

IREN
PARIS 7

Ldard

Laboratoire de didactique André Revuz
Mathématiques • Physique • Chimie

**Cahiers du laboratoire de didactique
André Revuz
n°3
janvier 2011**

**La modélisation dans l'enseignement des
mathématiques**

Mise en perspective critique

Coordonné par Alain Kuzniak et Laurent Vivier

Caroline BULF, Richard CABASSUT, Bernadette DENYS, Jacques DOUAIRE, Marie-Pierre GALISSON,
Ana MESQUITA, Alain KUZNIAK, Cécile OUVRIER-BUFFET, Bernard PARZYSZ, Marie-Jeanne PERRIN-
GLORIAN, André PRESSIAT, Laurent VIVIER

ISSN : 2105-5203

INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT

La modélisation dans l'enseignement des mathématiques

Mise en perspective critique

Coordonné par Alain KUZNIAK et Laurent VIVIER

Caroline BULF
Richard CABASSUT
Bernadette DENYS
Jacques DOUAIRE
Marie-Pierre GALISSON
Ana MESQUITA
Alain KUZNIAK
Cécile OUVRIER-BUFFET
Bernard PARZYSZ
Marie-Jeanne PERRIN-GLORIAN
André PRESSIAT
Laurent VIVIER

INTRODUCTION

Dans cette brochure, qui fait suite au cahier de Didirem n°58, nous nous intéressons plus particulièrement à la question de la modélisation comme objet d'enseignement et d'apprentissage en étroite liaison avec les mathématiques. Pour comprendre cette relation, il est utile de reprendre la discussion autour de l'usage des mathématiques dans et pour la société et, pour prendre un peu de recul, de revenir à Carlo Bourlet lorsqu'il commentait la réforme de 1902. A cette époque, les réformateurs confrontés à un accroissement rapide du savoir humain dans tous les domaines décidaient de privilégier dans l'enseignement des contenus laissant la place à des connaissances nouvelles, à la fois plus proches de la science en œuvre et des applications nouvelles des mathématiques, dans l'industrie mais aussi dans le monde agricole, alors fort développé.

Il y a un premier point (...) sur lequel l'accord est parfait : c'est la nécessité d'harmoniser notre enseignement avec les besoins de la vie.

La conclusion qui en découle est inéluctable : dans nos classes secondaires, le professeur de mathématiques, soucieux, non pas d'orner les esprits de ses élèves, mais de rendre service à sa race et à l'humanité, doit résolument écarter de son enseignement tout ce qui n'aura pas une utilité plus ou moins directe dans les applications. (Bourlet, 1910, p. 376)¹

La réforme de 1902 a tenté de concilier les deux pôles, utilitariste et culturel, des mathématiques en augmentant à la fois le savoir proprement mathématique tout en l'orientant vers ses usages dans le monde réel. Ce projet a connu de nombreux soubresauts et aléas au cours du XX^e siècle mais il paraît reprendre de la vigueur en ce début de siècle, comme en témoignent les travaux sur l'enseignement prenant appui sur des activités de modélisation.

¹ Bourlet, C. (1910). La pénétration réciproque des mathématiques pures et des mathématiques appliquées dans l'enseignement secondaire. *L'enseignement mathématiques*. 12, 372-387 (en ligne).

Comme nous l'avions vu dans la brochure n°58, les chercheurs du courant *Realistic Mathematics Education* se sont préoccupés de mettre en place un type d'activités liées au monde réel. Pour cela, ils ont introduit une notion de modèle très étendue : le modèle est un objet qui permet la transition entre le monde réel et le monde des mathématiques, mais il est également un objet mathématique sur lequel s'appuie le processus de mathématisation. Dans le même temps, les domaines d'expérience promus par Boero travaillaient cette articulation entre le monde réel et l'enseignement en créant une dynamique sémiotique.

Ces deux approches ont en commun leur intérêt premier pour le contenu mathématique et elles répondent à la demande sociale par ce qui peut apparaître comme un « tour de passe-passe » aux plus fervents tenants de l'approche utilitariste des mathématiques. Pour ces derniers, il importe essentiellement de savoir appliquer les mathématiques dans la vie quotidienne et professionnelle, notamment en développant un ensemble de compétences autour de la modélisation. Nous avons décidé d'explorer les arguments des défenseurs de cette idée à partir d'une analyse de deux numéros de la revue ZDM parus en 2006 et qui proposaient un regard global sur les perspectives internationales sur la modélisation dans l'enseignement des mathématiques.

Les articles de ZDM résumés et discutés dans cette brochure ont été réorganisés en trois parties selon leur positionnement relatif à la modélisation. Ces trois parties sont brièvement présentées ci-dessous. À la suite des notes de lectures critiques des articles, on trouvera également en fin de brochure des fiches descriptives synthétiques pour chaque article ainsi qu'un sommaire.

1. Les approches par compétences

Dans la présente brochure, nous avons choisi de présenter le questionnement autour de la modélisation à partir du point de vue de Kaiser, rédactrice du numéro spécial de ZDM, pour qui le mot de modélisation recouvre également une théorie de la modélisation pour l'enseignement. Le projet est ambitieux, il s'appuie d'abord sur un cercle de modélisation dont nous verrons les différentes variantes dans les textes que nous avons étudiés.

Ce cercle n'a pas qu'une fonction descriptive. Il prescrit également un canevas pour le développement d'un enseignement de la modélisation à partir de la résolution d'un certain nombre de problèmes. La résolution de problèmes, intégrée dans la dynamique du cercle de modélisation, passe par différentes phases qui nécessitent des compétences et des savoirs mathématiques, mais aussi extra-mathématiques – ces derniers ont, dans cette perspective, la même importance et doivent être clairement identifiés. Au cercle de modélisation se superpose un cercle de compétences qu'il faudra développer pour les élèves et présenter en formation d'enseignants.

Une première série d'articles s'intéresse à cette dynamique de la modélisation en s'appuyant sur une approche qui se veut empirique et non normative dans le sens où, pour les auteurs, elle s'appuie sur l'expérience et ne résulte pas mécaniquement de la théorie. D'où la nécessité, pour ce courant, de développer des études de parcours d'élèves, de répertorier certaines difficultés et enfin de s'intéresser de manière prioritaire à la formation des enseignants. L'approche KOM (Niss & Jensen, 2002)² synthétise cet ensemble d'approches que l'on peut qualifier d'éducationnelles, comme le font les éditeurs de la revue, ou bien d'approches par compétences.

² Niss, M. & Jensen, T.H. (2002). *Kompetencer og matematiklæring. Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisningen i Danmark*. (in Danish) Copenhagen: Undervisningsministeriet.

L'article *What are modelling competencies?* de Katja Maaß, illustre bien cette double préoccupation en présentant des études empiriques montrant les compétences développées par les élèves lors d'un enseignement de la modélisation et les difficultés qu'ils rencontrent, tout en identifiant les facteurs qui influencent le développement de ces compétences.

En complément à l'article précédent, Rita Borromeo Ferri dans *Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process*, donne une description d'un cycle de modélisation adaptée à une étude cognitive de parcours de lycéens résolvant des problèmes. Elle se démarque des approches dites normatives, car idéales, pour atteindre les parcours individuels (approche dite « empirique » dans l'article).

Dans la filiation des articles précédents, mais dans une perspective interdisciplinaire et de rénovation curriculaire, l'article *Functions: a modelling tool in mathematics and science* de Claus Michelsen suggère que des compétences interdisciplinaires au sens de Niss & Jensen (2002)² peuvent permettre une approche globale des contenus en mathématiques et en sciences (l'article traite le cas de la physique). Cette approche faciliterait le transfert, toujours difficile, de méthodes apprises dans ces différents domaines.

L'article *Simple thinking using complex math vs. complex thinking using simple math—A study using model eliciting activities to compare students' abilities in standardized tests to their modelling abilities*, de Steffen M. Iversen et Christine J. Larson, s'inscrit partiellement dans ce programme de recherches, en particulierisant l'étude sur le cas des compétences mobilisées par les étudiants dans le cadre d'activités de modélisation. Il se situe aussi, et c'est là un de ses intérêts principaux, dans un contexte d'évaluation.

Enfin, l'article *Faces of mathematical modeling* de Thomas Lingefjärd donne l'occasion à un professeur « de terrain » de présenter ses expériences d'enseignement de la modélisation.

2. Les approches « critiques »

A côté de l'approche par compétences de la modélisation, largement dominante dans le numéro 38 de ZDM mais également dans les instances européennes de décision, apparaissent des approches que nous qualifierons de « critiques », car elles critiquent de fait le modèle du cercle de modélisation.

Dans le cas de l'article *Mathematical modelling in classroom: a socio-critical and discursive perspective* de Jonei Cerqueira Barbosa, l'appui sur la modélisation permet une critique globale de l'acte éducatif et, plus largement, une critique sociale. Cette dernière intègre la modélisation dans le contexte social même de l'élève en rejetant les approches « diagrammatiques » dominantes.

Sur le même mode critique, mais cette fois au niveau de l'approche théorique, Francisco Javier García, Josep Gascón, Luisa Ruiz Higuera and Marianna Bosch (*Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics*) proposent une approche basée sur la TAD.

Plus difficile à situer apparaît l'article *Modeling conceptions revisited* de Bharath Sriraman et Richard A. Lesh qui propose une vision élargie de la place de la modélisation dans l'enseignement avec un programme de recherches, très influencé par une vision libérale de la société.

3. Les approches « utilisatrices »

Il s'agit ici d'approches – ou plus exactement d'études – qui vont s'appuyer sur la vogue actuelle de la modélisation dans la classe, soit pour promouvoir certaines méthodes d'enseignement, soit pour continuer sur d'autres supports d'études leur recherche qui relève plus largement d'autres champs que celui de l'enseignement des mathématiques.

Dans le premier cas, on peut citer l'article *Modelling in Mathematics Classrooms : reflections on past developments and the future* de Hugh Burkhardt. Dans cet article, après avoir dressé le constat de la place de la modélisation dans les programmes à travers ces quarante dernières années, l'auteur propose les grandes lignes d'un programme (curriculaire voire politique) dans le but d'améliorer l'enseignement actuel qui intégrerait de manière plus efficace la modélisation (« faire de la modélisation une réalité dans les programmes ») ce qui permettrait d'aboutir à un enseignement dit de « mathématiques fonctionnelles » (*functional mathematics*).

On peut classer dans le second cas l'article *Enhancing the image of mathematics by association with simple pleasures from real world contexts* de Robyn Pierce and Kaye Stacey, axé sur la motivation des élèves qu'il s'agit de faire entrer dans le monde des mathématiques en s'appuyant sur leurs goûts, sur un contexte familier de leur vie quotidienne et en exploitant des sources de plaisirs comme d'aller au *fast-food*.

Helen M. Doerr (*Teachers' ways of listening and responding to students' emerging mathematical models*) fait référence aux travaux de Davis, qui souligne trois fonctions dans l'écoute portée par les enseignants à leurs élèves, et aux travaux de Heid, pour qui les enseignants utilisent davantage les échanges avec les élèves pour les amener à la bonne réponse que pour enquêter sur leur pensée profonde. Elle analyse alors la manière dont des professeurs ont regardé et interprété les façons de penser des élèves relativement aux fonctions exponentielles, puis leurs réponses aux réflexions de leurs élèves dans leurs pratiques de classe.

Partie 1

LES APPROCHES PAR COMPÉTENCES

What are modelling competencies?

K. Maaß

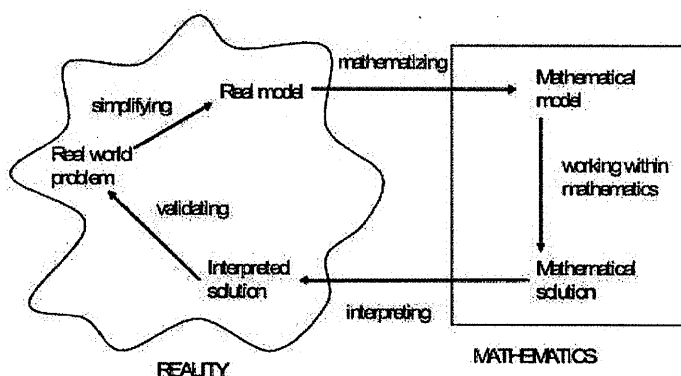
ZDM 2006 Vol.38 (2) pp.113-142

Introduction : Une recherche représentative de l'école allemande

La réflexion sur l'enseignement de la modélisation en Allemagne s'est regroupée dans une communauté dynamique (colloques, séminaires, édition, groupes de travail, programmes de recherche nationaux et plurinationaux) dans laquelle Werner Blum de l'Université de Kassel a joué un rôle fondateur – il a par exemple Blum a présidé l'étude ICMI de 2007 sur la modélisation (Blum 2007). Cette communauté a participé à la création en 1983 de la communauté internationale des enseignants de modélisation mathématiques et des applications (ICTMA) qui est depuis un groupe d'étude affilié à la commission internationale sur l'enseignement des mathématiques. Le congrès d'ICTMA de 2009 a eu lieu à Hambourg et était organisé par Gabrielle Kaiser. Blum a dirigé la thèse de Kaiser qui a co-dirigé la thèse de Katja Maaß : cette filiation didactique illustre le passage entre générations au sein de cette communauté didactique. Ce courant didactique a été assez influent ces dernières années dans l'enseignement allemand : Blum est expert du groupe allemand et du groupe international de PISA. On sait le rôle important de la relation des mathématiques avec le monde réel dans les études PISA. Les études PISA ont influencé en Allemagne le programme actuel de mathématiques de 2004 de l'enseignement primaire et secondaire : modéliser apparaît comme une des huit idées directrices du programme de mathématiques de l'enseignement secondaire. L'article de Maaß étudie les compétences de modélisation dans l'enseignement secondaire. Il précise tout d'abord les notions de modélisation et de compétence. Il rend compte ensuite d'une recherche empirique conduite dans des classes. Il illustre donc l'importance de la modélisation dans la recherche en didactique en Allemagne et l'importance de l'entrée par les compétences, en cohérence avec les développements de PISA.

Une conception allemande de la modélisation : l'importance donnée au monde réel par rapport à la connaissance du monde mathématique

Un problème de modélisation est un problème du monde réel qui est résolu en utilisant une représentation de ce problème du monde réel par un problème mathématique, en suivant le cycle de modélisation suivant inspiré de (Blum 1996, p.18) :



On observe alors :

1. une conception qui limite au monde réel la modélisation. On peut trouver des conceptions françaises qui élargissent et peuvent concevoir une modélisation intra-mathématique : « toute discipline, y compris les mathématiques elles mêmes, peut devenir le milieu de modélisations » (Brousseau 2003, p.26). Chevallard (1989, p.53) conçoit « un système, mathématique ou non mathématique, et un modèle (mathématique) de ce système ».
2. une conception qui considère que les problèmes de modélisations sont des problèmes complexes et ouverts tandis que les problèmes suivants, listés par (Kaiser 1995, p.67), ne sont pas considérés comme de vrais problèmes de modélisation : problèmes à énoncé (*word problems*), à formulation des tâches dans le langage quotidien, problèmes d'applications de procédures mathématiques routinières, illustrations de concepts (comme la température qui permet d'introduire les nombre négatifs). La complexité et l'ouverture de la situation du monde réel obligent à construire un modèle en faisant des hypothèses supplémentaires sur le monde réel (afin de le simplifier et de le rendre modélisable). Ces hypothèses sont souvent validées par des connaissances et des techniques extra-mathématiques. Dans cette conception, valorisant les problèmes ouverts et complexes, on a l'impression (qui est peut-être fausse) qu'on néglige la réflexion sur l'acquisition des modèles mathématiques élémentaires en terme de parcours d'étude et de recherche.
3. Le terme « modèle mathématique » n'est pas clairement défini mais d'après le contexte du cycle de modélisation, on part d'un problème du monde réel. On peut représenter ce problème du monde réel par un premier problème simplifié mais qui est encore dans le monde réel et qu'on appelle modèle réel. On représente alors ce problème réel simplifié par un problème mathématique (qui ne fait plus intervenir le monde réel). Un modèle mathématique serait donc un problème mathématique qui représente un problème réel.
4. L'authenticité, comme qualité des problèmes de modélisation, joue un rôle important. Un des arguments est que l'authenticité est plus motivante. On peut parfois s'interroger si, pédagogiquement, du « faux authentique » ne permet pas de mieux cibler l'apprentissage visé (à rapprocher de la discussion sur le « faux concret »). On est aussi parfois perplexe lorsque la solution trouvée au problème n'évoque pas celle utilisée dans la vraie vie (hors de l'institution scolaire) où le problème a été résolu.

Compétences mathématiques et compétences de modélisation

La compétence mathématique est inspirée de (Niss 2004 p.120) : aptitude à comprendre, juger, faire et utiliser des mathématiques dans des contextes et situations intra et extra-mathématiques dans lesquelles les mathématiques jouent ou peuvent jouer un rôle.

La compétence de modélisation est inspirée de (Blum et Kaiser 1997, p.9) et comprend les sous compétences décrites dans le cycle de modélisation :

- Comprendre le problème réel et établir un modèle basé sur la réalité (modèle réel).
- Etablir un modèle mathématique du modèle réel.
- Résoudre les questions mathématiques à l'intérieur du modèle mathématique
- Interpréter les résultats mathématiques dans la situation réelle.
- Valider la solution.

Métacognition

Dans le sens de (Baumert et *al.* 2001 p.271) la métacognition est un apprentissage auto régulé : aptitude de l'apprenant à définir son propre but, à utiliser les méthodes et techniques appropriées aux contenus et au but, à examiner et à juger son propre processus.

Chez (Sjüts 2003 p.18) la métacognition est la pensée sur sa propre pensée et comprend trois parties : la métacognition déclarative est la connaissance diagnostique sur sa propre pensée sur les tâches et connaissance stratégique sur les voies pour résoudre le problème ; la métacognition procédurale est la planification, l'étude et le jugement pour contrôler ses propres actions ; la métacognition motivationnelle est la motivation et la volonté pour utiliser la métacognition.

La métacognition est une compétence à développer chez les élèves parce qu'elle favorise le développement des compétences de modélisation.

Etudes empiriques sur les compétences de modélisation

L'étude empirique présentée est issue de la thèse de l'auteur (Maaß 2004) qui était enseignant dans les deux classes du dispositif de recherche.

Le but est de montrer quelles sous-compétences de modélisation sont nécessaires pour réaliser un processus de modélisation.

Deux classes parallèles (47 élèves) de grade 7 (13 ans, 5ème française) vont suivre un cours sur la modélisation (d'avril à juillet 2002). (Les exemples de modélisation devaient être en rapport avec le curriculum des classes 7 et 8 du Bade-Wurtemberg.) Le dispositif comprend du travail en groupes d'élèves, des discussions en classe entière, du soutien à la métacognition des élèves. Six unités de modélisations sont développées, traitant de question comme : Quelle est l'aire de la surface d'une Porsche 911 ? Combien de personnes sont-elles prises dans un bouchon d'automobiles de 25 km de long ? Comment présentez-vous la facture mensuelle d'un téléphone portable en fonction de son utilisation ?... L'exemple de l'unité sur l'aire de la Porsche est traité en détail dans l'article. Chaque unité a une durée variable (1 à 12 leçons). Aucune information n'est donnée sur la place qu'occupe ce cours sur la modélisation dans le volume d'enseignement des mathématiques ni sur les parties du programme officiel qui sont considérées comme traitées à l'aide de ce dispositif (y compris pour l'exemple détaillée sur la Porsche).

Données produites

Sur les 42 élèves, les productions de 35 élèves sont retenus pour leur pertinence. Les critères de cette sélection ne sont pas donnés. Les données produites sont composées des éléments suivants :

- Un test pour évaluer la compétence mathématique (test de (Blum et *al.* 1994 p.150)),
- Des tests sur la modélisation (avant et après la période, avec 10 tâches qui testent des sous-compétences). Certains textes de tâches sont changés légèrement après le cours pour éviter un déjà-vu (il n'est pas précisé si la correction des tests de début est communiquée aux élèves).
- Des tests écrits en classe et des devoirs à la maison : en comparaison aux tests précédents sur la modélisation la compétence de résolution de tout le processus de modélisation est également testée.
- Des cartes conceptuelles pour rechercher les compétences métacognitives de modélisation (Tergan 1988 cité par Hasemann, Mansfield 1995, p.45) : les apprenants doivent développer une représentation visuelle contenant des termes donnés (en relation

avec le processus de modélisation et aux contextes des unités d'enseignement) et séparer les termes qu'ils ne peuvent pas assigner. Une carte est dessinée en milieu de période et une en fin de période.

- Des entretiens pour évaluer les compétences de modélisation et la métacognition : au début de l'entretien l'apprenant reçoit une tâche de modélisation avec une mauvaise solution. Et on lui demande ce qu'il pense de la mauvaise solution et comment il aurait procédé. Ensuite on demande à l'étudiant de décrire son processus de modélisation (pour évaluer ses compétences en métacognition).
- Des journaux de bord des apprenants et des questionnaires (essentiellement pour évaluer les croyances mathématiques).

Evaluation des données produites

On compare sur un même graphe les résultats aux tests sur les compétences mathématiques et sur les compétences de modélisation.

Pour les tests de modélisation, les devoirs et les interviews : dans la résolution d'une tâche par un élève on repère quelles sont les faiblesses dans les sous-compétences qui apparaissent, les compétences métacognitives, la relation entre la qualité de la solution et la complexité de la tâche ou le degré de proximité avec la leçon précédente. Ces repères permettent de construire des profils d'élèves, et des types idéaux d'élèves (Weber 1904, cité par Gerhardt 1990, p. 437).

Résultats des études

Les élèves de l'école secondaire inférieure (équivalent au collège) sont capables de développer des compétences de modélisation, et pas seulement des sous-compétences, avec une capacité à réaliser l'ensemble du processus de modélisation. À la fin de l'étude, la plupart des étudiants peuvent résoudre des tâches simples de modélisation mais il y a encore des difficultés dans les tâches complexes.

On repère les erreurs suivantes :

- dans la détermination du modèle réel : les hypothèses simplifient trop la réalité ; le modèle réel est inadéquat ; les hypothèses sont mauvaises ;
- dans la détermination du modèle mathématique : usages de symboles inadéquats ; usage de mauvais algorithmes ou formules ;
- dans le traitement mathématique : erreurs de calculs ou calculs inachevés ;
- dans l'interprétation des solutions : interprétation absente ou incorrecte ;
- dans la validation de la situation : absente, incorrecte ou superficielle ;
- dans le processus complet de modélisation : descriptions d'aspects du monde réel qui ne sont pas utilisés dans la modélisation ; on perd la trace de ses procédures ; le processus de modélisation dans son entier n'est pas ou peu décrit.

Concernant la compétence métacognitive, pour une grande partie des étudiants, des compétences métacognitives appropriées de modélisation sont reconstituables. Il y a une connaissance du processus de modélisation rare à mi-parcours mais importante à la fin : beaucoup deviennent capables d'établir des relations entre les tâches et les termes « modèle réel », « modèle mathématique », « réalité », « solution mathématique ». Il y a une connaissance sur la subjectivité du processus de modélisation, sur les erreurs, et sur la validation du modèle.

De fausses conceptions apparaissent : confusion entre deviner et simplifier (la réalité) ; penser que simplifier c'est ramener à des calculs simples ; pas de différence entre modèle réel et modèle mathématique ; le terme « modèle réel » ne peut pas être expliqué ; seulement un

nombre (pas un graphe ou une fonction) est considéré comme une solution ; un nombre représente toujours un résultat exact et non ambigu ; passage de la solution mathématique à la solution réelle en arrondissant.

Des facteurs influencent les compétences de modélisation :

- une bonne compétence mathématique a un impact sur les compétences de modélisation ;
- une faiblesse en modélisation correspond à des fausses conceptions en métacognition ;
- les connaissances sur le processus de modélisation aident les étudiants ;
- les élèves qui n'ont pas un processus de modélisation orienté vers un but sont souvent arrêtés ;
- l'absence de compétences en argumentation est un obstacle à l'acquisition de compétences de modélisation ;
- une relation étroite entre une attitude positive envers des exemples de modélisation et les performances correspondantes est observée.

Conclusion

Les compétences sur la modélisation ne se limitent pas aux quatre sous-compétences des étapes du cycle de modélisation. D'importants facteurs favorisent l'acquisition de compétences de modélisation : la métacognition, la structuration des faits, l'argumentation, une attitude positive. Il faut rendre sensible le professeur à la variété des sous-compétences. Fournir aux professeurs des tâches de modélisation n'est pas suffisant : il faut qu'ils connaissent et expérimentent des méthodes d'enseignement pertinentes, ce qui représente un enjeu pour la formation des enseignants.

Aucune mention n'est faite de l'adéquation au curriculum officiel ni de l'articulation avec les autres parties du curriculum et du cours de mathématiques de l'année. Pour les élèves en difficultés sur la modélisation, on aurait aimé des propositions pour les aider à mieux modéliser.

Références

Baumert, J., Klieme, E., Neubrand, M., Prenzel, M., Schiefele, U., Schneider, W., et al. (2001). *Pisa 2000, Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich*. Opladen: Leske + Budrich.

Blum, W., Kaiser, G., Burges, D. & Green, N. (1994). Entwicklung und Erprobung eines Tests zur, mathematischen Leistungsfähigkeit "deutscher und englischer Lernender in der Sekundarstufe I. *Journal für Mathematikdidaktik*, 15(1/2), 149-168.

Blum, W., & Kaiser, G. (1997). Vergleichende empirische Untersuchungen zu mathematischen Anwendungsfähigkeiten von englischen und deutschen Lernenden. Unpublished application to Deutsche Forschungsgesellschaft.

Brousseau Guy (2003) Pratique de la modélisation par les élèves et complexité didactique. In Raoult, J.-P. (Coordinateur), *La modélisation*. Comité scientifique des IREM. Paris : IREM de Paris 7.

Chevallard Yves (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x n°19*, pp. 43-75, 1989.

Gerhardt, U. (1990). Typenbildung. In U. Flick, E. von Kardorff, & E. Steinke, (Eds.),

Handbuch qualitative Sozial-forschung. Grundlagen, Konzepte, Methoden und Anwendungen, (pp. 435-439). München: Beltz Psychologie Verlags Union.

Hasemann, K., & Mansfield, H. (1995). Concept Mapping in research on mathematical knowledge development: Background, Methods, Findings and conclusions. *Educational studies in mathematics*, 29, 45-72.

Kaiser Gabrielle (1995) Realitätsbezügeim Mathematikunterricht – Ein Überblick über die aktuelle und historische Diskussion. In Grauman et al. (Eds) *Materialen für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht*. Franzbecker., Bad Salzdetfurth ü. Hildesheim.

Maaß, K. (2004): Mathematisches Modellieren im Unterricht – Ergebnisse einer empirischen Studie. Hildesheim, Berlin: Verlag Franzbecker.

Niss, M. (2004). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The danish KOM project. In A. Gagtsis & Papastavridis (eds): *3rd Mediterranean on mathematical education*, 3-5 January 2003, Athens, Greece. (pp. 115-124). Athens: The Hellenic mathematical society, 2003.

Sjuts, J. (2003). Metakognition per didaktisch-sozialem Vertrag. *Journal für Mathematikdidaktik*, 24(1), 18–40.

Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process

R. Borromeo-Ferri

ZDM 2006 Vol.38 (2) pp.86-95

L'auteur Rita Borromeo-Ferri travaille à l'Université de Hambourg en didactique des mathématiques dans le département des sciences de l'éducation. Elle a fait son doctorat sur les styles de pensée mathématique (*Mathematische Denkstile*) sous la direction de Kaiser.

L'article n'est pas très bien construit et nous verrons que son titre est en partie trompeur. Cependant, il n'est pas sans intérêt, notamment par sa mise au point sur les conceptions allemandes de la modélisation et aussi par l'accent qu'il porte sur la dimension cognitive du processus de modélisation. Pour comprendre l'objectif principal de l'auteur, il faut se rendre directement à la page 90, où il est signalé que sa recherche s'inscrit dans une analyse de séances mathématiques reliée à un contexte d'analyses basées sur des « styles mathématiques » décrit dans la thèse de l'auteur. On n'en saura pas plus, un article sur le sujet annoncé n'est pas paru dans l'ICMI Study sur la modélisation. C'est ennuyeux car, par exemple, l'une des questions posées est la suivante:

Quelles influences ont les styles de pensée mathématique des apprenants et des professeurs sur les processus de modélisation dans des leçons de mathématiques en contexte ? (p. 90)

Cette question ne sera pas abordée dans l'article qui se consacre essentiellement à une deuxième question évoquée page 90 :

Est-ce que les différences entre « Situation Model », « Real Model » et « Mathematical Model » (notions introduites dans la littérature didactique sur la modélisation, voir (Mass, 2006) et la lecture de cet article par Cabassut page 7) peuvent être reconstruites à partir de la façon de procéder de l'apprenant ? (p. 90)

Pour traiter cette question (au moins partiellement), l'auteur développe une approche qu'elle qualifie d'empirique et qu'elle oppose aux approches normatives et théoriques de la modélisation. Dans la terminologie des espaces de travail, nous dirons qu'il s'agit dans le second cas de déterminer de manière *a priori* un parcours de type épistémologique dans l'espace de travail de la modélisation, et dans un autre cas, celui de l'auteur, l'accent est mis sur l'exploration de la dimension cognitive en examinant des parcours personnels d'élèves dans le cycle de la modélisation. Naturellement, l'approche cognitive doit pouvoir se greffer sur une approche épistémologique et de ce fait, l'auteur commence par discuter les différents modèles existant sur la modélisation pour choisir celui qui lui semble le mieux adapté à son propos.

Nous allons reprendre et organiser cette discussion qui suppose posée la distinction entre un monde mathématique et un monde extra mathématique, le reste du monde ou monde réel. La liaison entre les deux s'opérant aux niveaux des applications des mathématiques (*Mathematical Results*) à des situations existant dans le monde réel (*Real Situation*).

Mais de fait, chaque univers n'est accessible que par des modèles : les auteurs allemands distinguent dans ces familles de modèles ceux qui sont des modèles du monde réel (*Real Model*) et ceux qui sont des modèles mathématiques (*Mathematical Model*). Cette distinction n'est pas évidente *a priori* et n'est pas admise dans nombre d'approches didactiques à commencer par l'approche « realistic » de RME (avec une notion très large de modèles, voir (Kuzniak, Parzysz & Vivier, 2008)) ou par les approches françaises de la question (TAD, TSD). Dans ces cas, c'est plutôt l'articulation des différents modèles ou situations qui crée le processus de mathématisation qu'on cherche à mettre en place dans l'enseignement des mathématiques.

Un autre point important que souligne l'auteur porte sur la vocation exacte de ces distinctions faites pour l'étude de la modélisation. Sont-elles faites dans une optique d'enseignement, de formation ou de recherche ? Et dans ce dernier cas, vise-t-on l'étude de compétences psychologiques ou mathématiques en relation avec l'idée de modélisation ?

Pour poursuivre la présentation de l'article et sa compréhension, nous retiendrons la distinction entre *Real Model* (RM) et *Mathematical Model* (MM) qui a permis d'arriver à un premier cycle de modélisation présenté dans les années 90 par Kaiser et Blum et que reprend l'auteur (p. 88).

