PARIS 7

Brochure IREM

n° 94

Mai 2010

Démarche expérimentale et TICE en classe de mathématiques au lycée

F. Vandebrouck, D. Baroux, G. Bonal, S. Galland,
M. Guignard, F. Hérault, G. Marbeuf, C. Petitjean, B. Yvert

INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT

Démarche expérimentale et TICE en classe de mathématiques au lycée

F. Vandebrouck, D. Baroux, G. Bonal, S. Galland,
M. Guignard, F. Hérault, G. Marbeuf, C. Petitjean, B. Yvert

Démarche expérimentale et TICE en classe de mathématiques au lycée

Les programmes de mathématiques de l'enseignement secondaire français donnent depuis quelques années une importance à la dimension expérimentale des mathématiques sans pour autant que cette démarche soit vraiment expliquée et décrite dans les textes institutionnels. Cette dimension ne concerne pas seulement les mathématiques mais elle se comprend peut-être mieux dans les sciences physiques ou les sciences de la vie et de la terre. En mathématiques, elle apparaît relativement reliée à l'intégration des TICE, ce qui du coup peut simultanément constituer un levier et un obstacle à sa réelle mise en œuvre dans les classes ordinaires. Cette importance de la démarche expérimentale dans l'enseignement des mathématiques trouve son aboutissement dans la mise en place au printemps 2007, dans certains établissements, d'une épreuve pratique de mathématiques au baccalauréat scientifique (S). Dans cette épreuve, il est attendu des élèves qu'ils utilisent un outil informatique afin de résoudre un exercice mathématique dont le degré d'ouverture nécessite une démarche expérimentale, c'est-à-dire, plus ou moins selon les exercices proposés, une activité autonome de problématisation, de modélisation avec l'outil TICE, d'observation, de conjecture et de démonstration du résultat conjecturé. C'est suite à la mise en place de cette épreuve que s'est crée le groupe IREM qui présente cette brochure. La brochure est rédigée après trois années de fonctionnement du groupe et la réalisation d'un stage de formation au cours de l'année 2009-2010, dans le cadre du PAF des trois académies d'Ile de France.

Après quelques développements théoriques sur la démarche expérimentale et la spécificité des technologies pour cette démarche expérimentale, la brochure présente des exemples de travaux pratiques menés en classes de lycée ces trois dernières années, accompagnés d'analyse des chercheurs et/ou de commentaires des enseignants. Les témoignages des enseignants de terrain qui ont mené ces travaux pratiques sont en italique dans la suite ou sont indiqués par une note de bas de page.

Plan

I. Spécificités des technologies dans la démarche expérimentale

La question de savoir si les mathématiques possèdent une dimension expérimentale reste aujourd'hui encore ouverte et d'actualité. Par exemple, Lombard (2008) explique qu'expérimenter, c'est vérifier des hypothèses, qu'aucun scientifique ne saurait sérieusement assimiler observation et expérience et que les expérimentations sont le plus souvent faites pour vérifier des hypothèses. Pour lui, le travail du scientifique, et donc sans doute du mathématicien, se résume plutôt à « avoir une idée » et « vérifier expérimentalement si elle marche ». Au contraire, Perrin (2007) décrit démarche expérimentale par « expérience, observation de l'expérience, formulation de conjectures, tentative de preuves, production éventuelle de contre exemples etc … ». Autrement dit, expérimenter, ce peut-être commencer par des cas particuliers, sans avoir d'hypothèse ou de conjecture en tête, ce qui ne correspond pas à la démarche expérimentale dans les autres sciences mais plutôt à une démarche d'investigation. Au final, même si les caractéristiques de cette démarche restent floues, la forte incitation institutionnelle qu'elle suscite nécessite de s'interroger sur sa transposition dans l'enseignement des mathématiques et sur la spécificité des technologies dans cette démarche.

Si l'on tente de caractériser la démarche expérimentale dans l'enseignement des mathématiques avec des moments clefs de l'activité mathématique, il nous vient à l'esprit
* Formuler un problème (se questionner, modéliser, se documenter, …),
* Expérimenter (réaliser, tester, observer…),
* Conjecturer,
* Tester la conjecture (éprouver, évaluer…),
* Prouver,
* Communiquer…

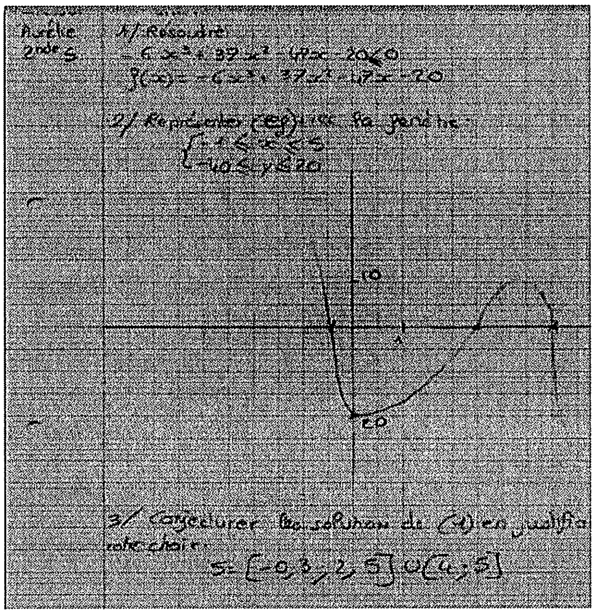
Parmi ces moments, deux semblent devoir attirer notre attention : le moment de la conjecture et le moment de la preuve.

Le moment de la conjecture apparaît comme essentiel dans la démarche expérimentale et nécessite un certain nombre de conditions afin qu'il puisse réellement « vivre » dans l'enchaînement des différents moments :
* Une première conjecture naïve qui peut être fausse, être invalidée et peut enclencher la recherche d'une nouvelle conjecture.
* Une rétroaction directe sur la conjecture formulée (validation, falsification)
* Une conjecture pas trop évidente qui demande du coup une démonstration.

Le moment de la preuve est donc aussi nécessaire pour assurer que la démarche entreprise est réellement une démarche d'ordre mathématique.

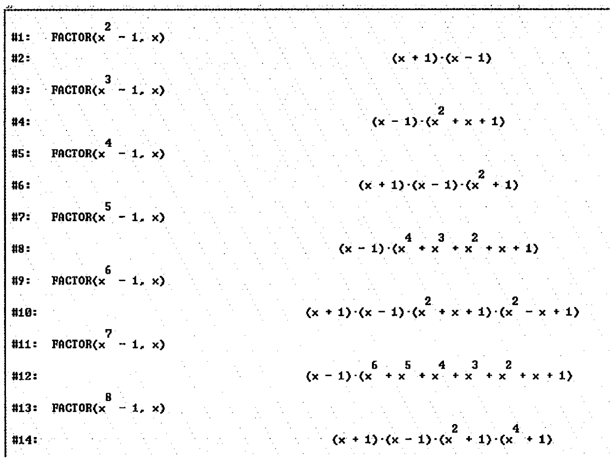
a) Le moment de la conjecture

Les technologies semblent alors potentiellement intéressantes pour permettre aux élèves des activités de conjectures, qu'il ne leur serait pas possible de développer dans l'environnement traditionnel. Nous en donnerons des exemples. Cela fait partie de l'extension du champ des activités possibles grâce à un usage des technologies par les élèves. Cependant les nouvelles représentations véhiculées par les technologies, qui ont des limites, affectent l'activité mathématique des élèves et notamment la manière dont ils conceptualisent les notions, pouvant amener par là-même à des conjectures erronées. Dans l'exemple ci-dessous, la représentation graphique proposée par la calculatrice de l'élève affecte la conjecture qu'il émet sur l'ensemble des solutions à l'inéquation demandée.



Dans leur travaux sur les calculatrices symboliques, Artigue et Lagrange (voir Artigue 1995 et Lagrange 2000) ont aussi pointé la « double référence » dans laquelle sont placés les élèves les utilisant et qui complexifie l'activité des élèves : d'un côté la référence papier-crayon habituelle pour la simplification des expressions algébriques par exemple, de l'autre la référence machine, différente de la première.

Dans un exemple où l'enseignant demande aux élèves de conjecturer à l'aide de leur calculatrice la forme générale de la factorisation du polynôme $x^n - 1$, la calculatrice ne permet pas d'émettre cette conjecture puisqu'elle factorise selon ses propres critères qui ne sont pas ceux utilisés habituellement. Cette double référence peut donc se poser en obstacle à l'activité des élèves en classe.



Dans son travail de thèse, Haspekian (voir Artigue et Haspekian 2005) a travaillé quant à elle sur le tableur à la transition entre arithmétique et algèbre au niveau de la classe de 5$^{\text{ème}}$. Elle a pointé ce qu'elle a appelé « distance instrumentale », qui est autre chose que cette « double référence », mais qui peut tout autant affecter l'activité des élèves et notamment leurs conjectures.

b) Le moment de la preuve

Le deuxième moment que nous avons souhaité retenir comme important dans une démarche expérimentale est celui de la vérification de la conjecture émise. Ce deuxième moment ne va pas de soi pour les élèves, ni même pour certains mathématiciens. Citons Delahaye (2005), qui prend en compte explicitement les technologies dans son discours, il explique que la démarche expérimentale avec des technologies, cela peut-être « trouver des contre exemples qui falsifient les conjectures ». Autrement dit, selon lui, confirmer ou infirmer des conjectures avec des technologies est possible, tout comme valider des démonstrations, et « la plus grande certitude mathématique n'est pas forcément atteinte par les démonstrations habituelles ». Cela peut choquer mais n'y a-t-il pas un paradoxe à accepter de certaines technologies qu'elle nous donnent effectivement des résultats mathématiques – pensons à une calculatrice bas de gamme qui nous donne le résultat d'une multiplication – et à refuser dans l'enseignement certains résultats de nouvelles technologies plus sophistiquées – un lieu de points donné par un logiciel de géométrie dynamique, une limite de suite donnée par un logiciel de calcul formel ? Dans notre cadre d'enseignement avec des élèves, convenons que ce moment de la démarche est important et qu'il convient pour le professeur de ne pas le négliger. Duvernay (2007) explique que : « le deuxième inconvénient de la démarche expérimentale avec des technologies (le premier étant que ça prend du temps, forcément sur quelque chose d'autre) c'est que l'insistance sur l'aspect expérimental des mathématiques et l'usage de l'ordinateur pour « voir » ne conduise une grande partie des élèves à une conception faussée de ce que sont les mathématiques et des conditions de leur efficacité (que certains trouvent déraisonnables, on ne sait pourquoi). Ce danger n'est pas illusoire : le bulletin officiel n'affirme t-il pas que les mathématiques se rapprochent des sciences expérimentales grâce à l'expérimentation numérique, à la simulation, à ce que l'on peut appeler la démonstration empirique ». Il ne faut donc pas nier que des questions, pour le professeur, tournent autour de la nécessité de preuve mathématique des conjectures émises et sur le fait que bien souvent les élèves ne ressentent pas la nécessité de conclure la démarche expérimentale par une preuve.

Dans cet exemple, 4 suites numériques, (a_n), (b_n), (U_n) et (V_n) sont définies respectivement par les formules récurrentes ci-dessous.

$a_{n+1}=(2a_n+b_n)/4$ $b_n=(a_n+2b_n)/4$

$u_n=a_n+b_n$ $v_n=b_n-a_n$

Les valeurs de ces 4 suites en fonction de leurs premiers termes sont données par un tableur. Les élèves doivent ainsi conjecturer que les suites (a_n) et (b_n) tendent vers 0, puis que les suites (U_n) et (V_n) sont géométriques de raisons respectives ¾ et ¼. Des phénomènes d'instrumentation, déjà évoqués en termes de « distance instrumentale », causés ici par le fait que selon le nombre de décimales, les suites (a_n) et (b_n) peuvent apparaître nulles à partir d'un certain rang, amènent dans cette situation certains élèves à cette conjecture fausse.

	A	B	C	D
1	20	60	80	40
2	25	35	60	10
3	21,25	23,75	45	2,5
4	16,563	17,188	33,75	0,625
5	12,578	12,734	25,313	0,1563
6	9,4727	9,5117	18,984	0,0391
7	7,1143	7,124	14,238	0,0098
8	5,3381	5,3406	10,679	0,0024
9	4,0042	4,0048	8,009	0,0006
10	3,0033	3,0035	6,0068	0,0002
11	2,2525	2,2526	4,5051	4E-05
12	1,6894	1,6894	3,3788	1E-05
13	1,2671	1,2671	2,5341	2E-06
14	0,9503	0,9503	1,9006	6E-07
15	0,7127	0,7127	1,4254	1E-07
16	0,5345	0,5345	1,0691	4E-08
17	0,4009	0,4009	0,8018	9E-09

Cependant, les échanges avec l'enseignant, au moment où les élèves doivent s'engager dans la preuve que les suites (U_n) et (V_n) sont géométriques, montrent bien combien cette étape importante de la preuve est problématique à gérer, pour les élèves mais aussi pour le professeur. D'une part, les élèves ne semblent pas comprendre les statuts différents d'une preuve et d'une conjecture réalisée grâce à l'ordinateur :

« E : *ça il faut le faire sur l'ordi, le fait qu'elles sont convergentes ou pas* ? »

(...)

D'autre part, le professeur, qui n'arrive pas à faire émerger chez les élèves cette nécessité d'une preuve mathématique des faits observés, enferme les élèves dans sa vision très personnelle de l'exploitation de ces données du tableur :

« P : ... *vous pouvez prouver en utilisant l'ordinateur...*

(...)

P : *Trouve quelque chose qui soit plus percutant...*

(idem)
(...)
E : *Faut l'écrire en gras* ? (l'élève ne comprend pas ce qu'attend de lui le professeur)
P : *je calculerais U_{n+1} sur U_n*
(...) »

En fait, le professeur souhaite que les élèves introduisent deux nouvelles colonnes pour faire apparaître les rapports constants U_{n+1}/U_n et V_{n+1}/V_n ce qui, d'une part, peut ici aussi enfermer les élèves dans l'idée que l'ordinateur apporte une preuve de la conjecture émise, et d'autre part ne correspond pas à une étape nécessaire pour passer de la conjecture à la preuve papier.

D'ailleurs, plusieurs élèves observés lors de cette séance, qui ont déjà à ce moment réalisé leur conjecture au vue des quatre colonnes tableur passent directement à la démonstration papier sans chercher à faire apparaître des quelconques colonnes supplémentaires, et artificielles à leurs yeux. En outre, faire afficher les rapports U_{n+1}/U_n et V_{n+1}/V_n n'est possible sur la machine si les valeurs U_n et V_n sont non nulles, ce qui se vérifie pragmatiquement sur l'ordinateur mais doit se prouver rigoureusement en papier-crayon. Il y a donc une double rupture entre ce que souhaiterait le professeur et d'une part ce que veulent faire les élèves et d'autre part la démonstration en papier-crayon.

II. Compléments théoriques et questionnements

Dans nos recherches en didactique des mathématiques, nous analysons la qualité du travail des élèves par l'intermédiaire des activités mathématiques qui leurs sont proposées (Vandebrouck 2008). L'enseignement d'un contenu donné est donc caractérisé en relation avec ces activités : nous analysons tout ce qui peut contribuer à définir les activités proposées aux élèves, c'est-à-dire les contenus mathématiques en jeu, leur organisation, les tâches proposées aux élèves mais aussi les déroulements organisés et, de ce fait, les discours des enseignants qui modulent ces activités[1].

Pour analyser ces tâches mathématiques et donc l'activité potentielle des élèves qu'elles sous tendent, les outils d'analyse de tâches développés par Robert (1998) sont importés. Nous retenons essentiellement les types de connaissances et la nature des mises en fonctionnement de ces connaissances (Robert et Rogalski M. 2002) : les connaissances mathématiques à appliquer, anciennes, récemment apprises ou bien enjeu d'apprentissage, doivent-elles être *disponibles* ou bien sont-elles explicitement appelées par l'énoncé ? Les tâches appellent-elles des *applications immédiates* de ces connaissances ou bien y a-t-il au contraire des *adaptations*

[1] En ce qui concerne le lien entre les enseignements et les apprentissages, nous reconnaissons l'apport des grandes théories de l'apprentissage, et particulièrement celles de Piaget et Vygotski, qui précisent des conditions favorables à l'acquisition des connaissances. Mais nous les spécifions aux mathématiques, aux grands types de notions à enseigner, aux situations scolaires...

à effectuer (reconnaissances des modalités d'application, traductions, introduction d'intermédiaires, d'étapes, mélanges, interprétations, mises en relations...), ce qui est entendu comme vecteur d'apprentissage chez l'élève.

Dans le cadre d'une démarche expérimentale en mathématiques, nous nous attendons à ce que l'activité potentielle des élèves soit enrichie par rapport à une démarche plus traditionnelle sur des exercices classiques, notamment dans des séances de classes ordinaires. En ce sens, la démarche expérimentale doit être l'occasion pour les élèves de mettre en fonctionnement des connaissances non nécessairement explicitées (au niveau disponible) et en dépassant les applications immédiates de ces connaissances (traduire, introduire, problématiser, modéliser, conjecturer, interpréter, prouver, changer de cadre/registre/point de vue...).

L'intégration de TICE au sein de cette démarche expérimentale doit être une occasion supplémentaire d'enrichir l'activité des élèves en facilitant par exemple des adaptations de connaissances qui ne seraient pas permises par une activité en environnement papier-crayon. D'une part, l'usage de l'outil peut permettre l'activité de conjecture plus facilement qu'en environnement papier-crayon mais il peut d'autre part permettre à l'élève d'entrer en activité face à une démonstration qui lui demande de nombreuses adaptations de connaissances, comme des introductions d'intermédiaires ou bien des choix de méthodes. C'est là que réside à nos yeux l'intérêt d'articuler des activités nouvelles mettant en jeu les TICE avec l'activité mathématique des élèves (Vandebrouck 2009a, 2009b).

Comment les technologies permettent-elles des conjectures raisonnables difficiles ou impossibles en environnement papier-crayon ? Comment le travail sur les technologies peut-il susciter l'entrée dans la preuve et la faciliter car les élèves n'auraient pas pu y entrer dans l'environnement papier-crayon par exemple ? Telles sont les questions principales et nous essaierons d'illustrer des réponses dans les parties suivantes.

Les réflexions dans notre groupe IREM ont amené à un certain nombre de conditions nécessaires pour garantir une démarche expérimentale qui ne soit pas dénaturée et qui permettent notamment une activité intégrant les technologies et constructive pour les élèves :
- des sujets épurés, facilement compréhensibles et appropriables par tous pour permettre la mise en activité de chacun des élèves, sans une aide préalable dès le début des enseignants ;
- une conjecture qui dans ces sujets ne s'impose pas d'elle-même ou du moins qui ne peut-être que partiellement mise en évidence par l'exploration sur le logiciel, et donc qui appelle un travail papier crayon pour être complétée ;
- enfin un travail exploratoire et un travail dans l'environnement papier-crayon qui se renvoient l'un l'autre au sens où la partie exploratoire guide et aide pour prouver en papier crayon la conjecture et la compléter et où, en retour, le résultat du travail en papier crayon peut être validé par une vérification sur le logiciel.

Ces trois conditions, déjà difficiles à mettre en pratique, ne sont bien sûr pas garantes à elles seules d'activité mathématique de type expérimental et de qualité chez les élèves mais elles aident à s'en approcher, à dépasser une démarche qui se réduirait pour les élèves à une simple observation et de simples applications.

Reste l'importance pour la qualité des activités des élèves du scénario global, c'est-à-dire l'organisation des contenus dans le temps, les dialectiques entre cours et exercices, l'articulation entre les activités TICE et les activités papier-crayon.

Par exemple, l'articulation de connaissances mathématiques et connaissances logicielles est en elle-même une adaptation de connaissances. L'intégration de l'outil ne peut donc se faire sans une prise en main progressive de la part des élèves, organisée dans son scénario global, tout autant que dans ses énoncés de TP, par l'enseignant. Artigue (2002) parle de genèse instrumentale pour expliquer la dialectique qui doit se nouer entre les processus d'instrumentalisation des outils par les élèves et les constructions de connaissances associées à des processus d'instrumentation. En d'autres termes, les difficultés des élèves, leurs mauvaises interprétations des messages du logiciel, leur mauvaises manipulations, doivent être interprétées en termes de manques dans les genèses instrumentales. D'où une autre question, quelles connaissances préalables sur les technologies sont nécessaires aux élèves pour émettre des conjectures raisonnables et surtout comment faire acquérir ces connaissances préalables dans un lien avec des mathématiques ? Comment comprendre par exemple les simplifications des calculatrices symboliques sans comprendre en même temps ce système de double référence pointé plus haut, qui ne peut pas se minorer en un simple problème d'affichage ? Nous aborderons ces questions liées à la prise en main des logiciels par les élèves dans les paragraphes suivants, en déclinant des sujets en fonction de l'état d'avancement des élèves dans ces prises en main.

