figure 13, à droite). On peut ainsi considérer que l'*angle*, marqué par un double trait est l'*angle à droite en S* , dans le sens de parcours choisi. Ce serait l'*angle à gauche en S* si l'on choisissait l'autre sens de parcours. Cette distinction entre angle à droite et angle à gauche revient à celle entre intérieur et extérieur qui convient aux polygones non croisés. Autrement dit, cette nouvelle définition d'un angle en un sommet de P (avec choix d'un sens de parcours de P et choix d'un marquage à droite ou d'un marquage à gauche) permet de mettre en relation le point de vue naïf abordé au départ avec l'angle de la rotation opérée en ce sommet quand on parcourt le polygone. Cet angle de rotation n'est pas marqué sur la figure 13 ; il est d'environ 140° .

On démontre en fait (Gandit 2008) que la somme des cinq angles du pentagone s'exprime en fonction du nombre p de tours (p désigne un nombre entier qui prend les valeurs 0, 1 ou 2) effectués quand on parcourt le pentagone dans le sens choisi. Suivant le marquage choisi des angles (à droite ou à gauche), cette somme est égale à $(5 + 2p)\pi$ ou à $(5 - 2p)\pi$ radians. Pour le pentagone *Poisson* (figure 9), on a $p = 0$; on obtient donc une somme des angles égale à 5π radians (ou 900 degrés), quel que soit le marquage des angles choisi. Pour le pentagone étoilé, par exemple (figure 10), on fait 2 tours ($p = 2$), donc la somme des angles est égale à π

¹⁴Sur cette figure, on ne peut pas savoir quel est l'angle à l'intérieur et quel est l'angle à l'extérieur, en S .

radians ou 9π radians, suivant le marquage choisi des angles. Pour le cas des pentagones non croisés, le nombre de tours p est égal à 1 : la somme des angles est alors égale à 3π radians (540 degrés) ou 7π radians, selon les angles choisis, la valeur de 3π correspondant aux angles à l'intérieur du pentagone.

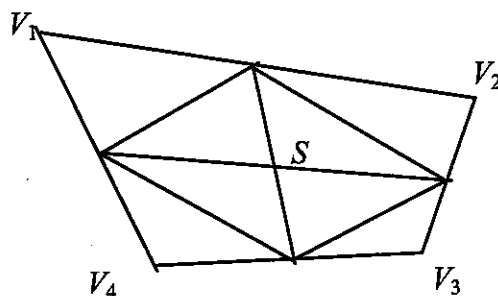
Annexe 2

Une production d'enseignants sur le Centre de secours

→ Minimiser le temps revient à minimiser la distance

Première idée : nous avons pensé au quadrilatère de Varignon :

Schéma :



Nous avons placé les quatre villages de façon quelconque, tracé le « quadrilatère des milieux » et tracé les diagonales de ce quadrilatère.

Le centre de secours serait l'intersection des diagonales.

Mais S (sur le schéma) pourrait être encore plus proche de V_1 (le village le plus éloigné de S).

Deuxième idée : Raisonner avec un nombre moindre de villages. Pour deux villages, le centre de secours doit être placé au milieu de $[V_1V_2]$.

Pour trois villages, le centre de secours doit être placé sur le centre de gravité du triangle $V_1V_2V_3$.

Pour quatre villages, il faudrait qu'il soit à égale distance des quatre villages. Donc il faudrait que les quatre villages soient cocycliques (et le centre de secours serait le centre du cercle).

Mais les villages étant fixés ce n'est pas toujours possible.

Troisième idée : Fixer quel village est le plus éloigné (par exemple V_1). Tracer le cercle de centre G circonscrit aux trois autres puis minimiser la ...

S serait le point d'intersection de $[V_1G]$ avec le cercle. Cela ne fonctionne pas. Le poste de secours pourrait être encore plus près de V_1 .

Piste à étudier : les barycentres

En complément des actes 2009.....

**Séminaire national
16-17 octobre 2009**

Le développement des pratiques enseignantes en mathématiques d'un professeur d'école : une étude sur dix années d'exercice

Éric Roditi

Université Paris Descartes, Laboratoire EDA
eric.roditi@paris5.sorbonne.fr

Résumé

Les analyses des pratiques enseignantes développées ici ont un double objectif : d'une part mieux connaître ce qui est effectivement proposé aux élèves pour qu'ils apprennent des mathématiques, d'autre part mieux comprendre comment un enseignant effectue son travail et comment il se développe professionnellement. À terme, ces analyses ont des visées sur la formation des enseignants et l'amélioration de l'enseignement.

Choisir ce qu'on étudie des pratiques enseignantes pose des questions à la fois théoriques et méthodologiques. Le métier d'un professeur d'école est marqué par la polyvalence, son enseignement se caractérise par la globalité des apprentissages visés, et nous en retenons pourtant seulement ce qui concerne les contenus mathématiques. Le matériel empirique constitué pour notre étude comporte des enregistrements de séances d'enseignement et des entretiens qui s'échelonnent sur dix années d'exercice, depuis le recrutement du professeur jusqu'à ce qu'il devienne formateur. Le corpus est important, c'est une richesse, mais aussi une contrainte, notamment quant au choix du grain de l'analyse.

Cette recherche est menée au sein d'une équipe codisciplinaire en lien avec le réseau OPEN. Nous avons voulu y donner une place première à la fois aux mathématiques enseignées, au sujet enseignant et à la dimension professionnelle de son activité. Le cadre théorique utilisé est celui de la "double approche" développée par Robert & Rogalski et récemment précisée dans *La classe de mathématiques* (Vandebrouck, 2008). Les outils méthodologiques sont adaptés pour partie des travaux menés sur les pratiques des professeurs d'école au sein de l'équipe Didirem (Peltier-Barbier, 2004) ainsi que des nôtres (Roditi, 2005).

Mots clés

Didactique des mathématiques, pratiques enseignantes, double approche, développement professionnel, enseignement primaire, géométrie, recherche codisciplinaire, OPEN.

Cette conférence donnée lors du séminaire national de didactique des mathématiques était inscrite sous la rubrique « travaux en cours ». Le travail n'étant pas terminé au moment de la rédaction des actes, nous avons choisi de développer des questions discutées en séminaire, elles portent d'une part sur les cadres et les outils théoriques que nous convoquons dans nos recherches sur les pratiques enseignantes et leur développement, et d'autre part sur l'exemple particulier d'un professeur d'école dont nous étudions l'enseignement depuis une dizaine d'années.

Une présentation générale de la recherche est proposée dans la partie I. Les questions théoriques et méthodologiques sont discutées dans les parties II et III. Les analyses des pratiques du professeur et de leur évolution sont développées dans les parties IV et V.

L'étude vise donc à repérer comment les pratiques d'enseignement des mathématiques de cet enseignant ont évolué au cours du temps, tant en ce qui concerne la conception des séances (choix des situations, organisation matérielle, etc.) que leur mise en œuvre (gestion de la classe, du temps, des interactions didactiques, etc.). Pour ce faire, nous avons prélevé de l'ensemble des données recueillies, des éléments permettant de constituer un corpus adapté à

cette recherche. Nous avons travaillé principalement à partir des transcriptions de séances d'enseignement qui portent globalement sur la même notion mathématique afin de permettre des comparaisons didactiques, les analyses produites ont été croisées avec des éléments factuels concernant les séances (expérience professionnelle de l'enseignant, niveau de classe, programmes en vigueur, etc.) et avec les propos tenus par l'enseignant lors des entretiens.

Cette étude nous a conduit à nous poser des questions théoriques et méthodologiques concernant l'identification des variables qui permettent de décrire l'évolution des pratiques d'enseignement des mathématiques de ce professeur de façon cohérente, en rendant compte à la fois des ruptures et des continuités. En lien avec nos travaux de recherche antérieurs, en adoptant une double approche didactique et ergonomique, nous envisageons les pratiques enseignantes non seulement du point des élèves, c'est-à-dire des conditions mises en œuvre pour conduire aux apprentissages mathématiques visés, mais aussi du point de vue de l'enseignant lui-même, exerçant un métier, obéissant à des contraintes institutionnelles, des usages professionnels et des motivations personnelles.

L'étude est en cours, mais il est possible d'avancer qu'elle conduira à montrer que l'enseignant parvient à une stabilisation de ses pratiques en trouvant pour lui-même, et selon des modalités qui seront précisées, un équilibre entre une finalité d'éducation, où la relation avec les élèves est primordiale, et une finalité d'instruction qui repose de façon essentielle sur une conception et une gestion précises des situations de classe.

I. Précisions quant au cadre général de la recherche

Nous nous intéressons à l'évolution des pratiques professionnelles d'un professeur d'école que nous appelons Benoît dont nous filmons régulièrement des séances d'enseignement depuis sa deuxième année de formation (PE2). Nous menons cette recherche en collaboration avec d'autres chercheurs de différentes disciplines qui étudient aussi les pratiques de Benoît et leur évolution. Nous cherchons notamment à comprendre en quoi l'évolution des pratiques d'enseignement des mathématiques de Benoît peut être interprétée comme un développement professionnel, quels en sont les déterminants et quels en ont été les leviers éventuels.

Dans un premier temps, par l'étude de plusieurs séances en classe et l'exploitation de différents entretiens, nous cherchons à déterminer comment ce professeur prépare, organise et gère ses séances d'enseignement des mathématiques. Nous cherchons à décrire ses pratiques en fonction du contexte professionnel dans lequel il exerce et en fonction de certains caractères plus personnels que les dix années de travail mené avec lui nous ont permis de connaître. Autrement dit, nous nous proposons de réaliser des inférences sur les déterminants de ses pratiques. Comme nous l'expliquons dans les deux prochaines parties, nos références théoriques nous conduisent à envisager des déterminants institutionnels, sociaux et personnels.

L'étude étant diachronique, nous tentons dans un deuxième temps d'appréhender l'évolution de ses pratiques enseignantes en mathématiques grâce à des comparaisons multiples. La difficulté méthodologique ne doit pas être sous-estimée : le professeur a changé d'établissement et de niveau scolaire, impossible donc d'étudier l'évolution d'un même enseignement. L'étude concerne quelques séances que nous avons retenues parce qu'elles nous sont apparues comme étant comparables eu égard aux outils d'analyses que nous mettons en œuvre. Il s'agit de séances géométrie avec pour la plupart d'entre elles des objectifs de classement de figures.

L'étude didactique des pratiques enseignantes de Benoît est donc partielle et orientée, cela pose de nombreuses questions. La plus importante porte sur le risque que Benoît lui-même ne reconnaisse pas vraiment son travail de professeur dans nos analyses : ses interventions en classe sont marquées par la polyvalence du métier, et nous en décrivons seulement sa dimension didactique relative aux contenus mathématiques. Quelle compréhension

prétendons-nous alors atteindre ? Il y a aussi la question de la réalité que nous décrivons, une réalité fragmentaire, d'une part parce que nous tenons compte seulement de ce qui concerne les mathématiques en jeu dans la classe, et d'autre part parce que nous étudions seulement quelques séances au cours de dix années d'exercice. Le découpage de la réalité est une des contraintes inhérentes à la recherche. Celui que nous avons réalisé nous semble légitime parce que, comme l'ont montré de nombreuses recherches (Vandebrouck, 2008), les pratiques enseignantes sont assez stables lorsque les conditions d'enseignement le sont. En outre, nous mettons nos analyses à l'épreuve de nombreux croisements. D'abord des croisements internes : nous confrontons par exemple les résultats obtenus sur l'organisation des enseignements et ceux qui portent sur leur gestion en classe avec les élèves. Ensuite des croisements externes : d'une part les résultats sont rapprochés des déclarations de l'enseignant durant les entretiens, d'autre part le travail en équipe codisciplinaire conduit à comparer les résultats de chaque chercheur, tant sur les interprétations des pratiques que sur les inférences quant à leurs déterminants.

II. Un cadre d'analyse des pratiques enseignantes

L'expression « pratiques enseignantes » est très largement utilisée en éducation, elle désigne un objet de recherche auquel différentes problématiques peuvent être rattachées : description des comportements du maître en classe, évaluation de l'efficacité de son enseignement, déterminations de caractéristiques interindividuelles, compréhension de logiques personnelles conscientes ou inconscientes, etc. Nous précisons dans cette partie comment nous utilisons l'expression « pratiques enseignantes en mathématiques », nous développons aussi les aspects théoriques essentiels qui fondent et qui justifient nos choix concernant cet objet d'étude. Ce développement n'est pas encore complet à ce jour, mais les éléments qui structurent le cadre nous semblent fixés.

1. Trois dimensions des pratiques enseignantes

Nos recherches visent à la fois à décrire et à comprendre ; cela nous conduit à concevoir les pratiques enseignantes de manière globale. Avec une entrée disciplinaire didactique et des choix théoriques inspirés de la théorie de l'activité (Leontiev, 1984), nos recherches s'inscrivent dans la lignée de celles d'Aline Robert et de Janine Rogalski (Robert, 2008 ; Roditi, 2005, 2008 ; Rogalski, 2003, 2008). Rappelons que dans cette théorie, l'activité est co-déterminée par le sujet et une situation dans laquelle il est engagé qui est composée d'une tâche et d'un contexte (Figure n°1).

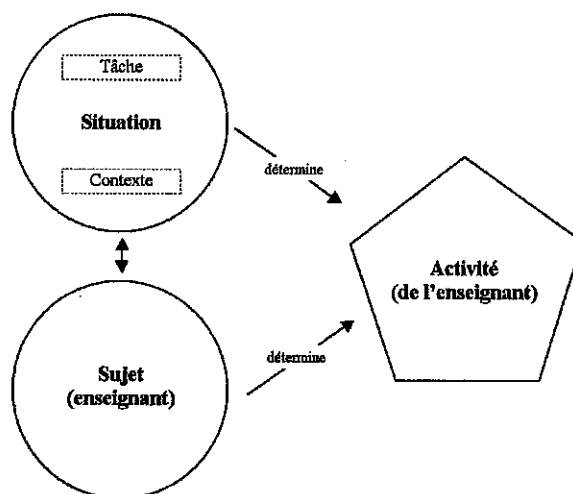


Figure n°1. L'activité co-déterminée par le sujet et la situation.

