

Actes du séminaire national de didactique des mathématiques

Année 2008

Édité par
Lalina Coulangue
LACES, DAESL, Université Bordeaux 2
et Christophe Hache
DIDIREM, Université Paris Diderot – Paris 7

Le séminaire national de didactique des mathématiques est organisé par l'ARDM. Il a pour but de permettre la diffusion régulière des recherches nouvelles ou en cours, et de favoriser les échanges et débats au sein de la communauté francophone de didactique des mathématiques.

Différentes rubriques permettent de préciser les diverses fonctions du séminaire national :

- « Présentation de thèses » : beaucoup des thèses récemment soutenues font l'objet de présentations au séminaire national. C'est non seulement un moyen de faire connaître ces travaux mais aussi de favoriser l'intégration des jeunes chercheurs au sein de la communauté. On retrouvera ici les textes des interventions de 2008 d'Eric Laguerre, de Sylvia Coutat, de Fabien Emprin, de Françoise Jore, de Marie Pierre Chopin, de Christine Mangiante et d'Emmanuelle Rouy

- « Travaux en cours » : il s'agit d'assurer la diffusion de travaux de recherche engagés par des chercheurs en didactique. La diffusion de ces travaux non encore aboutis permet de les mettre en débat dans la communauté et d'informer sur les nouvelles tendances. Laetitia Bueno Ravel, Catherine-Marie Chiocca et Susana Murillo Lopez, Jana Trgalovat, Maha Abboud-Blanchard et Monique Chappet-Paries, Brigitte Grugeon-Allys, Ghislaine Gueudet et Magali Hersant proposent dans les pages suivantes un texte correspondant à leur présentation de 2008.

- « Revue de questions » : il s'agit de faire le point sur un thème ou une question de recherche. C'est une nouvelle rubrique en 2008. Elle fait l'objet d'une commande de la part des organisateurs du séminaire national : ils sollicitent un ou plusieurs chercheurs directement concernés par le thème ou la question de recherche choisie. Annie Bessot et Claude Comiti ont inauguré ce type de travail lors du séminaire de mars 2008.

- « Ouverture sur... » : cette rubrique a pour objectif d'illustrer des ouvertures de la didactique des mathématiques sur d'autres domaines de recherche ou plus extérieurs (tournés vers des usages sociaux de la didactique). Là aussi il s'agissait en 2008 d'une nouvelle rubrique les premiers intervenants étaient : François Conne en mars, suivi de Marie-lise Peltier-Barbier et Joël Briand

- « Colloquium de didactique des mathématiques » : une fois par an (en général, le vendredi du séminaire d'octobre), en collaboration avec la Commission Française sur l'Enseignement des Mathématiques (CFEM), un invité de marque présente une revue de ses travaux. Cette formule vise à attirer un public plus large que la seule communauté de didactique des mathématiques sur des questions ayant trait à l'enseignement des mathématiques. La session 2008 du colloquium a été reportée en janvier 2009 pour des raisons techniques, le texte de l'intervention sera publié dans les actes 2009 du séminaire national.

Il nous faut ici remercier fortement les divers intervenants qui ont contribué au bon fonctionnement et au dynamisme du séminaire.

L'année 2008 marquait l'arrivée du séminaire dans les nouveaux locaux de l'Université Paris Diderot Paris 7, c'est une occasion supplémentaire de souligner le soutien et l'efficacité de l'IREM de Paris 7 dans l'organisation matérielle et technique du séminaire national.

L. Coulangue et C. Hache

Séminaire de janvier 2008 18 et 19 janvier 2008

Le concept de typicalité appliqué aux registres figuraux et numérique-algébriques.....	9
Eric Laguerre Equipe DIDIREM IUFM de Versailles Université de Cergy Pontoise	
Genèses instrumentales pour l'enseignant. Une proposition d'analyse en terme de tâches et de techniques didactiques instrumentées.....	35
Laetitia Bueno-Ravel CREAD IUFM de Bretagne, Université de Bretagne Occidentale	
Ajustement d'un modèle de la correction en classe à la contingence.....	55
Catherine Marie Chiocca, Suzanna Murillo Lopez PATRE, ENFA et LEMME Université Paul Sabatier, Toulouse	
Intégration de la géométrie dynamique pour favoriser la liaison école primaire collège : une ingénierie au collège pour la notion de propriété.....	69
Sylvia Coutat Equipe DIAM, Grenoble	
Représentation sous forme d'arbre des expressions algébriques dans le logiciel Aplusix.....	85
Jana TRGALOVÁ Laboratoire d'Informatique de Grenoble (LIG) INRP	
Dans des environnements TICE, quelles pratiques d'enseignants pour quelles activités d'élèves ?.....	101
Maha Abboud-Blanchard Equipe DIDIREM IUFM du Nord-Pas de Calais, Université d'Artois et Monique Chappet-Paries Equipe DIDIREM IUFM de Versailles, Université de Cergy-Pontoise	

Séminaire de mars 2008 28 et 29 mars 2008

Formation initiale et continue pour l'enseignement des mathématiques avec les TICE : cadre d'analyse des formations et ingénierie didactique.....	117
Fabien EMPRIN DIDIREM IUFM Champagne Ardenne	
Développement professionnel des professeurs débutants pendant les premières années d'exercice.....	137
B. Grugeon-Allys Équipe DIDIREM IUFM d'Amiens – Université Jules Verne - Amiens	

Apport des études comparatives aux recherches en didactique des mathématiques : le cas Viêt-Nam / France.....	171
Annie BESSOT et Claude COMITI	
DIAM, Laboratoire LIG	
Grenoble	
Paradigmes géométriques et formation initiale des professeurs des écoles, en environnements papier crayon et informatique.....	195
Françoise JORE	
LAREF (Laboratoire de Recherche en Éducation et Formation)	
Université Catholique de l'Ouest	
Savoir pour imaginer. Un exemple : Les livres de Olivier Keller consacrés aux origines de la géométrie.....	227
François CONNE	
DiMaGe, ssed-pse-UniGe	
IP-UniL, Ddmes-Ssrdm	

Séminaire d'octobre 2008

18 et 19 octobre 2008

La documentation des professeurs de mathématiques.....	249
Ghislaine Gueudet	
CREAD	
IUFM de Bretagne – Université de Bretagne Occidentale	
et Luc Trouche	
EducTice (INRP) et LEPS (Université Lyon 1)	
Approche anthropo-didactique du temps dans l'enseignement des mathématiques : fondements, résultats et perspectives.....	271
Marie-Pierre Chopin	
Équipe DAESL (Didactique et Anthropologie des Enseignements Scientifiques et Langagiers)	
Laboratoire LACES (EA-4140, Laboratoire Cultures, Education, Sociétés)	
Université Victor Segalen Bordeaux 2	
Une étude de la genèse des pratiques de professeurs des écoles enseignant les mathématiques.....	299
Christine MANGIANTE	
Laboratoire de Mathématiques de Lens	
Université d'Artois, IUFM Nord Pas de Calais	
Le manuel scolaire carrefour de tensions mais aussi outil privilégié de vulgarisation des recherches en didactique des mathématiques.....	325
Joël Briand	
DAESL	
Université Bordeaux 2	
et Marie-Lise Peltier	
Equipe DIDIREM	
IUFM de Rouen, Université de Rouen	
Formation initiale des professeurs du secondaire supérieur et changements de rationalité mathématique entre l'institution secondaire et l'institution universitaire. Le cas éclairant du thème des dérivées.....	337
Emmanuelle Rouy	
Université de Liège, Belgique	

Etude de l'activité mathématique de lycéens dans une correspondance mathématique à propos d'un problème de maximum.....	351

Magali HERSANT, IUFM des Pays de la Loire,
CREN, EA 2661
IUFM Pays de la Loire, Université de Nantes

Annexe Annonces des séminaires 2008

.....	377

Séminaire de janvier 2008

18 et 19 janvier 2008

Le concept de typicalité appliqué aux registres figuraux et numérico-algébriques

Eric Laguerre

Equipe DIDIREM

IUFM de Versailles Université de Cergy Pontoise

Résumé

Dans la littérature scolaire, les expressions de « figures-clés » de « configuration de ... », de « triangles en situation de ... » ou de « figure de référence » sont très courantes. A priori, ces vocables ont pour caractéristique de désigner des dessins reproduisant exclusivement les prémisses d'un théorème ou d'une définition dans le but de faciliter leur mise en oeuvre. Dans cet exposé, dont le champ est restreint au théorème de Thalès mais qui pourrait être étendu à d'autres propriétés, nous nous attachons, dans un premier temps, à comprendre la façon dont se constituent des représentations typiques pour les élèves en dégagant des figures que nous nommons archétypes ou prototypes suivant leur moment d'apparition par rapport à l'enseignement du théorème. Nous nous interrogeons ensuite sur la manière dont certains paramètres superflus qui définissent ces prototypes peuvent générer des difficultés, d'une part, dans la reconnaissance de figures, ce qui nous a conduit à mettre en lumière des figures pathologiques, et d'autre part dans la mise en oeuvre du théorème, ce qui nous amène à mettre en évidence des figures pathogènes. Dans un second temps, à partir de deux figures prototypes, nous nous intéressons à la typicalité de la distribution de mesures de longueurs sur un dessin dans le cadre du calcul de l'une d'entre elles.

Mots clefs

Appréhension perceptive, appréhension opératoire, variable figurale, figure archétype, figure prototype, figure pathologique, figure pathogène, congruence, Thalès

I Introduction

Nous nous attardons en premier lieu sur une signification initiale que nous pouvons attribuer au terme « figure clé » en répondant aux deux premières questions suivantes.

Quelles précisions théoriques est-il possible de conférer à cette expression ou à d'autres qui lui sont voisines ?

Une fois les contours de cet objet mieux établis, nous cherchons à comprendre quels sont ses effets et son utilité éventuels pour les élèves ? Cela nous conduit à définir deux nouvelles notions que sont les **figures archétypes**, produites par les élèves avant enseignement d'une propriété, et les **figures prototypes** produites elles après.

Nous montrons que ces deux concepts existent dans le cas particulier du théorème de Thalès enseigné dans les classes de quatrième dans la version triangle et dans les classes de troisième à partir de deux droites sécantes coupées par deux droites parallèles. Nous cherchons également à scruter l'influence qu'ils peuvent avoir dans sa mise en fonctionnement en particulier en mettant en évidence des **figures pathologiques** et des **figures pathogènes**.

Aussi, dans le cadre de l'application de ce théorème de la part des élèves, nous étudions l'influence que peut avoir la typicalité des figures suivant deux axes principaux :

- celui de divers niveaux de reconnaissance d'un prototype ayant subi des déformations

- et celui de la résolution d'une tâche standard de l'enseignement : le calcul de mesures de longueurs.

II Objectifs

D'une façon plus précise, nos deux principaux objectifs sont de mettre en évidence,

- par rapport à certaines variables figurales, divers niveaux de production et de reconnaissance de configuration de Thalès
- et de comprendre comment les élèves appliquent ce théorème par rapport à diverses répartitions de variables numériques.

Au sujet des variables figurales, nous nous proposons d'exhiber des **figures prototypes** liées au théorème de Thalès et produites par les élèves après enseignement. Nous nous demandons également si ces figures n'existent pas avant enseignement du théorème et si elles ne sont pas influencées par des figures que nous nommons **archétypes**. Nous émettons l'hypothèse que ces deux types de figures laissent des empreintes lors de l'application du théorème.

Ainsi, nous montrons leur rôle dans l'apparition d'erreurs dès que les figures proposées s'en éloignent. Cela nous amène à définir les **figures pathologiques** qui, arrivées à un seuil de déformation, ne sont plus reconnues comme pouvant faire l'objet d'une application du théorème, et les **figures pathogènes** qui sont reconnues mais qui engendrent des erreurs caractéristiques dans l'écriture des rapports littéraux.

En ce qui concerne les variables numériques, après avoir fixé les variables figurales, nous cherchons à comprendre l'influence de la distribution des longueurs dans l'apparition d'erreurs significatives.

III Cadre théorique

Notre sujet est en rapport direct avec les diverses façons de voir des dessins. Duval (2005) distingue quatre manières de **voir** un dessin.

Tout d'abord, dans la vision du botaniste, il s'agit d'apprendre à reconnaître des formes. Cette vision permet de constituer un «herbier» de figures qui facilite leur reconnaissance pour pouvoir rentrer dans une tâche.

Dans la vision de l'arpenteur, cela consiste par exemple à mesurer des longueurs sur un terrain dans le méso-espace et à les reporter sur un dessin du micro-espace.

Le constructeur tente lui de connaître les figures qui sont constructibles et de comprendre les contraintes instrumentales qu'engendre de telles constructions.

Enfin, l'inventeur/bricoleur aborde le côté heuristique du dessin. Il a pour tâche de découvrir sur une figure une procédure de résolution d'un problème, en la décomposant, par exemple, en unités figurales qui peuvent ensuite être reconfigurées ou en ajoutant des tracés.

Duval précise que la manière de voir recouvre deux **niveaux d'opérations** :

- la reconnaissance discriminative de formes
- et l'identification des objets correspondants aux formes reconnues.

Le passage d'un niveau à l'autre repose sur une ressemblance entre la forme visuellement discriminée et la forme typique de l'objet représenté. Deux mécanismes sont à la source d'identifications d'objets.

La visualisation iconique, dont relèvent les visions perceptives du botaniste et de l'arpenteur, permet de détecter des ressemblances avec un modèle type. Le dessin demeure indépendant des opérations de décomposition ou de transformation qu'il peut subir.

La visualisation non iconique, qui concerne l'appréhension du constructeur et de l'inventeur/bricoleur, permet d'agir sur le dessin en passant par une décomposition de formes, par des modifications figurales.

Nous complétons la notion de visualisation iconique par les concepts de **prototype** et de **typicalité**.

La notion de **prototype** a été dégagée par Rosch (1976) :

« Les catégories ne sont codées dans l'esprit ni au moyen de listes de tous les membres individuels de la catégorie, ni au moyen d'une liste de critères formels nécessaires et suffisants pour définir l'appartenance à la catégorie, mais plutôt sous forme de prototype d'un membre caractéristique de la catégorie. »

La typicalité (Cordier, 1989), au sens de la psychologie cognitive, se rapproche de la notion de prototype et se définit par l'idée que des schémas de réflexion ou des schémas cognitifs sont biaisés de façon significative par le fait que certaines propriétés non caractéristiques de dessins sont privilégiées par rapport à d'autres ce qui engendre des erreurs ou des réponses incomplètes à des questions liées à la figure. Les représentations typiques ont une grande stabilité de réalisation sur des échantillons importants avec des consignes de constructions identiques. De plus, elles sont activées avant les représentations non typiques ou avec un seuil d'activation plus bas.

Nous appliquons la notion de typicalité, en premier lieu, à l'identification des configurations de Thalès et, en second lieu, à la mise en œuvre de ce théorème tant du point de vue des mises en équation que de la résolution de ces dernières.

Les quatre manières de voir des dessins géométriques relèvent de diverses **appréhensions** et **modifications** de ces représentations. D'après Duval (1994), il existe quatre types différents **d'appréhension de figures**.

La plus immédiate est **l'appréhension perceptive**. Elle permet d'identifier ou de reconnaître rapidement une forme grâce à des indicateurs intrafiguraux. Elle est fondamentale dans notre travail pour la mise en évidence de figures prototypes et pathologiques ainsi que pour la prise en compte de la notion de **prégnance** (Noirfalise, 1991) qui est liée au fait, en particulier, que des directions privilégiées de « verticalité » et « d'horizontalité » induites par les bords d'une feuille sont intégrées par les élèves.

La perception suivante est **l'appréhension discursive**. Une figure est regardée par rapport à une dénomination, une légende ou une hypothèse qui en fixe explicitement les propriétés. L'appréhension discursive peut être **congruente** (Duval, 1988) ou non avec l'appréhension perceptive ce qui, lorsque le dessin est fourni, rend l'exercice plus ou moins facile. Cette notion de congruence est employée dans notre travail pour une mise en évidence de catégories au sujet de la mise en équations et de la résolution de ces équations suivant les répartitions des mesures de longueurs.

L'appréhension séquentielle, qui concerne l'ordre de construction d'une figure est explicitement sollicitée dans les tâches de construction ou de description de figures. Nous l'employons dans le cadre de l'étude des figures archétypes.

L'appréhension opératoire fonde la fonction heuristique d'un dessin qu'il est possible de modifier pour en obtenir un autre. Duval distingue trois types de modifications :

Les modifications optiques qui consistent à agrandir, diminuer ou à déformer une figure.

Viennent ensuite les **modifications positionnelles** caractérisées par le déplacement de la figure dans le plan. Ces deux types de modifications sont pris en compte dans notre travail dans le but de voir jusqu'à quel degré elles peuvent être portées pour qu'une figure puisse être reconnue comme pouvant faire l'objet d'une application du théorème de Thalès.

Enfin, les **modifications méréologiques** qui consistent à partager une figure en sous-figures pour les recombinaison en une autre figure. Nous n'utilisons pas ce type de modification dans nos expériences.

Notre travail est principalement centré sur l'appréhension séquentielle et perceptive de dessins à la différence d'autres travaux connexes aux nôtres (Laguerre 2005) comme ceux de Lémonidis (1991) qui se fondent sur l'appréhension opératoire de figures liées à l'homothétie.

Nous revenons à présent à notre question initiale en tentant d'y apporter un premier élément de réponse.

IV Précisions au sujet des figures-clés

A priori, les « figures clés » relèvent de la vision du botaniste qui consiste à catégoriser les dessins liés à une propriété dans le but de mieux les reconnaître lorsqu'ils sont isolés ou de mieux les identifier s'ils sont inclus dans une configuration complexe.