Reste enfin le rôle de l'enseignant, moins théorisé, qui, par son discours et les aides qu'il apporte aux élèves pendant les déroulements des séances, peut ou non renforcer les apprentissages attendus, par la portée et le moment de ses aides en fonction de l'activité effective des élèves. Robert (2008) a introduit récemment à ce sujet la dialectique entre aides constructives et aides procédurales, ces dernières étant plus directement tournées vers la réalisation des tâches par les élèves. Il reste donc encore à chaque enseignant à être vigilant pendant les déroulements de ses séances pour que l'activité qu'il a ménagée pour ses élèves puisse être préservée, tout en assurant que le maximum d'élèves entre au mieux dans cette activité : au delà de la question sur les situations « robustes » pour arriver aux objectifs décrits plus haut, quelle gestion de la classe par le professeur pour gérer ces situations et atteindre ces objectifs ? Quelles aides apporter aux élèves ?

Toutes les questions que nous avons soulevées dans ce paragraphe ne trouveront pas de réponses toutes faites dans la suite. Cependant, les exemples traités permettront d'illustrer différentes facettes des questionnements proposés.

III. Des sujets qui permettent l'accès à certaines notions : l'exemple des paramètres

La notion de paramètre est importante du point de vue de l'expérimentation en mathématique et revient sur le devant de la scène dans les activités mathématiques des élèves lorsque ceux-ci travaillent sur les logiciels. En géométrie dynamique, par exemple, chaque déplacement de figure où un certain nombre de propriétés sont conservées correspond plus ou moins à un pilotage de paramètres et ne pas affronter ouvertement cette notion correspondrait essentiellement à utiliser des logiciels de géométrie dynamique sans exploiter les possibilités de déplacement.

Cette notion de paramètre n'est cependant pas une notion facile d'accès pour les élèves, dont certains parfois sont à peine passés en classe de seconde de démarches arithmétiques pour la résolution d'exercices à des démarches algébriques. C'est une notion qui à la fois généralise ce que les élèves ont déjà à leur disposition, unifie ce qui jusque là pouvait être traité indépendamment et enfin formalise différemment ce que les élèves savent déjà faire de façon réduite : il y a en effet un « accident » entre le maniement des lettres désignant des variables dans les expressions et le maniement des lettres désignant les paramètres dans ces mêmes expressions.

La potentialité des logiciels pour l'acquisition et le maniement de cette notion de paramètre réside en particulier dans ce que les gestes (manipulations) associés au pilotage des paramètres ne sont généralement pas les mêmes que ceux associés au pilotage des variables algébriques usuelles. Par exemple, dans le logiciel GeoGebra, le déplacement d'un point sur une courbe définie par une fonction $x \rightarrow f(x)$ est lié au pilotage de la variable indépendante x tandis que le pilotage des paramètres dont peut éventuellement dépendre la fonction f se fait par le déplacement d'un curseur clairement identifié. Il s'agit de l'idée analogue pour la notion de paramètre à l'idée qui a dominée lors de la création de la géométrie dynamique : ces logiciels s'étant développés sur la distinction dessin / figure et sur l'idée que la fonctionnalité de déplacement devait permettre un nouveau rapport des élèves à cette distinction.

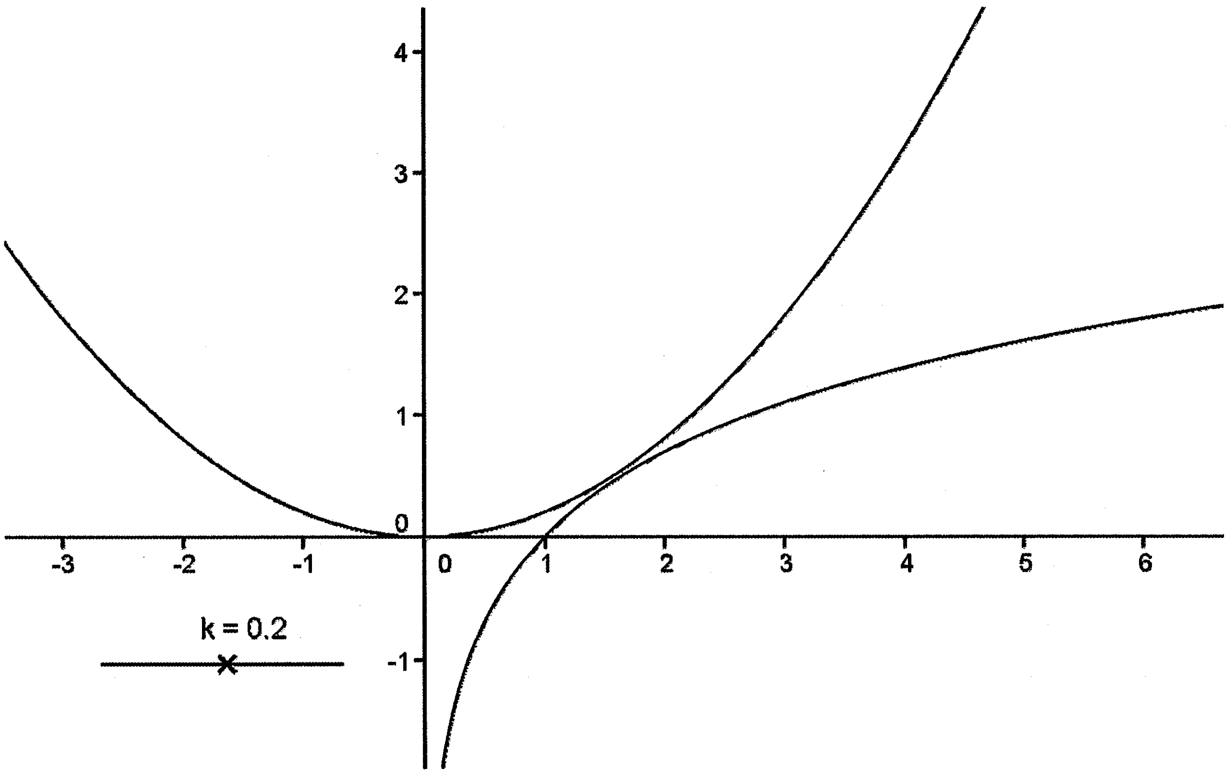
Dans l'exemple suivant, inspiré d'un sujet de l'épreuve pratique au Baccalauréat S, les élèves qui travaillent sur GeoGebra, doivent conjecturer le nombre de solutions de l'équation $\ln(x) = k\,x^2$ en fonction du paramètre k. La gageure est donc que la disponibilité et l'utilisation à bon escient de la notion mathématique de paramètre puisse être favorisée par la disponibilité de la fonctionnalité de curseur de GeoGebra.

TP type BAC sur logiciel de géométrie
On donne un paramètre réel k. On s'intéresse au nombre de solutions de l'équation (E) $\ln(x) = kx^2$ pour x strictement positif. 1) En utilisant un logiciel de géométrie dynamique, conjecturer suivant les valeurs du paramètre k le nombre de solutions de l'équation (E).

Appeler le professeur pour vérifier vos conjectures selon les différentes valeurs de k.
2) Justifier sur votre feuille ces conjectures.

Les élèves ayant repéré le rôle important du paramètre k doivent donc introduire d'eux-mêmes un curseur dans GeoGebra pour tracer par exemple les deux courbes $y=\ln(x)$ et $y=kx^2$. Ils doivent ainsi transformer le problème de résolution d'une équation fonctionnelle en problème d'intersection de courbes, ce qui correspond à un changement de cadre de travail qui participe de la complexité du sujet. L'exploration sur le logiciel permet donc d'approcher la valeur de k pour laquelle le nombre de solutions à l'équation change (0, 1 ou 2) mais elle ne permet pas aux élèves de donner la valeur exacte qui est irrationnelle. Ils doivent donc nécessairement travailler dans l'environnement papier-crayon pour trouver cette valeur exacte de k.

Il faut introduire une fonction auxiliaire, par exemple $f(x)=\ln(x) - k\,x^2$, et l'étudier. Il peut être même intéressant de la tracer avec le logiciel. Dans le cas où $k > 0$, la dérivée $f'(x)$ s'annule pour $x=1/\sqrt{(2k)}$. La valeur $f(1/\sqrt{(2k)})=-\ln(\sqrt{(2k)})-1/2$ est nulle pour $k=1/2e$, ce qui est la valeur exacte attendue, confirmée expérimentalement par l'exploration sur le logiciel.



Dans cette situation, des phénomènes liés au travail spécifique sur le logiciel apparaissent, comme expliqué dans le paragraphe 1 (spécificité du travail sur ordinateur). Les professeurs signalent par exemple « *certains élèves croyaient dur comme du fer que, comme ils voyaient que pour 0,2 il n'y avait qu'une solution, k=0,2 était une valeur exacte, après cela été pareil pour 0,18 ....* » ou par exemple « *entre 0,18 et 0,19, on ne regarde pas, on ne sait rien dire de précis...* ». Cela nécessite pour les professeurs d'être vigilants au moment de la prise en main de ces outils numériques.

Il semble cependant qu'un travail consistant sur la notion de paramètre puisse être possible avec l'introduction du curseur, que le changement de cadre puisse être accompagné par l'utilisation de GeoGebra, que l'entrée dans la preuve puisse être favorisée par le fait d'obtenir partiellement la conjecture grâce au logiciel et enfin qu'un maintien en activité des élèves puisse être possible par les allers-retours entre machine et papier-crayon que permet ce problème. Cependant, la version proposée au baccalauréat en 2007 est plus modeste :

Enoncé sujet 4 de 2007

On donne un réel k.

On s'intéresse au nombre de solutions de l'équation (E) : $\ln(x) = kx^2$ pour x strictement positif.

1. En utilisant un logiciel de construction graphique ou une calculatrice graphique :
   a) Conjecturer, suivant les valeurs de k, le nombre de solutions de l'équation (E).
   Appeler l'examinateur pour valider la conjecture.
   b) Si $k > 0$, trouver graphiquement une valeur approchée de k pour laquelle l'équation (E) a une unique solution.
   Appeler l'examinateur pour vérifier la valeur trouvée.
2. Démontrer que pour $k < 0$, l'équation (E) a une unique solution.

Production demandée

- pour la question 1.b), recopier la valeur approchée obtenue pour k.
- réponse écrite pour la question 2.

Les élèves n'ont en effet pas à déterminer la valeur exacte de $k > 0$ pour laquelle le nombre de solution change. Il n'y a donc moins la nécessité à ce moment de travailler dans l'environnement papier-crayon puisque seule la valeur approchée trouvée est demandée. La difficulté est reportée dans la question 2) qui du coup semble artificielle : il ne s'agit que de prouver dans l'environnement papier-crayon un résultat qui est clairement visible sur le logiciel : si k < 0, la dérivée f' calculée plus haut est strictement positive et la fonction f est strictement croissante de moins l'infini à plus l'infini, d'où la justification attendue.

IV. La gestion des prises en main : autour de la notion de paramètre

Le sujet précédent est intéressant à plusieurs titres : l'énoncé est simple, il y a présence d'un paramètre et il est possible de le traiter assez tôt dans l'année en TS. La présence du paramètre rend le sujet difficile pour les élèves mais le logiciel de géométrie (ici GeoGebra) permet de le visualiser à l'aide du curseur. Enfin la figure n'est pas difficile à construire et ne demande pas une grande maîtrise du logiciel.

De façon générale, la prise en main des logiciels et de leurs fonctionnalités, notamment la prise en main du curseur dans GeoGebra, doit donc être « orchestrée » par le professeur et dans ce cas particulier, articulée avec l'appropriation par les élèves de la notion de paramètre. Cela signifie que cette prise en main des fonctionnalités du logiciel (associées à des connaissances mathématiques) ne doit pas être vue comme une perte de temps didactique dans la classe puisqu'elle permet justement soit l'appropriation d'une notion mathématique nouvelle, soit l'adaptation par les élèves de connaissances anciennes remises en fonctionnement en articulation avec l'outil (dans des processus de genèses instrumentales, cf Artigue, plus haut).

Dans les exemples que nous allons proposer ci-dessous, nous avons essayé d'adapter des sujets de la banque 2007, au niveau des classes de terminale, première et seconde. Ces sujets mettent ouvertement en jeu la notion de paramètre, dès la classe de seconde. Nous avons essayé de faire des propositions organisées pour comprendre comment peut se jouer « l'orchestration » (Trouche 2004) par le professeur des genèses instrumentales des élèves, c'est-à-dire la prise en main progressive des fonctionnalités des logiciels associée à l'appropriation et la mise en fonctionnement de la notion de paramètre.

a) En classe de terminale S [2]

Pour pouvoir traduire un problème, puis faire des essais et conjecturer de façon raisonnable, les élèves ont besoin de connaître les outils dont ils disposent, ce qui suppose une prise en main préalable. Doit-on consacrer une séance à l'apprentissage d'un logiciel de géométrie avant de commencer à l'utiliser dans le cadre d'un TP de mathématique ? Pour une question de temps mais aussi pour les raisons didactiques évoquées plus haut (les genèses instrumentales doivent mettre en jeu, pour être sensées, à la fois des connaissances mathématiques et des connaissances logicielles), les professeurs choisissent en général de mener de front apprentissage du logiciel et TP. Il est alors délicat de faire découvrir aux élèves les fonctionnalités du logiciel sans les orienter vers une démarche particulière pour le problème mathématique à résoudre. L'équilibre à trouver entre les deux objectifs nous a conduit à modifier progressivement le TP présenté plus haut au fil des années. Voici donc différentes versions de ce sujet.

Première version
Les élèves ont déjà eu une séance sur le logiciel de géométrie GeoGebra mais sans rencontrer le curseur.

[2] Ce paragraphe est partiellement rédigé par l'enseignant qui a mené les séances

On donne un réel k. On s'intéresse au nombre de solutions de l'équation $\ln(x) = kx^2$ pour x strictement positif.

1. Lancer le logiciel GeoGebra.
2. Dans le champ de saisie en bas, entrer f(x)= ln(x) puis valider. Entrer ensuite x^2, valider. Faire de même avec 0.5*x^2 puis 0.1*x^2 et enfin −x^2. Compléter le tableau :

Valeur de k				
Nombre de solutions d'après le graphique				

3. On veut désormais déterminer de manière plus précise le nombre de solutions. Cliquer sur Fenêtre puis Nouvelle fenêtre et faire apparaître la courbe de la fonction ln dans ce nouveau repère.
4. Entrer $k = 1$ dans la zone de saisie puis valider. Ce nombre apparaît dans la fenêtre Algèbre. Dans le champ de saisie, définir maintenant $g(x) = kx^2$.
5. Pour faire varier le nombre k, cliquer avec le bouton droit sur ce nombre et cocher Afficher l'objet. Un curseur apparaît. Cliquer sur l'icône  pour se mettre en mode Déplacer puis déplacer le curseur à la souris.
6. Conjecturer suivant les valeurs de k le nombre de solutions de l'équation $\ln(x) = kx^2$.

Appeler le professeur pour vérifier votre réponse.

7. Si $k > 0$, trouver graphiquement une valeur approchée de k à deux chiffres après la virgule pour laquelle l'équation admet une seule solution (on pourra faire un clic droit sur k puis dans Propriétés, Curseur, réduire l'incrément à condition de réduire aussi l'intervalle).

Appeler le professeur pour vérifier votre réponse.

8. Démontrer sur feuille que, pour tout réel $k < 0$, l'équation $\ln(x) = kx^2$ admet une unique solution.

Dans cette version réalisée en classe, la démarche expérimentale est mal menée par la fragmentation de la tâche en sous-tâches (questions 3, 4, 5 et 6). Par exemple, la mobilisation autonome du curseur associée à l'idée que le problème comporte un paramètre, le changement de cadre de l'énoncé initial, sont pris en charge par l'énoncé. En outre, l'activité expérimentale est initiée par le test de cas particuliers, ce qui pourrait rester du seul ressort des élèves (question 2). Ceci semble favoriser le fait que les élèves restent plus facilement en activité qu'avec l'énoncé brut. Cependant, comme le relate l'enseignante a posteriori, le TP sous cette forme est rapide, 45 minutes. En outre, l'enseignante explique que l'activité demandée de tester différentes valeurs de k, de tracer les courbes correspondantes et de remplir le tableau, n'est pas du tout connectée par les élèves au problème général. C'est-à-dire qu'ils ne reconnaissent pas dans la question 2 des cas particuliers du cas général : « *certains des élèves n'ont pas vu le lien entre les courbes qu'ils avaient tracées et le fait qu'elles* *correspondaient à l'équation de départ avec différentes valeurs de k. Ils ne voyaient pas comment remplir le tableau ».*

Deuxième version
Les élèves ne connaissent pas du tout le logiciel GeoGebra.

On donne un paramètre réel k. On s'intéresse au nombre de solutions de l'équation (E) $\ln(x) = kx^2$ pour x strictement positif.

1. Ouvrir le logiciel GeoGebra.
2. Dans le champ de saisie en bas, définir f(x)= ln(x) et valider.
3. Entrer $k = 1$ dans la zone de saisie puis valider. Ce nombre apparaît dans la fenêtre Algèbre. Dans le champ de saisie en bas, définir maintenant $g(x) = kx^2$.
4. Pour faire varier le paramètre k, cliquer avec le bouton droit sur ce nombre et cocher Afficher l'objet. Un curseur apparaît. Cliquer sur l'icône  pour se mettre en mode Déplacer puis déplacer le curseur à la souris.
5. Conjecturer suivant les valeurs de k le nombre de solutions de l'équation $\ln(x) = kx^2$.

Appeler le professeur pour vérifier votre réponse.

6. Si $k > 0$, trouver graphiquement une valeur approchée de k à deux chiffres après la virgule pour laquelle l'équation admet une seule solution (on pourra faire un clic droit sur k puis dans Propriétés, Curseur, réduire l'incrément à condition de réduire aussi l'intervalle).

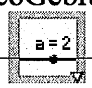
Appeler le professeur pour vérifier votre réponse.

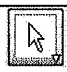
7. Démontrer que pour tout réel $k < 0$, l'équation $\ln(x) = kx^2$ admet une unique solution.

Les élèves sont moins guidés et plus actifs dans cette version mais le passage de l'équation aux courbes est encore pris en charge. De plus, les élèves sont orientés vers la méthode f(x)=g(x) qui n'est pas la seule (ils pourraient étudier la différence de ces deux fonctions comme dans la résolution proposée plus haut ou le quotient de ln(x) sur x^2).

Troisième version
Les élèves ne connaissent pas le logiciel mais le TP est précédé par un exercice de prise en main.

Exercice 1

1. Lancer le logiciel GeoGebra.
2. Cliquer sur l'icône  puis cliquer n'importe où dans la feuille de travail, enfin cliquer sur Appliquer dans la boîte de dialogue. Un curseur symbolisant un nombre a que l'on peut faire varier, est créé.
3. Entrer dans la ligne de saisie g(x) =a*x + 2 puis valider.

4. Cliquer sur l'icône  puis approcher la souris du curseur a pour le déplacer. Qu'ont en commun les différentes droites tracées ?
5. On veut faire varier a entre -2 et -1 avec un pas (ou incrément) de 0.01. Cliquer avec le bouton droit sur a et choisir Propriétés puis Curseur. Entrer les nouvelles valeurs puis faire varier a. Pouvait-on prévoir le déplacement de la droite ?

Appeler le professeur pour vérifier.

Exercice 2 *cliquer sur Fenêtre pour faire cet exercice dans une nouvelle fenêtre.*
On donne un réel k. On s'intéresse au nombre de solutions de l'équation $\ln(x) = kx^2$ pour x strictement positif.

1. a)A l'aide du logiciel ou d'une calculatrice, conjecturer suivant les valeurs de k, le nombre de solutions de l'équation $\ln(x) = kx^2$.
   Appeler le professeur pour valider la conjecture.
   b) Si $k > 0$, trouver graphiquement une valeur approchée de k pour laquelle l'équation admet une unique solution.
   Appeler le professeur pour vérifier votre réponse.
2. Démontrer sur papier que, pour tout réel $k < 0$, l'équation $\ln(x) = kx^2$ admet une unique solution.
   Appeler le professeur pour vérifier la démonstration.

L'exercice de prise en main est à améliorer (la réponse à la question 5 n'est pas facile à formuler) mais il est rapide, les élèves ont le temps de réfléchir au deuxième exercice et l'ensemble tient en une séance. L'exercice de prise en main oriente quand même les élèves vers le curseur mais le problème du passage de l'équation aux courbes n'est pas guidé, et pas mal d'élèves bloquent là car ils entrent l'équation dans la ligne de saisie (ils n'ont pas compris que le logiciel ne fait que tracer mais ne calcule pas).

La question de la conjecture reste toujours difficile même quand les élèves ont tracé les deux courbes : ils ont du mal à raisonner selon les valeurs du paramètre et même quand ils ont compris la question, beaucoup passent de « 2 solutions quand 0<k<=0,2 » à « aucune solution si k>0,2 ». Peut-être faut-il changer le 1)b) en « Existe-t-il une valeur strictement positive de k>0 pour laquelle l'équation admet une seule solution ? ».