En ce qui concerne le sujet enseignant, nous nous intéressons surtout à ce qu'il fait et à ce qu'il pense ; cela nous conduit à considérer aussi ce qu'il aurait pu faire, ce qu'il a choisi de ne pas faire, ce qu'il aurait voulu faire et qu'il n'a pas pu faire, ce qu'il voulait éviter de faire et qu'il a été obligé de faire, etc. Ce que fait l'enseignant est dépendant de facteurs internes ou externes, il ne maîtrise pas tous les paramètres de la situation dans laquelle il agit.

Parmi les déterminants internes au sujet enseignant, nous retenons principalement ses conceptions de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques ainsi que son rapport personnel à cette discipline. Nous tenons compte aussi, lorsque c'est utile, d'autres caractères comme l'ancienneté dans la carrière ou dans l'établissement, ou comme la formation initiale en mathématiques. Certains déterminants personnels ne sont pas directement pris en charge dans notre approche, c'est le cas par exemple de caractéristiques sociologiques comme les origines culturelles et sociales de l'enseignant, son engagement éventuel dans certains mouvements ou associations. Il en va de même des facteurs psychiques : les études des phénomènes inconscients – au sens psychanalytique du terme – sont très éclairantes, une partie importante des recherches menées par les membres de l'équipe codisciplinaire leur est consacrée. L'ensemble de tous ces déterminants confèrent une **dimension personnelle** aux pratiques enseignantes.

Les situations professionnelles dans lesquelles l'enseignant est engagé sont également déterminantes. Ces situations se composent des tâches que l'enseignant doit réaliser et du contexte dans lequel il travaille. Dans les systèmes d'enseignement auxquels appartiennent les enseignants dont nous étudions les pratiques (établissements publics français d'enseignement primaire ou secondaire), les tâches sont largement déterminées par les textes officiels, en particulier les programmes pour ce qui concerne la transmission des savoirs. L'ensemble de ces directives, communes aux enseignants, confère une **dimension institutionnelle** à leurs pratiques. Le contexte comprend la classe dont le professeur a la charge, et nous retenons comme variables son niveau, son effectif et sa composition plus ou moins hétérogène scolairement ou socialement. À chaque niveau de classe correspond, indépendamment des autres variables citées, un programme d'enseignement qui définit les contenus à traiter et qui préconise des méthodes.

Le contexte que nous considérons pour appréhender l'activité de l'enseignant ne se réduit pas à la classe. Parce qu'il travaille dans un établissement scolaire, l'enseignant dépend de ses collègues, des autres professionnels et des parents d'élèves. Nous considérons aussi que l'enseignant appartient à un milieu professionnel plus vaste, il agit en référence à des manières d'agir collectivement construite, que ses pratiques soient conformes ou en décalage avec elles. Ces manières d'agir, l'enseignant les a d'abord connu en tant qu'élève, puis en tant que futur professionnel durant sa formation initiale. Elles facilitent l'exercice du métier car l'enseignant n'a pas tout à inventer chaque fois qu'il agit, son activité repose sur des habitudes de la profession cela le rend davantage disponible pour improviser des adaptations aux situations spécifiques qu'il rencontre. Elles contraignent aussi l'action de l'enseignant qui est nécessairement référée au métier et qui, d'une certaine manière, engage toute la profession quand il agit. Les pratiques enseignantes possèdent par conséquent une **dimension sociale**, c'est la troisième dimension des pratiques enseignantes.

2. Deux finalités majeures des pratiques enseignantes

Bien que nous ne développerons pas beaucoup cet aspect ici, nous tenons à rappeler la double finalité des pratiques enseignantes, particulièrement importante pour les professeurs du premier degré. Comme l'ont montré Peltier et al. (2004), l'enseignement primaire est très marqué par cette double finalité : une finalité d'**instruction** où le but essentiel de l'activité est de transmettre les savoirs, et une finalité d'**éducation** où le but essentiel de l'activité est de transmettre les valeurs et les règles de la vie sociale et citoyenne. Ces finalités deviennent

concurrentielles lorsque les enseignants en classe ne peuvent tenir les deux à la fois, les logiques d'enseignement et d'acquisition des savoirs et des règles de vie sociale n'étant pas analogues.

La finalité éducative peut prendre une grande importance, quelle que soit la séance d'enseignement, y compris quand l'objectif premier semble celui de la transmission d'un contenu disciplinaire bien spécifique. Supposons par exemple que Benoît projette d'enseigner le classement des formes géométriques à ses élèves de grande section de maternelle (5 ans). Il doit l'enseigner, cela lui est prescrit par le programme et son document d'accompagnement (où c'est nous qui soulignons) :

« En Grande Section, les activités de comparaison, de classement et de rangement concernent toutes les rubriques : organisation de l'espace, formes, grandeurs, quantités, organisation du temps. »

Benoît va donc préparer une séquence d'enseignement, son activité est orientée par le but général de préparation de cours. Du point de vue du didacticien, une tâche de classement est proposée aux élèves pour les conduire à la construction de critères fonctionnels en réponse à un problème posé. Du point de vue d'un enseignant polyvalent, une tâche de classement peut constituer d'abord une occasion pour faire travailler les élèves en équipes et les confronter au problème social de la prise de décision collective. Un enseignant qui saisirait cette occasion pourrait préparer son cours et gérer son enseignement en classe en privilégiant les situations qui conduisent à des prises de décision plutôt qu'à l'émergence de critères de classement. Une étude des pratiques enseignantes qui vise leur compréhension ne peut ignorer cette double finalité de l'activité enseignante, l'enseignant décidant à chaque moment de son travail de poursuivre plutôt l'une ou plutôt l'autre.

3. Cinq classes d'activités des pratiques enseignantes

Dans nos analyses, nous nous intéressons d'abord à l'enseignement des mathématiques dispensé en classe ainsi qu'à son amont et son aval, c'est-à-dire à sa programmation et à son évaluation. Notre recherche de compréhension nous conduit aussi à porter attention à l'enseignant lui-même, au sujet pour reprendre la dénomination des psychologues, et à la situation professionnelle dans laquelle il est engagé. Cette situation exige de lui, comme l'indiquent les textes officiels et dans la mesure de ses responsabilités, qu'il soit un agent du bon fonctionnement du système éducatif. Cela demande non seulement de garantir la transmission des savoirs et l'éducation à la vie sociale, mais aussi de travailler avec les autres partenaires du système éducatif pour en assurer son bon fonctionnement, et de s'adapter aux évolutions de ce système par la formation continue, qu'elle soit prise en charge institutionnellement ou non.

Présentation des cinq classes d'activités

Ainsi, dans nos recherches, distinguons-nous cinq classes d'activité. Les trois premières concernent plus particulièrement la transmission des savoirs, il s'agit de la **préparation** des cours, de la **gestion** du déroulement des cours en classe, et de l'**évaluation** des apprentissages des élèves. Les deux autres classes d'activités sont la **coopération** qui garantit le bon fonctionnement du système éducatif et en particulier de l'établissement, et la **formation** (plus précisément l'auto-formation) qui vise l'adaptation de l'enseignant aux exigences régulièrement renouvelées de sa fonction. La part respective de ces cinq classes d'activité dans la charge globale de travail dépend à la fois du système scolaire dans lequel exerce l'enseignant et de l'enseignant lui-même.

Développons un exemple, celui de la préparation des cours. La préparation fait partie des tâches de l'enseignant, et si besoin en était, des textes officiels le rappellent, citons le Journal officiel (JO du 28 décembre 2006) :

« (...) il [l'enseignant] est capable d'élaborer des programmations et de répartir les apprentissages dans le temps. Il sait prendre en compte ce qui a été réalisé précédemment. »

La différence entre tâche et activité est centrale en théorie de l'activité. La tâche est ce qui est à faire, elle est du côté de l'institution scolaire qui prescrit le travail aux enseignants, elle possède un *but*, même si celui-ci n'est pas toujours clairement défini, Leplat (1997) utilise plutôt dans ce cas le terme de mission. Ici le but est d'assurer la qualité de l'enseignement, notamment son contenu et ses modalités pédagogiques.

L'activité est ce que le sujet développe lors de la réalisation de la tâche – ses actes, ses pensées, ses émotions, etc. – elle est donc du côté de l'enseignant. L'activité est *motivée*, le motif se distingue du but par le fait qu'il appartient au sujet, pas à la tâche. Un professeur d'école dont la formation initiale est en mathématiques pourra, plus qu'un collègue que cette matière n'intéresse pas particulièrement, préparer les cours de cette discipline pour retrouver le plaisir d'y travailler, de chercher des problèmes, y compris qui dépassent largement ce qui est directement utile pour les élèves. En outre, l'activité de préparation des cours est partagée collectivement. Comme l'a montré Clot (1999) en dégagant ses concepts de genre et de style, cela crée une dynamique dans laquelle le collectif influence l'individu, il le contraint et le soutient simultanément, et le singulier s'inscrit dans le collectif, dans sa singularité et en marquant le collectif de son empreinte. Ces généralités se retrouvent dans l'étude très précise qu'a menée Coppé (2007) sur l'activité de préparation des cours par des professeurs stagiaires de mathématiques en fin de formation initiale et notamment de l'influence de leur formation initiale dans cette activité de préparation.

Remarquons enfin que chacune des cinq classes d'activités distinguées convoque les tâches correspondant aux quatre autres. Le schéma suivant (figure n°2) représente ces relations en indiquant les tâches en lettres minuscules et l'activité en majuscules.

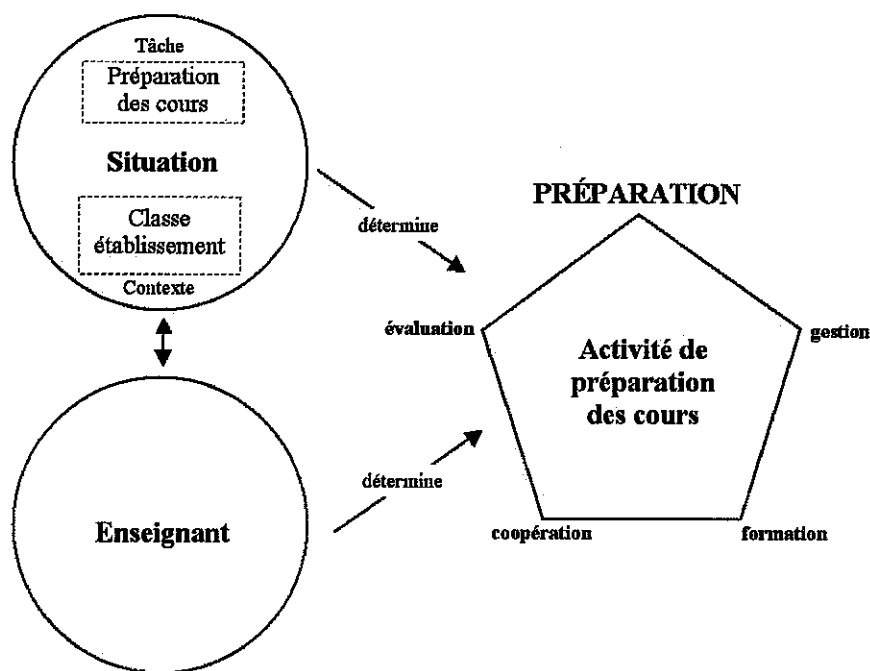


Figure n°2. L'activité de préparation des cours

Ainsi quand un professeur prépare un cours, il se rappelle celui qu'il a déjà donné, une autre année ou dans une autre classe et les effets qu'il avait obtenus en termes d'apprentissage des élèves, il anticipe sa gestion avec les élèves dont il a la charge. Il ne fait pas cours pendant qu'il prépare sa leçon, mais la tâche de gestion de l'enseignement en classe est présente pendant son activité de préparation. De même, il détermine les compétences qu'il cherche à faire acquérir et fixe le niveau d'exigence qu'il souhaite atteindre en fonction des programmes

scolaires, des résultats d'évaluations antérieures qu'il a réalisées ou qui sont disponibles en documentation, de ce qu'il sait de ses élèves, bref, il pense à l'évaluation des apprentissages visés. La préparation des cours n'est pas indépendante non plus de la participation au fonctionnement de l'établissement : elle est influencée par les accords passés entre enseignants d'un même cycle ou d'un même niveau qui ont adopté une progression commune, elle est liée au manuel choisi au sein de l'établissement, le niveau d'exigence visé est lié aux évaluations communes aux classes de même niveau qui sont effectuées dans l'établissement ou à l'échelle nationale.

Des activités enseignantes porteuses de l'activité des élèves

Ce premier examen des activités de l'enseignant laisse apparaître une double orientation du travail de l'enseignant. D'une part, comme tout professionnel, il réalise la tâche prescrite en connaissance du but assigné par l'employeur et pour satisfaire sa propre motivation. D'autre part, il a des objectifs pour ses élèves quant à leur enrôlement dans les situations pédagogiques qu'il leur propose, quant à la nature de leur activité mathématique, et au bout du compte, quant à leur apprentissage. Il y a donc comme deux activités en cascade : la première est une activité de l'enseignant qui répond à une tâche qui lui est prescrite par l'institution scolaire, la seconde est une activité de l'élève en réponse à la situation mathématique proposée en classe par l'enseignant. Ces activités en cascade se déroulent dans la même unité de temps et de lieu (la séance en classe) lorsque l'activité de l'enseignant est la gestion de l'enseignement (figure 3).

