

Modélisation d'un feu de forêt

Master pro de didactique de mathématiques
Mémoire de modélisation

Murielle Jarry et Pierre Campet

murielle.jarry@orange.fr ; campet.pierre@free.fr



Juin 2010

Table des matières

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introduction | 2 |
| 1.1 | Un modèle pour décrire les incendies de forêt | 2 |
| 1.2 | Un phénomène de percolation | 3 |
| 1.3 | Problématique | 3 |
| 2 | Définition, historique et théorie des problèmes de percolation | 5 |
| 2.1 | Définition | 5 |
| 2.2 | Historique et quelques exemples de percolation | 5 |
| 2.2.1 | Le café | 5 |
| 2.2.2 | De l'archipel au continent | 6 |
| 2.2.3 | Réseau de communication | 6 |
| 2.2.4 | La transition sol-gel | 6 |
| 2.2.5 | Les cheveux qui s'emmêlent | 7 |
| 2.3 | Quelques résultats théoriques | 7 |
| 2.3.1 | Graphe associé à notre forêt | 7 |
| 2.3.2 | Graphe planaire et dual d'un graphe planaire | 8 |
| 2.3.3 | Percolation de site, percolation de lien | 9 |
| 2.3.4 | Un résultat théorique | 9 |
| 3 | Simulations | 11 |
| 3.1 | Un pavage carré avec quatre directions de propagation | 11 |
| 3.1.1 | Étude de l'étendue des feux | 11 |
| 3.1.2 | Étude du nombre de zones en feu à chaque étape | 13 |
| 3.2 | Un pavage carré avec huit directions de propagation | 15 |
| 3.2.1 | Etude de l'étendue des feux | 15 |
| 3.2.2 | Nombre de zones en feu pour $p \geq 0,3$ | 17 |
| 4 | Conclusion | 18 |
| A | Annexes | 20 |
| A.1 | Le code source de notre programme | 20 |
| A.2 | Graphe dual sur Wikipédia | 24 |
| A.3 | Activités élèves | 25 |

Chapitre 1

Introduction

1.1 Un modèle pour décrire les incendies de forêt

Lors de nos lectures dans le but de choisir notre thème de modélisation, nous avons été interpellés par un article d'Accromath [1]. Cet article d'une revue de vulgarisation présente un modèle pour simuler des feux de forêt. Nous reproduisons ici un extrait de cet article :

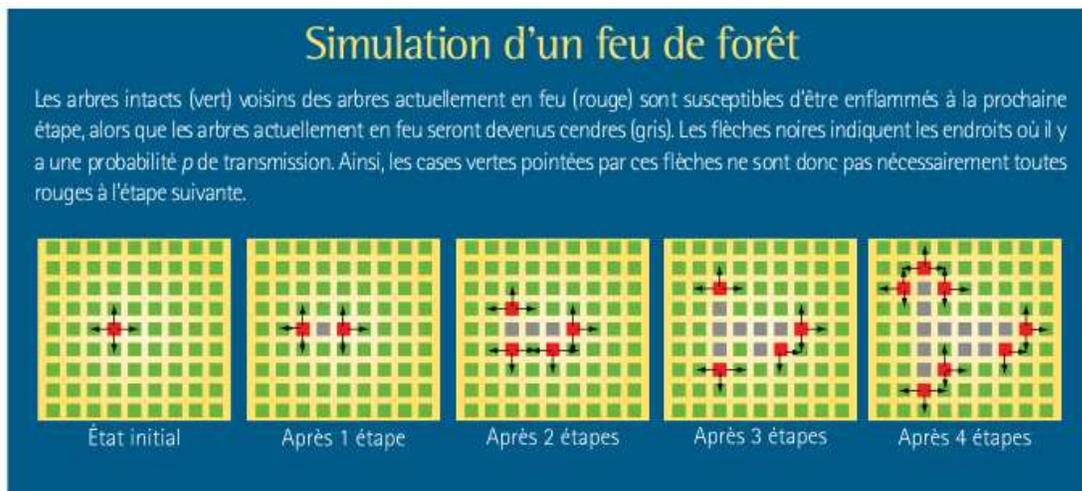


FIG. 1.1 – Quatre étapes successives d'un feu

Clairement le modèle proposé implique de fortes hypothèses :

La structure de la forêt La structure de la forêt est, dans cette modélisation, totalement homogène. En effet les arbres sont espacés de manière régulière, ils sont de même nature - essence du bois, taux d'humidité dans l'arbre, ...- et le modèle étant en deux dimensions on peut aussi considérer que les arbres sont de même taille.

La structure du feu Là encore, les hypothèses de modélisation sont extrêmement fortes. Le feu a la même probabilité de se propager dans chacune des directions. Si la combustion a lieu, elle est complète.

La discrétisation du temps On voit bien dans la figure 1.1 que le temps est vu comme un paramètre discret. La combustion d'un arbre n'est pas continue mais instantanée.

1.2 Un phénomène de percolation

Une fois le modèle proposé, on peut lire :

Si la probabilité p qu'un arbre prenne feu est inférieure à $\frac{1}{2}$, un nombre relativement petit d'arbres brûlera avant que le processus ne s'arrête de lui-même, c'est-à-dire avant qu'il ne reste plus d'arbres en feu. Cependant, au dessus du seuil, une fraction importante du réseau peut être brûlée, et ce, aussi grande que soit la grille.

Pour ces raisons le phénomène est dit de percolation et $p_c = \frac{1}{2}$ est appelé seuil de percolation. Particulièrement surpris par le résultat annoncé et illustré par la figure 1.2, nous avons décidé de mettre en œuvre une simulation pour vérifier cette affirmation.

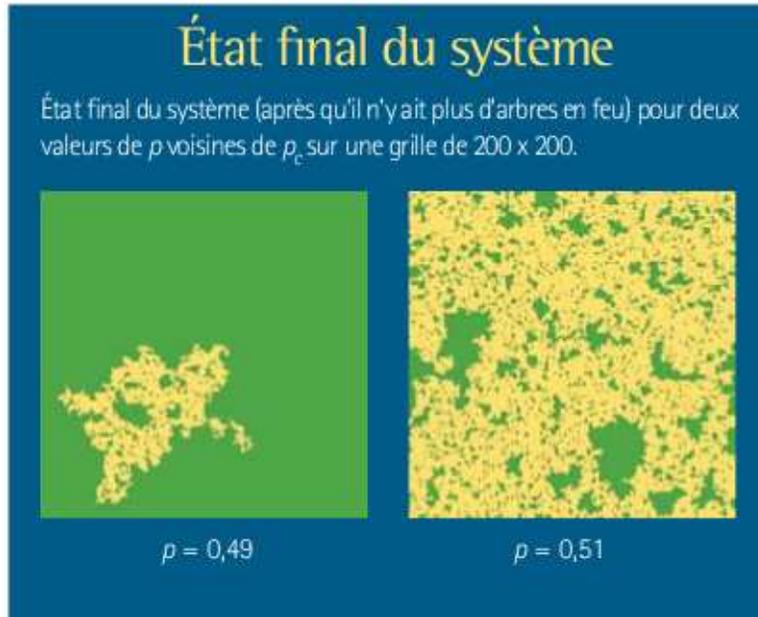
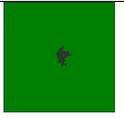
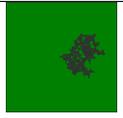
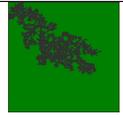
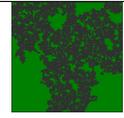
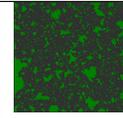
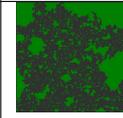


FIG. 1.2 – États finaux après la propagation d'un feu

Voici un tableau synthétisant nos premiers résultats :

| Probabilité | Cartes 200×200 | | | | | |
|--|---|---|---|--|---|---|
| | $p = 0,49$ | | | $p = 0,51$ | | |
| | Cas 1 | Cas 2 | Cas 3 | Cas 1 | Cas 2 | Cas 3 |
| Durée du feu en nombre d'étapes | 47 | 173 | 358 | 461 | 474 | 611 |
| Nombre de zones brûlées à l'état final | 452 | 2573 | 7068 | 21467 | 30101 | 24428 |
| État final du système |  |  |  |  |  |  |

1.3 Problématique

Dès ces premières simulations nous avons pu déterminer notre problématique :

Localiser les seuils de percolation. Nous nous sommes fixés comme objectif de localiser par des simulations les seuils de percolation dans deux cas dont un pour lequel nous ne le connaissions pas. Très rapidement il a fallu définir clairement les protocoles que nous voulions mettre en place en s'adaptant aux contraintes du problème. Pour cela il nous a fallu comprendre certaines caractéristiques des phénomènes de percolation. Ainsi certains résultats théoriques indiquent qu'en dessous du seuil de percolation, on ne peut avoir d'amas de taille infinie. Nous avons donc dans certains cas augmenté la taille des cartes pour que la frontière ne soit pas atteinte. Dans la partie 2 nous avons exposé le résultat de nos recherches bibliographiques.