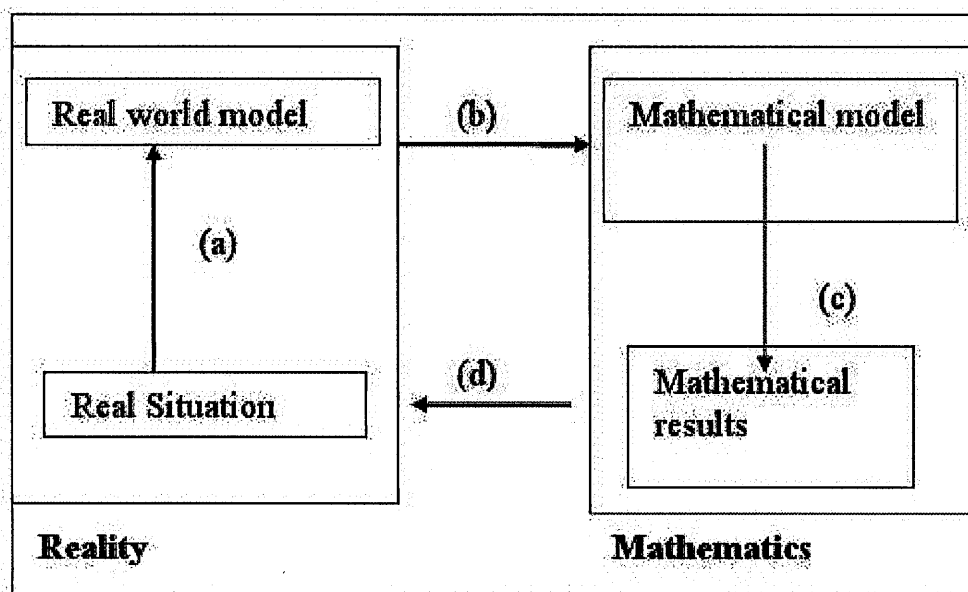


Figure 1 : Le cycle de modélisation de Kaiser (1995) et Blum (1996)

Pour Kaiser, il s'agit de donner une représentation standard (*ideal-type*) du processus de modélisation. "Un processus de modélisation suit la procédure « ideal-type » suivante :

- Une situation du monde réel est le point de départ du processus. Puis la situation est idéalisée (a), c'est-à-dire simplifiée ou structurée de façon à obtenir un « real world model ».
- Puis ce « real world model » est mathématisé (b), c'est-à-dire traduit en mathématiques pour obtenir un modèle mathématique de la situation de départ.
- Des considérations mathématiques dans le modèle mathématique entraînent des résultats mathématiques (c) qui doivent être réinterprétés (d) dans la situation réelle (*Real situation*). L'adéquation des résultats doit être vérifiée, c'est-à-dire validée. Dans le cas d'une solution non satisfaisante pour le problème, ce qui arrive fréquemment en pratique, le processus doit être recommencé. (Kaiser, 2005, p. 101)

Cette distinction entre *Real Model* et *Real Situation* s'avère trop simple lorsque le propos n'est plus seulement de traiter les problèmes (*word-problems*) calibrés et déjà épurés que proposent les manuels de mathématiques, mais de traiter des situations réelles. Dans ce cas, le travail mathématique n'est *a priori* ni évident ni forcément recherché. C'est ce qui a conduit des auteurs comme Blum à introduire une distinction entre la Situation réelle (RS) et la situation modélisée (*Situation Model*) que Borremeo-Ferri assimile dans son article à la représentation mentale de la situation (RMS) pour développer un point de vue cognitif sur le processus de modélisation chez les élèves.

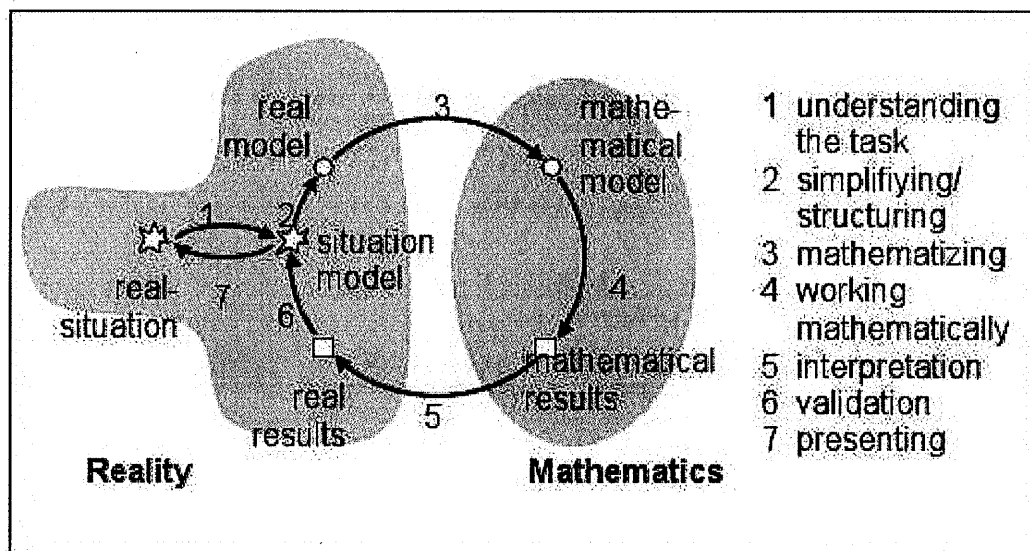


Figure 2 Le cycle de modélisation de Blum et Leiss (2005)

L'auteur s'appuie sur ce cycle pour tenter de percevoir son fonctionnement dans le cadre de la résolution de problèmes comme l'atteste son protocole expérimental qu'elle décrit très rapidement. Son expérience s'intègre dans le cadre du projet COM² qui porte sur l'analyse cognitive et psychologique des processus de modélisation mis en œuvre dans les leçons de mathématiques. Son terrain d'analyse est un groupe de trois classes de différents lycées allemands (65 élèves en grade 10 en Gymnasium, trois professeurs).

Les élèves ont rempli un questionnaire portant sur leur style mathématique et en complément a eu lieu un entretien avec les professeurs pour définir leur style mathématique.

En classe, les élèves résolvent (par groupe de 5) des problèmes venant du projet DISUM-Projekt (Blum, Messner, Pekrun). Là encore aucun exemple ne sera donné dans l'article et sur le site du dit projet rien ne figure si ce n'est le fait que ce projet est en relation avec les buts des évaluations PISA. Cependant, dans d'autres articles du groupe, les exemples cités font référence à des problèmes d'optimisation sur des achats de la vie courante.

Son étude de l'espace de travail personnel utilise le cercle de modélisation suivant :

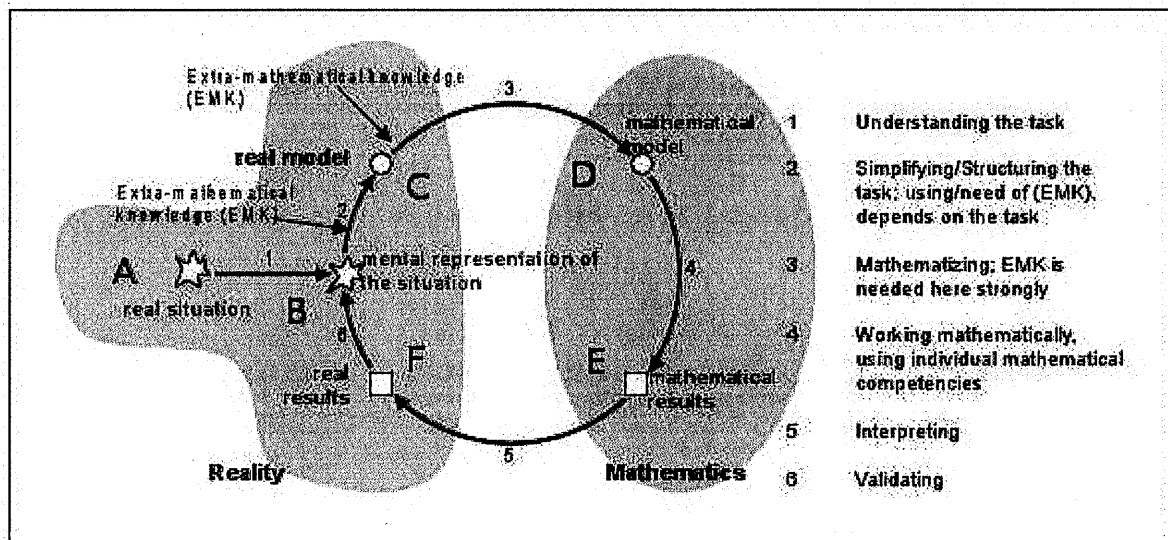


Figure 3 - Le cercle de modélisation de Borromeo-Ferri dans une perspective cognitive

Comme je l'ai signalé, il s'agit plus d'un cercle de résolution de problème car la situation est déjà présentée dans un énoncé de problème comme l'atteste la description des différentes phases (nous avons ajouté les lettres pour plus de clarté).

A. Real Situation qui est, dans le cadre de l'étude, une image ou un texte ou les deux car elle est présentée dans le cadre d'un problème. Il ne s'agit donc pas réellement d'une *Real Situation* au sens strict du terme définie par Kaiser.

Transition 1 de A à B. Dans la transition qui va de la « real situation » à la représentation mentale de la situation, l'individu comprend plus ou moins le problème à partir d'une reconstruction mentale éventuellement erronée de ce problème.

B. Représentation mentale de la situation (MRS)

Les individus se font une représentation de la situation qui dépend de leur style cognitif. Certains élèves font une relation directe avec leur propre expérience d'autres se focalisent sur les nombres en question qui sont recombinaison pour des calculs.

La Situation réelle (A) et la représentation mentale (MRS) diffèrent par deux aspects :

1. des simplifications inattendues de la tâche par les élèves.
2. les préférences individuelles sur la manière de traiter le problème dans le processus de modélisation.

Transition 2 de B à C. Cette phase dépend de l'individu car il s'agit de simplifier et d'idéaliser le problème à partir des informations déjà filtrées par sa représentation mentale du problème (son MRS). Ici, il peut y avoir recours à des connaissances non mathématiques ayant un rapport avec le contexte réel de la situation.

C. Real Model

Cette étape a une très forte relation avec la représentation mentale de la situation. C'est pour cela que le « Real Model » est principalement construit dans un niveau interne à l'individu.

Cela signifie aussi que le niveau externe (schémas ou formules) peut aussi représenter ce « Real Model ». Mais cela va dépendre des énoncés verbaux que va faire l'élève quand il produit des représentations externes.

A mon avis, il s'agit de trivialisations basées sur une grande confusion méthodologique entre niveaux psychologique, sémiotique et mathématique.

Transition 3: De C à D. Cette transition du modèle réel au modèle mathématique est décrite par l'auteur comme un processus individuel de mathématisation où là encore interviennent des connaissances extra-mathématiques.

D. Mathematical model

Dans cette phase, ce sont principalement les représentations externes qui vont être mobilisées (nous dirions représentations sémiotiques). Cette fois, les références et le discours des individus renvoient au domaine des mathématiques et non plus à la réalité. Le passage dans le domaine des mathématiques est ici complet.

Transition 4. De D à E. Les individus utilisent leurs compétences mathématiques.

E. Mathematical results

Il s'agit essentiellement d'une phase d'écriture des résultats obtenus sur la base du modèle.

Transition 5. De E à F. Cette phase d'interprétation des résultats qui est particulièrement importante n'est souvent pas faite avec attention par les individus d'après l'auteur.

F. Real results

Les élèves discutent pour savoir s'il peut s'agir de résultats réels.

De fait, cette validation est à mettre en relation avec leur représentation mentale du problème et ici l'auteur a pu observer deux manières différentes de faire :

- Une "Validation Intuitive" (non consciente). Les élèves trouvent eux-mêmes que leurs résultats sont sans doute faux pour des raisons qu'ils ne peuvent pas vraiment expliquer. Ou bien ils « sentent » que leurs résultats sont faux car ils ne collent pas avec leurs propres expériences et associations d'idées. Il s'agit ainsi d'une décision intuitive inopinée plus que pensée.
- Une "Validation basée sur des connaissances" (plus consciente). Cette manière dépend de la manière dont il faut utiliser les connaissances extra-mathématiques. Ainsi dire que la validation est basée sur des connaissances c'est dire que les élèves acceptent ou non leurs résultats quand ceux-ci sont en accord ou non avec leurs connaissances extra-mathématiques. L'auteur distingue deux formes de conscience : la première basée sur des connaissances et la seconde non (p. 93)

L'auteur précise que les validations intuitives et basées sur des connaissances sont en relation avec les réflexions antérieures de l'élève. Une des raisons pour lesquelles ils ne valident pas est due au fait qu'ils font majoritairement une validation purement mathématique, car pour eux valider signifie « calculer » dans le modèle mathématique. Ils ne font pas de connections avec la réalité qui est présente dans la situation. Pour être plus précis, l'auteur devrait parler de vérification plutôt que de validation.

En fait, il semble que le travail présenté s'appuie plus sur la résolution de problème comme en

témoigne l'article soumis (et non retenu) à l'étude ICMI sur la modélisation et qui s'intitulait ainsi « Styles de pensée mathématique et résolution de problème (*word problem*) » artificiellement étendu ici à la question de la modélisation. Les travaux de psychologue comme J. F. Richard (1995), me semble-t-il, avait déjà analysé de façon complète le processus qui mène à la représentation mentale du problème puis à sa résolution. La nouveauté relative de l'article porte sur le travail des élèves dans le processus de modélisation envisagé dans la perspective théorique allemande et notamment sur l'intérêt de distinguer des phases entre la situation réelle et le modèle réel. Entièrement basée sur l'idée de représentations mentales (représentations internes), cette analyse échappe à la didactique des mathématiques plus basée sur les représentations externes de type mathématique. Elle est certainement intéressante mais tel que l'article est rédigé, cette partie reste une boîte noire.

D'autre part, le manque d'accès aux problèmes posés aux élèves rend difficile une réelle exploitation par le lecteur des résultats de l'auteur, et ceci d'autant plus que le choix de ces problèmes semblent avoir entraîné une discussion dans l'équipe du chercheur sur les conclusions à tirer de l'étude, ce dont témoigne la conclusion de l'article. En effet, il semble que deux types de problèmes aient été posés aux élèves, les premiers nécessitaient une part importante de calculs avant de déterminer le modèle mathématique, alors que pour les autres, il n'y avait pas de calculs et alors on voyait mieux le passage du modèle réel au modèle mathématique. Cette remarque, *in fine*, remet en cause la pertinence de ces distinctions entre modèles car on voit mal ce que les auteurs appellent réellement un modèle réel si celui-ci peut permettre de nombreux calculs sans être encore un modèle mathématique.

Références

Site du projet DISUM : <http://www.disum.de>

Blum, W. & Leiss, D. (2005). « Filling Up » - the problem of independence-preserving teacher interventions in lessons with demanding modelling tasks. Proceedings for the CERME4, WG 13 Modelling and Applications.

Blum, W.; Galbraith, P.L.; Henn, H.-W.; Niss, M. (Eds.) (2007). *Modelling and Applications in Mathematics Education*. New Icmi Study Series vol 10. Springer. Blum, W. (1996): Anwendungsbezüge im Mathematikunterricht – Trends und Perspektiven. – In: Kadunz, G. et al. (eds): Trends und Perspektiven. Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, Vol. 23. – Wien: Hölder-Pichler-Tempsky, p. 15 – 38.

Kaiser, G. (1996): Realitätsbezüge im Mathematikunterricht – Ein Überblick über die aktuelle und historische Diskussion. – Graumann, G. et al. (eds): Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht. – Bad Salzdetfurth: Franzbecker, p. 66 – 84.

Kaiser, G. (2005) Mathematical Modelling in School – Examples and Experiences, Henn, Hans-Wolfgang; Kaiser, Gabriele (Hrsg.), Mathematikunterricht im Spannungsfeld von Evolution und Evaluation. Festband für Werner Blum. Hildesheim, Franzbecker, 2005, 99-108.

Richard, J. F. (1995). *Les activités mentales. Comprendre, raisonner, trouver des solutions*. Paris : Armand Colin.

Simple Thinking using Complex Math vs. Complex Thinking using Simple Math- A study using Model Eliciting Activities to compare students' abilities in standardized tests to their modelling abilities

Steffen M. Iversen & Christine J. Larson

ZDM 2006 Vol.38 (3) pp.281-292

INTRODUCTION

Les deux auteurs ont adapté au contexte danois une situation relevant du domaine des « activités conçues à fin de modélisation », le « Model Eliciting Activity » (MEA). Elles veulent mettre en évidence les manques des évaluations normatives en usage dans le cadre d'une première année de formation universitaire. Cette étude concerne une population d'environ deux cents étudiants inscrits dans le département de Science et d'Ingénierie de l'Université du Sud du Danemark et porte sur l'enseignement mathématique du second semestre. Les auteurs utilisent une méthodologie de recherche « multi-dimensionnelle » (*a multi-tier design-based research methodology*) pour appréhender les compétences mobilisées par les étudiants dans la réalisation d'une tâche complexe³ issue du domaine de la réalité. Les chercheurs utilisent les solutions développées par les étudiants pour en tirer des outils : ces outils leur permettent de saisir et d'évaluer la pertinence et la faiblesse des modèles mathématiques présents dans ces solutions.

L'article comprend : une brève introduction qui précise l'origine et la nature des questions posées, la présentation d'un cadre théorique, puis celle du dispositif expérimental, une analyse des données collectées qui comprend une identification des modèles exhibés, des études quantitatives et qualitatives, et enfin une conclusion qui met en évidence la posture militante des deux chercheurs pour l'introduction d'activités nécessitant une mise en réseau complexe de notions mathématiques élémentaires (relevant du domaine « Complex thinking using Simple Math »).

RESUME DE L'ARTICLE

Introduction et cadre théorique

L'étude se situe dans le prolongement d'un questionnaire initié par Lesh et Sriraman (2005a), à savoir : Pourquoi des étudiants qui réussissent bien les évaluations classiques ont-ils souvent des difficultés avec des situations issues de la vie réelle impliquant une réflexion d'ordre mathématique ? Pourquoi, au contraire, des étudiants dont les évaluations traditionnelles sont faibles, peuvent-ils réussir à résoudre des tâches liées à des situations

³ Cette complexité est caractérisée par la multiplicité des notions et de leurs combinaisons qui peuvent être sollicités pour modéliser la situation (note du lecteur).

issues de la réalité ?

Les auteurs cherchent, d'une part, à identifier chez les étudiants des liens entre les compétences mobilisées dans des évaluations « classiques » et celles mises en œuvre dans des situations complexes « réelles » (impliquant une modélisation mathématique), d'autre part, à expliquer, si le cas se présente, comment avec des évaluations faibles dans des épreuves standards, des étudiants peuvent réussir dans des situations contextualisées.

Légitimité du choix d'une situation relevant des MEAs

Le choix d'une situation d'évaluation relevant de la catégorie des MEAs renvoie à une conviction des deux auteurs partagée avec une communauté : la modélisation mathématique est un aspect important de la formation mathématique, celle-ci peut s'entendre comme une « design science » telle que la caractérise Lesh & Sriraman (2005b).

La situation proposée s'entend comme une expérience d'enseignement liée à d'autres domaines, centrée autour de la tâche de modélisation d'une question ouverte. Six principes (Lesh & Doerr, 2003) sont retenus pour la caractériser :

- Le principe de réalité (*Reality principle*) : A-t-elle du sens pour les étudiants, un rapport avec leur propre expérience ?
- Le principe de construction d'un modèle (*Model Construction Principle*) : la situation nécessite-t-elle de développer des concepts mathématiques ?
- Le principe d'auto-évaluation (*Self-evaluation principle*) : la situation impose-t-elle que les étudiants évaluent continûment les modèles qu'ils conçoivent ?
- Le principe du concept de « développement de ressources » (*Construct documentation Principle*) : la situation impose-t-elle aux étudiants d'exprimer leur pensée pendant qu'ils travaillent sur la résolution de problème ?
- Le principe du concept de généralisation (*Construct Generalization Principle*) : le modèle généré peut-il être transposé dans d'autres situations similaires ?
- Le principe de simplicité (*Simplicity Principle*) : la situation problème est-elle assez simple pour être modélisable ?

Une perception partagée des limites des évaluations usuelles

Partageant le constat avec nombre de chercheurs sur les limites des modalités et instruments d'évaluation « usuels » (Niss, 1999), les auteurs légitiment encore la mise en œuvre d'une évaluation alternative : celle-ci peut permettre, sur un domaine de savoir qui peut être limité, d'identifier les compétences des étudiants relatives à l'organisation structurée et finalisée de leurs connaissances. Il s'agit de contourner deux aspects pervers des évaluations dites « normatives » :

1. une focalisation sur un échantillonnage réduit de notions mises en œuvre à travers des questions-réponses ouvertes mais courtes ; celles-ci ne permettent pas d'inférer les capacités à utiliser ces notions dans d'autres contextes ;
2. un usage qui entraîne la mise à l'écart d'un certain nombre d'étudiants montrant de réelles dispositions à modéliser efficacement des situations issues de la réalité.

Le dispositif expérimental

Mis en place durant l'hiver 2005, le dispositif s'insère dans le déroulement d'un cours de mathématique semestriel (7 semaines). Il prend en compte l'étude d'un pré-test individuel classique (11 problèmes « usuels » relevant du niveau supérieur de l'enseignement secondaire, conformes au programme officiel – calcul vectoriel, réduction d'expressions

algébriques, intégration de fonctions élémentaires). Ce pré-test est passé sans recours possible aux documents et instruments de calcul. Suit l'analyse d'une évaluation relevant du domaine des MEAs qui s'appuie sur un travail en petits groupes (environ trois personnes). Enfin, le dispositif est complété par l'étude d'un post-test individuel encore classique (portant sur les contenus enseignés avec usage possible d'instruments de calcul).

La situation relevant de la catégorie des MEAs s'intitule le problème du « penalty » (*the penalty throw problem*). Inspiré par le problème du volleyball (Lesh & Doerr, 2003), cette situation consiste à choisir les trois joueuses de l'équipe nationale du Danemark les plus capables de marquer des penalties lors d'un tournoi comme la Coupe du monde. Les penalties jouent un rôle majeur pour le score. Le problème se caractérise par la grande variété des données disponibles, des données qualitatives et quantitatives. Il doit permettre de mobiliser les capacités des étudiants à quantifier les informations qualitatives, à combiner les diverses informations, à atteindre les objectifs en utilisant des procédures itératives et non pas une simple formule, enfin à produire des graphiques pour comparer les profils des joueuses. La situation se présente comme une situation complexe qui mobilise des connaissances liées au domaine du sport en question. Elle est par ailleurs motivée par la popularité du Handball au Danemark et notamment par les succès remportés par l'équipe féminine. Les deux auteurs s'appuient sur le fait que la familiarité de la situation proposée favorise le développement des compétences à modéliser et à évaluer la pertinence des modèles produits.

Analyse des données

Pour comparer les réussites des étudiants dans le pré-test, le post-test et dans la situation relevant des MEAs, les auteurs s'inspirent d'un dispositif mis au point par Clark & Lesh (2000), le QAG (*Quality Assurance Guide*), adapté à ce type de situations : les solutions produites peuvent être catégorisées et graduées selon 5 niveaux en fonction du degré de généralisation de leur usage. Ce dispositif permet d'effectuer des comparaisons statistiques entre les résultats des tests individuels et ceux de la situation « MEA ». Ne voulant pas se satisfaire d'une simple analyse quantitative, les chercheurs s'appuient encore sur le dispositif du QAG pour identifier plus précisément les caractéristiques des solutions trouvées par les étudiants.

Les modèles identifiés dans les petits groupes (3 personnes en général)

Parmi quelques 70 solutions, trois modèles emblématiques sont identifiés : ils sont caractérisés par la nature et le nombre d'outils utilisés, leurs combinaisons. Le premier est très pauvre, les deux autres majoritairement produits sont plus riches ce qui n'infère pas de leur qualité.

Les facteurs qui permettent de distinguer les groupes « performants » des autres sont les suivants : la mise en relation de données entre elles pour en tirer les paramètres pertinents pour le modèle et non pas une prise en compte intuitive des données ; l'utilisation de divers registres de représentation (graphique, diagramme, tableaux) et non pas l'usage de simples registres descriptifs ; l'utilisation de notations mathématiques (lettres désignant des variables,...).

La différence de performances réside non dans la nature des outils utilisés mais dans les conditions de leur utilisation.

TYPICAL MODELS DONE BY THE STUDENTS

TOOLS USED BY THE STUDENTS

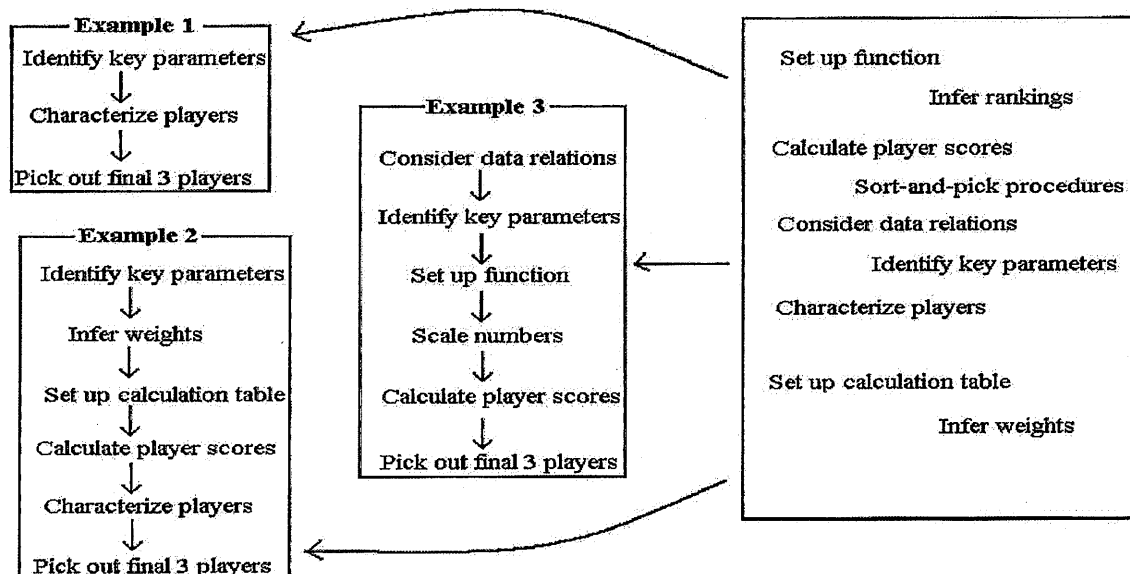


Fig. 1: Some typical mathematical tools used and models elicited by the students

L'analyse quantitative

Pour tenir compte du problème soulevé par la comparaison d'évaluations individuelles (pré et post-test) et d'une évaluation en petits groupe (le MEA), les recherches de corrélation entre les résultats aux diverses épreuves sont croisées ; les deux corrélations entre un score MEA considéré comme individuel et les résultats aux deux tests usuels ; les corrélations entre le score MEA par groupe et la somme des notes du groupe au pré-test, et entre score au pré-test et score au post-test.

Les constats confirment les analyses de Lesh & al. Individuellement, il n'y a pas corrélation significative entre score au pré-test et score MEA (cf. fig.2). Du point de vue des scores de groupes, on note une corrélation faiblement significative qui révélerait un lien entre score MEA et somme des notes d'un groupe au pré-test (cf. fig.3).

Individuellement, il y a une corrélation plus significative entre score au pré-test et score au post-test, mais aucune corrélation entre score MEA (considéré comme individuel) et résultat au post-test.

Ainsi, ni le pré-test, ni le post-test ne permettent d'inférer les capacités des étudiants pour résoudre un problème MEA.

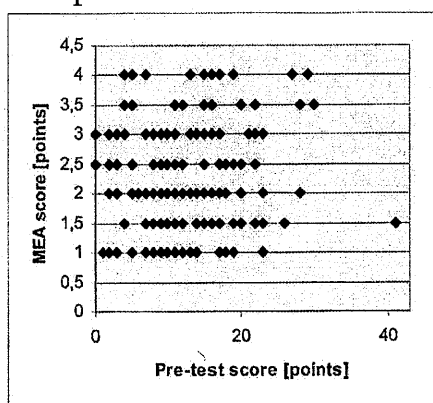


Fig. 2: Students MEA score with respect to their pre-test score [by individual].

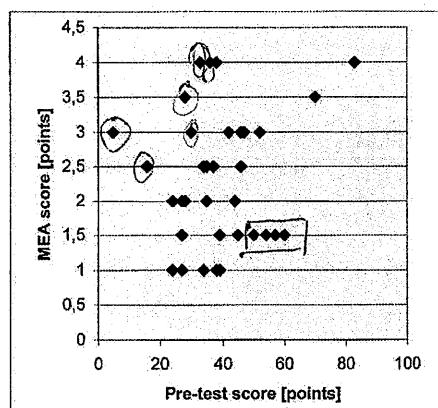


Fig. 3: MEA score with respect to pre-test score [groups with 3 persons].

L'analyse qualitative

Faute de mise en évidence de corrélation entre les résultats aux évaluations normatives et à l'évaluation MEA, cette analyse se focalise sur les étudiants considérés comme des « Assessment Jumpers », i.e. les étudiants dont les évaluations au pré-test et au problème MEA présentent un écart extrême. Cinq groupes sont donc identifiés dans le quart supérieur gauche et quatre dans le quart inférieur droit de la figure 3 ci-dessus.

- Sous-groupes montrant de faibles performances au pré-test, de bons scores au problème MEA : Les outils mathématiques utilisés sont élémentaires mais ils le sont de façon sophistiquée (toutes les données sont prises en compte). La complexité des méthodes mises en œuvre semble liée à la valeur de la somme des scores obtenus au pré-test. Le groupe qui obtient le plus faible score au pré-test utilise un système de classements en plusieurs étapes ; les deux autres groupes faibles au pré-test utilisent des procédures de pondération de type linéaire ; les deux groupes qui obtiennent les scores plus élevés utilisent des « lignes de tendance » pour trouver des relations entre les données et identifier les plus importantes pour concevoir leur modèle final.

L'usage des classements, de raisonnement relevant de la proportionnalité et/ou de « lignes de tendance » permet aux étudiants d'explorer les relations entre données ; leur interprétation semble relever d'un modèle linéaire. Ces groupes montrent que de simples outils mathématiques peuvent être utilisés pour générer des solutions sophistiquées à des problèmes issus de « la réalité ».

- Sous-groupes détenant de bons scores au pré-test et de faibles résultats au problème MEA : Ces groupes montrent une tendance à négliger des données sans justification, des difficultés à développer des modèles à partir de la situation initiale. Ils réduisent le champ de leur investigation, cherchent à identifier des concepts mathématiques tout élaborés du type fonction linéaire. Ils se focalisent sur les notions mathématiques et non sur la conception d'un modèle. Ils ne modélisent pas un problème considéré comme trivial, finissent par utiliser des procédures élémentaires de classement et de choix. Ils ne rentrent pas dans le « cercle de modélisation » nécessaire dans cette situation.

Des explications sont avancées : la trop grande confiance des étudiants qui réussissent habituellement en leurs capacités ; l'apparente facilité du problème MEA constituerait un obstacle. La capacité à échanger leurs idées pourrait être un facteur explicatif de la meilleure réussite au problème MEA des étudiants évalués comme faibles dans les évaluations individuelles.