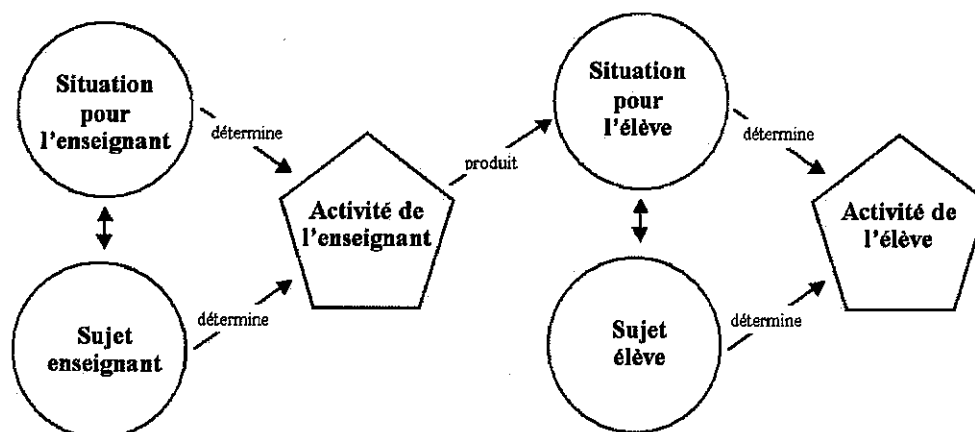


Figure n°3. Lien entre l'activité de l'enseignant et celle de l'élève.

On peut compléter cette modélisation par l'effet de l'activité de l'enseignant et par l'effet de l'activité de l'élève. Si l'activité en classe de l'enseignant, qui est orientée par le but d'enseignement, produit bien des situations d'apprentissage pour ses élèves, elle a aussi un effet sur chaque sujet élève (éveiller sa curiosité, l'encourager, provoquer de l'angoisse, etc.) et sur l'enseignant lui-même (le stimuler, le satisfaire, le fatiguer, créer de la tension, etc.). En outre, certaines interventions de l'enseignant ont un effet simultané sur la situation, sur l'élève et sur la relation d'engagement de l'élève dans la situation qui lui est proposée ; c'est le cas notamment lorsque le professeur aide un élève en lui demandant de réaliser une sous-tâche qu'il devait réaliser de sa propre initiative.

De la même manière, l'activité de l'élève produit un résultat en lien avec la tâche qui lui est proposée, mais elle produit aussi un effet sur l'enseignant (le satisfaire, le décevoir, le surprendre, etc.) et sur l'élève lui-même (conforter ses connaissances ou les déstabiliser, l'étonner, le décourager, etc.). Les effets de l'activité de l'enseignant et de celle de l'élève sur les deux protagonistes de la relation pédagogique sont donc directement en prise avec le but de la tâche qu'ils réalisent, mais aussi avec ce qui motive leur activité, qui est personnel, qui s'inscrit socialement et qui possède une dimension inconsciente. On comprend finalement

combien chaque activité de l'enseignant dépend de la tâche correspondante et des autres classes de tâche, engage l'enseignant et les élèves, produit des effets sur l'enseignant, sur les élèves et donc sur l'activité elle-même.

Classes d'activités et pratiques enseignantes

Le développement précédent concernant la préparation des cours montre aussi que cette activité de l'enseignant est liée aux contenus mathématiques. Tous les contenus ne nécessitent pas les mêmes situations pour être enseignés : certains, parce qu'ils occasionnent des difficultés persistantes chez de nombreux élèves, demandent de proposer des situations complexes dont le traitement en classe peut être long (les notions de périmètre et d'aire ou la comparaison des nombres décimaux par exemple), certains (dont parfois les mêmes) requièrent de nombreux exercices (techniques opératoires et algébriques, calcul mental, etc.) permettant aux élèves d'appréhender par exemple la variabilité des applications d'une propriété ou une technique générale.

L'activité de préparation des cours dépend du contenu à enseigner pour d'autres raisons qui tiennent cette fois du rapport au savoir de l'enseignant, rapport qui n'est pas forcément homogène : un professeur d'école peut se sentir plus sûr de lui dans le domaine numérique que dans le domaine géométrique et donner assez facilement libre cours à son imagination pour concevoir des situations numériques en rapport avec un projet de la classe, alors qu'en géométrie il choisira de proposer seulement les problèmes du manuel dont il a la correction dans le livre du maître. Nous préférons pour ces raisons considérer la préparation des cours comme une classe d'activités, chaque activité étant la préparation d'un cours sur un contenu d'enseignement déterminé.

Ainsi, comme l'indique la figure n°4, nous concevons le travail de l'enseignant comme un système de cinq classes d'activités correspondant à cinq classes de tâches : la préparation des cours, la gestion de l'enseignement en classe, l'évaluation des apprentissages des élèves, la formation professionnelle et la coopération au fonctionnement du système éducatif.

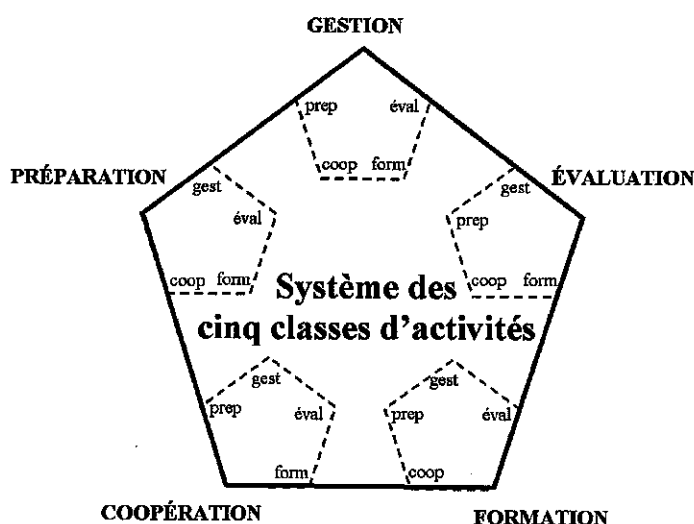


Figure n°4. Le système des cinq classes d'activités du travail de l'enseignant.

Au sein de chaque classe, une activité est déterminée par la tâche correspondante relativement à un contenu d'enseignement particulier et convoque quatre autres tâches. Le système des cinq classes de tâches auquel correspond ce système de classes d'activités est associé à un contexte professionnel déterminé par de nombreux paramètres liés à l'établissement scolaire, aux partenaires, aux élèves, etc. Cet ensemble constitue la situation professionnelle générale dans laquelle l'enseignant est engagé.

Conformément aux hypothèses admises en psychologie (voir par exemple de Montmolin, 1984) et à de nombreux résultats obtenus en didactique des mathématiques (voir par exemple Vandebrouck, 2008), nous supposons, pour un enseignant particulier engagé dans une situation professionnelle générale déterminée, la cohérence et la stabilité du système des cinq classes de ses activités. C'est finalement ce système de classes d'activités co-déterminé par le sujet enseignant et sa situation professionnelle générale que nous étudions et que nous appelons ses pratiques enseignantes (figure n°5).

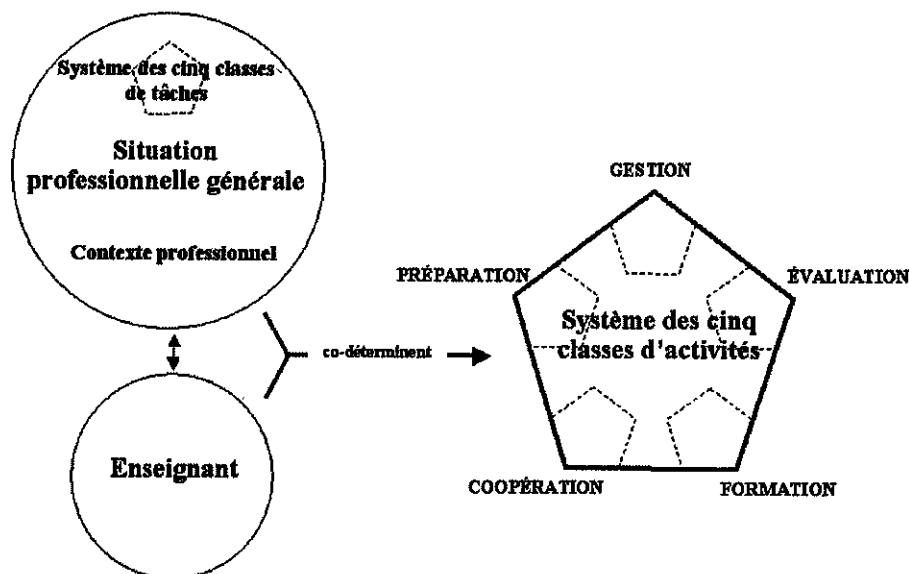


Figure n°5. Les pratiques d'un enseignant.

Ainsi les pratiques d'un enseignant nous apparaissent comme un système d'activités professionnelles qui s'exercent de manière localisée dans l'espace et dans le temps, en référence à un contexte institutionnel et social, et avec une inscription dans l'histoire personnelle de l'enseignant.

4. Des pratiques dynamiques : régulation de l'activité et gestion des incidents didactiques

Le dernier aspect de cette explicitation de notre conception des pratiques enseignantes nous semble particulièrement important, il s'agit de leur caractère dynamique. Nous concevons cette dynamique comme un cas particulier d'un phénomène plus général, la régulation de l'activité.

En théorie de l'activité, le sujet et la situation dans laquelle il est engagé co-déterminent l'activité. Cette dernière produit des effets, d'une part sur l'objet de l'activité en rapport avec le but de la tâche, et d'autre part sur le sujet lui-même en lien avec ce qui motive son activité. Comme l'explique Rogalski (2008), respectivement, ces effets modifient la situation et transforment le sujet. C'est la double régulation de l'activité. Elle renvoie à la dynamique de l'activité puisque ses déterminants, le sujet et la situation, évoluent dans le temps du déroulement de l'activité.

On peut compléter le schéma de la figure n°1 en indiquant que l'activité de l'enseignant produit un effet sur la situation pour l'enseignant et sur l'enseignant lui-même, ces effets pouvant conduire à une adaptation de l'activité de l'enseignant. En outre, et c'est l'utilisation qui nous intéresse le plus dans cette modélisation de la régulation de l'activité, on peut envisager l'adaptation, en classe, de l'enseignement aux élèves. Reprenons la schématisation proposée par la figure n°3 en la prolongeant du côté de l'élève : l'enseignant a préparé sa séance et il est en situation de gérer en classe l'enseignement prévu. Il propose une tâche aux élèves c'est son activité. Supposons par exemple que les élèves aient à dire si tel objet a la

forme d'un losange. Centrons-nous sur le cas d'un élève qui s'engage dans la réalisation de la tâche, il réfléchit et il prend la parole (c'est son activité) pour affirmer que la forme est un losange ; cette affirmation est une partie du produit de l'activité de l'élève. L'enseignant analyse la conformité de la réponse à la tâche proposée, cette analyse a un double effet, d'une part sur la situation dans laquelle l'enseignant est engagé, et d'autre part sur l'enseignant lui-même en tant que sujet.

La figure n°6 illustre que l'activité de l'enseignant produit des effets sur lui-même et sur la situation dans laquelle il est engagé, produit des effets sur l'élève et sur son engagement dans la situation qui lui est proposée par l'enseignant, et enfin que l'analyse par l'enseignant de la réponse de l'élève produit également des effets qui engendrent une adaptation de l'enseignement. Cet ensemble de dynamiques constitue la dynamique des pratiques enseignantes au cours de leur déroulement.

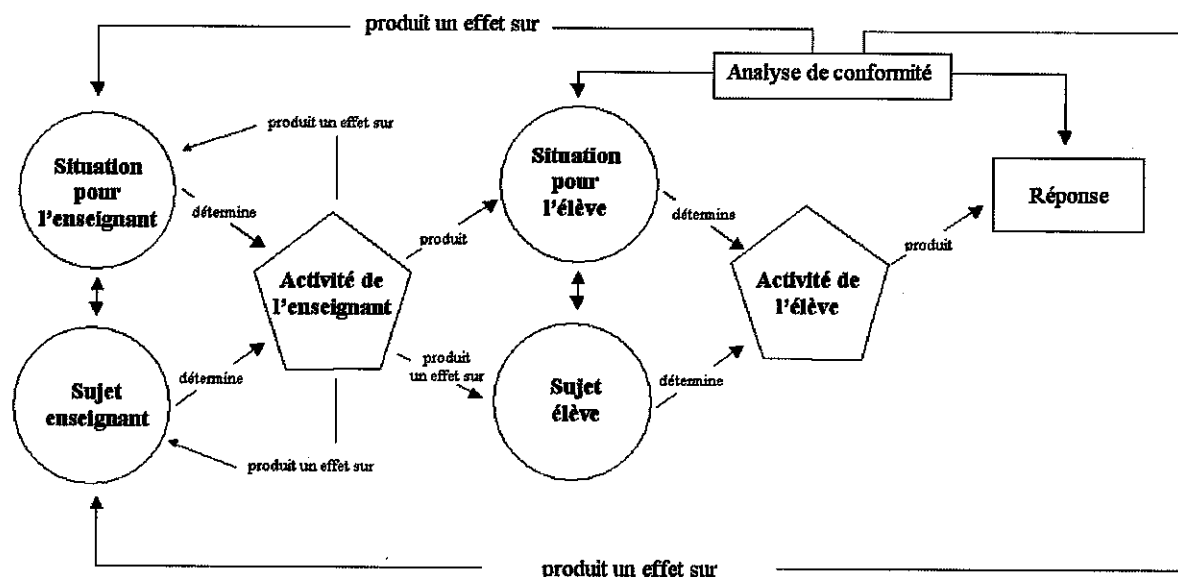


Figure n°6. Dynamique des pratiques enseignantes.

En supposant que la réponse soit exacte, l'enseignant pourra souhaiter mieux comprendre l'activité de l'élève et demander des explications, afin notamment de savoir si l'affirmation découle d'un raisonnement correct. Si la réponse est fausse, l'enseignant pourra solliciter d'autres élèves et organiser un débat. D'autres éventualités apparaissent souvent en classe. Il arrive que le temps mis par les élèves pour réaliser la tâche proposée soit jugé trop long et que l'enseignant les aide en commençant lui-même le travail ou en guidant un élève pour le démarrage. Il arrive aussi que des élèves ne jouent pas le jeu scolaire et perturbent la classe.

