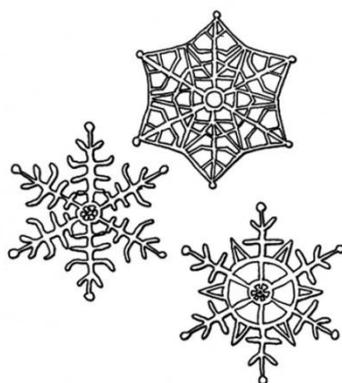


UE Modélisation

Master Pro 2 Didactique des mathématiques

Université Paris 7

La neige dans tous ses états



Céline Ewencyk, Françoise Heulot, Axel Courbin, Clément Legris

Sommaire

<u>Introduction</u>	p 4
<u>Partie 1 : la neige naturelle</u>	
I La formation des cristaux de neige	
1) Généralités	p 6
2) Formation des cristaux	p 7
3) Caractéristiques du cristal	p 8
4) Différents types de neige	p 8
II Structure hexagonale du cristal de neige	p 9
1) Forme de base	p 11
2) Structure de la glace	p 16
3) Les systèmes de classification des cristaux	p 19
4) Exercice : le flocon de Von Koch	p 25
III Masse volumique de la neige	p 30
1) Définition	p 30
2) Modélisation de la répartition des masses volumiques	p 30
3) Masse volumique, température et vent	p 39
<u>Partie 2 : la neige de culture</u>	p 47
I Généralités	p 47
II Principe de fabrication	p 47
1) Principe général	p 47
2) Détails	p 48
3) Remarques	p 49
4) Exercice de thermodynamique	p 49
III Propriétés physiques de la neige de culture	p 55
1) Forme	p 55
2) Masse volumique	p 56
3) Réglage d'un canon à neige	p 56

IV Conséquences	p 56
1) Importance de la masse volumique	p 56
2) Importance de la TEL	p 57
 Conclusions et perspectives	 p 58
 Annexe	 p 60
Bibliographie	p 61

Introduction

Le 3 mars 2011, de retour des vacances d'hiver passées dans une station de ski, lorsqu'il s'est agi de choisir une situation authentique et issue du monde réel pour notre projet de modélisation, nous avons décidé de travailler sur la neige « artificielle » et en particulier de répondre à la question concrète suivante : pourquoi a-t-on l'impression que cette neige est bonne à skier ?

Les idées ont fusé dans le groupe :

- * « Bonne pour le skieur »
 - * Qu'est-ce que la neige? (caractéristiques, métamorphoses, etc.)
 - * Comment se fabrique la neige de culture? (fonctionnement des canons à neige)
 - * Comparaison des 2 types de neige (densité, forme, etc.)
 - * Intérêts et inconvénients de la neige de culture pour le skieur
 - * Comment sont placés les canons?
 - * Quand fait-on fonctionner les canons?
- * « Bonne pour la montagne »
 - * Bilan écologique et énergétique (impact sur l'eau, sur la nature, électricité nécessaire, etc.)
 - * Bilan économique (skier plus souvent et plus longtemps)

Nous nous sommes d'abord intéressés aux canons à neige, en particulier à leur fonctionnement et à leur positionnement sur les pistes. Mais on s'est heurté à des notions compliquées, beaucoup étaient qualitatives, dépendantes de nombreux paramètres ou très aléatoires. On a donc été rapidement dépassé et on a compris que le point crucial de notre travail était la compréhension de la formation de la neige.

Nous tenons à remercier en particulier Mesdames Michèle Artigue et Rita Khanfour-Armale et Messieurs Alain Kusniak et Samuel Morin pour leur aide, leurs encouragements et leurs éclaircissements. Nous avons pu mesurer l'importance du travail d'acquisition de connaissances scientifiques (hors mathématiques) et de l'interdisciplinarité. D'autre part, il ne fallait pas perdre de vue la modélisation mathématique et les transpositions possibles dans l'enseignement.

Notre travail s'est donc centré, sur la compréhension de la neige et de ses caractéristiques, puis sur la neige de culture pour enfin permettre leur comparaison et répondre à notre

problématique initiale. Au travers de ces études, plusieurs modélisations ont été mises en évidence et nous avons essayé de construire pour chacune des applications dans les classes:

- Pour la surfusion, les explications de Mme Khanfour-Armale et un exercice de classe préparatoire nous ont permis de travailler sur des notions de thermodynamique, de se re-familiariser avec les équations différentielles, de voir les différences de traitement entre les mathématiques et la physique et de faire un retour au réel sur un problème de surfusion.

- Pour la forme des cristaux, nous nous sommes attachés à comprendre pourquoi le cristal de neige avait une forme hexagonale et comment il évoluait. La modélisation de Von Koch du cristal nous a paru une bonne transposition pour les élèves (travail sur la géométrie et les suites)

- Pour la masse volumique, nous avons une première modélisation de la répartition des masses volumiques par une loi normale. Nous avons alors construit une étude statistique pour le niveau troisième. Une seconde modélisation concerne la détermination de la masse volumique: celle-ci est fonction de la température et du vent et nous avons cherché un modèle mathématique à partir d'un texte qui fait référence en la matière (de E. Pahaut). Des données nous ont permis d'établir un modèle à partir de régressions affines.

Il s'est agi enfin, d'une part de conclure après toutes ces études et recherches sur notre problématique (confrontation au réel), d'autre part d'avoir un regard critique sur nos modélisations (en particulier étudier le travail de transfert des apports mathématiques théoriques sur des exemples concrets) et de chercher dans quelles mesures on peut transférer aux élèves le travail d'enquête et d'étude de ressources que nous avons effectué.

Partie 1 : la neige naturelle

I La formation des cristaux de neige

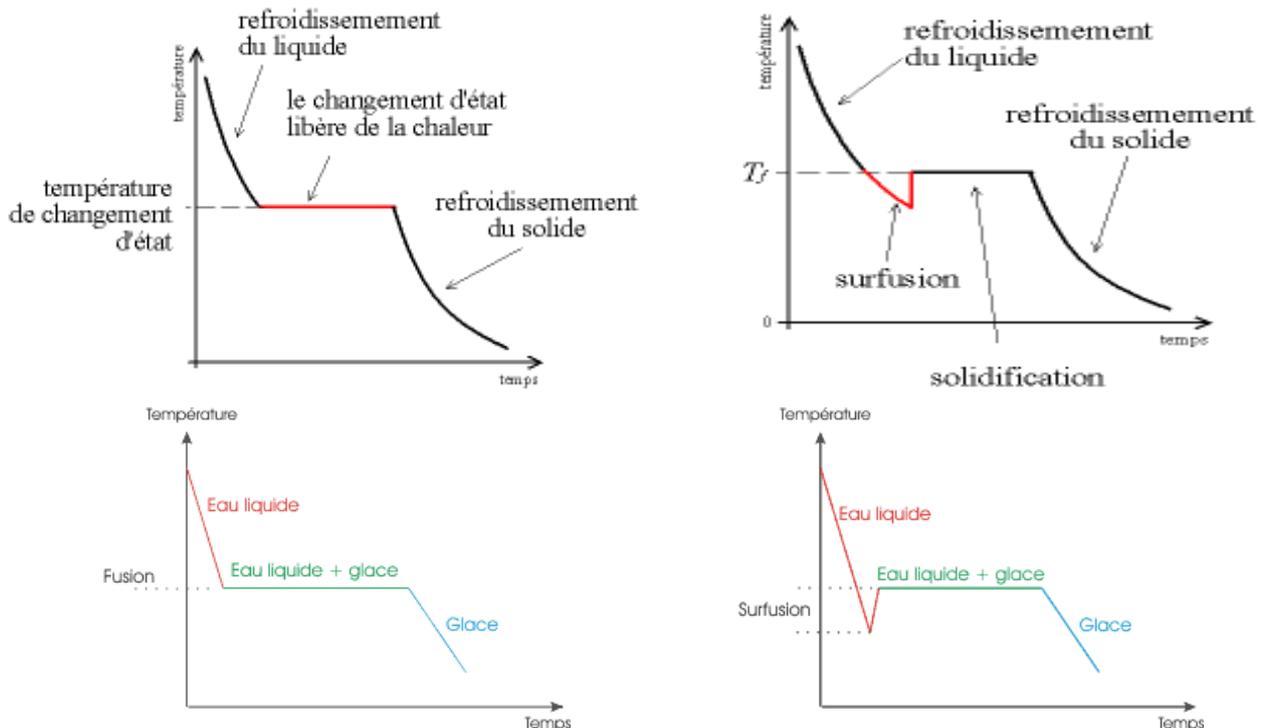
1) Généralités

Les cristaux de neige se forment dans les nuages des hautes couches de l'atmosphère. Ils se créent en grande partie grâce au jeu de déséquilibre entre les différents états de l'eau : liquide, solide, gazeux. L'état gazeux de l'eau, appelé « vapeur d'eau », n'est pas (comme on le croit souvent) le « brouillard » ou « ce qui sort d'une casserole qui boue ». La vapeur d'eau est invisible, et présente à l'état gazeux dans l'air. Mais il existe des états anormaux !

Normalement, l'eau devient de la glace à 0° (passage de l'état liquide à l'état solide). Mais cette transformation ne se fait pas toujours. On peut noter par exemple :

La surfusion : état anormal d'un liquide qui est à l'état liquide à une température où il devrait être à l'état solide. Cet état est appelé métastable. Le phénomène ne peut se produire qu'avec un liquide très pur : l'arrangement des atomes, très chaotique, et l'absence de germe cristallin pour déclencher le processus de cristallisation sont à l'origine du phénomène.

Voilà une représentation graphique de ce phénomène :



*A ce propos, on peut ajouter une petite histoire écrite par Malaparte (dans "Kaput"):
Dans les années 40, en hiver, une troupe de chevaux affolés par un incendie plonge dans les eaux de l'immense lac Ladoga, en Russie, près de la frontière Finnoise. Une fois entrés dans l'eau, celle-ci se congèle brutalement, emprisonnant les malheureux animaux...*

L'eau surfondue : eau qui est liquide à une T° inférieure à 0° . L'eau est donc dans l'état métastable de surfusion.

Soulignons que ces deux définitions seront importantes pour toute la suite de notre travail.

Un liquide qui est dans cet état de surfusion, a besoin d'un déclencheur pour changer d'état. Comme déclencheur, on peut citer par exemple, de la poussière, un cristal de sel, un changement de température, etc. (Cela explique pourquoi l'eau pure, dans un environnement pur et stable, peut ne congeler qu'à -41°)

Nous allons maintenant nous intéresser aux différents phénomènes permettant la création d'un cristal de neige.

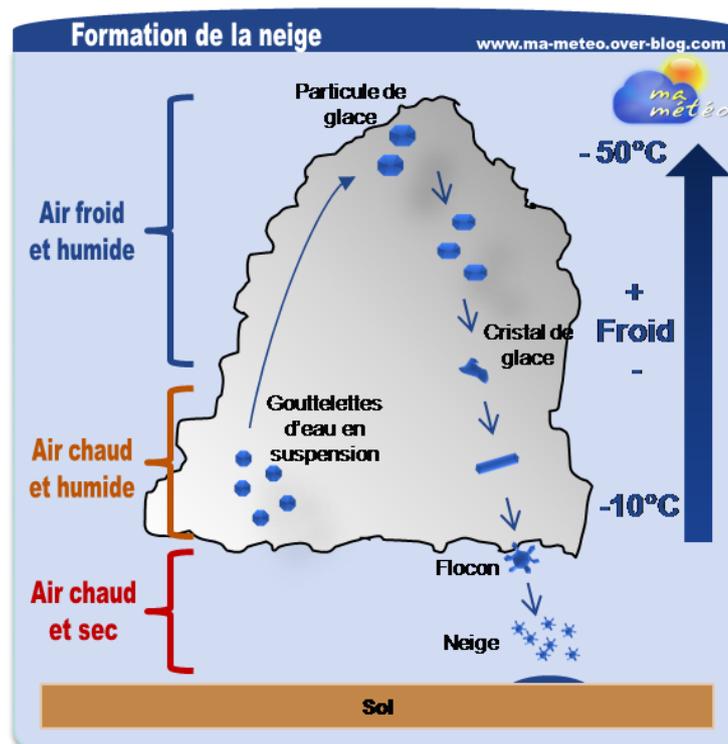
2) Formation des cristaux

Dans un premier temps, il y a le phénomène de naissance des cristaux de neige : la formation du « germe » ou « embryon ». L'eau surfondue est un état métastable fréquent en altitude. Un nuage peut donc être constitué de gouttelettes d'eau liquide (jusqu'à -15°) et de vapeur d'eau. La surfusion doit cesser pour permettre le passage d'un état à l'autre. Cela est rendu possible par l'action de « noyaux de congélation » ou de « condensation » qui perturbent cet état « métastable ». Ces noyaux peuvent être des poussières, particules en suspension, cendres, sables, sels métalliques, etc. Ils deviennent le plus efficace vers -12°C et leur diamètre moyen est de l'ordre de $0,1$ à $10\mu\text{m}$. Ils provoquent la congélation de gouttelettes et/ou de molécules de vapeur d'eau qui vont jouer le rôle de germes. Les germes vont alors grossir et/ou se multiplier pour former des cristaux. Soit les germes se regroupent pour former un cristal. Soit ils jouent eux-mêmes le rôle de germe ou noyau de condensation pour congeler une goutte d'eau et former un autre cristal.

3) Caractéristiques du cristal

Forme : tous les cristaux ont une structure hexagonale mais leur forme dépend de la température et de l'humidité. Il existe une extraordinaire diversité dans les formes des cristaux, nous le développerons dans la partie suivante.

Fragilité : Les cristaux sont très sensibles aux conditions météorologiques qu'ils traversent. On l'explique par la faiblesse des liens entre les molécules d'eau qui rend ces cristaux très sensibles à toute modification de leur environnement. On peut considérer le cristal de neige comme instable et il doit être en phase de cristallisation pour conserver sa forme, si bien que des recombinaisons se produisent dès que celle-ci s'interrompt. Cette vive sensibilité rend difficile l'observation microscopique des cristaux sans précautions particulières.



Cycle de vie d'un cristal

4) Différents types de neige

En fonction de la quantité d'eau qu'elle contient, appelée Teneur en Eau Liquide (TEL), on peut distinguer différents types de neige. La TEL dépend des conditions météorologiques, de l'humidité, et de la saison. On peut distinguer 3 types de neige en fonction de la quantité d'eau qu'elle contient :

- La Neige sèche ($0\% < TEL < 2\%$) tombe par temps froid (moins de -5°C). Elle contient peu d'eau. Il s'agit par exemple de la neige « poudreuse » qui est en poudre, qui n'a pas été

pressée ou foulée. Ou encore de la neige « de sable » qui tombe lorsque la température est très basse (inférieure à 25°C) et qui a l'apparence du sable.

- **La Neige humide (2% < TEL < 4%)** contient plus d'eau que de la neige sèche et tombe entre 0°C et -5°C. Il s'agit par exemple de la neige « collante » qui est une neige récente et mouillée.

- **La Neige mouillée (4% < TEL)** contient beaucoup d'eau et de ce fait est très lourde. Elle tombe entre 0°C et 1°C.

En regardant un volume de neige, on peut résumer la part de pluie qu'elle contient :

Température au sol (en °C)	-1	0	1	2	3	4
% de neige	98	93	50	30	8	1
% de pluie + neige	1	4	23	15	7	0
% de pluie	1	3	27	55	85	99

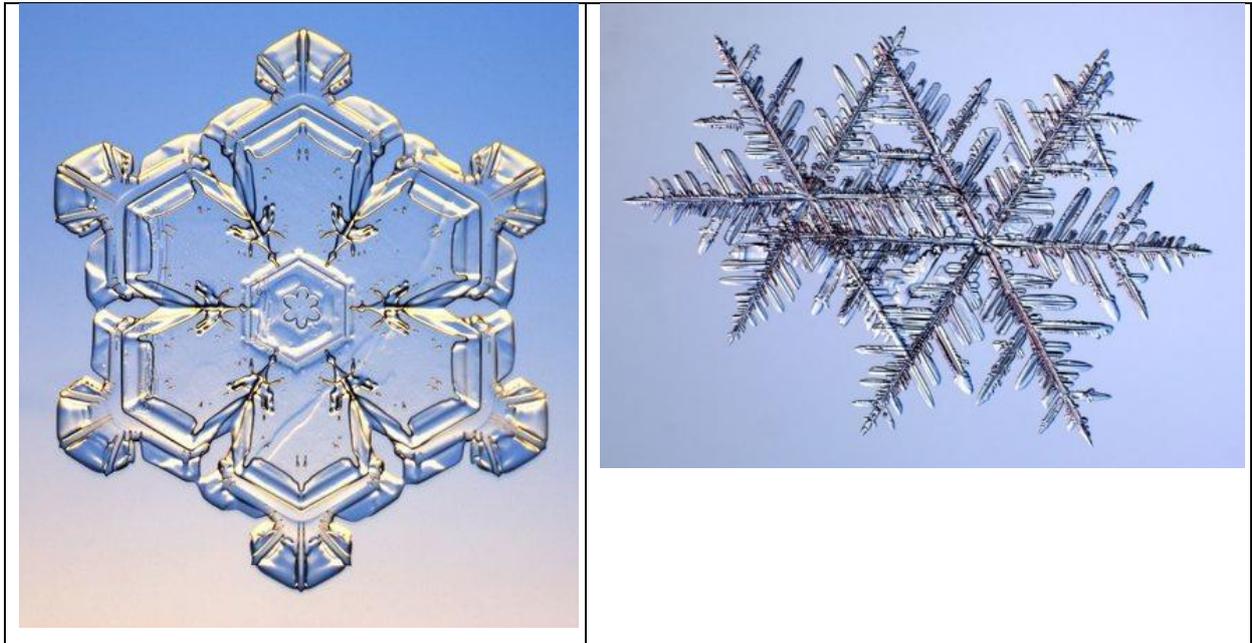
Remarque pédagogique : Ce tableau peut être utilisé en 6^{ème} ou 5^{ème} sur les thèmes ou compétences suivantes : lecture, compréhension et représentation de données, pourcentages.

II Structure hexagonale du cristal de neige

La forme des cristaux de neige a depuis longtemps stimulé les hommes et les travaux de recherches sont encore d'actualité.