Houbedine et Kerboeuf (2005) considèrent qu'une **figure-clé** associe à un énoncé une figure obtenue par des *tracés minima* - éventuellement complétés de codages correspondant aux strictes données initiales contenues dans cet énoncé indépendamment de sa conclusion. Ainsi, une figure-clé ne devrait pas faire apparaître de tracés supplémentaires, comme par exemple ceux liés à la conclusion du théorème, par rapport aux prémisses de ce dernier. De plus, cela signifie indirectement que les paramètres de ces figures-clés, comme la mesure de certains angles, l'orientation, la position des droites par rapports aux bords de la feuille, ne devraient pas être fixés. Or, un simple survol d'ouvrages scolaires nous indique que des propriétés superfétatoires viennent compléter les dites figures-clés. Mais il semble *a priori* intéressant de distinguer celles qui s'ajoutent avant l'enseignement du théorème en question, de celles qui s'ajoutent après. Nous en arrivons ainsi aux concepts de **figures archétypes** et de **figures prototypes** dont nous postulons l'existence. Les premières figures étant censées être produites en liaison avec un théorème mais avant son enseignement et les secondes apparaissant après.

Les figures archétypes¹ sont des produits culturels prégnants liés à des objets mathématiques antérieurs aux notions auxquelles ces dessins se rapportent directement. Il s'agit de représentations propres à l'individu et produites par l'élève avant l'enseignement du théorème auquel elles se réfèrent. Ainsi, elles se caractérisent par des dessins types produits fréquemment dont les tracés et les valeurs des paramètres sont clairement déterminés. Nous pourrions dire au premier abord qu'il s'agit de figures-clés produites par les élèves avant enseignement de la proposition en question. Mais en fait, ces dessins peuvent ne pas uniquement comprendre des tracés supplémentaires par rapport à ceux obtenus en référence aux prémisses de l'énoncé mais aussi privilégier des variables figurales superflues.

¹ Pour Platon, les archétypes sont des idées, des formes, des modèles qui ont déterminé toutes les conditions de l'Univers.

Les figures prototypes² sont des dessins types produits très fréquemment par les élèves après un enseignement ayant pour principal sujet le résultat concerné par ces dessins. La forme que prend cet enseignement imprègne directement les représentations de l'élève. Une telle imprégnation serait possible du fait, qu'à l'inverse des figures archétypes, les figures prototypes seraient parfois institutionnalisées comme le laisse penser les figures dites "clés de Thalès" que nous avons pu relever çà et là.

Mais à la différence des figures-clés définies par Houbedine, les figures prototypes, en plus des tracés *minima* qui suivent à la lettre les prémisses d'un énoncé, peuvent être caractérisées par le rajout de variables figurales qui seraient même à la source d'erreurs dans la mise en œuvre du théorème ou de non reconnaissance de dessins qui s'éloigneraient de cette norme. Ainsi, nous formulons l'hypothèse que dans certains cas où il lui serait demandé d'identifier un dessin avant de pouvoir appliquer un théorème, le sujet ne repèrerait pas sur la figure les relations indispensables à sa connaissance. Nous appelons alors ces figures dans lesquelles un théorème est susceptible d'être appliqué mais ne sont pas perçues comme telles (que par moins de 5% d'un échantillon d'élèves) des **figures pathologiques**³.

Mais la figure pourrait être reconnue tout en entraînant des erreurs caractéristiques et fréquentes à des endroits précis de l'application. Nous la qualifierions de **figure pathogène**⁴.

Le classement des dessins du côté des figures archétypes ou des figures prototypes s'effectue grâce à leur fréquence d'apparition significativement importante (plus de 50% pour les premières et plus de 65% pour les secondes) avant ou après enseignement du théorème auquel ces dessins se rapportent.

V Corpus

Nous disposons des productions d'élèves sur un ensemble de quatre expériences dont nous donnons les principes généraux ci-après.

En ce qui concerne les archétypes, nous demandons aux élèves, avant enseignement du théorème de Thalès, de construire des figures en suivant quatre programmes menant, sans qu'ils le sachent, à une figure dans laquelle le théorème s'applique.

Pour les prototypes, nous leurs demandons de construire quatre figures distinctes dans lesquelles ils jugent que le théorème de Thalès peut s'appliquer.

Pour ce qui est des figures pathologiques et pathogènes, nous faisons varier les paramètres des prototypes qui paraissent fixes. Les élèves doivent alors déterminer si le théorème est applicable ou pas et, dans l'affirmative, écrire les rapports littéraux.

Enfin, l'expérience liée à la répartition des mesures consiste à travailler à partir de prototypes en proposant toutes les répartitions possibles et en regroupant les erreurs commises dans l'écriture des rapports littéraux, la mise en équation et la résolution de ces équations.

2 Un prototype, d'après le petit Robert, est un premier type, un modèle premier, un standard, un type, une forme de fabrication. Au sens figuré, cela désigne ce qui est conforme au modèle habituel, ce qui est sans originalité.

3 D'après le Littré ; pathologique : "Relatif à l'état de maladie ; qui dénote un mauvais état de santé ; qui s'écarte du type normal d'un organe".

4 D'après le Petit Robert ; pathogène : "Qui cause une maladie".

VI Expériences liées au registre figural

1. Mise en évidence de l'existence de figures archétypes et de figures prototypes pour le théorème de Thalès

Problématique

Nous nous demandons s'il existe des figures archétypes pour le théorème de Thalès. Nous supposons qu'elles dépendent de la méthode de construction et donc de l'approche séquentielle du modèle.

Il s'agit ensuite de connaître le degré de représentativité, auprès des élèves, des figures géométriques susceptibles d'être utilisées pour l'application du théorème de Thalès après son enseignement, c'est-à-dire que nous scrutons les prototypes. Nous cherchons enfin à savoir si les archétypes et les prototypes sont identiques et s'ils n'apparaissent pas dans l'enseignement.

Protocole expérimental

Dans une première expérience, nous proposons à une centaine d'élèves de classes de quatrième et à une centaine d'élèves de troisième (la propriété étudiée n'a pas encore été abordée pour les premiers ou révisée pour les seconds), de construire quatre dessins en suivant quatre programmes possibles et distincts de construction et menant à une « figure de Thalès ».

Test 1 : un triangle et une parallèle à un côté ;

Test 2 : deux droites concourantes puis deux parallèles coupant les deux sécantes ;

Test 3 : deux droites parallèles coupées par deux droites sécantes ;

Test 4 : deux droites sécantes, une parallèle à l'une et une droite sécante aux trois premières droites.

Dans une deuxième expérience, nous mettons en place, avec l'aide de 99 élèves de classes de 3^{ème} et 95 élèves de classes de 4^{ème} ayant déjà étudié le théorème de Thalès, une tâche non plus de reproduction de dessins à partir de programmes de constructions, mais de production de quatre figures distinctes caractéristiques de l'application du théorème.

Nous émettons l'hypothèse que certaines de ces formes géométriques apparaissent avec une fréquence plus notable que d'autres. Il est demandé aux élèves d'imaginer puis de dessiner, à l'aide du matériel habituel, quatre figures géométriques, dans un ordre imposé par la feuille de passation, pour lesquelles l'application du théorème de Thalès est pertinente.

En ce qui concerne la recherche de figures fréquemment reproduites dans l'enseignement actuel du théorème de Thalès, nous avons analysé les activités introductrices et les leçons contenues dans cinq ouvrages de quatrième et dans cinq livres de troisième ainsi qu'à l'intérieur de six préparations de cours de professeurs de trois collèges différents.

Méthode d'analyse

Notre méthode d'analyse pour rechercher des figures archétypes passe par une catégorisation des réponses en rassemblant celles qui sont jugées de même type. Pour cela, nous avons mis en lumière une certaine fréquence des valeurs de sept paramètres :

- (1) L'orientation de la figure.
- (2) La caractéristique de l'angle commun aux deux triangles : aigu ou obtus.

- (3) Direction des parallèles par rapport aux côtés de la feuille.
- (4) Positions relatives des parallèles par rapport au point d'intersection : la figure dominante (papillon ou gigogne).
- (5) Dans le cas de la figure gigogne, position de la parallèle à un côté par rapport à la droite des milieux (au-dessus ou au-dessous de la droite des milieux).
- (6) Dans le cas de la figure papillon, position du point d'intersection des deux droites sécantes par rapports aux deux droites parallèles.
- (7) Les dessins font-ils apparaître des droites ou des segments ? Autrement dit, les droites sont-elles prolongées au-delà d'un point d'intersection ou pas ?

Tous les dessins sont différents mais nous regroupons les classes voisines des paramètres pour obtenir une figure médiane.

Nous caractérisons les figures prototypes en mettant en évidence une certaine fréquence des valeurs des sept variables figurales (plus de 65%) dans la première production pour les élèves de quatrième ou dans les deux premières pour les élèves de troisième.

Nous considérons que les deux derniers dessins pour les élèves de troisième, et les trois derniers pour ceux de quatrième relèvent de productions moins spontanément réalisées par les élèves, s'éloignant ainsi de la notion de prototype. Parmi ces dernières, nous analysons tout de même celles qui sont dessinées à plus de 10% des cas, pour savoir si les apprenants sont capables à un moment, en proposant des variantes, de procéder à une rupture avec les figures prototypes qu'ils ont initialement produites.

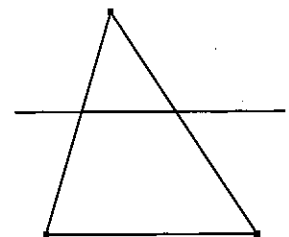
Enfin, pour ce qui est de l'éventuelle présence de prototypes dans l'enseignement, nous cherchons à savoir si des activités tirées d'ouvrages et des séquences d'enseignement de professeurs font apparaître les mêmes types de figures ou si des variations existent.

Résultats et interprétations

Nous avons dégagés cinq catégories de figures standard parmi lesquelles **deux archétypes** dont **trois variantes** sont aussi décelées.

Ainsi, pour les deux niveaux de classe, lorsque les élèves ont à tracer un triangle et une parallèle à un côté de ce triangle, l'archétype produit est du type I. 51% des élèves de troisième et 88% des quatrième exécutent ce genre de dessin caractérisé par :

- un triangle initial pratiquement isocèle,
- une droite parallèle à un côté du triangle, prolongée au-delà des deux points d'intersection,
- une orientation "verticale" de la figure,

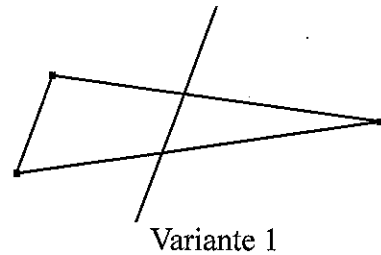


Archétype I

- un angle commun aux deux triangles que les tracés font apparaître aigu et dont la mesure est comprise entre 25° et 40° ,
- deux parallèles "horizontales" à 10° près
- et la parallèle à un côté du triangle au-dessous de la droite des milieux avec un rapport AM/MB compris entre 1,1 et 1,8.

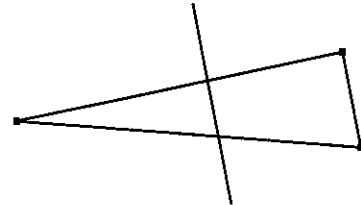
Deux variantes de cet archétype sont apparues au cours de cette expérience.

La première est représentée à 21% par les élèves de troisième et à 30% par ceux de quatrième. La première consiste à simplement renverser l'archétype I de façon à ce que les deux droites parallèles se retrouvent, à 10° près, parallèles aux deux autres bords de la feuille et le sommet commun aux deux triangles à "droite" de ces deux parallèles.



Variante 1

La seconde variante n'apparaît qu'au niveau de la troisième. Il s'agit de la même figure que la variante 1 sauf que le sommet commun aux deux triangles est à "gauche" des parallèles.

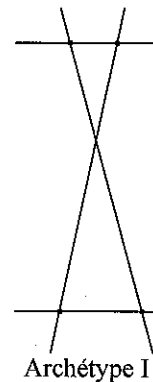


Variante 2

En ce qui concerne les trois autres programmes de construction qui correspondent aux tests 2, 3 et 4, nous trouvons un archétype de la forme II, caractérisé par des pourcentages d'apparition de 88% et 54% respectivement en troisième et en quatrième pour les tests 2 et 3, de 60% et 50% pour le test 4. Cet archétype est également obtenu dans le cas du premier test à 27% en troisième et 23% en quatrième.

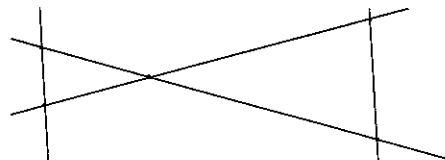
Il s'agit d'une figure papillon formée de quatre droites :

- une orientation verticale,
- l'angle commun aux deux triangles aigu toujours avec une mesure comprise entre 25° et 60° ,
- les deux droites parallèles encore "horizontales" à 10° près
- et le point d'intersection des sécantes à peu près au milieu des deux parallèles.



Archétype I

La variante 3 est apparue à 32% et 24%. L'archétype II est simplement renversé de façon à ce que les deux parallèles soient "verticales" par rapport aux bords de la feuille.



Variante 3

En ce qui concerne les dessins qui sont apparus après enseignement du théorème de Thalès, les **deux prototypes** ci-dessous ont été mis en évidence. Comme le tableau de pourcentages le montre, le prototype I prédomine, mais le prototype II, en classe de 3^{ème} est aussi très présent. Bien que la version du théorème de Thalès en classe de troisième soit celle qui débute par la donnée de deux droites sécantes, il est tout de même étonnant que le prototype dominant soit de type I. Nous pouvons alors imaginer que l'enseignement pourrait avoir une influence sur les élèves en permettant, par exemple, que ce prototype I laisse une forte impression.

Nous avons également montré l'existence de **variantes** 2 et 3 que nous distinguons des prototypes du fait de leurs pourcentages d'apparition moindre. Ces variantes sont les mêmes que les précédentes liées aux archétypes mis à part que dans le cas des prototypes, les droites ne sont pas prolongées.

Pour ces quatre figures, l'angle commun aux deux triangles est aigu et seuls des segments sont représentés et non des droites débordantes des points d'intersection.

Au sujet des sept variables que nous avons retenues pour caractériser les dessins, les deux prototypes ont en commun leur orientation "verticale" et "l'horizontalité" des deux parallèles. L'orientation « horizontale » est par contre commune aux deux variantes ainsi que la « verticalité » des parallèles.

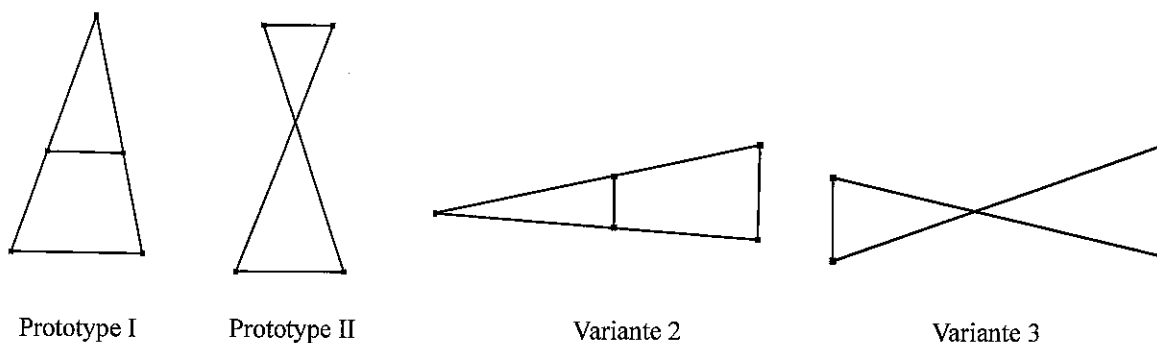


Tableau des pourcentages d'apparition des prototypes et de leurs variantes

Figure produite	Dessins			
	1 ^{er}	2 ^{ème}	3 ^{ème}	4 ^{ème}
Prototype I	60%	...	28%	32%
Prototype II	...	70%	16%	9%
Variante 2	6%	5%	20%	6%
Variante 3	...	5%	2%	12%

Nous pouvons remarquer que les élèves produisent difficilement autre chose que des prototypes I et II même aux 3^{ème} et 4^{ème} dessins. Ils arrivent à transformer facilement ces deux prototypes en les réorientant de la verticale à l'horizontale pour obtenir les variantes 2 et 3, de façon moins naturelle, à placer la parallèle à un côté d'un triangle non plus au-dessus de la droite des milieux mais au-dessus. En revanche, ils ne rompent pas avec le paramètre de l'angle aigu commun aux deux triangles.

Ces mêmes résultats, au sujet du prototype I, sont confirmés pour les classes de 4^{ème}.

En ce qui concerne l'analyse des ouvrages et des préparations de cours, nous avons tout d'abord remarqué que des figures dites "Clefs de Thalès" sont présentes et elles sont même institutionnalisées. Ces dessins sont reproduits, à peu de choses près, de la même façon.

Par ailleurs, ces figures ne correspondent pas à l'objet défini par Houbedine et Kerbeouf (2005) mais plutôt à ceux que nous venons de mettre en évidence. En effet, en plus des tracés *minima* permettant d'aboutir à une figure dans laquelle le théorème s'applique, d'autres paramètres viennent s'ajouter. Ainsi, nous remarquons que les prototypes I et II sont représentés à 75% dans les activités, les cours contenus dans les ouvrages et les diverses préparations analysés. De même, les variantes II et III des prototypes sont également présentes. Nous constatons ainsi le peu de variations des représentations du théorème de Thalès.

Enfin, bien que la version officielle du théorème débute par la donnée de deux droites sécantes elles mêmes coupées par deux droites parallèles, dans quatre préparations de cours, les auteurs optent principalement pour une version triangle du théorème. Ces quatre professeurs plus chevronnés choisissent l'ancienne version "triangles" contenue dans les

programmes de 1989. Cela va dans le sens de l'idée que les professeurs conservent leurs propres prototypes dont ils ont du mal à se départir au grès des changements de programmes.

Finalement, nous pensions trouver les mêmes prototypes dans les ouvrages et les préparations de cours, ce qui a été le cas mis à part le détail des droites prolongées. Tout ce qui précède corrobore le renforcement chez les élèves des figures archétypes déjà existantes avant enseignement que ce dernier transforme en prototype par l'intermédiaire des propres représentations prototypiques des professeurs. Cela explique le renversement de l'ordre des archétypes qui se transforment en prototypes.

2. Mise en évidence de l'existence de figures pathologiques et de figures pathogènes pour le théorème de Thalès

Problématique

Le second objectif en rapport avec le registre figural est de mettre en évidence le rôle des figures prototypes dans l'apparition d'erreurs dès que les figures proposées s'en éloignent.