Pour analyser l'ensemble des phénomènes qui surviennent lorsque la réponse de l'élève, ou plus généralement sa production, n'est pas conforme à ce qu'une analyse de la tâche laisse prévoir, nous avons introduit la notion d'incident didactique (Roditi, 2005). Un incident didactique se caractérise par un décalage entre ce qui est attendu (en référence à la tâche) et ce qui est produit effectivement. L'activité de l'enseignant consécutive à un tel incident constitue la gestion de l'incident. Nous distinguons les gestions des incidents didactiques en fonction de l'autonomie de travail mathématique qu'elles laissent ensuite aux élèves. Par une analyse quantitative des incidents et de leurs gestions chez quatre professeurs, nous avons montré (Roditi, 2008) que les gestions des incidents didactiques sont diverses pour un même enseignant, que les professeurs utilisent les mêmes modes de gestion des incidents, mais que la distribution de ces différents modes de gestion peuvent être significativement différente d'un professeur à un autre et que cette distribution est cohérente avec le projet global d'enseignement du professeur.

Au bilan, ce développement théorique nous conduit à envisager les pratiques enseignantes comme un système complexe, cohérent et dynamique, à en considérer deux finalités (l'éducation et la transmission des savoirs), à les envisager selon trois dimensions (institutionnelle, sociale et personnelle) et à les analyser selon une décomposition en cinq classes d'activités (préparation, gestion, évaluation, formation, coopération). C'est ce que résume la figure n°7.

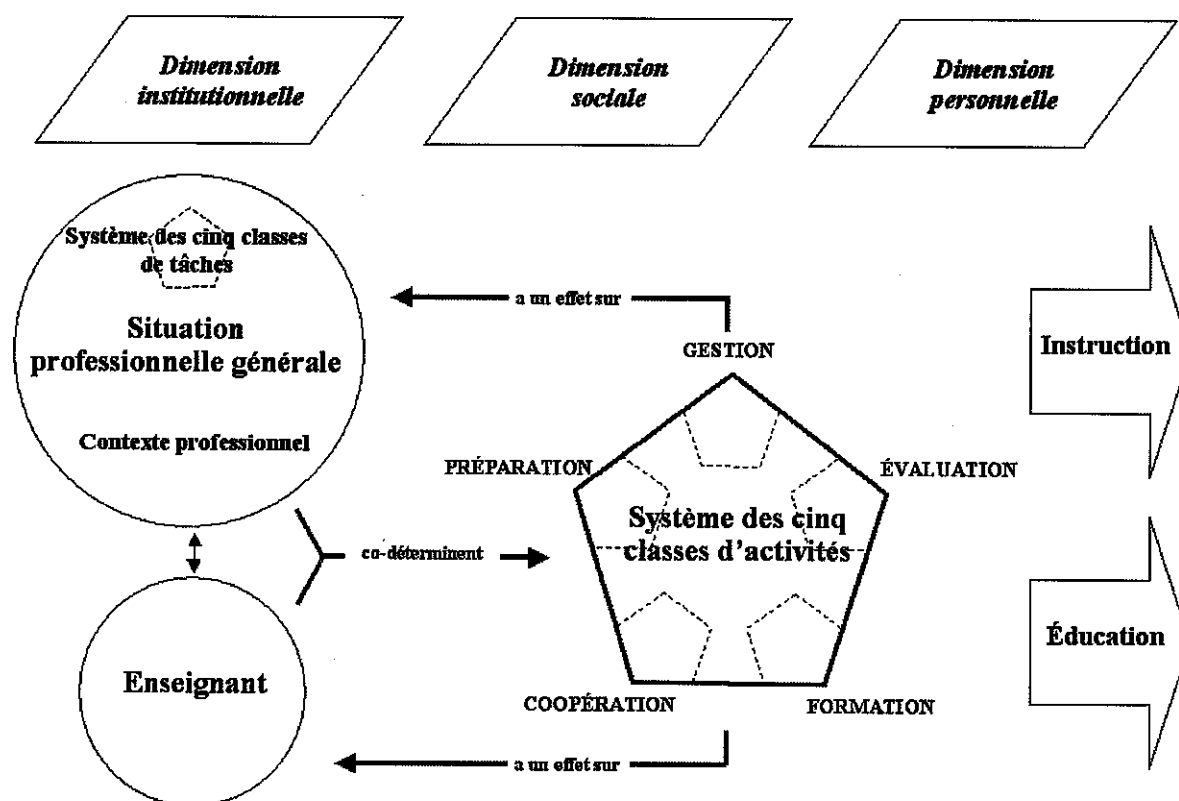


Figure n°7. Les pratiques enseignantes.

Cependant, nos recherches visent essentiellement la description et la compréhension de ce que l'enseignant met en œuvre pour l'apprentissage mathématique de ses élèves. Nous utilisons pour cela d'autres outils théoriques qui ont été construits en didactique des mathématiques ainsi que des méthodes qui reposent sur différents croisements de données et d'analyses. C'est au développement de ces outils et de ces méthodes, dans le cas particulier des pratiques enseignantes de Benoît, que la troisième partie est consacrée.

III. Précisions théoriques et méthodologiques

Cette partie sera inégalement développée car de nombreux outils théoriques issus de la didactique des mathématiques et beaucoup d'éléments méthodologiques généraux sont très voisins de ceux qui ont déjà été développés dans *La classe de mathématiques* (Vandebrouck, 2008) par les chercheurs qui ont contribué à cet ouvrage et notamment par Aline Robert et Janine Rogalski. Des éléments spécifiques à l'analyse des pratiques en classe sont repris de notre propre contribution à ce livre (Roditi, 2008) et de travaux publiés antérieurement (Roditi, 2005). Nous les rappelons seulement ici en développant ce qui est propre à notre recherche sur les pratiques enseignantes de Benoît.

Indiquons enfin que la problématique de cette recherche porte essentiellement sur les pratiques enseignantes en classe, le matériel recueilli comportant essentiellement des vidéos de séances de cours. En référence au développement théorique précédent, il s'agit donc ici

d'analyser une partie seulement des pratiques de Benoît et son évolution au cours du temps : la gestion de l'enseignement en classe. Les analyses sont effectuées selon les trois dimensions institutionnelle, sociale et personnelle des pratiques, en tenant compte des deux finalités d'éducation et d'instruction de l'enseignant. Nous référons cependant aux autres tâches qui incombent à l'enseignant et qui ont un effet sur son activité de gestion de l'enseignement en classe : principalement la préparation des cours et l'évaluation des apprentissages ; la coopération et la formation sont seulement évoquées.

1. Le matériel constitué et les objets d'analyse

Pour mener cette recherche sur l'évolution des pratiques enseignantes de Benoît, l'équipe codisciplinaire a réalisé plus d'une dizaine de films correspondant généralement à une demi-journée de classe. Elle dispose également d'entretiens enregistrés et de quelques documents fournis par l'enseignant. Une partie seulement de ce matériel a été utilisée dans la recherche en didactique, elle est constituée de quelques vidéos d'enseignement des mathématiques et d'extraits d'entretiens qui portent sur les choix de Benoît quant à cet enseignement.

Composition du corpus

Un premier travail a été opéré sur le matériel disponible afin de constituer un corpus adapté à la recherche. La période couverte commence durant sa deuxième année de formation de professeur d'école, c'est-à-dire son année de stage (PE2), et se termine l'année où Benoît obtient sa certification en tant que professeur formateur. Des verbatims des vidéos de classe comme des enregistrements des entretiens ont été réalisés.

Notre perspective étant à la fois didactique et développementale, nous avons restreint notre corpus aux séances de mathématiques où Benoît avait la pleine responsabilité de son enseignement c'est-à-dire après son année de stage. Nous avons aussi constitué un ensemble cohérent de séances relativement aux contenus enseignés afin de procéder à des comparaisons, aussi avons-nous conservé seulement les séances d'enseignement de géométrie qui étaient les plus nombreuses.

Les entretiens retenus dans le corpus sont ceux qui ont été menés par l'équipe, notamment ceux où Benoît indique ses conceptions de l'enseignement à l'école primaire, et ceux où il explique ses choix d'enseignement pour la séance de mathématique consacrée au classement de figures géométriques en classe de maternelle.

L'étude concernant une longue période de la carrière de l'enseignant, il nous a fallu choisir un grain ni trop fin ni trop grossier qui soit susceptible de laisser apparaître à la fois la stabilité et l'évolution de ses pratiques. Au sein des verbatims des vidéos de classe, trois unités de taille décroissante ont été repérées : les séances d'enseignement, les épisodes et les discours ; à chaque unité correspondent des méthodes d'analyses adaptées.

Les séances d'enseignement

Dans la transcription des vidéos de classe, nous distinguons les périodes où l'activité d'enseignement est dirigée vers la vie de la classe, sans lien avec la transmission de savoirs, de celles où des enjeux de savoirs orientent l'activité de l'enseignant. Les premières sont composées, par exemple, d'extraits où l'enseignant installe les élèves en classe, commente une sortie culturelle à venir, fait l'appel, etc. Les deuxièmes comportent aussi parfois des moments de gestion de la classe, par exemple lorsque l'enseignant demande à un élève qui s'est levé pour lui montrer son travail de retourner à sa place. C'est donc en respectant une certaine continuité des périodes que nous les délimitons. Notre étude porte uniquement sur les périodes où des savoirs mathématiques sont en jeu.

Une *séance d'enseignement* est une unité définie par le contenu mathématique enseigné. Nous avons retenu cinq séances d'enseignement de la géométrie ; la première a été filmée à la fin de son année de stage, les deux suivantes pendant sa première année d'exercice en tant que

titulaire et les deux dernières à la fin de la période prise en compte pour la recherche, durant sa septième et sa neuvième année de professeur titulaire. La première séance est effectuée en classe de CM1 (cours moyen première année, 9 ans) et traite du classement des quadrilatères, la deuxième est en classe de CP (cours préparatoire, 6 ans) et porte sur le classement de polygones, la troisième séance s'adresse à des élèves de CE1 (cours élémentaire 1^{re} année, 7ans) qui doivent reproduire des polygones sur papier quadrillé. Durant les deux dernières séances, Benoît est enseignant dans une école maternelle dont il est directeur, ses élèves sont en GS (grande section, 5 ans) ; la quatrième séance porte sur le classement de figures planes et la cinquième sur la symétrie orthogonale.

Les épisodes didactiques

Au sein de chaque séance, nous ne conservons pour l'analyse que les périodes où l'activité de l'enseignant est globalement orientée vers la transmission du savoir. Les périodes considérées forment des unités dont la cohérence est assurée par la tâche mathématique globale à réaliser : un rappel de connaissances, la résolution d'un problème, etc. Nous appelons *épisodes didactiques* ces unités. Ainsi, le premier épisode didactique de la première séance est délimité par la réalisation de la tâche mathématique qui est de rappeler les propriétés du rectangle, y compris le moment où l'enseignant propose cette tâche aux élèves. Remarquons que certaines tâches se composent de sous-tâches, c'est le cas dans l'épisode cité précédemment où le rappel de chaque propriété du rectangle constitue en lui-même une unité et donc une sous-tâche, c'est le cas aussi dans un exercice qui comporte plusieurs questions.

Le discours de l'enseignant en classe et celui des élèves

L'attention que nous portons au discours de l'enseignant est double. Il nous intéresse pour l'effet qu'il a d'une part sur la responsabilité des élèves dans la réalisation des tâches mathématiques proposées, et d'autre part sur la transformation, en classe, de ces tâches qui leur sont confiées. L'analyse du discours repose sur des verbatims des séances d'enseignement. Dans ces transcriptions, les moments de silence ou de pause du discours sont signalés par des compléments entre crochets (exemple : [long silence de l'enseignant]) ou par des barres obliques (/), le nombre de barres indiquant la longueur de la pause. Nous utilisons ces silences pour définir les unités élémentaires des séances : chaque indicateur de pause marque le début d'une portion de discours, il en est de même de chaque changement de locuteur. Les transcriptions sont ainsi découpées en portions qui possèdent presque toujours une homogénéité sémantique, en suivant Violaine de Nuchèze (2001) nous les appelons *actes de parole*, ils constituent notre unité minimale d'analyse du discours des différents protagonistes. Nous les appelons « actes » à cause de leur fonction dans le déroulement de la classe : il s'agit bien, pour l'enseignant comme pour les élèves, d'agir par la parole sur ce déroulement. À cause de leur longueur aussi : cette unité est à la fois plus importante que celle des mots et plus courte que la phrase ou l'échange. Nous avons enfin choisi le terme de « parole » plutôt que celui de langage car nous limitons notre analyse du discours à celui des paroles énoncées, nous ne tenons pas compte par exemple du langage non verbal de l'enseignant ou des élèves. Rappelons qu'au sein de l'équipe codisciplinaire, des chercheurs l'analysent, une recherche porte particulièrement sur l'évolution de la manière qu'a Benoît de poser sa voix en classe.

2. Éléments pour l'analyse des pratiques enseignantes de Benoît

Pour étudier les pratiques enseignantes de Benoît, différents observables ont été définis à partir d'hypothèses communément admises et de résultats majeurs obtenus en didactique des mathématiques. D'autres éléments sont pris en compte qui concernent notamment le contexte de la situation professionnelle de l'enseignant, ses conceptions de l'enseignement et de

l'apprentissage, et les finalités qu'il poursuit. Ces éléments permettent d'effectuer des croisements et de documenter les analyses.