Proposer sur ce modèle des hypothèses. Nous voulions aussi proposer une méthode pour prévoir le comportement du feu sous certaines hypothèses favorables. Dans la partie 3 nous proposons une estimation simple du nombre d'arbres carbonisés lorsque la probabilité est supérieure au seuil de percolation.

Repérer les difficultés d'utilisation des statistiques. Nous avons été confrontés à la difficulté de traiter de manière statistique le résultat de nos simulations. Durant toute notre étude, nous avons cherché à repérer les difficultés liées à ce traitement car nos simulations s'éloignent des exemples didactiques traités dans les manuels.

Chapitre 2

Définition, historique et théorie des problèmes de percolation

2.1 Définition

On peut donner la définition suivante d'un phénomène de percolation¹ :

La percolation est un problème de communication qui se pose dans un milieu étendu dans lequel sont distribués régulièrement un grand nombre de « sites » susceptibles de relayer localement une information. Ceux-ci communiquent entre eux par des liens dont l'efficacité est aléatoire.

Le modèle proposé dans l'article d'Accromath répond à cette définition. Le feu se transmet localement d'arbre en arbre et la possibilité de transmission est aléatoire. La forêt est un milieu étendu et un grand nombre d'arbres constitue la forêt. Enfin, la transmission du feu peut être vue comme un problème de communication.

2.2 Historique et quelques exemples de percolation

Mathématicien anglais, John Hammersley (1920-2004) a proposé en 1956 le concept de percolation. Il s'intéressait aux systèmes composés d'un grand nombre d'objets qui peuvent être reliés ou non entre eux, la liaison étant aléatoire. L'expérimentation montrait un phénomène de seuil : en dessous, les objets sont réunis en petits amas dispersés, au dessus tout, ou tout au moins de grosses parties se relient.

Depuis, de nombreux mathématiciens ont travaillé dans ce domaine et ce problème est entré dans le cadre plus général des transitions de phases.

Nous donnons, dans cette partie quelques exemples², pour illustrer le concept.

2.2.1 Le café

L'exemple du café (Lesne, 1996) a donné son nom au concept. Le percolateur est une machine à café où la « force » du café s'obtient en serrant plus ou moins le filtre de l'appareil. Quand on serre le filtre, le marc de café devient plus dense. Le temps pour que l'eau traverse

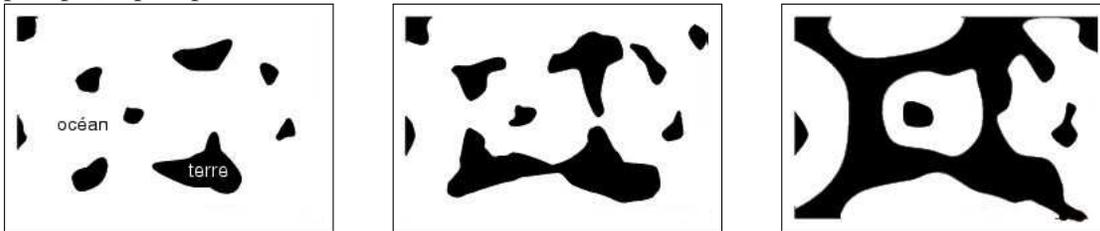
¹Article sur la percolation de l'Encyclopædia Universalis[8]

²Les exemples et les illustrations de cette partie sont tirés d'une thèse de Stéphane Pajot[6] et d'un article de Pierre Gilles de Gennes[4]

le café dépend de cette densité. Si le temps est plus long, le café est plus fort. Mais, au dessus d'une certaine densité, l'eau ne peut plus traverser le filtre. Cette densité est appelée « seuil de percolation ». On peut modéliser par un réseau de canaux entre les particules de café, « liaisons » ouvertes ou fermées de façon aléatoire (Zallen, 1983). Si la densité augmente, le nombre de canaux fermés augmente et l'eau passe alors plus difficilement. Le seuil de percolation est atteint lorsque qu'il n'existe plus de chemins permettant l'écoulement de l'eau à travers les canaux ouverts.

2.2.2 De l'archipel au continent

Avec l'abaissement du niveau de la mer, le passage d'un archipel d'îles à un système continental offre un autre exemple de transition de percolation (De Gennes, 1976.). Au début, on ne peut pas, à pied passer d'une île à l'autre.



Puis, les îles grandissent et certaines fusionnent (figure 2). On peut marcher plus, mais on est encore confiné dans chaque île, jusqu'au moment où le niveau de l'océan atteint une valeur critique (figure 3). On obtient alors un continent avec de nombreux lacs, mais on peut aller partout en contournant les lacs. La transition entre un système d'îles et un continent est appelée « transition de percolation » et la valeur critique du niveau océanique réalisant l'apparition du continent correspond au seuil de percolation.

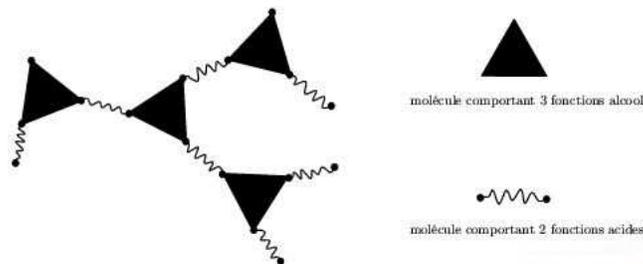
2.2.3 Réseau de communication

Quand le nombre de liaisons coupées dépasse un certain stade (exemple : antennes relais en panne pour des réseaux de communication ou routes coupées par des manifestants pour des réseaux routiers), il devient impossible de communiquer entre deux points éloignés. La valeur p_c associée au pourcentage critique de liaisons actives nécessaires pour que deux points quelconques soient reliés, est appelée « seuil de percolation ».

2.2.4 La transition sol-gel

La transition sol-gel intervient lorsque l'on passe de l'état liquide à l'état de gel (gélatine, gels d'alumine, ...)

La transition sol-gel trouve ses origines dans la physique des molécules. Elle agit par exemple dans la polymérisation, c'est-à-dire la fabrication d'une structure polymère à partir d'une solution de monomères (Frisch et Hammersley, 1963). Les polymères sont de longues chaînes organiques que l'on obtient en faisant varier un paramètre physique. Par condensation, on peut ainsi faire réagir des molécules porteuses de fonctions acides avec des molécules porteuses de fonctions alcools.



Le début de la réaction entraîne la formation de chaînes complexes, mais toujours courtes. Comme pour les îles, on parle d'« amas finis ». Au fur et à mesure de la gélification, les liens chimiques entre molécules voisines s'activent pour produire des amas de plus en plus larges. Lorsque la fraction p d'acide ayant réagi dépasse un certain seuil p_c , il apparaît une macromolécule géante (amas infini) dont la taille n'est restreinte que par la taille du récipient. En d'autres termes, le mélange de molécules qui au départ était liquide (solution) devient une gelée résistante à la traction (gel), au passage du seuil de percolation (De Gennes, 1976).

2.2.5 Les cheveux qui s'emmêlent

Disons que deux cheveux sont associés dans un même « amas » quand l'un est enroulé au moins une fois autour de l'autre. En présence d'un vent faible, on a surtout de petits amas. En présence d'un vent plus fort, on voit apparaître un amas « infini » : si on prend un cheveu, il vient toute une mèche !!

Nombreux sont les domaines où on peut appliquer le concept de percolation : citons encore les épidémies, la conduction dans certains types d'alliages, l'aimantation, le masque à gaz.

2.3 Quelques résultats théoriques

Une première recherche sur la base de données Science Direct³ nous donne 38201 articles pour une recherche avec *percolation* et 156 pour *percolation fire forest*. De nombreux travaux ont été menés et sont encore menés sur ces thèmes.

Dans un article⁴ nous avons retrouvé le seuil de percolation de $\frac{1}{2}$ pour un réseau carré et nous avons découvert deux autres seuils de percolation dans le cas de réseaux triangulaires et hexagonaux, respectivement $2\sin(\frac{\pi}{18})$ et $1 - 2\sin(\frac{\pi}{18})$.