Au XVI^e siècle J. Kepler écrit un traité sur l'étude des cristaux de neige et notamment leur configuration hexagonale ; c'est la une des premières approches scientifiques en la matière. Puis René Descartes est le premier à décrire plusieurs formes de cristaux de neige à l'œil nu. Au début du XIX^e siècle, l'abbé René Just Haüy (1742-1822), qui fonde la cristallographie, en remarquant la géométrie hexagonale des cristaux pressentait la forme de la molécule d'eau. Prenant comme point de départ la congélation lente de l'eau, il nota que celle-ci se réalise par production d'aiguilles se réunissant avec un angle de 120° ou 60°. Cette disposition présente

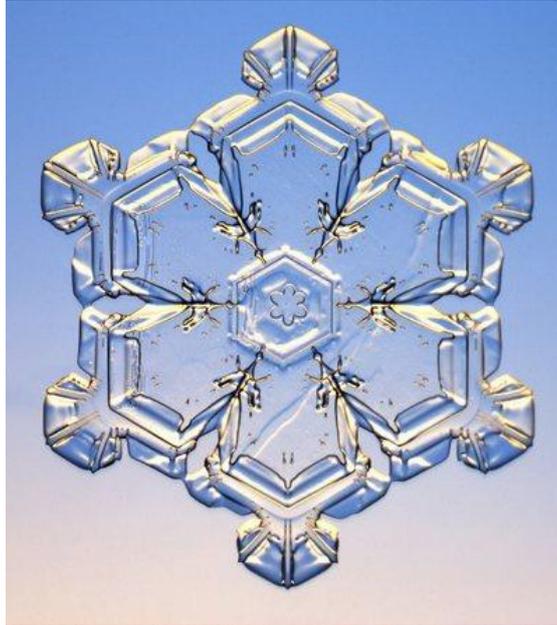
comme caractère intéressant une symétrie hexagonale. Ces études ont été rendues possibles grâce à l'invention récente du microscope.



Les chercheurs ont ensuite classé les cristaux de neige surtout en fonction de leurs formes. Le Japonais Ukichira Nakaya est le premier à étudier systématiquement les cristaux apportant beaucoup à la compréhension de leurs possibles formes.

Ainsi nous savons aujourd'hui que cette morphologie hexagonale du cristal de neige est due à l'assemblage des molécules d'eau à l'intérieur de ce dit cristal. La connaissance précise des propriétés de l'eau permet donc l'étude des cristaux. Cependant bien que la molécule d'eau soit en partie l'origine du cristal sa forme externe se met en place en fonction de conditions différentes suivant chaque cristal de sorte qu'aucun représentant ne soit semblable. Ces différentes interactions peuvent être le **vent, la température, le champ électrique ou la pression, l'état de la neige.**

La présence d'impuretés (ou poussières) est essentielle à la formation des cristaux de glace. Dans le cas de la glace il se forme autour des germes des cristaux de la forme de prismes hexagonaux. Les cristaux les plus compliqués proviennent de l'évolution des cristaux simples ce qui explique la présence constante d'une symétrie hexagonale.



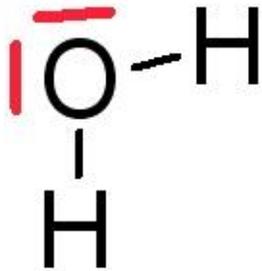
Le prisme hexagonal est la forme la plus simple d'un cristal car elle minimise l'énergie.

1) Forme de base

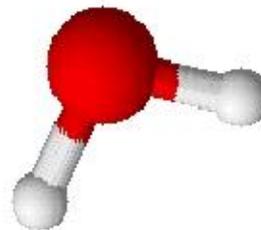
La forme hexagonale du cristal reflète la disposition des molécules d'eau dans la glace. Cette forme est déterminée par des conditions de formation et de croissance spécifique à chaque cristal.

Pour pouvoir l'expliquer, nous allons nous intéresser à l'agencement des molécules d'eau.

La molécule d'eau : un tétraèdre moléculaire.



Représentation de Lewis

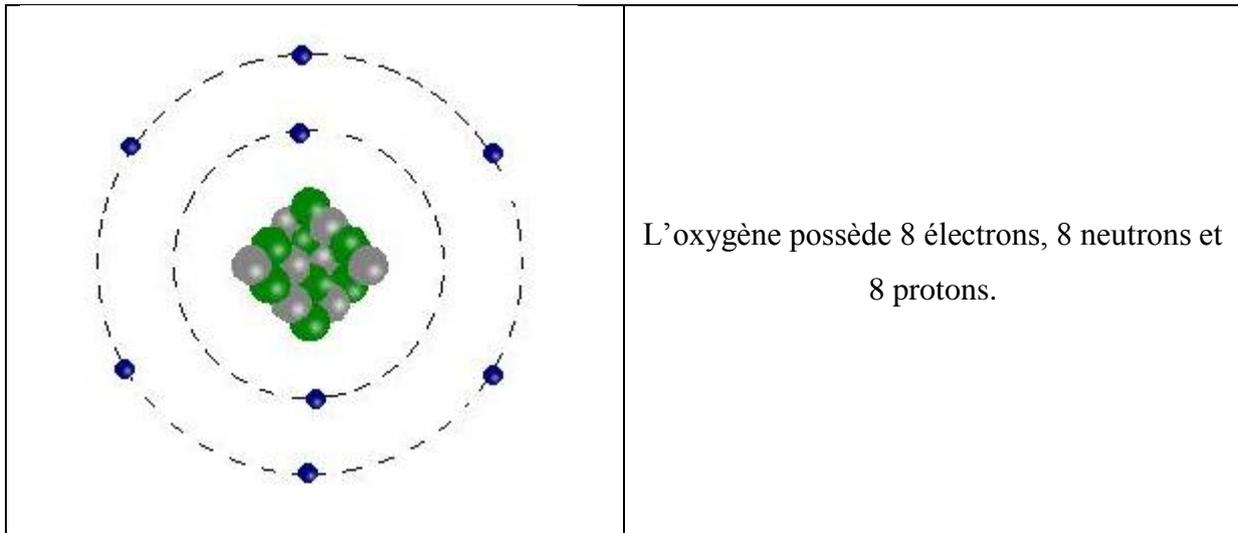


Modèle 3d

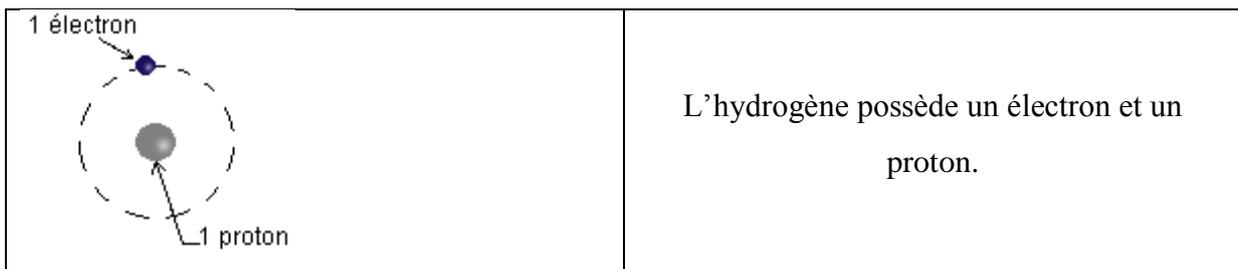
L'eau se présente sous trois états : liquide, solide et gazeux.

La configuration de la molécule d'eau isolée, à l'état gazeux, bien connue, nous est utile à la compréhension de certains phénomènes. Observons de plus près l'agencement d'une molécule d'eau.

Concernant l'oxygène, il possède 8 électrons dont deux sur la première couche et 6 sur la deuxième, il manque donc 2 électrons pour que la deuxième couche soit complète.



L'hydrogène est l'élément chimique le plus simple ; il possède un proton et un électron. L'hydrogène est ainsi le plus léger atome existant. Comme il ne possède qu'un électron, il ne peut former qu'une liaison covalente.

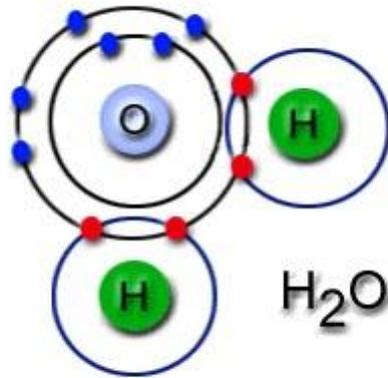


Des liaisons vont se créer entre l'oxygène et l'hydrogène car ils vont respecter la règle de l'octet. Les atomes ayant plus d'une couche ont tendance à réagir avec d'autres atomes pour combler leur couche externe à 8 électrons ce qui leur permet d'atteindre un état stable.

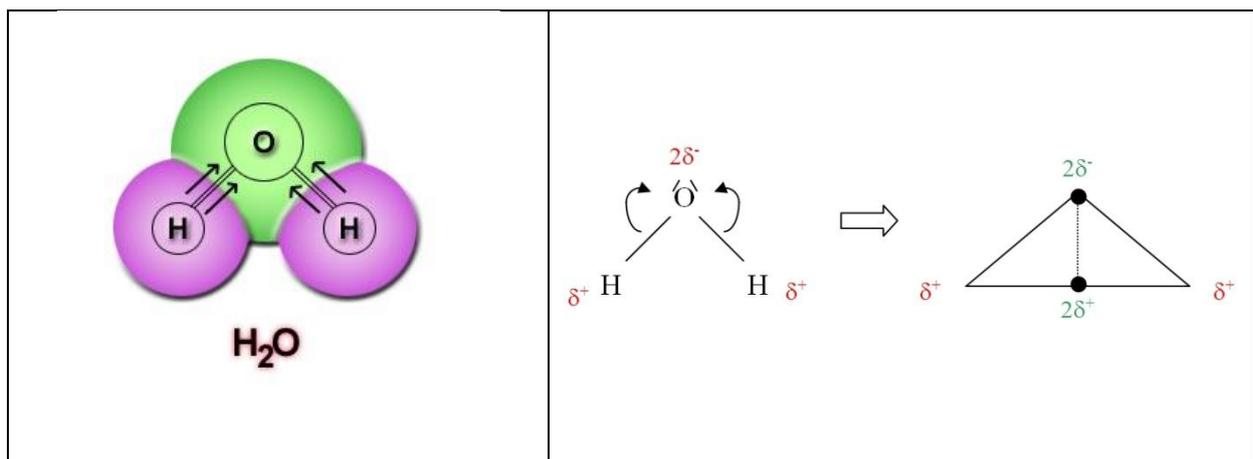
On peut remarquer que l'atome d'hydrogène a une seule couche électronique ($n=1$) qui porte un électron. Parfois cet atome peut perdre cet électron et il ne lui restera qu'un proton. Il devient un proton (H^+) car l'atome d'hydrogène n'a pas de neutron.

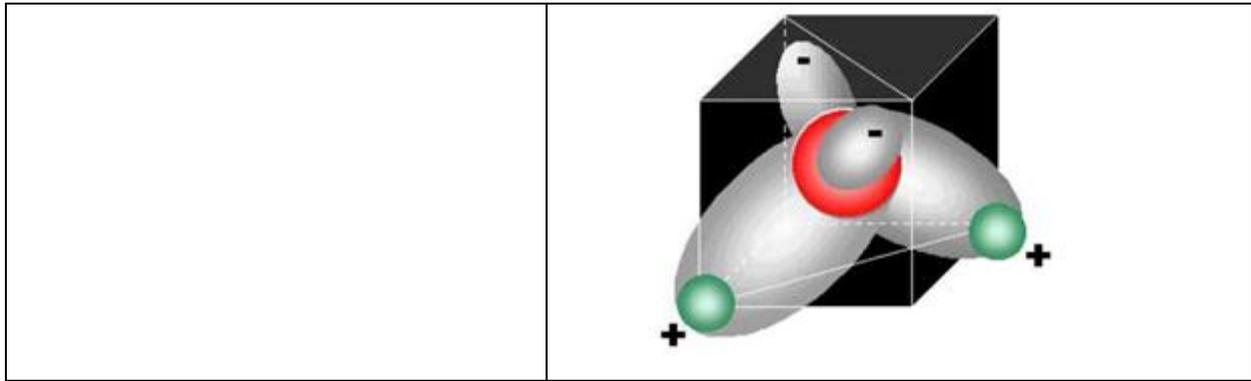
L'oxygène et l'hydrogène vont se lier par un type de liaison appelé covalente : il y a liaison covalente quand deux atomes partagent certain(s) de leurs électrons. Ils mettent en commun leurs électrons pour compléter leurs couches externes respectives à 8, et acquérir une stabilité. Les électrons libres de la couche externe d'un atome établissent une liaison covalente avec

ceux des électrons libres d'un autre atome. C'est ce qu'il se passe pour la molécule H_2O . L'oxygène partage une paire d'électrons avec chaque atome d'hydrogène et de ce fait établit une liaison covalente avec chacun des 2 d'hydrogènes. Ce sont des liaisons très stables (difficiles à rompre). L'angle formé par deux liaisons covalentes vaut environ $104,5^\circ$.

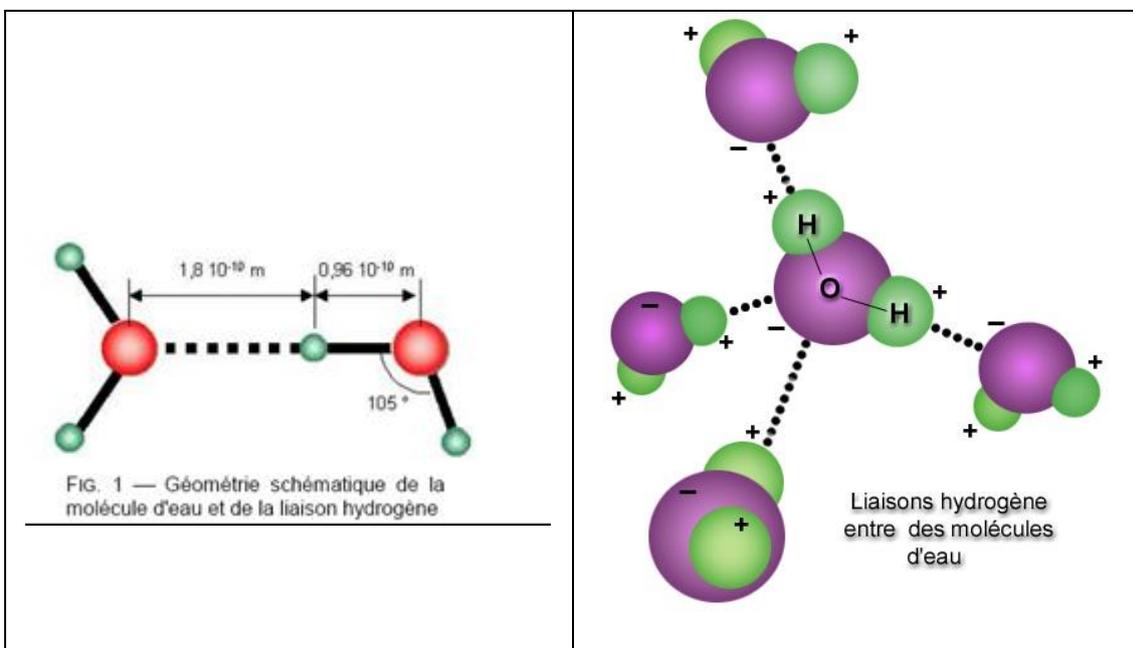


Cette molécule d'eau est extrêmement dipolaire puisque l'oxygène a une électronégativité plus forte que l'hydrogène, l'atome d'oxygène a une charge partielle négative δ^- , alors que les atomes d'hydrogène ont une charge partielle positive δ^+ . Une molécule avec une telle différence de charge est appelée un dipôle (molécule polaire). Les charges positives se situent sur les sommets hydrogène et les charges positives sont quant à elles portées par les sommets opposés. La molécule d'eau se représente comme un tétraèdre (figure ci-dessous) dont l'atome d'oxygène occupe presque le centre (s'il occupait le centre, l'angle entre les deux liaisons O-H serait de $109,5^\circ$). Cette disposition est idéale à l'établissement de liaisons hydrogène entre les molécules d'eau dans l'état solide et liquide, car les liaisons hydrogène n'existent que dans ces deux milieux.



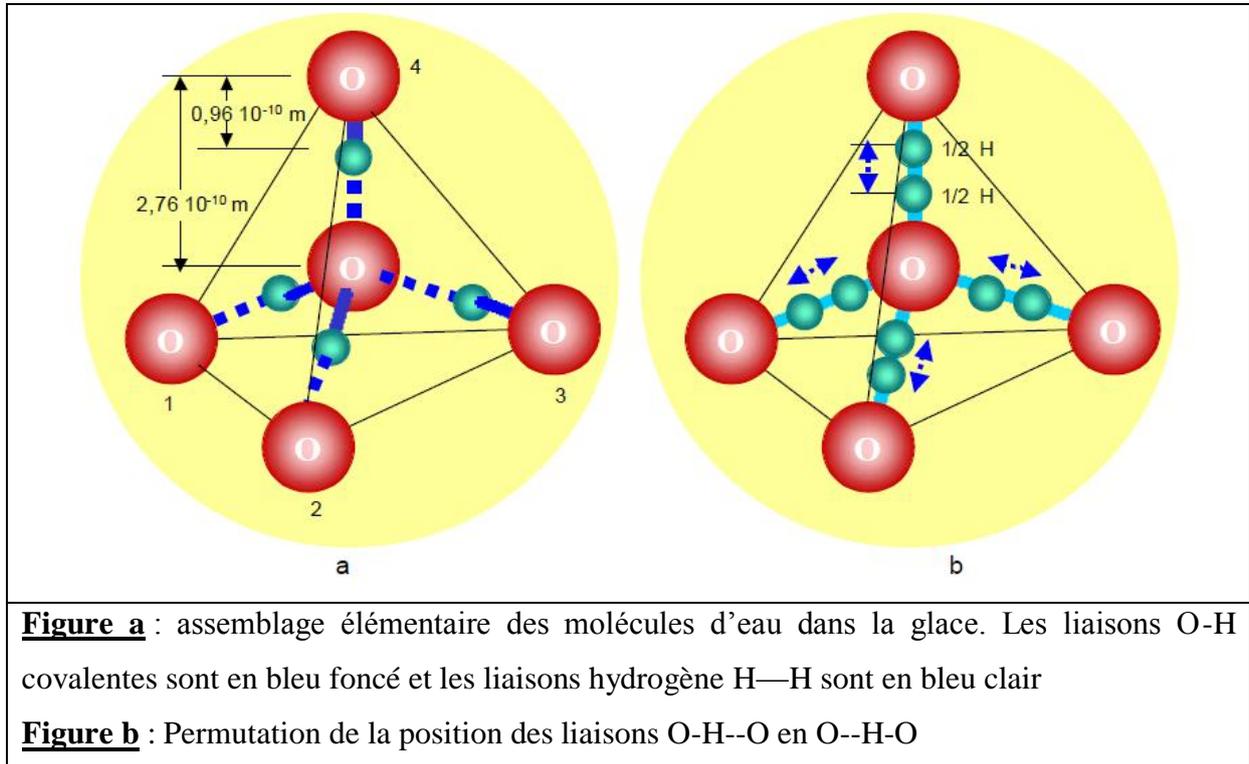


Les deux paires d'électrons restantes à l'atome d'oxygène dites "libres" (doublet non liant) sont très importantes car elles permettent la formation des fameuses liaisons hydrogène. La liaison hydrogène est un mode de liaison qui survient quand un hydrogène est partagé entre 2 atomes électronégatifs généralement. Ainsi chaque molécule d'eau a le potentiel de se lier simultanément par pont hydrogène à 4 autres molécules d'eau. Il faut préciser que cette liaison est faible (énergie de liaison= 4 à 5 Kcal/mol contre 50 à 100 Kcal/mol pour une liaison covalente).