Des éléments pour aborder les pratiques selon leurs trois dimensions

Certains éléments sont retenus qui permettent de référer les pratiques enseignantes à leurs trois dimensions. La dimension institutionnelle est approchée notamment par l'étude de la transposition didactique et par la référence aux programmes officiels au moment où l'enseignement est dispensé. La dimension sociale est liée aux caractéristiques du métier : la polyvalence de l'enseignement à l'école primaire et le faible ancrage disciplinaire des savoirs mathématiques à transmettre à l'école maternelle par exemple. La dimension sociale tient compte également du contexte dans lequel travaille l'enseignant qui comporte à la fois des caractéristiques de la classe dont il a la charge, de l'école dans laquelle il exerce et de ses fonctions et de son statut professionnel (professeur stagiaire, titulaire, directeur). Les entretiens nous aident à comprendre la dimension personnelle des pratiques de l'enseignant car nous croisons ses propos avec les résultats des analyses des séances en classe ce qui permet d'affiner nos interprétations. En outre, et c'est sans doute ce qui est le plus important dans l'utilisation des entretiens, ils nous permettent de restituer la part de l'activité de l'enseignant qui, même si elle est en rapport avec le savoir mathématique enseigné, n'est pas tournée vers les élèves et reste donc difficilement accessible à la seule observation des vidéos ou lecture des verbatims. Les entretiens avec l'enseignant nous informent sur ses conceptions de l'enseignement et de l'apprentissage, en particulier des mathématiques, son rapport au savoir, ses interprétations des difficultés qu'il rencontre en classe, que rencontrent ses élèves ou certains d'entre eux seulement. Plus localement, ils nous permettent d'accéder à certaines justifications de la préparation des cours ou de décisions prises durant le déroulement, qu'elles concernent la classe, l'enseignement ou le cas particulier de quelques élèves.

Analyse globale des séances d'enseignement

Ce que nous retenons d'une séance d'enseignement est essentiellement lié au savoir mathématique et aux modalités construites par l'enseignant pour en organiser l'apprentissage. L'étude du savoir en jeu vise à clarifier ce qui est à transmettre, du point de vue des connaissances, mais aussi des méthodes. Cela permet de définir et d'analyser l'ensemble des contenus mathématiques abordés en classe qui constitue ce que nous appelons le *champ mathématique* de la séance.

Nous étudions ensuite l'organisation de ces contenus dans la séance, elle peut être fondée par des motifs mathématiques ou cognitifs. Par exemple, du point de vue mathématique, lorsque les quadrilatères sont définis par les propriétés des côtés, leur classification selon les propriétés des diagonales nécessite des connaissances qui doivent être connues, donc enseignées, avant de procéder à cette classification. Du point de vue cognitif, l'apprentissage du repérage et du comptage des mailles et des nœuds est un préalable pour la reproduction de figures complexes sur papier quadrillé. L'enseignant possède néanmoins une marge de manœuvre importante de ce point de vue : il peut partir du savoir ou l'introduire par un problème, indiquer la technique ou la faire construire, etc. D'autres considérations, importantes à l'école primaire et notamment en maternelle, peuvent contribuer à déterminer l'organisation de l'enseignement : les durées des activités qui demandent aux élèves de l'attention ou de la concentration, qui imposent de rester assis ou de se déplacer en classe, de travailler individuellement ou collectivement, de s'exprimer ou non, oralement, par écrit ou par des dessins, de manipuler du matériel de façon précise ou non, etc. Ces considérations peuvent être perçues aussi bien du point de vue de la transmission du savoir, en choisissant les activités les mieux adaptées à l'apprentissage, que du point de vue de l'éducation à la vie sociale en classe. L'enseignant élabore ainsi un fil conducteur lui permettant d'obtenir une

organisation de la séance conjuguant les finalités visées, nous appelons *stratégie d'enseignement*, cette organisation.

De nombreux outils issus de la recherche en didactique des mathématiques nourrissent l'analyse du champ mathématique et de la stratégie d'enseignement, nous ne les développons pas ici. Il s'agit principalement pour le champ mathématique de référer au champ conceptuel des notions ou des méthodes enseignées, aux objets mathématiques sous-jacents en tenant compte en particulier de leurs formalisations, aux outils mis en œuvre en repérant notamment les adaptations demandées, etc. Pour l'analyse des stratégies d'enseignement, nous identifions particulièrement comment sont organisées les dynamiques ancien / nouveau et contextualisation / décontextualisation / institutionnalisation, comment est mise en œuvre une dialectique outil / objet des savoirs, etc.

Analyse des épisodes didactiques

Chaque épisode didactique correspond à la réalisation, éventuellement partielle, d'une tâche où les mathématiques sont en jeu : rappeler des connaissances, résoudre un problème, débattre d'une proposition, tirer le bilan d'un travail, copier une leçon, etc. Leur analyse vise à comprendre quels apprentissages mathématiques leur réalisation peut provoquer, c'est pourquoi elle repose pour une part importante sur le croisement de l'étude des tâches – telles que l'enseignant les a programmées dans la préparation de son cours – et de leur réalisation en classe avec les élèves. L'analyse des épisodes didactiques s'appuie sur celle de la séance, notamment des savoirs en jeu et de la stratégie d'enseignement. Elle est fondée par des critères issus de la recherche en didactique qui doivent être spécifiés pour chaque séance en fonction des contenus mathématiques étudiés, nous les indiquons ici succinctement sous une forme générale.

Pour analyser un problème proposé dans une séance d'enseignement, nous commençons par le situer dans l'ensemble des problèmes dont la résolution repose sur le contenu mathématique enseigné. Nous identifions les théories et les cadres mathématiques dans lesquels le problème est posé ainsi que les changements qui peuvent être demandés ou effectués. Nous inventorions les connaissances mathématiques à utiliser, notamment les propriétés, les méthodes et les techniques : celles qui sont indiquées et celles qui pourraient l'être pour chacune des théories ou des cadres dans lesquels le problème peut se poser ; nous repérons aussi celles qui ne conviennent pas mais que les élèves utilisent parfois par erreur car elles correspondent à des obstacles connus ; nous distinguons enfin, entre les connaissances à mobiliser, celles qui sont en cours d'enseignement et celles qui ont été acquises antérieurement. Nous repérons les adaptations éventuelles à effectuer et les initiatives qui sont laissées aux élèves pour les effectuer : le problème constitue-t-il une application directe de ce qui vient d'être enseigné ? une contextualisation particulière des connaissances est-elle nécessaire ? des questions ou des variables intermédiaires doivent-elles être posées ? des changements de point de vue sont-ils indispensables ? La résolution de problèmes mathématiques repose aussi généralement sur l'écrit, il s'agit bien sûr de la langue courante, mais aussi parfois de symboles, de tableaux, de graphiques, de schémas ou de dessins. Nous examinons l'usage de ces représentations sémiotiques et la nécessité éventuelle de recourir à différents registres de représentations, à une coordination de plusieurs registres et à une conversion de représentations sémiotiques.

En ce qui concerne les synthèses effectuées en classe qui sont souvent écrites sur les cahiers des élèves dans les classes où les élèves savent écrire, nous repérons essentiellement la structuration du texte par des titres et des sous-titres, les formes langagières utilisées dans les définitions ou les propriétés, l'illustration par des exemples ou des contre-exemples. Nous sommes également attentifs à la production de ce texte : correspond-elle à un bilan des savoirs construits en classe à partir de questions posées en classe ou au contraire s'agit-il d'une

présentation de savoirs mathématiques n'ayant pas fait l'objet d'un questionnement préalable ? et dans quelle mesure les élèves participent-ils à cette production ?

Analyse du discours de l'enseignant

En complément des analyses de la séance d'enseignement et des épisodes didactiques, nous étudions aussi le discours de l'enseignant, d'une part parce que c'est par ses interventions verbales en classe qu'il modifie les tâches mathématiques pour les adapter en fonction des élèves, d'autre part parce que les apprentissages que nous considérons ne sont pas uniquement constitués du savoir mathématique, ils portent aussi sur le rapport des élèves à ce savoir. L'analyse didactique n'est cependant pas suffisante pour appréhender l'étude des effets des pratiques d'un enseignant sur le rapport au savoir des élèves. Il dépend en effet très profondément des élèves, de leur environnement familial et social, ainsi que de facteurs personnels, en particulier de facteurs inconscients dont l'étude nécessite des théories et des méthodes telles que celles qui sont développées par l'approche clinique d'orientation psychanalytique des pratiques enseignantes.

Il nous semble néanmoins que l'analyse didactique, complétée par une étude du discours de l'enseignant, permet de rendre compte de certaines régularités auxquelles les élèves ne peuvent manquer d'être sensibles : l'importance relative accordée aux mathématiques et à la gestion de la classe durant les séances d'enseignement, la prise en compte par l'enseignant des questions, des propositions et des réponses des élèves, le traitement de leurs erreurs, etc. Tous ces éléments expliquent pourquoi, selon nous, bien que les didacticiens des mathématiques n'aient pas encore construit de théorie unifiée comprenant la dimension langagière de la transmission des savoirs, nombreux sont ceux qui s'inspirent des travaux de sciences du langage pour prendre en compte, dans leurs analyses, les échanges verbaux entre l'enseignant et les élèves, élèves qui peuvent être considérés individuellement, en groupes ou en classe entière. L'absence d'uniformité des analyses du discours de l'enseignant en didactique des mathématiques explique pourquoi cette section consacrée à la méthodologie de son étude dans les pratiques de Benoît est davantage développée.

Pour l'étude des actes de parole en classe nous opérons deux distinctions majeures, l'une en fonction du locuteur et l'autre en fonction de l'objet sur lequel porte l'acte de parole. Nous différencions les interventions de l'enseignant de celles des élèves, et nous spécifions d'une part les interventions qui concernent le fonctionnement de la classe au sens large et d'autre part celles qui concernent précisément les savoirs en jeu. Comme notre étude porte sur plusieurs séances d'enseignement et que notre objet n'est pas directement l'apprentissage des élèves, nous n'avons pas mené d'analyse des relations entre les interlocutions ni de la construction du texte conversationnel. Notre étude porte essentiellement sur les conduites verbales de Benoît dans les interactions didactiques.

a) Les actes de parole de l'enseignant concernant le fonctionnement de la classe

Nous avons écarté de notre étude les activités de l'enseignant orientées vers la gestion de la vie de la classe, les interventions que nous conservons pour nos analyses et que nous rattachons néanmoins au fonctionnement de la classe sont des interventions incluses dans des épisodes didactiques et qui, sans être directement en rapport avec les savoirs en jeu, permettent à l'enseignant d'assurer la transmission des connaissances. De tels actes de parole contribuent à la *gestion de la dynamique de la classe*.

Nous accordons une place particulière aux actes de parole qui permettent de gérer le niveau sonore du groupe et l'attitude des élèves car ils sont particulièrement éprouvants pour l'enseignant. Ils sont regroupés dans la catégorie *rappels à l'ordre*. En dehors de ces derniers, les actes de parole qui contribuent à la gestion de la dynamique de la classe sont généralement destinés à favoriser l'enrôlement des élèves dans la réalisation des tâches proposées, à permettre le maintien de leur concentration sur la tâche en cours ou à réguler le

fonctionnement de la classe. Nous appelons *étayage* cette catégorie d'actes de parole, en voici respectivement quelques exemples correspondant aux trois types évoqués : « faites le deuxième exercice au stylo bleu s'il vous plaît », « allez continuez », « non non vous allez pas tous me dire moi aussi maître hein » ou « on n'en est pas là / on en est aux perpendiculaires ». Tous ces actes de parole, leur nombre et leur répartition dans les épisodes didactiques ainsi que leur éventuelle évolution au long de sa carrière documentent notre recherche sur les pratiques enseignantes de Benoît. Et cela d'autant plus que l'enseignant nous indique à plusieurs reprises durant les entretiens que, selon lui, dans la transmission des savoirs, la dimension relationnelle compte au moins autant que la dimension didactique et sans doute beaucoup plus en maternelle.

b) Les actes de parole de l'enseignant concernant la transmission des savoirs

Les interventions de l'enseignant en rapport direct avec le contenu enseigné sont appelées *didactiques*. Pour les analyser, nous opérons entre elles une première distinction en fonction des activités des élèves auxquelles elles correspondent, cela nous conduit à distinguer quatre types d'actes de parole didactiques.

Sous le terme *dévolution* nous désignons les interventions de l'enseignant qui visent l'appropriation par les élèves d'un problème mathématique à étudier et plus généralement d'une tâche mathématique à réaliser. Il peut s'agir par exemple, comme dans la première séance étudiée, de constituer la liste des propriétés du rectangle, indépendamment d'un « problème » au sens où on l'entend classiquement en didactique. Les questions mathématiques posées aux élèves font aussi partie de cette catégorie : « Jessica a dit les côtés opposés sont égaux / tu viens me montrer les côtés opposés déjà là [*en s'adressant à Jessica*] », « lorsque vous pensez qu'une figure n'est pas un rectangle / vous la barrez ».

Nous appelons *médiation* les actes de parole de l'enseignant qui permettent de gérer l'activité d'un élève ou d'un groupe d'élèves de la classe relativement à l'apprentissage des savoirs visés. Par exemple, toujours dans cette même séance, l'enseignant souhaite recentrer l'activité des élèves pour qu'ils perçoivent que dans un trapèze rectangle, le côté qui n'est pas perpendiculaire aux bases n'est pas parallèle au côté qui lui est opposé ; son intervention est constituée de quatre actes de parole qui ont été attribués à la catégorie médiation : « à votre avis si je prolonge ces deux traits là [*léger silence*] alors / BC et AD / qu'est-ce qui va se passer ». L'enseignant est intervenu de cette façon pour aider les élèves à justifier le fait que le quadrilatère ABCD n'est pas un rectangle, il réduit ce faisant le nombre de degré de liberté de leur activité en favorisant l'appel à une propriété particulière qui n'est pas vérifiée : le rectangle a ses côtés opposés parallèles deux à deux. Ces médiations permettent donc à l'enseignant de réguler la réalisation d'une tâche, parce qu'ils mettent trop de temps à la réaliser ou parce que leur production est en décalage avec ce qui est attendu. Nous distinguons ainsi, parmi les médiations, celles qui ne modifient pas la tâche (relancer de façon neutre, changer d'intervenant, demander un approfondissement de la réponse), celles qui réduisent le nombre de degrés de liberté (guider la réponse de l'élève, donner des indications supplémentaires ou une partie de la réponse attendue) et celles qui ne laissent plus aux élèves la responsabilité de la réalisation de la tâche (donner la réponse ou accepter une réponse partielle et la compléter). Cette distinction de trois types d'interventions nous conduit à définir trois catégories, les médiations ouvertes, intermédiaires ou fermées.