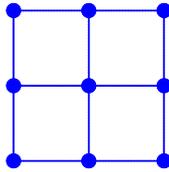
Le but des paragraphes suivants est de donner une idée de la démonstration de $p_c = \frac{1}{2}$ dans le cas d'un réseau carré et du lien entre les deux seuils de percolation des réseaux triangulaires et hexagonaux. Pour cela nous présenterons dans un premier temps quelques définitions de la théorie des graphes. Pour toute la suite, les graphes que nous envisageons sont non orientés.

2.3.1 Graphe associé à notre forêt

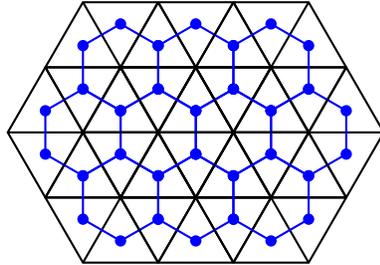
La structure de notre forêt peut être schématisée par un graphe où les *nœuds* sont les arbres et où les arbres voisins d'un arbre sont reliés à celui-ci par des *arêtes*. Ainsi une forêt carrée avec 9 arbres est représentée par le schéma suivant :

³Banque de données d'articles scientifique : <http://www.sciencedirect.com>

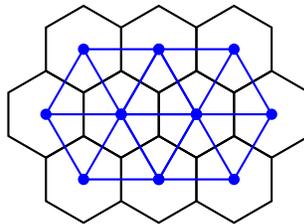
⁴T. Beer et I. G. Enting [2]



Si l'on considère maintenant une forêt où les arbres sont représentés par des triangles et sont donc voisins de trois arbres, on obtient le graphe bleu suivant :



Pour une forêt où les arbres sont représentés par des hexagones, on obtient le graphe suivant :



2.3.2 Graphe planaire et dual d'un graphe planaire

Les trois graphes observés dans la partie précédente sont planaires⁵.

Définition 1 *Un graphe est planaire s'il en existe une représentation géométrique dans le plan telle que les représentations des arêtes ne se coupent pas.*

À partir d'un graphe planaire \mathcal{G} on peut définir son graphe dual \mathcal{G}' ⁶ :

Définition 2

1. On choisit un point dans chaque face⁷ de \mathcal{G} . Ces points sont les nœuds de \mathcal{G}' ;
2. chaque fois qu'une arête a de \mathcal{G} est frontalière à deux faces distinctes f_1 et f_2 , on joint les sommets de \mathcal{G}' situés dans f_1 et f_2 par une arête coupant a ;

⁵Article sur la théories des graphes de l'Encyclopædia Universalis[7]

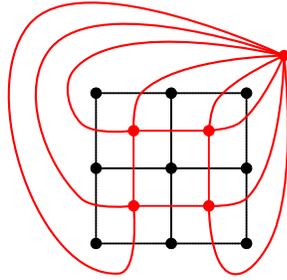
⁶Dictionnaire des mathématiques [3]

Nous avons dans un premier temps trouvé une autre définition d'un graphe planaire sur Wikipédia pour laquelle nous menons une succincte analyse en annexe

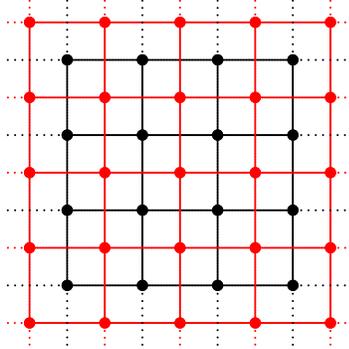
⁷les faces n'ont de sens que si le graphe est planaire

3. chaque fois qu'une arête a de \mathcal{G} aboutit à un sommet pendant situé dans une face f , on trace à partir du sommet de \mathcal{G}' situé dans f une boucle coupant a .

Voici en rouge le graphe dual du graphe planaire à neuf nœuds :



Si maintenant on considère le graphe d'une forêt de même structure mais de taille infinie - en noir -, on obtient le graphe dual - en rouge - suivant :



De même le graphe dual d'une forêt infinie où les arbres sont représentés par des triangles équilatéraux est le graphe d'une forêt infinie où les arbres sont représentés par des hexagones et réciproquement.

2.3.3 Percolation de site, percolation de lien

Lors de nos recherches, pour le cas d'un réseau carré, une valeur de $p_c = 0.59$ était fréquemment donnée. Cette valeur correspond aussi à une valeur sur réseau carré, mais dans le cas d'une percolation de site. Pour notre feu de forêt, une percolation de site consiste à considérer que la forêt est clairsemée de manière aléatoire. Il existe une certaine probabilité que des arbres (sites) soient absents de la carte mais par contre si un arbre brûle, à la prochaine étape ses voisins seront automatiquement en feu. Nous avons un temps envisagé d'étudier ce cas et le programme fourni en annexe permet avec la fonction `Front_de_Feu` d'effectuer des simulations dans ce cas.

Le cas de figure auquel nous nous sommes restreints s'appelle la percolation de lien. La probabilité porte sur le fait que les liens soient actifs ou non.

On peut imaginer que la réalité tient à la fois de l'un et de l'autre problème.

2.3.4 Un résultat théorique

On peut maintenant se faire une idée de la démonstration de $p_c = \frac{1}{2}$ grâce à la propriété suivante relative à la percolation de lien :

Proposition 1 *La somme des seuils de percolation d'un réseau et de son dual vaut 1.*

Ainsi le réseau carré⁸ étant son propre dual on a $p_c + p_c = 1$ d'où :

$$p_c = \frac{1}{2}$$

Pour les réseaux hexagonaux et triangulaires, on a bien :

$$2\sin\left(\frac{\pi}{18}\right) + (1 - 2\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)) = 1$$

⁸La démonstration de ce seuil a été obtenue par Harry Kesten en 1980.[5]

Chapitre 3

Simulations

Nous avons cherché un moyen de déterminer de manière pratique le seuil de percolation. Pour cela nous avons décidé d'observer dans un premier temps les résultats dans le cas d'un pavage carré avec quatre directions de propagation puisque nous connaissions la valeur théorique. Une fois mis en évidence le caractère critique du phénomène, nous avons décidé de travailler sur le nombre d'arbres en feu à chaque étape.

La deuxième partie de notre travail nous a conduit à effectuer des simulations pour le cas d'un pavage carré avec huit directions de propagation.

Nos simulations ont été effectuées avec le langage Python et le programme joint en annexe. Pour la structure de nos données nous avons choisi un tableau pouvant contenir 3 valeurs - 0 : arbre intact, 1 : arbre en feu et 2 : arbre carbonisé - qui représente la forêt. Rapidement, pour gagner du temps de calcul, nous avons aussi ajouté une liste qui contient les coordonnées des arbres en feu à chaque étape.

3.1 Un pavage carré avec quatre directions de propagation

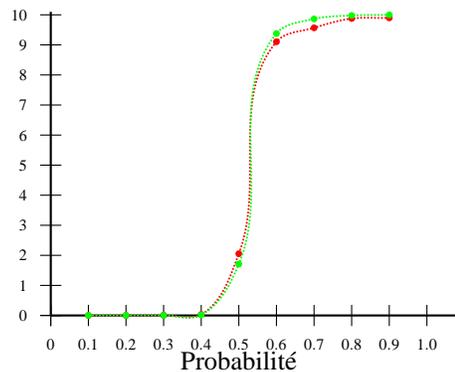
3.1.1 Étude de l'étendue des feux

Dans cette partie nous avons fait varier la probabilité et étudié le nombre final de zones brûlées sur une carte 100×100 . Pour chaque probabilité nous avons fait 100 simulations. Voici les résultats obtenus sous forme d'un tableau :

| Nombre de zones brûlées sur une carte 100 par 100 | | | | | | | | | |
|---|------|------|------|------|--------|--------|--------|--------|--------|
| probabilité | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 |
| Moyenne | 1,56 | 3,07 | 7,49 | 32,1 | 2054,0 | 9104,0 | 9567,3 | 9878,7 | 9898,3 |
| Médiane | 1 | 2 | 4 | 17 | 1709 | 9378 | 9864 | 9978 | 9998 |

On obtient alors le graphique suivant :

Nombre **moyen** et **médian**
de zones en feu en millier

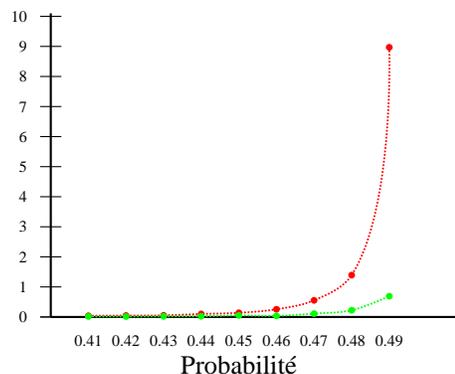


On peut donc affirmer que ces simulations nous ont permis d'observer l'effet de seuil attendu.