Parmi les différentes versions proposées, c'est la dernière version qui semble favoriser le plus l'activité mathématique des élèves (en tout cas davantage que la version avec une question découpée en sous-questions). L'idéal serait de donner ce TP quand les élèves connaissent déjà le logiciel, quitte à leur rappeler l'existence du curseur si nécessaire. Mais que donner alors comme première séance ? Nous n'avons pas été séduits par l'idée d'un exercice rédigé sans prise en main mais avec une « fiche technique du logiciel » mais c'est une piste à explorer. On peut espérer qu'à l'avenir, l'utilisation d'un logiciel de géométrie sera plus familière aux élèves de terminale grâce à leur expérience des années passées et à l'usage plus courant d'un vidéo projecteur en classe.

b) En classe de première S [3]

Le premier sujet assure la prise en main de GeoGebra, le second sujet est plus épuré. Les étudiants doivent adapter et réinvestir à la fois les connaissances sur le logiciel et les connaissances mathématiques (moins de questions intermédiaires, notamment dans la partie II). La fin de ce paragraphe porte sur la question de l'évaluation des élèves

Dispositif : Élèves de 1ère S en demi groupe, un élève par poste.

(Remarque : Les élèves de 1ère S de ce lycée disposent d'une heure supplémentaire par semaine pour faire soit du soutien, soit des TP Maths Info en demi groupe)

Logiciel utilisé : GeoGebra

À quel moment dans l'année ? Début novembre

Chapitres déjà traités :

- Généralités sur les fonctions
- Fonctions du 2nd degré (*Des résolutions d'équations du 2nd degré avec paramètres ont déjà été traitées en classe en séances d'exercices sans l'outil informatique)*

Familiarisation des élèves avec le logiciel :

Ils ont déjà fait des TP en 2nde.

Utilisation régulière en classe par le professeur avec un vidéo projecteur pour illustrer certaines parties du cours ou pour la correction de certains exercices, contrôles ou devoirs maisons.

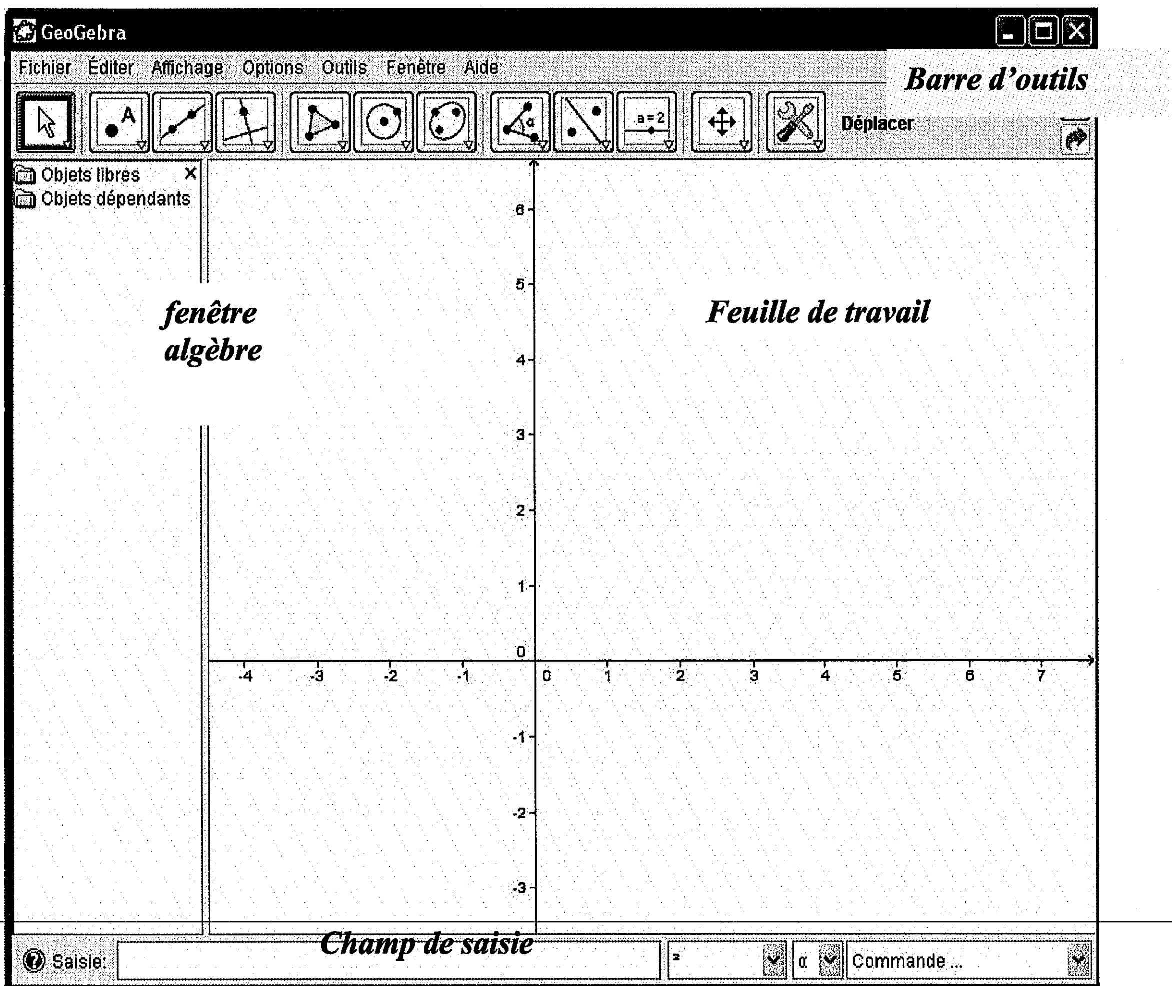
Ils sont souvent invités à utiliser ce logiciel pour construire les figures géométriques et les représentations graphiques des fonctions lors des devoirs maisons.

[3] Ce paragraphe est rédigé par l'enseignant qui a mené les séances

Le but de ce TP est de déterminer le nombre de solutions de l'équation : $x^2 - mx + 4 = 0$ *d'inconnue x suivant les valeurs du nombre réel m puis de déterminer le lieu géométrique des sommets des paraboles d'équation* $y = x^2 - mx + 4$ **lorsque** m *décrit* R **.**

<u>Partie I :</u> Constructions et conjectures

1. Ouvrir le logiciel GeoGebra.
   Après démarrage de GeoGebra, la fenêtre représentée ci-dessous apparaît. Au moyen des outils de construction dans la ***barre d'outils*** vous pouvez faire des constructions sur la ***feuille de travail*** à la souris. Simultanément, les coordonnées ou équations associées sont affichées dans la ***fenêtre algèbre***. Le ***champ de saisie*** est utilisé pour entrer les coordonnées, les équations, les commandes et les fonctions directement ; elles sont affichées immédiatement dans la feuille de travail dès que la touche "entrée" est pressée.

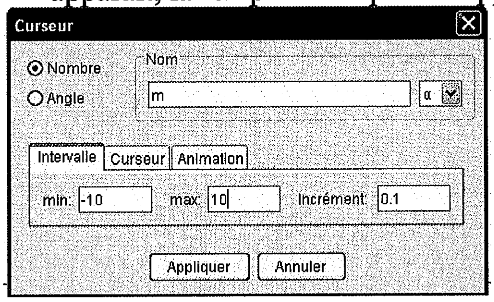


Remarques : - avec « Annuler frappe » on peut à tout moment revenir à une ou plusieurs actions en arrière.

- avec un clic droit dans la feuille de travail, on peur faire apparaître/ disparaître les axes et la grille.

2. **Création du curseur m**
   Dans la 10ème colonne d'icônes en partant de la gauche, cliquer sur l'icône « curseur » 

   puis cliquer dans la fenêtre principale à l'endroit voulu. Une fenêtre apparaît, la remplir ainsi puis « Appliquer »



Un curseur symbolisant un nombre *m* que l'on peut faire varier dans l'intervalle [-10 ;10] est ainsi créé .
Pour modifier l'intervalle dans lequel varie *m*, il suffit de faire un clic droit sur le curseur créé et dans « propriétés » puis « curseur », on peut changer les bornes de l'intervalle.

3. Entrer dans la ligne de saisie : $f(x) = x^2 - m * x + 4$ puis valider.
4. a) Fixer la valeur de m à 2 . Graphiquement que peut-on dire du nombre de solutions de l'équation
   $x^2 - 2x + 4 = 0$? Justifier.
   b) Fixer la valeur de m à -6 . Graphiquement que peut-on dire du nombre de solutions de l'équation
   $x^2 + 6x + 4 = 0$? Justifier.
   c) En faisant varier le curseur *m,* conjecturer les valeurs du réel m pour lesquelles l'équation $x^2 - mx + 4 = 0$
   admet au moins une solution.
5. a) Construire, quelle que soit la valeur de *m*, le sommet S de la parabole d'équation $y = x^2 - mx + 4$.
   b) Faire un clic droit sur le point S et cocher « Trace activée ».Faire varier le curseur *m* et conjecturer le lieu géométrique des points *S* lorsque *m* varie. Conjecturer une équation de ce lieu.
   c) Comment peut-on vérifier cette dernière conjecture à l'aide du logiciel ?

<u>Partie II :</u> Démonstrations

1. Démontrer la conjecture faite à la question 4.c) de la partie I.
2. a) Exprimer les coordonnées du sommet S de la parabole d'équation
   $y = x^2 - mx + 4$ à l'aide *m*.
   b) Montrer que les coordonnées de S sont de la forme $(\alpha, -\alpha^2 + 4)$.
   c) En déduire le lieu géométrique des points S lorsque m décrit *R*.

Ce TP est une <u>prise en main du logiciel</u>

Si nécessaire, des synthèses sur des notions mathématiques ou techniques sont faites par le professeur en vidéo projection au fur et à mesure.

Problèmes rencontrés par les élèves dans la partie conjecture :

- Lien entre la représentation graphique de f et les solutions de l'équation $f(x) = 0$ (*Partie I 4.a)b)c)*)
- Confusion entre m et x. (*Partie I 4.a)b)c)*)
- Le logiciel obligeant à créer le curseur m dans un intervalle borné, les élèves oublient que m *décrit* $\mathbb{R}$. (*Partie I 4.c)*)
- Construction des sommets S des différentes paraboles : *(Partie I 5.a))*
  - Problèmes d'ordre mathématique :
    - Le sommet ne varie pas avec m
    - N'ont pas l'idée d'utiliser les coordonnées du sommet ou ne les connaissent pas.
    - N'ont pas l'idée non plus de créer l'intersection de la parabole avec l'axe de symétrie
    - Dans la partie conjecture, on peut aussi être amené à faire des calculs (abscisse du sommet) : problèmes de priorités de calculs, de parenthèses
  - Problèmes de syntaxe du point de vue logiciel : coordonnées séparées par une virgule et non point virgule…
- Difficulté à conjecturer graphiquement une équation de parabole de la forme $y = -x^2 + k$ *(Partie I 5.b))*

Problèmes rencontrés par les élèves dans la partie démonstration :

- Tous ou presque ont vu qu'il fallait travailler avec le discriminant Δ. (*Partie II 1.)*

  Mais ils se contentent d'exprimer Δ en fonction de m, posent l'inéquation $\Delta \geq 0$ et redonnent directement les solutions obtenues dans la partie conjecture sans résoudre l'inéquation. (*Partie II 1.)*
- Ne font pas le lien entre les coordonnées de S et le lieu géométrique des points S (*2.c)*
- Manque de temps pour certains

Travail à faire après cette séance :

La semaine qui suit ce TP, les élèves qui n'ont pas eu le temps de terminer la partie démonstration, la rendent rédigée en devoir maison.
Une correction de la démonstration est faite ensuite en classe entière.

Le but de ce TP est de déterminer le nombre de solutions de l'équation : $m\,x^2 + 2\,x + 1 = 0$ d'inconnue x suivant les valeurs du nombre réel m puis de déterminer le lieu géométrique des sommets des paraboles d'équation $y = m\,x^2 + 2\,x + 1$ lorsque m décrit R^* .

Partie I : Constructions et conjectures

1. En utilisant un curseur *m*, construire la courbe d'équation $y = m\,x^2 + 2\,x + 1$.
2. Conjecturer les valeurs du réel *m* pour lesquelles l'équation $m\,x^2 + 2\,x + 1 = 0$ admet au moins une solution.
3. On se place dans le cas où $m \neq 0$.
   a) Construire, quelle que soit la valeur de *m*, le sommet *S* de la parabole d'équation $y = m\,x^2 + 2\,x + 1$.
   b) En activant la trace du point S, conjecturer le lieu géométrique des points *S* lorsque *m* varie. Conjecturer une équation de ce lieu.
   c) Comment peut-on vérifier cette dernière conjecture à l'aide du logiciel ?

Partie II : Démonstrations

1. Démontrer la conjecture faite à la question 2. de la partie I.
2. a) Lorsque $m \neq 0$, exprimez les coordonnées du sommet *S* de la parabole d'équation $y = m\,x^2 + 2\,x + 1$ à l'aide *m*. En déduire le lieu géométrique des points *S* lorsque *m* décrit R^*.

Ce TP est fait 2 semaines après le TP 1. Sur le même thème que le TP 1 mais avec beaucoup moins d'indications (plus une prise en main)

Ce TP est évalué. Ils rendent leurs copies à la fin de l'heure.

Les élèves peuvent utiliser des notes qu'ils auraient prises tout au long de l'année sur différentes astuces ou syntaxes à respecter avec ce logiciel.

Problèmes rencontrés par les élèves:

- Les mêmes que ceux rencontrés dans le TP 1 mais moins fréquemment.
- Dans la démonstration de la question 1, très peu d'élèves ont envisagé le cas $m = 0$.
- Difficulté d'établir les coordonnées de S sous la forme $(\alpha, \alpha + 1)$
- Difficulté de démontrer que le lieu est la droite d'équation $y = x + 1$ privée du point de coordonnées (0 ; 1).

Apports de la partie conjecture pour la démonstration pour ces deux TP :

- La partie conjecture donne le plan de la démonstration : Dans le TP2, les différentes familles de courbes obtenues avec le logiciel pour $m = 0$ et $m \neq 0$ devrait donner l'idée d'envisager ces deux cas dans la démonstration.
- La partie conjecture aide à faire une démonstration complète : Dans le TP2, la conjecture sur le lieu : droite privée d'un point (ou peut-être plusieurs ?) indique qu'il faudra dans la démonstration se poser la question : toute la droite d'équation $y = x + 1$

est-elle décrite ou non ? S (α, $\alpha + 1$) avec $\alpha = -1/m$ et $m \neq 0$. α peut-il décrire R tout entier ?

L'évaluation de ces TP :

- Elle est basée sur le même principe que celle de l'épreuve pratique en Tale S.

« Le professeur ne regarde pas seulement le produit fini réalisé par l'élève, qu'il accompagne de ses conseils tout au long de sa démarche de résolution de problème » (Lettre de M. Le Recteur du 29 septembre 2009 au sujet de l'organisation d'épreuves pratiques en 3ème, 2nde et Tale S)

« L'évaluation porte sur la capacité de l'élève à réaliser avec l'aide éventuelle du professeur les manipulations demandées, d'exprimer en termes mathématiques une question ou un énoncé suggérés par l'observation de ce qui a été fait, et enfin de formuler oralement des éléments de preuve mathématique de ce qu'il a avancé.» (Recommandations du groupe des IPR de l'académie de Versailles pour l'épreuve pratique)

Elle porte donc aussi sur la réactivité de l'élève face aux aides mathématiques et techniques apportées et aux questions posées par l'évaluateur, à son retour sur ses erreurs.

- Le but est d'évaluer des compétences mathématiques, une assez bonne maîtrise de logiciels utilisés tout au long de l'année et non une utilisation experte de ceux-ci. L'élève doit donc pouvoir consulter un « mémento » sur lequel il aurait noté des fonctionnalités, « trucs et astuces » et syntaxes sur les différents logiciels utilisés de la 2nde à la terminale.

- L'évaluation ne devrait pas se faire de façon « linéaire » question par question.
    - ¼ des points sur l'élaboration de la figure ou de la feuille de calculs.
    - ¼ des points sur les conjectures à faire et les stratégies de vérification de celles-ci.
    - ¼ des points sur les prises d'initiative et la réactivité face aux aides proposées aussi bien techniques que mathématiques.
    - ¼ des points pour les démonstrations correctement rédigées.

- Une aide à l'évaluation : L'idée d'une grille d'évaluation comme pour l'épreuve pratique est reprise

Une grille d'évaluation dans laquelle l'évaluateur aurait des cases à cocher (compétence lambda : oui /non).

Mais il y a des difficultés quand même pour évaluer 16 à 18 élèves en 1 heure malgré cette grille.

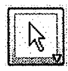
Quelques modifications éventuelles à apporter ?

- Dans le TP 2 : partie I question 1 : faut-il préciser l'utilisation du curseur ?
- Une autre progression possible: mettre en TP 0 dès le début de l'année, le TP de seconde sous forme de prise en main, sur le nombre de solutions de l'équation $x^2 = 2x + a$ suivant les valeurs du réel a : permet de réviser des notions de seconde et de s'intéresser à l'intersection de deux courbes plutôt que l'intersection d'une courbe et de l'axe des abscisses (équation du type $f(x)=g(x)$ plutôt que $f(x) = 0$).

Les TP 1 et 2 seraient alors évalués. Le TP 1 se ferait sans prise en main et le TP 2 pourrait être donné en classe ou en devoir maison.

c) En classe de seconde

Le but de l'exercice est de déterminer le nombre de solutions de l'équation $x^2 = 2x + a$ suivant les valeurs du réel a.

1. Ouvrir le logiciel GeoGebra.
2. Entrer dans la ligne de saisie f(x) = x^2 puis valider.
3. Cliquer sur le triangle en bas à droite de l'icône  et choisir Curseur puis cliquer dans la feuille de calcul, enfin cliquer sur Appliquer dans la boîte de dialogue. Un curseur symbolisant un nombre a que l'on peut faire varier, est créé.
4. Entrer dans la ligne de saisie g(x) =2 x + a puis valider.
5. Cliquer sur l'icône  puis approcher la souris du curseur a pour le déplacer. **Expliquer pourquoi les droites représentant la fonction g restent parallèles entre elles.**
6. Conjecturer le nombre de solutions de l'équation $x^2 = 2x + a$ suivant les valeurs de a.
7. Démontrer par le calcul que, si $a = -1$, l'équation admet une unique solution. Donner cette solution **puis la vérifier sur le graphique**.
8. Démontrer que pour tout réel x, $x^2 - 2x - a = (x-1)^2 - a - 1$.
9. En déduire que si $a < -1$, l'équation $x^2 = 2x + a$ n'admet aucune solution.
10. Déterminer les deux solutions de l'équation quand a plus grand que -1.

La prise en main du curseur est ici encore assurée par un guidage assez précis des actions des élèves, notamment des représentations des icônes à utiliser. L'instrumentation progressive de la notion de paramètre est gérée par le fait

- que le sujet demande aux élèves de justifier pourquoi le déplacement du curseur a donne à voir des droites qui restent parallèles, pour que le déplacement de ce curseur ne soit pas seulement un jeu de manipulation logicielle ;
- que les valeurs des solutions trouvées dans l'environnement papier-crayon doivent être vérifiées dans l'environnement logiciel à la question 7, ce qui est également attendu dans les questions 9 et 10 mais n'est pas explicitement demandé.

- à la question 10, il doit y avoir une gestion simultanée des variables et du paramètre, ce qui correspond à des manipulations ou observations différentes sur le logiciel au niveau des conjectures ou vérifications.

Dans cette dernière question, la manipulation du curseur donne à voir qu'il y a bien deux solutions lorsque a est plus grand que -1 mais ne permet pas de comprendre pourquoi algébriquement cette valeur -1 est discriminante, ni de déterminer les valeurs de deux solutions comme le demande l'énoncé. Elle appelle donc un travail en papier-crayon qui n'est pas indiqué explicitement. Le retour sur logiciel permet par contre des vérifications (feedbacks) qui peuvent indiquer à l'élève si sa réponse est correcte ou non.

Deux autres versions

Le but de l'exercice est de déterminer le nombre de solutions de l'équation (E) :
$x^2 = 2x + p$, d'inconnue x suivant les valeurs du nombre réel p.

<u>Partie I :</u> Constructions et conjectures

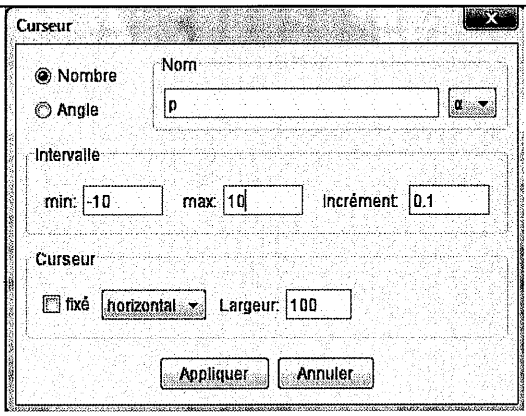
1. Ouvrir le logiciel GeoGebra.

2. Si la grille et/ou les axes manquent, faire un clic droit sur la feuille de travail et dans « propriétés » valider « grille » et « axes ».