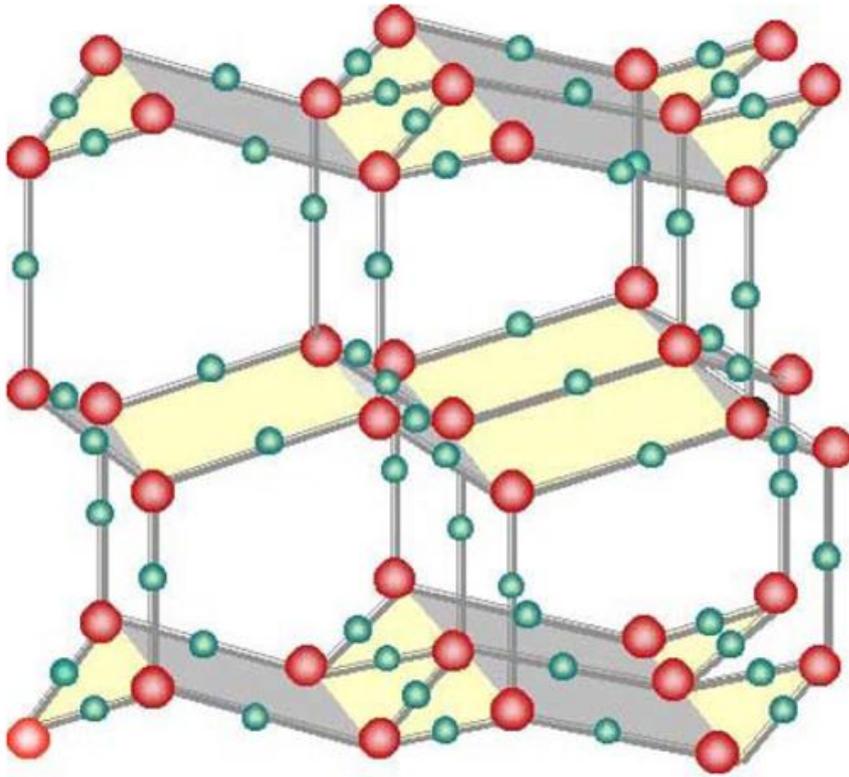
Ainsi chaque atome d'oxygène sera aussi au centre d'un tétraèdre dont les sommets sont occupés par quatre autres atomes d'oxygène. Il offre ses deux atomes d'hydrogène à deux de ses voisins (par exemple les atomes 1 et 2 de la figure a) et capte deux atomes d'hydrogène à ses deux autres voisins (par exemple les atomes 3 et 4) de manière à réaliser un pont O-H-- H de longueurs identiques. Chaque oxygène devrait avoir autour de lui deux liaisons covalentes avec deux hydrogènes mais il y a un échange permanent entre les positions respectives des

liaisons covalentes et des ponts hydrogène (il y a 6 configurations possibles). Tout se passe comme si chaque atome d'hydrogène occupait par sauts successifs deux positions privilégiées (figure b)



Ensuite ces tétraèdres s'assemblent de différentes manières en feuillets horizontaux constitués d'un pavage d'hexagones gauchis dont les sommets sont occupés par les atomes d'oxygène et les milieux des côtés par des atomes d'hydrogène. Chaque feuillet est l'image dans un miroir du feuillet adjacent. Dans le « plan » du feuillet, chaque atome d'oxygène est relié à trois atomes d'hydrogène. La 4^{ème} liaison est réalisée selon la verticale, alternativement vers le feuillet supérieur et vers le feuillet intérieur.

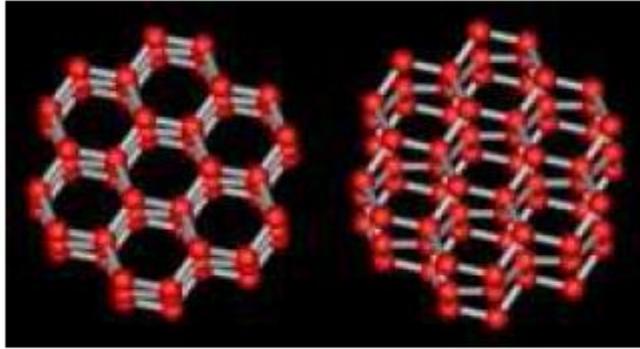
2) Structure de la glace



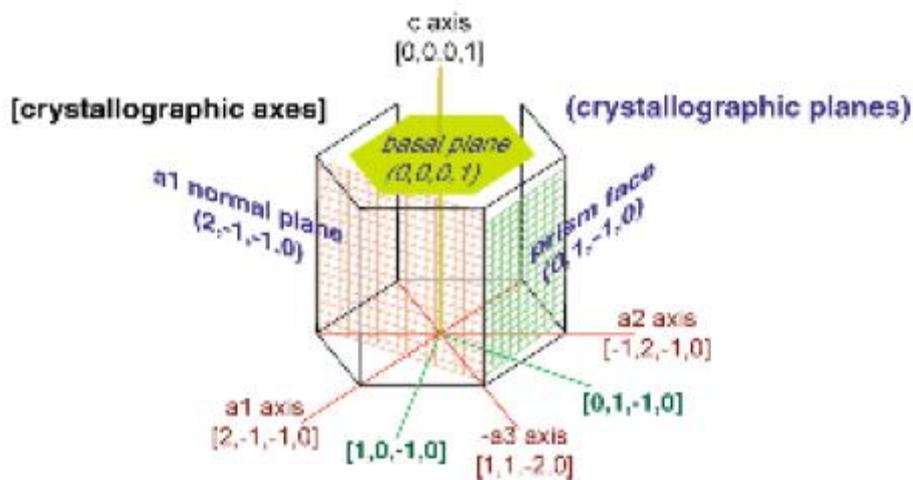
Développement du cristal de glace en cristal de neige.

Mais qu'est exactement un cristal de neige?

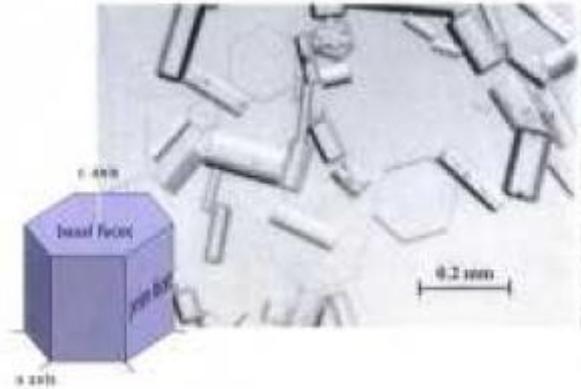
On a vu qu'un cristal de glace est un matériau dans lequel les molécules internes sont placées de façon spécifique, que l'on appelle réseau cristallin. Les molécules d'eau (H₂O) sous forme de glace forment des mailles hexagonales (Figure ci-dessous, les boules rouges représentant les atomes d'oxygène). En effet cette forme géométrique permet d'une part de minimiser l'énergie nécessaire à la formation des liaisons intermoléculaires et d'autre part de rendre difficiles à briser ces liaisons.



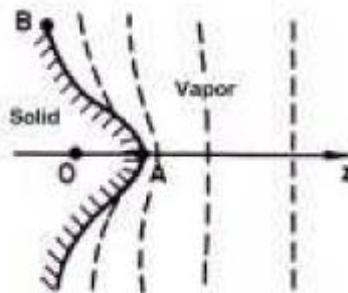
C'est ce réseau cristallin qui va déterminer la symétrie des cristaux de neige qui sont 10 millions de fois plus grands que les cristaux de glace. En effet, c'est à partir d'un cristal de glace basique (prisme hexagonal, ci-dessous) que le cristal de neige va se former.



La variété des cristaux de neige que l'on peut observer est alors due au fait que toutes les faces du prisme hexagonal ne vont pas forcément se développer à la même vitesse. Ainsi, les faces les plus rugueuses vont être des faces préférentielles de développement, comparées aux faces lisses. Pour que les cristaux de neige possèdent une morphologie identique à celle des cristaux de glace, il faut par exemple aller au Pôle Sud (Figure ci-dessous) où la cristallisation est très lente, ce qui permet à toutes les faces de se développer entièrement.



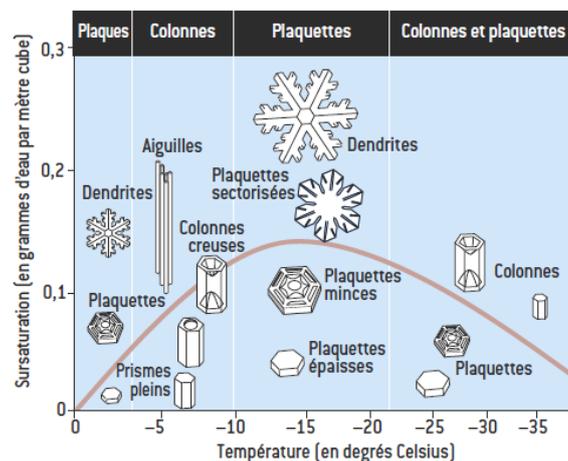
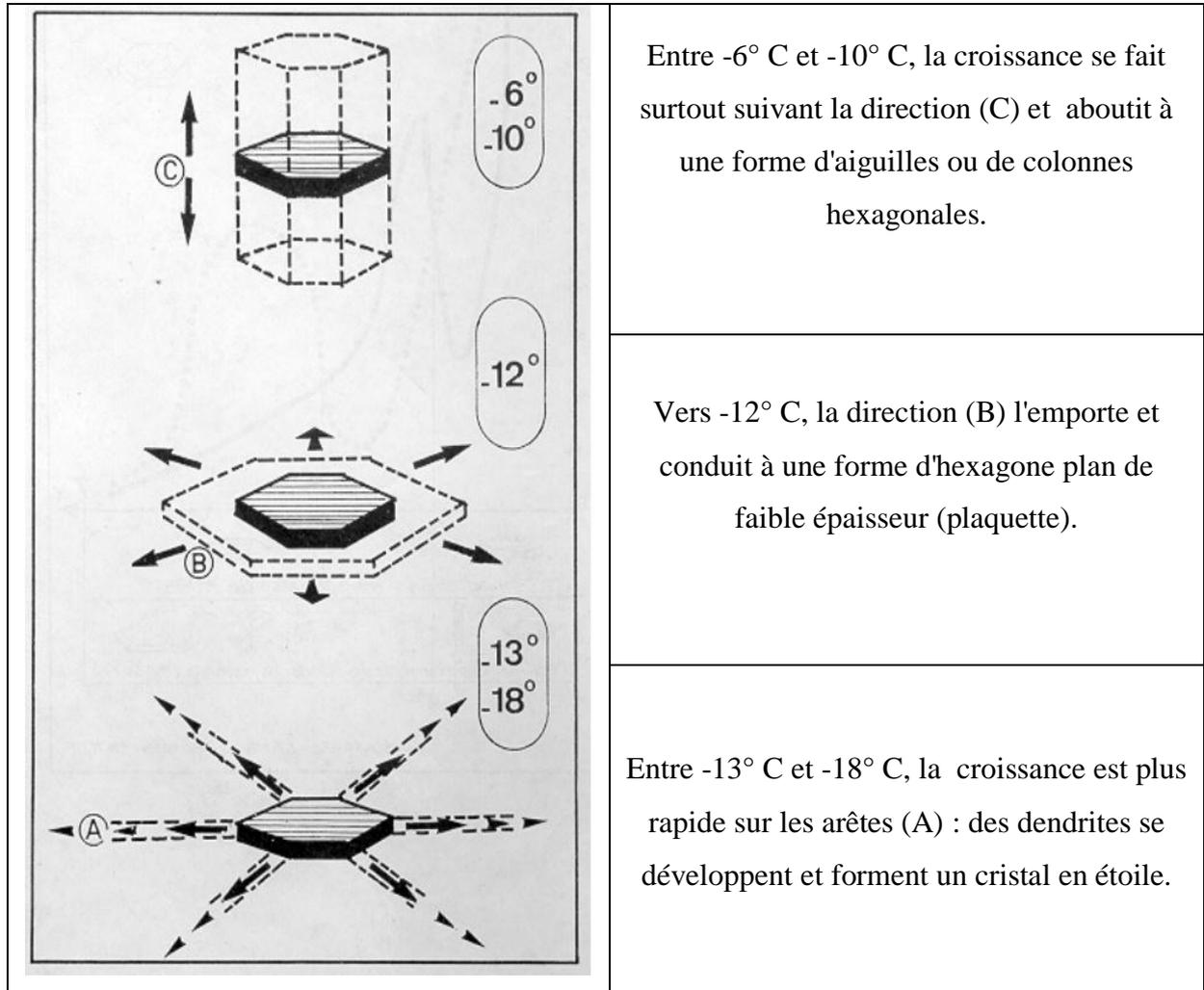
Dans les cas classiques, les coins du prisme de glace sont des zones de croissance privilégiées. Cependant, ce phénomène n'est pas le seul intervenant dans la croissance et la cristallisation de la neige. En effet, un autre paramètre important est le milieu dans lequel est cristallisée la neige : les nuages. Il faut considérer que les molécules d'eau qui vont se condenser sur un cristal de neige en croissance vont avoir à traverser l'air. Plus la distance entre la molécule d'eau et le cristal est grande, plus il faut du temps à la molécule d'eau pour atteindre le cristal. Considérons alors la surface plane d'un cristal de neige en croissance. Si une petite colline vient à se former sur cette surface par choc avec une molécule d'eau, la surface du cristal présente alors une petite proéminence (Figure ci-dessous).



Cela signifie alors que les molécules d'eau traversant l'air pour se condenser auront un peu moins de chemin à parcourir pour atteindre la surface du cristal au niveau de la proéminence que partout ailleurs sur cette surface. Il s'en suivra alors que cette partie de la surface va croître d'autant plus rapidement qu'elle sera grande. C'est ce qu'on appelle l'instabilité de ramification qui va donner lieu à une complexité importante de forme (et en particulier à la formation de dendrites).

Enfin, les derniers paramètres influant sur cette cristallisation sont l'humidité (la quantité d'eau disponible pour la cristallisation) et la température (figure ci-dessous). L'explication

précise de ce point reste cependant encore mal définie à l'heure actuelle et fait l'objet de recherche, on est donc dans les limites du modèle de morphologie des structures, les recherches récentes tendant à montrer que d'autres facteurs interviennent.



3) Les systèmes de classification des cristaux

A l'heure actuelle, il existe 3 types de classification des cristaux de neige.

La première est le Système de Classification International (Figure 1). Il fut mis en place en 1954 par la Commission Internationale de la Neige et de la Glace. Il comportait initialement 7 catégories : les cristaux plats, les cristaux étoilés, les colonnes, les aiguilles, les dendrites, les colonnes coiffées et les formes irrégulières. Cependant, 3 autres formes y ont été ajoutées : les "graupel", les pastilles de glace et la grêle.

Le deuxième système de classification existant est celui mis en place par U. Nakaya (figure 2). Dans ce système, les cristaux sont répartis en 41 types morphologiques différents. Enfin, le troisième système de classification est celui de Magono et Lee (figure 3). Mise en place en 1966, cette classification extrêmement complexe est une extension de celle de Nakaya et elle répertorie 80 types de cristaux de neige (Figure 2).