Le but est de comprendre, en premier lieu, jusqu'à quel degré de modification optique et positionnelle les prototypes exhibés au cours de notre deuxième expérience peuvent être portés pour qu'une figure ne soit plus reconnue, à tort, par les élèves comme pouvant faire l'objet d'une application du théorème, ce qui relève des figures pathologiques.

En second lieu, il s'agit de répertorier les figures pathogènes obtenues par changements de certaines valeurs des paramètres des prototypes autorisant tout de même leur reconnaissance par les élèves mais qui engendrent des erreurs caractéristiques dans l'écriture des rapports littéraux égaux.

Protocole expérimental

Nous faisons varier les paramètres caractérisant les deux prototypes I et II. Sauf pour les cas où seuls deux choix sont possibles - comme pour le type de figure papillon ou gigogne - et celui de l'orientation du dessin pour lequel nous choisissons quatre options, les autres paramètres sont modifiés à trois niveaux différents : Modéré, Moyen et Fort. Si nous prenons l'exemple de l'angle $\hat{A}$ commun aux deux triangles AMN et ABC, nous le réalisons une fois obtus, une deuxième fois « un peu plus obtus » et une dernière « très obtus ». Mais cette variable est aussi à croiser d'autres.

Ainsi, si nous illustrons notre propos à l'aide du cas I, quatre orientations sont sélectionnées : droite, renversée, et celle des variantes 1 et 2 ; deux angles communs : aigu ou obtus et pour chacun trois mesures distinctes ; trois directions des parallèles et trois positions d'une parallèle par rapport à la droite des milieux, ce qui donne 216 figures. Nous en retenons un peu moins pour le prototype II. Des prototypes ainsi que des dessins pour lesquels le théorème ne s'applique pas sont proposés.

Des cahiers de 17 feuillets sont alors constitués. Sur chaque feuille sont représentées 6 figures différentes. Un exemplaire de chaque cahier est reproduit cinq fois, c'est-à-dire que cinq élèves, indépendamment les uns des autres, réfléchissent sur le même exemplaire. La place de chaque figure est tirée au sort. Ce test est posé à trois classes de 4^{ème} et à trois classes de 3^{ème} du même établissement. Les élèves ont 3 mn 30 s pour traiter une feuille. Dans chacune des six cases de chaque feuille, un texte liminaire est rédigé comme suit :

Pour chacune des figures qui vont suivre, vous déciderez si la propriété de Thalès est applicable ou pas. Pour cela, vous pourrez, si vous le désirez, utiliser les instruments de la

géométrie, prolonger des droites afin de vérifier sur le dessin qu'elles sont ou non parallèles.

et la question prenait la forme suivante :

On peut appliquer le théorème de Thalès : oui ? Non ?

Lorsque vous déciderez d'appliquer la propriété de Thalès, vous écrirez les égalités des trois rapports. Si oui : ... = ... = ...

L'expérimentateur doit signaler qu'un certain nombre de figures géométriques ne permettent pas l'application du théorème et que dans ce cas, les élèves doivent l'écrire.

Méthode d'analyse

Nous repérons tout d'abord les élèves pour lesquels les taux de réussite de la tâche sont élevés afin de confirmer le caractère prototypique de certains dessins.

Puis, pour ces mêmes élèves, nous observons l'évolution de ces taux suivant la figure non prototype concernée. Nous mettons en évidence les caractéristiques des figures pathologiques. Pour cela, nous comparons les pourcentages de réussite obtenus à leur sujet, en l'occurrence moins de 5%, par rapport aux pourcentages relevés aux figures prototypes.

Une autre possibilité se présente également. Malgré les déformations précédentes subies par les prototypes, certains dessins sont tout de même reconnus comme pouvant être l'objet d'une application. Nous considérons être en présence de figures pathogènes lorsque des erreurs caractéristiques dans l'écriture des rapports littéraux sont commises dans plus de 65% des cas.

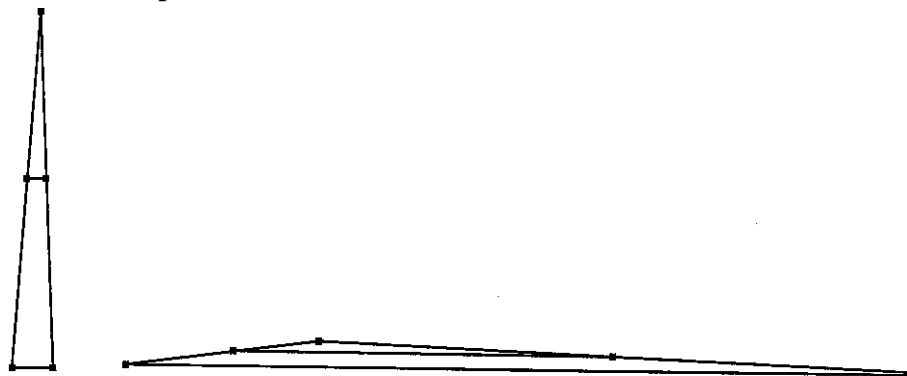
Résultats figures pathologiques

Notons que les résultats que nous obtenons pour cette expérience sont valides pour les classes de troisième et de quatrième.

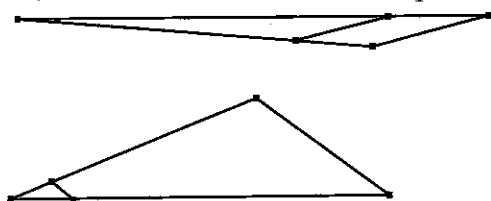
Nous pouvons dire tout d'abord que les figures qui sont tout de même reconnues comme pouvant faire l'objet d'une application du théorème malgré les déformations, sont celles pour lesquelles un seul paramètre a été modifié de façon modérée. Ces figures ne sont donc pas pathologiques.

Par contre, les élèves sont sensibles à d'autres changements qui engendrent une mauvaise reconnaissance des figures. Celles qui, à tort, sont reconnues par moins de 5% des élèves se classent en trois grandes catégories.

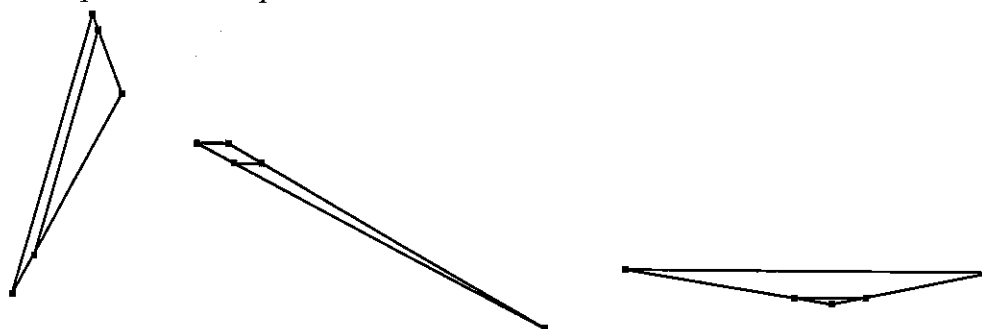
Il y a tout d'abord celles pour lesquelles une seule modification a été apportée par rapport aux variables (1), (2), (3) (5) et (6) des deux prototypes mais de façon forte comme pour les exemples ci-dessous où seul l'angle commun a été changé puisqu'il est « très aigu » pour le premier et « très obtus » pour le second.



Puis nous trouvons les figures pour lesquelles au moins deux variables sont au moins moyennement modifiées comme par exemple l'orientation et la position de la parallèle :



Enfin, il y a les figures qui ont plus de deux variables changées comme l'orientation, l'angle commun et la position de la parallèle.



Il est à noter que parmi les figures des trois catégories précédentes, aucune n'a moins bien été reconnue par les élèves qu'une autre.

Résultats figures pathogènes

Nous venons de voir que les figures qui sont reconnues bien qu'elles aient subi des déformations sont celles pour lesquelles une seule variable ou même deux sont modifiées de façon modérée. Parmi ces figures les plus représentées, certaines engendrent des erreurs.

	Proto- type I	Patho- gène A	Patho- gène A'	Patho- gène B	Patho- gène C	Patho- gène D	Patho- gène E
% Réussite	83%	13%	12%	57%	13%	15%	18%

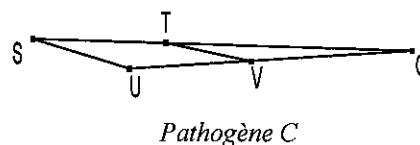
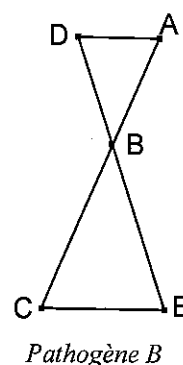
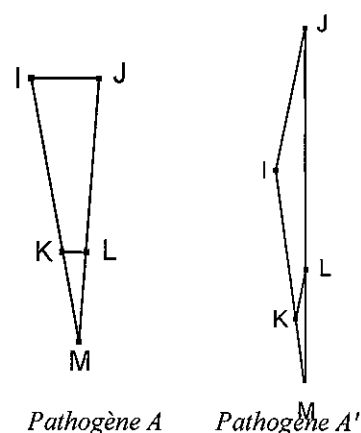
Les résultats que nous trouvons corroborent l'idée que nous avons initialement et qui consiste à penser que le paramètre d'orientation qui caractérise autant le prototype I que le II renforce la tendance naturelle de lecture verticale de haut en bas et horizontale de gauche à droite (Grenier 1988, Noirfalise, 1991). Cela conduit les élèves à écrire des rapports littéraux faux lorsqu'on modifie cette variable d'orientation des figures prototypes. Nous avons ainsi identifié des figures pathogènes A, A', B, C, D et E ci-dessous. Nous avons retenu la figure pathogène B bien que les erreurs commises à son sujet dans l'écriture des rapports littéraux n'aient pas été reproduites à plus de 65%.

Nous allons donner plus de précisions. Deux modifications des paramètres du prototype I sont source d'erreurs.

D'une part, comme nous venons de le voir, son orientation a une première forme de prégnance sur l'application du théorème. Ainsi, en ce qui concerne la figure pathogène A, les élèves écrivent très souvent : $JL/JM = IK/IM = IJ/KL$. De plus, la présence d'un angle aigu en haut d'une telle figure "inversée" renforce cette erreur (Pathogène A').

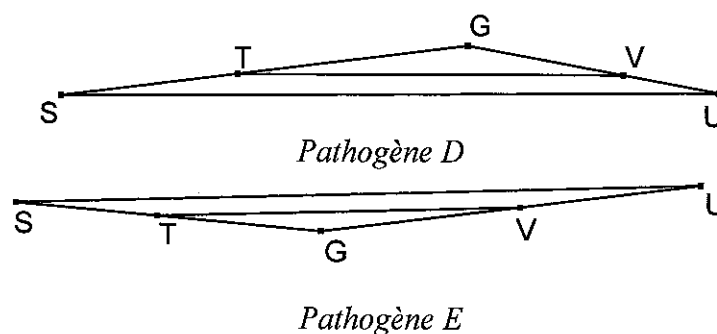
Notons que même s'il ne s'agit pas de dessins renversés ni redressés, un angle aigu situé vers le haut de la feuille engendre aussi cette lecture verticale.

Nous avons montré qu'une telle lecture verticale est aussi présente dans le cas de la figure papillon. Par conséquent, le prototype I influe d'une nouvelle façon sur le II car nous avons de plus remarqué que les écritures suivantes, très présentes dans tous les cas, apparaissent d'une façon encore plus importante lorsque la figure pathogène B est précédée d'un représentant du prototype I : $AB/AC = DB/DE = DE/CE$. (Pathogène B)



D'autre part, la variante 2 du prototype I entraîne une lecture de gauche à droite. La présence d'un angle aigu prononcé sur la gauche de la figure complétée par une lecture de gauche à droite génère une erreur pour trois figures pathogènes.

La figure C qui est définie par la présence d'un angle aigu situé sur la gauche et par une orientation « allongée ». La figure D est un prototype I dont on a modifié l'angle commun qui est devenu moyennement obtus ce qui engendre la présence d'un angle aigu sur la gauche de cette figure D. La figure E est en fait la figure D mais inversée.



Dans le cadre de l'application du théorème de Thalès à ces trois figures pathogènes, les élèves écrivent l'égalité : $ST/SG = TV/SU$. Ce type de polarisation visuelle existe également lorsqu'un angle aigu se trouve « en haut ».

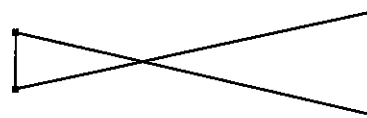
En résumé, nous déduisons que le prototype I a une première forme de prégnance : il renforce la tendance naturelle de lecture verticale de haut en bas et horizontale de gauche à droite. La

figure papillon est aussi touchée par l'erreur de lecture de gauche à droite commise, dans le cas de la variante 3, par 62% des élèves.

Remarquons enfin qu'une erreur type a été commise lors de l'application du théorème au prototype I.

La figure étant réellement un prototype I, les élèves écrivent parfois les rapports suivants que nous nommons fragmentés pour les deux premiers :

$$AM/MD = AN/NE = MN/DE$$



Pathogène F

A partir de ce dernier, nous émettons l'hypothèse, qui est testée dans le cadre de l'expérience suivante, que, d'une part, la fragmentation effective des mesures des longueurs sur les dessins et, d'autre part, la figure papillon accentuent, en 3^{ème}, l'obstacle cité ci-dessus lié à l'écriture de rapports dits fragmentés.

VII Expérience liée au registre numérico-algébrique

1. La notion de typicalité appliquée à l'analyse de l'opérationnalisation du théorème de Thalès pour le calcul de longueurs

Problématique

La quatrième et dernière expérience concerne les variables numériques pour lesquelles nous cherchons à comprendre, d'une part, l'influence de la distribution des mesures de longueurs dans l'apparition d'erreurs significatives et, d'autre part, les éventuelles influences réciproques que peuvent avoir les prototypes I et II dans la mise en oeuvre du théorème. Plus précisément, au sujet de ce dernier point, la question est de savoir si l'erreur liée à la fragmentation d'un prototype I n'est pas amplifiée par l'introduction de la figure papillon.

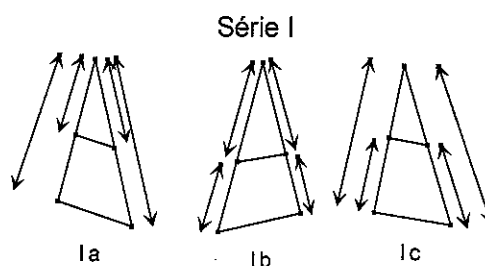
Pour cela, les variables figurales ne doivent pas interférer lors de la mise en oeuvre du théorème de Thalès. Ainsi, nous travaillons à partir de figures prototypes.

Protocole expérimental

Dans la première partie de cette expérience, nous recensons toutes les répartitions des longueurs qu'il est possible de faire sur les deux prototypes I et II. Nous exemplifions cette méthode à l'aide du prototype I. La prise en compte de toutes les répartitions de longueurs dans le cas I nous amène à considérer neuf distributions possibles des quatre mesures de longueurs dont une est à calculer. Ces distributions sont catégorisées au départ en trois séries sachant que pour chaque dessin, quatre positions de la longueur inconnue sont envisageables.

La série I regroupe les dessins pour lesquels la distribution est symétrique. Dans les trois cas qui composent cette série, à chaque fois, un seul dessin est possible.

Nous avons distingué ensuite les familles de figures dont les distributions des longueurs sont dissymétriques. Nous obtenons alors deux

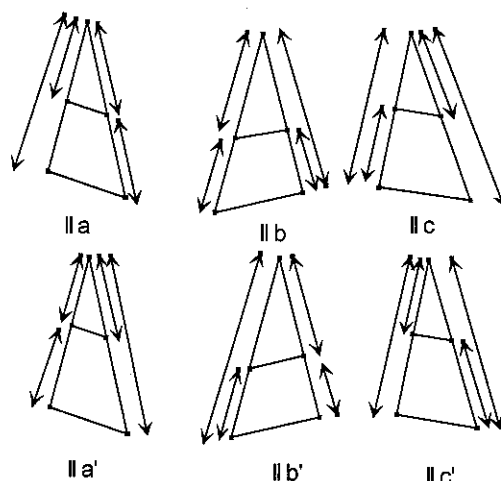


séries différentes.

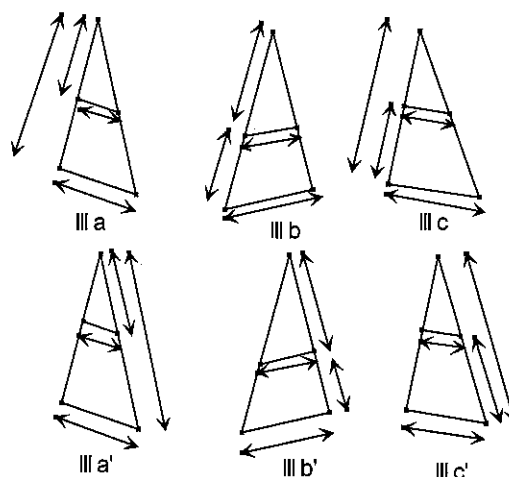
Les longueurs des dessins qui définissent la série II se trouvent exclusivement placées latéralement alors que celles qui caractérisent la série III sont en partie « intérieures ». Dans les deux cas, un dessin, par exemple II a, et son symétrique, par exemple II a', sont possibles. La collection de dessins ainsi constituée est partagée en deux cahiers d'expérimentation. Ces cahiers sont composés de six feuilles, chaque feuille recevant quatre dessins. La répartition à l'intérieur de ces deux cahiers s'effectue dans l'ordre d'un tirage au sort sur les six feuilles.

Ces cahiers sont reproduits, suivant le nombre d'élèves, en 12, 13 ou 14 exemplaires pour les classes 4^{ème} et en 12 ou 13 exemplaires dans les classes de 3^{ème}. Ce qui a donné un échantillon de 38 ou 39 élèves pour chaque dessin en 4^{ème} et de 37 ou 39 en 3^{ème}. Cette expérience est mise en place avec trois classes de 3^{ème}, juste avant le début du cours sur le théorème de Thalès afin de pouvoir étudier par la suite l'influence de la figure papillon, soit 76 élèves, et avec trois classes de 4^{ème}, après l'étude du théorème sur les droites parallèles dans le triangle, soit 77 élèves.