3. Entrer dans la ligne de saisie $f(x) = x$ ^2 puis valider.
   Remarques :-  « Annuler frappe » permet de revenir à une ou plusieurs actions en arrière.
   - On peut toujours agrandir ou réduire la figure avec la molette de la souris ou avec  ou  de la 10ème colonne d'icônes.

4. Dans la 9ème colonne d'icônes en partant de la gauche, cliquer sur l'icône « curseur » 

 puis cliquer dans la fenêtre principale à l'endroit voulu. Une fenêtre apparaît, la remplir ainsi puis « Appliquer »



Un curseur symbolisant un nombre p que l'on peut faire varier dans l'intervalle [-10 ;10], est ainsi créé .
Pour modifier l'intervalle dans lequel varie p, il suffit de faire un clic droit sur le curseur créé et dans « propriétés » puis « curseur », on peut changer les bornes de l'intervalle.

5. Entrer dans la ligne de saisie $g(x) = 2x + p$ puis valider.

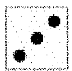
6. Cliquer sur l'icône  (1ère colonne) puis approcher la souris du curseur p pour le déplacer.

   Pourquoi le déplacement de la droite lorsque p varie se fait-il selon des droites parallèles ?

7. Déplacer le curseur de façon que la parabole et la droite aient deux points d'intersection. Dans la 2ème colonne en partant de la gauche cliquer sur l'icône  « intersection entre deux objets ».
   Cliquer ensuite sur la parabole puis sur la droite. Les deux points d'intersection entre la parabole et la droite sont ainsi créés et nommés A et B.

8. **Faire varier le curseur p et conjecturer le nombre de solutions de l'équation (E) suivant les valeurs de p.**

9. Déplacer le curseur de façon que la parabole et la droite aient deux points d'intersection A et B.

   Dans le menu déroulant de la 2ème colonne cliquer sur l'icône  « Milieu ou centre » et créer le milieu de [AB] en cliquant sur A puis sur B.
   Faire varier le curseur p. Que peut-on conjecturer sur le milieu de [AB] ? Comment peut-on valider cette conjecture ?

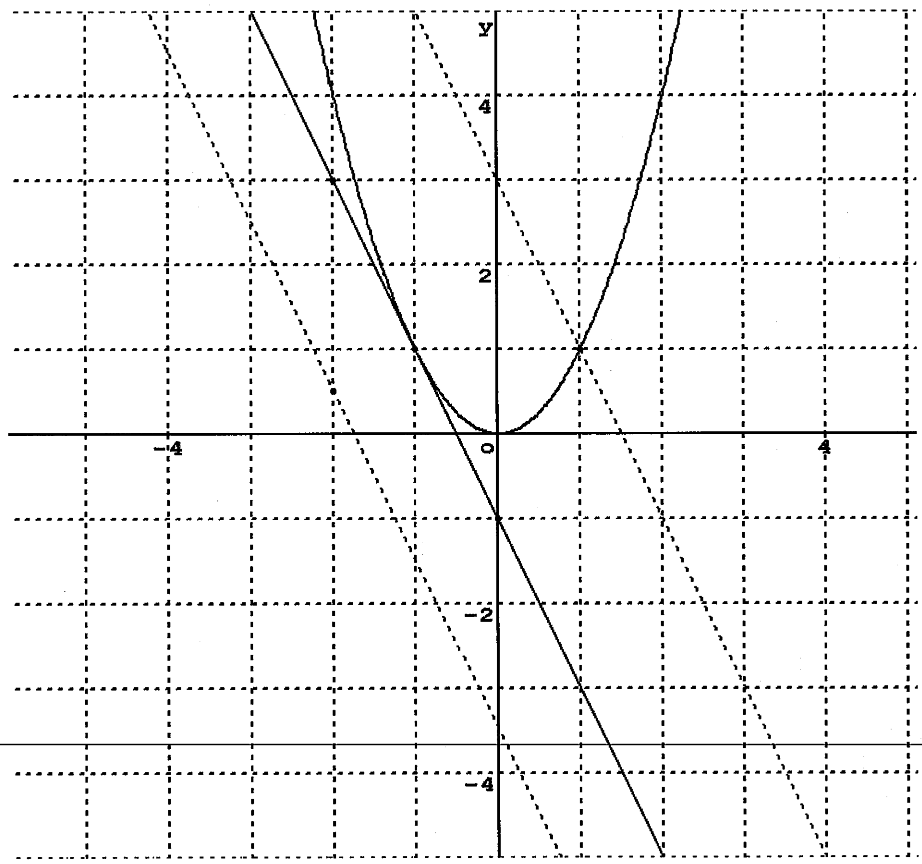
Partie II : Démonstrations

1. Démontrer que résoudre l'équation (E) équivaut à résoudre l'équation $(x-1)^2 = p+1$.
2. En déduire le nombre de solutions de l'équation (E) suivant les valeurs du nombre réel p.
3. Dans les cas où l'équation (E) admet des solutions, exprimer ces solutions à l'aide de p.
4. Démontrer alors la conjecture faite à la question 9 de la partie I.

POSITION D'UNE DROITE PAR RAPPORT A UNE PARABOLE

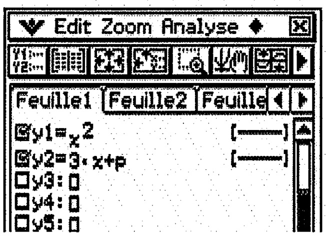
Dans le repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$), on considère la parabole P d'équation $y = x^2$

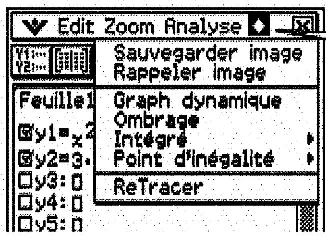
1) On considère également la droite D d'équation $y = -2x - 1$.



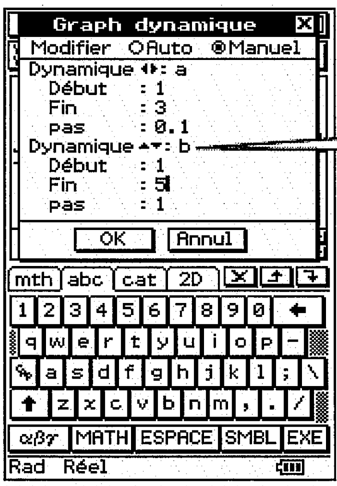
a) Déterminer les coordonnées du point commun à P et D.
b) A l'aide de la figure ci-dessus, donner l'équation réduite d'une droite D', parallèle à D et n'ayant aucun point commun avec P. Vérifiez algébriquement.

2) On considère maintenant les droites d'équation : $y=3x+p$ où p est un nombre réel quelconque.
Visualisation graphique

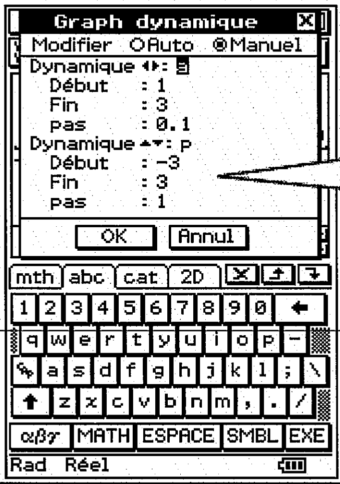




Ouvrir le menu : cliquer sur Graph dynamique



A la place de b mettre p en utilisant le Keyboard.



Dans cette boîte de dialogue :
On choisit de faire varier le paramètre p entre les valeurs -3 et 3 avec un incrément de 1, et en mode manuel.

Dès qu'on a validé cette boîte, le tracé est effectué (avec la valeur initiale $p=-3$). On modifie la valeur du paramètre p (donc le tracé de la droite) par des appuis sur les touches de déplacement vertical.

a) **Indiquer une propriété commune à toutes ces droites.**
b) Déterminer **graphiquement et par le calcul** la valeur de p pour que la droite correspondante ait un seul point commun avec P.

On dit que la droite obtenue est tangente à P.

3) On considère enfin toutes les droites passant par le point A (-3,4) sauf celle d'équation $x=-3$.
a) Expliquer pourquoi leur équation est de la forme : $y = m(x + 3) + 4$.
b) Déterminer en fonction de m le nombre d'intersections de ces droites avec P. En particulier, déterminer les deux valeurs de m correspondantes aux deux droites passant par A et tangentes à P.

Dans ce dernier énoncé, plus spécifique de la classe de première S, la prise en main de la calculatrice est aussi assurée par un guidage précis des actions des élèves. L'instrumentation progressive de la notion de paramètre est ici gérée par le fait
- que le sujet demande aux élèves de donner une propriété commune aux droites paramétrées (même idée que dans le sujet précédent : les actions sur le paramètre dans le logiciel doivent pouvoir être interprétées mathématiquement par les élèves).
- que les élèves doivent apprendre à piloter le pas du paramètre pour trouver graphiquement la valeur décimale exacte attendue. Les boites de dialogue les aident pour ce pilotage. On peut engager un travail explicite sur le concept de nombre réel en choisissant la situation pour que la valeur de p soit irrationnelle. Alors comme dans le sujet précédent les élèves ne peuvent que conjecturer une valeur approchée de p et doivent d'eux même passer dans l'environnement papier-crayon pour trouver la valeur exacte. La question de l'énoncé doit alors être
b) Déterminer la valeur de p pour que la droite correspondante ait un seul point commun avec P
La question 3) est complémentaire et ne doit être envisagée que si les élèves sont assez forts ou assez avancés. En effet, la notion de paramètre doit déjà être maîtrisée pour que les élèves puissent d'eux même transformer l'information graphique « toutes les droites passant par A(-3,4) » en information algébrique « équation paramétrée par un paramètre m ». Les valeurs de m attendues sont irrationnelles ce qui oblige à chercher dans l'environnement papier-crayon et à vérifier sur la calculatrice.

V. La question des aides orales et écrites à apporter aux élèves

On donne ici pour la classe de seconde à la terminale des sujets proches de ce que l'on peut attendre des élèves lors de l'épreuve de baccalauréat. La question des aides à donner aux élèves est spécialement développée.

Le premier exemple peut être proposé en classe de seconde ou en début de première S. Le choix est laissé d'utiliser l'un des deux outils précédents (GéoGébra par exemple comme logiciel de construction graphique).

On se donne un paramètre réel k.
On s'intéresse au nombre de solutions de l'équation (E) : $-x+3 = k / x$ pour x strictement positif.
1) En utilisant un logiciel de construction graphique ou une calculatrice graphique
a) conjecturer, suivant les valeurs du paramètre k, le nombre de solutions de l'équation (E).
Appelez l'examinateur pour valider la conjecture
b) Si $k > 0$, déterminez graphiquement une valeur approchée à deux décimales pour laquelle l'équation (E) a une unique solution.
Appelez l'examinateur pour valider votre réponse
2) Démontrez vos résultats et calculez les solutions de (E) en fonction du paramètre k.

Avec ce sujet, les élèves doivent mobiliser d'eux mêmes le curseur de géogébra ou le menu adéquat de la calculatrice pour créer un paramètre réel k. Sur le plan mathématique, ils doivent transformer le problème de résolution d'une équation fonctionnelle en problème d'intersection de courbes mais ce changement de cadre de travail (algébrique ← → graphique) doit avoir été travaillé dans des TP antérieurs (par exemple le premier exemple plus haut où ce changement de cadre est mieux pris en charge par l'énoncé). Un travail antérieur de la notion de paramètre, associé au maniement des logiciels, doit avoir permis aux élèves de distinguer correctement les paramètres des solutions de l'équation paramétrée. Le travail sur le logiciel permet aussi d'approcher la valeur de k pour laquelle le nombre de solution de l'équation change (0, 1 ou 2) mais ne permet pas aux élèves d'affirmer que cette valeur trouvée graphiquement est la bonne. Ils doivent donc travailler dans l'environnement papier-crayon pour retrouver cette valeur de k. Enfin, le travail sur logiciel ne permet pas de trouver les valeurs des solutions et donc nécessite de poursuivre le travail en papier crayon. Comme dans le sujet initial $\ln(x)=k\ x^2$, à chaque moment, les allers retours entre environnements peuvent permettent à l'élève de conforter ses propositions et de progresser.

Cette analyse détaillée permet de réfléchir a priori à ce que sont les aides discriminantes pour l'activité mathématique des élèves et ce que sont les aides qui peuvent ou non devoir être fournies par le professeur à ses élèves au fil du déroulement de la séance. On repère par exemple des évolutions dans les aides proposées par des professeurs à leurs élèves : plus précisément, par exemple, on relève dans le discours d'un professeur la deuxième année d'introduction du curseur en classe, une explication de cette fonctionnalité par « c'est un réel qui varie » alors que l'explication était plus pragmatique la première année.

E2 : « c'est quoi créer un curseur ? »
E1 à S : « on a déjà tout fait hier, vous l'avez déjà montré »
S : « tu cherches et tu crées un curseur, c'est un réel qui varie, tu cherches »
E2 : « c'est la 6eme (icône) »

L'aide « c'est un réel qui varie » renvoie l'élève à son activité et peut peut-être permettre que s'installe chez lui la disponibilité de l'association curseur - paramètre. Mais ceci est assez prospectif.

Pour terminer ce paragraphe sur les aides, voici deux autres exemples en classe de terminale S, proches d'un sujet type baccalauréat mais avec des aides pour les élèves qui sont décontextualisées des sujets. Ici le choix est bien d'expliciter les aides dans les énoncés, ce qui fait que tous les élèves y ont accès : cela peut permettre que la séance soit plus facile à gérer du point de vue du professeur et que moins d'aides orales doivent être données plusieurs fois. Cependant, pour certains élèves, ces aides peuvent être inutiles et donc les priver d'une activité mathématique riche. Pour d'autres, elles peuvent au contraire se révéler encore insuffisantes.

Les aides dans le premier sujet sont d'ordre mathématique uniquement : elles permettent peut-être aux élèves de comprendre ce qui est attendu au niveau d'une épreuve de type baccalauréat, tout en leur permettant d'avancer grâce aux aides données à part.

Les tangentes à la fonction exponentielle possèdent une propriété remarquable : si on prend A un point de la courbe représentative de exp, qu'on considère la tangente à la courbe en A et l'intersection B de cette tangente avec l'axe des abscisses, la différence entre l'abscisse de A et celle de B est toujours la même.
1) Vérifier à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique que cette propriété est bien vraie.
On se donne maintenant un paramètre réel k.
2) Vérifier que la propriété reste vraie si on prend la courbe représentative de la fonction qui à x associe exp(kx)
3) Justifier le résultat par un calcul mathématique et déterminer la valeur de cette distance en fonction du paramètre k.

Dans cette séance, on utilisera le logiciel Géogébra. Des aides mathématiques sont données ci-dessous.
Pour la question 3), on devra
- trouver l'équation de la tangente en un point A d'abscisse xA de la courbe représentative de exp
- trouver en fonction de xA les coordonnées de l'abscisse xB de l'intersection B de cette tangente avec l'axe des abscisses.

Dans ce second exemple, les aides sont d'ordre technique uniquement. Dans ce cas, cela permet peut-être aux élèves de dissocier ce qui relève des mathématiques proprement dites, y compris instrumentales, de ce qui relève du pur maniement technique des logiciels en jeu.

On note C la courbe représentative de la fonction *exp* dans un repère orthonormal du plan.

1) A l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, dire si les propositions suivantes semblent vraies ou fausses :

- la courbe C est dessus de la droite d'équation y=x ;
- pour tout réel x, on a exp(x) > 3x ;
- la droite y =(3e/2) x intercepte la courbe C en deux points distincts ;
- il existe une droite passant par l'origine et tangente à la courbe C.

Appeler le professeur pour vérifier vos réponses.

On se donne maintenant un paramètre réel *k*. On s'intéresse à la position relative de la courbe C et de la droite d'équation *y=kx*.

2) Conjecturer suivant les valeurs du paramètre réel *k* la position relative de la courbe C et de la droite d'équation *y=kx*.

Appeler le professeur pour vérifier vos conjectures selon les différentes valeurs de k.

3) Justifier sur votre feuille ces conjectures.

Aides techniques avec Géoplan

Pour créer un paramètre
- Créer / Numérique / Variable réelle libre dans un intervalle

Pour faire varier un paramètre avec les touches du clavier $\uparrow\downarrow$
- Piloter / Piloter au clavier et sélectionner le paramètre à piloter

Pour faire afficher la valeur d'un paramètre déjà créé
- Créer / Affichage / Variable numérique déjà définie

Aides techniques avec Géogébra

Pour créer un paramètre
- 6$^{\text{ème}}$ icône en partant de la gauche

Pour faire varier un paramètre avec les touches du clavier $\uparrow\downarrow$
- 1$^{\text{ère}}$ icône à gauche

Seules les aides orales peuvent permettre la différentiation des élèves au fil des déroulements mais dès la confection des énoncés, il y a beaucoup de marges de manoeuvres pour les enseignants, qui peuvent être investies différemment selon les séances ou selon les types d'élèves.

VI. Panorama de sujets autour de la géométrie plane [4]

a) En classe de seconde

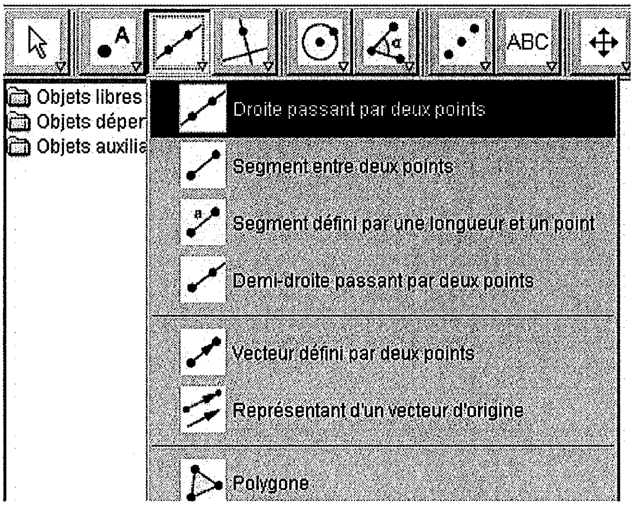
Droite d'Euler – prise en main de Géogébra

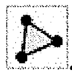
Ouverture du logiciel GEOGEBRA

1. **Ouverture du logiciel** :

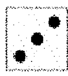
Chaque icône peut en cacher d'autres, que l'on obtient en cliquant sur le petit triangle blanc de chaque icône

Exemple :



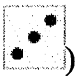
2. Cliquer sur affichage et décrocher le menu axes
3. **Construction de la figure :**
   a. Tracer un triangle ABC **avec l'outil polygone :** . Cliquer avec le bouton droit de la souris à l'intérieur du triangle, puis cliquer sur propriétés, vous pouvez changer la couleur l'épaisseur du trait ….

Cliquer sur l'icône  pour déplacer la figure.

   b. Placer les milieux de [AB],[BC] et [CA], en utilisant l'icône  et renommer les C', A' et B' respectivement (en cliquant droit sur le point et renommer)
   c. Tracer, en couleur, deux médiatrices (icône ) puis nommer O leur point d'intersection (icône ). Tracer le cercle circonscrit au triangle ABC (voir

---

[4] Les paragraphes sont essentiellement rédigés par les enseignants qui ont mené les séances

icône cercle). Puis placer le point D image de A par la symétrie de centre O (icône ) Où se trouve ce point D ? Tracer les segments AD, DC et DB.

d. Tracer, en couleur, les trois hauteurs du triangle ABC et appeler H leur point d'intersection. Tracer en rouge la droite (OH).

Tracer le quadrilatère BHCD, en couleur. Quel semble être sa nature ? Quel serait donc le milieu de [HD].

e. Tracer, en couleur, deux médianes du triangle ABC et nommer G leur point d'intersection. Que

f. Tracer, en couleur, deux médianes du triangle ABC et nommer G leur point d'intersection. Que peut-on dire des trois points O, H et G ? Faire varier les points A, B et C pour le vérifier.

g. Tracer, en couleur le triangle AHD. Que semble représenter G pour ce triangle AHD ?

2. Imprimer votre figure
3. Démonstration : Justifier que BHCD est un parallélogramme.
   En déduire le centre de gravité d'AHD
   Démontrer l'alignement des ponts O, G et H (il s'agit **de la droite d'Euler)**.

Ce travail a été donné en classe de seconde pour une découverte du logiciel GéoGébra. Les élèves ont bien aimé jouer, mettre des couleurs partout et faire une belle figure, pas de problème de ce côté-là ! Rares sont ceux qui en une heure ont abordé la démonstration qui a été donnée finalement en devoir maison. Par contre, quand il a fallu démontrer, ils n'ont pas compris ce qu'il fallait démontrer : pour eux, G est un point de (OH), puisque cela se voit sur la figure ! Ou bien ils ont fait appel à la propriété de la droite d'Euler ! Personne n'a eu l'idée de différencier le centre de gravité G de ABC et le point d'intersection des droites (OH) et (AA') pour arriver à démonter que ces deux points étaient confondus ! Ceci correspond à un type de raisonnement trop difficile pour un élève arrivant en seconde.