Figure 1

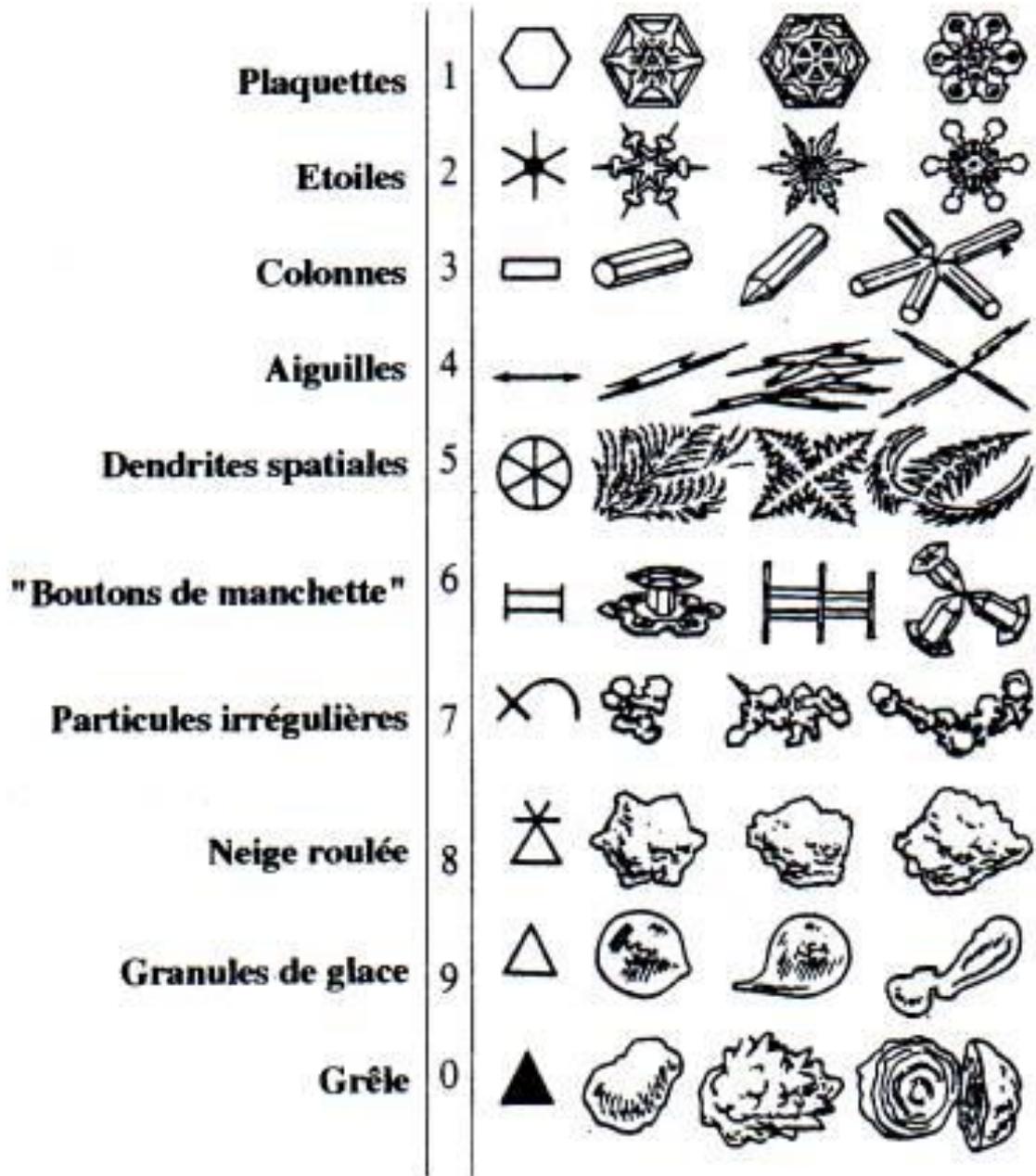


Figure 2 Nakaya

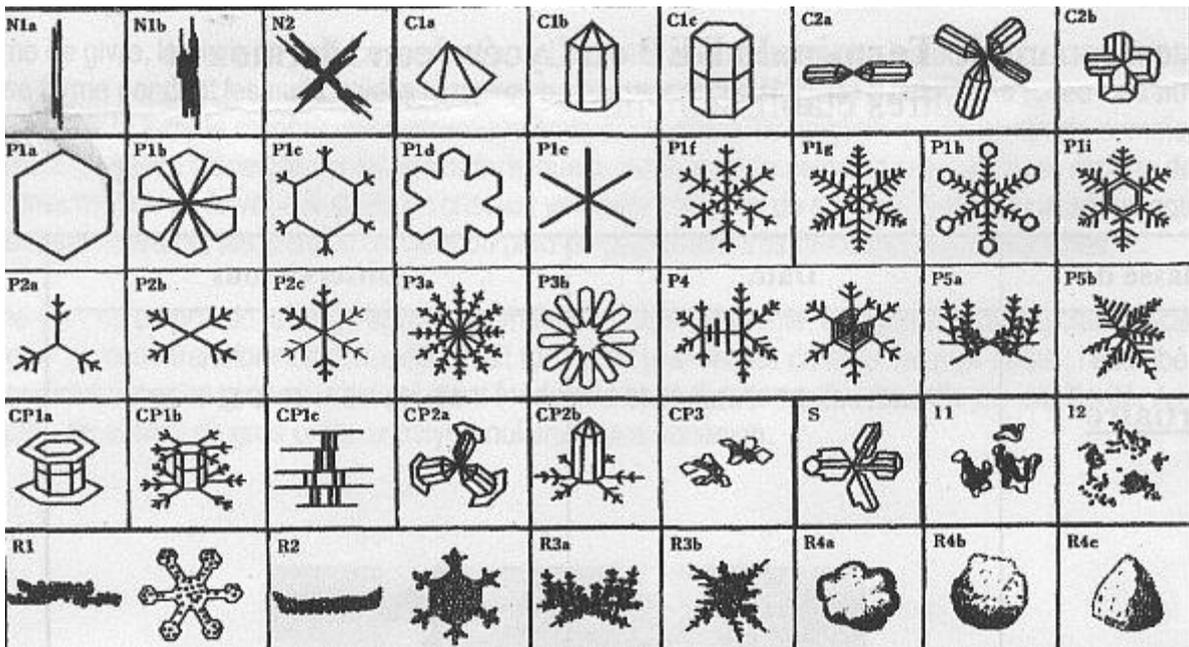


Figure 3

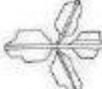
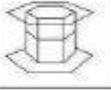
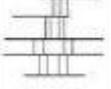
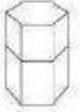
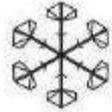
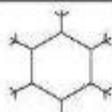
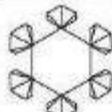
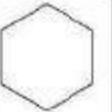
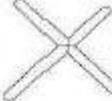
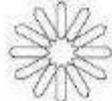
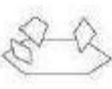
	P6b Plate with spatial dendrites		CP3d Plate with scrolls at ends		R3c Groupel-like snow with nonrimed extensions
	P6c Stellar crystal with spatial dendrites		S1 Side planes		R4a Hexagonal groupel
	P6d Stellar crystal with spatial dendrites		S2 Scalelike side planes		R4b Lump groupel
	P7a Radiating assemblage of plates		S3 Combination of side planes, bullets, and columns		R4c Conelike groupel
	P7b Radiating assemblage of dendrites		R1a Rimed needle crystal		I1 Ice particle
	CP1a Column with plates		R1b Rimed columnar crystal		I2 Rimed particle
	CP1b Column with dendrites		R1c Rimed plate or sector		I3a Broken branch
	CP1c Multiple capped column		R1d Rimed stellar crystal		I3b Rimed broken branch
	CP2a Bullet with plates		R2a Densely rimed plate or sector		I4 Miscellaneous
	CP2b Bullet with dendrites		R2b Densely rimed stellar crystal		G1 Minute column
	CP3a Stellar crystal with needles		R2c Stellar crystal with rimed spatial branches		G2 Germ of skeletal form
	CP3b Stellar crystal with columns		R3a Groupel-like snow of hexagonal types		G3 Minute hexagonal plate
	CP3c Stellar crystal with scrolls at ends		R3b Groupel-like snow of lump type		G4 Minute stellar crystal
					G5 Minute assemblage of plates
					G6 Irregular germ

Figure 3 suite

	N1a Elementary needle		C1f Hollow column		P2b Stellar crystal with sectorlike ends
	N1b Bundle of elementary needles		C1g Solid thick plate		P2c Dendritic crystal with plates of ends
	N1c Elementary sheath		C1h Thick plate of skeleton form		P2d Dendritic crystal with sectorlike ends
	N1d Bundle of elementary sheaths		C1i Scroll		P2e Plate with simple extensions
	N1e Long solid needle		C2a Combination of bullets		P2f Plate with sectorlike extensions
	N2a Combination of needles		C2b Combination of columns		P2g Plate with dendritic extensions
	N2b Combination of sheaths		P1a Hexagon plate		P3a Two branched crystal
	N2c Combination of long solid columns		P1b Crystal with sectorlike branches		P3b Three-branched crystal
	C1a Pyramid		P1c Crystal with broad branches		P3c Four-branched crystal
	C1b Cup		P1d Stellar crystal		P4a Broad branch crystal with 12 branches
	C1c Solid bullet		P1e Ordinary dendritic crystal		P4b Dendritic crystal with 12 branches
	C1d Hollow bullet		P1f Fernlike crystal		P5 Malformed crystal
	C1e Solid column		P2a Stellar crystal with plates at ends		P6a Plate with spatial plates

On peut donc s'intéresser à une modélisation géométrique de certains cristaux de neige. Le problème consiste à s'approcher le plus possible de la forme d'un cristal donné. Dans un premier temps on peut s'appuyer sur la classification des différentes morphologies des cristaux de neige et choisir un cristal « plaisant ». Par exemple le cristal "dendrite étoilée" est un cristal de neige en "plaquette" qui a des branches avec de nombreuses ramifications. C'est un assez grand cristal, généralement de 2 à 4 mm de diamètre, qui peut facilement être observés à l'œil nu. Ce sont les plus populaires des cristaux de neige (peut-être parce qu'ils sont constructibles), comme le montre leur choix fréquent pour les décorations de Noël. Un modèle connu est celui du flocon de Von Koch explicité dans l'exercice suivant. Ce modèle a certaines limites puisque tous les cristaux de neige sont uniques et jamais uniformes comme un modèle géométrique précis.

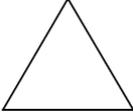
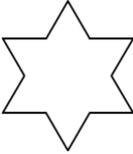
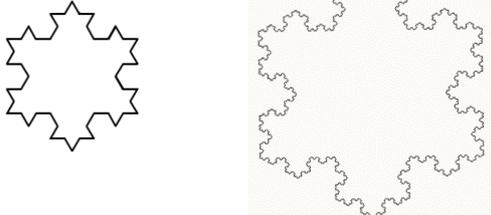


Le cristal de neige : une fractale ?

Le « flocon de neige » ou flocon de Von Koch est une forme intéressante présentant un principe de génération caractéristique appelé fractale. Le flocon de neige s'obtient à partir d'une forme basique simple qui est un triangle équilatéral. La croissance du flocon peut donc s'expliquer ainsi : sur chaque côté les segments sont partagés en trois parties égales de même longueur. Sur le segment central d'un côté est construit vers l'extérieur un triangle équilatéral puis le segment central est supprimé. On obtient alors un nouveau polygone. Ce phénomène

se reproduit ensuite sur le nouveau triangle et sur tous les autres segments centraux, aboutissant ainsi à une forme proche de celle du cristal de neige.

4) Exercice : le flocon de Von Koch.

	<p>Le point de départ est un triangle équilatéral de côté 1</p>
	<p>1) Diviser Chaque côté en trois parties égales</p>
	<p>2) Construire un triangle équilatéral " sur le segment du milieu "</p>
	<p>3) On réitère le procédé jusqu'à l'obtention d'un flocon (arrêt du procédé à une étape n)</p>

Notations

On note s_n le nombre de segments composant la ligne brisée à la $n^{\text{ème}}$ étape de construction (on a donc $s_0=3$). On note l_n la longueur d'un segment (on a donc $l_0=1$)

Partie A

1. Exprimer s_{n+1} en fonction de s_n . Quelle est la nature de la suite (s_n) ? Exprimer s_n en fonction de n .
2. Exprimer l_{n+1} en fonction de l_n . Quelle est la nature de la suite (l_n) ? Exprimer l_n en fonction de n .
3. Exprimer le périmètre p_n de la figure ainsi construite à la $n^{\text{ème}}$ étape. Quelle est la limite de la suite (p_n) ?

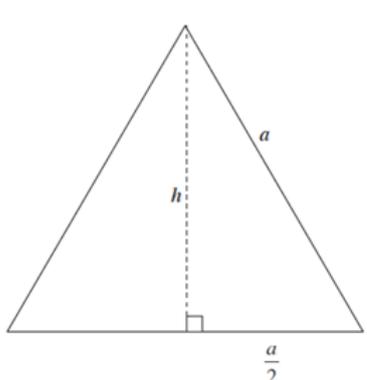
Partie B

1. Retrouver, grâce au théorème de Pythagore, la formule permettant de calculer l'aire d'un triangle équilatéral de côté l .
2. On note a_n l'aire de chaque triangle rajouté à la $n^{\text{ème}}$ étape (a_0 représente donc l'aire du triangle équilatéral initial). Exprimer a_n en fonction de n .
3. On note A_n l'aire totale de la figure ainsi construite à la $n^{\text{ème}}$ étape. Exprimer A_{n+1} en fonction de A_n . En déduire une expression de A_n en fonction de n . Quelle est la limite de la suite (A_n) ?
4. Quelle conclusion vous inspire cet exercice ?

Corrigé : Partie A :

1. $s_{n+1} = 4s_n$ car à partir d'un segment, on en a construit 4 à l'étape suivante.
Donc s_n est une suite géométrique de raison 4 et de premier terme $s_0 = 3$.
Ainsi $s_n = s_0 \times 4^n = 3 \times 4^n$.
2. $l_{n+1} = \frac{1}{3} \times l_n$ donc l_n est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $l_0 = 1$.
Ainsi $l_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$
3. $p_n = l_n \times s_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \times 3 \times 4^n = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^n$
Comme $\frac{4}{3} > 1$ alors la suite p_n diverge

Partie B : 1. Rappel : l'aire d'un triangle équilatéral de côté a .

	<p>➤ Les médianes, hauteurs, médiatrices et bissectrices sont confondues.</p> <p>➤ D'après le théorème de Pythagore on a :</p> $h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$ $h^2 + \frac{a^2}{4} = a^2$ $h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$ <p>Donc $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$</p> <p>L'aire du triangle équilatéral est donc :</p> $\text{Aire} = \frac{1}{2} \times a \times \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
---	--

2. L'aire d'un triangle équilatéral de côté l est donc $l^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$

$$\text{donc } a_n = l_n^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \left(\left(\frac{1}{3} \right)^n \right)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \left(\frac{1}{9} \right)^n \times \frac{\sqrt{3}}{4}$$

3. A la $n+1$ ème étape, on rajoute donc un nombre de triangles égal à S_n , chacun de ses triangles ayant une aire égale à $a_n = \left(\frac{1}{9} \right)^n \times \frac{\sqrt{3}}{4}$

On en déduit donc que

$$A_{n+1} = A_n + s_n a_{n+1} = A_n + 3 \times 4^n \times \left(\frac{1}{9} \right)^{n+1} \times \frac{\sqrt{3}}{4} = A_n + \frac{3}{9} \times \left(\frac{4}{9} \right)^n \times \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Donc } A_{n+1} = A_n + \left(\frac{4}{9} \right)^n \times \frac{\sqrt{3}}{12}. \text{ D'où :}$$

$$\left. \begin{array}{l} A_n = \cancel{A_{n-1}} + \left(\frac{4}{9} \right)^{n-1} \times \frac{\sqrt{3}}{12} \\ \cancel{A_{n-1}} = \cancel{A_{n-2}} + \left(\frac{4}{9} \right)^{n-2} \times \frac{\sqrt{3}}{12} \\ \dots\dots\dots \\ \cancel{A_2} = \cancel{A_1} + \frac{4}{9} \times \frac{\sqrt{3}}{12} \\ \cancel{A_1} = A_0 + \frac{3\sqrt{3}}{12} \end{array} \right\} n \text{ lignes}$$

Additionnons les n lignes en simplifiant

$$A_n = A_0 + \frac{3\sqrt{3}}{12} \times \left(1 + \left(\frac{4}{9} \right)^1 + \left(\frac{4}{9} \right)^2 + \dots + \left(\frac{4}{9} \right)^{n-2} + \left(\frac{4}{9} \right)^{n-1} \right)$$

$$A_n = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{12} \times \frac{1 - \left(\frac{4}{9} \right)^n}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{12} \times \frac{9}{5} \times \left(1 - \left(\frac{4}{9} \right)^n \right)$$

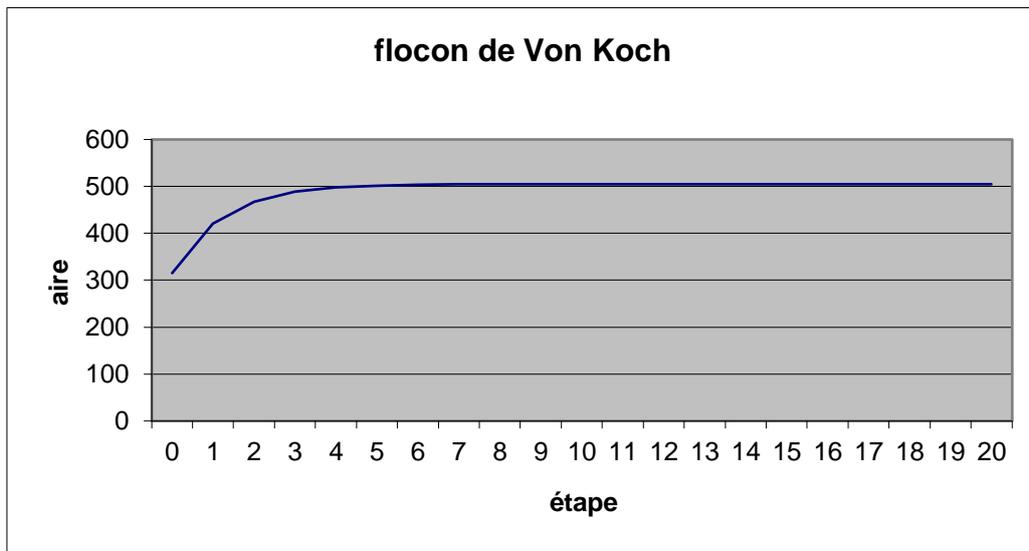
$$A_n = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{20} \times \left(1 - \left(\frac{4}{9} \right)^n \right)$$

$$\text{Comme } \frac{4}{9} < 1 \text{ alors } \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{20} = \frac{8\sqrt{3}}{20} = \frac{2\sqrt{3}}{5}$$

4. On en déduit que le périmètre tend vers l'infini alors que l'aire est finie.

Vérification à l'aide d'un tableur :

étape	nombre de côtés	longueur d'un côté	Nombre de "bourgeons"	Aire d'un "bourgeon"	Aire totale
0	3	27	-	-	315,67
1	12	9	3	35,0740288533	420,89
2	48	3	12	3,8971143170	467,65
3	192	1	48	0,4330127019	488,44
4	768	0,3333333333	192	0,0481125224	497,68
5	3072	0,1111111111	768	0,0053458358	501,78
6	12288	0,0370370370	3072	0,0005939818	503,61
7	49152	0,0123456790	12288	0,0000659980	504,42
8	196608	0,0041152263	49152	0,0000073331	504,78
9	786432	0,0013717421	196608	0,0000008148	504,94
10	3145728	0,0004572474	786432	0,0000000905	505,01
11	12582912	0,0001524158	3145728	0,0000000101	505,04
12	50331648	0,0000508053	12582912	0,0000000011	505,05
13	201326592	0,0000169351	50331648	0,0000000001	505,06
14	805306368	0,0000056450	201326592	0,0000000000	505,06
15	3221225472	0,0000018817	805306368	0,0000000000	505,07
16	12884901888	0,0000006272	3221225472	0,0000000000	505,07
17	51539607552	0,0000002091	12884901888	0,0000000000	505,07
18	206158430208	0,0000000697	51539607552	0,0000000000	505,07
19	824633720832	0,0000000232	206158430208	0,0000000000	505,07
20	3298534883328	0,0000000077	824633720832	0,0000000000	505,07



III Masse volumique de la neige

1) Définition

Une caractéristique importante de la neige est sa masse volumique. Elle est égale au rapport entre la masse d'un certain volume de neige et ce même volume. Elle s'exprime en kg/m^3 . On emploie aussi parfois improprement le terme de densité. Pour rappel, la densité d'un corps est le rapport de sa masse volumique à la masse volumique d'un corps pris comme référence (l'eau pour les liquides), c'est donc une grandeur sans dimension.

$$\text{Masse volumique} = \frac{\text{Masse d'un volume de neige (kg)}}{\text{Volume de neige (m}^3\text{)}},$$

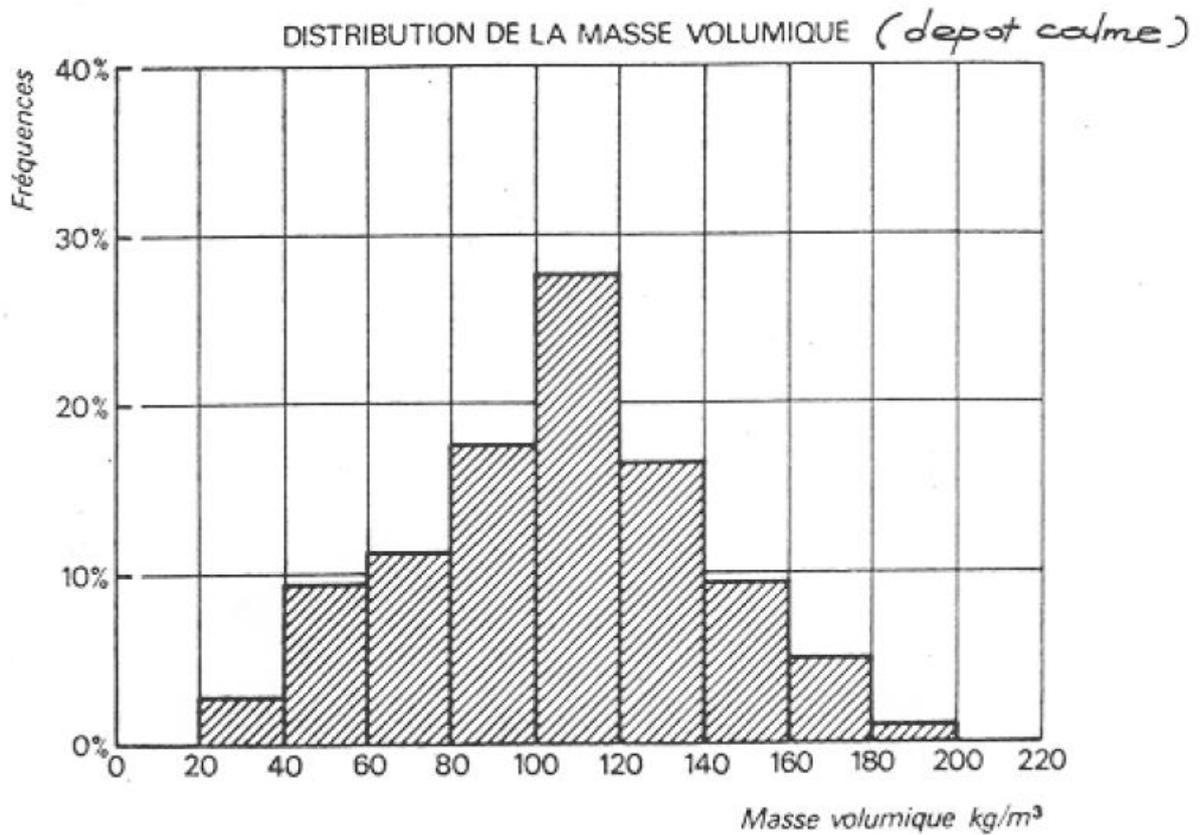
La masse volumique dépend, au moment de la chute de neige, du type de cristal et des conditions de vent et de température.