Au vu de ces résultats, nous avons fait varier les probabilités par pas de 0,01 entre 0,4 et 0,49. Pour éviter que la frontière ne perturbe les résultats nous avons dû augmenter la taille des cartes. Ainsi pour chaque probabilité, les résultats donnés ci-dessous ont été obtenus pour 100 tirages sans que la frontière de la carte n'ait jamais été atteinte. Évidemment nous n'avons pas pu appliquer cette méthode pour une probabilité de 0,5 puisque dans ce cas, quelle que soit la taille de la carte certains feux vont se propager jusqu'à la frontière.

| Probabilité | 0.41 | 0.42 | 0.43 | 0.44 | 0.45 | 0.46 | 0.47 | 0.48 | 0.49 |
|-------------------|-------------|------|------|-------------|-------|------|-------------|------|------|
| Taille des cartes | 100 par 100 | | | 400 par 400 | | | 800 par 800 | | |
| Moyenne | 39 | 47 | 53 | 101 | 138.5 | 256 | 553 | 1393 | 8970 |
| Médiane | 18 | 13.5 | 21.5 | 24 | 52 | 37 | 112 | 223 | 692 |

Nombre **moyen** et **médian**
de zones en feu en millier

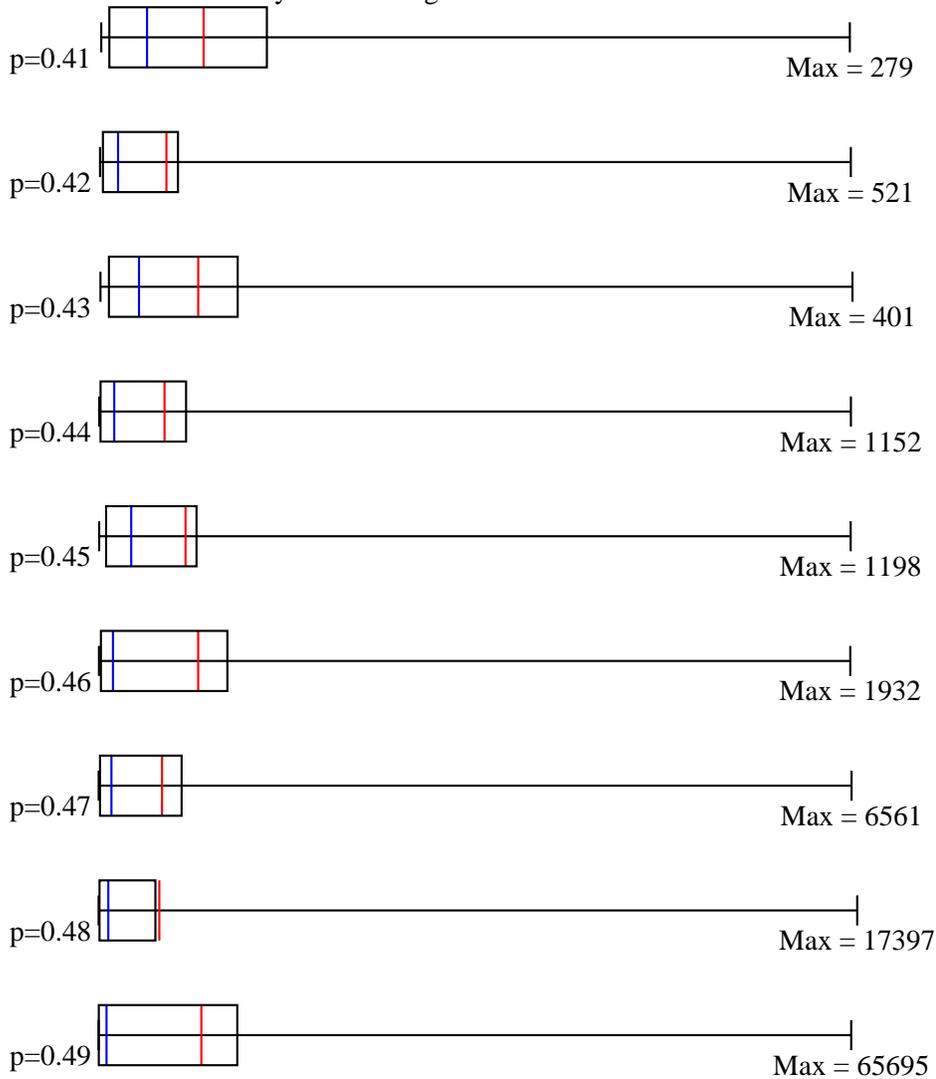


On voit que la moyenne et la médiane augmentent rapidement au voisinage de 0,5. La médiane est inférieure à la moyenne. On peut expliquer ce phénomène par certains feux qui vont prendre une grande ampleur et donc être des valeurs extrêmes influençant la moyenne.

Signalons également que pour toutes ces séries de tests, le minimum a toujours été 1. Cette valeur correspond à l'arbre allumé au début du feu.

La médiane est pour cet intervalle, inférieure à la moyenne. On observe un écart croissant entre moyenne et médiane. Nous nous sommes donc intéressés à la forme des boîtes à moustaches avec l'espoir d'observer certaines évolutions à l'approche de 0,5 :

Mediane en bleu et moyenne en rouge.



Rien de clair n'est ressorti à nos yeux. Il aurait peut-être été plus intéressant de calculer moyenne médiane et quartile en excluant le dernier décile, le premier ou les deux.

3.1.2 Étude du nombre de zones en feu à chaque étape

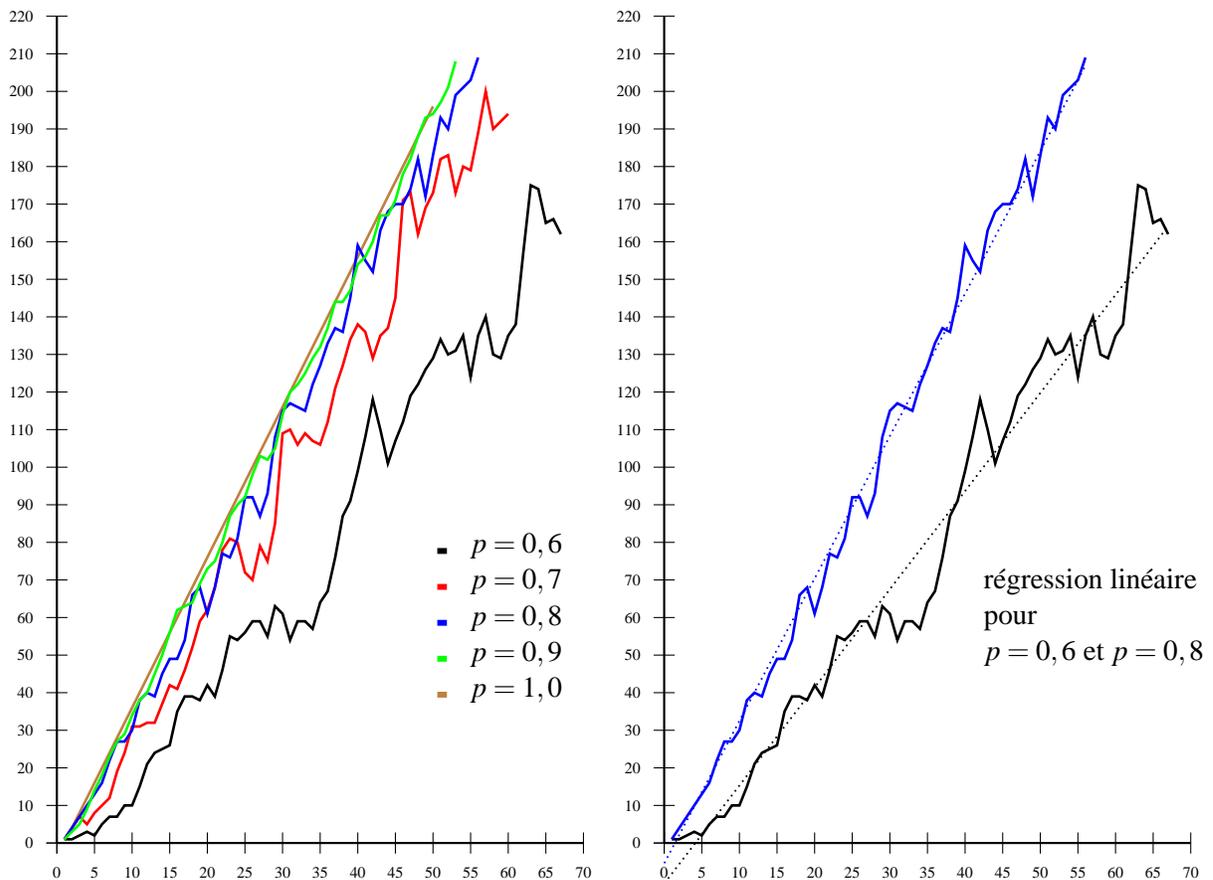
La deuxième phase de nos simulations a consisté à étudier le nombre d'arbres en feu à chaque étape. L'idée est d'étudier dans ce cas l'évolution du feu.