En conclusion : ce TP permet une bonne prise en main du logiciel et il donne aux élèves l'occasion de revoir les droites remarquables du triangle. De plus, il permet de rencontrer cette propriété de la droite d'Euler, mais la démonstration reste un travail trop difficile dans un premier temps !

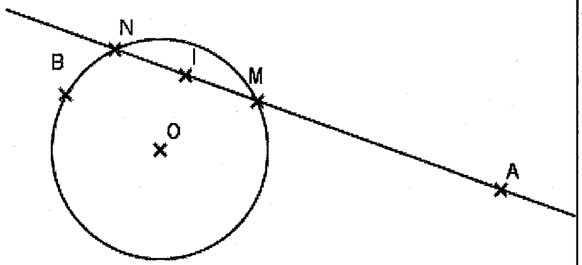
<u>Exercice</u>

1. Cliquer sur Fichier Nouveau et ne pas sauvegarder l'exercice précédent.
2. Cliquer sur Affichage et décocher Axes.
3. Cliquer sur l'icône et cliquer dans la feuille pour placer trois points. Le logiciel les appelle A, B, C. Cliquer sur le point C avec le bouton droit de la souris pour choisir Renommer et lui donner comme nom O.
4. Cliquer sur l'icône pour choisir Cercle défini par son centre et un point. Cliquer

successivement sur O puis sur B pour obtenir le cercle de centre O et passant par B.

Ce cercle est appelé c par le logiciel. Cliquer sur l'icône pour éventuellement déplacer le point A de façon à ce qu'il se trouve à l'extérieur du cercle comme ci-dessous.

5. Cliquer sur l'icône puis s'approcher du cercle pour placer un point sur le cercle. Renommer ce point M. Cliquer sur l'icône pour tracer la droite (AM). Cliquer sur le petit triangle de l'icône, choisir Intersection entre deux objets et créer l'autre point d'intersection entre (AM) et le cercle c. Il faut le Renommer N. Dans le menu de l'icône choisir Milieu et créer le point I milieu de [MN].
6. Déplacer le point M sur le cercle. Quel semble être l'ensemble parcouru par le point I ? Pour visualiser cet ensemble, cliquer avec le bouton droit sur le point I et dans le menu qui s'ouvre, cocher Trace activée. Déplacer alors M.
7. A l'aide du logiciel, que peut-on tracer pour vérifier cette conjecture ?
8. On souhaite démontrer cette conjecture :
    a) Tracer le triangle OIA. Quelle est sa nature ?
    b) A quel ensemble appartient le point I ?
    c) Tout l'ensemble est-il parcouru ?



Dans cet exercice, le lieu à trouver est un arc du cercle de diamètre [AO] mais les élèves pensent quelquefois à un arc du cercle de centre A et passant par O. Le déplacement du point A peut les faire douter et ils sont motivés par la recherche du centre. On peut leur demander de vérifier leur conjecture en traçant le cercle conjecturé.

Les élèves peinent ensuite dans la phase de démonstration. Il faut dire que si cet exercice est utilisé comme prise en main du logiciel, l'activité comporte beaucoup de nouveautés : première fois avec un logiciel de géométrie, première activité expérimentale, premier lieu géométrique (et en plus le lieu est incomplet).

D'autres formes de cet énoncé ont été testées : coordonnées des points et rayon fixés au départ, construction moins guidée, preuve de la conjecture moins détaillée. Dans ce dernier cas, il faut donner oralement des questions intermédiaires pour éviter que les élèves ne restent bloqués. Les différences de rapidité des élèves sont accentuées en TP et pour certains, la démonstration est à terminer à la maison.

b) En classe de première S

Recherche d'un lieu géométrique $1^{ère}$ S

Enoncé :

Dans le plan $\mathcal{P}$, A et B sont deux points distincts et M est un point quelconque variable sur le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$.
G est le barycentre de $(A\,;\,1)$, $(B\,;\,2)$ et $(M\,;\,3)$.
Il s'agit de déterminer le lieu géométrique $\mathscr{E}$ du point G lorsque le point M décrit le cercle $\mathscr{C}$.

I. ***Constructions et conjectures :***

a) A l'aide du logiciel *géogebra* construire les points A et B, le cercle $\mathscr{C}$ et un point libre M sur $\mathscr{C}$.

b) Construire le point G correspondant au point M.

Appeler l'examinateur pour une vérification de la construction faite

c) En observant plusieurs positions du point M sur $\mathscr{C}$ faire une conjecture sur la nature du lieu géométrique du point G.
Pour mieux visualiser cet ensemble, cliquer avec le bouton droit sur le point G et dans le menu qui s'ouvre, cocher « Trace activée ». Déplacer alors M sur $\mathscr{C}$. Quel semble être l'ensemble parcouru par le point G ?

Appeler l'examinateur pour une vérification de la conjecture faite

2. ***Démonstrations :*** On fera une figure que l'on complètera au fur et à mesure
(on pourra la faire avec *geogebra* et la sortir à l'imprimante)

a) Soit I le point commun à (AB) et (MG). Définir I comme barycentre de A et B et montrer que G est le milieu de $[IM]$.

b) La parallèle à (MA) passant par G coupe (AB) en A' et la parallèle à (MB) passant par G coupe (AB) en B'. Soit O le milieu de $[AB]$ et K le milieu de $[A'B']$.
Montrer que A' est le milieu de $[AI]$ et que B' est le milieu de $[BI]$.
Montrer que K est le milieu de$[OI]$ (on pourra utiliser le théorème d'associativité).

c) Déterminer la nature du triangle $A'GB'$.

d) En déduire le lieu géométrique $\mathscr{E}$ du point G lorsque le point M décrit le cercle $\mathscr{C}$ et construire $\mathscr{E}$.

La semaine qui a précédé ce TP, une fiche sur vecteurs et GeoGebra avait été distribuée aux élèves pour qu'ils s'exercent chez eux à manipuler des vecteurs et en particulier à construire des barycentres. Le cours sur le barycentre est déjà terminé depuis deux semaines. Le TP n'est pas rédigé sous forme de prise en main mais à la manière « épreuve pratique de Terminale S». Il est évalué.

Pour la construction du point *G*, la majorité des élèves a utilisé le théorème du barycentre partiel ; ce qui leur a donné en plus la réponse à la question 2)a). Beaucoup de difficultés ensuite pour les questions 2) b) et c) : les élèves n'ont pas tous vu le théorème de la droite des milieux et l'utilisation du théorème d'associativité pour « désassocier puis réassocier » a posé problème.

Suite à ce TP, une macro permettant la construction d'un barycentre de 2 points et d'un barycentre de trois points a été construite en classe et implémentée dans géogébra. Cette macro a été ensuite utilisée plus tard dans l'année dans le TP suivant : lieu géométrique d'un barycentre- démonstration utilisant une fonction.

1°S

TP 4 - Recherche d'un lieu géométrique

Dans le plan, on considère un rectangle $ABCD$. On se propose de déterminer le lieu géométrique du point G, barycentre du système $\{(A, m); (B, m); (C, 2m); (D, (m-2)^2)\}$ lorsque m décrit $\mathbb{R}$.

∘ Partie I : Observation à l'aide du logiciel géogébra

1. Construire un rectangle $ABCD$ et le barycentre I du système $\{(A, 1); (B, 1); (C, 2)\}$.
2. A l'aide d'un curseur m, construire le barycentre G du système $\{(A, m); (B, m); (C, 2m); (D, (m-2)^2)\}$
3. Quelle conjecture peut-on faire sur le lieu géométrique du point G lorsque m décrit $\mathbb{R}$?

Appeler le professeur pour une vérification de la construction et de la conjecture

∘ Partie II : Démonstration

1. Justifier que G existe quel que soit $m \in \mathbb{R}$.
2. Montrer, que pour tout réel m, $\overrightarrow{DG} = \frac{4m}{m^2+4}\overrightarrow{DI}$ (on envisagera le cas $m = 0$ et le cas $m \neq 0$).
3. Soit f la fonction définie sur $]-\infty ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{4x}{x^2+4}$
   a. Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
   b. Calculer la dérivée f' de f.
   c. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation complet.
   d. Quelles sont les valeurs prises par $f(x)$ lorsque x décrit l'ensemble $\mathbb{R}$?
4. En déduire alors le lieu géométrique du point G lorsque m décrit $\mathbb{R}$.

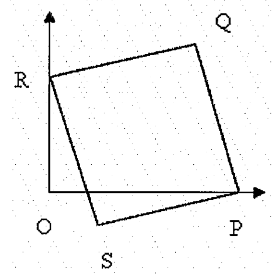
c) En classe de terminale S

Il s'agit d'un TP (page suivante) où, sans logiciel de géométrie dynamique, il est, pour la grande majorité des élèves, pratiquement impossible de conjecturer le lieu du point S. Il y a un va et vient intéressant entre la recherche « papier-crayon » et la démarche expérimentale : pour construire le carré, il est nécessaire, « en papier-crayon » d'analyser la situation mais, une fois celui-ci créé, c'est l'expérience à l'aide du logiciel qui va permettre la conjecture concernant le lieu du point S. Enfin, c'est de nouveau en « papier-crayon » que se fera la démonstration.

La construction initiale permet d'évaluer, chez les élèves de TS, quelles sont les connaissances de géométrie du plan qui sont réellement disponibles. Plusieurs méthodes sont envisagées mais dans la plupart des cas, cette construction ne s'est pas faite facilement.

Des améliorations sont peut-être nécessaires : d'une part, demander, dans la partie expérimentale, comment vérifier le fait que le point Q soit fixe. D'autre part, toujours dans la partie expérimentale, demander quelle semble être la position du point Q par rapport aux points limites.

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$
P est un point du demi-axe [0x) et R un point du demi-axe [oy) tels que : **OP + OR = a** où a est un réel strictement positif donné. On construit le carré direct PQRS.
Le but de ce module est de démontrer que le point Q est fixe et de trouver le lieu du point S lorsque P et R se déplacent sous la condition indiquée.



Démarche expérimentale

Pour répondre expérimentalement au problème posé, vous allez utiliser le logiciel Geogebra.

1. **Réalisation de la figure** : Lancer l'application Géogébra
   - **On prendra a = 5 .** Créer un curseur p.(p variant de 0 à 5). Placer le point P mobile sur [0 ;5]
   - Placer le point R
   - Tracer le carré PQRS. Indiquez votre méthode de construction.

   Appelez l'examinateur.
2. **Expérimentation**
   - Afficher la trace de S et faîtes varier le point P.

   Appelez l'examinateur.
3. **Conjecture**
   - Quel semble être le lieu du point S quand P varie ?
   - Imaginez une méthode pour confirmer expérimentalement cette conjecture.

   Appelez l'examinateur.

Recherche d'une démonstration

On appelle p l'affixe de P. On a OP = p, p décrit l'intervalle [0 ; a]

1. a) Quelle est l'affixe de R ?

b) Prouvez, par le calcul, que l'affixe q de Q ne dépend pas de p. (on pourra utiliser un quart de tour de centre Q)
c) Précisez la position de Q par rapport aux points « limites » P_0 et R_0 tels que :

$$OP_0 = OR_0 = a$$

2. Démontrer que l'affixe s de S s'exprime sous la forme s = $(p - \frac{a}{2})(1 - i)$
3. a) Déduisez-en les coordonnées de S en fonction de p et a.
   b) Démontrer que S décrit un segment lorsque p décrit l'intervalle [0 ;a]

VII. Panorama de sujets mettant en jeu le tableur [5]

Le tableur, même s'il n'est pas à l'origine développé à des fins d'enseignement, semble également être un bon outil à la transition arithmétique algèbre comme l'a montré Haspekian dans sa thèse. Au lycée, d'autres connaissances mathématiques à faire acquérir aux élèves peuvent lui être associées : les notions de suites et les notions de récurrence notamment.

a) Suites hongroises

Le sujet de la page suivante est extrait de la brochure « Maths entre écran et papier » de Jacques Lubzanski et Isabelle Lallier-Girot (2008).

Dans ce TP, il y a un effort pour ménager l'entrée en activité des élèves qui a priori découvrent l'usage du tableur. Cependant la question A-3) peut être analysée comme difficile. Dans cette question A-3), il y a d'une part une adaptation mathématique liée au passage des définitions explicites données des suites (U_n), (V_n), (W_n) en fonction de n à des expressions par récurrence et d'autre part une mise en fonctionnement de la connaissance tableur de recopie vers le bas. C'est d'ailleurs cette question qui a posé les premières difficultés majeures aux élèves et il faudrait la scinder en deux sous-questions.

L'activité d'expérimentation et de conjecture du fait que $W_n = (2n+1)/3$ est organisée et permise aux élèves dans la partie B) du sujet. Cependant, là encore, cette activité est accompagnée à la fois sur le plan mathématique et sur le plan instrumental. Il reste des activités de traduction des observations faites sur le tableur en expression algébrique, notamment exprimer W_n en fonction de n, ce qui participe de l'activité expérimentale avec un tableur.

Enfin, la partie théorique est également accompagnée en balisant deux méthodes pour établir l'expression explicite de (V_n) et (W_n) mais il reste là encore de l'activité mathématique à la charge des élèves. Finalement, ce sujet est un sujet intéressant pour démarrer l'année de terminale S avec le nouvel outil tableur : les connaissances mathématiques utiles sont des connaissances anciennes mais la démarche expérimentale est bien en germe dans ce sujet. En outre, la genèse instrumentale est réfléchie aussi puisque seule la fonctionnalité de recopie vers le bas, associée à la notion de suite définie par récurrence est utilisée.

[5] Les paragraphes sont essentiellement rédigés par les enseignants qui ont mené les séances

L'idée du travail ci-dessous provient d'un manuel scolaire de mathématiques hongrois : "*Matematikai fogalmak, tételek*" (Hajnal Imre, Szeged, 1997).

On note u_n la somme des entiers de 1 à n, et v_n la somme des carrés des entiers de 1 à n :

$$u_n = 1+2+3+\ldots+n \quad ; \quad v_n = 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$$

L'objectif de ce travail est d'observer et d'étudier la suite des quotients $w_n = \dfrac{v_n}{u_n}$

A - MISE EN PLACE DU CALCUL

1. Ouvrir une nouvelle feuille de classeur. Créer cinq colonnes, intitulées : n , u_n , n^2 , v_n et w_n .
2. La ligne sous les entêtes correspondra à $n = 1$: saisir les valeurs correspondantes dans chacune des colonnes.
3. Dans la ligne suivante, saisir les formules qui permettront d'obtenir par recopiage vers la bas les valeurs successives de n , u_n , n^2 , v_n et w_n. Recopier vers le bas jusqu'à $n = 20$.

B - OBSERVATIONS ET CONJECTURES

1. **Ecriture décimale de w_n**
   a. Observez les valeurs obtenues pour w_n : qu'est-ce qui est remarquable ?
   b. Quelle conjecture pouvez-vous faire sur l'écriture décimale des nombres w_n ?
   c. Recopiez plus loin vers le bas : votre conjecture reste-t-elle valable ?
2. **Nature de la suite w_n**
   a. Créez un graphique représentant w_n en fonction de n.
   b. Quelle allure a ce graphique ? A quel type de suite cela correspond-il ? Quelle conjecture pouvez-vous faire sur la nature de la suite w_n ?
   c. Quelle nouvelle colonne pouvez-vous créer pour mettre à l'épreuve cette conjecture ? Faites le !
3. **Expression de w_n en fonction de n**
   a. A quelle expression $w_n = f(n)$ conduit votre conjecture précédente ?
   b. Créez une colonne intitulée $f(n)$, où vous saisirez la formule permettant d'obtenir les valeurs successives de $f(n)$ par recopiage vers le bas.
   c. Les valeurs obtenues avec l'expression $f(n)$ coincident-elles avec celles obtenues pour w_n ?

C - CALCULS LITTERAUX

On peut établir, et on admettra ici, que pour tout $n \geq 1$, $u_n = \dfrac{n^2+n}{2}$ et $v_n = \dfrac{2n^3+3n^2+n}{6}$

1. **Vérification des formules**
   a. Créez deux nouvelles colonnes correspondant aux formules ci-dessus.
   b. Vérifiiez que les valeurs données par ces formules concident avec celles que vous avez calculées au A-3.
2. **Expression de w_n en fonction de n**
   a. Quelle expression $w_n = g(n)$ les formules données ci-dessus pour u_n et v_n permettent-elles d'obtenir ?
   b. Est-ce que pour tout $n \geq 1$ on a l'égalité entre l'expression calculée $g(n)$ et l'expression conjecturée $f(n)$? Conclure.
3. **Bonus**
   Factorisez les expressions données ci-dessus pour u_n et v_n, et déduisez en directement que w_n est une fonction affine de n. Est-ce que cette fonction est la même que celle que vous avez conjecturé ?

Ce TP a été réalisé deux fois. A chaque fois, un observateur était présent dans la classe et remplissait une fiche d'évaluation

Séance 1

La majorité des élèves a repéré le $\frac{2}{3}$ mais à ce propos est apparu un problème d'instrumentalisation : selon la connaissance du logiciel, il y avait la possibilité de faire apparaître plus de décimales, ce qui aidait à résoudre le problème.

La mise en place du calcul n'a pas posé de problème.

L'écriture décimale de W_n a fait apparaître des remarques variées mais souvent incomplètes.

Nature de la suite W_n : beaucoup d'erreurs concernant l'allure. Beaucoup ont parlé de fonction linéaire au lieu de fonction affine. Ils ont eu besoin d'aide à ce moment là.

Expression de W_n en fonction de n : des problèmes d'utilisation du tableur. Des élèves ont rentré « à la main » la valeur de la première cellule : « 1 » au lieu de la formule permettant ce calcul. Leur suite n'avait plus les bonnes valeurs et ils ne retrouvaient pas leur erreur.

Finalement, la séance a eu du mal à tenir en une heure.

Séance 2

Quelques problèmes dès la mise en place du calcul avec le tableur. Mêmes remarques concernant l'écriture décimale et la nature de W_n. Un problème de « temps » plus important. Certains élèves, à la fin, voulaient repartir sur un raisonnement par récurrence.

Dans les deux observations, beaucoup d'attention des élèves.

b) Suites récurrentes

L'exercice qui suit est plus épuré, toujours pour le début de la classe de Terminale S. Cette forme épurée suppose le fait qu'une majorité d'élèves peut dépasser simultanément les difficultés logicielles et les difficultés mathématiques pour entrer dans la démarche expérimentale. Les étapes importantes de cette démarche expérimentales sont bien présentes, notamment observation, conjecture et preuve. Les élèves qui ont déjà manipulé le tableur, s'ils sont assez nombreux dans la classe, peuvent aider leurs camarades pour les problèmes liés à l'utilisation du logiciel : c'est une force sur laquelle peuvent s'appuyer les professeurs lorsqu'elle est présente.

Expression du terme de rang n d'une suite récurrente

Énoncé

On considère la suite récurrente (u_n) de premier terme $u_0 = 0$ et telle que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 2n - 11$.

1. En utilisant un tableur ou une calculatrice calculer et représenter graphiquement les 20 premiers termes de cette suite. Le nuage de points obtenus a-t-il une particularité ? Si oui laquelle ?

   Appeler l'examinateur pour une vérification de la particularité trouvée.

2. n étant donné, on peut calculer la valeur de u_n si on connaît la valeur de u_{n-1}. On voudrait à présent pouvoir calculer, pour n'importe quelle valeur de l'entier naturel non nul n, la valeur de u_n sans pour autant connaître la valeur de u_{n-1}. Pour cela il faudrait disposer d'une formule donnant u_n en fonction de n.

   (a) À l'aide des observations faites dans la première question, conjecturer une formule donnant, pour n'importe quelle valeur de l'entier naturel n, u_n en fonction de n.

   Appeler l'examinateur pour une vérification de la formule trouvée.

   (b) Démontrer cette formule.

Production demandée

- Le nuage de points attendu dans la question 1 et la particularité trouvée à ce nuage.
- La stratégie de démonstration retenue à la question 2 ainsi que les étapes de cette démonstration.

Cette fiche, donnée lors de l'expérimentation 2007 en TS, peut ainsi se faire tôt dans l'année scolaire, dès fin septembre en salle informatique, en demi groupe mais ce sujet peut très bien être traité à la calculatrice.

Du point de vue mathématique, elle fait réviser le trinôme vu en 1ère, permet de mieux comprendre différentes façons de définir une suite (une suite définie seulement comme fonction de n, une suite définie par récurrence). Elle permet aussi dans la partie « preuve » de réinvestir le raisonnement par récurrence qui vient d'être découvert. Enfin, elle ne donne aucune prise en main de logiciel donc elle permet de faire le point sur les compétences des élèves sur ce sujet en début de terminale et leur laisse une grande liberté d'action.