Implications de ces résultats

L'identification des problèmes où les étudiants des deux sous-groupes ont collecté la majorité de leurs points lors du pré-test permet de réfuter une hypothèse : les étudiants qui ont obtenu un faible score mais qui réussissent le problème MEA ont réussi les problèmes reconnus comme faciles par la moyenne des étudiants ; ils n'ont pas délaissé ces problèmes pour répondre au défi proposé par des problèmes plus difficiles.

Si les résultats obtenus dans cette étude vont à l'encontre des résultats dégagés par Maass (2006), à savoir, qu'il existe un rapport significatif entre les compétences mathématiques des étudiants et leurs capacités à modéliser, les auteurs explorent une autre piste suggérée justement par Maass : la prise en compte de facteurs non considérés de façon précise dans l'étude, à savoir le rapport des étudiants à la modélisation et aux mathématiques. En se

référant aux quatre idéaux-types définis par Maass pour caractériser le « modélisateur » en fonction de ses rapports à la modélisation et aux mathématiques, les auteurs associent les deux sous-groupes d'étudiants respectivement au type 1 (*reality-distant modeller*) et au type 2 (*mathematical-distant modeller*). Les premiers développent leurs compétences mathématiques dans les tests classiques mais sont réticents à modéliser des situations réelles, les seconds réagissent inversement.

La question de la nature des tâches proposées à la modélisation reste donc ouverte.

Les considérations précédentes conduisent les deux auteurs à suggérer une nouvelle explication pour expliquer le décalage entre performances aux évaluations normatives et tâches de modélisation. Les MEAs et peut être toute modélisation à ce niveau d'enseignement impliquent souvent un processus de réflexion complexe ne sollicitant que des notions mathématiques élémentaires, alors que les tests normalisés n'engage qu'un processus de réflexion simple utilisant des notions mathématiques élaborées.

L'étude conduite montre que ceux qui réussissent le problème MEA mobilisent généralement un processus de réflexion pour interpréter, organiser, diriger leur pensée ; ils ne se focalisent pas sur les outils mathématiques mobilisés. Ils sont capables de faire usage de créativité, d'esprit critique, d'initiative, d'innovation pour juger et évaluer les conséquences de leurs modèles : ils disposent d'un mode de pensée holistique complexe.

Les analyses conduites auprès des étudiants qui obtiennent de mauvais scores aux tests normatifs confirment donc les assertions de Lesh & English (2005), à savoir que cette catégorie d'étudiants peut développer de puissants modèles conceptuels n'utilisant que des concepts élémentaires accessibles à un grand nombre et à divers niveaux d'enseignement.

Conclusion

Deux explications sont retenues prioritairement pour expliquer la situation étudiée : l'attitude des étudiants face à une tâche spécifique, leur confiance en leurs performances et leur motivation ; le clivage entre processus de réflexion complexe mettant en œuvre des mathématiques simples et processus de réflexion simple utilisant des mathématiques complexes.

Cette étude montre encore que les tests normalisés ne fournissent pas une image fidèle des compétences mathématiques des étudiants. Elle rouvre le débat entre formation mathématique et évaluation. Elle montre que certaines compétences ne sont jamais identifiées et évaluées ; l'enseignement est conçu pour préparer les étudiants aux tests traditionnels. Elle renforce donc les résultats issus des recherches sur les modèles et l'approche de/par la modélisation.

Les auteurs conviennent donc, avec Lesh & English, d'une nécessité : transformer la question de la nature des évaluations qui permettent de jauger correctement les performances des étudiant en une question concernant la nature des situations qu'ils peuvent décrire fructueusement. Les chercheurs préconisent donc l'introduction de situations impliquant un processus de réflexion « complexe » dans la formation des étudiants, situations qui ne nécessitent que l'usage de notions mathématiques élémentaires.

DISCUSSION

Le grand intérêt de cette étude réside dans les questions cruciales qu'elle soulève : Comment penser les rapports entre formation mathématique et évaluation ? Quel(s) rôle(s) peuvent jouer les situations de modélisation dans les évaluations ?

En révélant l'existence de compétences que des évaluations non classiques permettent de faire émerger (ou de développer) chez certains étudiants, les auteurs nous apportent effectivement

des éléments pour susciter notre réflexion.

Toutefois, l'article qui réfère à des outils d'analyse explicites (caractéristiques des situations relevant des MEAs) ou considérés comme « allant de soi » (cercle de modélisation, idéaux-types de Mass, hypothèses de Niss) et à une conception de la formation mathématique entendue comme une « design science » ne fournit pas toujours au lecteur les données qui lui permettraient de nourrir sa conviction.

L'étude proposée conduit, en effet, à distinguer, deux niveaux de lecture. Les constats effectués par les chercheurs semblent légitimer la fonction double des situations relevant des MEAs utilisées dans le cadre d'une évaluation : permettre le développement chez certains étudiants de leurs compétences à modéliser ; constituer un outil méthodologique pour caractériser ces compétences et les conditions de leur émergence. Si au premier niveau, les éléments présentés par les auteurs mettent en évidence des compétences non évaluées traditionnellement chez des étudiants dits « faibles », au second niveau il est bien moins aisé d'identifier en quoi l'outil permet de caractériser ces compétences, leurs éventuels rapports avec les compétences évaluées de façon classique, le contexte précis qui les favorisent.

Le lecteur peut déplorer l'absence de certains outils d'intelligibilité qui permettent l'analyse des données.

D'un point de vue mathématique et méthodologique, le lecteur a peu d'éléments en sa possession. L'absence de l'énoncé du problème et de quelques procédures d'étudiants (ne serait-ce que des extraits), de la description succincte des modèles, l'inexistence d'éléments sur le traitement des données quantitatives et qualitatives laissent le lecteur « sur sa faim ».

Par exemple, quand les auteurs cherchent à décrire les obstacles rencontrés par les étudiants qui réussissent dans les tests classiques, leur incapacité à « rentrer dans un cercle de modélisation », c'est au lecteur de se prêter à une possible interprétation et d'établir des liens avec les constats effectués par d'autres chercheurs (Mass). Le lecteur doit ainsi se poser des questions :

- Les auteurs s'interrogent-ils sur des obstacles spécifiques à certaines étapes du cercle de modélisation ?
- S'agit-il d'obstacles liés à la détermination d'un modèle de la réalité ? Est-ce à ce niveau que se révélerait le décalage entre « reality-distant modeller » et « mathematical-distant modeller » ?
- Les difficultés résident-elles dans la détermination du modèle mathématique et son traitement ? Dans l'interprétation des solutions dans la situation réelle ? Est-ce à ces niveaux que se caractériserait la réflexion holistique du « reality – distant modeller » ?

Toujours en référence aux idéaux-types de Mass, une autre question encore reste ouverte : comment les auteurs intègrent-ils dans leur dispositif la prise en compte du « rapport à la modélisation et aux mathématiques » des étudiants ?

Et enfin, comment est étayée la légitimité des analyses des évaluations ? Comment inférer l'aptitude à modéliser d'un individu dans un travail collectif ? (Quels sont les éléments significatifs pris en compte dans le dispositif QAG ?)

Il en est de même pour la réalité évoquée : celle d'une situation réelle présentée avec un grand nombre de données (dont l'obtention n'est pas à la charge des étudiants) qui suggérerait un processus de modélisation d'un monde qui procède d'un premier traitement de l'information, une extraction et une organisation des données. Du côté des mathématiques, au-delà de la nature élémentaire des outils mis en œuvre, faut-il convenir que c'est la diversité des registres de représentations utilisés, leur lien et leur organisation qui piloteraient le cycle de modélisation ? Le lecteur ne peut que regretter la mise en évidence d'un rapport explicite avec les étapes du cercle de modélisation qui pourrait permettre d'une part, de caractériser les compétences développées, d'autre part, de conforter la pertinence d'un modèle théorique.

En conclusion, malgré les remarques précédentes, il nous semble que cette analyse présente un certain nombre de constats prometteurs et ouvre des perspectives, en termes d'enseignement et de formation.

Un premier constat : le rôle majeur de la modélisation est de susciter, notamment chez les étudiants plus faibles, la mobilisation de divers registres de représentations et de leur donner les moyens de structurer et d'organiser leurs savoirs mathématiques (*a priori* disponibles car ayant fait l'objet d'un enseignement classique). Dans le cadre de la formation des professeurs des écoles, ce type d'activité pourrait permettre de réactiver, de structurer un corpus de connaissances mathématiques, certes, déjà enseignées dans une scolarité antérieure, mais souvent peu disponibles pour un certain nombre d'étudiants non scientifiques.

Second constat : certaines situations étiquetées « MEAs » permettent à des étudiants dits « faibles » de « rentrer dans un cycle de modélisation », donc de développer des compétences à modéliser. Pour autant, ce processus permettrait-il une construction et une structuration de nouveaux outils conceptuels plus efficaces pour cette classe d'étudiants ? En quoi, ces situations d'évaluation peuvent-elles nourrir une conception autre des situations d'apprentissage ? Quels liens éventuels entre les MEAs et les situations de modélisation empruntées à d'autres cadres théoriques ?

Références

Clarke, D. & Lesh, R. (2000). Formulating Operational definitions of Desired Outcomes of Instruction, in *Mathematic and Science Education*. In Kelly, A. E & Lesh, R. (Eds.). *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 113- ?). New Jersey : Lawrence Erlbaum & Associates.

Kaiser, G. & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in Mathematics Education. *Zentralblatt für Didaktik des Mathematik*, 38 (3), 302 – 310.

Lesh, R. & Doerr, H. M. (Eds) (2003). *Beyond Constructivism : Models and modelling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching*. Mahwah, NJ : Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R. & Sriraman, B. (2005a). John Dewey Revisited – Pragmatism and the models-modelling perspective on mathematical learning. I, A. Beckmann, C. Michelsen, & B. Sriraman (Eds). *Proceeding of the 1st International Symposium of Mathématiques and its connections to the Art and Sciences*. May 18-21, 2005, University of Schwabach Gmuend : Germany. Hildesheim, Berlin : Verlag Franzbecker, pp. 7- 31.

Lesh, R. & Sriraman, B. (2005b). Mathematics Education as a design science, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 37 (6), 490 -505.

Lesh, R. & English, L. D. (2005). Trends in the evolution of model & modeling perspectives on mathematical learning and problem solving. *Zentralblatt für Didaktik des Mathematik*, 37 (6), 487-489.

Maas, K. (2006). What are modelling competencies ? *Zentralblatt für Didaktik des Mathematik*, 37 (2), 113 – 142.

Niss, M. (1999). Aspects of the nature and state of research in Mathematics Education, *Educational Studies in Mathematics*, 40, 1-24

Functions: A modelling tool in Mathematics and Science

Claus Michelsen

ZDM 2006 Vol.38 (3) pp.269-280

Pour éviter les difficultés ressenties par les élèves lors du transfert de connaissances apprises en mathématiques vers des nouvelles situations dans d'autres domaines scientifiques, Claus Michelsen propose l'utilisation d'activités de modélisation dans un contexte interdisciplinaire englobant mathématiques et sciences⁴, autour de certains thèmes unificateurs : telle est l'idée essentielle de l'article.

Le thème retenu est ici le concept de **fonction** qui apparaît comme un exemple de modèle mathématique didactique pour une approche interdisciplinaire entre mathématiques et sciences.

Selon l'auteur, deux problèmes seraient à la base de ces difficultés :

- Un premier problème est ce qu'il appelle le **paradoxe de la relevance** : les enseignants eux-mêmes ont des difficultés pour utiliser les mathématiques dans un domaine différent du leur et ceci malgré l'importance et la nécessité croissante de mathématiques dans les autres disciplines. Les mathématiques semblent donc vouées à un certain isolement, soit d'un point de vue d'utilisation de concepts, soit du point de vue du langage utilisé dans les différents domaines.
- D'autre part, les frontières entre les disciplines scolaires mathématiques et sciences ne reflètent pas le travail interdisciplinaire actuel dans le domaine de la recherche.

Sa proposition de curriculum intégré, associant les domaines mathématiques et scientifiques, viserait donc à éliminer ces obstacles, en développant une activité interdisciplinaire, par le biais de la modélisation, autour du thème unificateur des fonctions.

Le concept de fonction au centre d'une proposition de curriculum intégré

Selon l'auteur, et à la suite de Freudenthal (1983), une des difficultés essentielles dans l'utilisation des fonctions est liée à la maîtrise insuffisante de la notion de variable. Plus précisément, des différences de terminologie et de systèmes de notation entre sciences et mathématiques joueraient un rôle important dans ces difficultés : « En mathématiques, le concept de variable a plusieurs sens, et il est presque impossible de définir rigoureusement le terme. En sciences, une variable est en général associée au nom d'une quantité qui varie et qui peut dans beaucoup de cas être mesurée » (notre traduction, p. 272).

⁴ Nous reprenons ici la terminologie, assez répandue. Michelsen isole les mathématiques des autres sciences : le terme « science » n'inclut pas les mathématiques.

Michelsen évoque l'importance de trois aspects concurrents, mis en évidence par Freudenthal (ibid.), que les variables peuvent assumer :

- i) objet variable, par exemple, le temps qui passe ...,
- ii) nom polyvalent, pour se référer par exemple, aux trois sommets d'un triangle ABC dans un exercice donné, ou dans un triangle ABC quelconque ...,
- iii) variable muette (*place holder*), pour désigner le rôle des variables dans les calculs.

En mathématiques, les variables sont en général utilisées comme des noms polyvalents ou comme des variables muettes, tandis qu'en sciences c'est surtout l'aspect d'objet variable qui est privilégié.

Dans cette évolution les variables perdent leur aspect cinématique, ainsi que leur lien à l'objet d'origine, ce qui fait que les élèves traitent généralement les variables comme des symboles à manipuler plutôt que comme des quantités à mettre en relation (cf. page 272).

L'approche de Michelsen

L'idée de base de l'approche de Michelsen est que, dans des activités interdisciplinaires entre mathématiques et sciences, les variables représentent des quantités qui changent ; les fonctions sont un outil pour étudier les relations entre le changement de ces quantités, mises en relation dans le cadre de problèmes spécifiques à traiter (cf. page 272).

Deux caractéristiques dans la modélisation sont prônées ici :

- il privilégie une **modélisation ascendante** (*bottom up*), utilisée par Lesh & Sriraman (2005), où les modèles de systèmes complexes, à partir des situations de la vie réelle, sont introduits et développés dès les premières années de l'école (cf. page 273).
- La seconde caractéristique est celle du **modèle émergent**, introduit par Gravemeijer (1997), qui se réfère à deux facettes de la modélisation : un **modèle de** (*model of*) la situation et un **modèle pour** (*model for*) le raisonnement mathématique.

C'est la transition d'un modèle à l'autre (d'un **modèle de** à un **modèle pour**, et réciproquement) qui va permettre aux élèves de comprendre le fonctionnement et la portée effective des modèles, en s'affranchissant du contexte initial : en partant d'une description de la situation (modèle de) les élèves pourraient arriver à une forme décontextualisée de raisonnement (modèle pour) sur la situation.

Sources d'inspiration du modèle

C. Michelsen s'appuie essentiellement sur le travail développé par Berlin et White (cf. Berlin & White, 1998, *Integrated Science and Mathematics Model*). Leur modèle interdisciplinaire entre les mathématiques et les sciences propose une typologie pour décrire et comprendre la nature de l'intégration (entre mathématiques et sciences) du double point de vue des contenus et des méthodes pédagogiques, en identifiant six aspects différents de cette intégration⁵.

Une deuxième référence est celle du rapport danois sur les compétences mathématiques (*KOM-report : Competences and Learning in Mathematics*, Danemark, 2005) présenté par Niss & Jensen (2002) qui s'appuie spécifiquement sur les huit compétences mathématiques (cf. annexe).

⁵ Il s'agit de : *ways of learning, ways of knowing, content knowledge, process and thinking skills, attitudes and perceptions, teaching strategies* (p. 274).

Quelques notions utilisées par C. Michelsen

Dans son approche sur les fonctions, l'auteur utilise des activités de modélisation pour dépasser le fossé (p.274, *bridge the gap*) entre sciences et mathématiques, en évitant de survaloriser les aspects liés au symbolisme algébrique. Notons que parfois le terme mathématisation est utilisé comme un synonyme de modélisation.

Lien horizontal et structuration verticale

Les notions de mathématisation horizontale et de mathématisation verticale dues à Freudenthal (1991), sont à la base de l'adaptation faite par Michelsen pour les sciences : il considère, dans le cas de l'interdisciplinarité, un **lien horizontal** et une **structuration verticale**. Le modèle proposé par Michelsen est basé sur un mouvement itératif avec deux phases. Dans la première, on parle de lien horizontal (*horizontal linking*) entre les contenus : les situations issues des sciences sont présentées dans un contexte (*embedded in contexts*), et les élèves doivent mathématiser ensuite ces situations ; une seconde phase suit, dans la quelle il est question d'une structuration verticale (*vertical structuring*) des contenus : le point d'ancrage des propositions des élèves issues de la liaison horizontale est systématisé dans le cadre des deux domaines respectifs.

Le contenu du modèle intégré sur des fonctions

Son module sur les fonctions, destiné à des élèves de lycée (10^e année) se base essentiellement sur deux unités (cf. annexe) : 1. Mouvement et fonctions trigonométriques ; 2. Variation exponentielle contextualisée (le cas de la radioactivité). L'idée essentielle est d'éviter ce qu'on appelle, à la suite de Dooren *et al.*, 2004, **l'illusion de linéarité**, ou la tendance observée chez les élèves de voir et appliquer un modèle linéaire partout.

Nouvelles perspectives en mathématiques et en sciences

Le travail sur la modélisation (croissance de la population) a permis de soulever d'autres questions d'ordre éthique qui, selon Michelsen ne font l'objet, pour le moment, d'aucune réflexion. Mais il lui semble que ces questions émergeront nécessairement si on donne plus d'importance à l'enseignement des mathématiques et des sciences, ce qui doit passer aussi par un enseignement tenant compte des contextes sociaux (*embedded in social contexts* ; cf. page 278).

Perspectives : cours de modélisation pour enseignants

Les programmes danois de 2005 accordent une place importante à l'interdisciplinarité et en particulier à la modélisation. Les deux cours intégrés présentés dans cet article sont à la base de cours expérimentaux pour des élèves de 10^e année ; ils sont également utilisés en formation continue d'enseignants de niveau lycée au Danemark. La liaison horizontale et la structuration verticale y jouent un rôle important.

Conclusion

L'auteur constate (cf. page 278) que :

- plus ont été établis de liens, de connexions entre les faits, les concepts et les procédures, meilleure est la compréhension des élèves ;
- quand les programmes sont présentés sous une forme cohésive, avec un large spectre de liens entre les concepts traités, la possibilité est plus grande de voir l'éducation des élèves effective et pleine de sens.

Par ailleurs, les compétences interdisciplinaires apparaissent comme une méthodologie générale qui agit comme un 'dénominateur commun' entre les matières étudiées. Néanmoins, une clarification de ces compétences semble encore nécessaire (cf. page 279).

L'auteur suggère encore que les effets des approches intégrées sur la compréhension des étudiants, leurs attitudes et leurs intérêts des mathématiques et des sciences doivent continuer à être des objets de recherche pour les didacticiens de ces disciplines.

DISCUSSION

Il s'agit d'un article qui semble au début très innovateur, puisque Michelsen part de certains présupposés intéressants d'un point de vue didactique : il considère d'une part que les frontières actuelles des disciplines sont obsolètes et, d'autre part, que les difficultés de transfert de connaissances et de méthodes apprises dans les différentes disciplines sont importantes (pour les élèves, et même pour les enseignants). Si le contexte de l'apprentissage change, les élèves ne sont plus capables d'appliquer en physique, par exemple, les connaissances et les méthodes apprises en mathématiques. Pour éviter ces difficultés, et après une analyse fine de la notion de variable, laquelle a des significations différentes en mathématiques et en physique, l'auteur propose une approche par les compétences (l'approche KOM, *Kompetencer og matematiklæring*, en vogue au Danemark depuis 2002) autour de modules interdisciplinaires centrés sur certains chapitres de mathématiques et de physique, en utilisant une modélisation ascendante. Le transfert de connaissances serait ainsi facilité.

Après la présentation de ces modules, le lecteur reste un peu déçu. En effet, les situations qui sont présentées (décroissance radioactive, mouvement d'une roue de bicyclette) ont pour but de rechercher des modèles qui peuvent être obtenus par les élèves et qui peuvent, par la suite, devenir des modèles de raisonnement en sciences et en mathématiques – des exemples de modèle émergent, au sens de Gravemeijer. Dans la situation de décroissance radioactive par exemple, l'auteur explique que le modèle utilisé dans ce cas, peut être appliqué dans un nouveau contexte de modélisation (refroidissement d'un liquide chaud, p.276). Beaucoup de questions restent sans réponse : l'auteur ne discute ni montre en quoi cette approche par les compétences faciliterait le transfert de connaissances, ni comment la modélisation pouvait être utilisée, ni quel était le lien entre la modélisation et les compétences. Une grande partie de l'article est constitué par une proposition de deux modules, sans que le lecteur sache quelle a été leur utilisation. Les quelques réponses d'élèves mentionnées dans l'article, suggérant que le travail de modélisation en avait été apprécié, en particulier d'un point de vue éthique, et que nous n'avons pas reprises dans le résumé, puisqu'elles concernaient des études précédentes.

Annexe

1. Mouvement et fonctions trigonométriques : le cas de la bicyclette

The motion of bicycle wheel is used to introduce the trigonometric functions. The students videotape the motion of a fixed point on the wheel. The motion of the point is explored and modelled by students' with a software program providing different forms of representations and possibilities for transforming the constructed models.

In the trigonometric functions course the students experience the emergence of model when the software transforms the video of the movement of the fixed point on the bicycle wheel to a graph in a coordinate system. This model serves as a basis for developing formal mathematical knowledge about the function $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d$. Using the software the students can investigate the meaning of the parameters a , b , c and d by stating hypothesis about the meaning and then checking them.

2. Variation exponentielle et radioactivité : Argent enrichi

The exponential behavior of the accumulation of the variable number of nuclei is a very common phenomenon in our physical, biological and social environments and therefore the same model, structure and behavior can be found in the study of other parts of the real world.

An example : The actived silver

A well known experiment to investigate the phenomena of radioactivity is the activation of silver. A small silver probe is placed in a neutron source and is irradiated for about 15 minutes. Then the activity is measured for 400 seconds. The graph below shows how the activity decreases with time. The silver probe consists of two stable silver isotopes Ag-107 and Ag-109. In the neutron source they are both by neutron capture changed to respectively Ag-108 and Ag-110.

a) Write the nuclear reactions for the change of Ag-107 and Ag-109. Ag-108 and Ag-110 are both radioactive isotopes of silver.

b) Use the a nuclear card to identify which radioactive kinds isotopes Ag-107 and Ag-109 are, and write nuclear reactions for the change of respectively Ag-108 and Ag-110. This means that there in the experiment above is measured on two decay processes, and the graph therefore shows the activity from both of the isotopes.

c) Assume that at $t = 0$ the number of Ag- 108 nuclei is 50.000 and the number of Ag-110 nuclei is also 50.000. The half-life of Ag-108 is 24.76 s and for Ag- 110 it is 144.41 s. Set up an algebraic formula for the total activity as a function of time. Does this activity decrease exponentially with time?

(Michelsen 2001, p. 168)

Références

Berlin, D.F. & White, A.L (1998). Integrated Learning Science and Mathematics Education: Evolution and Implications of a Theoretical Model. In Fraser, K. & Tobin, B.J. (eds.) *International Handbook of Science Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 499-512 .

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education. China Lectures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Dooren, W.V., Bock, D.D., Hessels, A., Janssens, D. & Verschaffel, L. (2004). Remedying secondary school students' illusion of linearity: a teaching experiment aiming at conceptual change. *Learning and Instruction* 14, 485-501
Gravemeijer, K. (1997). Mediating between concrete and abstract. In Nunes, T. & Bryant, P. *Learning and Teaching Mathematics: An International Perspective*. Hove Psychology Press, 315-345.

Lesh, R. & Sriraman, B. (2005). John Dewey revisited – Pragmatism and the models-modeling perspective on mathematical learning. In Beckmann, A. Michelsen, C. & Sriraman, B. (eds.) *Proceedings of The First International Symposium of Mathematics and its Connection to the Arts and Sciences*. Hildesheim & Berlin: Verlag Franzbecker, 7-31.

Niss, M. & Jensen, T.H. (2002). *Kompetencer og matematiklæring. Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisningen i Danmark*. (in Danish) Copenhagen: Undervisningsministeriet.

Reiss, J. R. (1999). Teaching Ethics in Science. *Studies in Science Education*, 34, 115-140.

Schoenfeld, A. & Arcavi, A. (1988). On the meaning of variable. *Mathematics Teacher* 81, 420-427.

Mots-clés : compétences – interdisciplinarité mathématiques/sciences – modélisation mathématique – modélisation ascendante – modèle émergent – transfert de connaissances

Faces of mathematical modeling

T. Lingefjård

ZDM 2006 Vol.38 (2) pp.96-112

Idée générale de l'article

L'auteur est professeur associé à l'université de Gothenburg, ainsi qu'à l'université de Jonkoping (Suède), en mathématiques et *mathematics education*. Il défend qu'il n'est pas possible d'aborder toutes les questions concernant la modélisation mais qu'il va traiter certains questionnements via un cours sur la modélisation qu'il pratique lui-même depuis plus de 10 ans, en formation d'enseignants (enseignants peu, voire pas, formés au processus de modélisation). Lingefjård s'intéresse plus spécifiquement à la modélisation d'un phénomène physique (on retrouve ici des liens classiques entre mathématiques et physique) car cela représente une part importante, quantitativement, dans les programmes suédois. Ses illustrations sont essentiellement inspirées de la vie de tous les jours.

Références de l'auteur

Lingefjård présente quelques références, indiquant qu'il adhère à certains travaux, sans se positionner davantage ni générer de nouvelles questions de recherche. Il reprend notamment la définition suivante de « mathematical modeling », définition qui s'inscrit dans les standards NCTM :

Mathematical modeling can be defined as a mathematical process that involves observing a phenomenon, conjecturing relationships, applying mathematical analyses (equations, symbolic structures, etc.), obtaining mathematical results, and reinterpreting the model (Swetz & Hartzler, 1991)

Lingefjård a également proposé dans un autre article (2007) un questionnement sur les transitions entre le monde réel et le monde mathématique qui montre bien que l'auteur a une vision simple du travail de modélisation (transition du monde réel vers le modèle et inversement), cherchant à montrer l'utilité des outils mathématiques et la spécificité de la communication (et du langage) mathématique. C'est le travail pratique, sur des exemples, avec les étudiants qui intéresse cet auteur, pas les considérations théoriques.

Pourquoi la modélisation est-elle partie intégrante des programmes ?

L'auteur présente deux arguments dont l'un réfère à Niss, Blum & Niss (1989), Blum (1991) où l'intérêt d'enseigner la modélisation est traduit en 5 arguments : *Formative, Critical, Practical, Cultural, Instrumental*. Si les termes anglais parlent d'eux-mêmes, il serait possible de questionner davantage l'aspect « *instrumental* » de la modélisation, que celle-ci soit du monde réel vers le monde mathématique ou intra-mathématique. Mais dans cet article, seul l'aspect modélisation avec des liens très classiques entre mathématiques et physique est évoqué.

Le second intérêt de la modélisation dans l'enseignement est le lien qu'elle représente avec la société (cela rejoint l'aspect « *cultural* »): en tant que telle et en tant qu'élément du *problem-solving* (notamment au niveau des compétences et concepts travaillés lors de modélisations), mais aussi dans l'usage potentiel des nouvelles technologies.

Les enjeux d'un cours sur la modélisation

Là encore, l'auteur se réfère à un auteur pour expliciter de tels enjeux, ici Clayton (1999), enjeux qu'il s'approprie :

- Développer des compétences de modélisation (mais celles-ci ne sont détaillées) ;
- Montrer l'utilisation de techniques et d'analyse mathématiques (ici, il s'agit bien de « montrer », on peut imaginer le rôle qui devrait être celui de l'enseignant) ;
- Réaliser des simulations (exploiter des méthodes numériques, avec des instruments technologiques appropriés) ;
- Prendre en compte l'incertitude (réaliser des mesures et en faire l'analyse).

Des domaines où intervient la modélisation

Bien que l'article s'intitule *Faces of mathematical modeling*, l'auteur se contente de présenter des éléments de son cours, c'est-à-dire des « domaines » où intervient la modélisation, en adéquation avec ce qui précède. Les situations sont peu problématisées dans la mesure où la modélisation y est déjà embarquée. Il s'agit de problèmes de :

- Coût (climats) : un exemple simple concernant les coûts engendrés par l'isolation d'une maison permet de conclure sur l'orientation de celle-ci ;
- Population : l'auteur présente un classique proie/prédateur, avec les équations différentielles de Volterra et l'utilise dans un environnement Excel qui contient déjà la modélisation (avec donnée des conditions initiales et des équations différentielles).

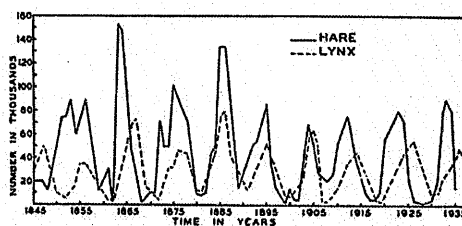


Figure 3: Model of hare and lynx populations in Hudson Bay over time. Edelstein-Keshet, 1988, p. 218.

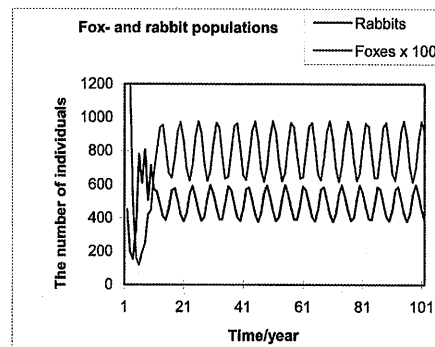


Figure 5: Model of simulated fox and rabbit population with $a = 77$, $b = 6$, $c = 122$, $d = 13$, and $e = 450$.

Il est dommage que cet exemple ne soit pas développé par rapport à l'ensemble du processus de modélisation, qui comprendrait : la construction du modèle (discret) proie/prédateur (avec des suites traduisant l'évolution de la population proie et de la population prédateur, à condition que suffisamment d'éléments sur ces populations soient donnés), la vérification du comportement du modèle (sur un cas « connu » comme celui des lynx et des lièvres), l'utilisation du modèle sur un cas réel comprenant une discussion sur la sensibilité aux conditions initiales par exemple, et enfin une discussion (et la question du modèle continu avec équations différentielles).

- Ce que l'auteur appelle « modèles « éternels » », à savoir les solides de Platon (modélisation

de ballon de foot et du Carbone 60), pour lesquels des informations historiques sont données (il ressort ici encore l'aspect *cultural* précédemment cité) ;



Figure 6: The Football polyhedron, by Leonardo da Vinci.

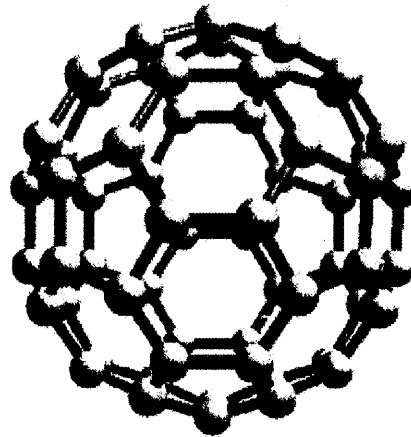


Figure 7: A model of a carbon ball.