2) Modélisation de la répartition des masses volumiques

Le centre national de recherches météorologiques a fait de nombreuses mesures pour obtenir des données sur la neige. En particulier, des masses volumiques ont été mesurées. Voilà les conditions de mesure:

- Lieu : Col de Porte à 1300 m d'altitude ;
- Perturbations : lieu abrité donc une neige peu ou non ventée ;
- Restrictions : tous les cas où la présence de pluie mêlée à de la neige était manifeste ont été éliminés, ainsi que ceux où la hauteur de la chute de neige était inférieure à 5cm ;
- Hypothèse : les valeurs de masses volumiques sont estimées à 5% près.

Dans le texte de E. Pahaut, un échantillon comprenant 190 cas est présenté (histogramme ci-dessous). Dans le texte, cette distribution a été modélisée par une loi normale, de paramètres $m=109\text{kg/m}^3$ et d'écart-type 39.



Essayons de reconstituer cette modélisation à l'aide de la seule information nous permettant de retrouver les paramètres donnés : l'histogramme représentant la distribution des masses volumiques par dépôt calme.

En mesurant chaque hauteurs des rectangles de l'histogramme, et par proportionnalité, on peut retrouver les effectifs de chaque classe :

borne inf	borne sup	classes	centres des classes	effectifs
0	20	[0 ; 20 [10	0
20	40	[20 ; 40 [30	5,32
40	60	[40 ; 60 [50	17,48
60	80	[60 ; 80 [70	21,28
80	100	[80 ; 100 [90	32,68
100	120	[100 ; 120 [110	52,44
120	140	[120 ; 140 [130	31,16
140	160	[140 ; 160 [150	18,24
160	180	[160 ; 180 [170	9,88
180	200	[180 ; 200 [190	1,52
200	220	[200 ; 220 [210	0

On peut calculer les paramètres de cette série :

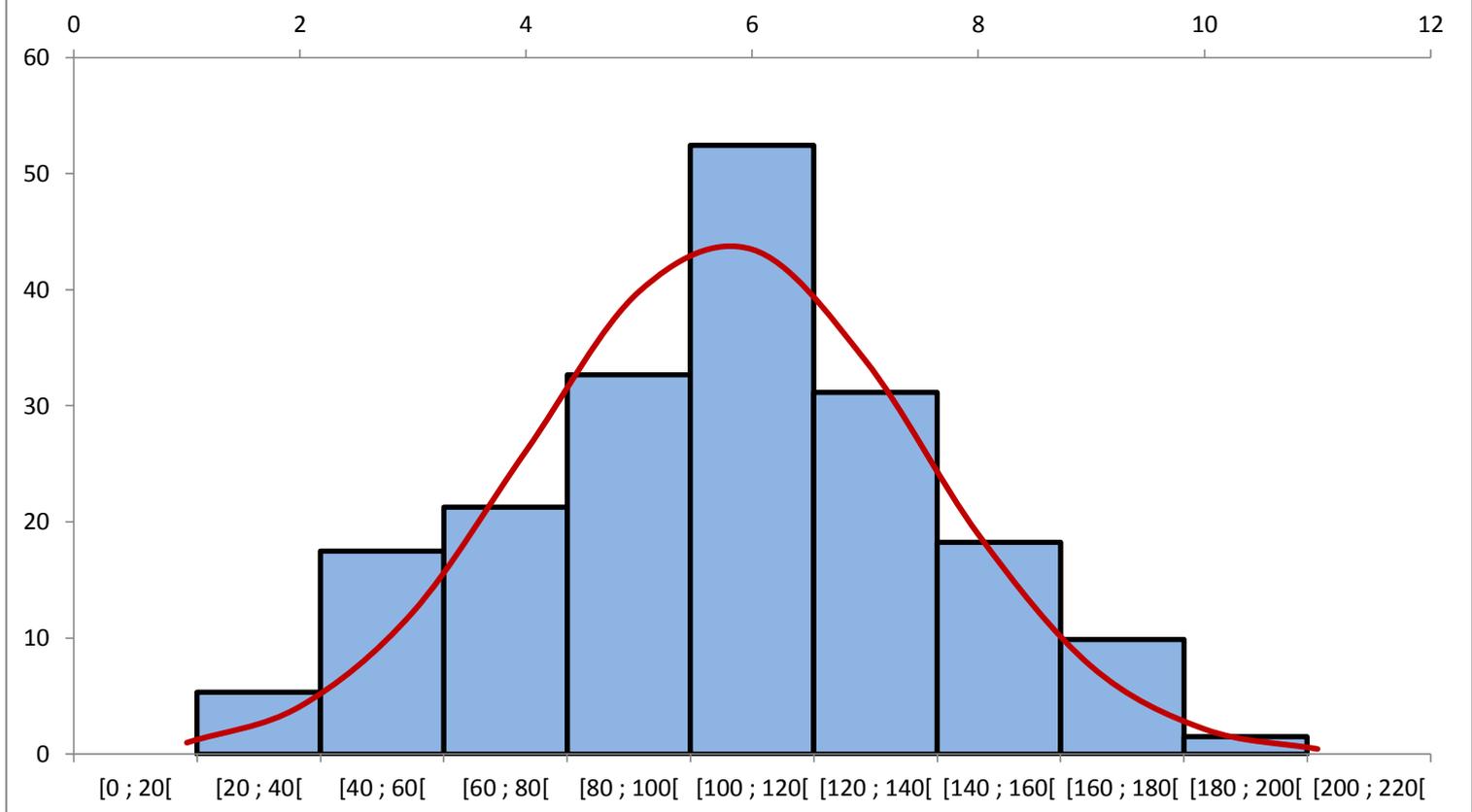
moyenne	105,2
variance	1192,96
écart-type	34,54

L'histogramme de cette distribution nous permet de penser qu'on peut la modéliser par une loi normale. Pour le tester, on veut estimer les effectifs théoriques correspondant à la loi $N(105,2 ; 34,54)$ à l'aide d'un tableur.

Remarquons cependant que l'aire totale de notre histogramme, soit la somme des aires des rectangles, est $20 \times 190 = 3800$ (car 190 est la somme des effectifs et 20 est la largeur de base de chaque rectangle). Or la fonction permettant de faire cette estimation dans le tableur donne des probabilités théoriques pour une aire sous la courbe égale à 1. Il nous faut donc multiplier ces probabilités par 3800 (l'aire totale) pour avoir les effectifs théoriques que l'on recherche. On obtient donc :

classes	centres des classes	effectifs	effectifs théoriques
[0 ; 20 [10	0	0,98
[20 ; 40 [30	5,32	4,10
[40 ; 60 [50	17,48	12,24
[60 ; 80 [70	21,28	26,11
[80 ; 100 [90	32,68	39,84
[100 ; 120 [110	52,44	43,47
[120 ; 140 [130	31,16	33,92
[140 ; 160 [150	18,24	18,93
[160 ; 180 [170	9,88	7,55
[180 ; 200 [190	1,52	2,15
[200 ; 220 [210	0	0,44

Histogramme et courbe de Gauss



Nous avons représenté ces informations ci-dessous. L'histogramme correspond à la répartition empirique connue des masses volumiques. La courbe tracée est la courbe de Gauss de la distribution théorique suivant la loi normale.

On peut donc en conclure, par l'allure de la courbe par rapport à l'histogramme, que la modélisation par une loi normale est cohérente.

Limites : on s'est intéressé à une modélisation uniquement par la cohérence des graphiques. On pourrait vérifier mathématiquement la cohérence de cette modélisation.

- Dans un premier temps on pourrait calculer des coefficients permettant de s'assurer de la compatibilité de la distribution avec l'hypothèse de normalité. Il s'agit du coefficient d'asymétrie qui permet de vérifier si une distribution est symétrique par rapport à sa moyenne. Et du coefficient d'aplatissement de la queue de la distribution permet de savoir si les queues de distribution ont bien une faible probabilité.

- Dans un second temps, on pourrait vérifier si notre modélisation est robuste. Cela signifie que si l'effet papillon ne s'applique pas : si l'on modifie un peu les données (empiriques), cela ne modifie pas entièrement la modélisation faite, soit la modélisation par la loi normale.

- Dans un dernier temps, on pourrait s'intéresser aux tests d'adéquation d'une série à une loi.

Remarques pédagogiques :

- La loi normale sera au futur programme de T^{ale} S. On peut donc imaginer que la modélisation que l'on a faite ici peut être faite par les élèves : partir des données et retrouver l'adéquation à une loi normale.

- Le travail sur les données, à savoir le calcul de la moyenne, variance et écart-type, ainsi que le tracé de l'histogramme sont utilisables en 3^{ème}. Cependant, cela ne constitue pas un travail de modélisation pour les élèves, mais uniquement de traitement statistique.

Nous proposons, ci-dessous, un exercice de 3^{ème} utilisant ces données

Activité (corrigée): L'office du tourisme de Bourg-St-Maurice a recueilli des données météorologiques afin de mieux connaître l'enneigement de la station des Arcs. Pour cela, chaque jour où il a neigé pendant la saison 2010-2011, il a relevé le moment de la journée et la masse volumique de la neige.

Remarque : N : nuit ; M : matin ; AP : après-midi ; S : soirée.

Date	Moment de la journée	Masse volumique (en kg.m ⁻³)	Date	Moment de la journée	Masse volumique (en kg.m ⁻³)	Date	Moment de la journée	Masse volumique (en kg.m ⁻³)
26/10/10	N ; S	173	10/01/11	N	48	22/02/11	AP	159
05/11/10	N	176	11/01/11	M;AP	123	23/02/11	N ; M	70
13/11/10	N	47	13/01/11	N ; M	84	24/02/11	N ; AP	114
15/11/10	AP ; N	70	14/01/11	M	158	25/02/11	N	147
16/11/10	N ; M ; AP ; S	81	27/01/11	M ; AP ; N	111	04/03/11	M ; AP	78
26/11/10	N	103	28/01/11	N ; M	130	05/03/11	N	108
27/11/10	N	105	29/01/11	N ; M	92	06/03/11	N	87
29/11/10	N	30	05/02/11	N	92	07/03/11	N	154
30/11/10	N	58	06/02/11	N ; M ; AP	82	22/03/11	N ; M ; AP	99
05/12/10	M	84	07/02/11	N ; M	48	23/03/11	N	78
06/12/10	N	124	08/02/11	N	94	27/03/11	M	128
10/12/10	N	109	09/02/11	N ; M ; AP	62	28/03/11	N	138
11/12/10	N ; M	133	11/02/11	M	108	08/04/11	N	137
20/12/10	N	41	17/02/11	N ; M ; AP	173	13/04/11	N	130
21/12/10	N	114	18/02/11	N ; M ; AP	192	16/04/11	AP	114
24/12/10	M ; AP	105	19/02/11	N	62	18/04/11	S	93
09/01/11	N ; M	109	20/02/11	N	70	19/04/11	N ; M	110

1ere partie : Moment de la journée.

a) Compléter le tableau suivant (corrigé en rouge)

Moment de la journée	N	M	AP	S	Total
Nombre de jours	41	22	14	3	80
Fréquence	0,5125	0,275	0,175	0,0375	1
(%)	(≈ 51%)	(≈ 28%)	(≈ 18%)	(≈ 4%)	101

b) Représenter graphiquement les résultats de ce tableau sous la forme qui vous semble la plus appropriée.

Les élèves peuvent envisager un diagramme en bâtons, un camembert, un diagramme en étoile.

2e partie : Masse volumique de la neige.

a) Calculer la moyenne de ces masses volumiques.

Corrigé : $\bar{m} = \frac{173+176+47+\dots+114+93+110}{51} = \frac{5335}{51} = 104,6.$

b) Déterminer le nombre de jours où la masse volumique de la neige est supérieure à cette moyenne.

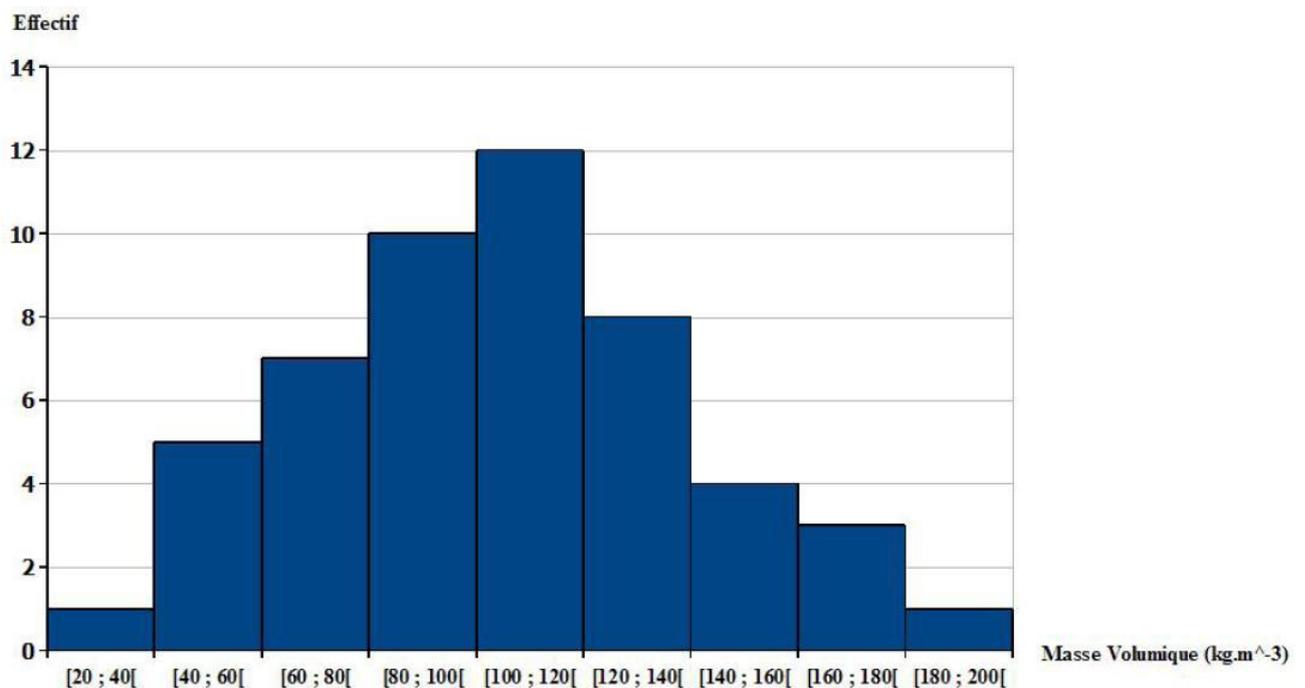
c) Compléter le tableau suivant (corrigé en rouge)

Masse volumique (kg.m ⁻³)	[20 ; 40[[40 ; 60[[60 ; 80[[80 ; 100[[100 ; 120[[120 ; 140[[140 ; 160[[160 ; 180[[180 ; 200[Total
Nombre de jours	1	5	7	10	12	8	4	3	1	51
Fréquence	≈ 0,02	≈ 0,1	≈ 0,14	≈ 0,2	≈ 0,24	≈ 0,16	≈ 0,08	≈ 0,06	≈ 0,02	1,02
(%)	(2%)	(10%)	(14%)	(20%)	(24%)	(16%)	(8%)	(6%)	(2%)	(102%)

d) Représenter graphiquement ce tableau sous la forme qui vous semble la plus appropriée.

Échelle : 2 cm pour 20 kg.m⁻³ en abscisse et 2 cm pour 1 jour en ordonnée.

Corrigé



e) Déterminer la masse volumique de la neige pour laquelle il est possible de dire : "La moitié du temps, la masse volumique de la neige était inférieure à..."

Idee : Classer les masses volumiques dans l'ordre. Il suffira alors de lire la 26e valeur (car il y a 25 valeurs plus petites et 25 plus grandes) : 105 kg.m^{-3} .

Vocabulaire : Cette valeur est appelée la masse volumique MEDIANE de la neige.

f) Déterminer la masse volumique de la neige pour laquelle il est possible de dire : "Au moins un quart du temps, la masse volumique de la neige était inférieure à..."

Corrigé : $\frac{1}{4} \times 51 = 12,75 < 13$. C'est la 13e valeur : 78 kg.m^{-3} .

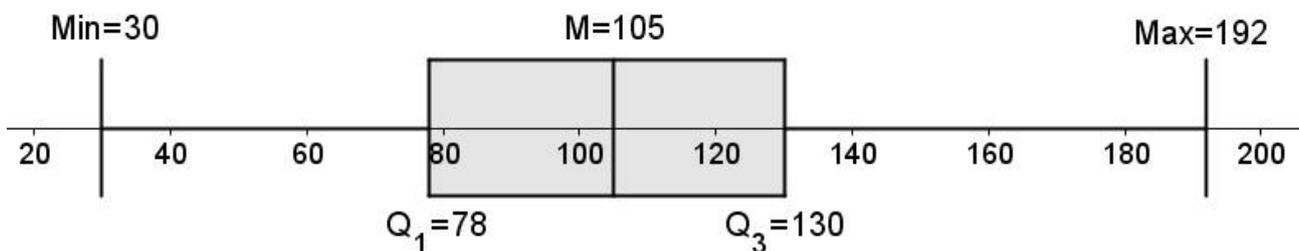
Vocabulaire : Cette valeur est appelée le 1er QUARTILE des masses volumiques de la neige.

g) Déterminer la masse volumique de la neige pour laquelle il est possible de dire : " Au moins les trois quart du temps, la masse volumique de la neige était inférieure à..."