Série II



Série III



Chaque élève dispose d'un cahier de 6 feuillets et doit écrire les rapports littéraux, mettre le problème en équation et résoudre cette dernière. Le rythme de 10 minutes par feuillet est donné par le professeur de la classe. Comme annoncé plus haut, chaque feuillet contient quatre dessins accompagnés des inscriptions suivantes, que l'élève doit compléter :

tr = - - - -

* Equation :

* On garde : - - -

* Résolution : "

L'autre catégorie de cahiers proposée au cours de la seconde partie de cette quatrième expérience est construite de la même façon. Ils contiennent huit exemplaires de la figure 1 fragmentée du groupe I. Nous complétons par huit figures papillons 1 du groupe D. Pour avoir une référence de réussite et pour éviter un phénomène d'apprentissage, nous adjoignons huit figures du groupe I. Les dessins sont encore tirés au sort, à la différence près que cette fois-ci, une figure papillon prototype et "fragmentée" est systématiquement associée à un prototype I fragmenté. Cela donne un test composé de six feuillets comprenant chacun quatre figures, soit 24 figures accompagnées des quatre mêmes inscriptions ci-dessus.

Méthode d'analyse

Comme nous venons de le voir nous avons procédé à une première catégorisation *a priori* de ces distributions en rapport avec un argument de symétrie ou de dissymétrie.

Toujours dans le cadre d'une analyse *a priori*, nous formons également trois catégories de distribution des longueurs non plus liée à une question de symétrie des distributions mais en rapport avec la congruence de ces dernières avec l'énoncé du théorème.

Aussi, dans un premier groupe, nous plaçons tout d'abord les figures I (a), III (a) et III (a') qui sont congruentes avec l'énoncé.

Puis nous associons dans un groupe II les figures I (b) et I (c) qui ne sont pas congruentes avec le théorème actuel bien que des égalités de rapports, en cohérence avec le théorème d'une droite parallèle à un côté d'un triangle coupe les deux autres côtés en segments proportionnels, puissent être correctes.

Enfin, nous retenons les figures qui ne sont congruentes avec aucun énoncé que ce soit le théorème de Thalès ou le théorème de la droite parallèle à un côté d'un triangle.

Notre analyse *a posteriori* est fondée sur l'établissement d'un gradient de difficulté obtenu grâce à la méthode décrite ci-dessous.

Pour chacun des 15 cas de figures de distribution de longueurs, nous nous intéressons aux pourcentages de réussite globaux dans les rapports littéraux, dans les rapports numériques et dans les résolutions des équations.

Afin de savoir si la répartition gauche droite a de l'importance, nous donnons ces résultats en distinguant, pour les dessins des séries II et III, les types gauches des types droits. Ensuite, pour chaque grande famille, nous procédons à des comparaisons internes afin de savoir si la position de la longueur inconnue x influe sur la mise en équation et à la résolution des équations.

A ce sujet, nous disons que le type est de **distribution homogène** si à l'intérieur de cette famille de figures, suivant la position de x , il n'y a pas de pourcentages qui se démarquent comme nous pouvons le pressentir pour la figure I (a).

Dans le cas contraire, la distribution est considérée comme **non homogène** ce qui signifie que la difficulté de la tâche dépend en partie de la position de la longueur à calculer.

Après nous être prononcé sur le caractère homogène de la distribution, nous nous interrogeons, toujours d'après les trois mêmes pourcentages de réussite, sur la typicalité de la distribution. Nous distinguons trois niveaux de difficulté que nous qualifions de : difficile D, facile F, ou moyen M. Les difficultés peuvent provenir de la position de la longueur inconnue située au numérateur ou au dénominateur de la fraction, ou des calculs intermédiaires à effectuer pour constituer les rapports égaux.

Nous précisons que nous rassemblons dans un même groupe les dessins de séries distinctes pour lesquels les trois taux sont semblables à cinq pour cent près.

En ce qui concerne la question plus spécifique de la fragmentation des longueurs, nous comparons les erreurs commises sur les quotients littéraux et ensuite sur les quotients numériques. Nous confrontons les résultats obtenus par les élèves pour les figures II (a) à fragmentation unique et à congruence de l'autre côté avec ceux obtenus à partir des figures III (c) à fragmentation unique et les longueurs intérieures et également avec les figures à double fragmentation I (b).

Résultats et analyse : catégories des figures par répartition de longueurs suivant les pourcentages de réussite obtenus pour le prototype I

Nous ne communiquons pas ici les trois pourcentages de réussite aux tâches d'écriture des rapports littéraux, de mise en équation et de résolution de ces équations que les élèves doivent accomplir et qui nous sont utiles pour former des regroupements significatifs.

Cette quatrième expérience nous permet de mettre en évidence plusieurs catégories de figures suivant la répartition des longueurs et des résultats obtenus par les élèves. Nous donnons les résultats complets pour le prototype I et seulement partiels pour le prototype II.

Nous commençons par l'établissement d'une catégorisation des principales erreurs algébriques qui ont été commises par les élèves :

(OPa) Oubli des Parenthèses : $x/(x+5) = 10/16$. Cela donne pour certains élèves la procédure suivante : $16x = x + 5 \times 10$ puis, $16x = x + 50$.

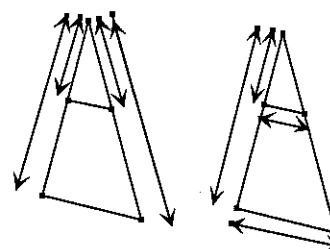
(OPM) Absorption d'une constante par un terme en x du fait de l'Oubli de la Priorité de la Multiplication : $16x = 50 + 10x$ puis, $16x = 60x$.

(SFA) Simplification Fractionnaire Abusive : $4(5+x) = 125$; $4(5+x)/5 = 125/5$ ce qui donne finalement : $4x = 25$.

(ETA) Erreur de Transposition Algébrique : $4(5+x) = 125$; $20 + 4x = 125$ donne $20 = 125 + 4x$ ou $4x = 105$ donne $x = 105 - 4$.

Groupe I : suivant la position de l'inconnue, les résultats étant très proches avec des taux de réussites élevés, nous considérons que ce premier type de distribution est homogène.

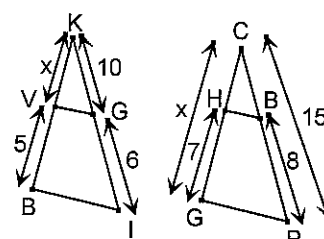
Ce groupe correspond à ce que nous attendions *a priori*. Ces deux distributions sont congruentes avec l'énoncé.



Groupe I

Groupe II : le niveau de distribution est homogène. Nous pensions ici aussi retrouver ces deux types de distribution proches quant aux pourcentages de réussite assez bas.

Nous nous attardons uniquement sur la première figure car les résultats pour la seconde sont identiques mis à part le fait que pour cette dernière les erreurs commises aux quotients littéraux sont rares. Pour les deux figures, la position de l'inconnue n'a pas d'importance.



Groupe II Figure 1 Groupe II Figure 2

Sur la première figure, en ce qui concerne les quotients littéraux, les erreurs sont systématiquement du genre : $KV/VB = KG/GI = VG/BI$. Notons que ce type d'égalités serait vrai si la présence du rapport VG/BI ne les rendait fausses. Les élèves les lisent directement sur le dessin.

Même lorsque les quotients littéraux sont justes, des erreurs relevant du même type d'amalgame sont produites. Cela donne alors les quotients numériques : $x/5 = 10/6$. Nous ne pensons pas que cette différence soit due à une identification d'une projection (Pfaff, 1995) mais plutôt, d'une part, à des distributions de données particulières et d'autre part à une lecture exclusivement numérique du dessin.

La distribution des longueurs est telle dans ce groupe II, que ce soit pour la première ou pour la seconde figure, qu'une relation entre les deux ensembles de nombres indépendamment des fonctions numériques liées à la projection ou à l'homothétie est identifiée par les apprenants. Nous interprétons ces erreurs par l'idée que la disposition des mesures sur une figure du groupe II : les incite à écrire spontanément : $x/5 = 10/6$. Ainsi, l'attrait du registre numérique est tel qu'au premier abord, les élèves recherchent avant tout une relation qui lie les nombres, indépendamment du contexte, ce qui peut aller à l'encontre des tâches à effectuer.

L'appréhension perceptive de la figure domine l'appréhension opératoire qui permettrait, par une adaptation simple des données, de rendre compatibles leurs distributions avec la version du théorème. Le registre figural est évacué au profit du registre numérique ce qui engendre une absence de l'attitude par rapport à l'appréhension discursive du dessin. Aucune erreur liée à la complexité de la mise en équation n'est commise pour cette première figure. Par contre, pour la seconde, une erreur liée à une mise en équation complexe et non à la prégnance de la figure est à noter : $(x - 7)/(x + 7) = 7/15$ mais cela semble rare.

De plus, pour ces deux figures, les rapports littéraux peuvent être justes, les rapports numériques également, mais des erreurs de type (OPa) et (OPM) pourraient provenir de la résolution des équations. Bien que quelques petites différences subsistent entre ces deux familles de distribution surtout quant aux écritures littérales, nous considérons qu'elles définissent la typicalité du groupe II.

Pour résumer, en ce qui concerne les figures du groupe II, nous pouvons dire qu'il y a une rupture entre l'appréhension numérique et l'appréhension géométrique des dessins.

- Soit le géométrique prime et les données sont lues dès le départ sur la figure ce qui se traduit par les égalités littérales : $KV/VB = KG/GI = VG/BI$.
- Soit le numérique prédomine et ainsi, bien que les rapports littéraux soient corrects, les élèves lisent les données numériques sur la figure qui n'est plus perçue comme un objet géométrique.

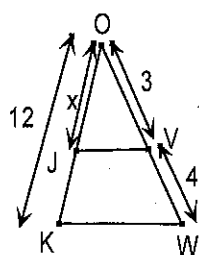
Une autre catégorie de figures concerne celles dont la distribution des mesures de longueurs n'est globalement compatible avec aucune version du théorème que ce soit le texte actuel ou celui de la droite parallèle à un côté.

Groupe III : l'orientation droite gauche n'a pas d'importance dans ce cas non plus. Mais nous ne sommes pas en présence d'un type de distribution homogène. Mises à part les expressions littérales, les dessins se rassemblent en deux groupes qui se définissent suivant le fait que la longueur cherchée se trouve sur les côtés fragmentés ou pas. Le premier comprend les figures pour lesquelles le côté congruent contient x (groupe III qui est complété par d'autres figures), et le second les figures où x n'est pas du côté congruent (groupe IV).

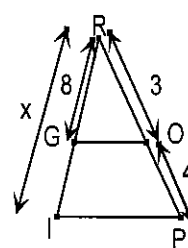
Les figures du premier groupe ne peuvent pas être classées dans le Groupe I du fait de la différence des pourcentages qui concernent les quotients numériques et la résolution des équations, qui sont plus faibles ici. Ces figures ne sont pas non plus concernées par le Groupe II, pour les mêmes raisons, les pourcentages étant alors plus élevés. En ce qui concerne le groupe III les erreurs rencontrées dans la mise en équation sont de même type que celles déjà citées pour le groupe I, c'est-à-dire, pour la figure 1 : $x/12 = 3/4$.

Cela correspond à une lecture directe des données sur le dessin et non à une mise en équation complexe comme dans le cas du groupe IV.

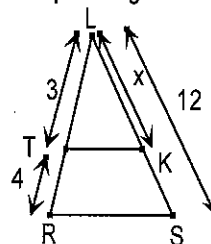
Groupe III Figure 1



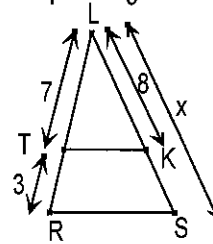
Groupe III Figure 2



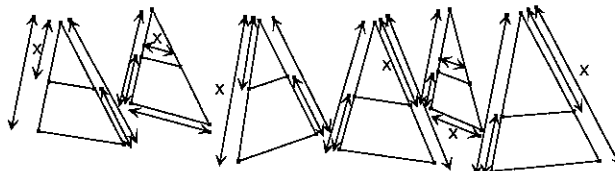
Groupe III Figure 3



Groupe III Figure 4

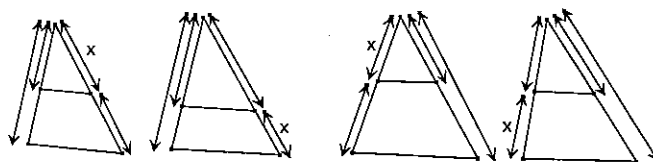


Groupe III bis : la distribution est non homogène car la position de la longueur inconnue importe. Le niveau est difficile. Les erreurs de mise en équation sont plus nombreuses que pour le Groupe III.

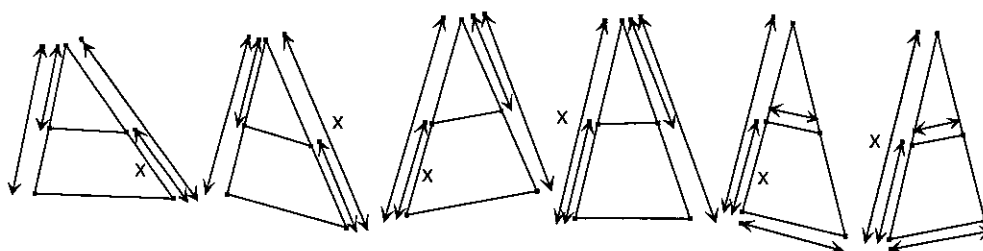


Malgré cela, les résultats étant assez proches de ce dernier, nous avons créé le groupe III bis.

Groupe IV : le niveau de distribution est non homogène. La présence de l'inconnue du côté des segments fragmentés engendre des mises en équation encore plus difficiles pour les élèves que dans les groupes III et III bis. Les pourcentages 2 et 3 sont différents de ce que nous avons pu relever jusqu'à présent. Les erreurs de résolution sont du type (OPa), (OPM), (SFA).



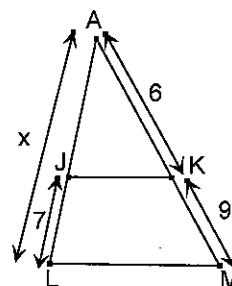
Groupe IV bis : le niveau de distribution est non homogène et difficile. Les erreurs sont de même type qu'au groupe IV mais les pourcentages sur les fractions littérales et numériques sont différents.



Pour ces groupes IV et IV bis, les erreurs commises sont liées à une mise en équation plus complexe et non à une lecture de données sur le dessin.

Groupe V : la distribution est homogène et le niveau de difficulté est très haut. Les erreurs caractéristiques ont été commises dans les mises en équation. Nous avons considéré que la distribution des longueurs jouait un rôle fondamental dans les mises en équation lorsque ces dernières étaient du type $x/7 = 6/15$; $(x - 7)/x = 6/9$ ou $(x - 7)/(x + 7) = 6/9$ et que les pourcentages de réussite étaient inférieurs à 20%.

Pour la première égalité, l'élève a trouvé le rapport 6/15 bien que la répartition ait été non congruente avec le théorème. Le fait que l'autre partie ait également été non congruente mais d'une autre forme, ne lui a pas permis de trouver le quotient correct. Pour la seconde, c'est l'inverse, l'élève a correctement effectué les calculs complexes faisant intervenir l'inconnue mais a directement lu les longueurs pour former le second rapport.



Enfin, le dernier type d'égalité fait apparaître un mélange entre la difficulté de constituer le premier rapport dépendant de x et la tentation de lire directement les longueurs pour former le second.

Pour ce type de figures, les difficultés d'écriture des rapports numériques sont plus importantes que pour les figures rencontrées précédemment du seul fait que les deux côtés ne soient congruents avec l'énoncé.

Des absences de réponses ont été relevées. Les figures de ce groupe V comportent les distributions les plus complexes.

En résumé, nous pouvons dire que les deux premières catégories de distributions que nous avons prévues en analyse *a priori*, l'une mettant en jeu des figures congruentes avec la version actuelle du théorème de Thalès et l'autre des figures compatibles avec une version droite parallèle à un côté d'un triangle, ont été mises en évidence par notre analyse *a posteriori*.

Par contre, nous avons affiné les caractéristiques des figures qui ne sont congruentes avec aucune version du théorème. Ces nouvelles catégories se définissent d'une part suivant l'existence ou pas d'un côté congruent et d'autre part, lorsqu'une telle congruence est avérée, suivant la position de l'inconnue sur le côté congruent ou sur l'autre.

Globalement, nous pouvons dire que des erreurs se produisent :

- soit parce que la figure biaise l'application du théorème dès le départ (rapports littéraux groupe II) ou au cours de la mise en équation (groupe II) et (groupes III, III bis : inconnue du côté congruent) par une lecture directe des données sur les dessins.
- soit, dans le cas où l'inconnue est du côté non congruent (groupes IV, VI bis), par une difficulté de mise en équation.
- soit, lorsque la figure est non congruente des deux côtés (groupe V), par une accentuation de la difficulté de mise en équation précédente.

Résultats et analyse : deux exemples de catégories obtenus pour le prototype II

Groupe A : le niveau de distribution est homogène et de difficulté moyen. Le prototype I semble prégnant du fait de la présence d'une lecture de haut en bas dans les rapports littéraux :

$$AB/AC = DB/DE = AD/EC$$

Nous élaborons un nouveau test pour confirmer cette hypothèse. La position de la longueur inconnue n'a apparemment pas d'importance.

Les erreurs commises dans les mises en équation sont dues :

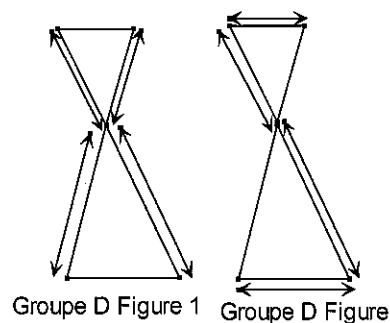
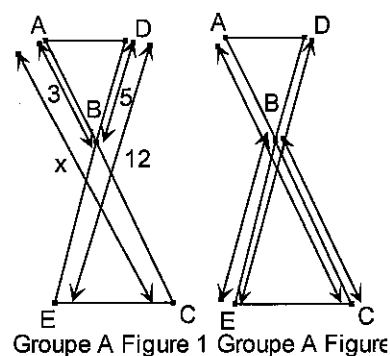
- soit à des lectures directes des données sur le dessin $3/x = 5/12$,
- soit à une inadéquation entre les fractions littérales et les numériques qui pourraient être justes :

$$3/(x - 3) = 5/7$$

alors que l'élève a initialement écrit :

$$AB/AC = DB/DE = AD/EC,$$

- soit à des erreurs dans l'écriture d'une égalité de rapports : $3/x = 5/7$ ou $3/(x - 3) = 5/12$.