- Médecine (température corporelle, médication, cardiologie) : là encore, les modélisations sont déjà données et non à construire, ou il est question de représenter graphiquement un ensemble de données discrètes (on pourrait ici rejoindre certains exercices proposés dans les manuels actuels de terminale lorsqu'ils traitent de désintégration du C14 par exemple) ;
- Sports : un modèle linéaire est explicité (programmé) à partir de notes en patinage artistique ;

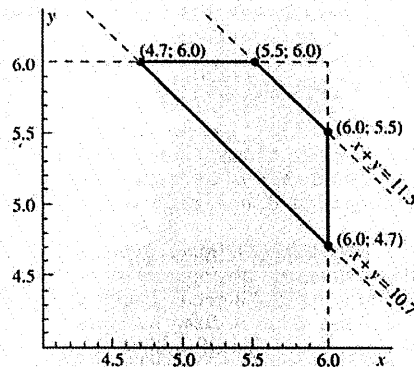


Figure 11: A Linear Programming model of how to judge ice skating performance. Sadovskii & Sadovskii, 1993, p. 46.

- Communication (placement des antennes de téléphone suivant différents pavages)

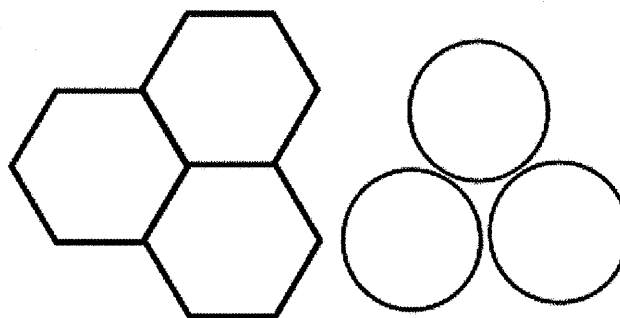


Figure 12: Placing communication antennas according to geometrical shapes.

Le problème est le suivant : à chaque antenne correspond une surface de couverture du réseau. La question serait de choisir un pavage parmi ceux proposés en géométrie (et j'imagine, d'optimiser, mais le questionnement n'est pas posé ainsi) et d'étudier celui qui permet d'avoir le moins de « trous » possible. Ici, l'auteur se réfère essentiellement aux expérimentations et calculs pour résoudre le problème posé, la modélisation se situant pour lui uniquement dans l'utilisation de formes géométrique pour représenter le problème réel. On pourrait pourtant voir ici un questionnement spécifique à la modélisation intra-mathématique (géométrie) et aux pavages. Mais il faut souligner que l'intention de l'auteur n'était là que de faire une introduction à des problèmes de modélisation en géométrie, en soulignant l'existence de la géométrie dans la communication moderne.

- Géométrie : un « joli » théorème, le théorème de Walter est proposé (historique compris) : « le polygone obtenu à partir des trisections des côtés d'un triangle a une aire égale à un dixième de l'aire du triangle ». On peut se demander ce qu'il advient de ce théorème lorsque l'on découpe chaque côté en plus de trois segments congruents. Une exploration par logiciel de géométrie dynamique réalisée par un élève du secondaire et son professeur est évoquée et l'auteur renvoie le lecteur à Watanabe et *al.* (1996). Aucun élément concernant la modélisation n'est ici donné par l'auteur, mais peut-être s'agit-il d'une illustration ayant pour but d'utiliser un environnement technologique et de conjecturer et généraliser.

Les conclusions de l'article

Il est clair que l'enseignement de la modélisation n'est pas « simple », ce que conclut (ou plutôt nous rappelle) l'auteur. Il serait nécessaire de montrer l'existence des mathématiques dans la vie de tous les jours. L'auteur insiste plus particulièrement sur les domaines préférés de ses étudiants (problèmes de médecine, température, géométrie, populations, sports décrits ci-dessus), mais il n'apporte pas de questionnements nouveaux, ni pratiques (mise en situation des étudiants) ni théoriques (sur le processus de modélisation lui-même).

Mais...

Dans tous ces exemples, Lingefjärd ne traite pas le travail de modélisation lui-même, mais les illustrations de la modélisation, dans des problèmes « réels » et un problème intra-mathématique, ce qui fait que le titre est trompeur. Les modèles algébriques donnés ne sont pas questionnés. Il s'agit d'une découverte par des exemples, où la dimension culturelle apparaît clairement. Par ailleurs, les compétences en jeu dans le travail de modélisation ne sont pas explicitées, et les exemples choisis ne permettent pas de les appréhender. De plus, la place des technologies numériques apparaît comme nécessaire pour Lingefjärd. Il est vrai qu'elles permettent l'exploration d'un problème, la génération de conjectures ainsi que la réalisation de tests, autant d'activités qui font partie intégrante du « modeling » ... encore faut-il déjà avoir engagé un travail de modélisation sur le problème « réel », « physique » lui-même. Dans cet article, les références choisies apparaissent pertinentes et seraient à explorer davantage afin de mettre en perspective les exemples que Lingefjärd propose, avec un questionnement lié à la modélisation et aux potentiels différents types de modélisation, mais aussi aux types de connaissances mathématiques en jeu.

Références

- Blum, W. (1991). Applications and modelling in mathematics teaching – a review of arguments and instructional aspects. In M. Niss, W. Blum & I. Huntley (Eds.), *Teaching of mathematical modelling and applications* (pp. 10-29). London: Ellis Horwood.
- Blum, W., & Niss, M. (1989). Mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects – state, trends and issues in mathematics instruction. In W. Blum, M. Niss, & I. Huntley (Eds.), *Modelling, applications and applied problem solving: Teaching mathematics in a real context* (pp. 1- 21). London: Ellis Horwood.
- Clayton, M. (1999). Industrial applied mathematics is changing as technology advances. In C. Hoyles, C. Morgan, & G Woodhouse (Eds.), *Rethinking the mathematics curriculum* (pp. 22-28). London: Falmer.
- Lingefjård, T & Holmquist, M. (2007). Model transitions in the real world: the Catwalk problem. In Haines, C., Galbraith, P., Blum, W. & Khan, S. (Eds) *Mathematical Modelling (ICTMA12) Education, Engineering and Economics* (pp. 368-376). Chichester: Horwood.
- Niss, M. (1989). Aims and scope of mathematical modelling in mathematics curricula. In W. Blum, J. Berry, R. Biehler, I. Huntley, R. Kaiser-Messmer & K. Profke (Eds.), *Applications and modelling in learning and teaching mathematics* (pp. 22-31). Chichester: Ellis Horwood.
- Swetz, F., & Hartzler, J., S. (1991). Mathematical modeling in the secondary school curriculum. The National Council of Teachers of Mathematics: Reston, Virginia.
- Watanabe, T., Hanson, R., & Nowosielski, F. (1996). Morgan's theorem. *Mathematics Teacher* 89(5), 420-423.

Partie 2

LES APPROCHES « CRITIQUES »

Mathematical Modelling in classroom: a socio-critical and discursive perspective

J. C. Barbosa

ZDM 2006 Vol.38 (3) pp.293-301

Introduction

L'auteur commence par rappeler que l'intérêt pour la modélisation mathématique s'est développé en réaction au mouvement « mathématiques modernes » dès les années 60, et que depuis 1983 se tient tous les deux ans une conférence organisée par l'ICTMA (International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications). Récemment, une étude ICMI (2006) a pris pour thème « Applications et modélisation ». Au Brésil, ce mouvement est lié à l'ethnomathématique, elle même liée à l'anthropologie, et depuis 1999 il s'y tient également une conférence biennale.

Cependant, peu de recherches se sont intéressées à l'élève en activité de modélisation. Cet article a pour but de contribuer à ce débat, initié par Borromeo Ferri (ZDM 38(2), pp. 86-95). L'auteur se propose d'esquisser un cadre pour comprendre les pratiques des élèves engagés dans des activités de modélisation.

Une perspective pour la modélisation

Il ne s'agit pas de se cantonner au seul niveau de l'argumentation, mais de voir comment, en mettant l'accent sur tel ou tel argument, on peut s'orienter vers différentes façons d'organiser et de conduire les activités. Julie (2002) distingue deux types de modélisation : la modélisation comme *contenu* (développement des compétences nécessaires pour modéliser une situation) et la modélisation comme *véhicule* (support de la façon d'enseigner les concepts mathématiques).

La modélisation critique

L'auteur propose ici une troisième possibilité : une réflexion sur le rôle des mathématiques dans la société, qui s'appuie sur les études relatives à la dimension socioculturelle des maths (cf. notamment d'Ambrósio au Brésil), et en particulier sur la nature *critique* des modèles mathématiques dans la société en utilisant la modélisation comme critique des modèles existants. Ces études montrent que les modèles mathématiques ne sont pas des descriptions neutres d'une réalité indépendante, mais que le processus de modélisation contient des éléments habituellement cachés au public⁶.

« Une quinzaine de modèles climatiques sont actuellement utilisés dans le monde. Bien

⁶ On le voit actuellement avec la polémique sur le réchauffement climatique, où les divergences importantes proviennent, d'une part des modèles différents qui sont utilisés, des paramètres qu'on y introduit et d'autre part de l'ampleur des extrapolations qu'on en fait.

qu'imparfaits, ils constituent les seuls outils disponibles pour prévoir les conséquences possibles d'une perturbation climatique. Pour obtenir une prévision, on fixe d'abord les conditions initiales au sein d'une multitude de cubes virtuels recouvrant la planète : température, pression, humidité, couverture nuageuse, vents, ... On introduit ensuite une perturbation évoluant dans le temps (par ex. une hausse de la teneur en gaz à effet de serre), sous forme d'équations supplémentaires. Selon les scénarios d'émission de gaz à effet de serre (diminution, stagnation, augmentation...) et selon les différents modèles, la fourchette possible d'augmentation de la température est de 1,5 à 6°C pour le siècle en cours. » (Entrée « modèle climatique » du lexique de la Cité des Sciences, <http://www.cité-sciences.fr>, mai 2010.)

Il apparaît donc important que les élèves soient à même de pouvoir discuter de façon critique la nature et le rôle des modèles mathématiques. Ainsi, l'apprentissage mathématique participera à l'effort général de formation de citoyens éclairés et responsables.

« L'épistémologie critique peut être caractérisée comme une théorie du développement et de la construction des connaissances où la critique de ce qui est appris fait partie du processus d'apprentissage. » (Alrø & Skovsmose 2002)

L'auteur applique ceci à la modélisation (*modélisation comme critique*). Dans cette approche, l'apprentissage des concepts mathématiques et le développement de « compétences de modélisation » sont considérés comme des *véhicules* pour mener une *critique* des modèles mathématiques.

La modélisation en mathématiques

L'auteur entreprend ensuite de préciser les limites de ce qu'il entend par « modélisation en mathématiques ». L'expression « modélisation et applications » est couramment utilisée comme fourre-tout pour englober tout ce qui a trait aux activités qui relient les mathématiques à la vie quotidienne ou aux autres sciences (« word problems », « problem posing », « project work », problèmes ouverts...).

Un autre aspect de la modélisation en mathématiques est qu'elle est souvent représentée sous forme de schémas ayant pour but de décrire le processus de modélisation comme une série de stades bien définis (cf. l'annexe pour une présentation de cette approche « diagrammatique »).

Barbosa, lui, caractérise la modélisation en classe de mathématiques par deux critères :

- l'activité est un (vrai) problème pour l'élève, et non un simple exercice ;
- l'activité provient de la vie quotidienne ou d'une science autre que les mathématiques pures.

Il définit la modélisation en mathématiques comme un milieu d'apprentissage (sans référence à Brousseau) où les élèves sont invités à investir un problème et à l'explorer en référence à la réalité, via les mathématiques. Il s'agit alors d'une activité scolaire, qui peut être considérée dans une perspective pragmatique, scientifique ou sociocritique (ici, c'est cette dernière option qui est prise).

Illustration par un exemple

La séquence a eu lieu dans une classe de grade 7 (cinquième en France) d'une région rurale du Brésil. Le gouvernement avait annoncé aux paysans un programme de distribution de graines de maïs et de haricots. Comme beaucoup d'élèves appartenaient à des familles qui devaient bénéficier de cette distribution, l'enseignante avait estimé que cette situation pouvait les intéresser. Elle agrafa au mur une coupure de journal et invita les élèves à la commenter :

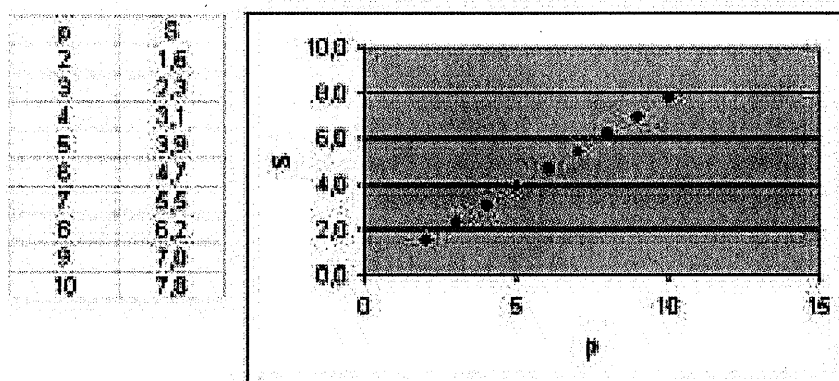
« Les graines de maïs et de haricots fournies par le Gouvernement ont commencé à être distribuées hier après-midi. Il y en a 37,5 tonnes : 25 tonnes de haricots et 12,5 tonnes de maïs. Environ 8000 fermiers en bénéficieront. Selon le maire, chaque fermier recevra 3 kg de haricots et 2 kg de maïs. »

Après avoir lu l'article, l'enseignante posa quelques questions aux élèves : Que voyez-vous

dans cette information ? De quoi parle-t-elle ? Etc. Les élèves ont vite détecté une erreur, soit dans le texte, soit dans le programme gouvernemental : 37,5 tonnes ne suffisaient pas pour que chacun des 8000 fermiers reçoive 5 kg de graines.

Puis l'enseignante interrogea les élèves sur les critères utilisés par le gouvernement pour distribuer les graines, et elle sentit que cela les gênait. Leurs arguments étaient que les familles avaient des besoins différents, et que par conséquent elles devaient recevoir des quantités différentes. L'enseignante demanda ensuite de se concentrer sur une unique question : quel critère d'attribution serait le plus juste ? Vrai problème, car les élèves n'avaient pas de stratégie toute faite ; les deux critères de l'activité de modélisation (vrai problème, issu de la vie quotidienne) étaient donc vérifiés.

Les élèves furent mis en groupes. Ils développèrent des critères fondés sur le nombre de membres de la famille : la quantité de graines devait être proportionnelle au nombre de membres de la famille. L'enseignante demanda alors à un groupe d'aller s'expliquer au tableau, et une discussion s'engagea, gérée par elle. Les critères sont illustrés par la figure ci-dessous, où P est le nombre de personnes de la famille et S la quantité de graines en kg.



Durant cette activité, les élèves ont eu l'occasion de voir comment différents critères conduisaient à des résultats mathématiques différents. Ils ont discuté sur la façon dont des intérêts ou des hypothèses différents pouvaient produire différents modèles et donc différentes décisions. Ce fut une bonne occasion de percevoir la nature, non neutre, de la description mathématique d'une situation réelle.

Cet épisode illustre ce que l'auteur appelle la perspective sociocritique de la modélisation dans l'enseignement mathématique, parce qu'elle concerne le rôle des modèles mathématiques dans la société.

Les élèves dans les activités de modélisation

On trouve également des études de deux autres types :

- les études qui se centrent sur les compétences des élèves à chaque stade du processus de modélisation ;
- les études qui analysent la transition d'un stade à l'autre.

Mais Borromeo Ferri a montré que la distinction entre les différents stades était uniquement théorique, et que, dans la pratique, il est difficile de les distinguer.

Busse et Maass se sont appuyés sur des données expérimentales pour distinguer les élèves selon leur comportement par rapport aux aspects mathématiques et aux aspects réels dans des activités de modélisation ; d'où quatre types idéaux d'élèves :

- ceux qui négligent les aspects mathématiques ;
- ceux qui négligent les aspects réels ;
- ceux qui maintiennent un équilibre entre les deux aspects ;
- ceux qui prennent en compte les deux aspects, mais en les maintenant déconnectés.

Il y a des indices du fait que les différents types d'élèves reconstruiraient le contexte du problème de façon différente, ce qui aurait des effets différents sur eux, en fonction de leur expérience antérieure.

L'auteur cite une de ses recherches dans laquelle on demandait aux élèves d'inventer, puis de résoudre un problème réel. Certains élèves partaient alors d'une situation mathématique et inventaient une situation réelle fictive pour l'illustrer (« stratégie inverse »⁷). Il semble donc que les « itinéraires de modélisation » (Borromeo Ferri) des élèves ne soient pas linéaires et ne rentrent pas dans un schéma normatif. Les variables liées au contexte scolaire (temps, objectifs pédagogiques, programmes scolaires, etc.) imposent d'autres conditions aux élèves et à l'enseignant.

L'approche diagrammatique ne semble donc pas un bon moyen d'appréhender le comportement des élèves. Les élèves et les professionnels ont des objectifs différents et sont dans des conditions différentes. Leurs pratiques sont donc différentes. Les études menées dans une perspective sociale ont montré que les mathématiques scolaires ne sont pas une simple « transposition » (utilisé ici dans son sens usuel, et non dans celui de Chevallard) des connaissances scientifiques, mais constituent en fait un autre type de connaissances. L'auteur propose donc de considérer l'activité de modélisation en classe comme différente de l'activité menée par les professionnels. Du point de vue de la formation à l'esprit critique, le recours à des cadres normatifs néglige cette dimension car l'objectif est alors de rapprocher le comportement de l'élève du comportement du professionnel de la modélisation ; Lamou (2001) parle d'« enculturation ». *(Il serait sans doute intéressant d'analyser en parallèle le fonctionnement d'un groupe de chercheurs professionnels s'attaquant à la résolution d'un problème et celui d'une classe confrontée à un problème de recherche.)*

La centration sur le discours des élèves dans les activités de modélisation

L'auteur propose de considérer le discours des élèves, non seulement comme une donnée de l'expérience, mais comme l'objet même de la recherche. Par discours, il entend aussi les signes, les gestes, les mimiques, etc. (*Référence implicite à l'« embodied cognition » de Núñez & Lakoff, cf. par ex. Edwards, L. Metaphors and gestures in fraction talk. Actes de CERME 4, 2005*). Barbosa a introduit la notion d'« espace interactif » pour désigner les moments où l'enseignant et les élèves interagissent verbalement à propos d'une activité de modélisation. A travers un discours partagé, les interlocuteurs négocient les significations, et le discours a une fonction régulatrice. Il ne s'agit pas de réduire la modélisation au discours, mais d'identifier un objet de recherche.

Skovsmose a proposé de distinguer entre connaissances mathématiques, connaissances technologiques et connaissances réflexives pour étudier le processus de modélisation. L'auteur reprend cette terminologie, mais il l'applique aux discussions entre élèves :

- discussions mathématiques : elles concernent les idées qui appartiennent au domaine mathématique ;
- discussions technologiques : elles concernent les techniques de construction du modèle ;
- discussions réflexives : elles concernent la nature du modèle mathématique, les critères utilisés dans sa construction et ses conséquences (Robert & Robinet (1993)).

Pour les illustrer, il présente un épisode mettant en jeu quatre futurs professeurs de mathématiques brésiliens ayant choisi comme sujet d'étude « les maladies cardio-

⁷ Car il s'agit de « concrétiser » une situation mathématique, ce qui est en quelque sorte la démarche inverse de la modélisation.

vasculaires ». Dans leur premier rapport ils avaient identifié 8 facteurs possibles, et pour chacune de ces variables, ils avaient affecté, pour chaque sujet, une note correspondant à son style de vie. Par exemple, pour le fait de fumer, 0 correspondait au fait de n'avoir jamais fumé, 1 correspondait au fait d'être un ex-fumeur, etc. Dans leur rapport final, ils donnaient une équation permettant de déterminer le risque de maladie cardio-vasculaire.

En cours de travail, l'enseignant organisa une rencontre avec ces étudiants pour discuter de leur rapport. En voici un extrait où apparaissent des discussions technologiques (élaboration du modèle) et des discussions mathématiques (procédures mathématiques) :

Maria : C'est dur pour nous, parce que nous savons comment nous débrouiller avec...

Prof : Deux variables ?

Maria : C'est ça.

Maria : Maintenant nous avons 8 variables ... il nous faut 8 axes.

Prof : Il n'y a pas une variable risque, aussi ?

Maria : Ouais, c'est ça ; ça fait qu'il y a 9 variables.

Maria : Maintenant, comment dessiner le graphique ?

Prof : Réfléchissons... Dans le cas de deux variables...

João : On pourrait utiliser le plan cartésien.

Prof : Et...

Maria : Avec 3 variables, on utilise l'espace XYZ.

Prof : Et avec 9 variables ?

(...)

João : Alors éliminons des variables et travaillons avec 3... Après ça on fera le graphique.

Carlos : Peut-être qu'on pourrait analyser l'influence d'une variable sur le développement des maladies cardio-vasculaires ?

Maria : Pour faire simple, on peut appliquer le coefficient de corrélation, comme pour le taux de cholestérol et l'obésité.

Sont apparus aussi des éléments de discussion réflexive exprimés par les questions suivantes : Quel sera l'effet du choix de seulement trois variables sur les résultats ? Selon quels critères ont été choisies les variables ? Ces résultats sont-ils valables pour tout le monde ?

L'intérêt de ces discussions est de fournir de l'information, non seulement sur ce que disent les étudiants, mais sur leurs objectifs, sur leurs conceptions, sur la négociation du sens. Leur place dépend du poids que l'enseignant leur affecte :

- dans l'approche pragmatique, ce sont les discussions technologiques ;
- dans l'approche scientifique, ce sont les discussions mathématiques ;
- dans l'approche sociocritique, ce sont les discussions réflexives.

Mais, dans cette dernière approche, il ne suffit pas que les discussions réflexives apparaissent ; il faut les stimuler en s'appuyant sur les autres types de discussion. (Voir sur ce sujet (Parzys & Jore, 2009).)

Remarques finales

La question de l'approche diagrammatique est peut-être une question polémique qui mérite une discussion plus approfondie.

L'approche de la psychologie discursive et culturelle est ici utilisée comme une loupe pour analyser la modélisation chez les élèves. Les notions de discussions mathématique, technologique et réflexive apparaissent comme un moyen puissant de décrire la pratique des élèves. Pour finir, l'auteur indique que d'autres études intéressantes ont été menées dans le cadre de PME.

Annexe : Qu'est-ce que l'approche diagrammatique ?⁸

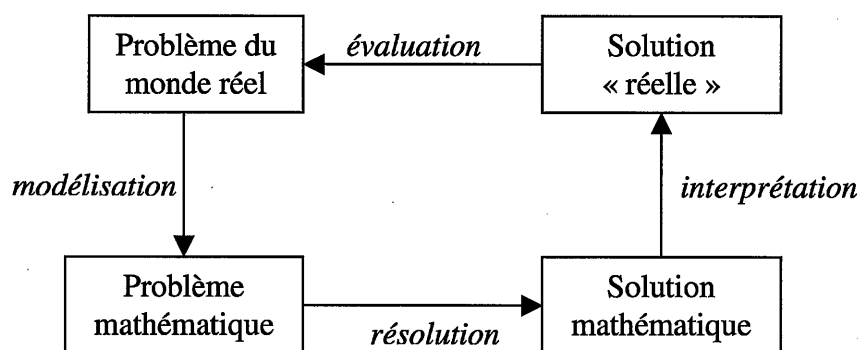
Haines & Crouch (2007) précisent :

(p. 418) : « La modélisation mathématique peut être décrite comme un processus cyclique dans lequel les problèmes du monde réel sont abstraits, mathématisés, résolus et évalués en parcourant six stades : énoncer un problème du monde réel, formuler un modèle, résoudre mathématiquement le problème, interpréter les solutions, évaluer une solution, affiner le modèle, avant de reconsidérer l'énoncé du problème du monde réel et de répéter le cycle.

(...) Parfois, les tâches ne peuvent être identifiées à des stades spécifiques du cycle, mais sont plutôt liées aux transitions entre deux stades ou plus. ».

Les auteurs donnent comme exemples : passer du monde réel au modèle, expliciter le modèle, expliciter les variables, établir des équations, passer des mathématiques au monde réel, interpréter des informations graphiques dans le monde réel, utiliser des mathématiques en liaison avec le monde réel.

Le qualificatif « diagrammatique » fait allusion au diagramme cyclique évoqué dans la citation ci-dessus, qui est du type suivant :



Références

Alrø, H. & Skovsmose, O. (2002). *Dialogue and learning in mathematics education :intention, reflection, critique*. Dordrecht: Kluwer.

Barbosa, J.C. (2003). What is mathematical modelling? In S.J. Lamon, W.A. Parker & S.K. Houston (Eds). *Mathematical modelling: a way of life*. ICTMA 11 pp. 227-234. Chichester: Horwood Publishing.

Barbosa, J.C. (2006). Students' discussion in mathematical modelling. Paper presented at the 3rd International Conference on the Teaching of Mathematics. Istanbul, Turkey.

Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiation of phases in the modelling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 38(2) pp. 86-95.

Busse, A. (2005). Individual ways of dealing with the context of realistic tasks – First steps towards a psychology. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 37(5) pp. 354-360.

⁸ Cette annexe a été rédigée par les auteurs de ce compte-rendu.

Julie, C. (2002). Making relevance in mathematics teachers education. In I. Vakalis, D. Hughes Hallett, D. Quinney & C. Kourouniotis (compilers). *Proceedings of the 2^d International Conference on the Teaching of Mathematics*. New York: Wiley [CD-rom].

Haines, C. & Crouch, R. (2007). Mathematical modelling and applications : ability and competence frameworks. In *Modelling and applications in mathematics education* Blum, W., Galbraith, P., Henn, H.-W., Niss, M., eds, Springer 2007 pp. 417-424.

Lamon, S. (2001). Enculturation in mathematical modelling. In F.J. Matos, W. Blum, S.K. Houston & S.P. Carreira (Eds). *Modelling and mathematics education: ICTMA 9 – Applications in Science and Technology* pp. 335-341. Chichester: Horwood Publishing.

Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 38(2) pp. 113-142.

Parzysz, B. & Jore, F. (2009). *Studying French preservice elementary teachers' relation to geometry through their discourse* In *Nordic Research in Mathematics Education*, C. Winslow, ed., Sense Publishers, Rotterdam, pp. 117-126.

Robert, A. & Robinet, J. (1993). *Prise en compte du méta en didactique des mathématiques*. Cahier de DIDIREM n° 21, Université Paris-7.

Skovsmose, O. (1994). *Towards a philosophy of critical mathematical education*. Dordrecht: Kluwer.

Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics

F. J. García, J. Gascón, L. Ruiz Higuera, M. Bosch

ZDM 2006 Vol.38 (3) pp.226-246

Introduction

Comme le titre l'indique, l'article propose de considérer la modélisation mathématique comme un outil pour résoudre un problème de connexion des notions mathématiques, problème par ailleurs déjà étudié par les auteurs. Le cadre théorique choisi pour les discussions et les analyses est la TAD. En particulier, le problème central qui est traité ici est *la connexion des praxéologies mathématiques dans l'enseignement* et, finalement, leurs recherches sont assez éloignées des autres études sur la modélisation, notamment celles utilisant le cycle de modélisation. Leur point de vue rejoint les positions de Chevallard (LDAR, journée du groupe du 04/12/2009) où il a précisé que la modélisation n'était pas le point central : en TAD, ce qui est important, c'est une question dont la réponse donne lieu à un Parcours d'Etude et de Recherche (PER). C'est dans cette perspective que l'article se termine par l'exposé d'un exemple de PER. Pour comprendre l'article il vaut mieux avoir quelques connaissances en TAD et avoir une idée des recherches en modélisation.

Structure générale de l'article :

- 10 pages théoriques (la TAD, la modélisation et le problème de connexion des contenus)
- 7 pages sur un exemple de PER (les relations fonctionnelles entre grandeurs dans le secondaire)
- 1 page de conclusion
- 2 pages de références

Un résumé de l'article est proposé ci-dessous. Des notes du lecteur, bien identifiées, ponctuent le déroulement de ce résumé.

Partie théorique

La première section propose une présentation de la TAD en 3,5 pages avec les notions :

- les praxéologies mathématiques (Chevallard, 1999) ;
- les praxéologies didactiques et les moments de l'étude (Chevallard, 1999, 2002a) ;
- les niveaux de détermination, le phénomène de confinement du professeur (Chevallard, 2002b).

Vient ensuite, en section 2 et en 2,5 pages, un point sur la recherche sur la modélisation : 1 page d'histoire de la recherche sur la modélisation, 1 page de structuration des recherches actuelles en modélisation par les niveaux de détermination – ce qui fait faire un premier pas en TAD – et 0,5 page pour introduire les perspectives des auteurs.

Historique de la recherche en modélisation

En didactique des mathématiques on peut considérer deux interprétations de la modélisation :

- la modélisation mathématique est un outil didactique puissant pour l'enseignement des mathématiques ;
- la modélisation doit être explicitement enseignée comme un contenu spécifique des mathématiques.

Le domaine de recherche « modélisation et applications » a émergé de ces questions. Il a donné lieu à deux grands axes de recherche :

Axe 1- la recherche de *bons* systèmes pouvant être modélisés et de *bonnes* applications, que ce soit pour enseigner un contenu mathématique précis ou pour enseigner la modélisation elle-même. Les auteurs affirment que cet axe s'est développé sans « base théorique solide explicitement élaborée, les fondements théoriques étant laissées à d'autres disciplines » (page 230).

Axe 2- la recherche des moyens d'utilisation de ces *bons* systèmes et modèles. L'aspect le plus connu de cet axe est le cycle de modélisation (Blum & Niss, 1991).

Le second axe a permis de mettre l'accent sur le processus de modélisation qui devient un objet d'étude. On relève deux approches :

- une approche cognitive qui provient de la nécessité d'une compréhension plus profonde des processus cognitifs que les élèves mettent en œuvre quand ils sont confrontés à des tâches de modélisation ;
- une approche épistémologique qui focalise l'attention sur les caractéristiques des « situations réelles » utilisées dans le processus de modélisation et qui étudie la question du lien entre ces situations et le savoir mathématique.

L'approche cognitive a permis de questionner différemment les deux axes initiaux de recherche : « *Comment faire pour que les élèves développent des compétences non routinières de modélisation par eux-mêmes (en se référant en général à des situations extra-mathématiques) ?* » (p. 230), question qui peut être résumée par « le problème de la modélisation ».

Structuration par les niveaux de détermination

Beaucoup de recherches sur la modélisation se placent au niveau « Thème » ce qui a pour conséquence la construction de praxéologies mathématiques ponctuelles. La modélisation apparaît alors comme un moyen pour introduire un certain thème, un concept spécifique. Mais, une fois cette introduction accomplie, le système modélisé ainsi que la question initiale qui a initié le processus de modélisation disparaissent puisque l'on n'en a plus besoin.

Un autre axe de recherche se place au niveau « discipline » (éventuellement pour faire des liens entre disciplines) et tente de développer des compétences générales de modélisation. Il n'y a pas de référence directe aux contenus mathématiques et il n'y a pas de prise en compte des niveaux de détermination inférieurs à celui de la discipline.