En classe, les productions des élèves sont très souvent évaluées par l'enseignant, particulièrement celles des élèves qui réalisent publiquement les tâches proposées. Au tableau, ils ont à effectuer des calculs, à construire des figures géométriques ou à exposer leur résolution d'un problème. Depuis leur place ils répondent aux questions posées concernant les connaissances à mettre en œuvre, les méthodes à envisager, la solution proposée par un camarade, etc. L'enseignant propose également des exercices à résoudre individuellement, pendant la phase de recherche, il passe dans les rangs et vérifie le travail des élèves. Dans les

interventions de l'enseignant qui apparaissent sur les verbatims, nous regroupons dans la catégorie *évaluation* tous les actes de parole par lesquels l'enseignant apprécie la production d'un élève ou d'un groupe d'élèves. Nous distinguons les *évaluations positives* des *évaluations négatives* en considérant comme négative une évaluation seulement partiellement positive.

Au cours d'un épisode didactique, l'enseignant énonce le savoir que les élèves doivent apprendre, nous appelons *institutionnalisation* ce type d'actes de parole. Les institutionnalisations peuvent prendre des formes différentes, notamment en fonction du moment où elles sont placées dans l'épisode. À la fin de l'épisode ou à la fin de la réalisation d'une sous-tâche, l'enseignant dresse généralement un *bilan* du travail réalisé, il fait ressortir les connaissances construites et indique le savoir à retenir. Une telle intervention peut conduire à des interactions avec les élèves, à la rédaction d'un texte au tableau que les élèves auront à recopier et à apprendre ou à la lecture d'une leçon photocopiée que les élèves colleront dans leur cahier. Au début d'un épisode, les institutionnalisations constituent souvent un *apport* que les élèves auront à utiliser.

c) Les actes de parole des élèves concernant le fonctionnement de la classe

Durant les épisodes didactiques, dans les échanges entre l'enseignant et ses élèves, qui ne mettent pas en jeu le savoir dont l'apprentissage est visé, nous regroupons tous les actes de parole des élèves dans une même catégorie de *participation à la dynamique de la classe*. Elle comporte ainsi les réponses des élèves lorsque l'enseignant demande le calme : « chut / il a dit / on arrête », ou lorsqu'il interroge un élève soupçonné d'avoir une autre activité que celle qui occupe la classe : « rien / j'ai rien fait ». Elle comporte aussi les acquiescements des élèves durant les étayages : « oui », « c'est dur » ou les demandes et les questions des élèves : « maître / maître », « est-ce qu'on peut faire le n°2 ».

d) Les actes de parole des élèves concernant l'apprentissage des savoirs

Nous distinguons durant les épisodes didactiques trois catégories d'actes de parole produits par les élèves et qui concernent leur apprentissage des savoirs visés par l'enseignant.

Il y a d'abord les interrogations qu'ils formulent sur ce qu'il y a à apprendre, sur ce qu'il faut faire ou sur les moyens de le faire : « maître on peut écrire égaux deux à deux », « il fallait pas le barrer hein / si », « maître on a le droit d'utiliser l'équerre ». Nous appelons *question* tout acte de parole de cette nature.

Nous repérons ensuite les *assertions* des élèves concernant la tâche à réaliser, qu'elles soient sollicitées par l'enseignant ou que les élèves s'expriment sans avoir été interrogés : « les côtés opposés sont égaux et parallèles entre eux », « moi j'ai mis deux à deux », « la vitre elle est parallèle », « parce que / euh ». Ces assertions peuvent être exactes, fausses, incomplètes ou parfois hors sujet lorsqu'un élève intervient sur une question différente de celle qui est traitée par la classe. Lorsqu'elles ne sont pas exactes, les assertions sont en décalage négatif par rapport à la production attendu en référence à la tâche proposée, elles constituent des *incidents didactiques* et conduisent alors souvent à des médiations de la part de l'enseignant. Nous incluons dans les incidents didactiques toute assertion pourtant correcte lorsqu'elle suit un incident didactique, cela nous permet de rassembler comme incidents didactiques les désaccords des élèves qui s'expriment ensemble.

Il reste une dernière catégorie d'actes de parole pour lesquels, bien que le locuteur soit un élève, ce n'est pas lui qui porte la responsabilité du contenu énoncé. C'est le cas quand les élèves doivent lire à haute voix l'énoncé d'un problème ou la leçon à retenir, c'est aussi parfois le cas lorsque l'enseignant demande de répéter ce qui vient d'être dit pour que les élèves repèrent que cela doit être appris et pour les aider à l'apprendre. Ces derniers actes de parole étant pratiquement inexistant dans la classe de Benoît, nous les avons assimilés à des

lectures de leçons. Ainsi avons-nous appelé *lecture* cette dernière catégorie d'actes de parole des élèves qui se distinguent entre les *lectures d'énoncés* et les *lectures de leçons*.

IV. Analyses des séances d'enseignement

L'analyse des pratiques de Benoît est d'abord menée chronologiquement. Les cinq séances retenues dans le corpus sont étudiées successivement : après une étude du contenu mathématique en jeu, l'organisation générale des séances est analysée, notamment par la stratégie d'enseignement. L'étude des épisodes didactiques comporte principalement une analyse croisée des tâches proposées aux élèves et de leur réalisation en classe, cette étude est complétée par celle du discours de l'enseignant.

La recherche étant en cours, le texte présentera les analyses de la première séance et seulement quelques éléments saillants pour les autres.

1. Première séance, analyse complète

Benoît est étudiant en deuxième année de formation pour devenir professeur des écoles (PE2), il est en stage et a la charge d'une classe de CM1 (9 ans). Le film a été tourné à la fin de l'année scolaire, si bien que Benoît sait déjà que son évaluation sera positive c'est-à-dire qu'il sera titularisé. Dans cette séance, les élèves ont à reconnaître qu'une figure est un rectangle en vérifiant qu'elle en a les propriétés.

Contenus d'enseignement

À l'école primaire, la reconnaissance des figures géométriques est d'abord globale, c'est une reconnaissance des formes qui conduit les élèves à affirmer que telle figure est un rectangle alors que telle autre est un losange. Progressivement, l'enseignement vise le passage à une reconnaissance qui s'appuie sur des propriétés. Par exemple, dès la classe de CE2 (8 ans), les élèves reconnaissent qu'une figure est un rectangle parce que c'est un quadrilatère qui possède quatre angles droits. Le quadrilatère est reconnu par ses quatre sommets et ses quatre côtés rectilignes, la règle peut être utilisée pour vérifier le caractère rectiligne des côtés. De même l'équerre peut être utilisée pour vérifier que les angles sont bien droits. Précisons qu'à cet âge il n'est pas encore question de géométrie déductive ; il n'y a pas de distinction entre le dessin, trace matérielle, et l'objet géométrique, objet théorique. Les propriétés des figures ne sont pas déduites des données, elles sont vérifiées à l'aide des instruments ; de même, les mesures de longueur s'effectuent à la règle. Le passage de cette reconnaissance visuelle globale des figures à la reconnaissance locale et instrumentée engendre une triple difficulté à laquelle s'ajoutent celles des conceptions inexactes des propriétés des objets géométriques.

Première difficulté. Après un enseignement de l'utilisation des instruments pour vérifier les propriétés des figures, certains élèves peuvent persister dans une reconnaissance visuelle. Ils peuvent alors proposer une affirmation exacte, par exemple « la figure A est un rectangle », mais qui ne soit pas reconnue comme correcte parce que les critères qui sous-tendent cette affirmation (le fait que les quatre angles sont droits) n'ont pas été vérifiés. Ces élèves qui ne passent pas d'une reconnaissance à l'autre ne comprennent pas pourquoi ce qui était juste auparavant ne l'est plus aujourd'hui.

Deuxième difficulté. Le niveau de développement de l'enfant ne permet pas de distinguer les caractères nécessaires ou suffisants des propriétés d'une figure pour qu'on puisse affirmer qu'elle est par exemple un rectangle. Les enseignants doivent donc accepter une surabondance de critères, par exemple lorsque des élèves justifient que la figure A est un rectangle parce que c'est un quadrilatère qui possède quatre angles droits, que ses côtés opposés ont la même longueur, qu'ils sont parallèles deux à deux, etc. Cela n'est pas conforme à ce qui sera attendu d'un élève de collège, ni à ce qui a été exigé des enseignants lorsqu'ils étaient seulement étudiants et qu'ils se préparaient à devenir enseignant. Cela rend difficile l'appréciation des

réponses des élèves : l'enseignant ne peut expliquer pourquoi un élève qui affirme que la figure A est un rectangle parce que c'est un quadrilatère qui possède quatre angles droits, ne produit pas une moins bonne réponse que celui qui ajoute que les côtés opposés ont la même longueur.

Troisième difficulté enfin, ce passage de la perception globale à une perception locale entraîne un autre passage : celui du classement des figures à leur classification. Expliquons-nous sur un exemple que Benoît rencontrera avec ses élèves. Dans un classement d'éléments, on procède par partition, chacun d'entre eux appartient à une classe et à une seule. La reconnaissance visuelle globale conduit au classement des figures géométriques : les rectangles, les losanges, les carrés, etc. Un enfant qui appelle rectangle une forme carrée verra sa réponse considérée comme inexacte car il n'aura pas reconnu toute la particularité de la forme présentée. Les rectangles, les losanges et les carrés se constituent alors en classes différentes ce qui conduit, même implicitement, à les concevoir ainsi : les carrés possèdent quatre angles droits et quatre côtés égaux, les losanges possèdent quatre côtés égaux mais pas d'angle droit, et les rectangles possèdent quatre angles droits mais aussi deux longueurs et deux largeurs c'est-à-dire que deux côtés consécutifs quelconques n'ont pas la même mesure. Le classement ainsi obtenu s'oppose à la classification des quadrilatères dans laquelle les figures rassemblées constituent des ensembles qui sont organisés non plus par partition, mais par inclusion. La logique est différente. Les rectangles sont des quadrilatères parce que les rectangles possèdent quatre sommets et quatre côtés rectilignes, et cela même si les rectangles ont des propriétés que ne possèdent pas tous les quadrilatères. De même les carrés sont des rectangles parce qu'ils en possèdent les attributs, quatre côtés rectilignes et quatre angles droits ; les carrés sont des rectangles particuliers car leurs quatre côtés ont la même longueur, ce qui n'est pas le cas de tous les rectangles.

À cette triple difficulté spécifique s'ajoutent celles qui viennent du fait que la compréhension que des élèves se construisent de certaines notions, comme la notion de perpendicularité par exemple, n'est pas conforme à la conception attendue. Il n'est évidemment pas pertinent de proposer une définition mathématique de la perpendicularité à des élèves de cet âge, il faut donc qu'ils en construisent la signification correcte à partir d'exemples. Or certains élèves retiennent que deux droites sont perpendiculaires si elles sont respectivement « horizontale » et « verticale » c'est-à-dire respectivement parallèles aux bords du support (de la feuille ou du tableau) sur lequel le rectangle est dessiné. En s'appuyant sur une reconnaissance visuelle globale, ces élèves ne considéreront donc pas comme tel, un rectangle dont les côtés sont « obliques » (non parallèles aux bords), ils ne procéderont pas à la vérification de la perpendicularité des côtés à l'aide de leur équerre, et ne comprendront pas que certains le fasse.

Toutes ces connaissances sur les difficultés d'apprentissage sont utiles aux enseignants, non seulement pour préparer précisément leurs cours, mais aussi pour gérer les interactions en classe avec des moyens pour identifier la façon de penser de leurs élèves qui bien souvent, à leur âge, l'expriment difficilement.

Contexte et organisation de la séance d'enseignement

Benoît est en formation pour devenir enseignant, il est stagiaire en charge de la classe d'un enseignant titulaire qui lui a présenté le programme d'enseignement à effectuer, comme c'est toujours le cas dans cette situation de stage. La conception des enseignements est toutefois de la responsabilité du stagiaire. La séance que nous analysons s'est déroulée au mois de mai ; à ce moment de l'année Benoît n'est pas encore titularisé, les évaluations de son année de formation lui permettent de ne pas douter de sa titularisation, mais sa situation professionnelle n'est pas encore assurée. Pour les élèves de la classe, Benoît est un jeune enseignant ; il peut donc redouter à juste titre que les élèves tentent d'en profiter pour être plus dissipés qu'ils ne le sont avec leur enseignant, et que la classe soit de ce fait assez difficile à gérer.

Comme il a été indiqué précédemment, la séance d'enseignement porte sur le rectangle, et plus précisément sur sa reconnaissance par ses propriétés. Il ne s'agit pas de le dessiner, de le mesurer, de le décrire ni de le reconnaître dans une figure complexe. En tant que tel, l'objectif de la séance figure déjà dans le programme de CE2 (8 ans) et la leçon est traitée dans tous les manuels de ce niveau, mais un tel objectif est plus riche qu'il n'y paraît, il n'est pas atteint dans toute sa complexité en CE2, ni même d'ailleurs à la fin de l'école primaire ou du collège pour de nombreux élèves. Il suffit pour s'en convaincre d'imaginer que la figure soit un quadrilatère de la taille d'un terrain de football pour comprendre que l'utilisation des propriétés du rectangle et que la mise en œuvre des outils pour vérifier qu'une telle figure puisse en être un nécessitent une adaptabilité des connaissances longue à acquérir.

Les objectifs précis que vise Benoît sont néanmoins modestes et sans doute analogues à ceux qui pourraient être visés dès le CE2. On peut penser que Benoît évite le risque que les élèves soient en difficulté, d'une part parce que son statut est encore relativement fragile, d'autre part parce que la séance est filmée. On peut aussi faire l'hypothèse qu'il ne possède pas encore toutes les connaissances didactiques relatives au contenu dont il projette l'enseignement et qui ont été présentées plus haut. L'analyse de la séance laisse apparaître clairement sa stratégie d'enseignement : revoir les propriétés du rectangle et les utiliser comme outil pour décider si une figure est un rectangle ou non ; les figures proposées devant à la fois permettre de montrer la variabilité des formes rectangulaires et l'insuffisance de la reconnaissance visuelle globale afin de valoriser la perception instrumentée.