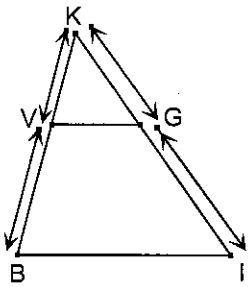
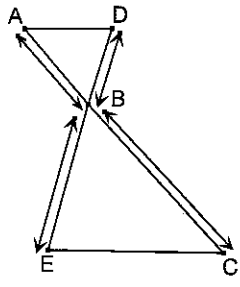
Groupe D : le niveau de distribution est homogène et moyen et les figures sont congruentes avec le théorème. Les erreurs sont dues à une lecture verticale pour les quotients littéraux. Peu d'erreurs ont été commises pour les mises en équation et les résolutions.

Globalement, nous pouvons dire que les égalités de rapports mathématiquement fausses sont plus nombreuses pour le prototype II que pour le prototype I.

2. Influence réciproque des prototypes I et II dans le cadre de l'écriture de rapports littéraux

En ce qui concerne les influences réciproques des deux prototypes, nous n'avons retenu que les cas pour lesquels les taux de réussite aux prototypes du groupe I sont élevés. Seuls les pourcentages de réussite des figures papillons et des prototypes I fragmentés sont communiqués. N'ayant pas relevé de différences significatives concernant les quatre prototypes I fragmentées possibles, et de même pour la figure prototype II, nous donnons les résultats globaux.

Le premier pourcentage de chaque colonne correspond aux quotients littéraux justes, le second aux mises en équations et le dernier aux résolutions de ces équations correctement menées.

Prototype I fragmenté :	Prototype II fragmenté :
92%	80%
19%	78%
16%	78%
	

Pour ce qui est des quotients littéraux, les erreurs sont classiques. Nous obtenons, pour le prototype I : $KV/VB = KG/GI = VG/BI$ et pour le prototype II : $AB/AC = DB/DE = AD/EC$. L'un des obstacles est relié à la prégnance de la figure fragmentée, l'appréhension perceptive de la figure prenant le pas sur l'appréhension discursive.

Pour la seconde figure, l'obstacle que nous avons déjà rencontré, est la prégnance de la lecture de haut en bas, lorsque justement le dessin est orienté de cette façon. Le prototype I et son orientation caractéristique influent sur l'application du théorème à la figure précédente.

En ce qui concerne les fractions numériques, nous confirmons la prégnance de la figure papillon sur le prototype I fragmenté. Les erreurs typiques que nous avons déjà relevées qui caractérisent les figures fragmentées 1 du groupe II ($x/5 = 10/6$), sont amplifiées par la présence de la figure papillon qui constitue ici aussi une difficulté particulière. La figure papillon peut être considérée comme influente dans le cas de l'application de la propriété à une figure fragmentée de type I tant dans l'écriture des rapports littéraux et que dans la mise en équation.

Inversement, le prototype I ainsi qu'une lecture de haut en bas influe sur l'application du théorème au prototype II.

VIII Conclusion

L'une des premières questions spontanées que nous nous posons consiste à savoir si des paramètres superfétatoires ne parasitent pas l'application d'un théorème. Mais avant cela, nous nous interrogeons au sujet des dessins qui seraient considérés par un nombre conséquent d'élèves, comme étant représentatifs.

De façon plus précise, nous pouvons dire que dans ce texte, nous nous attachons, dans un premier temps, à comprendre la façon dont se constituent des représentations typiques pour les élèves en dégagant des figures que nous nommons archétypes lorsqu'elles surgissent avant enseignement du théorème ou prototypes pour celles qui émergent après. Nous cherchons aussi à savoir si l'enseignement n'a pas une influence sur le renforcement des représentations archétypales chez les élèves.

Nous nous interrogeons ensuite sur la manière dont certains paramètres superflus qui permettent d'identifier en partie ces prototypes peuvent engendrer des difficultés chez les

élèves, d'une part, dans la reconnaissance de dessins pour lesquels le théorème est applicable, ce qui nous conduit à mettre en lumière des figures que nous désignons comme pathologiques, et d'autre part dans la mise en oeuvre du théorème, ce qui nous amène à mettre en évidence des figures que nous caractérisons comme pathogènes.

Dans un second temps, à partir de deux figures prototypes précédemment relevées, nous nous intéressons à la typicalité de la distribution des longueurs sur un dessin dans le cadre d'une résolution de tâche consistant à calculer une longueur inconnue. Nous cherchons également à savoir si les deux prototypes n'ont pas une influence réciproque.

Nous avons montré que les concepts de figures prototypes et archétypes existent en particulier pour le théorème de Thalès.

Nous avons clairement montré que l'enseignement renforce l'archétype I qu'il transforme en prototype.

Nous pouvons ajouter que ces figures archétypes et prototypes ne représentent effectivement pas uniquement les prémisses essentielles de l'énoncé du théorème de Thalès, mais également des propriétés superflues reconnues comme importantes par les élèves.

Les figures pathologiques, sont caractérisées par le fait que soit un seul paramètre du prototype en question a été modifiée mais de façon forte. Soit deux paramètres ont changé mais de façon moyenne. Enfin, nous trouvons aussi les prototypes dont au moins trois paramètres ont été modifiés.

Pour ce qui est des figures pathogènes, nous en avons trouvé sept distinctes. Nous avons obtenu des résultats probants sur le fait que trois d'entre elles génèrent une lecture dite « verticale » de haut en bas et que quatre autres incitent fortement les élèves à effectuer une lecture plutôt « horizontale » de gauche à droite de dessins.

Les variables figurales étant fixées, nous avons clairement identifié différents groupes de répartitions de mesures de longueurs engendrant des difficultés bien ciblées ce qui nous a permis de prendre en compte le caractère prototypique de certaines d'entre elles. Nous avons ainsi obtenu sept groupes homogènes pour le prototype I et quatre pour le prototype II.

Par ailleurs, nous avons pu, d'une part, déduire de cette étude de mise en oeuvre du théorème de Thalès et, d'autre part, inférer de l'analyse du contenu d'ouvrages scolaires et de préparation de cours d'enseignants que la conduite dans l'enseignement actuel de cette proposition consiste à se référer à une figure prototype quasi unique pour former des relations numériques et algébriques qui ensuite sont l'objet de traitements dans lesquels la figure n'intervient plus. Autrement dit, l'activité des élèves est réduite à la reconnaissance d'une configuration typique caractérisée en partie par des variables autres que celles qui ont trait à l'énoncé pour très vite abandonner le registre figural au profit des calculs. Finalement, ce constat n'est pas nouveau et rejoint les propos tenus par le mathématicien Henri Lebesgue dans son ouvrage *Sur la mesure des grandeurs* publié en 1931 :

Pour un mathématicien, calculer c'est raisonner, analyser plus profondément les faits géométriques sous-jacents ; pour un jeune élève, calculer c'est laisser aux symboles le soin de raisonner à sa place, c'est oublier tout fait géométrique pour ne plus voir que ces symboles.

Trois formes d'algorithmisation décrivent ma mise en oeuvre du théorème de Thalès par les élèves.

Une première d'ordre méthodologique consiste, en respectant une procédure de repérage d'éléments précis d'un prototype (deux triangles, un sommet en commun aux deux triangles, une parallèle à un côté etc.), à reconnaître ou à extraire une telle figure.

La reconnaissance d'un prototype étant faite, un autre rituel lié à l'écriture systématique de rapports littéraux est mis en place afin d'éviter ceux qui sont erronés : « on part du sommet commun aux deux triangles et on fait le petit côté sur le grand côté ».

Enfin, ces deux étapes ayant permis de tenir à distance la figure et de rendre absente une interprétation discursive de cette dernière, il ne reste plus qu'à mettre le problème en équation et à résoudre cette équation grâce à une algorithmisation des calculs algébriques.

Les deux questions que nous pouvons alors nous poser sont de savoir comment éviter cette fuite du géométrique au profit de l'algébrique et comment améliorer les résultats de mise en œuvre du théorème ?

Notre première piste semble être qu'il est important d'instaurer dans l'enseignement une variabilité à la fois des prototypes et des types de calculs.

Dans le but d'éviter que des archétypes se transforment en prototypes à forte prégnance lors de l'application du théorème et qui rendent parfois son exploitation difficile, tout en proposant des outils de reconnaissance de configurations, nous avons conclu qu'une grande variété des paramètres définissant ces prototypes devraient être proposés aux élèves. Une telle organisation devrait leur permettre de mieux accepter, dans des situations de résolution de problèmes, des variations raisonnables par rapport à ce type de figure.

Un autre enseignement que nous pouvons tirer de cette étude est qu'il semble certes important d'institutionnaliser des figures clés facilitant leur reconnaissance lorsqu'elles sont plongées dans une configuration complexe. Mais il est paraît encore plus important que ces figures représentatives n'adjoignent pas de variables superflues qui pourraient parasiter en premier lieu la reconnaissance de la figure et, en second lieu, la mise en œuvre d'un théorème.

Afin d'éviter une visualisation exclusivement iconique liée à la lecture des données numériques sur les dessins qui engendre le fait que les élèves se concentrent le plus rapidement possible sur une tâche calculatoire sans revenir à la figure, la réponse que nous apportons est fondée sur une double approche de la proportionnalité : interne et externe. La proportionnalité interne est liée au théorème d'une droite parallèle à deux côtés d'un triangle qui coupe les deux autres côtés en segments proportionnels et la proportionnalité externe est en rapport avec le théorème de Thalès actuel.

Suivant le type de répartition des mesures de longueurs connues et celle qui est à calculer, l'élève choisit l'une ou l'autre version du théorème. Le cheminement est exactement inverse à celui que nous avons décelé dans nos expériences et ne consiste plus à fuir le plus tôt possible le géométrique pour se réfugier dans les calculs. L'élève part du géométrique pour repérer une configuration adéquate, analyse la répartition des données numériques sur le dessin avec pour objectif de choisir la version du théorème la mieux appropriée pour procéder, dans un troisième temps, à son application effective. Ce n'est qu'à partir de l'étape suivante que l'élève se départit du dessin pour effectuer les calculs sachant qu'un retour à la figure en fin de procédure est envisageable pour vérifier sa cohérence.

De plus, nous avons montré dans un autre travail que l'approche du théorème de Thalès par la proportionnalité interne et externe améliorerait des résultats au niveau du registre algébrique. En effet, il semblerait que cette double approche constitue une remédiation aux erreurs rencontrées du fait que cette méthode diminue celles qui sont commises dans l'écriture des rapports littéraux, la mise en équation et la résolution de ces équations.

Enfin, une question globale et qui relèverait de plusieurs disciplines serait de savoir s'il existe, dans d'autres domaines que ceux liés au théorème de Thalès, des archétypes indépendants de tout prototype.

IX Bibliographie

- Cordier F. (1989). *Les notions de typicalité et de niveau d'abstraction. Analyse de deux propriétés des représentations cognitives*. Thèse présentée pour le diplôme national d'Habilitation à Diriger des Recherches. Université Paris Sud.
- Duval R. (1988). *Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence*. Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives. Vol n°1. IREM de Strasbourg.
- Duval R. (1994). *Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique*. Repère IREM n°7. Topiques édition. Pont-à-Mousson.
- Duval R. (2005). *Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements*. Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives. Vol n°10. IREM de Strasbourg.
- Grenier D. (1988) *Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement de la symétrie orthogonale en 6ème*. Thèse de Doctorat. Université Joseph Fourier Grenoble I.
- Houbedine J. et Kerboeuf M-P. (2005). *Les figures-clés : une idée pour le début de l'apprentissage de la démonstration en quatrième*. Repère IREM n°59. Topiques édition. Pont-à-Mousson.
- Laguerre E. (2005). *Une ingénierie didactique pour l'apprentissage du théorème de Thalès au collège*. Thèse de Doctorat. Université Paris VII Denis Diderot.
- Lebesgue H. (1931). *Sur la mesure des grandeurs. L'enseignement mathématique*. Paris et Genève.
- Lemonidis C. (1990). *Conception, réalisation et résultats d'une expérience d'enseignement de l'homothétie*. Thèse de Doctorat. Université Louis Pasteur. Strasbourg.
- Noirfalise R. (1991). *Figures prégnantes en géométrie*. Repère Irem n°2. Topiques édition. Pont-à-Mousson.
- Pfaff N. (1995). *Processus de conceptualisation autour du théorème de Thalès*. Thèse de Doctorat. Université Paris V. René Descartes.
- Rosch E. (1976). *Classification d'objet du monde réel : origine et représentations dans la cognition*. Bulletin de psychologie. Numéro spécial.

Genèses instrumentales pour l'enseignant. Une proposition d'analyse en terme de tâches et de techniques didactiques instrumentées

Laetitia Bueno-Ravel

CREAD

IUFM de Bretagne, Université de Bretagne Occidentale

Résumé

Depuis quelques années, l'emploi des bases d'exercices en ligne en cours de mathématiques s'est largement répandu. Il est alors légitime de se poser la question de l'existence d'une genèse instrumentale pour l'enseignant dans le cas où l'artefact considéré est une base d'exercices en ligne. L'étude présentée ici se propose de montrer l'existence de telles genèses et développe une approche théorique et méthodologique pour les analyser. Cette étude s'appuie sur le travail du groupe de recherche EMULE (Enseignement des Mathématiques et Usages en Ligne d'Exercices) dépendant du projet GUPTEn (Genèse d'Usages Professionnels de Technologies par les Enseignants) piloté par J.B. Lagrange et soutenu par l'INRP. Ce groupe est composé de 2 d'enseignants chercheurs, de 2 formateurs IUFM, de 3 professeurs des écoles et de 2 professeurs de collège. L'objectif de ce groupe est d'étudier l'appropriation par des enseignants de primaire et de collège de ressources en ligne de type bases d'exercices de mathématiques, notées BE par la suite.

Dans la première partie de ce texte, nous développons l'approche théorique et méthodologique utilisée dans cette recherche. Dans le cadre de ce travail, nous nous sommes référées à l'approche instrumentale telle qu'elle a été développée en didactique des mathématiques pour identifier et analyser les genèses instrumentales pour l'enseignant. Précisons que cette étude porte autant sur le travail en classe que sur le travail hors classe de l'enseignant. En effet, les genèses sont des processus continus. Par exemple, le travail hors classe de l'enseignant peut être de planifier une séance utilisant une BE. Cette séance va ensuite se réaliser en classe. Pendant cette réalisation, l'enseignant peut prélever des informations que lui seront utiles pour préparer hors classe la prochaine séance et ainsi de suite. Gueudet et Trouche (à paraître) utilisent l'image de l'hélice pour décrire ce processus continu de genèse.

Dans une deuxième partie, nous montrons comment nous avons identifié des évolutions de scénarios d'utilisation des BE par les enseignants.

Enfin, nous mettons en œuvre notre approche théorique et méthodologique pour analyser un enseignement de trigonométrie en classe de 3^e intégrant la base d'exercices en ligne Mathenpoche (<http://mathenpoche.sesamath.net>), notée MEP par la suite.

Mots clefs

Bases d'exercices en ligne, genèses instrumentales, Techniques didactiques, techniques instrumentées, ressources pour l'enseignant

I Genèses instrumentales pour l'enseignant

Dans cette partie, nous allons tout d'abord revenir brièvement sur l'approche instrumentale. Nous donnerons ensuite des exemples de phénomènes d'instrumentation et d'instrumentalisation dans le cas où le sujet considéré est un enseignant. Nous finirons par une première description de l'approche théorique et méthodologique que nous utilisons dans cette recherche.

1. L'approche instrumentale : cas d'un sujet enseignant

L'approche instrumentale a été à l'origine développée en ergonomie cognitive par Rabardel (1995). Cette approche amène à distinguer l'artefact, objet qui va s'insérer dans une activité humaine, de l'instrument, composé d'un artefact et de schèmes d'utilisation de cet artefact construit par le sujet. Le processus conduisant à la construction de l'instrument est appelé genèse instrumentale.

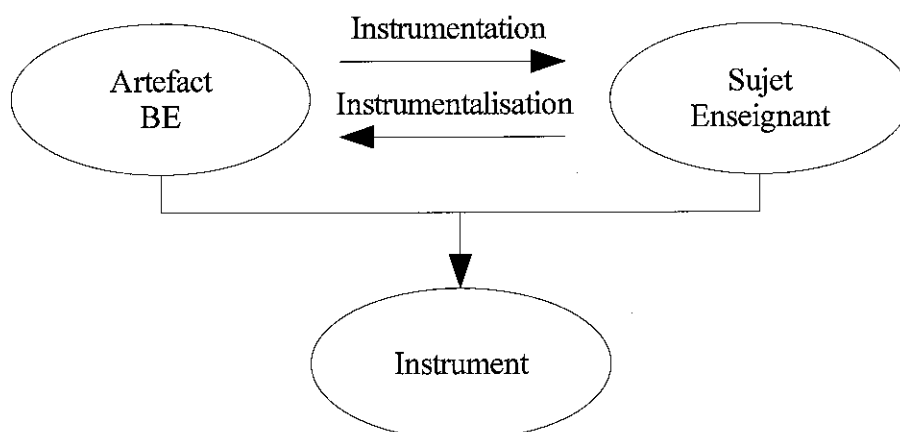


Fig. 1 : Genèses instrumentales pour le sujet enseignant

L'approche instrumentale souligne la complexité des processus individuels et sociaux de genèse. En effet, ces processus dépendent non seulement des contraintes et des potentialités créées par l'artefact utilisé mais aussi des situations d'utilisation de ce dernier. Cette approche distingue, dans les genèses, deux processus imbriqués : les processus d'instrumentation tournés vers le sujet avec la constitution de schèmes d'utilisation des artefacts et des processus d'instrumentalisation tournés vers l'artefact.