Corrigé : $34 \times 51 = 38,25 < 39$ C'est la 39e valeur : 130 kg.m^{-3} .

Vocabulaire : Cette valeur est appelée le 3e QUARTILE des masses volumiques de la neige.

On peut maintenant représenter la dispersion des relevés sur un nouveau graphique, appelé "boîte à moustaches" :



h) Lorsque la masse volumique de la neige est supérieure ou égale à 150 kg.m^{-3} , les responsables de la sécurité des pistes estiment que la neige est trop dure. Ils interdisent alors aux écoles de ski de la station l'accès au domaine, les chutes pouvant être trop dangereuses.

La neige atteint-elle souvent de telles masses volumiques à Bourg-St-Maurice ?

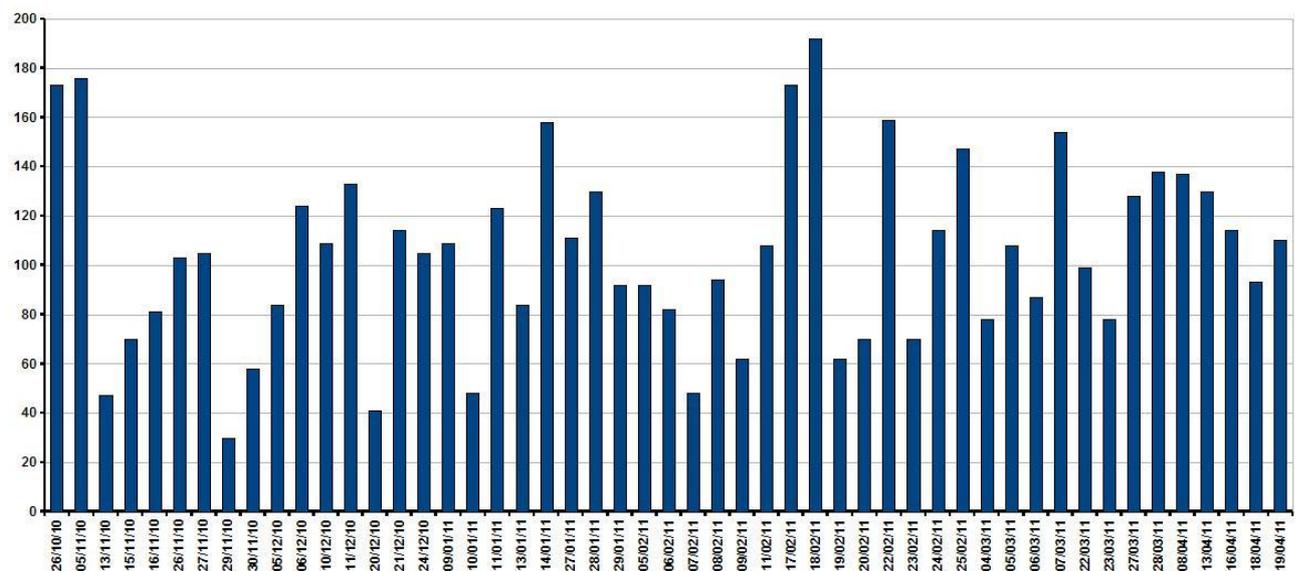
Calculer la fréquence d'un tel événement.

Corrigé : La masse volumique de la neige a atteint ou dépassé 150 kg.m^{-3} pendant 7 jours (sur 51 jours).

$$\text{Fréquence} = \frac{7}{51} = 0,137 = 14\%$$

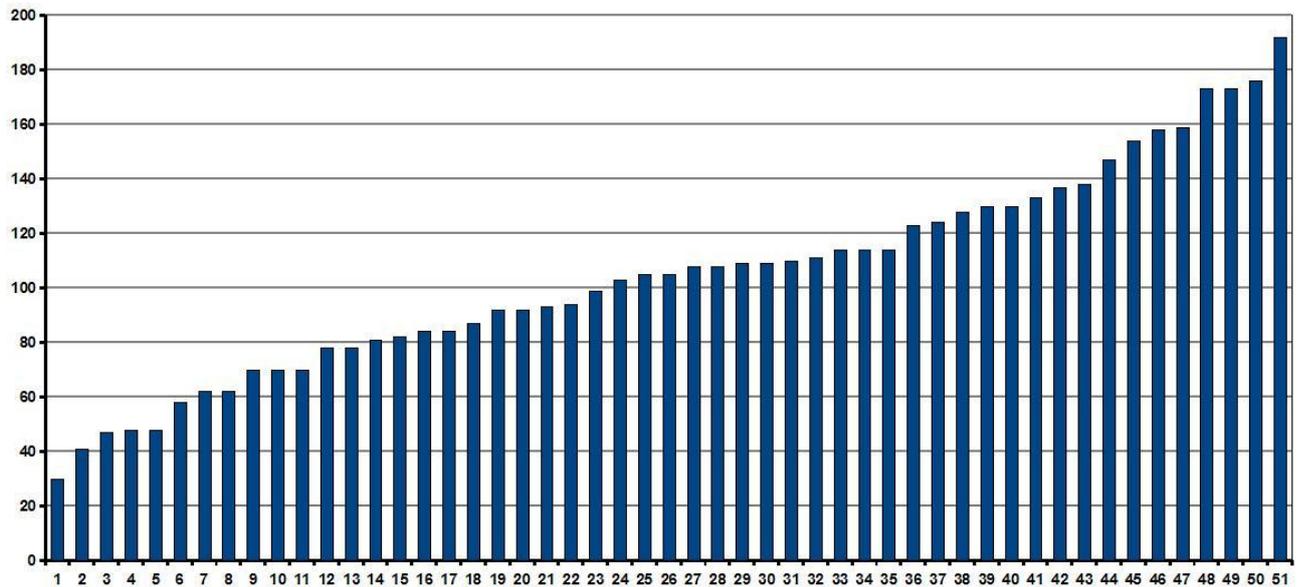
Commentaires (Tirés du Projet de document d'accompagnement - Organisation et gestion de données) :

Dans le cas de l'étude des masses volumiques observées, un premier diagramme en bâtons (basique) peut représenter la série des masses volumiques de la neige observées, jour après jour. Cette représentation n'est pas facile à exploiter sous cette forme.



Les responsables de l'office de tourisme s'intéressent au nombre de jours où il est dangereux de faire du ski pour des raisons de sécurité. Le travail porte alors, par exemple, sur le nombre de jours où la masse volumique a dépassé un certain seuil.

Une simple réorganisation des données (suivant les masses volumiques croissantes), à l'aide du tableur, sur le tableau précédent permet de mettre en évidence médiane et quartiles. Elle correspond aussi à une réorganisation graphique.



Il est alors possible de rendre compte des observations sous différents aspects comme par exemple : *la moitié du temps (les ¾ du temps), la neige a une masse volumique inférieure à $105 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ($129 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$).*

Pour répondre à d'autres problématiques, par exemple : *une neige de masse volumique $150 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ est-elle une neige « dure » dans cette station ?* en lien avec le domaine de la prévision (donc celui des probabilités : *Combien de chances a-t-on d'avoir une neige de $150 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ou plus?...*), il est alors nécessaire d'approfondir l'étude en s'intéressant au rapport entre le nombre de jours où la neige dépasse les $150 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et le nombre total de jours d'observation, c'est-à-dire à la fréquence de cet événement et plus globalement à la distribution des fréquences pour construire un modèle de loi de probabilité (approche fréquentiste).

Dans le cas présent, la distribution des fréquences des masses volumiques observées (valeurs discrètes et nombreuses) n'est pas directement facilement exploitable. Le travail est donc plus complexe du fait de la nature quantitative continue du caractère observé. Il consiste à regrouper les données par classes et à les représenter à l'aide d'un histogramme.

3) Masse volumique, température et vent

La masse volumique a une plage de variations importante. Cela est dû au fait qu'elle dépende de plusieurs paramètres :

- Le type de cristaux : ils sont forts différents et on conçoit aisément qu'un volume déterminé de cristaux étoilés sera plus aéré, donc plus léger, que le même volume de grains de neige roulée.
- La température : elle influe sur la forme des cristaux et donc, comme expliqué ci-dessus, sur la masse volumique de la neige.
- Le vent : il est un agent mécanique de transformation des cristaux pendant leur chute ou après le dépôt (lorsqu'il déplace de la neige de surface). Il modifie les cristaux, car ceux-ci s'entrechoquent et leurs parties fragiles (comme les dendrites) se brisent. Le vent favorise donc des masses volumiques élevées.

L'évolution de la masse volumique avec le type de cristaux est difficilement observable car les cristaux sont souvent de formes différentes dans un même volume de neige. Cependant, 3 classes ont pu être isolées à partir de l'échantillonnage total : les étoiles, les particules irrégulières et la neige roulée. On obtient les masses volumiques moyennes suivantes :

Échantillon total	$\rho = 109 \text{ kg/m}^3 \quad n = 190$
+ Étoiles	$\bar{\rho}_1 = 67 \text{ kg/m}^3 \quad n = 23$
λ Particules irrégulières	$\bar{\rho}_2 = 108 \text{ kg/m}^3 \quad n = 30$
Δ Neige roulée	$\bar{\rho}_3 = 118 \text{ kg/m}^3 \quad n = 24$

On peut remarquer que ces masses volumiques sont sensiblement différentes et que la masse volumique de la neige roulée est, en moyenne, deux fois supérieure à celle de la neige en étoile.

Ce point sera important lors de l'étude de la neige de culture.

Nous allons maintenant nous intéresser aux variations de la masse volumique de la neige en fonction des paramètres quantitatifs : la température et le vent.

Il n'existe pas de liaison simple entre la masse volumique et la température de la neige fraîche. Pour une température donnée, on a uniquement un encadrement de la masse volumique. Le tableau suivant donne les valeurs minimum et maximum de la masse volumique en fonction de la température. Notons que ces données sont recueillies dans un lieu de mesure abrité et un vent considéré comme inférieur à 5 m/s.

T° de l'air (° C)	masses volumiques ρ max (kg / m³)	masses volumiques ρ min (kg / m³)
-13,00	47,00	20,00
-10,00	63,00	28,00
-7,50	92,00	42,00
-5,00	130,00	57,00
-2,50	170,00	75,00
0,00	200,00	92,00

Cependant, même faible, l'effet du vent ne peut pas être négligé. C'est pour cela que le vent est intégré dans le modèle numérique du manteau neigeux de Crocus. Ce modèle est basé sur une relation empirique entre masse volumique, vitesse du vent et température de l'air. Il a été établi consécutivement à des expériences menées par E. Pahaut dans les années 70 au site expérimental du Col de Porte. Il donne la relation suivante:

$$\rho = a + b (T_a - T_f) + c \sqrt{u}$$

Où T_f = point de fusion de l'eau 273,15K soit 0°C

$$T_a = T^\circ\text{C de l'air à 2m}$$

$$a = 106 \text{ kg/m}^3, \text{ soit la moyenne des masses volumiques ;}$$

$$b = 6 \text{ kg/m}^3/\text{K}$$

$$c = 26 \text{ kg/m}^{-7/2}/\text{s}^{-1/2}$$

$$u \leq 5 \text{ m/s}$$

(Remarquons que ces valeurs nous ont été données par Samuel Morin du centre d'études de la neige à Météo-France/CNRS, voir mail en annexe). Cependant, le texte de E. Pahaut donne des valeurs légèrement différentes

$$a = 109 \text{ kg/m}^3, b = 8 \text{ kg/m}^3/\text{K} \text{ et } c \text{ est le même)}$$

On a donc plus simplement: $\rho = 106 + 6\theta + 26\sqrt{u}$ où θ est la température sous abri pendant la chute. (ou, avec les autres données : $\rho = 109 + 8\theta + 26\sqrt{u}$)

Modélisation : Nous avons voulu voir si, à partir des quelques données fournies, nous pouvions faire une modélisation cohérente avec le modèle proposé.

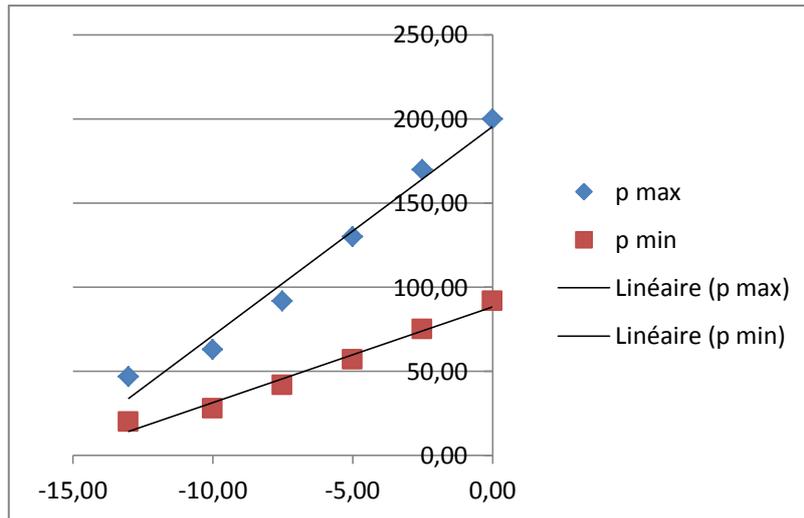
Les données sont donc deux séries statistiques représentant l'évolution de la masse volumique (minimum ou maximum en fonction de la température). Nous avons donc tracé les nuages de points représentant ces deux séries et remarqué qu'un ajustement affine était cohérent. Nous avons donc réalisé un ajustement affine par la méthode des moindres carrés des deux séries.

Rappelons que si on considère un nuage de points $A_i (x_i; y_i)$ avec $1 \leq i \leq n$, la droite d'ajustement passe par le point moyen $G(\bar{x}; \bar{y})$ du nuage et son équation est $y = a x + b$ où $a = \frac{cov(x;y)}{var(x)}$ et $b = \bar{y} - a \bar{x}$.

Le tableau suivant est un récapitulatif de ces calculs pour les deux séries :

	ρ max	ρ min
cov(x;y)	240,00	110,19
var(x)	19,31	19,31
$a = \frac{cov(x;y)}{var(x)}$	12,43	5,71
\bar{x}	-6,33	-6,33
\bar{y}	117,00	52,33
point moyen	G1 (-6,3;117)	G2 (-6,3; 52,3)
b	195,73	88,48

On a donc les droites de régression : $y = -12,43x + 195,73$ et $y = -5,71x + 82,46$, pour les valeurs maximales et minimales des masses volumiques, comme sur le graphique ci-dessous:



Nous avons ensuite cherché à trouver la droite « moyenne » nous permettant de modéliser la masse volumique en fonction de la température. Notre objectif est de comparer les résultats obtenus avec la partie linéaire du modèle de Crocus.

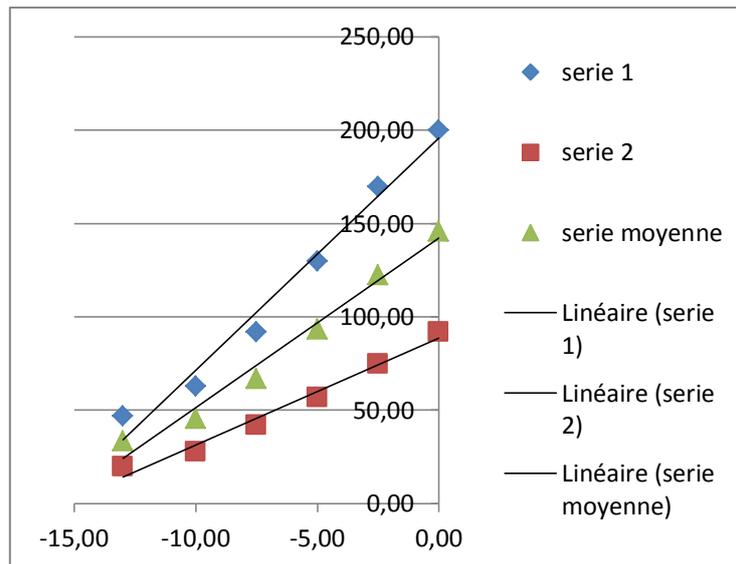
Méthode 1 : la droite passe par les points « moyens » (moyenne arithmétique entre les valeurs minimales et maximales de la masse volumique) :

T° de l'air (° C)	points « moyens »
-13,00	33,50
-10,00	45,50
-7,50	67,00
-5,00	93,50
-2,50	122,50
0,00	146,00

On obtient :

cov(x;y)	175,10
var(x)	19,31
a = $\frac{cov(x;y)}{var(x)}$	9,07
\bar{x}	-6,33
\bar{y}	84,67
point moyen	GM(6,33;84,67)
b	142,11

D'où la droite de régression : **$y = -9,07x + 142,11$** .



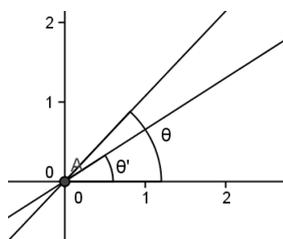
Etude du résultat et comparaison avec le modèle de Crocus :

- Nous n'avons pas pris en compte le vent (dit faible dans le texte, inférieur ou égal à 5 m/s) ;
- Le coefficient directeur obtenu est assez élevé par rapport à celui du modèle de Crocus (qui, pour rappel, est selon les sources 6 ou 8) ;
- L'ordonnée à l'origine est élevée par rapport au 106 ou 109 attendu ;

Nouvelle hypothèse : supposons que le vent faible, inférieur ou égal à 5m/s, ne soit pas 0m/s mais 2,5m/s. La formule du modèle de Crocus devient $\rho = 106 + 6\theta + 26\sqrt{2,5}$ donc $\rho = 6\theta + 147,11$. Cela est donc très proche de l'ordonnée à l'origine trouvée.

Nous souhaitons trouver une autre méthode pour voir si l'on peut trouver un coefficient directeur plus proche de celui cherché.

Méthode 2 : Notre 2nde idée est de chercher la droite ayant pour angle avec l'axe des abscisses, la moyenne des angles des deux droites de régressions trouvées comme illustré ci-dessous.



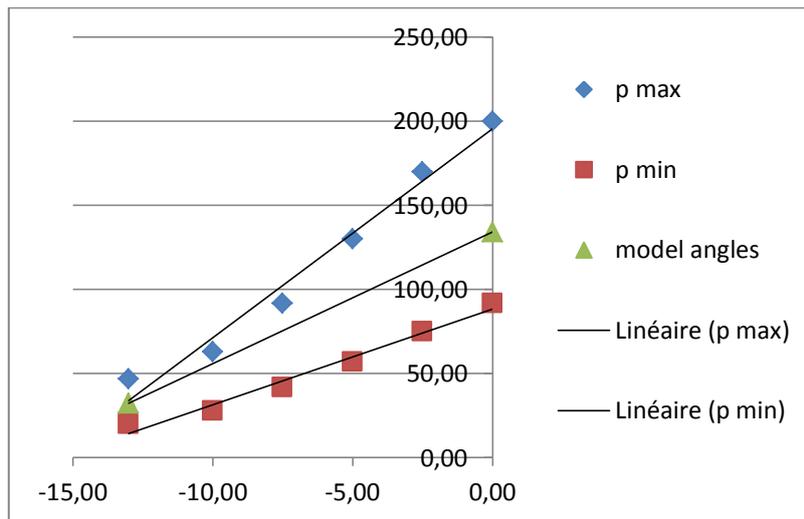
Nous souhaitons chercher le coefficient directeur de la droite formant un angle égal à $\frac{\theta + \theta' }{2}$. De plus, le coefficient directeur d'une droite correspond à la tangente de l'angle.