Les épisodes didactiques : tâches proposées et réalisation en classe

La séance dure 43 minutes réparties entre deux épisodes approximativement de même durée. La première tâche est de compléter un texte à trous qui constitue un rappel des propriétés du rectangle. La seconde tâche est d'appliquer ces propriétés pour déterminer les rectangles parmi cinq figures. Les deux tâches sont proposées sur une feuille de papier photocopiée.

Le texte à compléter est le suivant :

Un rectangle a ... côtés, c'est donc un ...

Les côtés opposés sont ... et ... entre eux

Les diagonales sont de même ... et se coupent en leur ...

Il y a ...

Les élèves disposent de quelques minutes pour effectuer ce travail. Il s'agit de rassembler des connaissances sur le rectangle, la tâche est fermée, elle ne demande pas d'adaptation ni d'initiative, les propriétés doivent être sues mais n'ont pas à être mobilisées. Compte tenu du niveau des élèves, on peut repérer une difficulté mathématique qui a déjà été signalée. Benoît, dans la première phrase, fait écrire aux élèves qu'un rectangle est un quadrilatère ; on peut supposer ici que l'usage de l'article indéfini a valeur de quantificateur, la phrase signifie donc que tout rectangle est un quadrilatère. La logique est celle de la classification, il n'est pas certain que les élèves en prennent conscience car ils n'ont pas à la mettre en œuvre. Ils n'ont pas, par exemple, à distinguer les triangles des quadrilatères parmi une collection de polygones, et à devoir mettre des parallélogrammes et des rectangles dans la même catégorie. Les autres difficultés tiennent davantage à l'expression et à l'orthographe. La réalisation de la tâche a lieu en classe, l'observation montre que les élèves connaissent les propriétés du rectangle, Benoît doit surtout gérer la validation des phrases proposées quand des propositions différentes sont énoncées : *Les côtés opposés sont égaux et parallèles entre eux ; les côtés opposés sont parallèles et égaux entre eux*. On remarquera enfin que le fait que Benoît ait indiqué la propriété des quatre angles droits en dernière position pose certaines difficultés aux nombreux élèves qui pensaient devoir commencer par celle-là.

Du point de vue de la dynamique de travail induite par les deux tâches proposées, cette première activité conduira sans doute les élèves à utiliser les propriétés révisées pour effectuer

la seconde tâche, le professeur réduit ainsi la probabilité que les élèves déterminent les rectangles par perception globale.

Les figures proposées dans cette seconde tâche sont toutes quadrangulaires et dessinées sur une feuille de papier, on y trouve trois rectangles dont un carré, l'un des deux autres étant très allongé, un trapèze rectangle « presque rectangulaire » et un losange. Les cinq dessins permettent ainsi de faire rencontrer différentes possibilités de prises d'information (parallélisme des côtés opposés, égalité des longueurs des côtés opposés, présence d'angles droits, égalité de longueur des diagonales, etc.) et de conclusions.

Malgré l'activité de révision, le passage d'une perception visuelle globale sur des objets matériels à une perception locale et instrumentée sur des dessins géométriques n'est pas un objectif clairement poursuivi par Benoît. Cela perturbe la classe car de nombreux élèves s'arrêtent à une perception globale pour décider si un quadrilatère est rectangle ou non alors que d'autres, minoritaires, insistent pour que les angles droits soit vérifiés à l'équerre. Ils obtiennent gain de cause, mais les désaccords n'ont pas cessé car les figures dessinées par Benoît au tableau pour mener la correction sont trop imprécises. Aucune autre propriété n'est vérifiée. Presque tous les élèves ont affirmé que le carré n'est pas un rectangle ; le peu d'importance accordée finalement à la classification par les propriétés fait que Benoît n'arrivera pas à faire changer le point de vue de ses élèves à ce sujet. En difficulté relationnelle par rapport à la classe, il termine par le losange où la décision est unanime, il demande le nom de cette figure (obtenu encore par reconnaissance globale) et félicite ses élèves qui connaissaient presque tous le terme « losange ». La vidéo montre Benoît gêné et tendu lorsque son rapport avec la classe n'est pas consensuel et harmonieux, il est au contraire souriant et détendu quand les réponses apportées aux questions posées font l'unanimité.

La durée du travail personnel des élèves a été très courte (5 min) puisqu'ils n'ont pas vérifié les propriétés avec les instruments. Le reste est un cours dialogué pendant lequel Benoît interroge les élèves et explique les bonnes réponses.

En conclusion, il semble que Benoît ait conçu sa séance sans tenir précisément compte du développement des connaissances des élèves, mais en focalisant sur les savoirs qui s'énoncent : les propriétés. Pratiquement tous ses élèves savaient reconnaître un rectangle et savaient énoncer ses propriétés, peu d'élèves auront pu apprendre que la reconnaissance globale n'est pas un critère de décision suffisant, mais que la décision doit s'appuyer sur la vérification instrumentée des propriétés.

2. Les autres séances, analyse succincte

Le fait d'avoir choisi des séances d'enseignement de géométrie permet des comparaisons quant à la définition des objectifs par Benoît, à l'organisation des séances et à la gestion des épisodes.

Lors de la deuxième séance, Benoît est titulaire, c'est donc la première année où il exerce à temps complet ; il est nouveau dans son école. La séance concerne des élèves de CP (6 ans), elle porte sur la reconnaissance du rectangle : d'une part, c'est un quadrilatère, d'autre part, il a quatre angles droits. La séance est organisée par deux types de tâches : reconnaissance des quadrilatères parmi différentes figures polygonales, reconnaissance des rectangles parmi les quadrilatères. L'objectif de reconnaissance des angles droits grâce à l'équerre (Benoît propose aux élèves un gabarit d'angle droit) est explicite et l'organisation est analogue à la précédente : travail individuel de courte durée et cours dialogué. Benoît avait cette fois bien prévu l'utilisation de l'équerre, mais ses élèves sont beaucoup plus jeunes que lors de la séance précédente, il doit par conséquent faire face à de nombreuses conceptions erronées de la perpendicularité (conceptions liées notamment à l'inclinaison des côtés) qui conduisent à une contradiction entre ce que voient des élèves et ce que l'équerre leur permet d'affirmer. Le

cours dialogué se déroule encore une fois de manière assez tendue, Benoît ne parvenant que rarement à obtenir un climat calme, respectueux et amène avec sa classe.

Troisième séance de géométrie : Benoît enseigne en CE1, la séance porte sur la reproduction d'un polygone sur quadrillage. Deux grands types de méthodes peuvent être distingués : repérer les points indépendamment les uns des autres sur le quadrillage ou bien partir d'un point et repérer les autres par des déplacements pour parcourir le polygone. La première méthode est privilégiée par le manuel utilisé. Benoît insiste, comme indiqué dans ce manuel, pour que les élèves délimitent un cadre rectangulaire minimal contenant la figure, ce qui devrait faciliter le repérage des points. Pour le premier polygone, Benoît laisse les élèves libres de leur méthode, ils contrôlent la conformité de la figure produite grâce à un papier calque. Le travail individuel est plus long que dans les séances précédentes, mais la reprise de la classe entière est toujours très difficile car l'explicitation des stratégies des élèves est laborieuse par manque de moyens efficaces de communiquer sur le repérage des points. En outre Benoît cherche à faire émerger la méthode préconisée dans le manuel alors qu'elle n'a été utilisée strictement par aucun élève. Il devra lui-même la proposer, ce qu'il fera de façon assez maladroite n'ayant cerné précisément ni la méthode préconisée avec sa portée et ses limites, ni les méthodes de référence avec leurs variantes, ni enfin les procédures des élèves en relation avec ces méthodes. Devant le peu d'enthousiasme de la classe et reconnaissant devant ses élèves le caractère approximatif de ses explications, il finira par proposer une activité de lecture du manuel où la méthode proposée sera longuement discutée.

Plusieurs années ont passé quand a été filmée la quatrième séance de géométrie, Benoît a sept ans d'expérience professionnelle, il a obtenu sa mutation dans une école maternelle dont il est directeur, il est en charge d'une classe de GS (5 ans). La séance porte sur la reconnaissance et le classement de formes géométriques : triangles, rectangles, carrés et disques. L'organisation de la séance repose sur deux tâches, une première de reconnaissance tactile de formes et une seconde où les élèves doivent trouver dans la classe des formes triangulaires, rectangulaires, carrées et circulaires. Le premier épisode dure 20 minutes. Durant le jeu, un élève a les yeux bandés, il doit prélever des informations tactiles sur une forme tirée d'un sac, et exprimer verbalement les informations face aux autres élèves qui contrôlent les informations verbales par comparaison aux informations visuelles qu'ils recueillent lorsque l'enfant aux yeux bandés leur montre la forme. A l'issue du jeu, les élèves devraient disposer de critères suffisants pour identifier un triangle, un rectangle, un carré et un disque. Le deuxième épisode dure 10 minutes, les élèves sont répartis en équipes et doivent utiliser les critères pour reconnaître, parmi les objets de la classe, des triangles, des rectangles, des carrés et des disques. Le déroulement de la séance est harmonieux, les élèves n'ont aucune difficulté à reconnaître les formes, ils n'arrivent pas, en revanche, à indiquer des critères précis permettant leur reconnaissance. Ainsi, aucun élève ne se trompe, toutes les réponses sont validées, mais les critères explicites de validation sont insuffisants. Durant le second épisode, les élèves cherchent à rapporter beaucoup d'objets, leur forme ne correspond souvent qu'approximativement aux figures recherchées, et cela d'autant plus que Benoît n'a apporté aucun matériel particulier : les objets de la classe sont des solides et la confusion est importante entre la géométrie du plan et celle de l'espace. Peu d'élèves sans doute à l'issue de cette séance auront dépassé la reconnaissance visuelle des formes pour acquérir les notions et le vocabulaire permettant de justifier cette reconnaissance par des critères précis. Benoît ressent manifestement assez tôt cette difficulté d'enseignement durant la séance, il transforme l'objectif d'explicitation des critères en un objectif éducatif : que les élèves s'écoutent mutuellement et se critiquent respectueusement.

La dernière séance de géométrie a été filmée deux années plus tard, Benoît est toujours directeur de son école maternelle avec la responsabilité d'une GS (5 ans). Il est en formation pour devenir formateur d'enseignants (il se présente au CAFIPEMF). La séance porte sur la

symétrie orthogonale en lien avec le pliage. La séance est organisée par trois tâches : une approche collective de la notion de figure symétrique à partir d'un dessin de papillon à moitié colorié et dont le coloriage doit être complété, la réalisation d'une image symétrique par pliage d'une feuille enduite de peinture, un jeu à un contre un à partir d'un dessin symétrique comprenant de nombreuses formes et qui doit être colorié en attribuant la même couleur aux formes symétriques. Cette séance se déroule harmonieusement, les élèves repèrent facilement les formes symétriques et n'ont aucune difficulté à leur attribuer la même couleur, ils sont ravis de l'activité de pliage d'une feuille peinte. Encore une fois, nous constatons que Benoît tente de faire exprimer des conditions permettant d'affirmer que deux formes sont symétriques, mais que ce travail n'aboutit qu'à des critères de validation très vagues, souvent sources de difficultés pour les élèves ; le lien avec le pliage est progressivement remplacé par une phrase vague du type : « il y a la même chose de l'autre côté ». Durant les entretiens, le fait que certains élèves puissent en rester à des idées vagues concernant les savoirs visés ne semble pas gêner Benoît qui déclare tenir à respecter le rythme des apprentissages des différents élèves, surtout en maternelle, et qu'il aménage pour cela des séances où les exigences finales d'acquisition ne sont pas trop élevées.

3. Analyses du discours de l'enseignant et des élèves

L'étude des séances a notamment montré que Benoît a progressivement délaissé les cours dialogués qui engendrent essentiellement des activités langagières des élèves au profit de séances où les activités mathématiques des élèves sont plus variées. Elle a montré aussi que Benoît ne vise pas des objectifs très précis quant aux apprentissages. Les analyses du discours tenu en classe par l'enseignant et par les élèves ne sont pas assez fines pour éclairer les processus qui permettent à l'enseignant de gérer les apprentissages des élèves, elles permettent néanmoins d'effectuer des croisements visant à renforcer les résultats des analyses des séances.

Le discours tenu par l'enseignant est relativement stable sur les dix années, il représente 70% des paroles échangées en classe, 60% de ce discours est consacré au contenu mathématique avec une répartition constante entre les différentes fonctions didactiques : 25% de dévolution, 50% de médiation, 20% d'évaluation et 5% d'institutionnalisation. Les médiations fermées ont néanmoins diminué de moitié : dans les échanges avec les élèves, Benoît leur laisse davantage de possibilité pour réaliser eux-mêmes les tâches proposées. Le discours de gestion de la dynamique de la classe représente 40% du discours de l'enseignant, sans fluctuation avec les années, mais sa composition a évolué : le pourcentage des rappels à l'ordre a diminué de moitié en dix ans, ce qui laisse plus de place aux encouragements et à l'humour. Les difficultés de gestion de classe qu'a rencontrées Benoît en début de carrière se sont dissipées, il a plus d'assurance, il occupe mieux sa place d'enseignant et, sur ce dernier point, on peut se demander si le travail avec les chercheurs n'y a pas contribué (Blanchard Laville et al., 2007). L'effet de cette assurance sur ses pratiques n'est pas isolé, Benoît est devenu directeur de son école, il est ainsi davantage respecté des personnels, des parents et des élèves.

Les actes de langage des élèves représentent 30% du discours tenu en classe, leur répartition évolue avec les pratiques de Benoît : la part de ceux qui concernent le contenu mathématique est en diminution (passage de 75% à 60%) du fait de la place plus grande aménagée par Benoît aux activités mathématiques autres que langagières. On ne constate pas d'autre variation sensible. La composition du discours qui concerne le contenu est constante, avec pratiquement 95% d'assertions et 5% de questions. La répartition des assertions est stable également avec 60% d'incidents didactiques et 40% de d'assertions correctes.