C'est à partir des années 90 que des recherches en didactique des mathématiques ont commencé à utiliser l'approche instrumentale pour étudier des phénomènes liés à l'emploi d'outils informatiques en classe de mathématiques. Les premières recherches dans ce cadre se sont tout d'abord intéressées au sujet élève. Cazes & al. (2006) ont par ailleurs été les premiers à considérer comme artefact une BE, mais toujours pour le sujet élève. Dans notre étude, il est clair qu'un enseignant utilise une BE comme outil de sa pratique professionnelle. Il va y avoir, pour le sujet enseignant, une appropriation de l'artefact BE et une intégration de celui-ci dans son activité. On peut alors parler de genèses instrumentales pour l'enseignant, dans le cas où l'artefact considéré est une BE. Nous montrons dans la partie 2 comment nous avons identifié ces genèses instrumentales.

Nous allons maintenant donner deux exemples de phénomènes d'instrumentation et d'instrumentalisation dans le cas où la BE considérée est MathEnPoche (MEP).

2. Exemples de phénomènes d'instrumentation : Faut-il accepter l'écriture « $\sin^{-1}$ » en 3^e ?

En France, la trigonométrie présente dans le programme du collège est une trigonométrie du triangle rectangle (Berté & al. 2004). L'ordre d'apparition de cosinus en 4^e et de sinus et tangente en 3^e n'est dû qu'à un découpage du programme. Or, « $\sin^{-1}$ » est un ostensif de la trigonométrie des fonctions trigonométriques qui ne seront abordées qu'au Lycée. Cependant, utiliser « $\sin^{-1}$ » en classe de 3^e ne pose, mathématiquement, pas de problème car les angles considérés sont strictement compris en 0 et 90 degrés. Une analyse rapide de différents manuels de 3^e montre clairement qu'il n'existe pas de consensus sur le fait d'accepter ou non l'écriture « $\sin^{-1}$ ». Certains manuels l'acceptent, d'autres l'utilisent en faisant référence à la touche $\sin^{-1}$ de la calculatrice des élèves et enfin, d'autres manuels interdisent explicitement cette écriture comme le montre les extraits de manuel présentés ci-dessous. Cette absence de consensus autour de cette écriture se retrouve chez les enseignants et le programme ne prend pas position sur cette question.

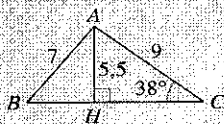
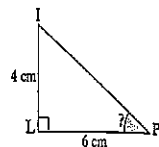
57 Retrouver le bon raisonnement On considère le triangle ABC ci-contre.  1. En tenant compte des annotations du professeur, rédiger correctement la réponse. <i>Prends le triangle rectangle considéré. Je calcule la mesure de l'angle B. $\sin B = \frac{5.5}{7} = 0.785$ d'où $\sin^{-1}(0.785) \approx 52^\circ$ on écrit : $B \approx 52^\circ$</i> Maths 3^e, Cinq sur cinq, Hachette, p. 184	EXEMPLE Calculer la mesure d'un angle aigu d'un triangle rectangle connaissant les longueurs des côtés de l'angle droit. Un triangle PLI, rectangle en L est tel que : $PL = 6$ cm ; $LI = 4$ cm. Calculer l'arrondi au dixième de l'angle $\widehat{LPI}$.  SOLUTION Dans le triangle PLI, rectangle en L : $\tan \widehat{LPI} = \frac{LI}{PL} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ d'où $\widehat{LPI} \approx 33,7^\circ$.  MÉTHODE On cherche un angle. On connaît le côté opposé et le côté adjacent à cet angle. On peut donc calculer la tangente de cet angle. La calculatrice permet de calculer une valeur approchée de l'angle $\widehat{LPI}$ dont la tangente est égale à $\frac{2}{3}$: on utilise la fonction « $\tan^{-1}$ ». Math 3^e, Nouveau Décimale, Belin, p. 184

Fig. 2 : Extraits de manuels de 3^e

Voici la position adoptée par MEP, qui a été utilisée par les 2 enseignantes de collège du groupe EMULE pour leur enseignement de trigonométrie en 2006-2007.

Dans MEP, l'écriture « $\sin^{-1}$ » est acceptée, sans être encadrée pour signifier une touche de calculatrice. Mais elle est toujours précédée de la phrase « on effectue à la calculatrice » et ce, que ce soit pour le calcul de la mesure d'un angle connaissant son cosinus, son sinus ou sa tangente.

Exercice n°5 : Calcul de l'angle

Question N°1 : Complete.

Le triangle UPX est rectangle en X tel que
 $UP = 29$ et $UX = 21$. Alors :

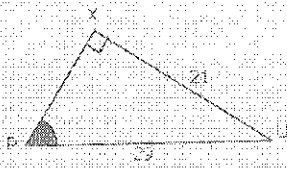
$$\sin(\widehat{UPX}) = \frac{XU}{PU}$$

$$\sin(\widehat{UPX}) = \frac{21}{29}$$

On effectue à la calculatrice : $\sin^{-1}(21/29)$

$\widehat{UPX} \approx$ (arrondir au degré près)

Trouve la mesure de l'angle UPX.

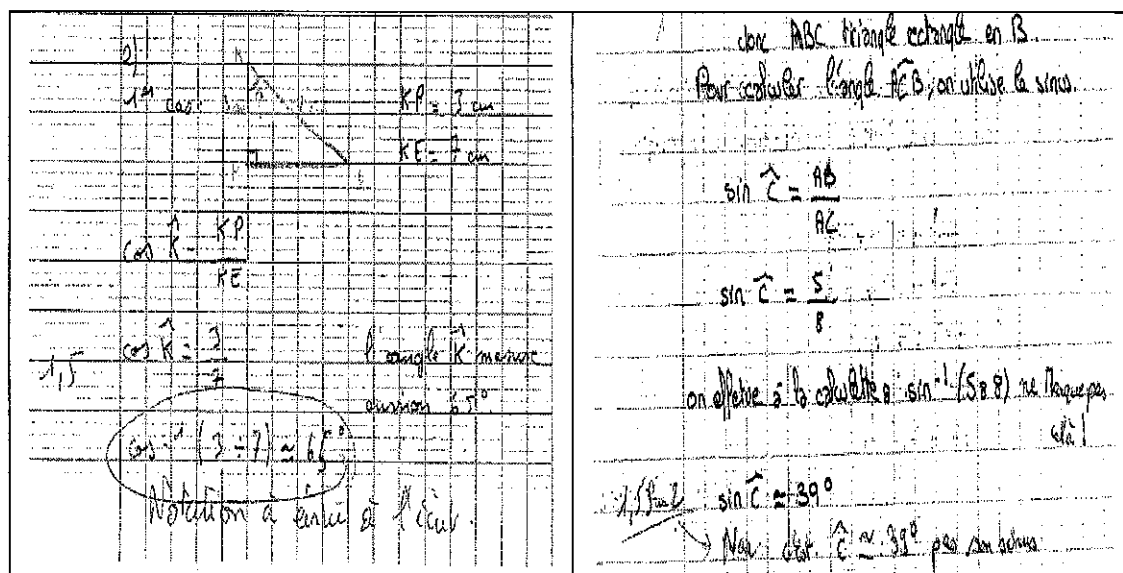


? Une calculatrice est à ta disposition.

Valider

Fig. 3 : copie d'écran d'un exercice MEP de 3^e demandant de trouver la mesure d'un angle.

Avant d'utiliser MEP pour leur cours de trigonométrie, Carmen et Fabienne avaient pour position de ne pas employer l'écriture « $\sin^{-1}$ » dans leurs cours et elles en interdisaient son emploi aux élèves, allant même jusqu'à les sanctionner s'ils l'utilisaient en évaluation. Selon elles, cette écriture ne fait que rendre encore plus difficile aux élèves la distinction entre ce qui représente la mesure d'un angle et ce qui représente son sinus. Mais en décidant d'utiliser MEP, Carmen et Fabienne se sont retrouvées en porte à faux par rapport à cette écriture car elle est présente dans MEP. Elles ont donc fait le choix de ne toujours pas l'employer dans leurs cours mais elles ne précisent plus à l'ensemble de la classe que cette notation est interdite. Elles font des remarques individuelles aux élèves qui l'écrivent. Cette notation est apparue dans les évaluations : 14 élèves sur 54 l'utilisent. Carmen et Fabienne ne sanctionnent plus ces élèves mais écrivent en marge « Ne marque pas cela ».



*donc ABC triangle rectangle en B.
 Pour calculer l'angle ACB on utilise le sinus.*

$\sin \hat{C} = \frac{AB}{AC}$

$\sin \hat{C} = \frac{5}{8}$

on effectue à la calculatrice : $\sin^{-1}(5/8)$ ne marque pas cela !

$\sin \hat{C} \approx 39^\circ$

Ne marque pas cela.

Notation à éviter et à éviter.

Fig. 4 : extraits de copies d'élèves annotées par Carmen et Fabienne.

La position de Carmen et Fabienne par rapport au fait d'accepter ou non l'écriture « $\sin^{-1}$ » a donc changé du fait de l'utilisation de MEP dans leurs cours de trigonométrie. Cette évolution

de leur pratique habituelle sur ce sujet peut être interprétée comme un processus d'instrumentation.

3. Exemples de phénomènes d'instrumentalisation : la mise en ligne des aides animées de MEP

MEP propose pour chaque contenu des aides animées. Ces aides animées ont été conçues pour que les élèves puissent y accéder en cas de difficulté à résoudre un exercice. Certains enseignants ont développé une utilisation de ces aides non prévue initialement par les concepteurs de MEP. Ils projetaient ces aides en classe entière pour faire des rappels de cours ou des rappels de méthode de résolution d'un certain type d'exercices. Or, pour projeter une aide, ces enseignants devaient lancer l'exercice MEP auquel l'aide est associée, commettre une erreur dans cet exercice pour que la lecture de l'aide soit proposée et, enfin, accéder à l'aide. Par le biais de forums d'utilisateurs de MEP, les enseignants ont fait connaître leur souhait de pouvoir disposer d'un accès plus direct à ces aides. Les concepteurs de MEP ont alors mis ces aides en ligne et les cahiers Mathenpoche sur le site Sésamath prévoient l'utilisation de ces aides en cours. Bien entendu, tout phénomène d'instrumentalisation ne conduit pas nécessairement à une intervention des concepteurs de l'artefact sur ce dernier.

Nous allons maintenant présenter dans ses grandes lignes le cadre théorique et méthodologique que nous avons développé dans cette recherche. Certains points seront détaillés dans les parties II et III.

4. Approche théorique et méthodologique pour analyser les genèses instrumentales pour l'enseignant : les grandes lignes

Étudier les genèses instrumentales pour l'enseignant nécessite de repérer si les enseignants utilisant une BE évoluent vers des usages stables de celle-ci susceptibles d'être organisés par un schème. Une première phase de travail du groupe EMULE a donc été de décrire et d'analyser les évolutions des utilisations de MEP des enseignants du groupe. Nous avons donc été confrontées à la question de l'observation et de la description des pratiques des enseignants utilisant une BE. Cela nous a conduit à retravailler la notion de scénario déjà présente en didactique (Laborde 99, Guin et Trouche 2002) et en EIAH (Pernin et Lejeune 2004). Nous avons donc analysé les évolutions de scénarios des enseignants du groupe sur deux années scolaires : 2005/2006 et 2006/2007. Ce point fera l'objet de la partie 2.

Comme nous l'avons souligné en introduction, le groupe EMULE fait parti du projet de recherche GUPTEn (Lagrange & al. 2007). Au sein de ce groupe, différentes approches sont utilisées pour étudier les genèses instrumentales pour l'enseignant. Certaines composantes de ce projet s'appuient sur la théorie de l'activité d'Engeström (1999) et la double approche développée par Robert et Rogalski (2002). Dans le cadre du travail du groupe EMULE, nous avons adopté un point de vue institutionnel pour étudier les genèses instrumentales de l'enseignant. Nous reviendrons plus longuement sur les raisons de ce choix dans la partie 3. Nous avons donc abordé la question de l'étude des genèses pour l'enseignant dans le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique en analysant les tâches et les techniques didactiques de l'enseignant instrumentées par une BE (Chevallard 2002). Cette approche a déjà été utilisée par Lagrange (2000) dans le cas où le sujet considéré est un élève. Nous l'utilisons ici pour le sujet enseignant.

Par ailleurs, pour analyser ces tâches et techniques de l'enseignant, nous nous appuyons sur les travaux de Sensevy & al. (2000, 2007). Dans la Théorie de l'Action Conjointe en Didactique, les techniques utilisées par les enseignants sont considérées comme étant polyfonctionnelles :

« Tel énoncé d'un professeur doit se comprendre à la fois au plan du rapport au milieu qu'il propose aux élèves (mésogénèse), au plan de la chronogénèse qu'il fait évoluer et au plan de la topogénèse qu'il permet de construire. » (Sensevy, p.29, 2002).

Nous essayons donc de dégager, par nos analyses, les finalités *topogénétiques* (produire les lieux du professeur et de l'élève), *chronogénétiques* (produire les temps de l'enseignement et de l'apprentissage) et *mésogénétiques* (produire les objets des milieux des situations et l'organisation des rapports à ces objets) de ces techniques didactiques, en nous centrons plus particulièrement sur les techniques instrumentées par la BE utilisée.

5. Deux temps de recherche, deux méthodologies

Pour analyser les évolutions des utilisations de MEP des enseignants du groupe, nous avons élaboré avec eux une grille leur permettant de décrire les scénarios qu'ils construisaient. A chaque utilisation de MEP, les enseignants remplissaient cette grille, nous la remettions et nous la commentions au besoin.

Nous nous sommes ensuite centrées sur la réalisation de scénarios en classe pour analyser les tâches et techniques didactiques instrumentées. Pour une analyse en terme de praxéologies didactiques la question des grains de description retenus est fondamentale (Ravel 2003). Les grains de descriptions que nous étudions plus particulièrement dans cette recherche sont ceux de la séquence et de la séance. Pour le recueil des données, nous observons et filmons une séquence dans laquelle un enseignant du groupe de recherche utilise une BE, en nous entretenant autant que possible avec celui-ci avant et après chaque séance. L'ensemble des documents enseignants et des productions d'élèves relatifs à la séquence sont recueillis. Nous identifions à partir de ce corpus de données les types de tâches didactiques qui sont apparus, tant au niveau de la séance qu'à celui de la séquence. Les régularités observées dans la façon d'accomplir ces types de tâches nous permettent d'inférer des techniques didactiques, instrumentées ou non par la BE.

II Des évolutions de scénarios : vers les genèses instrumentales....

Pour mettre en évidence des phénomènes de genèse instrumentale pour l'enseignant, nous avons étudié sur deux années les pratiques des enseignants du groupe avec une BE et leurs évolutions. Avant d'exposer les résultats obtenus de l'analyse des scénarios construits par les enseignants, nous allons, pour éclairer notre propos, faire tout d'abord une brève présentation de MEP. Il faut souligner que dans ce projet, les enseignants étaient libres de choisir la BE qu'ils souhaitaient utiliser dans leur classe. Et en dépit d'incitations de notre part d'utiliser différentes BE, MEP a été quasiment la seule BE utilisée en classe.

1. Une BE plébiscitée : MEP

MEP est avant tout une base d'exercices de mathématiques pour le collège. Les exercices proposés sont organisés en premier lieu par niveau scolaire, puis répartis en deux domaines : numérique et géométrie, et enfin par chapitres à l'intérieur de ces deux domaines.

Les enseignants du groupe font partie des « utilisateurs réseau » de MEP. Ils ont inscrit leurs élèves sur MEP, c'est à dire attribué à chacun un login et un mot de passe. Ils peuvent alors programmer des séances MEP, à savoir choisir des exercices parmi les exercices MEP, et une plage de temps durant laquelle ces exercices seront proposés à leurs élèves. Différents menus peuvent éventuellement être proposés à différents groupes d'élèves. Dans les utilisations de MEP auxquelles nous nous intéressons ici, l'élève travaille en classe, sur des séances programmées par les enseignants. L'élève rencontre donc une liste d'exercices, chacun étant caractérisé par un titre. Chaque exercice comporte 5 ou 10 questions ou problèmes ; dans certains cas, ces questions sont indépendantes, et dans d'autres cas elles se suivent. Il n'est pas possible, même si on a déjà travaillé sur le logiciel, de débiter un exercice par la question 3 ou 4 ; toutes les questions doivent être traitées dans l'ordre. Lorsque l'élève accède à un exercice, un énoncé de problème apparaît à l'écran, problème que doit résoudre l'élève. Il doit noter sa réponse dans la (ou les) case(s) prévue(s) à cet effet puis valider sa proposition (voir figure 3 ci-dessus). Si l'élève donne la réponse attendue, l'affichage « Bravo » apparaît et le compteur du score est mis à jour. Si l'élève se trompe, il en est averti et on lui propose d'utiliser une aide pour corriger son erreur. Si l'élève se trompe à nouveau à la deuxième tentative, la lecture de l'aide lui est imposée et la réponse au problème est finalement donnée. La plupart du temps une calculatrice basique est à disposition des élèves.

Les enseignants ont également accès à un outil de suivi des élèves. Ils peuvent les suivre « en direct » pendant les séances en classe : à partir du poste enseignant, ils visualisent le déroulement du travail de chaque poste élève. Ils peuvent aussi imprimer un bilan de la séance ; une partie du bilan donne des informations sur le travail de l'ensemble de la classe, et une partie concerne chaque élève, ou binôme d'élèves (en fait chaque poste). On sait quels exercices ont été abordés, combien de questions ont été faites, si elles ont été réussies à la première tentative, à la deuxième tentative, ou pas ; combien de temps a été passé sur l'exercice...

2. La notion de scénario et grille de description

Comme nous l'avons déjà souligné, pour étudier les genèses instrumentales pour l'enseignant nous avons dans un premier temps repéré si les enseignants utilisant une BE évoluaient vers des usages susceptibles d'être organisés par un schème. Quatre questions ont guidé notre travail :

- Quelles sont les différentes utilisations de MEP faites par les enseignants ?
- Comment évoluent ces utilisations au cours du temps ?
- Comment expliquer ces évolutions ?
- L'enseignant développe-t-il des usages stables de la MEP ?