La formulation du « problème de modélisation » au niveau discipline entraîne un intérêt fort des recherches en « modélisation et applications » pour le curriculum. En particulier, la notion de curriculum intégré apparaît où les contenus mathématiques sont reformulés en compétences, compétence de modélisation incluse (cf. projet KOM (Niss, 2003)).

La RME, avec les trajectoires didactiques (*model of / model for*), tente plutôt, selon les auteurs, de placer le problème de la modélisation au niveau secteur.

NOTE

Les auteurs ne développent pas le point de vue de la RME dont la conception de la modélisation semble pourtant relativement proche de leur préoccupation.

Perspectives des auteurs

La plupart des recherches en « modélisation et applications » se sont appuyées sur le cycle de modélisation (Blum, 2006). Les auteurs, sans nier les grands progrès et les résultats provenant de ces recherches utilisant le cycle de modélisation, émettent deux remarques :

- en s'appuyant sur une citation de Blum (2002), il est précisé que les résultats obtenus sont loin de ceux escomptés ;
- le paradigme du cycle de modélisation a pour conséquence de ne pas considérer la modélisation comme une notion problématique, car c'est l'enseignement de la modélisation qui est problématique.

Les auteurs concluent cette partie en exposant leurs objectifs de recherche. Ils estiment qu'il est nécessaire de continuer la recherche sur la modélisation dans les deux approches, cognitive et épistémologique. Pour leur part, ils se situent dans une approche épistémologique et proposent une théorisation de la modélisation par la TAD :

« Pour avancer, nous allons travailler sur une reformulation des processus de modélisation, au-delà du « cycle de modélisation », qui sera un outil pour identifier de nouveaux problèmes éducatifs et trouver de possibles solutions. Notre objectif n'est pas de critiquer le « cycle de modélisation » mais de le « transposer » dans un cadre théorique solide. » (p. 232).

NOTE

Il y a quand même, malgré ce qu'écrivent les auteurs, une critique assez forte du cycle de modélisation. Les deux remarques sont finalement plus des critiques et leur objectif de transposer le cycle de modélisation dans un cadre théorique solide, la TAD, montre ce que les auteurs pensent de ce cycle. Cette partie théorique sur les recherches en modélisation s'insère assez mal dans l'article. Les auteurs exposent en parties 3, 4 et 5 leur compréhension de la modélisation en TAD, indépendamment des recherches mentionnées dans cette section et indépendamment du cycle de modélisation – dans la suite, le cycle de modélisation n'est pas repris de manière consistante.

La modélisation mathématique vue par la TAD

La section 3, de 1,5 pages, se propose de reformuler la modélisation mathématique en TAD en réinterprétant la modélisation à l'aide des praxéologies mathématiques. Le point de vue est clairement épistémologique et se fonde sur l'idée que l'activité mathématique est essentiellement une activité de modélisation.

Il n'y a pas de distinction entre une modélisation extra- et intra-mathématique et la modélisation que ce soit pour introduire une notion ou comme objet à enseigner ne sont pas indépendants (ce sont des activités mathématiques). L'important n'est pas la situation à résoudre, mais la possibilité de reproduire le processus et de développer les praxéologies, notamment à partir de la solution trouvée. Une question qui permet la production de larges organisations mathématiques est une « question cruciale ». Les auteurs affirment que la recherche doit se concentrer sur ces « questions cruciales ».

Un exemple est donné dans le curriculum espagnol sur les relations réciproques des

modélisations algébriques et géométriques qui semblent ignorées par les institutions, alors que les élèves utilisent les mêmes connaissances dans les deux cadres. D'où le questionnement : « Dans quelle mesure les restrictions imposées par les différents niveaux de détermination conditionnent-elles ces questions cruciales et le processus d'étude qui pourrait en résulter ? »

Les auteurs reformulent le processus de modélisation comme un processus de reconstruction et d'interconnexion de praxéologies de complexités croissantes : ponctuelle → locale → régionale. Les questions cruciales entraînent une étude et « Les réponses produites dans ce processus d'étude doivent donc être matérialisées en une praxéologie régionale » (p. 233). De ce point de vue :

- Modèles et systèmes sont étendus pour être considérés comme des praxéologies ponctuelle ou locale ;
- Le processus de modélisation peut être caractérisé avec les praxéologies et leurs relations ;
- Une praxéologie peut être considérée comme un modèle, ou un système, dépendant du type de questions posées. Être un modèle est une fonction des praxéologies – et non leur nature ;
- Un processus de modélisation ne peut être considéré comme indépendant de l'activité mathématique.

NOTE

Développée ici dans le cadre de la TAD, l'idée que le processus de modélisation peut aussi être intra-mathématique se retrouve dans d'autre cadre comme par exemple dans la RME.

Par ailleurs, il n'y a pas exactement, comme annoncé en fin de section 2, de transposition du cycle de modélisation dans la TAD mais plutôt le point de vue de la TAD sur la notion de modélisation.

Les auteurs parlent d'une « rupture avec la tradition des 25-30 dernières années » tout en affirmant que leur point de vue n'est pas en opposition avec les recherches précédentes. Il semble toutefois que cette « rupture » procède plutôt de deux conceptions juxtaposées de la modélisation. On ne peut effectivement pas dire qu'il y a opposition, mais plutôt une *apposition* des deux conceptions. En effet, le premier point énoncé fixe le cadre dont on a peine à envisager le lien avec le cycle de modélisation.

La déconnexion des mathématiques enseignées

Cette partie fait l'objet de la section 4, constituée de 2 pages, où les auteurs définissent « le problème de l'élaboration du curriculum ». Dans un curriculum, les contenus sont organisés en domaines puis en secteurs. Il est communément admis que ces contenus constituent une organisation plus large, la discipline « les mathématiques ». Mais rien n'est dit sur la connexion de ces contenus entre-eux pour former cette discipline. Il est communément admis que la résolution de problèmes et les applications des mathématiques dans des contextes réels permettent de réaliser cette connexion. Comment connecter les secteurs et thèmes entre-eux pour organiser et structurer les contenus ? Ce problème de connexion est crucial pour les auteurs qui le nomment « le problème de l'élaboration du curriculum ».

Ce problème de connexion ne peut pas être, comme il est souvent admis, résolu en se focalisant sur l'enseignement à cause du problème de confinement des enseignants aux niveaux des thèmes et des sujets. Pour la TAD, le problème n'est pas un problème d'enseignement, mais un problème d'organisation des mathématiques. Ainsi, le problème du

curriculum se reformule aisément dans le langage des praxéologies : « comment élaborer des praxéologies didactiques pour articuler le curriculum mathématique en domaines et secteurs à la fois à un niveau d'enseignement donné et à des niveaux différents ? »

NOTE

Indépendamment de toute référence à la modélisation, ce problème, clairement exprimé dans la TAD, est crucial et fondamental. La TAD est un cadre d'analyse adéquat pour traiter ce problème.

Exemple illustratif

L'exemple des relations fonctionnelles entre grandeurs est choisi pour répondre, par les praxéologies, au problème du curriculum en Espagne et notamment de la déconnexion des mathématiques enseignées. La thèse de García (2005) est un point d'appui fort qui permet d'élaborer une ingénierie pour connecter des praxéologies de complexités croissantes.

Le cadre cognitif, très exploré, s'est beaucoup focalisé sur la « pensée proportionnelle » et sur les erreurs des élèves – notamment l'utilisation d'un raisonnement de proportionnalité à des situations non proportionnelles. Ici, on se situe dans un cadre épistémologique en considérant un ensemble de relations fonctionnelles entre grandeurs. La proportionnalité n'est qu'une des relations envisagées alors que dans la plupart des recherches la relation de proportionnalité paraît isolée des autres relations.

NOTE

L'ingénierie a fait l'objet de réalisation effective en classes (en 2004 et 2005), mais il est dommage que les auteurs n'en disent rien. Les auteurs réfèrent à la thèse de Garcia (2005).

Le Modèle Epistémologique de Référence

Dans tout système d'enseignement des mathématiques, on trouve un modèle épistémologique dominant. Ce dernier, qui est propre à une institution, est très souvent implicite. Il est donc nécessaire de construire explicitement un Modèle Epistémologique de Référence (MER) pour les connaissances mathématiques en jeu. Les auteurs utilisent le MER sur les relations fonctionnelles entre grandeurs telle que García (2005) l'a développé dans sa thèse pour l'analyse de manuel. En prenant appui sur un cadre général fixé par le curriculum espagnol, les auteurs définissent un MER en distinguant, *a priori*, 5 types de variation de deux grandeurs (la première est incluse dans les deux suivantes variations). Ce MER est utilisé pour caractériser les praxéologies mises à l'étude dans les manuels en Espagne, puis pour illustrer comment les auteurs ont élaboré un programme d'étude en réponse au problème curriculaire de la connexion des relations fonctionnelles.

NOTE

Les différentes variations envisagées sont intéressantes mais elles ne sont pas mises en perspective avec les situations. En particulier, dans telle ou telle situation les deux grandeurs en jeu peuvent avoir des caractéristiques de variations qui peuvent rendre problématique les demandes du type « pour toute variation arithmétique de la première grandeur... ». Rien n'est dit non plus de la réciprocité des relations entre deux grandeurs. On peut supposer que ceci est discuté dans la

thèse de Garcia (2005).

Pourquoi les auteurs utilisent les suites arithmétiques et géométriques ? Par exemple, pour caractériser la proportionnalité (la variation *condition de linéarité*) il n'est pas nécessaire de dire « toute suite géométrique (a_i) est transformée en une suite géométrique (a'_i) » – on préférerait « correspond à » à « est transformée en » –, car il suffit de considérer un quotient générique et non une suite : $a_i/a_k = a'_i/a'_k$. La même notation k est utilisée pour désigner, selon le type de variations envisagé, un nombre qui est un quotient de deux quantités d'une même grandeur ou la différence de deux quantités d'une même grandeur. Cela ne facilite pas la compréhension. En outre, si les quantités prises par les grandeurs sont discrètes – on suppose qu'elles sont en nombre infini ce qui n'est pas précisé –, rien n'est dit sur les valeurs que peuvent prendre les quantités « k ».

Un processus de modélisation : « les plans d'épargne »

L'activité propose d'élaborer un plan d'épargne en vue de payer un voyage touristique dont on ne connaît ni la date ni le montant exact. Les élèves doivent eux-mêmes choisir les différents paramètres de la situation. La situation initiale est très floue ce qui est un choix des auteurs. Les paramètres principaux sont :

- le nombre de versements ;
- le montant initial ;
- la règle de génération des versements successifs ;
- la périodicité des versements.

Le contrôle de la situation joue un rôle prépondérant dans l'élaboration du PER.

Les auteurs précisent les plans d'épargne qu'ils espèrent voir apparaître : plans à versements constants ; plans où les versements augmentent (ou diminuent) d'une somme constante à chaque fois ; plans où les versements augmentent (ou diminuent) selon un pourcentage constant.

Un processus de modélisation

L'objectif est de développer un PER et donc de définir des questions productives pour l'étude et la recherche sur les relations fonctionnelles entre deux grandeurs. La question productive est :

Q_{var} : quels principes peuvent être utilisés pour définir différents « types de variation » ?

Le point de départ est une question productive initiale :

Q_i : Partant d'une situation S_i où il est possible d'établir une relation entre grandeurs, l'une d'entre elles variant en relation avec une autre, quelles sont les caractéristiques de cette variation ?

Elle devrait engager les élèves à délimiter le système et à définir deux grandeurs : la distribution périodique des versements et le montant épargné. Puis, pour engager le PER, une question productive peut être formulée afin de faire émerger une praxéologie ponctuelle :

Q_s : quels principes peuvent être utilisés pour planifier un « plan d'épargne » spécifique (SP_i) ?

Le travail consiste alors en :

- choisir un premier état du système ;
- choisir la condition de la variation ;
- simuler le système.

Le développement du PER

La question posée aux élèves pour le moment de première rencontre est :

Q_s : Nous voulons planifier le voyage de fin d'année suffisamment à l'avance. Nous devons déterminer différentes manières d'épargner de l'argent pour atteindre le montant nécessaire pour ce voyage. Bien que nous ne connaissions pas encore ce montant, nous pouvons commencer à faire une estimation de l'argent dont nous aurons besoin et prendre des décisions sur nos plans d'épargne personnels : le nombre de placements, les parts, etc. Naturellement, ce n'est pas notre tâche aujourd'hui de décider combien d'argent nous devons dépenser et comment, mais essayer d'anticiper les nécessités que nous aurons quand nous connaîtrons les dépenses pour le voyage de fin d'année.

NOTE

Le type de tâches qui fait l'objet de cette première rencontre semble être $T_{simulation}$, même si ce n'est pas précisé.

À partir de cette question productive Q_s , il est prévu que des praxéologies ponctuelles émergent. « Une fois le type de variations déterminé [...], une première tâche émerge « naturellement » : tester nos plans d'épargne [...] et observer ce qui arrive. Nous avons appelé ce premier type de tâches « les tâches de simulation » ($T_{simulation}$), qui provoque la transition vers le moment d'exploration du type de tâches et le développement de ce moment. » (pp. 240-241).

Pour simuler leurs plans d'épargne, les élèves vont alors développer des « techniques arithmétiques primitives » ($\tau_{arithmétique}$) qui dépendent du type de variation retenu. Ces techniques permettent en outre de faire une première comparaison ($T_{comparaison}^I$) des plans d'épargne.

NOTE

Les auteurs pensent que cette technique est faible pour comparer deux plans d'épargne sans doute dans le cas où on ne dispose pas de tableur. Mais cela n'est pas explicitement dit dans l'article.

On voit donc bien se développer des praxéologies ponctuelles pour chaque type de variations. Mais ces praxéologies sont limitées, notamment parce qu'elles permettent essentiellement de calculer des états possibles du système. En particulier, elles ne permettent pas de contrôler le système. Si l'on oriente la recherche vers le contrôle, un nouveau type de tâches émerge, $T_{contrôle}$, que les auteurs déclinent en trois type de tâches selon les quantités connues et celle que l'on cherche à déterminer parmi : le nombre de n de versements, le premier versement et le mode d'évolution des versements, le versement initial.

Il est donc nécessaire d'élargir les praxéologies notamment pour atteindre le montant final souhaité. Les techniques dont on dispose ($\tau_{arithmétique}$) sont inadéquates ce qui entraîne un nouveau type de tâches sous l'impulsion de la nécessité du contrôle et de l'anticipation du système : le type de tâches de modélisation algébrique ($T_{mod-alg}$). « L'activité mathématique entraîne la création de différentes praxéologies locales [...], dépendant du type de variation.

La communauté d'étude doit travailler sur chaque type de plan d'épargne dans le but de construire des modèles algébriques qui connectent les grandeurs initiales au montant final. » (p. 241).

NOTE

Il n'y a pas de mention des technologies qui caractérisent ces praxéologies locales.

Le moment du travail de la technique permet, entre autres, de créer une technique (τ_{rec}) qui prend appui sur la récurrence des versements pour, en *remontant* aux paramètres initiaux, obtenir une expression du montant épargné à l'instant n .

Puis, par un changement de variables $n \rightarrow x$, il est possible d'obtenir un modèle algébrique à l'aide d'une fonction.

NOTE

Pourquoi changer de variable ? Pourquoi, et comment, introduire les fonctions ? Il est à noter que l'objet « fonction » n'est mentionné que dans la théorie de la praxéologie régionale qui est la théorie des fonctions à valeurs réelles.

Il n'y a pas de discussion sur l'introduction de l'algèbre dans cette étude.

On peut remarquer dans ce développement des changements de cadres (arithmétique/algébrique/fonctionnelle) et l'intervention de multiples registres de représentation. Les auteurs ne les mentionnent pas même si on peut se douter que ces changements ne sont pas tous à la charge des élèves.

Avec ces modèles algébriques, on peut construire des techniques de contrôle de l'évolution du plan d'épargne et comparer différents plans d'épargne. Il émerge une activité mathématique connectée autour de différents types de variation. Le développement du PER est résumé en une figure (figure 1, p. 242), où les différentes tâches et techniques vont apparaître plusieurs fois et dépendent du type de variation considéré.

Les auteurs finissent cette section en donnant une vue d'ensemble du chemin suivi qu'ils accompagnent d'une figure (figure 2, p.243, reproduite ci-dessous) : « Ainsi, en travaillant sur chaque type de variations, en contrôlant et en comparant différents plans d'épargne, il est possible d'obtenir un ensemble de praxéologies de complexités croissantes [...] qui donnent lieu à une praxéologie régionale [des plans d'épargne] articulée par la théorie des fonctions à valeurs réelles, c'est-à-dire, un processus de modélisation sur l'étude des relations fonctionnelles. » (p. 242).

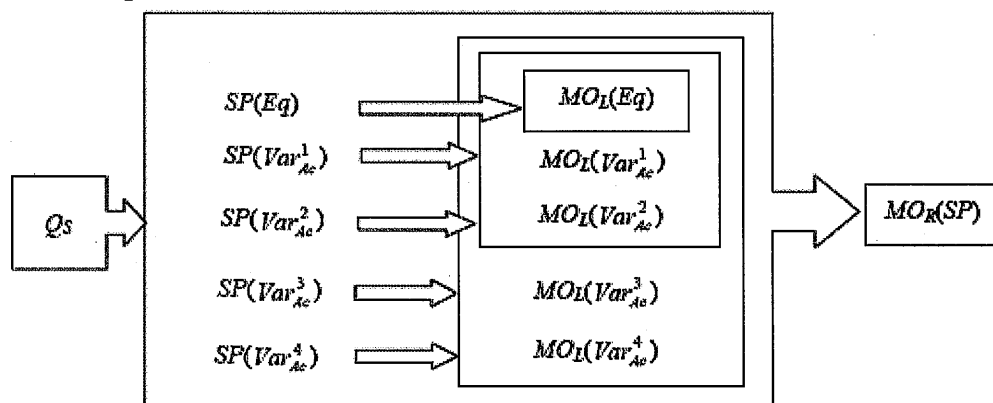


Figure 2. Articulation, integration and amplification of praxeologies in the "Savings Plans" SRC

NOTE

Le contexte réel est un peu oublié, car on peut mettre des taux très avantageux, des versements exorbitants, etc. On peut penser que ce point est géré dans la situation, même si les auteurs n'en parlent pas.

La distinction entre un plan d'épargne et le type de variations dont il dépend n'apparaît pas clairement. On ne voit pas à quel moment les plans d'épargne disparaissent pour laisser la place aux types de variations.

La dernière citation n'est pas très explicite sur les moyens d'obtention de la praxéologie régionale.

Même si ce n'est pas tout à fait explicite, la figure 2 schématise la manière des auteurs de concevoir modélisation. Il est difficile d'y voir une transposition en TAD du cycle de modélisation comme annoncé en page 232. Il nous semble plutôt que les auteurs développent leur point de vue, par ailleurs très intéressant, sur la modélisation sans vraiment se soucier du cycle de modélisation. Peut-être est-il possible d'y voir un biais dans l'écriture de l'article : pour pouvoir parler de modélisation il *faut* discuter du cycle de modélisation.

Extrait de la bibliographie de l'article

Blum, W. (2006). "Filling Up" – the problem of independence-preserving teacher interventions in lessons with demanding modelling task. In M. Bosch, *Proceedings of the 4th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*.

Blum, W. (2002). ICMI study 14: Applications and modelling in mathematics education – Discussion document. *Educational Studies in Mathematics*, 51, 149–171.

Blum, W. & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications and links to other subjects – State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 37- 68.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19/2, 221-226.

Chevallard, Y. (2002 a). Organiser l'étude. 1. Structures & Fonctions. In J. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot et R. Floris (Eds.), *Actes de la 11e École d'Été de didactique des mathématiques - Corps - 21-30 Août 2001* (pp. 3-22). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (2002b). Organiser l'étude. 3. Écologie & régulation. In J. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot et R. Floris (Eds.), *Actes de la 11e École d'Été de didactique des mathématiques - Corps - 21-30 Août 2001* (pp. 41-56). Grenoble: La Pensée Sauvage.

García, F.J. (2005). *La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales* (Doctoral dissertation). Universidad de Jaén.

Niss, M. (2003). Mathematical Competencies and the Learning of Mathematics. Retrieved May 4, 2006, from http://www7.nationalacademies.org/mseb/Mathematical_Competencies_and_the_Learning_of_Mathematics.pdf

Modeling conceptions revisited

B. Sriraman & R. Lesh

ZDM 2006 Vol.38 (3) pp.247-254

Introduction

Les auteurs notent qu'aux USA, par rapport aux années 50-60, les curricula font une place plus importante à l'approche par la modélisation dans l'enseignement des mathématiques au niveau du lycée, et même du collège dans le cadre de projets bien précis. Même si cette situation leur semble encourageante, ils pointent des difficultés à mettre en place une telle approche à grande échelle, en raison de l'inertie du système, des contraintes du développement professionnel des enseignants et des résistances de la société à l'égard d'un curriculum qui s'inscrit contre les conceptions dominantes sur ce que doivent être les mathématiques de l'école.

Le premier objet de leur article est de décrire les raisons qui justifient cette évolution ainsi que celles des difficultés qu'elle suscite. Le deuxième est de préciser la problématique de leur courant de recherche ("Models and Modeling", M&M), qui met l'accent sur la nécessité d'étudier des systèmes complexes. Le troisième est d'étudier les implications pour la recherche en "éducation mathématique", et de dresser un nouveau programme de recherches, en dégagant de grandes orientations possibles.

Pourquoi une approche par la modélisation ?

Les auteurs remarquent que la question du type de mathématiques devant figurer dans les programmes d'enseignement demeure controversée. Des initiatives récentes pour mettre en valeur leur aspect "appliqué" sont plus qu'importantes. En effet, malgré les riches et anciennes racines des mathématiques, les mathématiciens - parmi d'autres - doivent reconnaître les contributions de chercheurs dans des secteurs aussi variés que la biologie, les finances, les sciences de l'information, l'économie, l'éducation, la médecine, l'ingénierie, etc ; secteurs dans lesquels on adapte avec succès les mathématiques pour créer des modèles et des boîtes à outils ayant des applications d'une portée à la fois étendue et profonde dans le monde d'aujourd'hui. Les auteurs désignent sous le nom de "design science" ces applications interdisciplinaires qui émergent au début du XXI^e siècle. Pour former de tels chercheurs, le besoin de doctorats interdisciplinaires se fait sentir, mais il est difficile de recruter des étudiants capables de préparer un doctorat dans de tels champs interdisciplinaires. Les étudiants en licence se sentent mal préparés... et un effet "boule de neige" en direction des niveaux d'enseignement inférieurs est à craindre, ce qui justifie une démarche *bottom up*, et une introduction précoce de la modélisation. Au sujet de cette dernière, les auteurs soutiennent les assertions suivantes :

- La modélisation a essentiellement comme finalité la description, l'explication ou la conceptualisation, même si des procédures de calcul et de déduction sont aussi mises en jeu. La conceptualisation est décrite ainsi : quantification, dimensionalisation, mise

en coordonnées, ou plus généralement mathématisation.

- Les modèles pour décrire et donner du sens à des systèmes complexes sont, pour eux-mêmes, d'importants "morceaux de savoir" qui devraient être mis en valeur dans l'enseignement et l'apprentissage (spécialement pour ceux qui s'orientent vers des domaines qui sont de gros utilisateurs de mathématiques, comme la science et la technologie). D'où l'intérêt d'initier à la modélisation de systèmes complexes qui apparaissent dans la vie réelle, et de l'étudier depuis les tout premiers niveaux d'enseignement.

Les difficultés de diffusion de la modélisation dans les classes

Les auteurs abordent ensuite le schisme qui existe entre le programme le mieux intentionné et les pratiques de classes, qui en fin de compte influent sur l'apprentissage des élèves et sur la valeur qu'ils donnent aux mathématiques. La présence d'une pédagogie de la modélisation mathématique est davantage l'exception que la règle dans les programmes de formation des professeurs des écoles, qui mettent traditionnellement l'accent sur la compréhension des quatre opérations de l'arithmétique. Dans de tels programmes, un cours sur les bases de la modélisation mathématique devrait compléter les mathématiques apprises par les professeurs en formation et devrait en théorie changer leurs conceptions sur ce que sont les mathématiques. Un argument contre de tels cours a été que ces professeurs en formation n'avaient pas les pré-requis mathématiques pour pouvoir suivre un cours sur la modélisation mathématique. Les auteurs renvoient à l'article de Doerr qui montre que des enseignants du secondaire sont parfaitement ouverts à cet égard (de quels professeurs s'agit-il dans cette fin de paragraphe ? ceux du primaire ou ceux du secondaire ?).

Les auteurs font ensuite allusion à la présence de deux écoles de pensée à propos des programmes de mathématiques, qui sont apparues à l'occasion des "Math wars" aux USA mais aussi ailleurs dans des situations semblables : les traditionalistes et les réformistes. Jugeant ce débat inextricable, et dans le but d'avancer, ils posent la question : "Quelles sont les idées (ou pensées) mathématiques élémentaires (si elles existent) qui sont utiles dans la vie de tous les jours ?". Ils formulent ainsi leur réponse :

1. Raisonner avec les proportions (ratios) ;
2. Estimer ;
3. Modéliser mathématiquement.

À propos du deuxième point, ils précisent que les activités d'estimation sont utilisées pour initier la modélisation mathématique, pour promouvoir l'utilité et le développement de concepts mathématiques, et enfin pour cultiver l'esprit critique et contribuer ainsi à la *critical literacy*. Ils mettent l'accent sur un type de problèmes d'estimation, les problèmes de Fermi⁹, et plus précisément sur des problèmes de Fermi directement reliés à l'environnement quotidien : estimation de la consommation d'eau potable ; du gaspillage de nourriture ; de la quantité d'ordures ménagères... Ils soulignent l'intérêt de simplifier les hypothèses faites avant de s'embarquer dans des calculs trop compliqués, mettent en valeur la possibilité d'employer une grande variété d'approches, et pointent l'intérêt des discussions qui peuvent en résulter (précision des résultats), créant ainsi des occasions de s'engager dans un nouveau "cycle de modélisation".

⁹ Voici une description des problèmes de Fermi trouvée sur Internet : « En faisant du marketing ou du management vous résolvez probablement des problèmes de Fermi tous les jours. L'exemple emblématique de ces problèmes est de répondre à la question : combien y a-t-il d'accordeurs de pianos à Chicago ? Répondre à cette question met en jeu les mêmes méthodes que vous utilisez pour estimer la taille d'un marché, ou un potentiel de chiffre d'affaires ».

Le courant de recherche “Modèles et modélisation” et son point de vue

Les auteurs déclarent que la plupart des recommandations soulignées dans le numéro 38 (2) de ZDM ont été suivies dans la recherche récente s’inscrivant dans le courant des modèles et de la modélisation, qu’ils appellent M&M. Le courant de recherche “M&M” cherche à déterminer la nature des compréhensions (*understandings*) et capacités (*abilities*) qui sont nécessaires pour que les élèves puissent utiliser dans la vie réelle ce qu’ils ont appris en classe. Le point de vue s’est élaboré en dehors de la recherche sur le développement des concepts, plus que ne l’a fait le courant de recherche sur la résolution de problèmes. Au lieu de s’intéresser aux types de “*word problems*” mis en valeur dans les manuels et dans les tests standardisés, il s’est intéressé à (la simulation de) la résolution de problèmes “en liberté, à l’état sauvage” (*in the wild*).

Ils jugent qu’il est important de mettre en valeur les hypothèses de base sur lesquelles se fonde leur point de vue :

- Ils rejettent l’idée que seuls les étudiants brillants peuvent se passer d’un guidage pas-à-pas par le professeur pour développer significativement des concepts mathématiques. Ils disent l’avoir prouvé (ils renvoient à l’article d’Iversen & Larson, dans le même numéro de ZDM).
- La seule voie pour induire des changements conceptuels significatifs est d’engager les élèves dans des situations où ils doivent exprimer leur manière de penser dans des formes qui peuvent être testées et révisées.
- Les modèles que les élèves développent impliquent une série de cycles itératifs comme chez les professionnels de la “design science”.

Ils ajoutent à ces hypothèses la nécessité d’étudier des systèmes complexes. En effet, en ce début du XXI^e siècle, les “choses” les plus puissantes qui ont un impact sur la vie des professionnels aussi bien que sur celle des gens ordinaires sont des systèmes qui sont, soit d’origine naturelle, soit créés par l’homme (systèmes de communication, systèmes économiques, systèmes écologiques, systèmes qui sont sous-jacents à des organisations qui s’adaptent ou apprennent continuellement). Certains sont complexes d’un point de vue mathématique, d’autres non. Certains sont au-delà du complexe car ils impliquent une autorégulation et une adaptation en continu.

Dans tous les cas, ils mettent en valeur les arguments suivants :

- À l’heure de la globalisation, des décisions locales ont souvent un impact sur des endroits éloignés où les réactions peuvent conduire à des boucles de rétroaction dont les effets de second ordre contrarient les effets locaux de premier ordre. Les populations qui comprendront et anticiperont ces situations auront moins de chance d’être victimes d’événements imprévus.
- Dans les économies de la connaissance, les ressources les plus importantes dont disposent les entreprises et les individus sont des systèmes conceptuels destinés à créer, manipuler, prédire et, éventuellement, contrôler une variété de systèmes complexes différents. Alors que dans le passé il convenait pour réussir dans les affaires de disposer d’un large éventail de ressources à disposition, un des buts essentiels des industries de la connaissance est de n’avoir aucun stock dans des entrepôts ou sur des étagères : “Le but est de mettre en relation le plus rapidement, de la manière la plus efficace et effective possible le producteur et le consommateur” (gestion à flux tendu).
- Dans les institutions où l’on apprend (*learning organizations*), les hommes projettent continuellement leurs systèmes conceptuels sur le monde. Le monde qui doit être compris n’est plus celui qui est resté inchangé depuis les débuts de l’histoire. C’est un monde qui change continuellement et rapidement : les connaissances et capacités changent également. Et le genre de connaissance et d’information qui est le plus

puissant fait souvent appel à des modèles pour créer, manipuler et donner du sens aux systèmes complexes.

Ces systèmes complexes possèdent des propriétés qui ne prennent du sens que dans le contexte d'un système fonctionnant comme un tout : par exemple, si on étudie le trafic routier dans une ville, les bouchons sont des propriétés du système fonctionnant comme un tout. De même :

- des objets tels que les "points levier", les points de discontinuité, les attracteurs n'acquièrent une signification qu'en raison de leurs fonctions à l'intérieur d'un "système fonctionnant comme un tout" ;
- des notions telles que l'irréversibilité/réversibilité, les boucles de rétroaction, les résonances, des propriétés telles que les motifs (*patterns*), les régularités, les propriétés invariantes, les champs de forces ne sont pas des propriétés d'agents ou d'objets du système, mais sont des caractéristiques de "systèmes comme un tout".

Les implications pour la recherche en "éducation mathématique"

Les auteurs pointent le manque de recherches ayant pour but de développer des outils pour construire une infrastructure (de sorte que des problèmes complexes puissent être résolus à long terme). Ils jugent que les institutions de recherche ont fui leur responsabilité pour construire cette infrastructure ou pour aider ceux qui veulent le faire. Elles ont mis en valeur, dans leurs interventions, des solutions de fortune (ou solution miracle), qui sont précisément celles dont les praticiens n'ont pas besoin. Ils insistent sur le fait qu'il ne suffit pas de montrer que quelque chose marche, mais qu'il convient de montrer POURQUOI et COMMENT ceci marche. Il faut aussi s'occuper des interactions entre les participants et d'autres acteurs du système. En ce qui concerne les principaux et proviseurs, ils précisent que les caractéristiques et rôle de ce type d'administrateurs doivent être évalués, et pas de manière "neutre".