Nombre de zones en feu pour $p \geq 0,6$

Pour $p \geq 0,6$ la frontière est fréquemment atteinte. Au-delà de l'étape où la frontière est atteinte, le nombre d'arbres en feu diminue puisque le feu n'a plus d'arbre pour se propager. Pour éviter ce problème, nous avons mis en place le protocole suivant, permettant de choisir un représentant pour des forêts de taille 100×100 .

Pour 20 feux, nous notons à chaque étape le nombre d'arbres en feu ainsi que l'instant où la frontière est atteinte pour la première fois. Nous calculons la médiane de cet instant où la frontière est atteinte. Pour les feux correspondants à cette médiane, nous calculons la durée totale du feu médiane. Ainsi nous obtenons le représentant le plus « central » possible.

Nombre d'arbres en feu



Le cas critique $p = 1$ correspond à une droite d'équation $y = 4x$. Dans ce cas la frontière est atteinte en 50 étapes. Ce cas nous a incité à effectuer une régression linéaire pour chaque représentant.

| Probabilité | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 |
|----------------------------|-----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| Coefficient linéaire | 2,611 | 3,460 | 3,790 | 3,911 |
| Equation de droite | $y = 2,611x - 10,809$ | $y = 3,460x - 6,980$ | $y = 3,790x - 5,412$ | $y = 3,911x - 4,000$ |
| Coefficient de corrélation | 0,987 | 0,995 | 0,998 | 1,000 |

Au vu de ces résultats il semble raisonnable d'envisager que le nombre de zones en feux à chaque étape augmente de manière proportionnelle. Sous cette hypothèse, et dans une forêt de taille infinie, on peut estimer le nombre C_n d'arbres carbonisés à l'étape $n + 1$.

Si le nombre d'arbres en feu à l'étape n est $U_n = an + b$.

$$C_n = \sum_{k=1}^n U_k = \sum_{k=1}^n (ak + b) = nb + a \sum_{k=1}^n k = nb + a \frac{n(n+1)}{2}$$

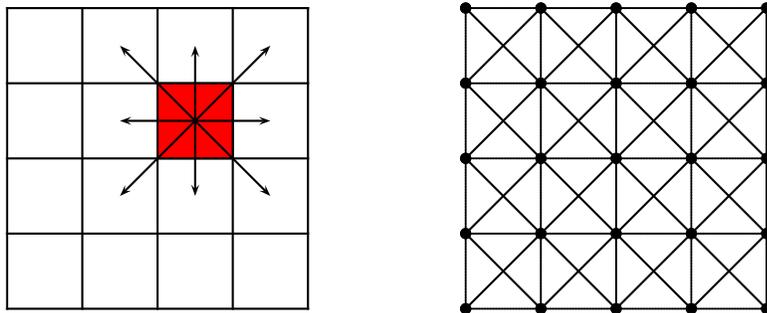
Signalons que le début du feu est important. Dans les cas où le nombre d'arbres en feu est petit on peut observer un arrêt du feu. La regression linéaire n'a dans ce cas aucun intérêt. Cette observation nous a d'ailleurs inspiré quelques applications didactiques proposées en annexe.

Durée du feu pour $p \leq 0,4$

Pour des probabilités inférieures à 0,4 le choix d'un représentant ne s'avère pas judicieux. Il faudrait plutôt caractériser la durée du feu mais nous n'avons pas eu le temps de mener cette étude.

3.2 Un pavage carré avec huit directions de propagation

La propagation se fait dans ce cas dans huit directions, le pavage étant toujours carré. Voici ci-dessous une zone en feu où les possibilités de propagation sont représentées par des flèches et le graphe associé à une telle forêt.



Le graphe ainsi obtenu n'est pas planaire.¹ Nous n'avons pas trouvé la valeur du seuil de percolation dans ce cas lors de nos lectures. Nous avons donc effectué des simulations pour essayer de déterminer ce seuil.

3.2.1 Etude de l'étendue des feux

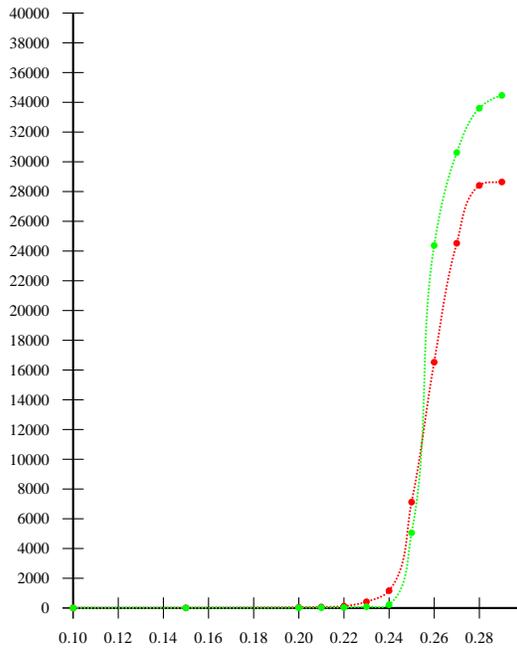
Voici les résultats que nous avons obtenus. Pour chaque valeur de p , 100 simulations ont été effectuées.

| Nombre de zones brûlées sur une carte 200 par 200 | | | | | | | | | | | | |
|---|------|------|------|------|------|------|------|------|-------|-------|-------|-------|
| probabilité | 0,10 | 0,15 | 0,20 | 0,21 | 0,22 | 0,23 | 0,24 | 0,25 | 0,26 | 0,27 | 0,28 | 0,29 |
| Moyenne | 3 | 8 | 42 | 65 | 128 | 419 | 1166 | 7121 | 16526 | 24524 | 28412 | 28644 |
| Médiane | 2 | 5 | 12 | 25 | 34 | 86 | 217 | 5033 | 24374 | 30618 | 33061 | 34464 |

¹On peut le démontrer en utilisant les caractérisations de Kuratowski ou de Wagner[7] à partir du moment où le nombre d'arbres n vérifie $\sqrt{n} > 3$.

Evidemment la valeur $p = 0,25$ est particulièrement attractive : deux fois plus de directions de propagation pour un même pavage et un seuil de percolation deux fois plus petit.

Nombre moyen et médian de zones en feu

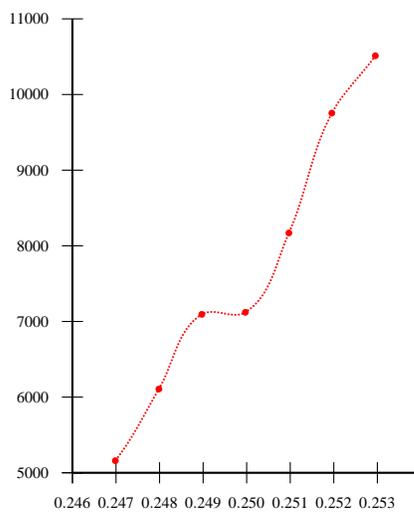


Nous avons regardé d'un peu plus près le comportement autour de 0,25.

| Nombre de zones brûlées sur une carte 200 par 200 | | | | | | | |
|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| probabilité | 0,247 | 0,248 | 0,249 | 0,250 | 0,251 | 0,252 | 0,253 |
| Moyenne | 5160 | 6107 | 7094 | 7121 | 8170 | 9754 | 10512 |
| Médiane | 1467 | 4110 | 6094 | 5033 | 5674 | 8786 | 8900 |

On observe une fois encore que la médiane se rapproche rapidement de la moyenne. Nous obtenons le graphique suivant :