Pour étudier ces questions, nous avons été confrontées au problème de l'observation et de la description des pratiques des enseignants avec MEP. La nécessité d'une description précise et structurée des utilisations de MEP nous a conduites à utiliser la notion de scénarios. Cette notion a été introduite en didactique des mathématiques par Laborde (1999) pour proposer à des enseignants des scénarios leur permettant d'intégrer Cabri-géomètre dans leurs pratiques. Cette notion de scénarios a également été travaillée par Guin et Trouche (2002) dans le cadre du SFoDEM (Suivi de Formation à Distance pour les Enseignants de Mathématiques).

Dans ces deux recherches, les scénarios étaient élaborés dans une perspective de diffusion et de reproduction d'activités TICE ; ce qui n'est pas l'objectif de la recherche menée par le groupe EMULE.

Afin d'élaborer une grille de description des scénarios prenant en compte les spécificités des BE, nous nous sommes tournées vers la notion de scénario telle qu'elle est utilisée dans certains travaux en EIAH, notamment par Pernin et Lejeune (2004). Pernin et Lejeune ont établi une taxonomie des scénarios qui nous a permis de construire avec les enseignants du groupe une grille (Voir annexe 1) leur permettant de décrire les scénarios qu'ils élaboraient avec les BE. Par souci de brièveté, nous ne présentons pas ici les critères retenus par Pernin et Lejeune, ni le travail que nous avons fait sur ces critères afin de construire la grille de description des scénarios. Cet aspect de notre recherche est détaillé dans Bueno-Ravel et Gueudet (2008). Nous donnons ici les résultats obtenus de l'analyse des grilles remplies par les enseignants sur deux années scolaires. Notons que chaque année, les enseignants nous ont fourni de 4 à 7 scénarios chacun.

3. Vers les genèses instrumentales pour l'enseignant

L'analyse de l'ensemble des scénarios a fait apparaître différents types d'évolution dans les utilisations que les enseignants pouvaient faire de MEP.

Tout d'abord, des évolutions apparaissent clairement comme des conséquences de la familiarisation des enseignants avec les fonctions du logiciel. L'appropriation des fonctionnalités de MEP telles que la programmation de menus différenciés, l'utilisation d'option pour contraindre les parcours des élèves a permis aux enseignants de mettre en place des scénarios de plus en plus personnalisés et de plus en plus contraints. Les analyses ont également montré une évolution de la fonction de MEP dans les scénarios. Les enseignants novices utilisent essentiellement MEP pour entraîner les élèves sur des compétences techniques. Une fois familiarisés avec la fonction de suivi des élèves, ils conçoivent davantage de scénarios dans lesquels MEP est utilisé pour découvrir de nouvelles techniques ou propriétés.

Par ailleurs, il faut noter l'importance de l'appropriation par les enseignants des contenus mathématiques proposés par MEP. Lors de leurs premières utilisations, ils doivent identifier parmi le contenu très riche proposé par cette BE, les exercices intéressants à retenir pour leurs élèves. Cette sélection des exercices réclame un temps de travail assez long, du moins plus long qu'avec un manuel car il faut lancer et répondre à toutes les questions d'un exercice pour savoir ce qui est proposé. Une fois le contenu mathématique de MEP familier, les enseignants intègrent plus facilement MEP dans des séquences plutôt que de l'utiliser sur des séances ponctuelles. Ils programment également alors du travail hors classe pour les élèves.

Parmi toutes les évolutions, nous avons aussi vu se développer des utilisations personnelles de MEP, ce qui peut-être interpréter en terme de phénomène d'instrumentalisation. Par exemple, même si MEP offre la possibilité de contraindre l'ordre des exercices proposés et la note seuil à obtenir, les enseignants se mettent non plus à programmer ces contraintes mais à les formuler oralement (ne pas faire plus de deux fois le même exercice, quelque soit le résultat obtenu par exemple). D'autre part, ils abandonnent la programmation de menus personnalisés. Ils font alors le choix de programmer un grand nombre d'exercices en laissant les élèves libres de choisir ceux qu'ils souhaitaient travailler. Les enseignants fournissent alors si nécessaire des conseils individuels aux élèves pour les guider dans leurs choix.

Notons également que les enseignants ayant l'habitude d'utiliser MEP se sont mis à utiliser cette BE à des fins d'évaluation. Cette utilisation n'est pas facilitée par les fonctionnalités de MEP car la fonction suivi des élèves ne propose pas de note globale par élève pour une séance programmée. Un enseignants du groupe a construit une grille d'évaluation à partir des bilans fournis par MEP en retenant par élève, la meilleure note obtenue par exercices programmés.

La plupart des enseignants ont proposé par ailleurs des exercices type MEP dans leurs devoirs et les enseignants de primaire ont fait coller dans les cahiers des élèves des extraits de bilans MEP.

L'analyse des scénarios recueillis nous a clairement permis de mettre en évidence une évolution des pratiques des enseignants avec MEP. Nous avons par ailleurs montré que les pratiques des enseignants novices avec MEP évoluaient vers celles des enseignants experts dans l'utilisation de MEP. Cela nous permet de considérer les pratiques des enseignants experts comme des pratiques stables et nous conforte dans le fait que ces évolutions peuvent être interprétées en terme de genèses instrumentales pour l'enseignant. Nous avons en effet observé un processus d'appropriation par les enseignants des possibilités techniques offertes par MEP, de son contenu mathématique et de ses intégrations possibles dans l'enseignement. Nous pouvons alors considérer que les enseignants ont développé un instrument à partir de MEP.

Nous allons maintenant montrer quel point de vue et quelle méthodologie nous adoptons pour analyser les activités de l'enseignant avec une BE. Nous nous appuyons sur une étude de cas, une séquence de trigonométrie utilisant MEP en 3^e, séquence élaborée et conduite par Carmen.

III Un enseignement de trigonométrie en classe de 3e avec MEP

Comme nous l'avons déjà mentionné, nous avons choisi d'étudier les genèses instrumentales pour l'enseignant dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique (notée TAD par la suite) en analysant les tâches et techniques didactiques instrumentées par une BE. Nous revenons maintenant sur le point de vue que nous prenons pour étudier l'activité de l'enseignant.

1. Un point de vue institutionnel pour étudier des usages stables

En ergonomie cognitive, l'activité du sujet est structurée en classe de situations (Rabardel et Bourmaud 2005). Il s'agit de situations voisines en terme de tâches à accomplir et de conditions à prendre en comptes. Ces situations voisines engendrent des modalités d'actions voisines. Elles mettent donc en jeu un même schème d'activité. Dans notre étude, nous ne retenons pas la structuration en classe de situations pour analyser l'activité de l'enseignant. L'enseignant étant soumis de façon forte à l'institution scolaire, nous avons choisi d'adopter un point de vue institutionnel pour analyser les genèses instrumentales pour l'enseignant. Nous regardons donc comment se structure l'activité de l'enseignant selon les types de tâches didactiques qu'il accomplit.

Par ailleurs, adopter ce point de vue institutionnel nous permet d'analyser l'activité de l'enseignant en entrant par les mathématiques. En effet, le type de tâche principal de l'enseignant est de mettre en place une organisation mathématique (notée OM par la suite) donnée. Ce type de tâche se retrouve aux différents niveaux de détermination didactique, ce qui nous permet d'organiser l'analyse que nous menons aux deux échelles de temps : la séquence et la séance.

En adoptant ce point de vue institutionnel, nous travaillons dans le cadre de la TAD et nous analysons les choix de l'enseignant en identifiant le système de conditions et de contraintes dans lequel ces choix se font. Ce système de conditions et de contraintes est à analyser en

s'appuyant sur l'échelle des niveaux de détermination didactique introduite par Chevallard (2002b).

Nous étudions donc les tâches et techniques didactiques instrumentées de l'enseignant à deux échelles de temps. Suite à une analyse *a priori* des contraintes et possibilités offertes par MEP, nous avons dégagé trois types de tâches de l'enseignant susceptibles d'être instrumentés par MEP et dont l'étude sera déclinée aux deux niveaux d'analyse considérés. Ces trois types de tâches didactiques sont :

1. Choix des sous-systèmes didactiques : à qui l'enseignant va-t-il s'adresser : à la classe entière, à une demi-classe etc. ? La constitution des groupes d'élèves peut-être instrumentée par MEP comme nous l'avons vu précédemment.
2. Elaboration de l'OM, pour chaque sous-système didactique : MEP peut également instrumenter les choix mathématiques de l'enseignant. Par exemple, la conception des fiches d'exercices papier/crayon peut être influencée par l'utilisation de MEP.
3. Elaboration de l'organisation didactique (notée OD par la suite) pour chaque sous système didactique et chaque OM

Pour chacun de ces trois types de tâches didactiques, nous nous interrogeons sur les techniques didactiques associées. Faire une liste *a priori* des techniques didactiques disponibles n'est pas pertinent. Par ailleurs, la description des praxéologies didactiques est encore un point délicat dans le cadre de la TAD. Dans notre travail, les techniques sont identifiées au travers des régularités apparaissant dans la façon d'accomplir une tâche. Nous nous centrons plus particulièrement sur les techniques susceptibles d'être instrumentées par MEP. Enfin, nous analysons ces techniques en essayant d'identifier leurs finalités topogénétique, chronogénétique et mésogénétique.

2. La séquence de trigonométrie en 3e de Carmen

Présentation

Carmen est une utilisatrice « réseau » de MEP depuis 4 ans. Sa classe de 3^e comporte 24 élèves dont 5 sont en très grande difficulté en mathématiques et 3 qui ont plutôt un bon niveau. C'est la première fois que Carmen utilise MEP pour faire sa séquence de trigonométrie en 3^e. Elle consacre 9 séances d'une heure à cet enseignement.

Conditions et contraintes de niveau supérieur

L'élaboration d'une séquence de trigonométrie en 3^e est soumise à un ensemble de conditions et de contraintes de niveau supérieur à celui du thème d'étude considéré. Par exemple, en 3^e, le temps alloué pour la trigonométrie est compris entre 7 et 10 heures. Il est difficilement concevable, au vu du programme, d'y consacrer moins de 7 heures ou plus de 10 heures.

Par ailleurs, certaines conditions et contraintes sont spécifiques au collège de Carmen. Les élèves de ce collège sont majoritairement issus d'un milieu socioculturel défavorisé. Les enseignants constatent de nombreux problèmes de comportement. Il est inimaginable pour eux de travailler en salle informatique en laissant quelques élèves travailler en autonomie sur papier/crayon. Les choix de dispositifs didactiques sont donc contraints pour les enseignants de ce collège.

Dans notre étude, il est également indispensable de prendre en compte les contraintes et conditions matérielles spécifiques à l'emploi de MEP (Ruthven 2008). Le collège de Carmen dispose de deux salles informatiques connectées à Internet contenant une quinzaine de postes chacune, ainsi que des tables permettant de faire travailler une moitié de classe sur

papier/crayon, l'autre sur ordinateur. Mais le comportement des élèves dans ce collège rend ce type d'organisation difficilement réalisable. Il existe cependant une salle contiguë aux salles informatiques qui peut-être utilisée à cette fin. Les enseignants peuvent alors laisser une demi-classe en autonomie sur ordinateur et travailler sur papier crayon avec l'autre moitié de classe dans cette salle contiguë. Enfin, le collège possède également un vidéo projecteur et les élèves de 3^e ont tous des ordinateurs portables qui leur sont attribués dans le cadre de l'opération Ordi35.

Choix mathématiques et didactiques de Carmen

Nous allons maintenant présenter rapidement les choix mathématiques et didactiques de Carmen au niveau de la séquence avant de commencer l'analyse des trois types de tâches didactiques identifiées précédemment.

La séquence de trigonométrie de Carmen se compose donc de 9 séances (de S1 à S9). MEP est utilisé dans cinq séances : S1, S2, S4, S5 et S8. L'utilisation de MEP était également prévue en S6 mais cela n'a pu avoir lieu à cause d'une panne de réseau. Carmen a constitué deux groupes d'élèves dans sa classe : le groupe des « forts » et le groupe des « faibles » (nous reprenons ici les termes employés par Carmen). Un travail différencié au niveau des contenus a été prévu pour ces deux groupes en S6, S8 et S9 (séance d'évaluation). Une description plus détaillée de la séquence de Carmen, comparée au contenu du programme et au contenu de MEP est donnée en annexe 2.

Type de tâches : Choix des sous systèmes didactiques – MEP et feuille de score

Avant de commencer sa séquence de trigonométrie, Carmen avait décidé de partager sa classe en deux pour une partie de son enseignement et ce, pour deux raisons : le niveau faible en mathématiques d'un nombre important d'élèves de sa classe et les contraintes matérielles liées à l'utilisation de la salle informatique en groupe (Carmen avait en effet prévu de faire travailler les élèves individuellement sur ordinateur).

La détermination des groupes « faibles » et « forts » s'est faite à l'issue de S4 et S5, séances pendant lesquels les élèves ont travaillé individuellement sur MEP en demi-classe, sur des exercices d'applications directes du cours. A partir des bilans MEP de ces deux séances et de sa feuille de score, Carmen a attribué des notes aux élèves. Le groupe des « faibles » a été constitué à partir des 7 élèves ayant obtenu une note inférieure à 3 sur 10 et complété jusqu'à 12 élèves avec ceux ayant obtenu des notes entre 4 et 5. Cette technique de composition des sous groupes a été instrumentée par MEP. En effet, Carmen aurait très bien pu constituer ces groupes a priori, en se basant sur les résultats habituels des élèves en mathématiques. Mais considérant que la trigonométrie est un contenu nouveau, Carmen n'a pas souhaité s'appuyer sur les notes de mathématiques du reste de l'année pour constituer les groupes. Par ailleurs, en utilisant MEP, elle n'a pas eu à corriger longuement une série d'exercices résolus sur papier/crayon et elle a pu commencer le travail en demi-groupe en S6, le lendemain de S5.

Type de tâches : élaboration de l'OM commune – les exercices « pour aller plus loin »

Dans le cas de l'élaboration de l'OM commune, Carmen met en œuvre une technique didactique non instrumentée par MEP. L'OM commune qui sera vue par l'ensemble des élèves de la classe ne comporte pas les lignes g, h et f du tableau présenté en annexe 2. Carmen justifie ce choix par un discours technologique du type : « les élèves qui n'iront pas en seconde générale n'ont pas besoin de connaître les valeurs particulières, ni le cercle trigonométrique... ». MEP aurait pu instrumenter cette technique de délimitation de l'OM

commune. En effet, les contenus des lignes g à f sont traités dans les exercices « pour aller plus loin » de MEP. La technique utilisée par Carmen aurait pu être : enlever tous les contenus présents dans les exercices « pour aller plus loin » de MEP pour déterminer l'OM commune. Mais la technique mise en œuvre par Carmen n'est pas instrumentée par MEP. Le discours technologique développé par Carmen semble s'appuyer sur les programmes scolaires hors seconde générale (baccalauréat professionnel, brevet d'études professionnelles). Mais la consultation de ces programmes montre que dans certaines spécialités professionnelles le contenu de trigonométrie coïncide avec ce qui est vu en seconde générale. Tout se passe comme si la technique utilisée par Carmen s'appuyait sur le discours technologique suivant : les contenus mathématiques jugés par expérience trop difficiles pour les élèves faibles doivent être supprimés de ce qui sera vu par la classe entière.

Type de tâches : élaboration de l'OM et de l'OD pour chaque sous groupe.

En S6 et en S8, les OM et les OD étaient différentes pour le groupe des « faibles » et le groupe des « forts ».

En S6 et en S8, le groupe des « faibles » a travaillé en papier/crayon avec la présence de Carmen, sur des contenus faisant partie de l'OM commune. En S6 et en S8, le groupe des « forts » a travaillé en autonomie. Ce travail en autonomie s'est fait avec le manuel en S6 et avec MEP en S8, et ce, sur des contenus mathématiques de type prolongement.

On voit ici que MEP, et le manuel de la classe, permettent tous deux à Carmen de développer des *techniques didactiques instrumentées* de gestion des deux sous-groupes. Cependant, le fonctionnement de la séance semble plus « efficace » en S8 qu'en S6. Durant S6, les élèves du groupe des « forts » qui étaient en autonomie avec le manuel ont discuté à haute voix entre eux, gênant le travail de Carmen avec le groupe des « faibles ». Par ailleurs, les élèves du groupe des « forts » ont régulièrement interrompu Carmen pour qu'elle valide leurs productions. Ces perturbations n'ont pas eu lieu en S8. Les élèves du groupe des « forts » travaillaient alors en autonomie sur MEP sans bavardage et MEP donnait immédiatement un retour sur leurs productions.

On observe donc ici une finalité *mésogénétique* de ces techniques : MEP et le manuel fournissent un contenu pour le prolongement dont on est certain qu'il ne pourra pas être épuisé, même par les élèves les plus rapides. Une finalité *chronogénétique* : la mise à disposition d'exercices de type « prolongement » en nombre suffisant permet aux élèves du groupe des « forts » d'avancer dans un temps didactique qui n'est pas celui de la classe entière, et donc de libérer du temps de présence de Carmen pour les élèves du groupe des « faibles » pour approfondir le contenu retenu dans l'OM commune. Il y a également dans la technique instrumentée par MEP une finalité *topogénétique* qui ne peut pas être instrumentée par le manuel. En effet MEP peut assurer la responsabilité de retour sur les productions des élèves. Ainsi durant la séance S8, Carmen s'est presque entièrement consacrée aux élèves du groupe des « faibles », ce qu'elle n'avait pas pu faire en S6, devant régulièrement aller examiner les productions des élèves du groupe des « forts ».