On a donc choisi comme coefficient directeur :

$$a = \tan\left(\frac{\tan^{-1}(12,43) + \tan^{-1}(5,71)}{2}\right) \approx 7,84$$

Et on a fait passer la droite par le point moyen GM(-6,33;84,67) d'où $b = 134,33$.

La nouvelle droite est donc pour équation : $y = -7,84x + 134,33$



Etude du résultat et comparaison avec le modèle de Crocus :

On obtient un coefficient directeur qui est très proche des valeurs trouvées dans le texte de E. Pahaut ($a = 8$) ou dans les informations de Samuel Morin ($a = 6$). Nous pouvons donc supposer que les paramètres de la partie linéaire du modèle de Crocus ont été trouvés à partir des relevés des masses volumiques par vent faible.

Une fois cette partie linéaire trouvée, nous avons voulu savoir pourquoi la masse volumique est une fonction de la racine carrée du vent. Mais n'ayant pas assez de données, nous avons contacté Samuel Morin, qui travaille à Météo-France au centre d'études de la Neige sur les propriétés de la neige. Ce dernier nous a dit que la formule du modèle avait été trouvée expérimentalement mais que malheureusement, les données brutes n'étaient plus accessibles. Nous ne pourrions donc pas aller plus loin dans cette étude.

Limites de notre modélisation:

- Nous ne travaillons que sur 6 données, ce qui est très faible pour faire des statistiques.
- Nous ne pouvons pas faire le même travail avec des relevés sur un dépôt venté car nous ne disposons que de 3 valeurs (sans connaissance de la vitesse du vent) et que c'est largement insuffisant.
- Nous ne pouvons pas étudier l'évolution de la masse volumique en fonction du vent car nous n'avons pas de données et nous ne pouvons donc pas expliquer pourquoi la masse volumique est une fonction de la racine du vent.

- Si la température est nulle, l'encadrement des masses volumiques est connu (entre 92 et 200 kg/m³) et on peut donc retrouver un encadrement de la valeur de u (vitesse du vent). Comme $92 < \rho < 200$, on a $\left(\frac{92-106}{26}\right)^2 < u < \left(\frac{200-106}{26}\right)^2$ donc, en arrondissant à l'unité près, $0 \text{ m/s} < u < 13 \text{ m/s}$. Cela ne correspond pas à la condition $u \leq 5 \text{ m/s}$ donnée.

Remarques pédagogiques : la notion de série statistique et ajustement linéaire par la méthode des moindres carrés est dans le programme de Terminale ES. Le travail fait est donc facilement utilisable en classe dans ce cadre.

Partie 2 : la neige de culture

I Généralités

Pour des raisons économiques et météorologiques, on assiste depuis deux décennies à une augmentation de la production de neige de culture. Une grande majorité de stations sont équipées de canons à neige et cet équipement est en constante progression, vu les enjeux économiques. La plupart des stations ne peuvent se contenter des aléas du climat et souhaitent offrir un domaine skiable fiable et sur une période relativement importante.

On admet qu'il faut environ trois canons à neige par hectare et que leur utilisation a lieu principalement en début de saison ou pour palier à un manque d'enneigement naturel. Les stations françaises n'ont plus recours à des adjuvants chimiques pour fabriquer cette neige mais les dépenses en eau et en énergie sont suffisamment importantes pour qu'une véritable réflexion soit faite pour gérer l'utilisation de ces canons.

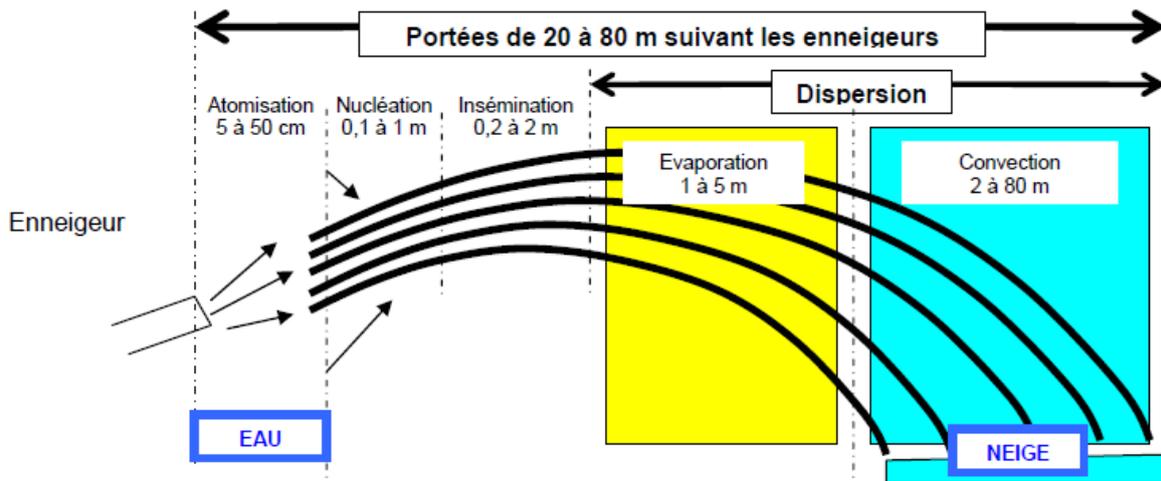
II Principe de fabrication de la neige de culture

1) Principe général

Le schéma de fabrication de la neige de culture est, d'un point de vue global, simple : il consiste à pulvériser des gouttelettes d'eau dans un air ambiant froid de manière à obtenir dans un laps de temps très court une congélation parfaite de ces particules d'eau, avant qu'elles n'atteignent le sol. Contrairement à la neige naturelle, la formation du cristal ne provient pas d'un phénomène de condensation total, mais simplement de sa partie finale de solidification transformant l'eau de sa phase liquide à solide. L'air est injecté à une pression de 20 à 80 bars, et quand il se détend, il participe à la formation des flocons. L'eau est dans un état de surfusion c'est à dire à une température inférieure au point de congélation et va rencontrer de l'air sous pression. Cet air sous pression est en réalité constitué d'air comprimé mais aussi de gouttelettes d'eau qui vont geler, créant ainsi des particules de glace.

2) Détails sur le principe de fabrication de la neige de culture

Principe de fabrication de la neige de culture



Il y a quatre étapes dans la fabrication de la neige de culture :

a) L'atomisation

Cette étape consiste à atomiser le jet d'eau initial en projetant l'eau sous pression dans l'air à travers un tout petit orifice. On aura alors formation de micro gouttelettes. Mais à cause du phénomène de surfusion, l'eau ne va pas geler, même si la température extérieure est négative. On va alors devoir former en parallèle les noyaux de condensation (ou de nucléation).

b) La nucléation

Cette étape consiste à former les noyaux de nucléation qui vont permettre la cristallisation des gouttelettes. Pour se faire, on réalise un mélange d'eau et d'air sous pression, avec une infime quantité d'eau. Avec la pression de l'air, le peu d'eau va s'atomiser aussi en de minuscules particules. Au contact de l'air froid, ces particules seront tellement petites qu'elles vont geler (le phénomène de surfusion est fonction de la taille de la particule, négligeable ici). On forme ainsi de toutes petites particules de glaces, qui serviront de noyaux de nucléation.

c) L'insémination et l'évaporation

Cette étape consiste à faire rencontrer les deux jets formés. Cette rencontre se fait à la sortie du canon pour le canon à neige à mélange externe. Alors, en présence des noyaux de nucléation, les gouttelettes d'eau formées dans l'étape 1/ vont progressivement se solidifier (aux alentours de -5°C). Grâce à des transferts de chaleur, la goutte va se congeler

entièrement : il y a un équilibre entre l'air extérieur et la gouttelette d'eau. En effet, la surface de la goutte d'eau va s'évaporer, cela va refroidir le reste de la goutte et le solidifier: c'est le phénomène d'évaporation).

d) La convection

La goutte d'eau transformée en glace va alors atteindre le sol, pour former le manteau neigeux. La convection caractérise les transferts de chaleur entre la goutte et l'air, et entre la goutte et le reste du manteau neigeux.

3) Remarques

- Pour que la production de neige de culture soit possible et en conditions optimales, il faut qu'il y ait nucléation pour ne pas laisser d'eau à l'état de surfusion et enfin, que la rapidité de congélation soit suffisante. Pour cela l'enneigeur doit obligatoirement fournir des gouttelettes dont le diamètre est compris entre 0,2 et 0,8 mm.

- Il faut aussi que le bilan thermique soit équilibré : en effet un air humide, saturé en vapeur d'eau, ou trop chaud va ralentir le processus d'évaporation. Ce processus ne sera pas total et la goutte d'eau n'aura pas assez de temps dans sa chute pour congeler entièrement. Il en résulte qu'une partie de la goutte restera en eau liquide. On utilise, comme pour la neige naturelle, la notion de TEL, Teneur en Eau Liquide, pour parler de ce phénomène. Il en résulte que la neige de culture peut être, tout comme la neige naturelle, sèche, humide ou mouillée suivant sa TEL. Plus le degré d'humidité de l'air est élevé, plus il doit faire froid pour fabriquer de la neige.

Suite à ces remarques, les conditions idéales pour la formation de la neige sont **-10°C et 20% d'humidité de l'air**.

- Les stations de ski ont le choix entre deux systèmes : dans le module basse pression, un compresseur unique distribue l'eau sous pression à des petits gicleurs. Dans un module haute pression chaque gicleur est équipé d'un compresseur.

4) Exercice de thermo dynamique

Introduction

En étudiant les principes de formation de la neige, nous avons mis en évidence l'importance des changements d'état (liquide – solide-gazeux).

D'autre part, l'une des caractéristiques de la neige de culture est la forme des flocons (petits grains sphériques) car ils ne restent pas suffisamment dans l'air pour se transformer.

Nous avons donc pensé intéressant d'étudier le temps que met une goutte d'eau pour passer de l'état liquide à l'état solide et en particulier la durée du phénomène de surfusion.

Nous avons trouvé un exercice de thermodynamique qui résout cette question (http://alainrobichon.free.fr/Concours/CCP_PC_PH1_01.pdf)

Enoncé :

III- Fabrication de neige artificielle - Canon à neige

La neige artificielle est obtenue en pulvérisant, à l'aide de canons à neige, de fines gouttes d'eau liquide à $T_i=10^\circ\text{C}$ dans l'air ambiant à la température $T_e=-15^\circ\text{C}$. On propose de calculer le temps mis par une goutte d'eau pour passer de l'état liquide à l'état solide. On suppose que la goutte d'eau est sphérique de rayon $R=0,2\text{mm}$ et que sa température à tout instant est uniforme. A l'interface eau-air, le flux thermique $d\Phi$ à travers une surface dS dans le sens de la normale extérieure \vec{n} est donnée par la loi des transferts convecto-diffusifs

$$d\Phi = h [T(t) - T_e] dS$$

où $T(t)$ est la température de la goutte, supposée uniforme, à l'instant t . h est une constante que l'on prendra égale à $h = 65 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$.

III- 1. En utilisant le premier principe de la thermodynamique, en supposant la goutte indéformable, en équilibre mécanique avec le milieu ambiant, établir que l'équation qui régit la variation temporelle de la température $T(t)$ de la goutte d'eau liquide est

$$\rho c_l R \frac{dT}{dt} = -3h[T(t) - T_e]$$

où c_l est la capacité thermique massique de l'eau liquide et ρ sa masse volumique supposée constante.

III- 2. Montrer que la variation temporelle de la température de la goutte liquide est régie par

$$\frac{T(t) - T_e}{T_i - T_e} = e^{-t/\tau}$$

Exprimer τ en fonction de h , ρ , c_l et R . Calculer le temps t_o mis par la goutte d'eau liquide pour atteindre la température de surfusion $T(t_o) = -5^\circ\text{C}$.

III- 3. Lorsque la goutte atteint la température de -5°C , il y a rupture de la surfusion : la température est alors égale à 0°C et la goutte est partiellement solidifiée. Calculer la fraction x de liquide restant à solidifier après la rupture de la surfusion. On admettra pour cela la transformation adiabatique car très rapide. On néglige également la variation de volume due au changement de masse volumique.

III- 4. Calculer le temps nécessaire à la solidification du reste de l'eau liquide.

III- 5. A son arrivée au sol, le rayon de la goutte solide est inférieur à celui de la goutte liquide injectée par le canon à neige (on néglige la variation de masse volumique avec la température) : la glace s'est sublimée. Quel est le mécanisme physique responsable de cette sublimation ?

Quelques données thermodynamiques de l'eau

Point triple : $T_t = 0,01 \text{ }^\circ\text{C}$
 $P_t = 0,6113 \text{ kPa}$

Point critique : $P_c = 22,09 \text{ MPa}$
 $T_c = 374,14 \text{ }^\circ\text{C}$

Chaleur latente de changement de phase solide-liquide ($P = 10^5 \text{ Pa}$)

$$L_f(273\text{K}) = 333 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

Capacité thermique massique (à 0°C) :
de l'eau liquide : $c_l = 4,18 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$
de l'eau solide : $c_s = 2,1 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$

Résolution de l'exercice (avec l'aide d'un professeur de physique)

Les hypothèses sont les suivantes :

- la goutte d'eau est supposée sphérique et de rayon $0,2 \text{ mm}$
- la température est à tout instant uniforme
- la goutte d'eau est supposée indéformable

1^{ère} question :

D'après la loi des transferts convecto-diffusifs, le flux thermique vérifie la relation :

$d\phi = h(T(t) - T_e)dS$ donc $\phi = h(T(t) - T_e)S$ avec $S = 4\pi R^2$ car $T(t)$ est uniforme sur l'ensemble de la surface de la sphère.

De plus : $\phi = \frac{\delta Q_{i \rightarrow e}}{dt}$ donc le transfert thermique est : $\delta Q_{i \rightarrow e} = \phi dt = h(T(t) - T_e)4\pi R^2 dt$

Mais comme on étudie le système « goutte d'eau », on a :

$$\delta Q_{e \rightarrow i} = -h(T(t) - T_e)4\pi R^2 dt \quad (1)$$

De plus, $dU = m \times c_1 dT$ avec c_1 la capacité thermique massique de l'eau liquide et

$$m = \rho \times \frac{4}{3}\pi R^3 \text{ et } \rho \text{ la masse volumique de la goutte d'eau sphérique}$$

$$\text{Donc } dU = \rho \times \frac{4}{3}\pi R^3 \times c_1 dT \quad (2)$$

D'autre part, d'après le premier principe de la thermodynamique et comme la goutte d'eau est indéformable, la variation d'énergie interne est égale au transfert thermique (le travail des forces de pression étant nul) donc : $dU = \delta Q_{i \rightarrow e}$ (3)

En reliant les équations (1), (2) et (3), on obtient :

$$\rho \times \frac{4}{3}\pi R^3 \times c_1 dT = -h(T(t) - T_e)4\pi R^2 dt$$

Donc : $\rho c_1 R \frac{dT}{dt} = -3h(T(t) - T_e)$ (4)

Conclusion 1 : On peut donc dire que la variation de température de la goutte en fonction du temps est proportionnelle à l'écart de température entre la goutte et l'extérieur.

2^{ème} question :

De l'équation (4), on déduit que : $\rho c_1 R \frac{dT}{(T(t)-T_e)} = -3h dt$

Par intégration des deux membres de cette égalité, on obtient : $\rho c_1 R \ln(T - T_e) = -3ht + cte$ (5)

Condition initiale : à $t=0$, $T= T_i$ donc $\rho c_1 R \ln(T_i - T_e) = -3h \times 0 + cte$

Donc (5) devient : $\rho c_1 R \ln(T - T_e) = -3ht + \rho c_1 R \ln(T_i - T_e)$ donc

$$\rho c_1 R \ln\left(\frac{T-T_e}{T_i-T_e}\right) = -3ht$$

En utilisant la fonction exponentielle, on obtient : $\frac{T-T_e}{T_i-T_e} = e^{\left(\frac{-3ht}{\rho c_1 R}\right)} = e^{\frac{-t}{\tau}}$ avec $\tau = \frac{\rho c_1 R}{3h}$

Application numérique :

$T(t_0) = -5^\circ\text{C}$ $T_e = -15^\circ\text{C}$ $T_i = 10^\circ\text{C}$ $c_1 = 4,18 \cdot 10^3$ $R = 0,2 \cdot 10^{-3}$ $\rho = 1000$ et $h = 65$

Alors $\tau = \frac{1000 \times 4,18 \cdot 10^3 \times 0,2 \cdot 10^{-3}}{3 \times 65} = \frac{836}{195}$ et $\frac{-5 - (-15)}{10 - (-15)} = e^{\frac{-t}{\tau}}$ donc $\frac{10}{25} = e^{\frac{-t}{\tau}}$

En utilisant le logarithme népérien, on obtient : $t_0 = -\tau \ln\left(\frac{10}{25}\right) = -\frac{836}{195} \ln\left(\frac{10}{25}\right) = 3,93 \text{ s}$

Conclusion 2 : la goutte d'eau liquide met 3,93s pour atteindre la température de -5°C considérée dans l'énoncé comme la température de surfusion

3^{ème} question :

Hypothèses :

- La transformation est adiabatique donc il n'y a pas de transfert thermique entre l'eau et l'extérieur donc $\delta U = 0$

- On néglige la variation de volume due au changement de masse volumique

Soit x la fraction de liquide restant à solidifier après la rupture de la surfusion, donc $1 - x$ est la fraction de liquide passé à l'état solide à 0°C .

La variation d'énergie interne due au changement de température de -5°C à 0°C est :

$$(1 - x)m c_s \times (T_f - T_i) + x \times m c_l \times (T_f - T_i)$$

La variation due au changement d'état est : $(1 - x)m (-Lf)$

On a donc : $\delta U = 0 = (1 - x)m c_s \times (Tf - Ti) + x \times m c_l \times (Tf - Ti) + (1 - x)m (-Lf)$

Donc : $0 = m c_l \times (Tf - Ti) + (1 - x)m (-Lf)$

Donc : $x \times m c_s \times (Tf - Ti) - x \times m c_l \times (Tf - Ti) - x m \times Lf = m c_s \times (Tf - Ti) - m \times Lf$

$$x = \frac{c_s \times (Tf - Ti) - Lf}{c_s \times (Tf - Ti) - c_l \times (Tf - Ti) - Lf}$$

Application numérique : $x = \frac{2,1 \cdot 10^{-3} \times 5 - 333 \cdot 10^{-3}}{2,1 \cdot 10^{-3} \times 5 - 4,18 \times 10^{-3} \times 5 - 333 \cdot 10^{-3}} = \frac{-322,5}{-343,4} \approx 0,94$

Conclusion 3 : il reste 0,94 à solidifier à la surfusion.