En ce qui concerne les observations lors de la réalisation effective de cette fiche, comme il n'y pas d'aide en ce qui concerne le logiciel, le professeur, en début d'année est très sollicité. D'ailleurs certains élèves préfèrent utiliser d'abord la calculatrice dont on vient de réviser l'emploi sur les suites récurrentes. Rapidement tout le monde utilise cependant l'ordinateur. Obtenir la formule du trinôme x^2-12x n'est pas du tout évident pour la majorité des élèves et une reprise en main collective de la classe est souvent nécessaire. Une fois la conjecture établie, l'idée de la vérifier expérimentalement en créant une nouvelle suite du type un = f(n) n'apparaît pratiquement jamais. Enfin, peu d'élèves ont le temps de prouver la conjecture pendant l'heure en salle informatique. Une rédaction de compte rendu à terminer à la maison est donc demandée aux élèves.

Le second sujet est donné souvent en devoir maison. Il est plus guidé.

Activité TICE

Avec la calculatrice :

1) Trouver la formule de récurrence qui permet d'afficher sur la table des valeurs de la calculatrice les premiers termes de la suite (u_n) telle que pour tout n de $\mathbb{N}^*$,
$u_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n$.

2) Même question pour la suite (v_n) telle que pour tout n de $\mathbb{N}^*$,
$v_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + n^3$.

3) Afficher sur un même écran les 7 premiers termes de chacune de ces deux suites.

Avec un tableur :

1) Dans la colonne A afficher le rang des termes de la suite : la nommer n en A1, puis pour afficher les nombres entiers de 1 à 30 : en A2 afficher 1, quelle formule afficher en A3 pour obtenir toute la colonne ?
2) Dans la colonne B : la nommer Un en B1, puis pour afficher les termes de la suite (u_n), que faire en B2 ? en B3 ?
3) Dans la colonne C : la nommer Vn en C 1, puis pour afficher les termes de la suite (v_n), que faire en C2 ? En C3 ?

Avec une feuille et un stylo

1) Quelle conjecture peut-on faire ?
2) La prouver.

Du point de vue mathématique, il s'agit d'aider à faire comprendre qu'une suite peut être définie à l'aide d'une somme dont le nombre de termes augmente, de faire écrire une relation entre deux termes consécutifs de telles suites pour pouvoir en calculer les premiers termes avec une calculatrice ou un logiciel. Donc il s'agit de faire concevoir une formule de récurrence pour pouvoir utiliser les TICE et bénéficier ensuite de leur apport. Cependant, ce devoir est très directif, même s'il y a une conjecture, la dimension expérimentale est assez peu présente.

Comme c'est un devoir maison, le sujet apporte une aide pour le logiciel dans le but que tous les élèves puissent afficher les résultats. En général les résultats sont bons, les élèves peuvent travailler à plusieurs au CDI. Certains élèves impriment les résultats affichés sur leurs postes et les rendent avec leurs devoirs.

c) Arithmétique en seconde

La séquence proposée dans ce paragraphe a été proposée à des élèves de seconde en début d'année. Elle a été construite afin de répondre à deux objectifs : la prise en main du tableur et l'introduction à la démarche expérimentale.
En ce qui concerne les mathématiques cette activité s'appuie sur des connaissances en arithmétique, en particulier les nombres premiers et les multiples. En algèbre, c'est l'occasion pour les élèves d'approfondir leurs connaissances sur les développements et les factorisations.
Les problématiques sous-jacentes à l'élaboration de cette ressource proviennent des questions abordées dans notre groupe de l'IREM, « TICE et démarche expérimentale ». Je souhaitais introduire progressivement la démarche expérimentale. A travers l'observation du travail des élèves, j'espérais avoir des éléments de réponse aux questions suivantes : quel rapport les élèves vont-ils établir entre l'expérimentation et la démonstration ? En quoi et comment l'outil informatique aide-t-il à l'élaboration de la conjecture ?

Voici les trois exercices qui ont été proposé aux élèves.

Exercice 1.
Utiliser le tableur pour remplir le tableau suivant et faire une remarque sur les nombres obtenus. Peut-on généraliser cette remarque à tout entier n ?

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
n^2-n+41									

Exercice 2.
« Si je multiplie ensemble quatre entiers consécutifs et que j'ajoute un, je trouve un carré parfait. »
C'est vrai ou faux ?

Exercice 3.
Calculer en utilisant le tableur 1x2x3+2, puis 2x3x4+3, puis 3x4x5+4, et ainsi de suite jusqu'à 19x20x21+20.
Quelle conjecture peut-être émise ?
Cette conjecture est-elle vraie ?

Dans le premier exercice, une seule question est posée. Elle est ouverte et simple. Pour répondre à la question les élèves sont obligés d'effectuer plus de calculs que ceux qui sont proposés. Ils doivent réinvestir les récentes connaissances sur tableur en copiant - glissant une formule qui est donnée. Pour mener la démonstration, les élèves sont invités à aller consulter la table des nombres premiers dans leur livre. La démonstration est simple car un contre exemple est facilement observable.

Pour résoudre le deuxième exercice, les élèves doivent avoir l'initiative des calculs à effectuer et organiser une feuille de calcul. La conjecture est facile à émettre. En revanche les élèves sont amenés à introduire une stratégie pour la vérifier et ils doivent la démontrer. A ce niveau, on peut s'attendre à des difficultés pour mener les calculs algébriques.
Dans le troisième exercice, les élèves auront à organiser une feuille de calcul. La conjecture n'est pas évidente; des allers-retours entre conjecture et tableur sont nécessaires à son élaboration.

Cette séquence a nécessité trois séances consécutives au mois d'octobre. Les élèves ont eu un travail de recherche à faire à la maison entre la deuxième et troisième séance. Une production écrite, détaillant la recherche des exercices 2 et 3, et le fichier Excel associé ont été ramassés à la fin de la troisième séance.

La première séance se déroule en module. Les élèves travaillent en binômes en salle informatique et doivent utiliser explicitement le logiciel Excel. Ils sont autonomes et répondent aux questions sur la fiche élève qui est distribuée. La première partie de cette séance concerne uniquement la prise en main du tableur qui est très guidée. L'exercice proposé en première partie n'est pas présenté dans cet article. Le travail de recherche est abordé uniquement dans la deuxième partie de la séance et durera 30 minutes. Dix minutes avant la fin de la séance, les élèves abandonnent les ordinateurs. Ils participent alors à une synthèse collective. La première partie et le premier exercice de recherche sont corrigés. Je ramasse les feuilles sur lesquelles les élèves ont travaillé.
Pendant cette séance, j'ai surtout apporté des aides instrumentales. En particulier, les élèves n'introduisent pas spontanément de formule lorsqu'ils utilisent le tableur. Sans aide de ma part ils organisent très mal leur feuille de calcul. Dans l'exercice 2, aucune stratégie n'est mise en place pour se convaincre de la réponse donnée après un seul calcul. Il n'y a aucune tentative de démonstration. Quant au troisième exercice un seul groupe a émis une conjecture correcte. C'est aussi le seul groupe qui a présenté les calculs en colonne et non en ligne.

La séance suivante se déroule en classe entière. Pour inciter les élèves à prendre des notes, j'annonce en début de séance que le prochain module portera sur les exercices 2 et 3. Durant ce module ils auront à rédiger une narration détaillée de leur recherche des exercices 2 et 3. A la fin de ce module, cette narration ainsi que le fichier Excel seront ramassés et notés. J'orchestre une synthèse collective des exercices 2 et 3 en utilisant le vidéoprojecteur. Je projette la feuille de tableur d'un groupe que j'avais enregistré à la fin de la séance précédente. On modifie collectivement cette feuille de calcul afin de faire apparaître une page lisible (on met les données en colonnes et non en ligne) et on entre des formules qui utilisent les cellules, ce que certains groupes n'avaient pas fait.
Nous travaillons ensuite sur les conjectures. C'est moi qui pose la question : comment utiliser le tableur pour ancrer notre conviction que le résultat trouvé est un carré ? L'idée de faire une

colonne où la racine carrée est affichée est retenue. Pour l'exercice 3, les élèves décident de procéder comme à l'exercice précédent. Je suis questionnée sur l'existence d'une telle fonction. Je suis donc amenée à introduire la racine cubique et à donner sa syntaxe sur le tableur. Je pose alors la question : « cette conjecture est-elle vraie ? ». Une discussion s'engage sur le fait qu'une feuille de tableur comporte un nombre fini de nombre d'entiers. Que se passe-t-il pour les entiers qui ne figurent pas sur la feuille ? Les élèves comprennent bien la question posée. C'est un élève qui a l'idée d'introduire une lettre pour sortir de ce dilemme. Il propose d'effectuer le calcul $x(x+1)(x+2)+(x+1)$. Mais comment prouver que c'est un cube ? Un élève affirme que c'est x^3. Je fais apparaître la colonne x^3 sur le tableur. On n'obtient pas le résultat escompté. On élève propose d'entrer la formule $(x+1)^3$. Au vu des résultats sur le tableur, tout le monde est convaincu qu'il s'agit du résultat cherché. Les élèves sont invités à démontrer que $x(x+1)(x+2)+(x+1)$ est égal à $(x+1)^3$. Après une phase de recherche individuelle, deux démonstrations sont proposées. L'une consiste à développer et montrer que les deux expressions sont égales. L'autre consiste à factoriser $x(x+1)(x+2)+(x+1)$.
Une discussion s'engage à propos de la démonstration de l'exercice 2. D'emblée les élèves voient que le problème se ramène à prouver qu'une expression du type $x(x+1)(x+2)(x+3)+1$ est un carré. Il est demandé aux élèves de chercher pour la prochaine séance une expression dont $x(x+1)(x+2)(x+3)+1$ serait le carré.

La troisième séance se déroule en module. Elle commence par la correction de l'exercice demandé. Les élèves ont développé $x(x+1)(x+2)(x+3)+1$ et n'ont pas pu répondre à la question. Certains ont développé $(x^2+1)^2$. On reprend cette idée et on observe qu'il manque un terme en x^3. Un élève propose alors de développer $(x^2+3x+1)^2$. On corrige au tableau et j'efface. Les élèves travaillent ensuite en binôme devant les ordinateurs. Ils doivent rédiger un compte-rendu détaillé de la recherche des exercices 2 et 3. Ce compte-rendu est ramassé à la fin de l'heure et le fichier Excel associé est enregistré sur une clé.

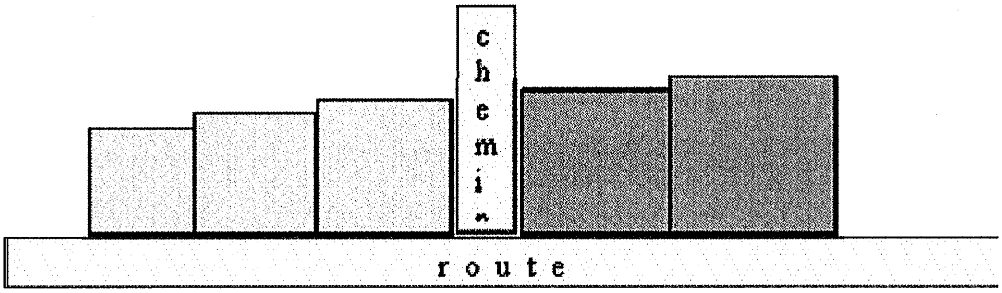
Afin d'évaluer le travail des élèves, j'ai adopté le barème suivant :
10 points pour le tableur, dont 3 points pour la présentation des calculs, 4 points pour les formules correctes et 3 points pour la pertinence des calculs.
10 points pour la rédaction, dont 5 points pour la narration et 5 points pour la démonstration.

En conclusion, le déroulement des séquences montre que j'ai pris en charge toutes les démarches. Les élèves n'ont pas été suffisamment autonomes pour que je puisse avoir une réponse, aussi bien à la question sur le lien entre l'expérimentation et la démonstration, qu'à la question sur l'aide possible du tableur à l'élaboration de la conjecture. Ce manque d'autonomie tient essentiellement à ce que les élèves ont dû faire face à trois apprentissages nouveaux : prendre en main le tableur, élaborer une conjecture, et valider une conjecture.

d) Arithmétique - suite

Le sujet qui suit est proposé en classe de seconde en deux heures.

Cinq frères et sœurs ont hérité de cinq terrains carrés dont les mesures des côtés sont cinq entiers consécutifs. Les terrains sont assemblés en deux groupes : les trois plus petits terrains d'un côté d'un chemin, et les deux plus grands terrains de l'autre côté... Ainsi les surfaces de part et d'autre du chemin sont équivalentes. **Comment trouver les dimensions de chaque terrain ?**



En utilisant le tableur, et en notant *les différentes étapes de votre recherche* résoudre ce problème.

Quelques questions … …

- **Qu'avez-vous à calculer ?**
- **Quelle égalité avez-vous à vérifier ?**
- **…………………………..**

<u>Quelques rappels sur le tableur :</u>

- Pour écrire une formule, il faut la faire précéder du signe =

Exemple :

A	B
n	formule
3	11
8	
12	

Dans la cellule B2 on a écrit : =2*A2+5
(Soit le calcul 2x3+5) le résultat affiché est 11.

- On peut « étendre une formule » soit sur une colonne soit sur une ligne

n	formule
3	11
8	21
12	29

Se placer sur le coin droit de la cellule B2 et « étendre vers le bas la formule » les résultats s'affichent alors

Première heure

- Utilisation du tableur comme aide, non à la démonstration mais comme « pouvant faire de nombreux calculs….
- Les élèves sont bien « rentrés » dans l'activité de recherche
- Activité propice à remobiliser les connaissances qu'ils ont sur le tableur
- Mais surtout travail sur les identités remarquables …
- Aucun groupe n'a songé de lui-même à changer de variable

Deuxième heure

- Repartir de l'équation $n^2 -8n -20 =0$ et faire la représentation graphique de la fonction correspondante ?
- Faire faire le changement de variable (les ?)
- Utiliser le tableur pour « passer » aux valeurs négatives, en « remontant » ?
- Montrer que $n^2 -8n -20$ peut s'écrire $(n - 4)^2 - 36$ et conclure ?

Maintenant, en classe de seconde (nouveau programme), on peut ne plus donner d'indication pour mettre sous forme canonique $n^2-8n-20$. Il peut être intéressant de comparer les deux expressions selon la variable choisie (soit $n^2- 8n - 20$ *soit* $n^2 - 12n$) et de voir les factorisations correspondantes. On pourrait même, en complément sur le calcul formel, effectuer tous les changements de variables possibles.

e) Méthode d'Euler

Equation différentielle et méthode d'Euler

Énoncé

Soit l'équation différentielle : $y' = -2y$. On admet que la fonction f solution de cette équation, définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $f(0) = 1$ est la fonction f telle que $f(x) = \exp(-2x)$.
On cherche à comparer $f(1)$ aux valeurs approchées obtenues en utilisant la méthode d'Euler avec différents pas.
On se place sur l'intervalle $[0, 1]$ en prenant un pas h égal à $\frac{1}{n}$, où n est un entier supérieur à 2.
On obtient ainsi, dans le plan muni d'un repère, une suite de points notés M_k, d'abscisse x_k et d'ordonnée y_k telles que :
$x_0 = 0$, $y_0 = 1$, et pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$, $x_{k+1} = x_k + \frac{1}{n}$ et $y_{k+1} = \left(1 - \frac{2}{n}\right) y_k$.
Pour tout entier k compris entre 0 et n, y_k est une valeur approchée de $f(x_k)$.

1. Déterminer l'expression de y_k en fonction de k (n étant une valeur donnée).

   Appeler l'examinateur pour faire vérifier l'expression obtenue pour y_k.

2. À l'aide d'un tableur, reproduire à l'écran et compléter le tableau suivant :

Valeur de n égale à	k	x_k	yk
10	0	0	1
Pas égal à	1	0,1	0,8
0,1	2	0,2	
	3		
	4		
	5		
	6		
	7		
	8		
	9		
	10		

3. En déduire une valeur approchée de $f(1)$.

   Appeler l'examinateur et lui présenter le tableau de valeurs construit avec $n = 10$.
   Lui expliquer comment modifier le tableau lorsque $n = 20$ ou $n = 30$.

Une analyse en terme d'activité potentielle des élèves révèle les difficultés de cet énoncé prévu pour des élèves de fin de terminale S. Par exemple, du point de vue mathématique, dès la première question, il faut reconnaître que la suite (y_k) est une suite géométrique avec une raison dépendante du paramètre *n*. Du point de vue de l'usage du tableur, la question 2 qui propose de reproduire et compléter un tableau nécessite la disponibilité de l'usage du $, ce qui ne peut se faire qu'en ayant compris le statut de paramètre du pas *n*. Du point de vue du caractère expérimental de la démarche, il n'y a ni observation à faire, ni conjecture à établir. Les commentaires donnés à propos de ce sujet à l'issue de l'épreuve 2007 soulignent « *contrairement aux autres sujets, on ne demande ici ni conjecture, ni démonstration* ».

Dans le deuxième sujet, en page suivante, au-delà des simplifications mathématiques (pas de mélange entre les x_k et les y_k, pas d'interférences entre les indices *k* et *n*), il y a une volonté de problématiser : chercher en utilisant la méthode d'Euler des valeurs approchées de $f(1)$ sans savoir a priori que c'est *exp*(-2) comme dans le sujet initial. Il s'agit donc d'essayer de réintroduire le caractère expérimental manquant dans le sujet initial. L'ordre des questions est pour cela totalement renversé par rapport à la version initiale et cela correspond mieux à une véritable démarche expérimentale, même si elle peut sembler encore limitée : calcul de $f(1)$ avec un pas de 1/10, puis de 1/20, puis de 1/50, puis en général pour retrouver les trois cas précédents et accéder à un pas 1/100. Enfin, la progressivité dans l'usage du tableur est ménagée puisque l'usage du $ n'est nécessaire dans le deuxième sujet qu'à partir de la question 4) contrairement à la version initiale où il est nécessaire dès le départ et peut se révéler un obstacle à l'activité.

TP : METHODE D'EULER

Soit une fonction f définie et dérivable sur *R* vérifiant **$f(0) = 1$ et $f'(x) = -2f(x)$ sur P**
On cherche à déterminer, en utilisant la méthode d'Euler, des valeurs approchées de $f(1)$ avec des pas différents et l'allure de la courbe représentative de cette fonction sur [0 ; 1].

1. On se place dans l'intervalle [0 ; 1] en prenant un pas $h = \frac{1}{10}$

On pose $x_0 = 0$ et $x_{k+1} = x_k + \frac{1}{10}$; Que vaut x_{10} ?
Avec un tableur calculer les valeurs de $f(x_k)$ pour $k \in \{0 ; \quad ;10\}$, en déduire f(1)
Utiliser l'assistant graphique pour avoir une idée de l'allure de la courbe représentative de cette fonction f sur [0 ; 1] avec un pas de 0,1

Appeler l'examinateur pour faire vérifier votre résultat.

2. Recommencer avec un pas de $\frac{1}{20}$.

Quelle est la valeur de $f(1)$?
Sur le graphique précédent rajouter l'allure de la courbe avec un pas de 0,05

Appeler l'examinateur pour faire vérifier votre résultat.

3. Recommencer avec un pas de $\frac{1}{50}$

Quelle est la valeur de $f(1)$?
Sur le graphique précédent rajouter l'allure de la courbe avec un pas de 0,02

Appeler l'examinateur pour faire vérifier votre résultat.

Imprimer votre schéma.

4. **Démonstration** :

Dans le cas général d'un pas $h = \frac{1}{n}$:
Quelle est la formule donnant une approximation affine de $f(x_1)$?
Quelle est la formule générale permettant d'exprimer $f(x_{k+1})$ en fonction de $f(x_k)$? Nature de cette suite $f(x_k)$. Expression de $f(x_k)$ directement en fonction de k.
Valeur de $f(1)$ directement en fonction de n
Créer un tableau donnant $f(1)$ directement en fonction du pas $h = \frac{1}{n}$ pour n = 10, 20, 50, 100.

Appeler l'examinateur pour faire vérifier votre résultat.