Nombre moyen de zones en feu

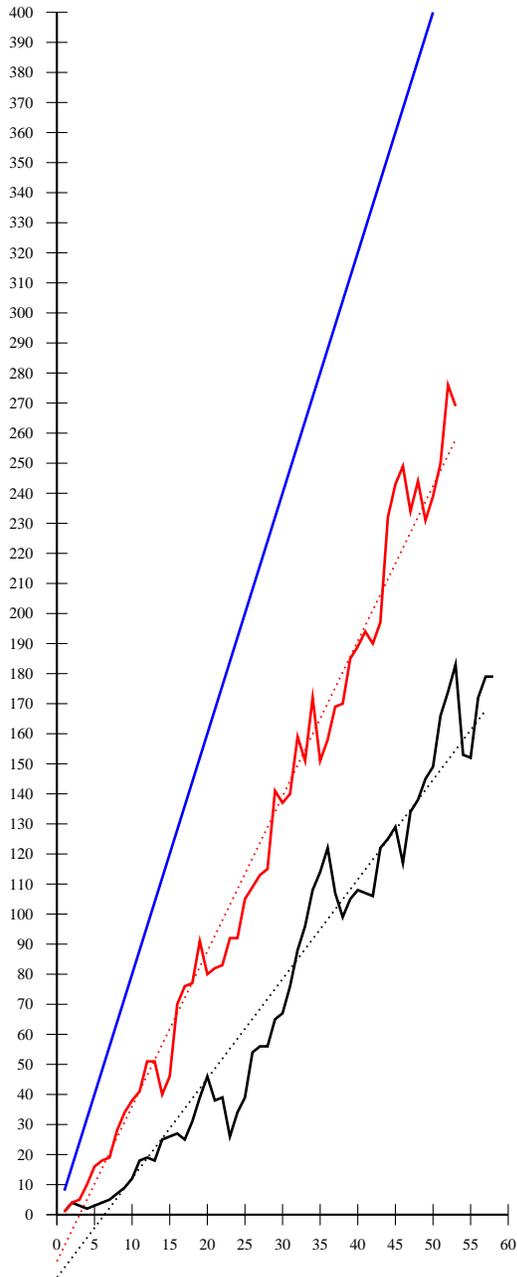


Avec cette précision on arrive aux limites de notre simulation. Augmenter le nombre de simulations pose le problème du temps de calcul. De plus nous ne sommes pas persuadés que

les phénomènes seraient plus faciles à caractériser en raison des problèmes de variabilité.

3.2.2 Nombre de zones en feu pour $p \geq 0,3$

Nous avons mené une étude semblable à celle du cas de 4 directions de propagation que nous résumons avec ce graphique :



| probabilité | équation de droite | coefficient de corrélation |
|-------------|-----------------------|----------------------------|
| 0,3 | $y = 3,312x - 20,970$ | 0,979 |
| 0,35 | $y = 5,160x - 15,592$ | 0,991 |
| 1 | $y = 8x$ | 1 |

Chapitre 4

Conclusion

Nous n'aurions jamais pensé qu'un petit article de vulgarisation nous aurait conduit à rencontrer autant de problèmes intéressants. Nous avons été amenés à travailler de nombreux domaines qui ne nous étaient pas familiers :

- Calcul de probabilité
- Théorie des graphes
- Statistiques
- Utilisation des outils informatique

Nous avons aussi réussi à y trouver des applications originales pour nos élèves, que nous envisageons de tester en classe.

Les difficultés, principalement dans le traitement statistique des données, nous interrogent quant à la pertinence de certaines représentations - boîtes à moustaches - mais aussi quant aux difficultés de proposer des situations issues de problèmes réels.

À titre personnel, ces problèmes liés à des mathématique récentes et difficiles nous ont passionnés.

Bibliographie

- [1] Antoine Allard, Pierre-André Noël, and Louis J. Dubé. Des ponts d'euler à la grippe aviaire. *Accromath*, numéro 4 :24 à 29, Hiver - Printemps 2009. ISSN 1911-0197.
- [2] Tom Beer and I.G. Enting. Fire spread and percolation modelling. *Mathematical and Computer Modelling*, Vol. 13 :77 à 96, April 1990. 0895-7177/90.
- [3] Alain Bouvier, Michel George, and François Le Lionnais. *Dictionnaire des mathématiques*. Presses Universitaires de France, 1996.
- [4] Pierre Gilles de Gennes. La percolation : un concept unificateur. *La recherche*, (72), 1976.
- [5] Harry Kesten. The critical probability of bond percolation on the square lattice equals $\frac{1}{2}$. *Communications in Mathematical Physics*, 74 :41 à 59, 1980.
- [6] Stéphane Pajot. Les concepts fondamentaux du modèle de percolation. Master's thesis, Université de Nantes, 2001.
- [7] Hervé Raynaud. Théorie de graphes. *Encyclopædia Universalis*, 2010.
- [8] Jean Roussenq. Percolation. *Encyclopædia Universalis*, 2010.

Annexe A

Annexes

A.1 Le code source de notre programme

```
# -*- coding: utf-8 -*-
#####
# Petit module pour la percolation d'un feu de forêt #
#####
#Pour la forêt :
#0-vert 1-enflammé 2-Carbonisé
#pavage carré
#
#
# A -> la matrice représentant la forêt
# R -> la liste des zones enflammées

from numpy import *
from random import *
from PIL import Image

#####
# La partie Matrice #
#####
def carre_vide(n):
    "Retourne une matrice vide carré de dimension n"
    A=zeros((n,n),int)
    return A

def border(A,n):
    "Ajoute un tour carbonisé à A"
    ligne=zeros((1,n),int)
    A=concatenate((A,ligne))
    A=concatenate((ligne,A))
    colonne=zeros((n+2,1),int)
    A=concatenate((A,colonne),1)
    A=concatenate((colonne,A),1)
    return A

#####
# La partie des procédures nécessaires à l'algorithme #
#####
#initialisation
def deboiser(A,n,p):
    "Déboise au hasard avec une proba de p pour chaque zone"
    for i in range(1,n+1):
        for j in range(1,n+1):
            if (random()<p):
                A[i,j]=2
    return A

def enflamer(A,n):
    "Allume une zone au hasard"
    x=randint(1,n)
    y=randint(1,n)
    R=[]
    R.append([x,y])
    A[x,y]=1
    return A,R

def enflamer_centre(A,n):
    "Allume la zone au centre"
    A[n/2,n/2]=1
    R=[]
    R.append([n/2,n/2])
    return A,R
```

```

def enflamer_front(A,n):
    "Allume un front de feu au nord"
    R=[]
    for i in range(1,n+1):
        A[1,i]=1
        R.append([1,i])
    return A,R

#Une etape 4 directions pavage carré
def une_etape(A,R,n,p):
    "calcul pour une étape en sortie avec une proba p d'inflammation"
    B=copy(A)
    S=[]
    for feu in R:
        i,j=feu[0],feu[1]
        for k in [-1,1]:
            if ((random()<p) and B[i+k,j]==0):
                B[i+k,j]=1
                S.append([i+k,j])
            if ((random()<p) and B[i,j+k]==0):
                B[i,j+k]=1
                S.append([i,j+k])
        B[i,j]=2
    A=copy(B)
    return A,S

#Une étape 8 directions pavage carré
def une_etape_carre_8(A,R,n,p):
    "calcul pour une étape en sortie avec une proba p d'inflammation 8 directions"
    B=copy(A)
    S=[]
    for feu in R:
        i,j=feu[0],feu[1]
        for k in range(-1,2):
            for l in range(-1,2):
                if ((k!=0 or l!=0):
                    if ((random()<p) and B[i+k,j+l]==0):
                        B[i+k,j+l]=1
                        S.append([i+k,j+l])
        B[i,j]=2
    A=copy(B)
    return A,S

def compte_zone(A,n,k):
    "Compte le nombre de zone de A qui contient la valeur k"
    counteur=0
    for i in range(1,n+1):
        for j in range(1,n+1):
            if (A[i,j]==k):
                counteur+=1 #incrémente counteur
    return counteur

def compte_frontiere_atteinte(liste,longueur):
    "Compte dans la liste de réponse de longueur longueur le nombre de fois où la frontière est atteinte avant la fin"
    resultat=0
    for i in range(longueur):
        if (liste[i][1]==1): resultat+=1
    return resultat

def feu_sur_frontiere(A,n):
    "retourne 1 si un point de la frontière est en feu"
    reponse=0
    for i in range(1,n+1):
        if ((A[i,1]==1) or (A[i,n]==1) or (A[1,i]==1) or (A[n,i]==1)):
            reponse=1
    return reponse

#####
# La Partie Traitement d'Image #
#####
def obtention_image(A,n,nom_de_fichier):
    "Donne l'image de la forêt à partir de la matrice : fichier png"
    # valeurs pour points forêt ,enflamé ,carbonisé
    colors = [(0,128,0),(255,48,29),(48,48,48)]
    # conversion en chaîne de 3 caracteres
    colors = [ ''.join([chr(x) for x in color]) for color in colors ]
    # construction d'une chaîne avec des valeurs issue de A par pixel
    # pour une image de taille nxn
    img_str = ''
    for line in range(n):
        for col in range(n):
            img_str += colors[A[line,col]]
    # creation de l'image d'après cette chaîne
    img = Image.fromstring('RGB',(n,n),img_str)
    # sauvegarde au format PNG
    img.save(nom_de_fichier , 'PNG')
    return True