4^{ème} question : temps nécessaire à la solidification du reste de la goutte.

L'eau est plus chaude que la température extérieure ; il y a un échange d'énergie de la température la plus élevée vers la température la plus faible

On sait que : $\delta Q_e \rightarrow i = -h(T(t) - T_e)4\pi R^2 \Delta t$

De plus , $\delta Q_e \rightarrow i = x \times m \times (-Lf) + (1 - x)mc_s(T - T_e)$

Donc $\Delta t = \frac{x \times m \times (-Lf) + (1 - x)mc_s(T - T_e)}{-h(T(t) - T_e)4\pi R^2}$ donc $\Delta t = \frac{x \times m \times Lf - (1 - x)mc_s(T - T_e)}{h(T(t) - T_e)4\pi R^2}$

Comme $m = \rho \times \frac{4}{3}\pi R^3$

On peut simplifier par $4\pi R^2$ et on obtient : $\Delta t = \frac{x \times \rho R \times Lf - (1 - x)\rho R c_s (T - T_e)}{3h(T(t) - T_e)}$

Application numérique :

$X = 0,94$ $R = 0,2 \cdot 10^{-3}$ $Lf = 333 \cdot 10^3$ $\rho = 1000$ $c_s = 2,1 \cdot 10^3$ $T = 0^\circ\text{C}$ $T_e = -15^\circ\text{C}$ et $h = 65$

On obtient $\Delta t = \frac{0,94 \times 1000 \times 0,2 \cdot 10^{-3} \times 333 \cdot 10^3 - (-0,06) \times 1000 \times 0,2 \cdot 10^{-3} \times 2,1 \cdot 10^3 \times 15}{3 \times 65 \times 15} = \frac{62982}{2925} \approx 21\text{s}$

Conclusion n°4 : il faut 21 s pour terminer la solidification de la goutte d'eau

Adaptation de l'exercice en mathématique en TS :

Exercice : La neige artificielle est obtenue en pulvérisant, à l'aide de canons à neige, de fines gouttes d'eau liquide à température $T_i = 10^\circ\text{C}$ dans l'air extérieur à température $T_{\text{ext}} = -15^\circ\text{C}$.

On souhaite étudier la variation de température de la goutte d'eau en fonction du temps.

On sait que :

- La chaleur reçue par la goutte d'eau pendant une durée dt a pour expression :
$$Q = K \times (T - T_{ext}) \times dt \text{ (Formule 1).}$$
- La variation de température dT est proportionnelle à Q : $dT = A \times Q$ (Formule 2).
 - a. À l'aide de la formule 2, trouver l'expression de Q en fonction de dT et A .
 - b. En déduire à l'aide de la formule 1 la relation entre dT et dt .
 - c. En déduire l'expression de $\frac{dT}{dt}$.
 - d. En posant $y = T$ et $y' = \frac{dT}{dt}$, montrer que ce problème se résume à la résolution d'une équation différentielle.
On donne : $A = 7,14 \times 10^3$; $K = -3,27 \times 10^{-5}$
 - e. Résoudre cette équation différentielle (on rappelle que la variable s'appelle t et non x).
On rappelle que $T_i = 10^\circ\text{C}$.
 - f. Application : Quelle sera la température de la goutte d'eau au bout de 5 secondes. En quoi ce résultat est-il surprenant?

Résolution :

- a. $Q = \frac{dT}{A}$
- b. $\frac{dT}{A} = K(T - T_e)dt$
- c. $\frac{dT}{dt} = AK(T - T_e)$
- d. En posant : $T = y$ et $\frac{dT}{dt} = y'$ on obtient : $y' = AK(y - T_e) = AKy - AKT_e$

On obtient une équation différentielle de la forme : $y' = ay + b$ avec comme condition initiale : pour $t = 0$ s on a $T = T_i = 10^\circ\text{C}$

Remarque : les valeurs des coefficients A et K ont été obtenus par « identification » avec l'exercice de thermodynamique ; $A = \frac{3}{\rho C 4\pi R^3}$ et $K = -65 \times 4\pi R^2$ avec ρ la masse volumique, c la capacité thermique de l'eau liquide et R le rayon de la sphère (goutte d'eau)

e. On sait que les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions f de la forme : $f(t) = \alpha + \beta e^{at}$ avec $t \mapsto \alpha$ l'unique solution constante de l'équation différentielle.

Détermination de α :

Soit f constante solution de l'équation différentielle : on a : $f' = 0$ et donc $0 = af + b = a\alpha + b$

donc $\alpha = \frac{-b}{a}$

Détermination de β :

On utilise la condition initiale : $f(0) = 10$ donc $\frac{-b}{a} + \beta e^0 = 10$ donc $\beta = \frac{b}{a} + 10$

On a donc : $f(t) = \frac{-b}{a} + \left(\frac{b}{a} + 10\right) e^{at}$ avec $a = AK$ et $b = -AKTe$

On peut en déduire que $\frac{b}{a} = -Te$ et comme $A = 7,14 \cdot 10^3$ et $K = -3,27 \cdot 10^{-5}$

on a : $Te = -15$ et $a = AK = -0,2335$

Conclusion la solution de cette équation différentielle est la fonction f définie par :

$$f(t) = -15 + 25e^{-0,2335t}$$

f. Au bout de 5 s : on pose $t = 5$ et on a $f(5) = -15 + 25e^{-0,2335 \times 5} = -7,2 \text{ } ^\circ\text{C}$

A une température négative, la goutte d'eau n'est pas solide. Il s'agit du phénomène de surfusion.

Remarque : Si la surfusion a lieu à une température de -5°C , pour trouver le temps nécessaire pour atteindre la température de surfusion, on résout l'équation :

$$f(t) = -5 ; \text{ on obtient } t = -\frac{\ln\left(\frac{2}{5}\right)}{0,2335} = 3,92 \text{ s}$$

III Propriétés physiques de la neige de culture

1) Forme

Au lieu de ressembler à des flocons, les cristaux de neige de culture ressemblent plutôt à des petits grains comme du sucre cristallisé. La différence est due au temps de suspension dans l'air : alors que les gouttelettes provenant des nuages tombent parfois pendant un temps assez long, ceux des canons à neige retombent en à peine 2 à 20 secondes environ dans l'air. Du coup, ils n'ont pas le temps de se transformer en cristaux de différentes formes.

2) Masse volumique

La forme de ces cristaux en grains qui emprisonnent moins d'air entraîne que la masse volumique de la neige de culture est jusqu'à 4 fois supérieure à celle de la neige naturelle. Elle varie de 330 à 450 kg par m³. Elle varie aussi en fonction de la température, de la vitesse du vent et de l'humidité de l'air.

3) Réglage d'un canon à neige

Le nivologue, dans son usine à neige, adapte le débit de l'eau dans le canon en fonction des mesures de ces trois paramètres : il peut fabriquer de la neige avec une densité et une TEL variable. Son choix est un équilibre entre quantité d'eau nécessaire, la densité et le type de neige (sèche humide ou mouillée) qu'il veut obtenir et qui lui est demandé par les exploitants des stations.

Les installations sont supervisées via un logiciel spécialisé et le nivologue peut gérer les qualités de neige, les quotas de production et les temps de fonctionnement avec une vision d'ensemble ou individualisée sur chaque paramètre.

IV Conséquences

1) Importance de la masse volumique

La masse volumique supérieure de la neige de culture lui confère une plus grande facilité de cohésion et un potentiel de résistances mécaniques plus élevé. Elle se tasse très peu : en effet elle est plus dense, plus stable et résiste mieux au damage. La résistance de la neige de culture au damage est intéressante car elle en fait une surface plus résistante aux agressions (températures, pluie, enfoncement dû au passage des skieurs et usure du temps).

Certes la neige de culture est plus délicate à damer ; elle pèse le double de poids au mètre cube (on dit qu'il faut 1m³ d'eau pour faire 2m³ de neige). De fait, après sa sortie des canons à neige, elle est souvent laissée intacte en bosse pendant 24H afin que l'eau s'enfonce naturellement dans le sol : on dit qu'elle « percole » et peut ainsi congeler sans trop d'humidité. Elle ne doit pas être compactée dans sa phase d'humidité sous peine de voir l'eau remonter à la surface du manteau neigeux et créer ainsi une pellicule de glace.

2) Importance de la TEL

La TEL est importante : on a vu qu'en fonction de sa teneur en eau liquide, on obtient plusieurs types de neige : sèche, humide ou mouillée. Précisons ce point :

- Dans le cas d'une neige sèche, les échanges thermiques dirigeront le cristal de neige vers un grain fin représentant un atout de pérennité du manteau neigeux et une neige plus « agréable » à skier. De plus, le travail de la neige peut se faire de façon plus rapide et plus douce pour les chenillettes après un temps normal et préférentiel d'égouttage, ce qui de toute manière représente un coût à ne pas mésestimer dans le calcul final de fonctionnement des usines.

- Dans le cas d'une neige humide, dans certaines conditions de température (températures extérieures supérieures à 0°C) on peut avoir un phénomène de percolation et de ruissellement et la formation de plaques de glace ou de verglas très dangereuses pour les skieurs moyens.

Enfin la glisse du skieur est aussi liée à la TEL car un ski ne glisse pas sur la neige mais sur une mince pellicule d'eau : lorsque la semelle de ski avance sur la neige, cela provoque un échauffement (par frottements et pression) qui fait fondre la neige. Ce film d'eau de quelques microns a une épaisseur optimale : s'il est trop faible, les cristaux de neige collent le ski au sol, ce qui arrive souvent en début de descente sur une neige trop froide ; s'il est trop épais, là aussi les skis sont collés au sol par effet de ventouse : c'est une situation qui arrive souvent au printemps quand la neige est humide. Cela nécessiterait l'étude du manteau neigeux (neige au sol) avec différents paramètres qui interviennent : mélange de différents types de neige - albédo - gradient - épaisseur du manteau neigeux. Des études existent notamment pour prévenir le risque d'avalanches mais cela dépassait notre propos.

Conclusions et perspectives

1. Une remarque tout d'abord : on peut bannir le terme de neige artificielle que l'on emploie souvent ; en effet, la neige de culture n'a rien d'artificiel !!

Concernant notre problématique de départ, à la différence des détracteurs inconditionnels de la neige de culture (essentiellement pour des raisons écologiques) ou des partisans de cette neige (pour des raisons économiques), notre travail nous permet d'avoir une réponse plus nuancée :

- La neige de culture est « bonne » pour le skieur car elle permet d'avoir un domaine ouvert en totalité et sur toute la saison : plus de problème de caillou ou d'herbe sur les pistes et plus d'angoisse sur la réponse à la question : y-aura-t-il de la neige 6 mois après avoir réservé mon séjour ?
- A cause de sa masse volumique plus importante, elle contient moins d'air et plus d'eau et donc résiste mieux aux passages des skieurs ; elle se tasse moins et est donc plus « douce à skier ».
- Cependant, cette neige contenant moins d'air et plus d'eau, lors des chutes, les chocs sont plus « durs » et peuvent entraîner des blessures plus importantes.
- Il faut aussi faire attention aussi à la maîtrise de sa TEL car elle peut très vite se transformer en plaques de verglas et générer ainsi beaucoup plus d'accidents.
- A souligner enfin la présence sur le bord des pistes des canons à neige, pièges supplémentaires à éviter lors des descentes.

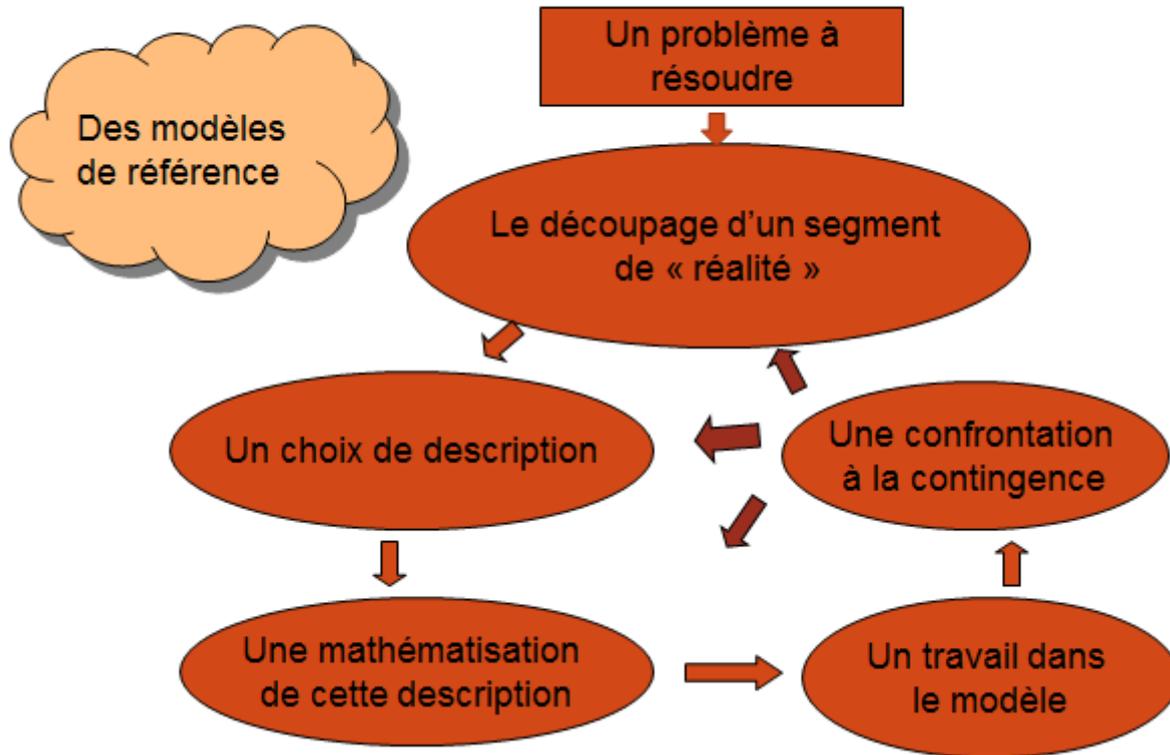
Pour les exploitants des stations, il s'agit de trouver un juste équilibre entre les coûts d'investissement, de fonctionnement, écologiques et la satisfaction de la clientèle....Ils sont confrontés à deux problématiques :

- Suppléer à un enneigement naturel déficitaire et préserver la skiabilité d'une partie du domaine : dans ce cas les besoins sont moins intenses et les possibilités thermiques donnent une marge de manœuvre importante
- Lorsque l'enneigement naturel fait défaut, le problème est plus complexe et la marge de manœuvre plus étroite. On procède en plusieurs étapes : d'abord, en début de saison sur des sols pas ou peu gelés, on arrose avec une neige à forte TEL pour faire descendre le gel, puis l'enneigement véritable des pistes pourra commencer.

Pour les adversaires de la neige de culture, ce processus utilise trop d'eau et trop d'énergie .L'argent dépensé devrait être utilisé pour préserver la montagne et non pour la détruire.

2. Concernant le travail de modélisation qui nous était demandé, reprenons le schéma du cycle de modélisation :

Le processus de modélisation



On peut constater que les différentes étapes ont bien eu lieu ainsi que les interactions.

- Problème à résoudre : les: « qualités » de la neige de culture
- Découpage : choix entre différentes études : les canons, fonctionnement et positionnement sur les pistes ou travail sur la neige
- Confrontation à la contingence : mise en évidence d'une multitude de paramètres plus ou moins utilisables (qualitatifs – quantitatifs- aléatoires ou liée à une situation très particulière)
- Mathématisation de la description : utilisation des statistiques ou traduction des notions physiques ou chimiques
- Travail sur le modèle : notamment avec ses limites

Certaines étapes ont été plus présentes que d'autres. Le sujet était peut-être trop « physique et chimie » pour permettre une réelle appropriation mathématique.

3. Enfin concernant le réinvestissement dans les classes, il peut se faire partiellement par l'intermédiaire des exercices proposés aux différentes étapes et à différents niveaux scolaires. Par contre, l'utilisation de la problématique globale supposerait un temps de recherche très important et ne pourrait se concevoir que dans le cadre d'un TPE ou d'un thème d'un enseignement d'exploration.

Annexe

Mail de Mr Morin du centre d'étude de la neige en réponse à nos interrogations concernant le modèle présent dans le texte de Mr Pahaut.

« La relation empirique entre masse volumique et la vitesse du vent et la température de l'air 'applique à la neige naturelle et a été établie consécutivement à des expériences menées par E. Pahaut dans les années 1970 au site expérimental du col de Porte.

L'expression analytique que nous utilisons dans le modèle numérique de manteau neigeux Crocus est la suivante :

$$\rho = a + b \cdot (T_a - T_f) + c \cdot U^{1/2}$$

où T_f est le point de fusion de l'eau (273.15 K), T_a est la température de l'air à 2m, $a = 106 \text{ kg m}^{-3}$, $b = 6 \text{ kg m}^{-3} \text{ K}^{-1}$ et $c = 26 \text{ kg m}^{-7/2} \text{ s}^{-1/2}$.

En outre, la valeur minimale de ρ est bornée à 50 kg m^{-3} .

Il faut bien voir que cette formule a été "calée" pour un usage alpin et que sous d'autres latitudes, par exemple en régions polaires, elle a toutes les chances de ne pas s'appliquer telle quelle.

Pour ce qui est de la neige artificielle, nous ne disposons pas de formule de ce type dans la mesure où nos problématiques s'attachent essentiellement à caractériser la neige naturelle pour des applications à la prévision du risque avalanche et le rôle que joue le manteau neigeux dans le système climatique ou en hydrologie. Il y a fort à parier que la relation empirique ci-dessus ne s'applique pas telle quelle à la neige de culture, puisque son mécanisme de formation est différent de la neige naturelle, ce qui se traduit par une morphologie différente à micro-échelle.

Enfin, concernant les données brutes, je suis au regret de devoir vous répondre que nous n'avons plus les données brutes de cette étude sous un format traitable. Seule une numérisation du document dont vous disposez déjà pourra vous permettre d'accéder à des données brutes. »

Bibliographie

Texte de E. Pahaut telechargeable :

http://www.anao.org/savoir/nivologie/pahaut_cristaux.pdf

Pour la science, n°352 février 2007.

<http://www.its.caltech.edu/~atomic/snowcrystals/>

<http://membres.multimania.fr/cristauxdeneige/resume.html>

http://www.anao.org/savoir/etudiant/metamorphoses_de_la_neige.html

<http://www.anpc.com/recueil/chapitre%203-p24-36.htm>

http://alainrobichon.free.fr/Concours/CCP_PC_PH1_01.pdf

<http://www.adsp.org/data/document/avis-csc.pdf>

<http://www-old.cnrm.meteo.fr/curieux/neige/fiche/neige.htm>

http://fr.wikipedia.org/wiki/Canon_%C3%A0_neige

Direction générale de l'enseignement scolaire - Bureau des programmes d'enseignement -
Projet de document d'accompagnement - Organisations et gestion des données – Janvier
2007.