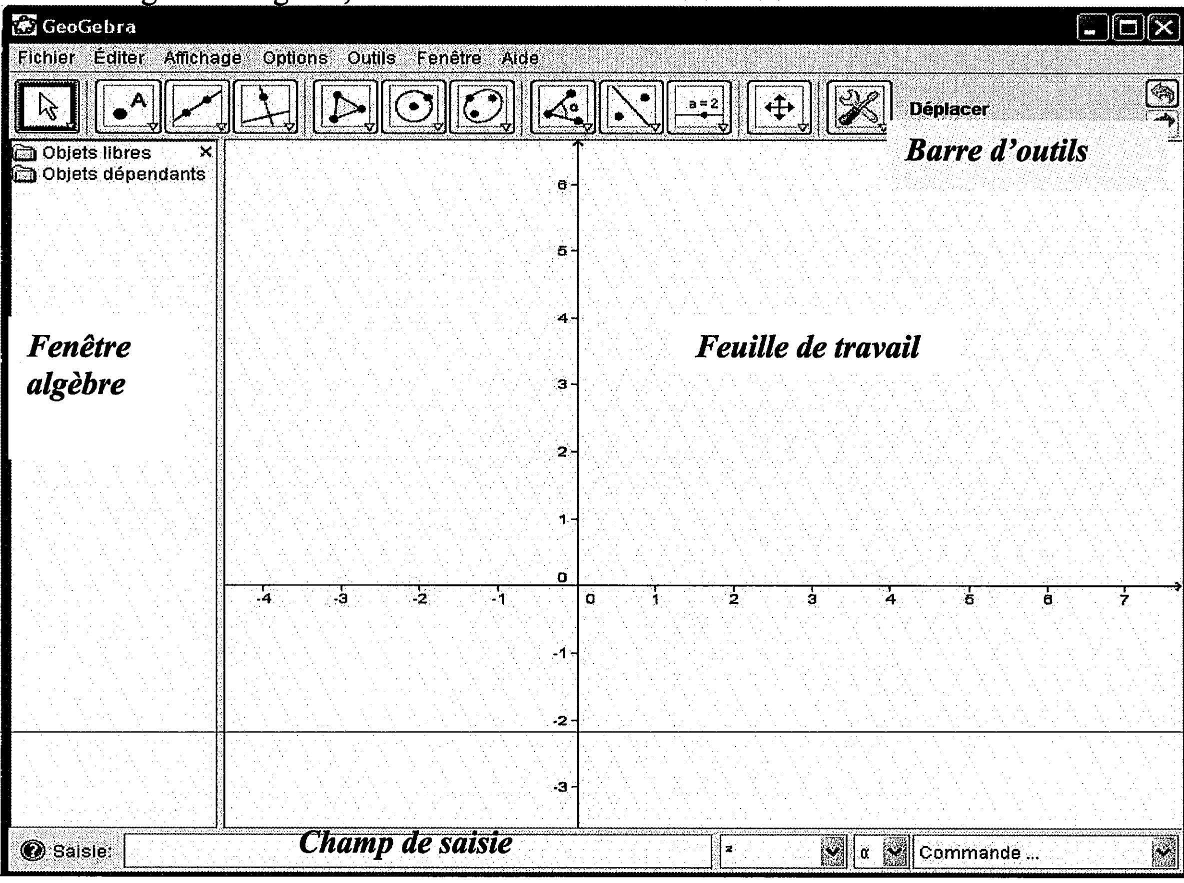
VIII. Démarche expérimentale avec plusieurs logiciels

a) En classe de seconde pour commencer

Peut-on trouver un réel positif qui une fois élevé au cube a la même valeur que son double augmenté de 1 ?
Mettre le problème en équation.
Partie A : *(les élèves avent se servir de leur calculatrice)*
En utilisant sa calculatrice :

- En traçant les courbes représentatives des deux fonctions $f(x) = x^2$ et $g(x) = 2x+1$ répondre à la question : Combien l'équation $x^2 = 2x+1$ a-t-elle de solutions ? (expliquer votre démarche)
- En utilisant les tables de calcul : donner, pour chaque solution, un encadrement, entre deux entiers consécutifs.
- Recommencer pour donner une valeur approchée de la solution positive à 10^{-1} prés.

Partie B :
En utilisant un traceur de courbe (Géogébra)
Ouvrir le logiciel Géogébra, vous obtenez la fenêtre suivante :



Dans la ligne de saisie taper f(x) = x^2, entrer puis g(x) = 2x+1. (*Vous voyez apparaître les courbes représentatives des fonctions f et g)*

En utilisant dans la barre d'icônes, deuxième colonne, l'icône , correspondant à l'intersection de deux objets, cliquer sur les deux courbes et apparaissent les points d'intersection des deux courbes, il suffit de lire les abscisses de ces points dans la fenêtre algèbre.
Conclure : Donner, pour chaque solution, un encadrement, entre deux entiers consécutifs. Peut on avoir une valeur approchée de la solution positive à 10^{-1} prés, à 10^{-2} prés, à 10^{-3} prés ?

Partie C :

En utilisant un tableur :

En première ligne : dans la première colonne indiquer x, dans la seconde colonne x^2, dans la troisième colonne 2x+1 et dans la quatrième colonne $x^2-(2x+1)$.

x	x^2	2x+1	x^2-(2x+1)
1			
2			

En cliquant sur les deux cases comportant 1 et 2 et lorsque le curseur devient une croix noir tirer vers le bas de la colonne jusqu'à 10.
Dans la troisième ligne: taper dans la deuxième colonne la formule =A2^2, puis dans la troisième colonne =2*A2+1, puis dans la colonne d'après : =B2-C2. (*après avoir taper = il suffit de cliquer dans la case voulue*)

x	x^2	2x+1	x^2-(2x+1)
1	1	3	-2
2			

Pour compléter le tableau il suffit de sélectionner la deuxième ligne et quand le curseur devient une croix noir, tirer les calculs vers la bas.
Conclure : donner, pour chaque solution, un encadrement, entre deux entiers consécutifs.
Recommencer une nouvelle une feuille de calcul permettant de donner une valeur approchée de la solution positive de l'équation à 10^{-1} prés.

- Conclure : donner une valeur approchée de la solution positive à 10^{-1} prés.

Recommencer pour avoir une valeur approchée de cette solution à 10^{-2} prés, puis à 10^{-3}prés.

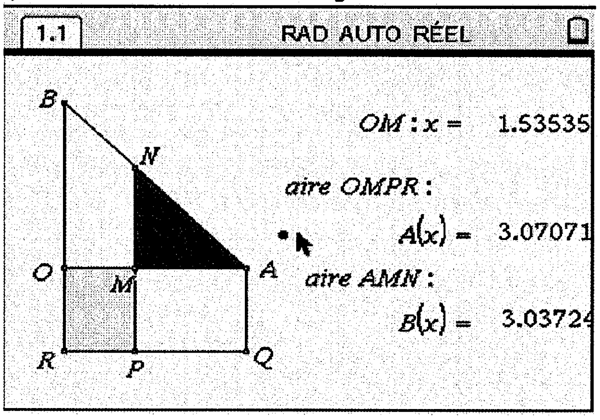
Partie D : Démonstration
Calcul algébrique :

Justifier que $x^3-2x-1 = (x+1)(x^2-x-1)$ et que $(x^2-x-1) = (x-\frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4}$.

En déduire la valeur exacte de la solution du problème.

b) En classe de seconde, en fin d'année (Ecolab)

Dans une expérimentation réalisée en 2008 en classe de seconde, Aldon, Baroux-Raymond et Hérault (voir Baroux-Raymond et Aldon, 2009) proposent à deux classes un travail sur la calculatrice TI-Inspire. Deux scénarios différents sont proposés à partir du même « germe de situation » à partir d'un rectangle (OAB) rectangle en O et d'un rectangle (OAQR) construit sur son côté [OA], il s'agit de déterminer s'il existe une position d'un point M sur [OA] de sorte que les aires (MNA) et (OMP) soient égales, lorsque (NP) est la parallèle à [RB] passant par M. Le fichier de la figure déjà construite est donné au départ aux élèves sur leurs calculatrices.



Dans la première classe, l'exploration géométrique de la figure avec l'affichage numérique des aires à égaler est imposée. Le calcul de l'expression algébrique des aires est demandé et la variable imposée. Les explorations graphique et numérique (avec le tableur) des aires sont également imposées. Dans cette classe, les élèves traitent chaque exploration séparément, sans établir de liens entre les différentes questions posées à chaque exploration. En particulier, ils ne perçoivent pas les problèmes de cohérences soulevés par les interactions entre les différentes applications de la calculatrice, notamment entre la valeur exacte obtenue algébriquement et les différentes valeurs approchées trouvées dans les applications géométriques, graphiques et tableurs.

Dans la deuxième classe, seule la question de l'existence d'un point M pour que les aires soient égales est posée. L'enseignant rappelle simplement la liste des différentes applications possibles (géométrique, graphique, algébrique et tableur) et impose seulement que deux au moins de ces applications soient utilisées. Il pointe enfin le fait que les élèves doivent dire si leur solution est exacte ou approchée. Même si certaines idées mathématiques, comme la continuité des phénomènes étudiés, ne sont pas développées par les élèves de la seconde classe, du fait notamment des explorations non imposées de certaines applications, il semble intéressant d'observer que la dimension constructive de l'activité est favorisée par l'organisation du second scénario. Dans cette deuxième classe, les élèves naviguent spontanément et sans contrainte entre les différentes applications de la calculatrice. Ils prennent en charge avec succès les questions de cohérence des valeurs obtenues et celle des valeurs exactes ou approchées. Ils terminent même le problème dans le temps imparti alors que dans la première classe, ils perdent du temps sur chacune des explorations demandées.

IX. <u>Evaluation des élèves</u> [6]

a) Généralités

Comment rendre la notation équitable ?

- Prendre en compte dans l'évaluation <u>l'hétérogénéité des sujets</u> et ne choisir si possible que des sujets de même difficulté.
- <u>Équilibrer le temps consacré aux élèves</u>. Sanctionner un élève qui accapare un peu trop l'examinateur.
- <u>Prise en compte des aides</u> :

Combien de temps avant d'apporter une aide et quelle aide ?

Quelles aides sont à pénaliser et comment les sanctionner (aides techniques liées au logiciel et aides mathématiques) ?

Au niveau des aides techniques : doit-on sanctionner un élève qui ne connaît pas certaines fonctionnalités d'un logiciel alors qu'il a eu une formation d'un an ou plus sur celui-ci ? Oui. Doit-on sanctionner un élève qui connaît une fonctionnalité particulière du logiciel mais ne sait plus l'utiliser ? Non.

Une aide papier pour chaque logiciel devrait être à disposition dans la salle d'examen.

Le candidat devrait pouvoir aussi consulter son cahier de TP sur lequel il a noté des fonctionnalités, « trucs et astuces » sur les différents logiciels utilisés de la 2nde à la terminale.

En ce qui concerne des aides strictement mathématiques (liées à des connaissances mathématiques non disponibles ou même absentes chez un élève) celles-ci devraient être sanctionnées.

Dans la partie démonstration, une erreur de calcul bloquant l'élève doit-elle être indiquée par l'évaluateur ? Dans ce cas le candidat doit-il être pénalisé s'il parvient ensuite à résoudre le problème ?

---

[6] Ce paragraphe a été rédigé par l'un des enseignants du groupe

Dans la partie démonstration, une erreur de raisonnement doit-elle être indiquée et, dans ce cas, sanctionnée ?
Pour un candidat complètement bloqué dans la partie démonstration, l'évaluateur peut-il l'aider à réfléchir sur un plan de démonstration ? Cette aide serait bien sûr pénalisante !

Des propositions sont faites pour améliorer la fiche d'évaluation et la fiche professeur :

- Ne pas mettre d'items ouverts mais aller vers des cases à cocher (compétence lambda : oui / non). Cela suppose d'être assez exhaustif et de savoir ce qu'il est pertinent d'évaluer.

- La fiche d'évaluation doit cependant, même si elle est propre à chaque sujet, avoir une structure globale qui reste stable afin de ne pas dérouter l'évaluateur.

- Alimenter la fiche professeur du sujet avec une palette assez exhaustive d'aides possibles à donner au candidat (lorsque c'est nécessaire, des rappels sur les fonctionnalités différentes des logiciels : le mode trace ou lieu de point ne s'obtient pas du tout de la même façon avec GeoGebra, Geoplan et une calculatrice ...)

b) Un exemple de fiche d'évaluation détaillée

Etude de lieux géométriques - Sujet 090, année 2007-2008

Sujet 090 Épreuve pratique de mathématiques (spécialité) Fiche él

Étude de lieux géométriques

Énoncé

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points $A(1;0$ $B(0;1)$. À tout point M du segment $[AB]$, on associe les points P et Q, projetés orthogon respectifs de M sur les droites (OA) et (OB), et les points R et S, sommets du carré $PRQS$ diagonale $[PQ]$ tels que $\left(\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PS}\right) = \frac{\pi}{2}$. On note aussi I le milieu du segment $[PQ]$.

Le but de l'exercice est d'étudier les lieux des points R et S lorsque M décrit le segment $[A$

1. (a) Réaliser une figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

   Appeler l'examinateur pour vérification de la figu

   (b) Visualiser les lieux des points R et S quand M décrit le segment $[AB]$, puis éme une conjecture sur la nature de ces lieux.

   Appeler l'examinateur pour vérification de la conjectu

   (c) Déterminer de manière expérimentale une équation du lieu du point S.

   Appeler l'examinateur pour vérifier la réponse et expliqu les manipulations effectuées.

2. Dans cette question, on se propose d'étudier ces conjectures en se plaçant dans le p complexe. On appelle x l'abscisse du point M, avec $x \in [0\,;\,1]$.

   (a) Montrer que l'affixe de M est : $x + i(1 - x)$.

   (b) Déterminer l'affixe de R ou celle de S. Justifier l'une des conjectures émises à question 1.

Production demandée

- Visualisation à l'écran de la figure ;
- Démarches et réponses argumentées pour les questions 2.(a) et 2.(b).

Compétences Évaluées	***Éléments permettant de situer l'élève***
1.(a) *L'élève est capable de* ***construire*** *une* ***figure*** *représentant la situation : il place les points* ***A, B, M, P et Q****, il est capable de mobiliser ses connaissances sur le carré pour construire les points* ***R et S****.* *Il tire profit des indications éventuellement données à l'oral par exemple pour la construction du carré.*	• Logiciel utilisé : • Figure juste avec - aide technique pour avoir M libre sur $[AB]$ fixe - P et Q : aide technique - R et S : aide technique aide mathématique - autre : …………………………………..
1.(b) *L'élève est capable de faire apparaître à l'écran les* ***lieux des points R et S (trace ou lieu).*** *Il est capable* ***d'émettre une conjecture*** *en cohérence avec ses observations,* ***sur les lieux observés.*** *L'élève tire profit des indications éventuellement données à l'oral.*	• Lieu de S affiché avec aide technique • Conjecture sur lieu de R • Conjecture sur lieu de S
1.(c) *L'élève est capable d'affiner ses observations pour* ***conjecturer une équation du lieu de S.*** *Il* ***met en oeuvre une procédure de contrôle de cette conjecture,*** *en utilisant le logiciel.*	• Conjecture sur équation correcte du lieu de S • Donne équation d'une droite et non d'un segment • Propose une vérification de cette conjecture
L'élève tire profit des indications éventuellement données à l'oral.	
2.(a)	• Affixe de M trouvée

L'élève montre un certain nombre de ***connaissances, de savoir faire*** *mathématiques sur le sujet :* ***équations de droites, nombres complexes ...***	sinon : - erreur de calcul - indication sur plan de résolution - aide mathématique sur équation de droite, colinéarité
2.(b) *L'élève montre un certain nombre de* ***connaissances, de savoir faire*** *mathématiques sur le sujet :* ***propriétés du carré, équations de droites, nombres complexes, transformations du plan*** *L'élève est capable d'émettre un retour critique sur ses observations.*	• Affixe de *R* ou *S* trouvée sinon : - erreur de calcul - indication sur plan de résolution - aide mathématique sur écriture complexe d'une rotation • Justification correcte de la conjecture du lieu de *R* ou *S* sinon : - erreur de calcul - Ne fait pas le lien entre affixe de *R* ou *S* et éq. du lieu • A traité *R* et *S* (bonus)

X. Synthèse : gestion de classe et TP informatique

a) Un bref aperçu des problèmes à prendre en compte [7]

1) Le professeur, en cours dialogué par exemple, montre comment un problème peut être traité avec un ordinateur en « poste- prof » et vidéoprojecteur.

Exemples possibles :
-on veut faire découvrir les congruences en TS spé étudier les restes dans la division de a par b, b>0 avec la touche MOD(a ;b)
- on introduit la théorie de la méthode d'Euler, f'=f et f(0)=1 , en cherchant des points proches de la courbe d'une telle fonction dont les coordonnées sont, en abscisse une suite arithmétique et en ordonnée une suite géométrique, on peut faire faire auparavant aux élèves un graphique papier crayon avec pas de 0.5, pas de 0.1 puis passer à l'ordi prof (dans ce dernier exemple, on peut d'ailleurs ici se poser la question de la dimension expérimentale)
On peut aussi envoyer un élève au tableau gérer une question informatique : certains savent déjà pratiquer !

[7] Ce paragraphe est rédigé par l'un des enseignants du groupe.

2) On peut faire expérimenter à la maison (ou au CDI) en donnant des **Devoirs-Maison.**
3) En salle informatique, avec les élèves devant leur propre poste, on enseigne et est enseigné de manière différente :

- côté professeur :

* il faudra se rendre compte que la gestion du tableau collective (si elle est possible) est à préparer soigneusement ou parfois même à éviter (car elle n'est pas facile : les aller-retour tableau collectif – poste individuel sont souvent peu fructueux car les élèves sont dans leur activité). Cependant, la reprise en main collective peut être nécessaire si le TP ne démarre pas.

* pour le professeur (mais aussi des stagiaires en pratique accompagnée) : il vit une nouvelle « expérience » de réactions d'élèves, il comprend mieux certains « malentendus » pédagogiques, il peut voir de façon personnalisée où les élèves « bloquent » et même s'ils ont compris ou pas les notions mathématiques vues en cours et nécessaires au TP

* cela demande beaucoup de disponibilité pendant la séance, le professeur est très sollicité

* les élèves sont de niveaux très différents au départ et encore plus à l'arrivée !

- côté élèves :

* on observe (si on n'est pas en évaluation) comment une idée peut se propager d'un groupe à l'autre, cela crée une dynamique, ils sont actifs !

* on peut ainsi espérer un degré d'autonomie plus important que dans un cours traditionnel et aussi de responsabilisation s'ils vont dépanner un élève en difficulté ;

*les élèves sont très demandeurs de l'aide personnalisée apportée par le prof : cela va vers l'idée de la réforme des lycées (dispositif « accompagnement personnalisé ») ;

* ce ne sont pas les mêmes aptitudes demandées qu'en cours traditionnel et les élèves de SI réussissent souvent mieux (et sont donc remis en confiance et remotivés) alors que les élèves de SVT sont souvent plus « maladroits » ;

* l'activité donne du sens aux notions de paramètre, d'équation de courbe, de récurrence.

Un moment délicat : La conjecture

- C'est le rendez-vous obligatoire oral avec l'enseignant dans les fiches épreuve-bac. Les conjectures vont fuser mais qui ne sont pas forcément les bonnes, d'autant plus si on laisse le sujet très ouvert. Et ce n'est pas toujours ce que l'enseignant attend !
- Elle peut dépendre du logiciel utilisé (par exemple sur Excel, on peut voir des élèves qui conjecturent qu'une suite est nulle à partir d'un certain rang parce que des 0 apparaissent mais qui en fait n'est pas nulle - cela fait donc partie de l'apprentissage pour les élèves de savoir contrôler la machine)
- Elle peut ne pas être « intéressante » du point de vue mathématique (si on avait prévu de faire trouver une relation entre a et b du type « a=b+1 », un élève peut « conjecturer » : « quand a tend vers $+\infty$, b aussi » !)
- Elle n'est pas nécessairement formulée comme l'enseignant le voudrait (il faut souvent aider les élèves à formuler comme le ferait un mathématicien ce qu'ils ont « découvert »

Une fois la conjecture établie : la « preuve »
C'est en fait, ce qui était la question fermée des exercices de bac : « montrer que... » (Remarque : pour créer des sujets, on peut reprendre des exercices de livres ou des problèmes de bac par exemple, l'exercice du bac national 2001 sur le barycentre a été « recyclé » en épreuve pratique en 2007 sujet 26).

Cette preuve, surtout si on débute avec la classe en salle informatique, très souvent on n'a pas le temps de la faire en classe pendant l'heure devant l'ordinateur.

Mais elle est pourtant nécessaire car c'est le fondement même de l'activité mathématique. D'où :

4) Le compte rendu :
Est-il à ramasser enfin d'heure ? A donner en devoir maison ?
Que contient-il ? Un récit de leurs essais : difficile à écrire pour certains élèves, car ils ont des problèmes de rédaction. La plupart du temps il ne contient que la preuve de la conjecture.

5) De plus, comment évaluer ces pratiques expérimentales en salle informatique ?
Ce n'est pas simple : cela ressemble à l'évaluation d'un oral.
Et le compte rendu est-il à évaluer comme un contrôle ? Un devoir maison ? Mais alors on ne peut souvent évaluer que la démonstration d'autrefois alors que cette démonstration ne devrait compter que pour ¼ de la note dans l'évaluation des épreuves pratiques bac.
Un autre moyen d'évaluer les acquis de telles séances est d'intégrer une question dans un contrôle écrit, on peut en effet aussi faire manipuler... La calculatrice pour faire établir des conjectures (ex : passer d'une formule de suite récurrente à une formule du type un= f(n))

6) Et tout ceci, à quelle fréquence ? Et avec quelle progression ? Cela dépend de l'enseignant !

b) Quatre exemples de témoignages et de progressions [8]

Un exemple de progression en seconde année 2009-10, en spirale :

- Généralités sur les fonctions :
  - Ensembles de nombres et intervalles de IR
  - Fonction, image antécédent, tableau de valeur, courbe représentative (lectures graphiques)
  - Variations, extremum.
- Géométrie dans l'espace :
  - Calcul de volume
  - Parallélisme.
- Statistiques descriptives

[8] Les progressions sont proposées par les professeurs.