Les auteurs dressent ensuite un cahier des charges pour développer et évaluer des innovations curriculaires :

- Des tentatives doivent être faites pour optimiser la compréhension et l'aide apportée par les administrateurs (ainsi qu'en direction des parents, des membres du conseil d'école et autres leaders du monde des affaires ou de la communauté).
- Les innovations qui réussissent sont celles qui sont faciles à modifier, à adapter à des conditions qui changent sans cesse, à partager.
- Tout programme innovant a ses forces et ses faiblesses. Les auteurs dressent une liste de questions auxquelles un praticien demande des réponses : Quand marche-t-il ? Où marche-t-il ? Pourquoi marche-t-il ? Comment marche-t-il ? Avec qui marche-t-il ? Dans quelles conditions marche-t-il ?
- Des innovations importantes doivent être introduites graduellement sur des périodes de plusieurs années. On doit prendre en compte ce paramètre dans leur évaluation.
- Dans la formation et l'évaluation des professeurs, il est naïf de recourir à une seule échelle numérique "bon-mauvais", sans identifier des profils de force et de faiblesse et sans prendre en compte les conditions dans lesquelles ces profils ont été réalisés ou les buts dans lesquels l'évaluation a été conduite.

Nécessité d'un tout nouveau programme de recherches

Avant d'envisager des changements systémiques dans les programmes de l'école élémentaire et du collège, les auteurs demandent à la communauté des chercheurs en "éducation mathématique" si on sait déjà ce que cela signifie pour un jeune élève de comprendre les modèles et la modélisation, et lui rappellent que la nature de la résolution de problèmes (et de

la "pensée mathématique") a changé de façon spectaculaire durant les 20 dernières années. Ils pointent les besoins de recherches sur les points suivants :

- Le type de nouvelles situations "de la vie réelle" où un certain type de pensée mathématique est nécessaire pour parvenir à la traiter.
- Ce que signifie comprendre les connaissances et quelles sont les capacités pertinentes.
- Comment ces idées et capacités se développent.
- Comment ce développement peut être documenté et évalué.
- Prendre en considération ce qu'on connaît déjà sur le développement conceptuel de l'enfant.

Les auteurs décrivent des tendances qui leur paraissent importantes.

De nouvelles manières de penser à propos de vieilles situations

Les articles de journaux ressemblent à des ordinateurs multi-média. Même dans des situations ordinaires d'achat (de l'épicerie à l'automobile) des situations sont créées et décrites en utilisant des modèles informatiques, multi-média, qui impliquent des manières complètement nouvelles de penser les problèmes ; ces dernières mettent en jeu des questions d'optimisation et de stabilisation qui auraient auparavant nécessité l'algèbre, de l'analyse ou autres domaines avancés des mathématiques, alors que les modèles proposés sont fondés sur des extensions d'idées de base sur la mesure et l'arithmétique.

Des nouveaux types de situations à comprendre et expliquer

Des systèmes complexes (communication, économie, transport, écologie) sont parmi les choses les plus puissantes qui ont un impact sur la vie d'un nombre croissant de gens. Dans les pays développant l'économie de la connaissance, l'accroissement de la globalisation provoque des boucles de rétroaction et des effets de second ordre qui contrarient souvent les actions locales.

Nouveaux types de "résolveurs" de problèmes et résolution de problèmes

Les nouveaux emplois font appel de plus en plus à des organisations qui demandent une adaptation rapide à des conditions qui changent rapidement. Ces organisations consistent en connaissances et réseaux plutôt qu'en entrepôts remplis de marchandises. Les solveurs de problèmes ne sont plus des individus isolés disposant seulement d'un crayon et d'un papier. Ce sont des équipes de spécialistes ayant accès à une large panoplie d'outils techniques évoluant rapidement. Les connaissances et capacités ne résident plus dans les cerveaux d'individus isolés, et sont souvent distribuées (et souvent externalisées) dans des réseaux d'outils et de collègues. On ne recrute donc plus les gens qui ont de bons scores aux tests standardisés.

On recrute des gens qui sont capables de : 1) Donner du sens à un système complexe ; 2) Travailler dans des équipes de spécialistes divers ; 3) S'adapter rapidement à une variété d'outils conceptuels évoluant rapidement ; 4) Travailler sur des projets à plusieurs niveaux, qui nécessitent une planification et une collaboration de participants de niveaux et de types différents ; 5) Développer des outils conceptuels partageables et réutilisables qui s'appuient sur une variété de disciplines et des ouvrages spécialisés. L'expression (interprétation, description, explication, communication, argumentation et construction) importe plus que le calcul ou la déduction. Ils doivent autant imposer une structure sur l'expérience que dériver et extraire du sens à partir d'une information qui serait donnée sous une forme déjà mathématisée.

Nouveaux types de produits et de processus de "design"

Pour résoudre des problèmes dans la réalité, les produits qui sont nécessaires font intervenir beaucoup plus que des réponses courtes à des questions pré-mathématisées. Par exemple, ils impliquent souvent le développement d'outils conceptuels (ou d'autres types d'artefacts complexes) qui sont mis au point pour un décideur spécifique et pour une décision bien précise, mais qui valent rarement la peine d'être développés, à moins qu'ils soient utilisables au-delà de ce but précis et puissent être partageables avec d'autres et réutilisables au-delà des situations dans lesquelles leur besoin s'est fait sentir. Le processus de résolution implique souvent des séquences de développement de cycles itératifs : développement... test... révision. Le cœur du problème consiste souvent à conceptualiser les données et les buts de manière productive.

Pour terminer, les auteurs relient leur questionnement aux recherches déjà faites sur le développement conceptuel.

Ces recherches ont souvent développé des mini-théories assez sophistiquées de nombreux concepts. Ces mini-théories produisent fréquemment des descriptions très différentes du développement, malgré le fait que, dans l'esprit des élèves, ces concepts ne se développent pas comme s'ils étaient isolés, ni indépendamment les uns des autres. De plus, de nombreuses recherches ont montré avec un fort degré d'évidence que l'apprentissage est beaucoup plus décousu, situé, socialement médié et multi-dimensionnel que ne le laissent entendre les théories les plus connues. Par exemple, des comparaisons ethnographiques entre experts et novices ont montré que le savoir de l'expert était organisé au moins autant autour de son expérience qu'autour des sortes d'abstraction mises en valeur à l'école. En outre, à une époque où la personne qui résout un problème a un accès pratiquement continu à des moteurs de recherche, correcteurs orthographiques, ordinateurs et outils multimédias, il est obsolète de penser les capacités intellectuelles comme si elles résidaient exclusivement dans les cerveaux d'individus isolés. Tout l'intérêt de ces outils conceptuels réside dans le fait qu'ils permettent aux gens de se décharger d'informations et de fonctions qui jadis devaient être prises en charge mentalement. Mais la nature de ces outils est telle que, quand ils sont introduits dans une situation, les situations elles-mêmes tendent à se transformer en une variété de manières fondamentales.

Si on veut exposer les élèves à des simulations de systèmes complexes et viser la compréhension de ces systèmes, on doit développer ces simulations sur la base de ce que la recherche sur le développement conceptuel a à dire, et pas seulement sur ce que les gens de l'industrie nous disent. Autrement dit, on ne peut pas transférer un scénario de modélisation de l'industrie à la classe sans prendre en considération, en premier lieu, la manière dont les élèves apprennent. Si on ne le fait pas, on va répéter les erreurs du passé (notamment celles provenant de la réforme dite des « maths modernes »).

COMMENTAIRES SUR L'ARTICLE

Cet article est écrit par une paire d'auteurs. L'un est mathématicien, l'autre professeur de sciences de l'éducation. Ils sont tous deux américains (états-unis), et leur description des besoins en mathématiques pour la société et l'économie en témoigne fortement. Tout en alertant sur l'erreur que constituerait un transfert de l'industrie à la classe d'un scénario de modélisation, les caractéristiques de l'économie américaine en ce début du XXI^e siècle sont considérées comme étant suffisamment valables (sur le plan de l'efficacité comme sur celui de l'éthique) et suffisamment stables dans le temps pour pouvoir isoler, à partir de ces

dernières et des tendances dans lesquelles elles s'inscrivent, des caractéristiques des situations à modéliser dans les classes. Une plus grande prudence serait sans doute de mise : la crise actuelle le laisse penser. Compte tenu du leadership américain en matière d'éducation dans le monde, on peut également s'interroger sur l'exportabilité des solutions envisagées dans d'autres pays.

L'analyse des nouvelles tendances est cependant intéressante, car certaines nouveautés concernent de nombreux pays développés.

La critique envers la communauté de "l'éducation mathématique" est sévère, et les solutions proposées sont décrites seulement à grands traits. Les auteurs ont manifestement voulu fuir le débat inextricable entre traditionalistes et réformateurs. Tout en plaçant pour une approche qui se range clairement dans la sphère des réformateurs (les modèles et la modélisation), ils critiquent fortement les orientations passées de certains courants de recherche (résolution de problèmes, développement conceptuel), jugeant que, à l'instar du leur, d'autres courants en contredisent la pertinence. L'exhortation à ne pas reproduire l'erreur faite lors de la période des mathématiques modernes repose sur la demande d'une reprise de la recherche sur le développement conceptuel prenant en compte les circonstances récentes. Les résultats de cette recherche valideront-ils l'hypothèse des auteurs concernant la possibilité et même la nécessité d'un enseignement précoce de la modélisation ? Les auteurs le supposent implicitement.

Références

Lesh, R. (2006, in press). New Directions for Research on Mathematical Problem Solving. *Plenary Lecture at 2006 Annual Meeting of the Mathematics Education Research Group in Australia (MERGA)*.

Lesh, R., Kaput, J., & Hamilton, E. (Eds.) (2006, in press), *Foundations for the Future: The Need for New Mathematical Understandings & Abilities in the 21st Century*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., & Yoon, C. (2004). Evolving communities of mind – in which development involves several interacting and simultaneously developing strands. *Mathematical Thinking and Learning*, vol.6, no.2, pp. 205-226.

Sriraman, B., Adrian, H., and Knott, L. (pre-print). The Mathematics of Estimation: Possibilities for Interdisciplinary Pedagogy and Social Consciousness.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice: Learning, meaning, and identity*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Partie 3

LES APPROCHES « UTILISATRICES »

Modelling in Mathematics Classrooms : reflections on past developments and the future

H. Burkhardt, with contributions by H. Pollack

ZDM 2006 Vol.38 (2) pp.178-195

INTRODUCTION

L'auteur, Hugh Burkhardt, physicien, est directeur du centre de recherche *Shell Centre* depuis 1992. On dit de lui qu'il a « une vision d'ingénieur des recherches en éducation »¹⁰. Ses principaux centres d'intérêts concernent l'étude de curriculum et l'évaluation (vu comme un important "outil pour le changement"). Ses autres centres d'intérêt concernent la résolution de problèmes dits "réels" et la modélisation (*real problem solving and mathematical modelling*). Dans cet article, l'auteur propose un bilan concernant la place de la modélisation mathématique dans les programmes, l'enseignement et l'évaluation dans la classe de mathématiques, alimenté par une réflexion personnelle. Il dresse un état des lieux des quarante dernières années afin de mettre en évidence ce qu'il reste à améliorer en vue d'un enseignement de mathématiques fonctionnelles (*functional mathematics*).

RESUME DE L'ARTICLE

L'auteur commence par rappeler que depuis 40 ans, les situations de modélisation en classe sont enseignées sous deux formes principales : l'apprentissage d'un modèle standard et la modélisation dite active (*active modelling*) pour résoudre des problèmes nouveaux par la création de nouveaux modèles.

L'auteur semble supposer qu'il est nécessaire d'acquérir des compétences particulières pour enseigner la modélisation. Cet article a alors pour ambition de proposer les critères dont il faut tenir compte lors de l'élaboration d'un programme (curriculaire voire politique) pour améliorer la situation actuelle. Il le décompose en six parties :

1. Modélisation avec les mathématiques (*Modelling with mathematics*)
2. Programmes actuels en mathématiques
3. Apprendre à modéliser avec les mathématiques
4. Rendre la modélisation une réalité dans les principaux programmes
5. Comment en arriver là ?
6. Le rôle de l'évaluation

Modélisation avec les mathématiques

Il suppose que le processus de modélisation est un processus déjà connu par le lecteur et renvoie implicitement aux travaux de Blum et al. (2006). Il s'agit donc d'une position théorique établie dès le départ.

¹⁰ Cf. « <http://www.nottingham.ac.uk/education/MARS/personnel/hb.html> ».

Il dénonce ensuite le fossé existant entre les mathématiciens qui influencent largement le contenu des mathématiques à enseigner et les praticiens des mathématiques dans la vie professionnelle (ingénieur, économiste, tous les scientifiques de mathématiques appliquées, etc.) qui considèrent plutôt les mathématiques comme une « trousse à outils » (p.178). En particulier, ces différents acteurs des mathématiques, d'après l'auteur, considèrent différemment le rôle de la modélisation mathématique. L'auteur alimente sa réflexion par son expérience personnelle, en tant que théoricien en physique (mais aussi par le biais d'autres témoignages de scientifiques tel que celui d'Henry Pollack, qui a d'abord fait de la recherche en diverses branches des mathématiques pures puis à travailler en tant qu'ingénieur) pour décrire l'intérêt de la modélisation (d'une part la modélisation vue comme un modèle de phénomènes dynamiques connus et d'autre part vue comme un modèle d'une théorie au sens de la théorie de la gravité ou encore de la théorie de Darwin).

L'auteur continue de développer sa réflexion à travers des exemples de la vie quotidienne qu'il considère comme des actes de modélisation. Par exemple, il cite des questions qui peuvent concerner des étudiants : *doivent-ils aller à la fac ou chercher un employeur ?* Il fait un tel parallèle car il associe à ce genre de questions une multitude d'autres questions à prendre en compte. L'auteur conçoit alors qu'essayer d'apporter des éléments de réponse à un tel type de questionnement revient au processus même de modélisation, car là où certains vont répondre par intuition de manière directe à ce type de questions fondamentales (*gut-decision*, p.180) d'autres vont d'abord l'analyser à travers la mise en place de modèles prenant en compte différents facteurs.

Pour conclure cette première partie, l'auteur cite un schéma qui représente ce processus de modélisation à travers des boucles successives de *simplification* et de *progrès* (*simplification/improvement*) ainsi que des boucles *look ahead* et *look back* et qui s'avère lui-même une simplification du processus de modélisation : c'est un *modèle de modélisation* (*models of modelling*, p. 180, schéma 1).

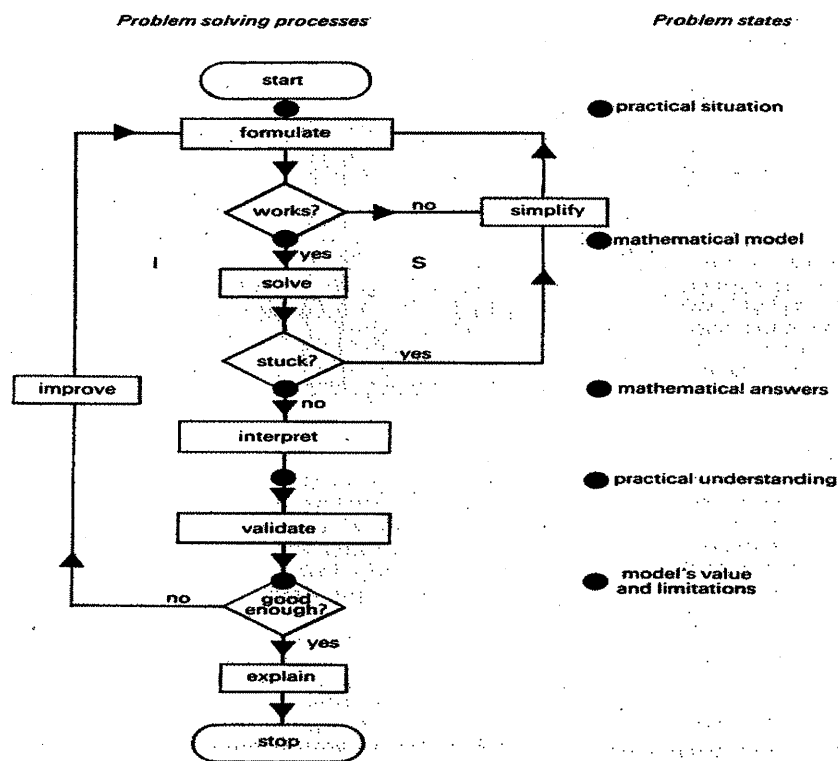


Schéma 1

Les programmes

Il cite plusieurs exemples de modélisation « spontanée » (comparer les parts entre frères et sœurs, compter son argent, etc.). L'auteur fait référence au Bourgeois Gentilhomme pour expliquer que l'on pourrait être surpris de voir que l'on fait de la modélisation tous les jours, tout comme M. Jourdain était surpris d'apprendre qu'il a parlé en prose toute sa vie.

L'auteur dénonce ainsi la faible prise de conscience par l'école de cette omniprésence de la modélisation, ce qui dans la vie professionnelle entraîne que les gens n'ont pas non plus conscience de l'importance des mathématiques dans leur travail. Il propose différents facteurs qui pourraient selon lui expliquer ce phénomène :

- la croyance persistante que l'on doit d'abord faire beaucoup de mathématiques avant de pouvoir les utiliser ;
- l'apprentissage par imitation qui entraîne une adaptation limitée à de nouvelles situations, ou des problèmes pratiques ;
- l'influence des mathématiciens sur les programmes qui se désintéressent de l'utilisation effective des mathématiques.

L'auteur propose en particulier qu'on enseigne les mathématiques sous toutes les formes sous lesquelles on peut les rencontrer. Il compare avec l'enseignement de notre propre langage où les élèves apprennent à lire, écrire, comprendre sous différents genres : romans, histoires, poèmes, nouvelles, argumentations, etc. (p. 182).

Apprendre à modéliser avec les mathématiques

Quels genres d'activités d'apprentissage sont-ils nécessaires pour que l'élève soit capable de résoudre des problèmes de la vie du monde réel ? L'auteur propose cette question en guise d'ouverture de cette troisième partie consacrée à l'apprentissage de la modélisation. Il propose trois facteurs majeurs guidant la ou les réponse(s) à cette question :

- les métiers des mathématiques appliquées (physique) ;
- travailler sur les stratégies de découvertes, les heuristiques (Polya, 1945) ;
- la pression politique sur le contenu d'une certaine culture mathématique.

Par conséquent les activités des élèves concernant la modélisation portent sur :

- des expériences de modélisations sans prendre en compte une *distance de transfert* pertinente (la distance de transfert est définie par l'auteur comme étant ce qui permet de mesurer la différence entre deux problèmes p. 183) ;
- le schéma 1 ;
- une réflexion analytique sur différentes approches et résolution d'un même problème.

Ce sont les principaux critères sur lesquels les programmes se concentrent, mais comment les agglomérer de manière effective, cela reste en travaux depuis 40 ans malgré une incontestable évolution. L'auteur fait référence à ICTMA books (ICTMA 1982 - The International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications.), à Burkhardt (1981) et à la dixième étude ICMI. Il décompose son état des lieux en deux périodes :

- 1960-1980 : au moment de la réforme des mathématiques modernes et du développement de l'outil informatique. Il commente l'excitation de l'époque par son expérience personnelle et celle de Henry Pollack.
- 1980-2000 : lors de la mise en place du groupe de réflexion (UMTC 1976 - Undergraduate Mathematics Teaching Conferences). Pour la première fois il apparaît dans les programmes des écoles polytechniques une composante sur la modélisation, obligatoire durant les trois ans. Puis apparaît un développement dans le groupe de recherche de l'auteur d'un enseignement et d'une évaluation basés sur des projets de modélisation.

Rendre la modélisation une réalité dans les principaux programmes

Selon l'auteur, quelques points positifs sont à relever dans les programmes et la contingence actuelle :

- la prise en compte d'une « culture mathématique » (*mathematical literacy*) par les politiques qui visent des « mathématiques fonctionnelles » ;
- l'impact de PISA qu'il voit comme une volonté politique significative partagée par beaucoup de pays qui mettent en place des situations mathématiques contextualisées ;
- l'évolution de la technologie de l'information qui participe aux activités de modélisation.

L'auteur expose que l'enseignement de la modélisation requiert de nouvelles compétences que le professeur n'a pas car bon nombre d'entre eux se suffisent d'un enseignement par imitation (p. 187). Par conséquent, comment améliorer les programmes à cette fin ? L'auteur propose alors les trois pistes suivantes.

Aller au-delà des bases

L'auteur se réfère aux travaux de Schoenfeld (1992) pour dire que la modélisation implique les aspects fondamentaux de « faire des mathématiques » (p.188) :

- La connaissance de concepts et compétences ;
- La mise en place de stratégies impliquant ces connaissances ;
- Le contrôle métacognitif de la résolution de problème ;
- Le fait de croire que les mathématiques sont un outil puissant et non seulement un corps de connaissance inutile.

Développer des activités d'apprentissage plus riches :

- Activités de modélisation impliquant des stratégies qui ne sont pas des routines ;
- Diversifier les tâches en classe et lors de l'évaluation ;
- Laisser à l'élève la charge de la découverte de la résolution du problème ;
- Discussion confrontant les divers points de vue et diverses stratégies des élèves.

L'auteur fait notamment référence au changement de contrat didactique au sens de Brousseau (p. 188) où l'élève n'est plus *imitateur* mais *investigateur*.

Des stratégies d'enseignement plus larges :

- Maîtriser les débats et discussions au sein de la classe sans être trop directif ;
- Laisser à l'élève plus de temps et de confiance ;
- Guider la résolution ;
- Trouver de nouvelles questions et laisser l'élève approfondir.

Comment en arriver là ?

Selon l'auteur, les obstacles à une implémentation plus générale d'un enseignement de la modélisation sont en particulier l'inertie du système, le monde réel, le développement professionnel limité et le rôle de la recherche dans l'éducation.

L'Inertie du système

Il est toujours difficile de faire des changements profonds dans les programmes. Le *EEE style* d'enseignement domine (*Explanation, Examples, imitative Exercises*). Il souligne le besoin de changer les habitudes, les croyances (et attentes des parents, professeurs et politiques) et les compétences des professeurs. Il rappelle la nécessité de lutter contre les dualités du type « compétences de base » contre « résolution de problème » ou du type « théorique / pur » contre « appliqué ». Il propose de renoncer à l'excuse du « on n'a pas le temps » en réduisant le nombre d'exercices répétitifs pas nécessairement utiles.

Le monde réel

Les enseignements des mathématiques de haut niveau répugnent à faire référence au monde réel car l'abstraction des mathématiques est quelque chose de pure, et qui est déjà assez compliqué sans y ajouter la complexité de la réalité. Pourtant avoir recours au monde réel peut être vu comme un levier du fait des illustrations qui permettent même de mettre en évidence l'utilité des mathématiques, et suscite l'intérêt voire la motivation de certaines élèves. Le recours à la réalité permet également de faciliter les relations de communication.

Le développement professionnel limité

L'auteur dénonce par là le fait qu'au Royaume Uni, trop peu de formation continue sont proposées aux professeurs. De plus, il s'avère que le peu de professeurs qui suivent des formations n'ont aucune évaluation après cette formation pour éprouver les effets de la formation qu'ils ont suivie. L'auteur entend par là qu'une formation à la modélisation souffrirait sans doute du même traitement.

Le rôle de la recherche dans l'éducation

L'auteur fait référence aux travaux de Burkhardt (2006) et Schoenfeld (2002). Les sciences de l'éducation se retrouvent à la jonction de différents autres champs de recherche impliquant un certain amalgame de tradition relative à chacun de ces champs, ce qui d'après l'auteur n'est pas pour favoriser la diffusion et/ou les débats relatifs aux résultats de la recherche concernant l'enseignement de la modélisation.

L'évaluation

L'auteur conclue sur l'importance du rôle accordé à l'évaluation en général et donc en particulier dans le contexte d'un enseignement de la modélisation ; celle-ci permettant de :

- « mesurer » des performances et donc de mesurer les progrès à faire en conséquence ;
- spécifier les buts à atteindre établis par un programme ;
- orienter l'enseignement en vue de ces évaluations, ce qui peut donc créer un paradoxe et faire que le professeur ne vise qu'à préparer au test.

CONCLUSION ET DISCUSSION

Ainsi, une fois après avoir dressé un état des lieux de la prise en compte de la modélisation dans l'enseignement, l'auteur cherche à établir des critères d'orientation que pourrait prendre un programme scolaire favorisant l'intégration de l'enseignement de la modélisation et par la modélisation. Avant d'établir ces critères, il semblerait important de discuter des critères qui permettent de définir une activité de modélisation et de déterminer à quel moment on peut parler de modélisation. L'auteur évoque la recherche d'un enseignement de mathématiques fonctionnelles (*functional mathematics*) mais quelle est la nature de la relation entre modélisation mathématique et mathématique fonctionnelle ?

L'auteur souligne l'aspect positif des résultats de PISA mais une volonté politique n'est pas nécessaire une réalité scientifique. D'autant plus que cette volonté politique ne semble pas corrélée avec une volonté d'améliorer l'apprentissage des élèves. Pourquoi ne pas interroger plutôt les conditions d'existence de cet enseignement : *doit-on enseigner la modélisation ? Quels sont ses véritables effets sur l'apprentissage ? Apprendre à modéliser avec les mathématiques ou apprendre les mathématiques avec la modélisation ? Et finalement, quelles sont les caractéristiques d'un enseignement de la modélisation ?*

Les critères d'amélioration que proposent l'auteur sont propices à l'amélioration de l'enseignement en général, en quoi sont-ils propice à l'enseignement de la modélisation en particulier ? L'auteur finit son article sur le rôle fondamental de l'évaluation mais peut-être faudrait-il resituer le rôle de l'évaluation dans le contexte de la modélisation justement. *Doit-on évaluer la modélisation et l'enseignement de la modélisation ? Quels seraient alors les critères ?*

Références

- Blum, W., Galbraith, P. Henn, H-W. & Niss, M. (Eds.) (2006). *Applications and Modelling in Mathematics Education*.
- Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics : didactique des mathématiques, 1970-1990*. Dordrecht : Kluwer.
- Burkhardt, H. (1964). *Modelling with Mathematics*. Unpublished lecture notes, University of Birmingham, Department of Mathematical Physics.
- Burkhardt, H. (1981). *The Real World and Mathematics*. Blackie-Birkhauser; reprinted 2000, Shell Centre Publications, Nottingham, U.K., <http://www.mathshell.com/scp/index.htm>.
- Burkhardt, H. Muller, E.R et al. (2006). *Applications and Modelling for Mathematics*. In. W. Blum, P. Galbraith, H-W. Henn, & M. Niss (Eds). *Modelling and Applications in Mathematics Education*. New ICMI Studies Series no.10, New York : Springer.
- ICTMA (1982 -). Complete listing of ICTMA Conference Proceedings <http://www.infj.ulst.ac.uk/ictma/>
- Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton, NJ : Princeton university Press.
- Schoenfeld (1992). Learning to think mathematically : Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and learning*, (pp. 334-370), New York : Mac Millan.
- UMTC (1976 -). *Proceedings of the Undergraduate Mathematics Teaching Conferences*, Nottingham : Schell Centre Publications.

Enhancing the image of mathematics by association with simple pleasures from real world contexts

R. Pierce et K. Stacey

ZDM 2006 Vol.38 (3) pp.214-225

FINALITE ET ARGUMENT DE L'ARTICLE

L'article vise à montrer qu'une raison majeure et négligée des enseignants pour choisir des situations du monde réel est de jouer sur un « effet halo » pour rendre plus positive l'attitude des élèves vis-à-vis des mathématiques et obtenir l'engagement des élèves en suscitant du plaisir. Les auteurs comparent cela à l'effet recherché par les publicitaires qui cherchent des associations positives dans le public en utilisant des photographies de héros sportifs ou autres. L'argument s'appuie sur des interviews d'élèves et de professeurs et des observations dans l'école secondaire dans le cadres d'un projet d'amélioration de l'enseignement dans l'école moyenne en utilisant des problèmes du monde réel et sur une étude spécifique.

DEVELOPPEMENT DE L'ARTICLE

Introduction

Le point de départ

Si on demande à des élèves si c'est intéressant d'utiliser des problèmes du monde réel, ils répondent de façon positive mais avec deux types de raisons :

- Des raisons liées au sens donné aux mathématiques comme l'étudiant 1 : "You can relate things – it's not just a lot of numbers and things on the paper - so when you have the answer it actually makes sense."
- Des raisons affectives comme l'étudiant 2 : "More interesting, yes, I liked the lemonade one because I used to make lemonade squash when I was little."

Les auteurs rapportent dans cet article une série d'observations qui les ont amenés à s'intéresser plus sérieusement aux élèves qui ont le deuxième type de réponse et à en tirer la conclusion que la question d'un affect positif joue, dans l'enseignement et à partir de problèmes issus du monde réel, un rôle plus important que ne le reconnaît généralement la littérature.

Les recherches antérieures et l'originalité du travail

Les recherches antérieures (Burkhardt, 1981, Mason, 1984, Sowey, 2001) insistent surtout sur le plaisir des élèves à trouver des solutions pratiques, étonnantes ou inattendues à des problèmes. Les recherches insistent sur des motivations de nature intellectuelle comme le montrent les 5 critères de Blum et Niss (1989) :

- Favoriser des compétences générales et des attitudes en relation avec l'investigation ;
 - Préparer des citoyens ayant des compétences critiques ;
 - Donner aux élèves une image riche et « compréhensive » de la manière dont les mathématiques sont utilisées dans la société ;
 - Développer des savoir-faire (*skills*) dans l'utilisation des mathématiques pour résoudre des problèmes ;
 - Motiver, déclencher l'apprentissage de techniques mathématiques spécifiques ;
- auxquels il faut ajouter celui d'un problème crédible (Burkhard, 1981).

Quant à eux, les auteurs rapportent ici des exemples où les professeurs ne choisissent pas les contextes pour le plaisir intellectuel ou l'utilité pratique mais pour la possibilité d'accroître un affect positif par l'association avec des vues, des goûts, des textures, des sons et des expériences sociales agréables. Leur interprétation est que les professeurs recherchent un « effet halo » (du simple point de vue sensoriel) pour faire aimer les mathématiques par leurs élèves. Les problèmes du monde réel sont choisis parce qu'ils fournissent un contexte favorable.

Les recherches ont montré l'impact des aspects affectifs. Par exemple McLeod (1992) dans une étude majeure sur la résolution de problèmes montre que les aspects affectifs jouent un rôle central (effort accru et persistance plus grande des apprentissages).

Mais les professeurs qu'ils ont observés vont bien au-delà des résultats des recherches. Ils vont montrer dans leurs exemples comment les professeurs peaufinent les tâches pour augmenter l'affect à partir de simples plaisirs plus qu'à travers des facteurs cognitifs.