```

```

#####
# La partie nom de fichier #
#####
def nom_image(n, base_nom):
    "Fonction pour faciliter le montage vidéo"
    Nom=base_nom+(len(base_nom)-len(str(n)))*'0'+str(n)+'.png'
    return Nom

def Nom_de_fichier_csv(n, proba):
    "Crée un nom de fichier"
    Nom='100_tirages_sur_carte_'+str(n)+'x'+str(n)+'_avec_proba_de_'+str(proba)+'.csv'
    return Nom

def ZEF(n, proba, nb_de_cas):
    "Crée le nom du fichier cvs pour l'étude des zones en feu"
    Nom=str(nb_de_cas)+'_etude_de_zones_en_feu_avec_proba_de_'+str(proba)+'.csv'
    return Nom

#####
# Les Programmes #
#####
def Film(n, p, carte):
    "Obtention des images pour une carte nxn et une proba p"
    A=carre_vide(n)
    A=border(A, n)
    A,R=enflamer_centre(A, n)
    print(A)
    print(R)
    i=-1 #compteur pour suivre la chronologie
    while (R!=[]):
        i+=1
        if carte==0:
            A,R=une_etape(A, R, n, p)
            print "étape :", i, " avec ", compte_zone(A, n, 1), " zones en feu et R : ".R
            obtention_image(A, n+2, nom_image(i, "Forêt"))
        if carte==1:
            A,R=une_etape_carre_8(A, R, n, p)
            print "étape :", i, " avec ", compte_zone(A, n, 1), " zones en feu et R : ".R
            obtention_image(A, n+2, nom_image(i, "Forêt"))
    return A

def Zones_en_feu(n, p, carte, nb_de_cas):
    "Etude des zones en feu à chaque étape. Ecriture des résultats dans un fichier"
    f = open(ZEF(n, p, nb_de_cas), "w")
    La_liste=[] # Une liste de liste - chaque sous liste contient le nombre de zones en feu à chaque étape
    Liste_temp_premiere_brulure=[] #Liste où se trouve l'étape de premier contact avec la frontière
    for i in range(nb_de_cas):
        A=carre_vide(n)
        A=border(A, n)
        A,R=enflamer_centre(A, n)
        liste_local=[] # La fameuse sous liste
        k=1 #compteur temps pour suivre la chronologie et donner le premier moment où la frontière est atteinte
        bordbrule=0 #0 si le bord n'a jamais brûlé. S'il a été atteint bordbrule vaut le temps (k)
        while (R!=[]):
            if carte==0:
                k+=1
                A,R=une_etape(A, R, n, p)
                if ((bordbrule==0) and (feu_sur_frontiere(A, n)==1)):
                    bordbrule=k
                    liste_local.append(compte_zone(A, n, 1))
            La_liste.append(liste_local)
            Liste_temp_premiere_brulure.append(bordbrule)
    ### Partie pour la création du fichier csv
    longueurs=[]
    for i in La_liste:
        longueurs.append(len(i))
    longueur_max=max(longueurs)
    for i in range(len(La_liste)): # Dans cette boucle la liste est complétée avec des zéros pour écrire facilement le fichier csv
        for j in range(longueur_max-len(La_liste[i])):
            La_liste[i].append(0)
    ligne=''
    for j in range(len(La_liste)): #Dans cette boucle on écrit les temps de brulure de la frontière
        ligne=ligne+'k'+str(Liste_temp_premiere_brulure[j])+ ' '
    ligne=ligne+"\n"
    f.write(ligne)
    for i in range(longueur_max):
        ligne=''
        for j in range(len(La_liste)):
            ligne=ligne+str(La_liste[j][i])+ ' '
        ligne=ligne+"\n"
        f.write(ligne)
    f.close()
    return La_liste

def Etude_100_tirages(n, p, carte):
    "100 tirage sur carte nxn avec proba p en sortie une liste du nb de carbonisé et 1 si frontière atteinte"
    liste_resultat=[]
    for i in range(100):

```

```

A=carre_vide(n)
A=border(A,n)
A,R=enflamer_centre(A,n)
touche_frontiere=0 #touche_frontiere=(0,1)=(frontiere non atteinte ,frontiere atteinte)
while (R!=[]):
    if (touche_frontiere==0):
        touche_frontiere=feu_sur_frontiere(A,n)
    if (carte==0):
        A,R=une_etape(A,R,n,p)
    if (carte==1):
        A,R=une_etape_carre_8(A,R,n,p)
    liste_resultat.append([compte_zone(A,n,2),touche_frontiere])
return liste_resultat

def variation_proba(n,depart,pas,nb_iteration,carte):
    "variation de la proba en partant de depart en avançant de pas nb_iteration fois"
    frontiere_touche=[]
    for i in range(nb_iteration):
        liste=Etude_100_tirages(n,depart+i*pas,carte)
        print(liste)
        print("Attention la frontiere a ete atteinte ",compte_frontiere_atteinte(liste,100)," fois")
        frontiere_touche.append([depart+i*pas,compte_frontiere_atteinte(liste,100)])
        f=open(Nom_de_fichier_csv(n,depart+i*pas),"w")
        f.write("Nombre de zones carbonne à la fin\n")
        f.write("avec proba de :"+str(depart+i*pas)+"\n")
        for j in range(100):
            f.write(str(liste[j][0])+"\n")
        f.close()
        print(sum(liste)*1.0/(n*n)," % de foret brule pour une proba de ",depart+i*pas)
        print(frontiere_touche)
    return True

def Film_Front(n,p):
    "Obtention des images pour un front de feu allumé en Ouest"
    A=carre_vide(n)
    A=border(A,n)
    A=deboiser(A,n,p)
    A,R=enflamer_front(A,n)
    i=-1 #compteur pour suivre la chronologie
    while (R!=[]):
        i+=1
        A,R=une_etape(A,R,n,1)
        print("étape :",i," avec ",compte_zone(A,n,1)," zones en feu")
        obtention_image(A,n+2,nom_image(i,"Front"))
    return A

```

A.2 Graphe dual sur Wikipédia

Une recherche sur les termes *graphe dual* depuis google donne comme premier résultat la page Wikipédia http://fr.wikipedia.org/wiki/Graphe_dual reproduite ci-dessous :

Graphe dual

En théorie des graphes, le **graphe dual** d'un graphe plongé à l'intérieur d'une surface est défini à l'aide des composantes du complémentaire, reliées par les arêtes du graphe plongé.

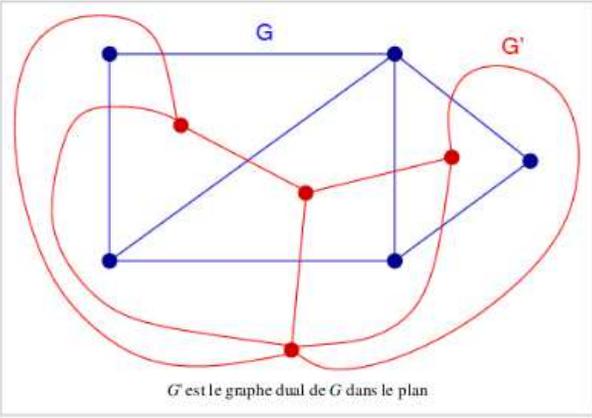
Cette construction généralise la notion de dualité d'un polyèdre.

Cependant, un même graphe abstrait peut avoir des graphes duaux non isomorphes en fonction du plongement choisi, même dans le cas de plongements dans le plan.

Un graphe (plongé) isomorphe à son dual est dit autodual.

Construction

Étant donné un graphe plongé à l'intérieur d'une surface connexe, chaque composante connexe (*cellule*) du complémentaire est muni d'un point définissant un sommet du graphe dual. Chaque arête du graphe initial définit une arête du graphe dual reliant les composantes du complémentaire qui la bordent^[1]. Ces arêtes du graphe dual peuvent être plongées dans la surface de façon à ce que chacune coupe uniquement l'arête correspondante du graphe initial en un seul point.