- Calculs algébriques

Utilisation de la calculatrice : règles de priorités, calculs, nouvelles fonctionnalités. **1^er^ TP calculatrice**

Pour les fonctions : tableau de valeurs, courbe représentative : **2ème TP calculatrice**

TP info : le tableur : à partir de l'exercice d'Hyperbole. (Je l'ai modifié depuis !) *(présenté dans cette brochure au VIII a)*

TP info : prise en main de GeoGebra (pour la correction d'un DS (raté !) et travailler différemment : tracer la courbe représentative d'une fonction).

La géométrie dans l'espace : TP info section d'un solide par un plan : Dans Indice (Bordas) programme 2009 page 272

Statistiques descriptives : TP info : Dans Indice (Bordas) programme 2009 page154

<u>Un exemple de progression en 1$^{\text{ère}}$ S, année 2009-10</u>

J'utilise dès le début de l'année le logiciel GeoGebra avec un vidéo projecteur pour illustrer certaines parties du cours ou pour la correction de certains exercices ou de certains contrôles ou devoirs maison. Cela permet de familiariser assez rapidement les élèves avec ce logiciel.

J'incite le plus possible les élèves à utiliser GeoGebra pour les courbes de fonctions et les figures géométriques demandées lors des devoirs maison.

TP 1 : ***Le but de ce TP est de déterminer le nombre de solutions de l'équation : $x^2 - m x + 4 = 0$, d'inconnue x suivant les valeurs du nombre réel m puis de déterminer le lieu géométrique des sommets des paraboles d'équation $y = x^2 - m x + 4$*** **lorsque** ***m décrit*** **P .** *(présenté dans cette brochure au IV b)*

Ce TP est une prise en main du logiciel GeoGebra. Chaque élève est tout seul sur un poste. On a déjà traité en classe les chapitres suivants : généralités sur les fonctions et le second degré. On a déjà fait en classe deux résolutions d'équations du 2$^{\text{nd}}$ degré avec paramètre. La correction de la partie démonstration est faite en classe entière lorsque les deux groupes sont passés.

TP2 : ***Le but de ce TP est de déterminer le nombre de solutions de l'équation : $m x^2 + 2 x + 1 = 0$, d'inconnue x suivant les valeurs du nombre réel m puis de déterminer le lieu géométrique des sommets des paraboles d'équation $y = m x^2 + 2 x + 1$*** **lorsque** ***m décrit*** **P*** *(présenté dans cette brochure au IV b)*

Ce TP est fait 2 semaines après le TP 1. Il est sur le même thème que le TP mais il n'est pas rédigé sous la forme d'une prise en main. Les élèves sont évalués durant la séance (voir petit topo à ce sujet). Les élèves peuvent utiliser des notes qu'ils auraient prises tout au long de l'année sur différentes astuces ou syntaxes à respecter avec ce logiciel (sur leurs cahiers de cours ou d'exos). Les élèves rendent leurs copies à la fin de l'heure.

TP 3 : ***Recherche du lieu géométrique d'un point barycentre d'un système de 3 points lorsque l'un de ces points décrit un cercle.***
Ce TP est fait 2 semaines après le TP 2. Il est évalué. La semaine précédente, une fiche sur vecteurs et GeoGebra a été distribuée aux élèves pour qu'ils s'exercent chez eux à manipuler des vecteurs et en particulier à construire des barycentres. Le cours sur le barycentre est déjà terminé depuis deux semaines. Le TP n'est pas rédigé sous forme de prise en main mais à la manière « épreuve pratique de Tale ».

DM : ***Tangentes à une parabole.***
Ce DM est donné après le chapitre sur Nombre dérivé et est rédigé comme un TP (avec conjectures et démonstrations à faire avec GeoGebra). Les élèves peuvent se mettre par groupe de 2 (permet à ceux ne disposant pas d'ordi à la maison de pouvoir quand même faire le DM). Ils rendent leurs figures imprimées ou sur clé USB.

TP 4 : ***Recherche du lieu géométrique de l'orthocentre d'un triangle lorsque l'un des sommets du triangle se déplace sur une droite parallèle au côté opposé à ce sommet.***
Ce TP intervient après le cours sur Produit scalaire et équations cartésiennes de droites. Il est évalué.

Un exemple de progression en première S année 2009-10 et un commentaire sur l'évolution des élèves :

Je voudrais tout d'abord préciser dans quel contexte cette progression s'est déroulée.

C'est une analyse faite sur mes élèves de $1^{ère}$ S de l'année dernière. Il faut savoir aussi que j'enseigne dans un établissement dit difficile, que je rencontre des problèmes même en série S :

- Problème de niveau en mathématique
- Problème de discipline
- Élèves qui ne maîtrisent pas forcément le français
- Élèves réfractaires à toutes tâches scolaires (faire ses exercices…)

Je ne voyais donc pas comment intégrer dans ma progression des séances utilisant les TICE dans une démarche expérimentale et surtout je ne voulais pas perdre d'heures inutilement. Comme chacun le sait, les horaires actuels en série S n'étant pas forcément en adéquation avec les programmes.

Les sujets proposés aux élèves portent essentiellement sur la résolution d'équation avec un paramètre. Le 1er sujet est position d'une droite par rapport à une parabole (*présenté dans cette brochure au IV c).* Ce sujet a permis de prendre en main la calculatrice ClassPad de Casio. Le 2ème sujet est un sujet de type bac (*à partir de celui présenté dans cette brochure au V).* Ces deux sujets ont été réalisés en classe entière.

On donne un réel k. On s'intéresse au nombre de solutions de l'équation (E) : $-x+3=\frac{k}{x}$ pour x strictement positif.

1. En utilisant un logiciel de construction graphique ou une calculatrice graphique :

a) Conjecturer, suivant les valeurs de k, le nombre de solutions de l'équation (E).

Appeler l'examinateur pour valider la conjecture.

b) Si $k > 0$, trouver graphiquement une valeur approchée de k pour laquelle l'équation (E) a une unique solution.

Appeler l'examinateur pour vérifier la valeur trouvée.

2. Démontrer que pour $k < 0$, l'équation (E) a une unique solution.

Production demandée

- Pour la question **1.** b), recopier la valeur approchée obtenue pour k ;
- Réponse écrite pour la question 2.

Le 3ème toujours sujet type bac mais pour évaluer mes élèves (en demi groupe).

On donne un réel q. On s'intéresse au nombre de solutions de l'équation (E) : $-2x+q=\frac{1}{x}$ pour x strictement positif.

3. En utilisant un logiciel de construction graphique ou une calculatrice graphique :

c) Conjecturer, suivant les valeurs de q, le nombre de solutions de l'équation (E).

Appeler l'examinateur pour valider la conjecture.

d) Si $q > 0$, trouver graphiquement une valeur approchée de q à 10^{-2} près pour laquelle l'équation (E) a une unique solution.

Appeler l'examinateur pour vérifier la valeur trouvée.

4. Démontrer que pour $q < 0$, l'équation (E) n'a aucune solution.

Production demandée

- Pour la question **1.** b), recopier la valeur approchée obtenue pour q ;
- Réponse écrite pour la question 2.

Les pré-requis sont :
- Fonctions de référence (fonction affine, fonction carrée, fonction inverse)
- Fonction du second degré

Les objectifs sont :
- Résoudre graphiquement et algébriquement les équations
- Conjecturer le nombre de solutions d'une équation
- Faire une démonstration
- Comprendre la notion de paramètre

Je me suis aperçue lors de la $1^{ère}$ séance que certaines notions qui devaient être acquises ne l'étaient pas comme :
- Donner l'équation d'une droite
- Faire le lien entre la résolution algébrique et graphique
- Valeur approchée – valeur exacte
- Définir un nombre réel (paramètre).

Lors de l'évaluation, pour une très grande majorité, ces notions étaient vraiment comprises et assimilées. Ils savaient faire la différence entre conjecturer et démontrer.

Quant à la démonstration cela reste un exercice difficile pour eux. J'ai privilégié l'oral.
Cours dialogué la $1^{ère}$ séance, recherche par groupe de 2 et mise en commun ensuite. J'ai beaucoup insisté sur l'importance du brouillon, de différencier les étapes, de noter leur démarche. J'intervenais régulièrement auprès des groupes pour valider ou non leurs résultats. Beaucoup font des erreurs de calculs, de signes qui peuvent les bloquer. En les aidant ainsi, ils pouvaient progresser plus « facilement ».

A travers ces séances, je me suis aperçue que mes élèves avaient vraiment progressé. Tous les élèves ont joué le jeu, même les élèves « attentistes ». Ils ont trouvé que ces sujets étaient plus intéressants que les sujets dits classiques. Les échanges en classe entière furent très vifs. J'ai beaucoup apprécié l'engouement de certains élèves à expliquer aux autres leur point de vue. Ces échanges ont permis aussi à certains élèves de retrouver goût aux mathématiques, d'acquérir une certaine autonomie, de prendre des initiatives, de donner du sens aux objets mathématiques, de s'exprimer plus clairement à l'oral.

Un exemple de progression en TS sur les suites et le tableur, année 2009-10

Dès la 1ère semaine pour le 14 sept : DM 1 (apprentissage du tableur en liaison avec les suites) En parallèle, on fait en cours le raisonnement par récurrence, les suites ; on apprend avec ordinateur+ vidéo projecteur + émulateur à programmer les suites à la calculatrice

Puis vient le TP en salle informatique le 24 sept : suite et tableur épreuve pratique 2007 sujet 1) (*présenté dans cette brochure au VII b)* $u_{n+1}=u_n+2n-11$: pendant la séance, j'apporte beaucoup d'aide, tant sur le logiciel, mais surtout mathématique, difficile d'évaluer. Les élèves doivent rédiger un compte rendu de leur expérience et démontrer la conjecture $un=f(n)$ où f est un trinôme du 2nd degré. Sur le compte rendu, pour la plupart des élèves, aucun récit de leurs tâtonnements divers, la preuve seule apparaît.

Pour vérifier si un élève sait établir une conjecture à l'aide de sa calculatrice : dans le contrôle écrit suivant, je mets un exercice du type :
« Soit la suite (u_n) définie par : $u_1 = 7$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = 10\,u_n - 9$.
« En observant les sept premiers termes de cette suite, conjecturer, pour tout entier naturel n de $\mathbb{N}^*$ l'expression de u_n en fonction de n ».

Ensuite un DM (*présenté dans cette brochure au VII b)* (on peut d'ailleurs se poser la question si la notion d'expérimentation y est présente) : adaptation du sujet 44 épreuve 2007 ; il s'agit de calculer avec calculatrice puis ordinateur la somme des n premiers entiers naturels puis la somme de leurs cubes. Les élèves doivent concevoir une relation de récurrence ensuite dans le but de préparer le TP sur Euler qui est une adaptation de l'épreuve pratique 2007 sujet 21 (*présenté dans cette brochure au VII e)*. J'ai fait un cours dialogué avec $f'=f$ et $f(0)=1$, fait tracer la courbe approchée à la main par chaque élève puis montré comment faire avec l'ordinateur en poste-prof.

TP sur Euler salle informatique, travail repris en classe au moment du cours sur $y'=ay$

En cours d'année, on refera en révision des fiches sur les suites prises dans les banques de données (ex : épreuves 2007 fiche 5)

En fait, dans ces exemples, pas d'évaluation ou peu... Seule sera visible la note de l'épreuve pratique bac. Je considère que ces séances servent à donner du sens aux notions mathématiques et de l'autonomie aux élèves...

XI. Conclusion

Après trois années d'existence, de réflexion et d'expérimentation, le groupe IREM à l'origine de cette brochure a pris l'initiative de proposer un stage « démarche expérimentale et TICE » au plan académique de formation des académies de Paris, Créteil et Versailles. Au delà des apports théoriques et des échanges de pratique autour de l'intégration des TICE dans la démarche expérimentale en mathématiques, il était demandé aux stagiaires de concevoir un sujet d'activité propre à faire vivre, au sein de séances « ordinaires » de classe, une démarche expérimentale s'appuyant sur les TICE.

Face à la fois au flou qui entoure la notion même de démarche expérimentale et aux difficultés d'intégrer une telle démarche dans des pratiques « ordinaires », nous en sommes venus à concevoir une grille de réflexion qui se veut un outil à la fois de préparation de sujet et de séance en amont, mais aussi de réflexion a posteriori devant un énoncé.
Son utilisation durant le stage nous a convaincu de sa pertinence pour permettre aux enseignants de dégager plus clairement ses marges de manœuvres. Elle articule à la fois :

Des items relatifs au contexte :

- Niveau de classe, domaine mathématique, Thème abordé, Objectif
- Type de la fiche élève (détaillée, comportant une prise en main, plus ouverte...)
- Place dans la progression mathématique et dans la progression TICE
- Modalités (effectifs, groupes, salle info, logiciels, durée prévue…)
- Évaluation prévue ou pas ? (grille, compte-rendu….)
- Bilan – synthèse de la séance avec les élèves ? (à quel moment ?)

Des éléments d'analyse a priori relatifs :

Aux notions mathématiques travaillées :
(Anciennes, totalement nouvelles ou en cours d'acquisition ; explicitées par l'énoncé ou bien implicites.)

A la dimension expérimentale :

- Familiarité des élèves avec le type de questionnement : déjà fait un énoncé similaire et application immédiate, au contraire totalement nouveau, intermédiaire avec des adaptations à apporter par les élèves.
- Potentialité expérimentale : présence d'une manipulation, présence d'une conjecture, d'une partie preuve…

A l'apport des TICE :

- Potentialité TICE : apport des TICE pour résoudre le problème,
- Articulation prévue avec le papier-crayon, articulation entre les phases collectives et les phases d'autonomie.
- Logiciel utilisé, initiation ou plus expert, progressivité de la prise en main, implicites, sujet type Bac ?

D'autres relatifs au déroulement en classe :

- Gestion du temps et de l'espace
- Difficultés techniques liées au matériel et /ou au logiciel
- Difficultés de gestion du groupe (liées à l'hétérogénéité)
- Aides du professeur (collective, individuelle) de quel type ?
- Comportement des élèves (autonomie, entraide ? blocage ?)

Et enfin des items relatifs à une analyse a posteriori du sujet :

- Réalisation ou non de l'objectif ? pourquoi ?
- La fiche élève adaptée ? (trop…, pas assez…)
- Activités mathématiques des élèves ?
- Comment a « vécu » la dimension expérimentale ?
- Les aides prévues ont-elles été adaptées ? (difficultés imprévues ?)
- Modifications ou aménagements à apporter, Le refaire ? Prolongements ?

Une telle grille d'analyse pourrait être un outil qui permettrait aux enseignants désireux ou contraints par les programmes d'intégrer une dimension expérimentale des mathématiques en relation avec les TICE dans leurs enseignements, de dégager la marge de manœuvre dont ils disposent, les adaptations nécessaires et la distance entre leurs pratiques ordinaires et les pratiques induites par une telle démarche expérimentale. Ceci afin de faire vivre au mieux dans les classes toutes les potentialités pédagogiques d'une telle démarche associée aux TICE.

Bibliographie sommaire sur la « démarche expérimentale en mathématiques »

ALLOUCHE, J-P. La recherche expérimentale en mathématiques. **http://www.lri.fr/%7Eallouche/experimental.html**

ARTIGUE M. (1995) Un regard didactique sur l'utilisation des outils de calcul formel dans l'enseignement des mathématiques. *Repère IREM.* Vol 19. pp 77-100.

ARTIGUE M. (2002) Learning mathematics in a cas environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning.* Vol 7 (3). pp 245 -274.

ARTIGUE M., HASPEKIAN M. (2005) L'intégration de technologies professionnelles à l'enseignement dans une perspective instrumentale : le cas des tableurs, Dans (Eds.) *Actes de Symposium REF.* Montpellier, France. http://pedagogie.ac-montpellier.fr/Disciplines/maths/REF_2005/REF-Haspekian-Artigue.pdf

ALDON G., DUCHET P., FEURLY-REYNAUD J., LEGRAND M., MIZONY M., PAYAN C., TISSERON C. (1997). Développer la recherche scientifique à travers l'étude de situations mathématiques, IREM de Lyon

ARSAC G., GERMAIN G., MANTE M. (1988). Problème ouvert et situation-problèmes, IREM de Lyon

ARSAC G., MANTE M. (2007). Les pratiques du problème ouvert, Scéren et IREM de Lyon.

CHEVALLARD Y. (1995). Le caractère expérimental de l'activité mathématique, Petit x 30, 5-15.

DELAHAYE J.-P. (2005) Mathématiques expérimentales. *Pour la science.* Vol 331. pp 81-93.

DIAS T., DURAND-GUERRIER V. (2005). Expérimenter pour apprendre en mathématiques, Repères-IREM 60, 61-78

DIAS T., À l'école élémentaire, une science expérimentale ? dans « enseigner les maths aujourd'hui » cahiers pédagogiques 427.

DUVERNAY D. (2007) Sur l'épreuve pratique de mathématiques au baccalauréat en France, réponse de Daniel Duvernay, http://educmath.inrp.fr/Educmath/en-debat/epreuve-pratique/

KUNTZ G. (2007), Démarche expérimentale et apprentissages mathématiques, *Les Dossier de la veille*, INRP. http://www.inrp.fr/vst/Dossiers/Demarche_experimentale/bibliographie.htm

LAGRANGE J.-B. (2000) L'intégration d'instruments informatiques dans l'enseignement: une approche par les techniques. *Educational Studies in Mathematics.* Vol 43. pp 1-30.

LOMBARD P. (2008) Les méthodes expérimentales en géométrie. *Repère IREM.* Vol 73. pp 21-47.

LUBZANSKI J., LALLIER-GIROT I. (2008) Maths entre écran et papier, **http://revue.sesamath.net/spip.php?article124**

MOUNIER G. (2005). Débat mathématique, débat démocratique, Repères-IREM 60, 47-56

PERRIN D. (2007) L'expérimentation en mathématiques. *Petit x.* Vol 73. pp 6-34.

ROBERT A. (1998) Outil d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* Vol 18 (2). pp 139-190.

ROBERT A. (2008) La double approche didactique et ergonomique pour l'analyse des pratiques d'enseignants de mathématiques. Dans F. Vandebrouck (Eds.) *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp.59-68). Toulouse : Octarès Edition.
ROBERT A., ROGALSKI M. (2002) Comment peuvent varier les activités mathématiques des élèves sur des exercices ? Le double travail de l'enseignant sur les énoncés et sur la gestion en classe. *Petit x.* Vol 60. pp 6-25.
ROBERT C., TREINER J. Une double émergence, bulletin de l'APMEP, 453, pp 499-511
TRGALOVA J., ALDON G., GUEUDET G. ET MATHERON Y. (sous la direction de) Ressources pour l'enseignement des mathématiques : conception, usage, partage Actes des journées mathématiques INRP, INRP, Lyon, 13 et 14 juin 2007
TROUCHE L. (2004) Environnements informatisés et mathématiques : quels usages pour quels apprentissages ? *Educational Studies in Mathematics.* Vol 55. pp 181-197.
VANDEBROUCK F. (Eds) (2008) *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*, Toulouses: Octarès.
VANDEBROUCK F. (2009) Démarche expérimentale et technologie : le point de vue du chercheur. *Ecole Numérique.* Vol 2. pp 26-27.
VANDEBROUCK F. (2009) TICE et activité mathématique des élèves. *Bulletin de l'APMEP.* Vol 483. pp 505-515

TITRE :

Démarche expérimentale et TICE en classe de mathématiques au lycée

AUTEUR/S :

Fabrice Vandebrouck, Dominique Baroux, Géraldine Bonal, Suzanne Galland, Marc Guignard, Françoise Hérault, Gilles Marbeuf, Claire Petitjean et Brigitte Yvert.

RESUME :

Le groupe IREM « épreuve pratique en terminale S » initialement constitué à l'initiative de l'ADIREM suite à la mise en place d'une épreuve pratique de mathématiques au baccalauréat S, fonctionne depuis octobre 2007. Rebaptisé « démarche expérimentale et TICE au lycée » à la disparition de l'épreuve, le groupe travaille sur des ressources pour les professeurs de mathématiques du lycée, pour les classes de seconde, première et terminale. Dans l'esprit de l'épreuve pratique, ces ressources cherchent à faire développer chez les élèves une démarche expérimentale en utilisant des TICE (logiciels de géométrie dynamique, tableur, calculatrices graphiques ou formelles...). Cette brochure présente de nombreuses ressources développées et expérimentées par les membres du groupe. Cette présentation s'accompagne d'une réflexion sur la gestion de classe à associer aux énoncés, compte tenu des contraintes qui pèsent sur les pratiques. Il s'agit également de réfléchir sur les progressions à mettre en place au cours des années scolaires pour garantir une prise en main efficace des outils TICE, associée à une entrée non artificielle dans cette difficile démarche expérimentale.

MOTS CLES :

Démarche expérimentale, TICE, Lycée, conjecture, preuve, ressources

IREM de Paris 7 – Université Paris Diderot
Directeur de publication Christophe Hache – Reprographie Nadine Locufier
www.iremp7.math.jussieu.fr
Dépôt légal : mai 2010 – ISBN : 978-2-86612-324-6