Les données

Les observations portent sur des professeurs engagés dans le "RITEMATHS project": "investigate the use of real (R) world context problems with the assistance of Information Technology (IT) to enhance (E) middle secondary school students' engagement and achievement in mathematics". (<http://extranet.edfac.unimelb.edu.au/DSME/RITEMATHS/>)

Six écoles sont concernées, publiques et privées de recrutement social varié, avec des professeurs de 9ème et 10ème années (14-16 ans). Les professeurs participent régulièrement à des sessions de formation avec l'équipe du projet et proposent dans leurs classes des leçons appuyées sur des problèmes du monde réel, préparées avec les chercheurs. Le contenu est l'algèbre : fonctions linéaires et quadratiques

Les observables sont constitués d'interviews en mai 2004, février 2005, février 2006 ; d'écrits réflexifs des professeurs en février 2006, des notes des chercheurs.

Le dernier paragraphe porte sur une étude spécifique.

L'effet halo

Le terme remonte à 1920 (Thorndike) à propos d'une étude sur les jugements d'officiers sur leurs soldats : les jugements sur des points précis peuvent être influencés par une impression générale qui peut ne pas avoir beaucoup de fondement. De plus, Nibbett et Wilson (1977) ont montré que cette impression générale influence non seulement des jugements sur des points pour lesquels l'évaluation manque d'information mais aussi sur des points où cette information est suffisante. L'impression générale prend le pas sur des données spécifiques. Les auteurs portent un regard nouveau sur cet effet en montrant que les professeurs s'en servent inconsciemment pour faire aimer les mathématiques à leurs élèves. Sowey (2001) l'a déjà montré dans le cas des statistiques, pour obtenir un apprentissage durable.

Critères des professeurs pour sélectionner des problèmes du monde réel

Les auteurs tirent leurs critères des choix effectifs des professeurs et des raisons qu'ils ont données pour les justifier.

La première raison est de provoquer les apprentissages mathématiques visés : le problème doit permettre d'introduire la notion voulue ; d'ailleurs les problèmes sont rarement posés ouverts, les élèves sont soigneusement guidés vers la bonne procédure avec des arguments sur le réinvestissement proches des *realistic mathematics* (cf. Gravemeijer, 1999 : passer du « modèle de » à un « modèle pour »)

Les autres raisons sont :

- Montrer la pertinence des mathématiques (pour les applications) ;
- Motiver les élèves et redresser leur image négative des mathématiques en accentuant l'attrait des caractéristiques non mathématiques mais suscitant le plaisir, l'agrément.

Mais, souvent, les caractéristiques non mathématiques des tâches et qui contribuent à les rendre plaisantes, excitantes ou sociales, sont accentuées par les professeurs comme on va le voir sur 4 exemples.

Exemple 1 : le saut à l'élastique de Barbie

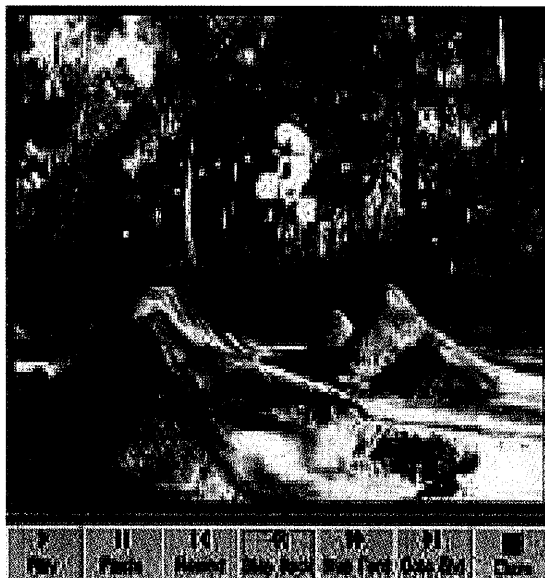
C'est un projet très populaire qui a donné beaucoup de variations sur Internet : on fait une corde avec des élastiques bout à bout et il faut chercher combien il faut d'élastiques pour qu'en sautant de l'étage le plus haut de l'école Barbie aille le plus près possible du sol sans s'écraser. Les élèves font divers essais dans la classe (du haut du tableau, de l'appui de fenêtre etc.) avant de prévoir. Ils trouvent un modèle linéaire (affine) qu'ils testent avec leur propre Barbie (ou un autre jouet s'ils n'ont pas de Barbie) ; ils doivent interpréter la constante et le coefficient.

C'est un problème qui vérifie les 5 critères de Blum et Niss et qui est crédible (Burkhardt) mais qui a aussi un impact émotionnel très fort : les élèves en parlent des années plus tard, ils ont tendance à sous-estimer le nombre d'élastiques quand c'est leur Barbie qui doit sauter. Or, les professeurs retiennent surtout les aspects affectifs : ils insistent par exemple sur le fait que les élèves apportent leurs propres jouets d'enfance.

Exemple 2 : Dirt bike jump (saut en bi-cross)

A partir de vidéoclips de cascades, il s'agit d'étudier la trajectoire du cycliste à l'aide de logiciels d'analyse de vidéos : on repère par des points les positions du cycliste et on recherche une fonction quadratique qui modélise, pour faire un certain nombre de prévisions.

Là aussi au moins trois des critères de Blum et Niss sont vérifiés et le problème est crédible mais les professeurs retiennent surtout le lien avec l'expérience hors scolaire des élèves : ils peuvent avoir un ami, un frère... qui fait du bi-cross. Ils insistent sur la mise en scène (par exemple le son qui doit mettre dans l'ambiance réelle donc le son de l'ordinateur ne suffit pas...)

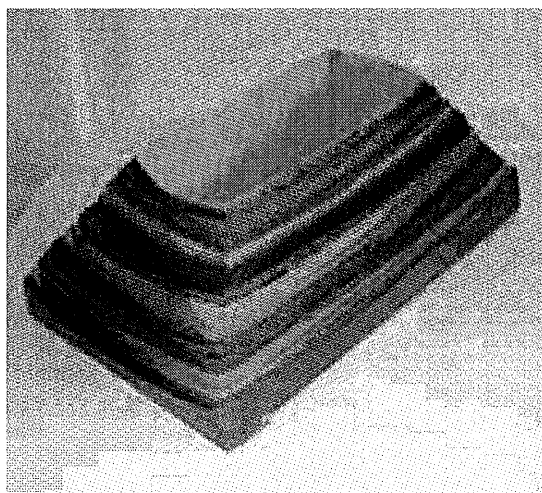


Exemple 3 : la plus grande boîte

Dans une feuille de carton, couper les quatre coins pour fabriquer une boîte de hauteur donnée (différente pour tous les élèves) et comparer les volumes.

Au départ les élèves pensent que les volumes sont les mêmes ; c'est aussi une situation à laquelle les élèves se réfèrent quand ils ont d'autres problèmes à traiter (« c'est comme la plus grande boîte »).

Les professeurs proposent des ajouts pour augmenter l'attractivité visuelle : donner des feuilles de couleur, répartir les tailles par ordre alphabétique pour appeler les élèves dans l'ordre pour avoir un joli empilement de boîtes qui provoque des réactions de surprise et de plaisir (encore un moyen de provoquer un effet de halo).



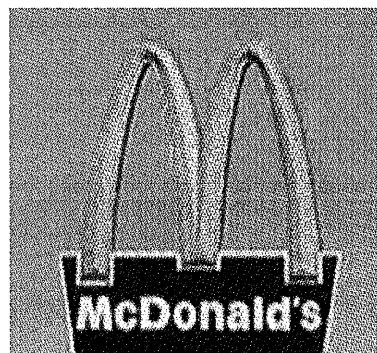
The biggest box is somewhere in the middle of this colourful stack

Exemple 4 : les arches de Mac Do

A partir d'une image numérique de l'enseigne de Mac Do, les élèves placent des points sur la première arche pour trouver une équation d'une parabole qui l'ajuste, ils prévoient l'équation de la deuxième arche et ils vérifient.

Les professeurs ont transformé cette tâche en emmenant les élèves chez *Mc Donald's* pour y prendre un déjeuner et photographier l'enseigne. Ils ramènent leur photo sur l'ordinateur pour la traiter avec le logiciel.

Il y a donc beaucoup de temps passé pour peu de mathématiques



En fait, les professeurs n'attendent pas que leurs élèves trouvent cette tâche pertinente pour son utilité (peu pensent devenir mathématiciens ou scientifiques) mais qu'ils la trouvent *sympa*.

"[It is] very difficult for the individual [teacher] to make it exciting for the kids. What we see as relevant, they may not... We tend to say "this is relevant to you" but from the students' point of view, it isn't. So for example, ... they enjoyed that because they ate McDonalds; they enjoyed it because they could come back with the photo and put it through a process. [...] But if you asked them if what they did with the graphics calculator was actually relevant, they would say "no". Relevance to them equates to use in the future and unfortunately the majority of the students that I currently teach do not see in their world that they will be mathematicians or scientists so therefore the relevance of this material to them individually isn't there."

Etude complémentaire sur l'importance de l'affect dans le choix du contexte

Les professeurs étaient en général satisfaits des mathématiques contenues dans les tâches proposées mais ils tentaient d'augmenter l'impact affectif. Pour tester la validité de cette hypothèse, ils ont demandé aux professeurs du projet de répondre à deux scénarios :

- Choix entre 5 contextes pour enseigner les fonctions quadratiques ;
- Choix entre deux contextes pour enseigner l'exponentielle.

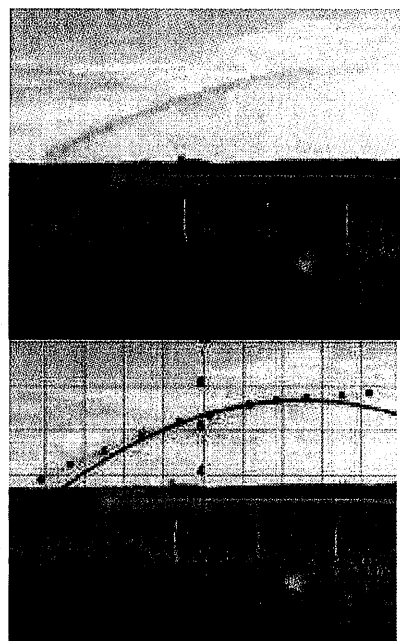
Scénario 1 : les fonctions quadratiques

Les cinq contextes proposés étaient :

- Les arches de *Mc Donald's*
- L'eau qui sort d'un tuyau d'irrigation (ci-contre)
- Le jet d'eau de la fameuse fontaine de Singapour
- Le pont du port de Sydney
- Les contours d'une fenêtre de voiture

Mc Donald's est venu largement en tête dans les choix

Ci-contre le contexte du tuyau d'irrigation et les essais de parabole en surimpression sur l'image.



Résultats

Commentaires (à partir du premier choix)	Interest	Familiar	Maths	Other
Golden Arches is most familiar to students and therefore would engage them most. Similar reasons for Harbour Bridge. Others in decreasing order of student interest.	√	√		
From the most familiar, to the most accurate, to the less accurate quadratic functions. The photograph has clear edges - excellent plotting accuracy, with scaling able to be determined.		√	√	√
Irrigation Spray All students would have experienced one or more of these parabolas and be able to relate to them as "real". The bridge or car window are more abstract for students.		√		
Sydney Harbour Bridge Most recognisable; a large object which can not be easily physically measured.		√		√
My students are girls from the city. They have aspirations to travel. They would be interested in bridges and fountains ahead of car windows. They would probably relate more to <i>Mc Donald's</i> arches than to water from an irrigation spray.	√	√		

Car Windows Many different designs of car windows so there is scope for students to test their own. I prefer examples where the function can be varied which isn't the case with the <i>Mc Donald's</i> sign, Bridge or Fountain. <i>Mc Donald's</i> don't need any free promotion.			√	√
--	--	--	---	---

Scénario 2 : les exponentielles

Contexte 1 : le papier déchiré

On plie une feuille de papier en deux et on déchire selon le pli et on recommence avec les morceaux. On compte le nombre de morceaux à chaque fois et on fait une table et un graphique sur calculatrice graphique ou ordinateur et on observe qu'on trouve $y = 2^x$.

Contexte 2 : les bonbons M&M (bonbons colorés avec un dessin sur une face)

On éparpille un paquet de bonbons M&M sur la table et on compte ceux qui ont le dessin au-dessus ; on mange les autres. On recommence la même opération. On fait un tableau relevant le nombre de bonbons restant à chaque étape, un graphique sur calculatrice ou ordinateur et on vérifie qu'on trouve approximativement $y = (1/2)^x$.

Résultats

Commentaires (à partir du premier choix)	Pleasure	Logistics	Maths
Paper Tearing The students would relate more to something edible than to folding paper [but] I chose to do the paper folding with my class. I prefer an exact relationship to one where chance is involved when introducing exponential functions. I have concerns about a diabetic student in my class when there are sweets.	√	√	√
Paper folding, although more mundane, is a less messy business than M&M's on dirty bench tops [...] not to mention allergies to colour, sweeteners etc. The paper tearing usually leads to a discussion on the early historical Greek notion of the atom.	√	√	√
[M&M's] It has a hook for engagement – allows greater movement – diversity of results and can be simulated as well.	√		√
M&M's generates more excitement in class, is a fun way of showing an exponential.	√		
Both Paper folding is easier to manage in class and would generate a more accurate model, although M&M's would generate more interest.	√	√	√
The first [paper folding] is easier to do and has an easier result to model. The second is far more enjoyable but slightly harder equation. The first is exponential growth; the second is exponential decay. Both would be good introductions to each type.	√	√	√
Both are equally effective activities.			

La conclusion de l'article

La littérature reconnaît l'intérêt des situations du monde réel pour motiver les élèves et les intéresser mais c'est souvent en évoquant des raisons intellectuelles, par exemple à cause du pouvoir que cela leur donne, essentiellement pour le futur, comme la capacité à résoudre des problèmes qui ont un intérêt intellectuel ou qui sont utiles pour la vie quotidienne ou reliés à leurs centres d'intérêt. Cependant, pour les professeurs qu'ils ont observés, la motivation apportée par les problèmes du monde réel vient d'une association très directe et immédiate

avec ce qui procure du plaisir. Plusieurs raisons peuvent expliquer les différences, notamment :

- L'âge des élèves (souvent la modélisation est étudiée avec des élèves plus avancés) ;
- Les professeurs veulent enseigner les notions de leur programme, ils n'ont pas pour objectif d'apprendre à leurs élèves à modéliser ou à résoudre des problèmes.

Cependant, le projet a provoqué une réponse positive des élèves donc cela a encouragé les professeurs à accroître le rôle de la modélisation dans leur enseignement. Les professeurs peuvent utiliser l'effet halo ; ce n'est dangereux que si cela amène à éviter des mathématiques consistantes.

Références

Blum, W., and Niss, M. (1989). Mathematical problem solving, modeling, applications, and links to other subjects – State, trends and issues in mathematics instruction. In W. Blum, M. Niss and I. Huntley (Eds) *Modelling, applications and applied problem solving*. (pp 1-21). Chichester: Ellis Horwood.

Burkhardt, H. (1981). *The Real World and Mathematics*. Glasgow: Blackie.

Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking & Learning*, 1(2), 155-177.

HREF1 RITEMATHS Project website. Retrieved 26th April 2006 from: <http://extranet.edfac.unimelb.edu.au/DSME/RITEMATHS/>

HREF2 Barbie Bungee. NCTM Illuminations. Retrieved 27th April 2006 from <http://72.14.203.104/search?q=cache:jRQR4pAmnIgJ:illuminations.nctm.org/Les>

HREF3 Vidshell. Web Physics Retrieved 27th April 2006 from <http://webphysics.nhctc.edu/vidshell/vidshell.html>

Mason, J. (1984). Modelling: What do we really want students to learn? In J.S. Berry, D.N. Burghes, I.D. Huntley, D.J.G. James and A.O. Moscardini (Eds). *Teaching and Applying Mathematical Modelling*. pp.215-234 Chichester, England: Ellis Horwood.

McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: a reconceptualisation. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 575-596). New York: MacMillan.

Nisbett, R.E. and Wilson, T.D. (1977). The halo effect: evidence for unconscious alteration of judgements. *Journal of personality and social psychology*. 35 (4), 250 - 256.

Pierce, R., Stacey, K., and Ball, L. (2005). Mathematics from still and moving images. *Australian Mathematics Teacher*, 61(3), 26 - 31.

Sowey, E.R. (2001). Striking demonstrations in teaching statistics. *Journal of Statistics Education* Vol 9(1) Retrieved 21-04-06 from <http://www.amstat.org/publications/jse/v9n1/sowey.html>

Thorndike, Edward L. (1920). A constant error in psychological ratings. *Journal of Applied Psychology*. 4, pp 25- 29.

Teachers' ways of listening and responding to students' emerging mathematical models

H. M. Doerr

ZDM 2006 Vol.38 (3) pp.255-268

Résumé de l'article

Cet article présente les résultats d'une étude sur les pratiques de quatre professeurs du secondaire qui ont engagé leurs élèves dans une première élaboration de modèles mathématiques concernant la croissance exponentielle.

Cette étude se centre sur deux aspects :

- quand, comment et jusqu'où ils regardent et interprètent les façons de penser des étudiants ?
- comment ils répondent dans leurs pratiques de classe aux réflexions de leurs élèves ?

L'analyse montre des variations importantes dans la perception par les enseignants des modèles mathématiques développés par leurs élèves et dans les réponses qu'ils y apportent.

Finalité de cette étude et cadre théorique

L'acte d'enseigner est un acte complexe et mal structuré. L'expertise dans ce domaine requiert de prendre en compte des informations partielles, des buts flous ou mouvants, des perspectives plurielles et des conséquences incertaines ; comprendre comment les étudiants appréhendent une tâche mathématique et comment leurs idées se développent constitue une demande des enseignants qui leur paraît nécessaire pour interagir avec eux en vue d'un apprentissage.

La tâche d'élaboration de modèle est définie comme ce qui, dans les processus de pensée des étudiants, est explicitement révélé à travers les descriptions, les explications, les justifications et les représentations produites. Cette tâche permet aux étudiants d'appréhender comment ils réfléchissent sur ces situations et d'être capables de juger si leurs réponses sont suffisamment correctes, sans se référer à une autorité extérieure.

Ces tâches de modélisation sont plus complexes et plus chronophages que d'autres plus routinières ; divers facteurs en accroissent l'incertitude.

L'analyse développée dans cette étude est structurée autour de trois compétences de l'enseignant :

- la compréhension des différentes méthodes que peuvent développer les étudiants,
- la manière d'écouter,
- les façons de répondre.

Pour ce qui est des références théoriques, l'auteur fait référence notamment :

- aux travaux de Davis qui souligne trois fonctions dans l'écoute portée par les enseignants :
 - approche évaluative pour déterminer la justesse des réponses des étudiants,
 - approche interprétative pour en comprendre le sens,
 - approche herméneutique en vue d'une négociation pour que les étudiants révisent leurs propres points de vue ;
- aux travaux de Heid pour qui les enseignants utilisent les échanges plus pour amener à la bonne réponse que pour enquêter sur la pensée profonde des étudiants.
- aux travaux de Doerr et Lesh sur la modélisation (*model-electing task*) sur les caractéristiques des situations de modélisation proposées (*Documentation Principle, Self-Evaluation Principle*).

Description de l'étude

La tâche proposée à des étudiants de 16 à 18 ans porte sur l'investigation du doublement des sommes d'argent sur un échiquier quand un penny est placé sur la première case, deux sur la seconde... Ce modèle récursif simple de dédoublement est facile à entrevoir par les étudiants. Ce qui est considérablement plus difficile pour eux, en dépit de leur familiarité avec les calculs sur les exposants et les fonctions exponentielles, est de passer d'une vue de proche en proche à une relation explicite qui exprime le nombre de pennies en fonction du numéro de la case de l'échiquier.

De plus, ils devaient indiquer sur quel carré la hauteur de la pile de pennies atteindrait le plafond de la classe ou le sommet d'une montagne ou la distance à la Lune. (Il leur était aussi demandé de remplir un tableau pour les quatre premières valeurs.)

Participants

Les quatre enseignants qui conduisent cette leçon pour la seconde fois (il s'agit d'un projet sur deux ans), ont 20 ans ou plus d'expérience et une bonne connaissance des fonctions exponentielles. Ces quatre enseignants, avec huit autres, avaient participé à deux sessions de travail d'été où ils avaient étudié les croissances exponentielles et discuté des stratégies que pourraient prendre les étudiants dans l'approche de ces tâches. Ils avaient aussi participé à des rencontres mensuelles avec leurs collègues et le chercheur. Une attention particulière portait sur :

1. l'écoute et l'identification des façons de penser que pourraient utiliser les étudiants sur ce problème ;
2. comment aider les étudiants pour qu'ils développent ou révisent leurs propres stratégies ?

Les étudiants disposaient de calculatrices graphiques et étaient familiers de leur usage en cours de mathématiques.

Recueil des données

Les enregistrements vidéos sont centrés sur chaque enseignant et sur ses interactions avec les étudiants, ainsi que sur des échanges avec l'enseignant après son cours. Les retranscriptions et les notes prises constituent les premières données, complétées lors de deux séminaires relatifs, pour le premier, à leur codage et à leurs interprétations (confrontation des codes et des différentes sources) et pour le second aux regroupements de codages susceptibles de caractériser la physionomie de chaque leçon, à partir des événements dominants ; chaque enseignant confirmant ces interprétations et ajoutant des éclaircissements.

Résultats

Professeur 1 : Mrs A

Mrs A attira l'attention des étudiants sur la recherche du nombre de pennies de la dernière case. Après discussion sur la valeur de ce nombre, l'étudiant qui avait trouvé une relation, l'écrivit au tableau à sa demande et les autres étudiants utilisèrent cette équation durant le reste du cours sans s'être confrontés à la difficulté de savoir comment la trouver ou exprimer les modèles dans un tableau. Après la séance, elle décrivit trois types d'apprenants : visuels, auditifs, kinesthésiques.

L'analyse des données montre trois particularités critiques :

1. Elle incita à des manipulations, à des dénombrements.
2. Pour elle, la tâche proposée est un rappel de ce qui a été vu avant.
3. Explorer un nouveau rôle pour elle dans l'écoute et l'observation.

Elle n'imagine pas les différentes voies que peuvent prendre les étudiants pour résoudre le problème, elle perçoit même que cette activité constitue une sorte de synthèse de ce qui a été vu durant l'année. Elle annonce au départ que « cela doit être familier » et consiste en « une rapide petite révision ». Plus tard quand le chercheur lui demanda comment la plupart des étudiants trouvèrent la relation, elle dit qu'ils l'avaient presque trouvée et qu'ils avaient vu les exponentielles dans leurs précédents cours. La centration sur la valeur de la dernière case a conduit les étudiants à se focaliser sur ce calcul plutôt qu'à s'engager dans l'exploration de modèles.

Engager les étudiants dans plus de discussions mathématiques que dans le passé et, en ce qui la concerne, moins parler constitue un réel enjeu ; elle suggère ainsi qu'elle souhaitait avoir une écoute plus attentive en leur permettant de suivre leurs propres voies. Elle se décrit comme une bonne enseignante traditionnelle capable de fournir des explications claires à ses étudiants et comme prenant un risque, dans cette séance, en quittant un style directif plus confortable.

Professeur 2 : Mrs B

Mrs B commença son cours en demandant aux élèves de lire l'énoncé et de se mettre en groupes. Les étudiants démarrèrent rapidement, créant des tableaux adéquats et entrèrent les données dans leurs calculatrices graphiques. Elle s'assura que tous l'avaient fait et énonça qu'elle voulait savoir quelle fonction correspondait aux données, mais la plupart des étudiants s'étaient déjà engagés dans cette voie. Elle dit que le doublement devrait leur donner des idées sur la façon de trouver la relation. Plusieurs étudiants proposent différentes façons pour l'exprimer. Après avoir laissé un peu de temps pour travailler sur ces propositions, elle écrit deux productions et plusieurs étudiants produisent la relation fonctionnelle. Elle demande à l'un des étudiants d'expliquer pourquoi cela convient et elle utilise la calculatrice graphique pour confirmer que la fonction passe par les points qui représentent les données.

Trois caractéristiques émergent de l'analyse de cette leçon :

1. Elle sait que les étudiants envisageront la tâche de différentes façons ;
2. Elle laisse les étudiants exprimer leurs idées ;
3. L'émergence d'une calculatrice graphique comme un moyen pour produire du sens.

Juste après avoir énoncé le problème, elle recueille les propositions des étudiants pour « alimenter » en données. Elle demanda si le graphique était une ligne droite et les étudiants reconnurent que non, bien que certains avaient essayé des fonctions linéaires, et aussi,

comment ils pourraient trouver une relation basée sur le doublement. Plus tard quand une étudiante suggéra que cela pouvait être une fonction linéaire, elle dit à la classe entière : « maintenant E. m'a posée une question. Elle a dit : est-ce comme deux fois quelque chose ? Elle est sur la bonne voie, car ce que nous avons dit sur ce que nous avons vu ? C'est un doublement, ce qui est deux fois quelque chose. C'est bien... ». Mrs B écoute leurs suggestions portant sur l'usage des proportions, de la trace graphique, de la linéarité et des puissances de 2. Elle répond en les renvoyant à leur réflexion et en les encourageant à explorer les données.

Quelques étudiants trouvèrent rapidement une façon d'exprimer le modèle, mais d'autres n'eurent pas le temps pour expliciter et tester leurs idées. Dès que certains produisirent une relation, elle attira l'attention des étudiants sur cette solution, pour faire avancer son cours : « Tout le monde écoute M. ; il a à peu près trouvé ». En commentant cette solution elle fait référence aux autres idées et valorise le modèle des puissances de 2 en écrivant la solution de M. au tableau. La force du modèle des puissances de 2 et son lien avec la fonction était, pour elle, l'idée mathématique centrale de cette leçon.

Elle est en outre attentive aux capacités des étudiants dans l'utilisation de la calculatrice.

Professeur 3 : Mrs C

Elle propose aux étudiants de lire l'énoncé, de réfléchir individuellement, puis de se mettre en groupe. Elle a une idée claire des difficultés que vont rencontrer les étudiants, elle répète qu'il faut réfléchir sérieusement et trouver l'équation. Elle leur laisse du temps en plus. Lorsque deux solutions différentes ont été développées, elle demanda aux étudiants d'écrire les relations au tableau et d'expliquer comment ils y étaient parvenus et annonça que la divergence entre les solutions constituait une difficulté que les étudiants devaient résoudre.

Quatre caractéristiques dans l'analyse de cette séance :

1. Concentration sur la tâche et compter sur les idées des étudiants ;
2. Compréhension de la façon de penser des étudiants (fonctions linéaires, variation utilisant la pente, fonctions du second degré, comportements des données au départ, carrés parfaits...) ;
3. Demande d'explications, de justifications ;
4. Mettre en commun et comparer les solutions.

Le professeur les encourage mais recentre souvent leur attention sur « trouver la relation ». Comme cette séance était la première où il y avait une tâche aussi conséquente de modélisation, elle leur rappela que les règles du jeu étaient différentes et qu'elle n'attendait pas d'eux des réponses faciles, mais qu'ils allaient avoir besoin de réfléchir et que cela allait être dur.

Surprise par une proposition (les valeurs sont des carrés), elle renvoie aux étudiants que toutes les valeurs ne sont pas des carrés et intègre les propositions non attendues.

Elle met en place un contexte dans lequel l'étudiant peut affiner sa pensée et en changer ; elle les encourage à évaluer leur propre solution.

Elle rend publiques les deux solutions équivalentes auxquelles ils ont abouti et demande de les décrire de façon détaillée. Elle engage toute la classe dans une discussion élargie sur pourquoi deux solutions sont les mêmes.

Professeur 4 : Mrs D

L'introduction du problème avait été effectuée à la fin du cours précédent et elle n'a pu être observée. Mrs D demande à ses étudiants de rappeler ce qu'ils avaient fait avec la situation des pennies. Elle démarre la séance en restituant au tableau – préparé à l'avance – les données et en demandant aux étudiants de décrire ce qu'ils avaient trouvé. Les données comprenaient les valeurs pour chaque case avec le nombre de pennies écrit comme un produit de 2 et la relation donnée comme $y = 2^{x-1}$. Elle demande aux étudiants d'entrer leurs données dans leur calculatrice graphique, de choisir une fenêtre appropriée, et de confirmer que les points appartiennent bien à la courbe (que les valeurs vérifient bien la relation). Elle a une expérience de l'usage de la calculatrice graphique.

Trois caractéristiques dans l'analyse de cette séance :

1. Valorisation de l'interprétation des résultats produits (pour les premiers nombres) ;
2. Niveau incertain d'engagement sur la difficulté centrale.
3. L'engagement dans la tâche est restreint par le temps.

L'idée centrale pour elle dans cette tâche est de reconnaître que le modèle peut être vu quand il est écrit pour, par exemple la quatrième case, comme $8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$. Elle introduit l'idée que cette expression peut comporter un facteur 1 et s'écrire $8 = 1 \times 2 \times 2 \times 2 = 1 \times 2^3$. Cela anticipe le modèle que les étudiants verront avec la tâche suivante, où le premier coefficient ne sera plus 1 mais une donnée initiale quelconque. Toutefois cela est apparu comme une expression « parachutée » pour les étudiants. Elle ne passa aucun temps sur le nombre de pennies pour la 64^{ème} case.

Elle annonce au début de la seconde séance, celle observée, que l'activité sera très semblable à celle menée la séance précédente. Il semble que beaucoup d'étudiants ne se soient pas engagés, lors de la séance précédente, dans la recherche de la relation sinon ils l'auraient testée sur leurs calculatrices lors de cette séance.

Elle affirme souvent que ses élèves ont des difficultés à se souvenir de ce qu'ils ont appris lors des leçons précédentes et elle voit son rôle comme étant de rappeler ce qui devrait être connu ; elle se doit aussi d'encourager les étudiants qui se découragent facilement.

Quand les étudiants constatent quelques relations qu'ils trouvent ne satisfont pas aux données, elle suggère qu'ils contrôlent leurs données et leurs résultats mais poursuit la résolution. Elle conclut la partie de séance achevée comme étant un rapide rafraîchissement de ce qui avait été vu la fois précédente. La contrainte de temps l'aurait empêchée d'engager collectivement les étudiants de résoudre les écarts entre leurs équations et les données. Elle dit qu'elle a échoué à fournir un outil qui permette aux étudiants d'arriver à une équation, et que ce type de tâche était hors de portée de l'expérience mathématique de la plupart de ses étudiants.

Discussion

Les mises en œuvre et les caractéristiques essentielles mettent en évidence des variations assez grandes ; mais des contraintes comme le temps ou les objectifs des programmes qui réduisent ce qui peut être interprété à partir d'une séance particulière, nous conduisent à être prudent dans notre analyse.

Premièrement les enseignants diffèrent dans la façon qu'ils voient la tâche comme une occasion pour les étudiants de se confronter aux aspects mathématiques du problème :

- Mrs C attend d'eux qu'ils prennent du temps pour réfléchir même quand ils rencontrent des difficultés. Elle annonce explicitement cette attente.
- D'une façon semblable Mrs B attend à ce que les étudiants puissent réfléchir sur la façon qui leur permette de trouver une relation, mais elle fait avancer la séance dès

qu'un ou deux étudiants ont trouvé une solution.

- Au contraire Mrs A et Mrs D voient la tâche comme une révision ou un rappel de leçons antérieures plus que comme une activité qui permette de découvrir les idées mathématiques des étudiants.

Deuxièmement, la manière dont les professeurs interprètent les réflexions de leurs élèves est vue au travers de leurs propres idées sur la façon dont les étudiants devraient penser cette tâche.