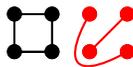


G' est le graphe dual de G dans le plan

Après quelques recherches nous nous sommes aperçus que cette définition est incorrecte. En effet comme nous l'avons dit, la définition de graphe dual porte sur les graphes planaires. De plus la définition fait référence au complémentaire.

Définition 3 *Le complémentaire d'un graphe \mathcal{G} est le graphe qui a les mêmes sommets que \mathcal{G} reliés par une arête si et seulement si ils ne sont pas reliés par une arête dans G*

Voici donc le Tétragone et son complémentaire :



En suivant la définition de l'article Wikipédia, le dual du tétragone aura donc un seul sommet vu que le graphe n'a qu'une composante connexe. Il semble que par complémentaire, l'auteur de cet article fait plus référence à la définition ensembliste du complémentaire, puisqu'il référence la page :

[http://fr.wikipedia.org/wiki/Complémentaire_\(théorie_des_ensembles\)](http://fr.wikipedia.org/wiki/Complémentaire_(théorie_des_ensembles))
mais dans ce cas la définition n'est pas claire.

On pourrait espérer trouver des éclaircissements dans la page discussion or celle-ci est relative à une ancienne version de cet article où il y avait confusion entre graphe dual et line-graphe.

A.3 Activités élèves

QUELQUES PISTES POUR DES ACTIVITÉS À PROPOSER AUX ÉLÈVES, APRÈS LEUR AVOIR PRÉSENTÉ LA MODÉLISATION DU FEU 4 DIRECTIONS.

Activité 1 : utilisation du tableur (à partir de la seconde)

On fait 50 simulations de feux de forêts, avec le modèle exposé dans l'article. On obtient avec la probabilité $p = 0,2$ les résultats ci-contre :

17 ; 2 ; 1 ; 1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 2 ; 1 ; 3 ;
 6 ; 4 ; 2 ; 1 ; 2 ; 1 ; 4 ; 2 ; 1 ; 1 ;
 5 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 5 ; 1 ; 1 ;
 10 ; 2 ; 2 ; 1 ; 1 ; 1 ; 5 ; 1 ; 1 ; 3 ;
 2 ; 2 ; 6 ; 2 ; 3 ; 2 ; 4 ; 16 ; 6 ; 1 ;

Les nombres obtenus désignent le nombre n d'arbres brûlés.

La forêt, carrée, contient 10000 arbres. (100×100)

1. (a) À l'aide d'un tableur, présenter les résultats, puis écrire les formules permettant de calculer la moyenne d'arbres brûlés de ces 50 feux, la médiane, le premier quartile et le troisième quartile.
- (b) À l'aide de la fonction NB.SI, compter le nombre de fois où le feu n'a pas pris et calculer la fréquence correspondante.
Indication : penser au \$ pour bloquer les cellules de départ et d'arrivée
- (c) Faire de même avec $n=2 ; 3 ; 4 ; \dots$ jusqu'au nombre maximum d'arbres brûlés.
- (d) À l'aide de l'assistant graphique, afficher l'histogramme du nombre d'arbres brûlés. Puis faire l'histogramme des fréquences cumulées.
- (e) Comparer la moyenne et la médiane. Comment interpréter cette différence ?
2. On fait maintenant varier la probabilité p .
 - (a) Que se passe-t-il si $p = 0$? Quelle est alors la moyenne d'arbres brûlés ?
 - (b) Mêmes questions avec $p = 1$. Avec notre modélisation, est-on sûr que tous les arbres brûlent, même ceux des coins ?
 - (c) À l'aide de l'assistant graphique, tracer la courbe donnant la moyenne d'arbres brûlés en fonction de la probabilité p , pour p allant de 0,1 à 0,9, à l'aide des résultats suivants :

| p | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 |
|---------|-----|-----|-----|-----|------|------|------|------|------|
| moyenne | 1.6 | 3 | 7.5 | 32 | 2058 | 9197 | 9566 | 9878 | 9898 |

Donner un encadrement de la valeur de p à partir de laquelle on passe du « peu brûlé » au « beaucoup brûlé » ? C'est le seuil de percolation. Quelles informations souhaiteriez-vous pour préciser cette valeur ?

Activité 2 : calculs de probabilités et possibilité de les vérifier à l'aide des simulations fournies par le professeur (ou l'énoncé si l'on n'a pas de vidéo projecteur). (Terminale)
 n désigne toujours le nombre total d'arbres brûlés.

1. Calculer avec $p = 0,1$ la probabilité que le feu ne prenne pas ($n = 1$). Même question avec $p = 0,9$.
2. Soit $p = 0,3$. Quelle est la probabilité que $n = 2$?

Activité 3 : Fluctuation d'échantillonnage.
 Dans cette activité, $p = 0,2$

1. Calculer la probabilité que le nombre n d'arbres brûlés se réduise à 1. (On pourra faire un arbre)
2. On fait 100 simulations de feux de forêt, et en notant n le nombre d'arbres brûlés, on obtient une série de 100 nombres. Cette série de nombres constitue un échantillon de taille 100. On rassemble les résultats dans le tableau suivant :

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|-----------|----|----|----|----|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| effectif | 39 | 19 | 11 | 13 | 6 | 6 | 0 | 0 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| fréquence | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

On relance une deuxième simulation de 100 feux et on obtient un deuxième tableau :

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|-----------|----|----|----|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| effectif | 37 | 20 | 12 | 9 | 8 | 6 | 2 | 3 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| fréquence | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Compléter les lignes fréquence.

3. On s'intéresse à la fréquence correspondant à $n = 1$. Comparer les deux valeurs obtenues pour les deux échantillons. Sachant que la proportion f devrait être la valeur trouvée au 1, est-on, pour ces échantillons dans l'intervalle de confiance pour un risque de 5% ?

Dans les livres de seconde on trouve la propriété suivante :

Proposition 2 Soit un caractère dont la proportion est f . Soit N la taille de l'échantillon. Si $N > 25$ et f compris entre 0,2 et 0,8, il y a 95% des échantillons de taille N qui sont tels que la fréquence du caractère dans l'échantillon appartienne à l'intervalle « de confiance » :

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{N}}; f + \frac{1}{\sqrt{N}} \right]$$

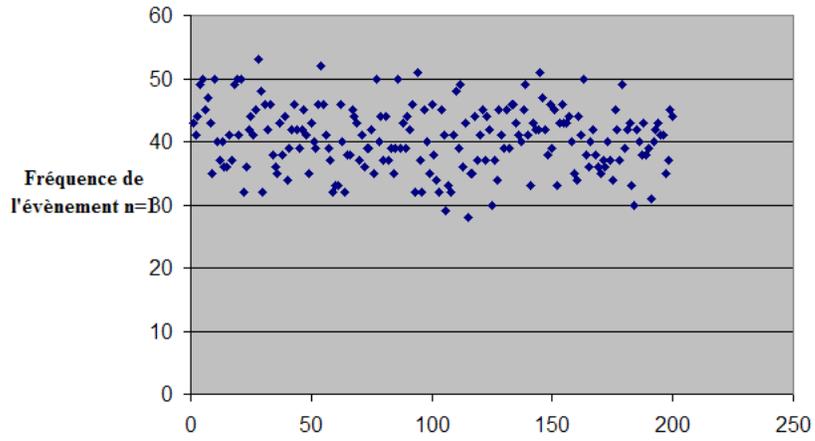
Nous avons vérifié, à l'aide de 200 simulations de taille 100, que cette formule est vérifiée : en effet, sur l'échantillonnage effectué, nous avons 4% (mieux que 5!) d'échantillons en dehors de cet intervalle.

Nous avons réalisé au passage, que la taille de l'échantillon était insuffisante, car l'intervalle [30,5% ; 50,6%] n'est pas précis du tout !

On a aussi constaté que la moyenne \bar{x} sur les 200 échantillons est proche de la valeur f trouvée au 1), puisque \bar{x} vaut environ 40,6% et que $f = 0,2^4$ soit environ 41% ; on a employé la formule basée sur le théorème central limite, prévoyant qu'on a 95% de chance que f appartienne à l'intervalle $[\bar{x} - 1.96\sigma/\sqrt{N}; \bar{x} + 1.96\sigma/\sqrt{N}]$, notre écart type estimé σ étant d'environ 5, on obtient donc que [39,5%,41,6%] contient la vraie valeur f avec une probabilité de 95%. Notre « bon » résultat était donc prévisible.

Pour finir, voici sur 200 échantillons, le nuage de points représentant la fréquence de « $n = 1$ ».

Sur 200 échantillons



Nuage de 200 échantillons