V. Les évolutions des pratiques de Benoît en dix ans

Bien qu'encore succincte, l'analyse des séances d'enseignement montre que trois aspects marquent les pratiques de Benoît : la gestion de la classe, l'organisation didactique des séances en fonction des objectifs d'apprentissage visés et la poursuite de la double finalité « éducation » et « instruction ».

1. Une évolution favorable quant à la gestion de la classe

En début de carrière, Benoît dit qu'il est gêné par ses difficultés relationnelles avec les élèves. Il reste peu de disponibilité pour les contenus qui sont abordés principalement sous forme dialoguée avec les élèves, un dialogue où l'enseignant expose les savoirs plus qu'il ne permet aux élèves de les construire. Ces difficultés pèsent beaucoup sur cet enseignant qui trouve le sens de son métier dans l'entretien de bonnes relations avec sa classe.

Après quelques années d'exercice, Les problèmes de gestion sont réglés, les formes de travail des élèves organisées leur laissent de plus en plus de responsabilité mathématique y compris dans leurs échanges avec le professeur. La recherche codisciplinaire apporte des éléments convergents aux résultats didactiques obtenus : les gestes et la voix de Benoît se sont posés, il occupe sa place d'enseignant de façon plus sereine qu'au début, sans chercher en permanence chez les élèves la légitimité de sa position. Son attention aux difficultés d'apprentissage est plus grande, il enfermerait moins les élèves dans un déterminisme social ou cognitif.

Le déroulement harmonieux des séances et l'assurance de Benoît quant au sens de son métier montrent que les pratiques de l'enseignant sont aujourd'hui conformes aux motivations qui sont les siennes.

2. Une focalisation sur les objectifs majeurs de l'enseignement des mathématiques

Si les objectifs majeurs d'une leçon sont bien définis par Benoît, les éléments qui causent des difficultés d'apprentissage spécifiques ne sont pas précisément pris en compte. On retrouve ce constat quant à la reconnaissance des figures géométriques et à leur classement, quant au repérage des points sur un quadrillage ou quant à la reconnaissance d'éléments de symétrie d'une figure.

La focalisation sur les objectifs majeurs est une constante des pratiques de Benoît qu'il justifie durant les entretiens par une volonté de laisser les élèves progresser à leur rythme, dans un climat de classe serein. Les analyses didactiques soulèvent beaucoup de questions, mais de nombreux éléments convergent pour ne pas déstabiliser les pratiques auxquels Benoît est parvenu. Il enseigne en effet en conformité avec les programmes scolaires, et il est apprécié par son inspection. Benoît n'a pas de « problème » avec les mathématiques, c'est important socialement car ce n'est sans doute pas le cas de tous ses collègues ; c'est d'ailleurs lui qui est aujourd'hui directeur de son école et qui « fait les comptes » pour la collectivité.

Soulignons pour conclure sur ce point que Benoît a travaillé pour sa propre formation : ses études universitaires sont scientifiques et il a rejoint, pendant plusieurs années, l'IREM de son académie.

3. La finalité « éducation » domine la finalité « instruction »

La finalité « éducation » prend chez Benoît une grande importance, y compris quand l'objectif premier semble celui de la transmission d'un contenu disciplinaire spécifique. Nous l'avons vu par exemple lorsqu'il a enseigné le classement des formes géométriques à ses élèves de grande section (5 ans). Du point de vue didactique, une tâche de classement est proposée aux élèves pour qu'ils construisent des critères fonctionnels en réponse à un problème posé. Pour Benoît, cette tâche de classement a essentiellement constitué une

occasion de faire travailler les élèves en équipes et de les confronter au problème social de la prise de décision collective.

On comprend ici comment Benoît qui souhaitait devenir un enseignant ayant de bonnes relations avec ses élèves, oriente son activité par la finalité éducative de l'enseignement et comment la demande institutionnelle lui permet d'assumer pleinement ce choix, pourvu qu'il arrive effectivement à gérer sa classe dans un climat serein et à traiter les contenus au programme.

VI. Conclusion

Les pratiques enseignantes de Benoît ont donc évolué en dix années d'expérience. Les difficultés de gestion de classe sont réglées, l'organisation du travail des élèves leur donne de plus en plus de responsabilité mathématique, y compris dans leurs échanges avec le professeur. Les situations d'enseignement proposées sont plus riches aujourd'hui qu'elles ne l'étaient au début de sa carrière.

Benoît accorde néanmoins toujours peu d'intérêt aux difficultés d'apprentissage spécifiques et à la définition précise de ce qui doit être appris. Dans les entretiens, il explique que la relation pédagogique et la fonction éducative priment de beaucoup sur le didactique, surtout dans les premières années de la scolarité.

Par une étude clinique longitudinale et en s'appuyant sur un cadre global d'analyse des pratiques enseignantes, la recherche a permis de montrer comment, d'une part, l'évolution des pratiques de Benoît correspond à un développement professionnel conforme au sens qu'il trouve à son métier, et comment, d'autre part, cette évolution est renforcée par le contexte dans lequel Benoît a choisi de travailler : il est aujourd'hui professeur en maternelle, directeur de son école et formateur d'enseignants.

Bibliographie

- BLANCHARD-LAVILLE, C., CHAUSSECOURTE, P., RODITI, E. (2007), Recherche codisciplinaire sur les pratiques enseignantes : quels modes de coopération avec les praticiens observés ?, *Éducation et Francophonie*, vol. 35, n°2, p. 45-61.
- COPPE, S. (2007). Les connaissances antérieures des professeurs de mathématiques à travers la préparation de séances de classe. Cas de stagiaires en fin de formation initiale. *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*. Paris : janvier 2006.
- CLOT Y. (1999), *La fonction psychologique du travail*, PARIS : PUF.
- DE NUCHEZE V. (2001). *Sémiologie des dialogues didactiques*. Paris : L'Harmattan.
- LEONTIEV, A. (1975/1984). *Activité Conscience Personnalité*. Moscou : éditions du progrès.
- LEPLAT J. (1997), *Regard sur l'activité en situation de travail - Contribution à la psychologie ergonomique*, Paris : PUF.
- MONTMOLLIN (DE) M., (1984) *L'intelligence de la tâche*. Berne : Peter Lang.
- NUCHEZE DE, V. (2001). *Sémiologie des dialogues didactiques*, Paris : L'Harmattan.
- PELTIER-BARBIER, M.-L. (sous la direction de) (2004), *Dur d'enseigner en ZEP*, Grenoble : La pensée sauvage.
- ROBERT, A. (2008). Une méthodologie pour analyser les activités (possibles) des élèves en classe, in F. Vandebrouck (coordonné par), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*, Toulouse : Octarès, p. 45-68.
- RODITI, E. (2005). *Les pratiques enseignantes en mathématiques. Entre contraintes et liberté pédagogique*, Paris : L'Harmattan.

- RODITI, E. (2008), Des pratiques enseignantes à la fois contraintes et personnelles, et pourtant cohérentes, in F. Vandebrouck (coordonné par), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*, Toulouse : Octarès, p.73-94.
- ROGALSKI, J. (2003), Y a-t-il un pilote dans la classe ? Une analyse de l'activité de l'enseignant comme gestion d'un environnement dynamique ouvert, *Recherches en didactiques des mathématiques*, 23/3, p. 343-388.
- ROGALSKI, J. (2008), Des compléments sur les théories de l'activité et du développement pour l'analyse liée des pratiques des enseignants et des apprentissages des élèves, in F. Vandebrouck (coordonné par), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*, Toulouse : Octarès, p.429-456.
- VANDEBROUCK, F. (coordonné par) (2008). *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*, Toulouse : Octarès.

Les séminaires de 2010

Programmes

Programme du séminaire national de didactique des mathématiques des 15 et 16 janvier 2010

Séminaire organisé par l'Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques (ARDM)

<http://ardm.eu/>

Les conférences se dérouleront à la Halle aux Farines sur le site PRG de l'Université Paris Diderot – Paris 7.

Attention pour le séminaire de janvier 2010 deux salles différentes :

Vendredi 15 janvier : Salle 575F

Samedi 16 janvier : Amphi 7C

Accès et plan du bâtiment :

<http://ardm.eu/content/les-seminaires-nationaux>

Responsables du séminaire national de didactique des mathématiques :

Maha Abboud-Blanchard

maha.blanchard@math.jussieu.fr

LDAR, Université Paris-Diderot, case courrier 7018, 75205 Paris cedex 13

Annick Fluckiger

annick.fluckiger@unige.ch

FPSE, Université de Genève, 40 Bd du Pont D'Arve, CH- 1211 Genève 4

Le séminaire est organisé avec le partenariat de l'IREM de Paris 7.

Vendredi 15 janvier 2010 – 16h-19h

16h à 17h30 Travaux en cours

Les relations entre Logique, Preuve et Apprentissages mathématiques : une question d'actualité en didactique des mathématiques ?

Viviane DURAND GUERRIER (Université de Montpellier2, Institut de Mathématiques et de Modélisation de Montpellier UMR 5149 CNRS, Équipe ACSIO)

17h45 à 19h Présentation de thèse

Une perspective sémantique et dialogique sur l'activité de validation en mathématiques

Thomas BARRIER (LEPS, équipe Lirhist, Université de Lyon)

Samedi 16 janvier 2010 – 9h-12h

9h à 10h30 Travaux en cours

Approche de la démonstration : De la conjecture et démonstration guidées au récit de la construction d'une démonstration

Nadia DOUEK (Université de Nice, IUFM C. Freinet UMR-ADEF Université de Provence)

10h45 à 12h Travaux en cours

L'action du professeur et le temps des situations

Serge QUILLO (UMR ADEF, INRP)

Samedi 16 janvier 2010 – 13h30-18h

13h 30 à 14h30 Plage de l'ARDM

14h45 à 16h Présentation de thèse

Activités de recherche et de preuve entre pairs à l'école élémentaire : perspectives ouvertes par les communautés de pratique d'enseignants

Jean Philippe GEORGET (Université d'Orléans et LDAR, Université Paris Diderot)

16h15 à 18h Travaux d'équipe

Présentation des travaux du projet Européen Remath

Michèle ARTIGUE, Claire CAZES, Jean-Michel GELIS, Jean Baptiste LAGRANGE et Fabrice VANDEBROUCK (LDAR, Université Paris Diderot)

Programme du séminaire national de didactique des mathématiques des 26 et 27 mars 2010

Séminaire organisé par l'Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques (ARDM)

<http://ardm.eu/>

Les conférences se dérouleront à la Halle aux Farines
sur le site PRG de l'Université Paris Diderot – Paris 7,
Amphithéâtre 6C

Accès et plan du bâtiment :

<http://ardm.eu/content/les-seminaires-nationaux>

Responsables du séminaire national de didactique des mathématiques :

Maha Abboud-Blanchard

maha.blanchard@math.jussieu.fr

LDAR, Université Paris-Diderot, case courrier 7018, 75205 Paris cedex 13

Annick Fluckiger

annick.fluckiger@unige.ch

FPSE, Université de Genève, 40 Bd du Pont D'Arve, CH- 1211Genève 4

Le séminaire est organisé avec le partenariat de l'IREM de Paris 7.

Vendredi 26 mars 2010 – 16h-19h

16h à 17h30 Travaux en cours

Argumentations autour du raisonnement et de la démonstration mathématique dans l'enseignement

André PRESSIAT (LDAR, IUFM Centre Val de Loire, académie d'Orléans Tours)

17h45 à 19h Présentation de thèse

L'intégration des TICE dans les pratiques mathématiques à l'école primaire

Jean-Louis IMBERT (IUFM Midi-Pyrénées, UT2 Toulouse)

Samedi 27 mars 2010 – 9h-12h

9h à 10h30 Hors les murs

Les représentations fonctionnelles dans les processus d'apprentissage de la covariation comme prélude au concept de fonction dans un contexte d'apprentissage collaboratif, débat scientifique et d'auto – réflexion

Fernando HITT (Université du Québec à Montréal, en congé scientifique à l'Université de Genève)

10h45 à 12h Présentation de thèse

Chiffres mode d'emploi. Exploration du milieu mathématique et expérience à l'école primaire autour de quelques critères de divisibilité.

Christine DEL NOTARO (Equipe DiMaGe, Université de Genève)

Samedi 27 mars 2010 – 13h30-18h

13h 30 à 14h30 Plage de l'ARDM - Assemblée Générale statutaire

Ordre du jour :

- résultats des votes sur les rapports d'activité et financier, courtes informations si nécessaire sur ces rapports ;
- point d'information sur l'EE 16 par son responsable ;
- point d'information sur une fédération des associations de didacticiens après la rencontre fixée au 27 mars au matin (ce qui inclut de nouveau la mastérisation) ;
- point sur le séminaire (ce qui inclut la préparation des 30 ans de RDM).

14h45 à 16h30 Travaux d'équipe

L'énumération : reprise en vue d'une diffusion aux professeurs des écoles et prolongements
Claire MARGOLINAS (Laboratoire PAEDI, IUFM d'Auvergne Université Blaise Pascal Clermont-Ferrand & Groupe DéMathE, INRP) Olivier RIVIERE, (IUFM d'Auvergne Université Blaise Pascal Clermont-Ferrand & Groupe DéMathE, INRP) Floriane WOZNIAK, (Laboratoire LEPS- LIRDHIST, Université Claude Bernard Lyon 1 & Groupe DéMathE, INRP)

16h45 à 18h Présentation de thèse

Etude épistémologique et didactique de la preuve en mathématiques et de son enseignement ; une ingénierie de formation

Michèle GANDIT (IUFM, Université J. Fourier, Grenoble, Maths à modeler)

TITRE :

Actes du séminaire national de didactique des mathématiques

AUTEURS :

M. ABBOUD-BLANCHARD et A. FLÜCKIGER

RESUME :

Actes de la session 2010 du séminaire national de didactique des mathématiques. Le séminaire national de didactique des mathématiques est organisé par l'ARDM. Il a pour but de permettre la diffusion régulière des recherches nouvelles ou en cours, et de favoriser les échanges et débats au sein de la communauté francophone de didactique des mathématiques.

MOTS CLES :

Didactique des mathématiques