- Mrs C en a une représentation claire comportant les fonctions linéaires, l'usage de coefficients directeurs, de fonctions du second degré, auxquelles elle ajoute en cours de séance la croyance dans des carrés parfaits.
- Mrs B, d'une façon semblable, a connaissance des méthodes des étudiants sur les proportions, les fonctions linéaires, les puissances de 2. Mais Mrs B, et Mrs D, veulent que les étudiants voient le modèle des puissances de 2 et l'utilisent pour trouver une relation.
- Mrs D dit que sa principale tâche est de rendre visible ce modèle pour qu'ils soient capables de l'utiliser dans la tâche suivante.
- Mrs A semble avoir quelques idées sur la façon dont les modalités d'enseignement peuvent influencer l'exploration des modèles, mais sa centration sur la question du nombre de pennies dans la 64^{ème} case détourne les étudiants de la réflexion sur les modèles.

Les conceptions des enseignants sur les représentations des étudiants influencent, de différentes manières, leurs actions dans la classe.

- Dans le cas de Mrs C, disposer d'une représentation bien élaborée de la façon dont les étudiants peuvent appréhender le problème lui permet de les encourager à exprimer, évaluer et modifier leurs propositions sur la croissance exponentielle. Elle leur laisse du temps supplémentaire pour mettre à l'épreuve leurs propres idées sur les fonctions qui peuvent décrire les données sur les pennies. Elle leur demande de lui expliquer leurs idées, et ultérieurement à la classe entière. Elle les encourage à les tester en comparant le graphe de leurs fonctions à celui des données. En demandant des descriptions et des explications l'enseignante crée une situation où l'étudiant lui-même peut affiner sa réflexion et se donner de nouvelles pistes pour appréhender le problème.
- Dans le cas de Mme B. nous pouvons voir ses compétences dans ce domaine, mais pour elle cette leçon est plutôt vue comme la poursuite de l'emploi de la calculatrice graphique comme support d'apprentissage. Cela lui semble plus important que les étudiants voient la calculatrice comme un outil pour confirmer leurs hypothèses plutôt qu'ils passent trop de temps à trouver la relation.
- Il apparaît que Mrs D voit cette tâche comme une préparation de la suivante plus que comme une investigation mathématique en tant que telle. Les contraintes de temps laissent penser qu'elle voit cette tâche comme devant être menée rapidement et sans détour.
- Au contraire Mrs A donne un temps supplémentaire. Elle semble penser que l'exploration des modèles est centrale en mathématiques sans avoir une idée claire de la façon dont les élèves peuvent s'y prendre. Une meilleure compréhension de cette séance lui aurait permis d'accroître sa capacité d'engager les étudiants dans plus de recherche et de débats mathématiques. L'écoute des étudiants est gouvernée par son propre désir de se réfréner pour ne pas leur dire comment faire : elle n'a pas encore stabilisée une nouvelle façon d'interagir avec eux.

Bilan et conclusions

Les résultats de cette analyse suggèrent qu'il y a des variations considérables dans les manières qu'ont les enseignants d'écouter les étudiants. Au moins l'un des enseignants est capable de s'adapter. Une autre explore un nouveau rôle pour elle : écouter ce que disent les étudiants et s'empêcher d'intervenir, ce qui constitue une première étape pour prendre en compte cette diversité. Une autre les entend mais ne leur laisse pas le temps d'aller au bout. Elle privilégie son expertise du rôle de la calculatrice graphique.

Engager les étudiants dans le domaine de la modélisation mathématique constitue un changement qui apporte de nouvelles demandes sur le rôle du professeur. La tâche essentielle pour l'enseignant est de placer les étudiants dans une situation où ils ont besoin de créer le modèle d'un phénomène, ayant du sens et qui soit fonctionnel pour répondre à des visées telles que « expliquer » ou « anticiper ». Cela transforme l'enjeu de l'enseignement : identifier ce que les élèves ont besoin d'entendre pour voir et interpréter les connaissances qu'ils ont déjà. Au fur et à mesure que les étudiants rendent visibles leurs idées, le professeur doit voir comment elles peuvent être exploitées et étendues pour engager les étudiants dans la tâche et donc identifier les connaissances qui vont être nécessaires.

Le but pour l'enseignant n'est pas de considérer cette diversité de pensées comme un but en soi mais plutôt d'en avoir un large schéma afin d'outiller les élèves pour dépasser des obstacles qui doivent être résolus ou pour trouver des alternatives qui peuvent être testées.

Nous avons vu comment des enseignants apprenaient à écouter les étudiants et commençaient par se réfréner dans leurs interventions pour ne pas leur indiquer quelle est l'étape suivante. D'autres étaient capables de placer les étudiants dans une situation où ils pouvaient eux-mêmes évaluer leurs productions et explorer d'autres voies. Dans l'enseignement des mathématiques par la modélisation, une tâche essentielle de l'enseignant, quand il prend en compte les pensées de ces étudiants, est de préciser les manières de favoriser la capacité des étudiants à développer des modèles émergents.

Remarques

La description des séances montre une diversité des représentations que se font quatre enseignants :

- des conceptions de leurs élèves, et du rôle qu'ils reconnaissent à ces conceptions pour l'acquisition des connaissances ;
- de la place qu'ils attribuent effectivement dans les séances observées aux tentatives de modélisations produites par leurs élèves.

Le tableau ci-contre récapitule les éléments d'analyse abordés

Professeur	Mrs A	Mrs B	Mrs C	Mrs D
indications données aux élèves sur la tâche	temps, manipulations, petite révision	groupes, doublement, temps réduit	règles du jeu : réfléchir...	rafraichissement
question privilégiée par l'enseignante	valeur de la dernière case	recherche de la fonction	recherche de la fonction	recherche de la fonction
place des modèles	équation communiquée	productions communiquées	productions confrontées	peu
interventions des étudiants	intrigués	expliquer	explications, justifications	
validation par les étudiants		calculatrice graphique	oui	calculatrice graphique
interventions de l'enseignant	donne la solution	guide par réinterprétation	encourage à évaluer	rappel des savoirs, recours à la calculatrice graphique
prise en compte des méthodes	pas de prise en compte réelle	oui	certaine d'en comprendre la diversité	en détourne les étudiants
prise en compte de la parole des étudiants	pense que c'est un nouveau rôle pour elle	oui	partager, comparer	
finalité mathématique	révision	puissances de 2, fonction	trouver la fonction	puissances de 2

La description de cette diversité de pratiques peut susciter chez le lecteur un intérêt pour des séances où les élèves cherchent sur des problèmes ayant une certaine consistance. Les conceptions de ces enseignants sur l'activité mathématique propre de l'élève dans une séance sont très variées, certains concevant une séance comme un rappel de ce qui devrait être connu, d'autres favorisant la formulation de propositions différentes, ou permettant une confrontation entre ces propositions.

La perception que les enseignants ont des séances effectuées est, bien évidemment fonction de ces attentes : des changements de postures, des prises de risques, sont exprimées par exemple par des enseignantes qui guident les élèves tout au long de la séance, mais qui ont l'impression d'abandonner, à cette occasion, une forme habituelle de travail, sans doute plus magistrale.

Dans cet article, les décisions des enseignantes sont citées : écouter, se taire, se réfréner, faire formuler, relancer les étudiants sur les données et leurs confrontations aux modèles, sur la recherche de la « formule », sur un outil, sur les premières valeurs, sur le nombre pour la dernière case.

Les analyses sont centrées sur les gestes professionnels des enseignants plus que sur l'écart entre l'activité mathématique réelle des étudiants, permise par l'organisation didactique, et les critères énoncés au début de l'article (les sujets doivent être capables de juger si leurs réponses sont suffisamment correctes sans se référer à une autorité extérieure) .

En cela cet article peut être lu comme visant à communiquer une expérience, à sensibiliser, à faire évoluer une conception de l'enseignement.

Références

Davis, B. (1996). *Teaching mathematics: Toward a sound alternative*. New York: Garland Publishing.

Davis, B. (1997). Listening for differences: An evolving conception of mathematics teaching. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(3), 355-76.

Davis, B., & Simmt, E. (2003). Understanding learning systems: Mathematics education and complexity science. *Journal for Research in Mathematics Education*, 34(2), 137-167.

Doerr, H. M. (2000). How can I find a pattern in this random data? The convergence of multiplicative and probabilistic reasoning. *Journal of Mathematical Behavior*, 18(4), 431-454.

Doerr, H. M., & Lesh, R. A. (2003). A modeling perspective on teacher development. In R. A. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching* (pp. 125-139). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Heid, M. K., Blume, G. W., Zbiek, R. M., & Edwards, B. S. (1999). Factors that influence teachers learning to do interviews to understand students' mathematical understandings. *Educational Studies in Mathematics*, 37, 223-249.

FICHES
DESCRIPTIVES
SYNTHÉTIQUES

Article : **What are modelling competencies?**

Auteur : Katja Maass , Université d'éducation de Freiburg, Allemagne.

Source : ZDM 2006 Vol.38 (2) pp.113-142

Lecteur : Richard Cabassut

Question traitée : Quelles sont les compétences de modélisation à développer dans l'enseignement des mathématiques ? Quels sont les facteurs qui favorisent leur développement ?

Finalité de l'article : Essayer de définir les compétences de modélisation. Présenter des études empiriques montrant quelles compétences les élèves développent lors d'un enseignement de la modélisation, quelles difficultés ils rencontrent et quels facteurs influencent le développement de ces compétences.

Nature du contexte : Les résultats empiriques proviennent d'une recherche auprès d'élèves de 13-14 ans de deux classes allemandes et la réflexion théorique s'inscrit dans la tradition de l'école allemande de modélisation représentée par Blum et Kaiser.

Public visé par l'étude : Professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire et formateurs de professeurs. Chercheurs en didactique des mathématiques (notamment pour la méthodologie de l'étude empirique).

Cadre théorique : Le cadre théorique principal est celui de l'école allemande de modélisation représentée par Blum et Kaiser qui « modélise » le processus de modélisation par un cycle de modélisation à partir duquel on décrira les compétences mises en jeu. Mais on remarque des emprunts théoriques variés :

- compétence mathématiques (Niss 2004) ;
- compétence de modélisation (Blum, Kaiser 1997) ;
- métacognition (Baumert 2001, Sjiuts 2003) ;
- types idéaux de (Weber 1904, Gerhardt 1990).

Place et statut de la réalité et des mathématiques : Dans la conception développée par l'article un problème de modélisation doit être en relation avec la réalité, authentique, ouvert et complexe. Le monde réel va fournir des données et des hypothèses extra-mathématiques qui permettront de définir un problème mathématique. Les processus de mathématisation et d'interprétation feront le lien entre la réalité et les mathématiques.

Mots clés : Modélisation – compétence – mathématique – métacognition – étude empirique.

Article : Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process

Auteur : Rita Borromeo Ferri, Université d'Hambourg, Allemagne.

Source : ZDM 2006 Vol.38 (2) pp. 86-95

Lecteur : Alain Kuzniak

Question traitée : Description d'un cycle de modélisation adaptée à une étude cognitive de parcours de lycéens résolvant des problèmes.

Finalité de l'article : Introduire le cadre théorique qui a permis d'analyser des parcours effectifs d'étudiants en train de modéliser. Se démarquer des approches dites normatives car idéales pour atteindre les parcours individuels (approche dite empirique).

Nature du contexte : Un projet dit COM² qui vise une analyse psycho-cognitive du processus de modélisation dans les cours de mathématiques. Travail de thèse.

Public visé par l'étude : Lycéens niveau 10 (seconde) dans les lycées allemands.

Cadre théorique :

- cycle de modélisation de type cognitif adapté du cadre allemand Blum-Kaiser ;
- styles mathématiques des élèves (mais peu d'éléments dans l'article).

Place et statut de la réalité et des mathématiques : Normalement les problèmes sont censés être des situations réelles et l'idée est de voir l'ensemble du cycle qui mène de la réalité aux mathématiques puis à la solution. De fait la réalité semble déjà médiatisée par des problèmes classiques (mais impossible d'avoir accès aux énoncés non décrits et non disponible sur le site annoncé).

Mots clés : modélisation mathématique – cycle de modélisation – analyse psycho-cognitive.

Article : Simple Thinking using Complex Maths vs. Complex Thinking using Simple Math- A study using Model Eliciting Activities to compare students' abilities in standardized tests to their modelling abilities.

Auteurs : Steffen M. Iversen, University of Southern, Denmark
Cristine J. Larson, Indiana University, Indiana, USA.

Source : ZDM 2006 Vol.38 (3) pp. 281-292

Lecteur : Marie-Pierre Galisson

Questions traitées : L'adaptation d'un questionnaire initié par Lesh et Sriraman au contexte danois : Pourquoi réussir dans des évaluations traditionnelles n'entraîne pas nécessairement la capacité à modéliser des situations issues de la réalité ? Et inversement.

L'identification des liens entre les compétences mobilisées dans les situations d'évaluations « normales » et dans les situations relevant des MEAs.

L'identification des conditions qui permettraient d'expliquer comment avec des scores faibles dans les évaluations classiques, des étudiants peuvent réussir dans des situations relevant des MEAs.

Finalité de l'article : « Manifeste » pour établir la pertinence des situations relevant des MEAs dans le cadre des évaluations (voire des situations de structuration des savoirs), pour questionner la pertinence des évaluations classiques.

Nature du contexte : Un contexte d'évaluation des compétences mathématiques des étudiants en première année de formation universitaire dans l'université du Sud du Danemark.

Public visé par l'étude : Environ 200 étudiants inscrits en 1^{ère} année de formation universitaire dans le département de Sciences et d'Ingénierie en 2005.

Cadres théoriques :

- Travaux de Niss sur l'évaluation
- La conception de l'éducation mathématique comme une « design science »
- Le cadre des MEAs (les six principes de Lesh & Doerr)
- Référence aux idéaux-types de Maass

Place et statut de la réalité et des mathématiques : La réalité est une situation qui peut relever du quotidien des étudiants, qui requiert prioritairement un traitement de l'information. Les mathématiques sont des outils *a priori* disponibles : l'enjeu réside dans la mise en réseau plus ou moins complexe des notions pertinentes pour modéliser la situation et dans l'organisation de divers registres de représentation.

Mots clés : modélisation – MEA – évaluation « standard » – évaluation alternative – identification des compétences relatives à la modélisation

Article : Functions: A Modelling Tool in Mathematics and Science

Auteur : Claus Michelsen, University of Southern Denmark.

Source : ZDM 2006 Vol.38 (3) pp. 269-280

Lecteur : Ana Mesquita

Question traitée : La modélisation en classe, dans un contexte interdisciplinaire mathématiques/ sciences, étudiée à partir d'un concept unificateur : les fonctions.

Finalité de l'article : L'article suggère que des compétences interdisciplinaires au sens de Niss & Jensen (2002) et appliquées par Berlin & White (1998) peuvent être une méthodologie générale pour approcher des contenus en mathématiques et en sciences (physique, chimie, biologie). Dans ce sens, l'auteur propose un projet de curriculum interdisciplinaire, intégrant mathématiques et sciences, avec deux modules : mouvement et fonctions trigonométriques ; variation exponentielle et radioactivité.

L'article présente les deux raisons pour le choix d'un curriculum intégré mathématiques/sciences :

- 1) éviter les difficultés observées lors du transfert de connaissances apprises dans le contexte des mathématiques au contexte des sciences ;
- 2) dépasser les frontières actuelles des disciplines, devenues obsolètes.

Nature du contexte : Projet de curriculum intégré (cf. ci-dessus), en cours depuis 2005 au Danemark, et dont C. Michelsen est un des animateurs.

Public visé par l'étude : Elèves de lycée (10^e année)

Cadre théorique :

- application de la modélisation ascendante (Lesh & Sriraman, 2005), en utilisant le modèle émergent (modèle de LA SITUATION/ modèle pour RAISONNER) de Gravemeijer, 1997.
- dimension *technique* de la modélisation, dont les sources principales sont : Berlin et White (1998, Integrated Science and Mathematics Model) et le KOM-report (Competences and Learning in Mathematics, en danois, Danemark, 2005).

Place et statut de la réalité et des mathématiques : Le point de départ de la modélisation : les situations de la vie réelle. La modélisation est vue comme *contenu* et comme *véhicule* (en tant que base d'un raisonnement éclairé).

Les mathématiques et les sciences servent à interpréter la réalité, au delà de l'enseignement, pour penser mathématiquement et scientifiquement cette réalité.

Mots clés : compétences – interdisciplinarité mathématiques/sciences – modélisation mathématique – modélisation ascendante – modèle émergent

Article : **Faces of mathematical modeling**

Auteur : Thomas Lingefjärd, Universités de Gothenburg et Jonkoping (Suède)

Source : ZDM 2006 Vol.38 (2) pp. 96-112

Lecteur : Cécile Ouvrier-Buffet

Question traitée : Différents exemples pour introduire un cours sur la modélisation mathématique.

Finalité de l'article : Montrer différents modèles issus de notre société, dans un contexte culturel et technologique.

Nature du contexte : Un cours sur la modélisation mathématique à des enseignants, celle-ci ayant une part importante dans les curricula suédois.

Public visé par l'étude : Enseignants (et, indirectement, les élèves).

Cadre théorique : Des références théoriques évoquées (dont Blum, Niss, et Clayton) mais l'article n'est pas un article théorique, c'est un article illustratif.

Place et statut de la réalité et des mathématiques : Les exemples retenus par l'auteur sont issus de la vie de tous les jours, de notre société (médecine, climat, population, sports, communication, et un exemple en géométrie). L'objectif de l'auteur est essentiellement de montrer l'existence des mathématiques dans notre société. Le travail de modélisation est déjà réalisé et une formalisation algébrique reste à faire.

Mots clés : modélisation mathématique – formation des enseignants – exemples de modèles

Article : Mathematical Modelling in classroom: a socio-critical and discursive perspective

Auteur : Jonei Cerqueira Barbosa, université de Feira de Santana (Brésil)

Source : ZDM 2006 Vol.38 (3) pp. 293-301

Lecteur : Bernadette Denys et Bernard Parzysz

Question traitée : La modélisation en classe, étudiée du point de vue sociocritique : la contribution de l'étude des échanges verbaux

Finalité de l'article : Montrer que l'approche sociocritique est plus performante que d'autres approches existantes et que la dimension discursive peut être une « loupe » permettant d'analyser le processus de modélisation en classe.

Nature du contexte : le Brésil. Le courant ethno-mathématique y est très vivace (d'Ambrosio)

Public visé par l'étude : enseignants en formation initiale ou continue

Cadres théoriques :

- point de vue *socioculturel* : former à l'école des citoyens éclairés et responsables ;
- dimension *critique* de la modélisation, complétant la conception de Julie (modélisation : contenu ou véhicule) ;
- en opposition avec l'approche « diagrammatique » qui codifie la démarche de modélisation en l'assimilant à celle du chercheur professionnel ;
- *deux critères* d'une bonne situation de modélisation : être issue de la vie quotidienne et constituer un vrai problème pour les élèves ;
- application de la classification de Skovsmose à l'étude du *discours* des élèves (mathématique, technologique, réflexive), et mise en relation avec le type d'approche favorisé par l'enseignant.

Place et statut de la réalité et des mathématiques : La réalité est ici la vie quotidienne des élèves : elle est le point de départ obligé de toute situation de modélisation. Les mathématiques sont secondaires.

Mots clés : modélisation mathématique – approche sociocritique – analyse discursive – réalité scolaire – réalité quotidienne – activité de modélisation

Article : **Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics**

Auteurs : Francisco Javier García, University of Jaén, Espagne.

Josep Gascón, Autonomic University of Barcelona, Espagne

Luisa Ruiz Higuera, University of Jaén, Espagne

Marianna Bosch, Ramon Llull University, Espagne

Source : ZDM 2006 Vol.38 (3) pp. 226-246

Lecteur : Laurent Vivier

Question traitée : Développement des curricula par l'utilisation des PER pour éviter les problèmes de déconnexion des contenus, appelé le « problème du curriculum ».

Finalité de l'article :

- Montrer que la TAD permet une approche de la modélisation plus efficace et théoriquement plus solide que le cycle de modélisation.
- Faire exister la TAD dans les questions de recherche sur la modélisation.

Nature du contexte : Les recherches semblent plutôt porter sur le second degré, mais ce n'est pas du tout exclusif.

Public visé par l'étude : Hormis les élèves à qui on propose un PER, le public est essentiellement constitué des chercheurs en didactique et, sans doute indirectement, la noosphère des personnes qui élaborent les curricula.

Cadre théorique : La TAD avec un rapport critique envers le cycle de modélisation.

Place et statut de la réalité et des mathématiques : La réalité a une place mineure (elle peut être au départ du PER si elle permet de poser une "question cruciale" qui débouche sur un PER, mais ce n'est pas du tout une nécessité). Les mathématiques ont une place centrale.

Mots clés : Modélisation, TAD, praxéologie, PER, problème du curriculum, déconnexion des praxéologies.

Article : Modeling conceptions revisited

Auteur : Bharat Sriraman, Dept. of Mathematical Sciences, The University of Montana, USA
Richard Lesh, School of Education, Indiana University, USA.

Source : ZDM 2006 Vol.38 (3) pp. 247-254

Lecteur : André Pressiat

Question traitée : Évolutions curriculaires concernant l'enseignement des mathématiques aux USA et leur pertinence : le cas de la modélisation.

Finalité de l'article : Montrer qu'en ce début du XXI^e siècle, les besoins économiques et sociaux relatifs aux mathématiques ont radicalement changé et que par conséquent les mathématiques enseignées doivent fortement évoluer. La recherche en éducation mathématique doit ainsi redéfinir son programme de recherches.

Nature du contexte : Le contexte géographique est celui des USA. L'article concerne essentiellement l'enseignement des mathématiques à l'école et dans l'enseignement secondaire.

Public visé par l'étude : L'article s'adresse surtout à la communauté des chercheurs en "éducation mathématique", mais également aux "administrateurs" du système d'enseignement.

Cadre théorique : C'est celui du courant "Models & Modelisation".

Place et statut de la réalité et des mathématiques : La réalité est celle de l'économie américaine et de la mondialisation. Les mathématiques sont essentiellement vues comme des moyens au service de l'économie et de l'écologie telles que l'apprehende l'idéologie dominante.

Mots clés : Modèles – modélisation – curriculum – systèmes complexes – problèmes de Fermi.

Article : Modelling in Mathematics Classrooms : reflections on past developments and the future

Auteur : Hugh Burkhardt

avec contributions de Henry Pollak

Source : ZDM 2006 Vol.38 (2) pp. 178-195

Lecteur : Caroline Bulf

Question traitée : Il s'agit d'un état des lieux de la modélisation dans les programmes mathématiques anglo-saxons entre 1960 et 2000 alimenté par une réflexion personnelle de l'auteur et de Henry Pollak sur l'enseignement, l'apprentissage et l'évaluation dans la classe de mathématiques en Grande Bretagne et aux Etats-Unis.

Finalité de l'article : Après avoir dressé le constat de la place de la modélisation dans les programmes, l'auteur propose les critères d'un programme (curriculaire voire politique) dans le but d'améliorer l'enseignement actuel qui intégrerait de manière plus édifiante la modélisation (« rendre la modélisation une réalité dans les programmes ») et qui permettrait d'aboutir à un enseignement dit de « mathématiques fonctionnelles », pouvant être utilisées par les élèves pour résoudre des problèmes.

Nature du contexte : Selon l'auteur, il y a activité de modélisation dès lors que l'on se pose une question aussi bien dans la vie quotidienne que dans le cadre d'une démarche scientifique ; or cette activité de modélisation n'est pas encore d'après l'auteur suffisamment exploitée dans l'enseignement et les méthodes actuelles d'apprentissage des mathématiques.

Public visé par l'étude : Etant donné sa relative dimension politique, cet article concerne et s'adresse à tous les acteurs du pôle éducation de notre société : élèves, professeurs de mathématiques, chercheurs, concepteurs des programmes, et autres dirigeants et décideurs politiques.

Cadre théorique : Les travaux de Blum sur la modélisation semblent être le background théorique sans que celui-ci soit explicitement annoncé. L'auteur fait en revanche explicitement référence à un *modèle de modélisation* (*models of modelling*) issu de ses précédents travaux. En outre, dans le développement de son article, l'auteur s'inspire des travaux de Schoenfeld sur les différents aspects fondamentaux de *faire des mathématiques* et fait également référence au changement de contrat didactique au sens de Brousseau où l'élève n'est plus *imitateur* mais *investigateur*.

Place et statut de la réalité et des mathématiques : L'auteur entend le terme de modélisation au sens très large puisqu'il considère qu'on retrouve aussi bien des actes de modélisation à travers des questions de la vie quotidienne (compter son argent, réfléchir à son avenir, etc.) qu'à travers des activités scientifiques (d'ingénieur ou de chercheur). Il insiste notamment sur le fait d'apprendre à modéliser avec les mathématiques (et non apprendre les mathématiques avec la modélisation).

Mots clés : Curricula – Modelling – Mathématiques fonctionnelles – Distance de transfert – Évaluation

Article : Enhancing the image of mathematics by association with simple pleasures from real world contexts

Auteurs : Robyn Pierce, University of Ballarat, Australie

Kaye Stacey, University of Melbourne, Australie

Source : ZDM 2006, vol. 38(3), p. 214-225

Lecteur : Marie-Jeanne Perrin-Glorian

Question traitée : La motivation suscitée chez les élèves par des situations issues du réel.

Finalité de l'article : L'article vise à montrer qu'une raison majeure et négligée des enseignants pour choisir des situations du monde réel est de jouer sur un « effet halo » pour rendre plus positive l'attitude des élèves vis-à-vis des mathématiques et obtenir l'engagement des élèves en suscitant du plaisir.

Nature du contexte : L'argument s'appuie sur des interviews d'élèves et de professeurs et des observations dans l'école secondaire dans le cadres d'un projet d'amélioration de l'enseignement dans l'école moyenne en utilisant des problèmes du monde réel et sur une étude spécifique.

Public visé par l'étude : Professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire et formateurs de professeurs. Chercheurs en didactique des mathématiques.

Cadre théorique : Des critères de motivation définis dans des travaux antérieurs, notamment Blum et Niss (1989) et Burkhard (1981), aspects affectifs de l'apprentissage des mathématiques : effet halo (Thorndike, 1920), repris par Nibbett et Wilson (1977).

Place et statut de la réalité et des mathématiques : L'article relate surtout les croyances et pratiques des professeurs dans ce domaine et l'usage de la réalité pour agir sur le plan affectif dans le but de favoriser l'apprentissage des notions en les associant à des expériences et souvenirs positifs.

Mots clés : Motivation des élèves – pratiques des professeurs – mathématiques et vie quotidienne – formation des professeurs – exemples de problèmes utilisés en classe.

Article : Teachers' Ways of Listening and responding to Students' Emerging Mathematical Models

Auteur : Helen M. Doerr

Source : ZDM 2006 Vol.38 (3) pp. 255-268

Lecteur : Jacques Douaire

Question traitée : Cette étude se centre sur deux aspects :

- quand, comment et jusqu'où ces enseignants regardèrent et interprétèrent les façons de penser des étudiants relativement aux fonctions exponentielles ?
- comment répondent-ils dans leurs pratiques de classe aux réflexions de leurs élèves ?

Finalité de l'article : L'analyse montre qu'il y a des variations importantes dans l'écoute par ces enseignants des modèles mathématiques émergents de leurs élèves et dans les réponses qu'ils y apportent.

Nature du contexte : Cet article présente les résultats d'une étude sur les pratiques de quatre professeurs du secondaire qui ont engagé leurs élèves (16 - 18 ans) dans une première élaboration de modèles mathématiques de la croissance exponentielle.

Public visé par l'étude : professeurs de mathématiques.

Cadre théorique : L'auteur fait référence notamment aux travaux de Davis qui souligne trois fonctions dans l'écoute portée par les enseignants : manière d'évaluation pour en déterminer la justesse, interprétation pour comprendre le sens, approche herméneutique en vue d'une négociation pour que les étudiants révisent leurs propres points de vue, ainsi qu'aux travaux de Heid pour qui les enseignants utilisent les échanges plus pour amener à la bonne réponse que pour enquêter sur la pensée profonde et plutôt sur ce qu'ils attendent.

Place et statut de la réalité et des mathématiques : La tâche proposée aux étudiants porte sur l'investigation du doublement des sommes d'argent sur un échiquier quand un penny est placé sur la première case, deux sur la seconde... Après un calcul pour les quatre première case la valeur de la dernière est demandée.

Mots clés : modélisation mathématique – écoute – rôles de l'enseignant – stratégies pédagogiques – effets d'une formation.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION.....	1
LES APPROCHES PAR COMPÉTENCES.....	5
What are modelling competencies?.....	7
Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process	13
Simple Thinking using Complex Math vs. Complex Thinking using Simple Math- A study using Model Eliciting Activities to compare students' abilities in standardized tests to their modelling abilities	19
Functions: A modelling tool in Mathematics and Science	27
Faces of mathematical modeling.....	33
LES APPROCHES « CRITIQUES »	39
Mathematical Modelling in classroom: a socio-critical and discursive perspective	41
Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics	49
Modeling conceptions revisited	59
LES APPROCHES « UTILISATRICES »	67
Modelling in Mathematics Classrooms : reflections on past developments and the future ..	69
Enhancing the image of mathematics by association with simple pleasures from real world contexts.....	75
Teachers' ways of listening and responding to students' emerging mathematical models ..	83
FICHES DESCRIPTIVES SYNTHÉTIQUES	93
TABLE DES MATIÈRES	105

TITRE :

La modélisation dans l'enseignement des mathématiques - Mise en perspective critique.

COORDINATEURS :

Alain KUZNIAK, Laurent VIVIER

AUTEUR/S :

Caroline BULF, Richard CABASSUT, Bernadette DENYS, Jacques DOUAIRE, Marie-Pierre GALISSON, Ana MESQUITA, Alain KUZNIAK, Cécile OUVRIER-BUFFET, Bernard PARZYSZ, Marie-Jeanne PERRIN-GLORIAN, André PRESSIAT, Laurent VIVIER.

RESUME :

Les mathématiques participent à une modélisation de la réalité qui permet un contrôle, au moins partiel, du monde réel. Ainsi, la compréhension de l'utilité des mathématiques pour la société ne peut s'affranchir d'une référence à un processus de modélisation. Les récentes réformes des curricula et de nombreuses recherches en didactique des mathématiques mettent en avant la notion de modélisation. Mais s'il semble y avoir un consensus actuel sur l'importance de la modélisation dans l'enseignement des mathématiques, il n'en reste pas moins que les perspectives peuvent considérablement varier. Par exemple, doit-on enseigner la modélisation pour elle-même ? Cette position est celle des partisans d'une approche par compétences s'appuyant essentiellement sur un cycle de modélisation. Mais d'autres approches existent qui se positionnent différemment, avec parfois de grandes différences, comme par exemple la notion de modélisation dans le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique. Cette richesse de points de vue se retrouve dans deux numéros spéciaux de la revue ZDM (2006) où sont proposés des travaux de chercheurs spécialistes de la modélisation. Ce numéro des cahiers du LDAR reprend la plupart des articles publiés dans la revue ZDM et les réorganise en trois parties selon leur approche de la modélisation : par compétences, critique et utilisatrice. Chaque article est résumé et critiqué afin de le rendre facilement accessible à un public étendu de lecteur. Fruit d'un travail collectif, cette publication donne rapidement un panorama d'un important champ de la recherche en didactique des mathématiques.

MOTS CLES :

Modélisation, cycle de modélisation, compétence, réalité, mathématiques.