3. La séance « Introduction de Sinus et Tangente » de Carmen

Présentation

L'exemple d'analyse développé ici porte sur la séance S2. Carmen utilise l'exercice MEP « Découverte de sinus » au vidéo projecteur en classe entière pour introduire sinus et tangente. Pendant la séance, Carmen manipule l'ordinateur et écrit au tableau, sur ou à côté de l'écran MEP projeté sur le tableau blanc. Elle interroge ses élèves à l'oral. Carmen a choisi

d'utiliser l'intégralité de l'exercice MEP « Découverte de Sinus » (10 questions). Elle a construit une fiche de cours à partir de cet exercice MEP, fiche que les élèves doivent compléter au fur et à mesure de l'avancée de la séance. Cette fiche comporte des textes à compléter, issus de l'exercice MEP projeté. De plus Carmen a prévu de demander aux élèves de rajouter le troisième rapport donné par le théorème de Thalès qui permet d'obtenir la formule de la tangente. On peut d'emblée noter que MEP instrumente l'introduction de sinus par Carmen. La production d'une fiche papier complémentaire peut être interprétée comme un phénomène d'instrumentalisation.

Une brève analyse *a priori* des questions 4 et 5 de l'exercice « découverte de sinus »

Nous nous intéressons plus particulièrement à l'analyse des questions 4 et 5 de l'exercice « Découverte de sinus » dont une brève analyse praxéologique est présentée ci-dessous.

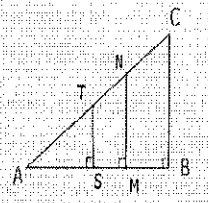
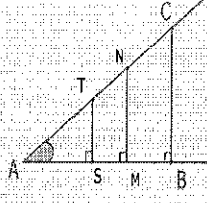
Exercice N°1 : Découverte Question N°4 : Complète en utilisant les points M et N : $\frac{BC}{AC} = \frac{ST}{AT} = \frac{\quad}{\quad}$  T_{MEPQ4} : « Compléter une égalité de rapport de longueurs (3^{ème} rapport) dans une configuration de Thalès avec trois droites parallèles. » τ_{MEPQ4} : « Identifier sur la figure les segments qui « jouent » le même rôle et reporter les points. »	Exercice N°1 : Découverte Question N°5 : On cherche à obtenir 0,45 comme valeur commune des trois rapports. Essaie de déplacer les trois segments [MT] ou [RS] ou [BC] et observe si la valeur évolue. Tu pourras ensuite essayer de faire varier la valeur de l'angle aigu en A. $\frac{BC}{AC} = \frac{ST}{AT} = \frac{MN}{AN} = 0,53 \dots$  T_{MEPQ5-1} : « Observer si la valeur de rapports de longueur égaux (dans le cas d'une configuration de Thalès donnée) change quand on déplace les segments parallèles. » τ_{MEPQ5-1} : « Déplacer les extrémités des segments sur les demi-droites qui les portent en utilisant la souris. »

Figure 5. Copies d'écran des questions 4 et 5 de l'exercice « découverte de sinus » de MEP.

Nous avons pu interroger le concepteur de cet exercice MEP afin de comprendre et d'analyser les choix mathématiques et didactiques sous-jacents à la conception de cet exercice. Cet exercice a été conçu pour être utilisé en classe entière avec un vidéo projecteur, comme Carmen a prévu de l'utiliser. Le concepteur de cet exercice prévoit de donner rapidement une réponse à la question 4 et de passer un long moment pour la manipulation et l'observation de la question 5. Or, le fait que la valeur du rapport ne change pas quelque soit la longueur des segments est établi dans la question 3, question qui demande de prouver l'égalité $BC/AC = ST/AT$ en s'appuyant sur le théorème de Thalès. Le sinus pourrait donc être introduit dès les questions 3 ou 4. Cependant, un troisième rapport de longueurs est introduit à la question 4. De plus, la question 5 débute par la manipulation des segments [BC] et [ST] pour arriver une fois de plus à l'invariance du rapport. Nous pouvons en conclure que l'enchaînement des questions 3, 4 et 5 n'est pas guidé par des choix mathématiques (on peut introduire sinus dès la question 3) mais par des choix didactiques. Le concepteur de cet exercice insiste sur le fait que le 3^{ème} rapport est introduit pour « enfoncer le clou » car le rapport demandé n'est pas celui vu habituellement dans le théorème de Thalès. La manipulation est également utile selon lui pour que les élèves mémorisent ce nouveau rapport

côté opposé/hypoténuse. Cela soulève cependant la question du statut de l'exemple générique par rapport à celui d'une accumulation d'exemples.

Analysons maintenant les choix mathématiques et didactiques de Carmen pendant la projection des questions 4 et 5.

1. E : MN sur AN ?
2. C : MN sur AN d'accord ? Bien. Donc effectivement ici on a MN sur AN. Autrement dit, qqs le triangle, qqs la longueur des côtés du triangle, on pourrait inventer comme ça autant de triangles qu'on veut, du moment qu'ils sont rectangles, et bien le rapport, à condition d'avoir, qu'est-ce qu'il y a de commun qu'est-ce qu'ils ont de commun ces triangles quand même ?
3. E : Ils sont rectangles.
4. C : Ils sont rectangles, et ils ont...
5. E : un côté... Ils ont un côté commun, parce que là... ils ont le même sommet.
6. C : Ils ont le même sommet. Est-ce qu'ils ont les mêmes côtés ?
7. E : Non, non... les angles.
8. C : Est-ce qu'ils ont les mêmes angles ? Oui. L'angle $\hat{A}$ est le même pour tout le monde (*Carmen marque l'angle $\hat{A}$ sur l'écran MEP projeté*). Vous êtes d'accord ? Et ces angles là, est-ce qu'ils sont égaux ? Ben oui, ils sont tous complémentaires. Donc c'est pas la longueur des triangles qui change, quelque soit la longueur des côtés, le rapport là est le même.
9. C : Alors on continue. (*Carmen valide, passage à la question 5*) Alors on cherche à obtenir 0,44 comme valeur commune des trois rapports. On a les trois rapports égaux, ici, dans ce cas là on a 0,53. On demande d'essayer de déplacer, pour voir si ça dépend des segments. Alors j'espère que je vais les déplacer comme il faut... Si je fais M, voilà. Est-ce que ça change ?
10. E : Non...
11. C : Non, bon allez... S... non plus... T... non plus. Autrement dit, si... euh... le rapport en question, il ne dépend pas, c'est ce que je venais de dire avant, de la longueur des côtés... donc de la... du triangle en lui-même. D'accord ? (*Carmen valide*)

Extrait de la séance 2 : questions 4 et 5 de l'exercice « découverte de sinus » de MEP.

Elaboration de l'OM : Technique de Carmen pour introduire de nouveaux contenus – aspects topogénétiques

Pendant cette séance, Carmen ajoute régulièrement des éléments technologiques pour donner une justification mathématique des réponses des élèves aux questions posées dans MEP. Elle est ainsi amenée à formuler des propriétés qui sont implicites dans les questions MEP. Par exemple, dans la question 4, la question MEP revient à trouver le rapport correspondant au triangle ANM. Une fois la réponse donnée par les élèves (ligne 1), la tâche MEP est terminée. Carmen rentre la réponse mais ne presse pas le bouton « valider ». Elle profite de cette question pour expliciter la propriété justifiant la réponse donnée : « dans cette configuration, si les angles des triangles sont égaux, le rapport ne change pas, quelque soit la longueur des côtés des triangles » (lignes 2 à 8). On identifie ici une technique didactique instrumentée de partage des responsabilités par rapport au savoir entre MEP et Carmen pour l'introduction de nouveaux contenus. En effet, MEP propose le bloc praxis de l'OM enseignée.

Par ailleurs, nous observons également dans ce même passage (lignes 2 à 8) une technique didactique de partage des responsabilités par rapport au savoir entre Carmen et les élèves quand il s'agit d'élaborer les éléments technologiques de l'OM enseignée. Carmen questionne la classe. Les élèves doivent alors répondre aux questions très guidées de Carmen, en s'aidant de l'écran MEP projeté. Cette technique n'est pas instrumentée par MEP. Il s'agit plutôt d'une technique didactique très classique de partage des responsabilités en classe.

Elaboration de l'OD : Technique de gestion du temps de Carmen

Comme nous l'avons souligné dans la brève analyse *a priori* que nous avons faite des questions 4 et 5 de l'exercice MEP « découverte de sinus », il n'est pas nécessaire de formuler la propriété « dans cette configuration, si les angles des triangles sont égaux, le rapport ne change pas, quelque soit la longueur des côtés des triangles » pour répondre à la question 4 de MEP. Par ailleurs la question 5 a été créée pour permettre une approche de cette propriété par la manipulation des extrémités des segments [ST], [NM] et [BC] sur les demi-droites [AC] et [AB] et l'observation de la valeur des rapports. MEP propose donc, dans le passage de la question 4 à la question 5, un enchaînement particulier d'OM et d'OD : l'exploration de la propriété en question débute à la question 4 et se trouve au cœur de la question 5. Carmen, elle, fait une synthèse à la question 4 en énonçant la propriété. Ainsi, quand elle passe à la question 5 (ligne 9), elle doit retourner à une activité d'exploration de cette propriété alors qu'il semblerait plus naturel pour elle de continuer soit avec la seconde partie de la question 5 (donner un encadrement de l'égalité de rapport) soit avec la définition de sinus. L'enchaînement d'OM et d'OD qu'elle propose est donc différent de celui de MEP. Ainsi, cet enchaînement et les choix de conception de cet exercice ont conduit Carmen à guider très rapidement l'observation des élèves pendant la question 5 : pendant qu'elle manipule les points à la souris, elle indique aux élèves de regarder la valeur des rapports (lignes 9 à 11). Elle accélère clairement le rythme de la séance au cours de cette première partie de la question 5. Cela peut s'interpréter comme un phénomène d'instrumentation. En effet, dans l'OM qu'elle a proposée aux élèves, la propriété qui fait l'objet de la question 5 n'est plus nouvelle, contrairement à ce qui était prévu dans MEP. Carmen est donc contrainte de ne pas passer trop de temps sur la manipulation des points.

Par ailleurs, Carmen a choisi d'être la personne qui manipule la souris de l'ordinateur. Cela signifie que c'est elle qui a en charge la décision d'appuyer sur le bouton « valider » à la fin des questions MEP ainsi que la manipulation des extrémités des segments [ST], [NM] et [BC]. Elle est ainsi libre d'ajouter des informations aux questions posées par MEP comme à la question 4 alors qu'un élève aurait très certainement validé sa réponse après avoir répondu à la question posée (finalité chronogémétique). Cela lui permet aussi d'accélérer le rythme de la séance quand cela est nécessaire pour elle comme à la ligne 11 (finalité chronogénétique). Ce choix peut être interprété comme une technique instrumentée de gestion du temps.

IV Conclusions et perspectives

Dans cet exposé, nous avons étudié l'intégration de BE dans des enseignements de mathématiques et montré que l'utilisation d'une BE influençait les choix mathématiques et didactiques des enseignants. Pour ce faire, nous avons présenté quelques extraits d'analyses, choisis pour donner à voir les principes de l'approche que nous développons. Nous avons ainsi montré que le professeur, confronté à un type de tâche didactique, peut développer des techniques didactiques instrumentées par une BE, aussi bien au niveau de la séance qu'à celui de la séquence. Ces techniques didactiques peuvent avoir des finalités topogénétiques, chronogénétiques ou mésogénétiques ; ces catégories permettant de préciser comment la BE instrumente l'action du professeur. Mais nous avons également noté que la BE n'instrumente pas seule cette action. Elle s'insère dans un ensemble de ressources, avec le manuel de la classe, différents supports papier etc. Nous pensons donc que notre approche peut s'avérer pertinente pour étudier l'utilisation par l'enseignant de ressources autres que des BE.

Par ailleurs, nos travaux s'appuient sur l'approche l'instrumentale basée sur des concepts issus de l'ergonomie cognitive (Rabardel 1995) et de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard 1992). Nous avons proposé une évolution de cette approche dans le but

d'analyser les processus de genèses instrumentales pour l'enseignant en adoptant un point de vue institutionnel sur l'activité de ce dernier. Gueudet et Trouche (à paraître), ont eux développé une approche en terme de genèses documentaires pour analyser l'utilisation par les enseignants de toutes sortes de ressources. Dans leur approche, les genèses documentaires pour l'enseignant sont analysées en terme de schèmes (Vergnaud 1996). Articuler ces deux points de vue nous semble nécessaire pour poursuivre l'étude des genèses instrumentales pour l'enseignant.

V Bibliographie

- Berté, A., Chagneau, J., Desnavres, C., Lafourcade, J., & Sageaux, C. (2004). Aide apportée aux enseignants par la recherche en didactique. Un exemple : Enseigner le cosinus en 4ème. *Petit x*, 65. 9-35.
- Bueno-ravel, L., Gueudet, G. (2008). Online resources in mathematics: teacher's genesis of use, in Pitta-Pantazi, D. and Philippou, G. *Proceedings of the fifth congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, CERME 5, Larnaca, Chypre.
- Cazes, C., Gueudet, G., Hersant, M., & Vandebrouck, F. (2006) Utilisation de bases d'exercices en ligne. Quelles conséquences pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques ? Actes du séminaire national de didactique des mathématiques, IREM Paris 7.
- Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 12/1, 77-111.
- Chevallard, Y. (2002a). Structures et fonctions, in J.-L. Dorier, (ed.) *Actes de la XIème Ecole d'été de didactique des mathématiques*, Grenoble : La pensée Sauvage, Corps, Isère.
- Chevallard, Y. (2002b). Ecologie et régulation, in J.-L. Dorier, (ed.) *Actes de la XIème Ecole d'été de didactique des mathématiques*, Grenoble : La pensée Sauvage, Corps, Isère.
- Engeström, Y. (1999). Activity Theory and Individual and Social Transformation (pp. 19-38, in Y. Engeström, R. Miettinen, R.-L. Punamäki (dir.). *Perspective on Activity Theory: Learning in doing: Social, Cognitive, and Computational Perspectives*. New York: Cambridge University Press.
- Gueudet, G., Trouche, L. (à paraître). Vers de nouveaux systèmes documentaires des professeurs de mathématiques ? In Bloch, I. et Conne, F. (eds) *Actes de la quatorzième école d'été de didactique des mathématiques*, Grenoble : La pensée Sauvage.
- Gueudet, G. (2006). *Scénarios d'usage de bases d'exercices de mathématiques en ligne*, in H. Godinet, J.-P. Pernin (eds.) *Scénariser l'enseignement et l'apprentissage : une nouvelle compétence pour le praticien*, INRP, 43-48.
- Guin, D., Trouche, L. (Eds.). (2002). *Calculatrices symboliques. Faire d'un outil un instrument du travail mathématique, un problème didactique*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Guin, D., Joab, M., Trouche, L. (dir.) (2008). *Conception collaborative de ressources pour l'enseignement des mathématiques, l'expérience du SFoDEM (2000-2006)*. INRP et IREM (Université Montpellier 2).
- Laborde C. (1999). Vers un usage banalisé de Cabri-géomètre avec la TI 92 en classe de Seconde : analyse des facteurs d'intégration. In D. Guin (ed.), *Actes du colloque Européen Francophone, Calculatrices Symboliques et géométriques et géométriques*, La Grande-Motte.

- Lagrange, J.-B. (2000). L'intégration d'instruments informatiques dans l'enseignement : une approche par les techniques. *Educational Studies in Mathematics* 43(1), 1-30.
- Lagrange, J.-B., Bessieres, D., Blanchard, M., Loisy, C., & Vandebrouck, F. (dir.) (2007). *Genèses d'usages professionnels des technologies chez les enseignants*, rapport intermédiaire de l'ACI GUPTEn, <http://gupten.free.fr>
- Pernin, J.-P., Lejeune, A. (2004). Dispositifs d'apprentissage Instrumentés par les Technologies : vers une ingénierie centrée sur les scénarios. Colloque TICE 2004, UTC, Compiègne.
- Pernin, J.P. (2007). Mieux articuler activités pour l'apprentissage, artefacts logiciels et connaissances : vers un modèle d'ingénierie centré sur les scénarios, in Baron M., Guin D., Trouche L. (eds.) (2007) *Environnements informatisés et ressources numériques pour l'apprentissage : conception et usages, regards croisés*, Hermès, Londres.
- Rabardel, P. (1995). Les hommes et les technologies. Approche cognitive des instruments contemporains. Paris : Armand Colin.
- Rabardel, P. (1999). Eléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques, in M. Bailleul (dir.), *Ecole d'été de didactique des mathématiques* (pp. 202-213). Houlgate : IUFM de Caen.
- Rabardel, P., Bourmaud, G. (2005). Instruments et systèmes d'instruments, in P. Rabardel, P. Pastré (dir.), *Modèles du sujet pour la conception. Dialectiques activités développement* (pp. 211-229). Toulouse : Octarès.
- Ravel, L. (2003). Des programmes à la classe : Etude de la transposition didactique interne. L'exemple de l'arithmétique en Terminale S Spécialité Mathématiques, Thèse de Didactique des Mathématiques, Université Joseph Fourier, Grenoble I. (<http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00162790>).
- Robert, A., Rogalski, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche, *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies* 2(4), 505-528.
- Ruthven, K. (2008). Teachers, technologies and the structures of schooling, in Pitta-Pantazi, D. and Philippou, G. *Proceedings of the fifth congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, CERME 5, Larnaca, Chypre.
- Sensevy, G., Mercier, A., Schubauer-Leoni, M.L. (2000). Vers un modèle de l'action didactique du professeur. A propos de la Course à 20. *Recherche en Didactique des Mathématiques* 20/3, 263-304.
- Sensevy, G. (2002). Des catégories pour l'analyse comparée de l'action du professeur : un essai de mise à l'épreuve. In P. Venturini, C. Amade-Escot A. Terrisse (Eds.) *Etude des pratiques effectives. L'approche des didactiques* (pp. 25-46). La Pensée Sauvage : Grenoble.
- Sensevy, G., Mercier, A. (dir.) (2007). *Agir ensemble. L'action conjointe du professeur et des élèves dans le système didactique*. Rennes : PUR.
- Trouche, L., Guin, D. (2006). Des scénarios pour et par les usages, in H. Godinet, J.-P. Pernin (eds.) *Scénariser l'enseignement et l'apprentissage, une nouvelle compétence pour le praticien*, INRP, Lyon.
- Vergnaud, G. (1996). Au fond de l'apprentissage, la conceptualisation, in R. Noirfalise, M.-J. Perrin (dir.), *Ecole d'été de didactique des mathématiques* (pp. 174-185). Clermont-Ferrand : IREM, Université Clermont-Ferrand 2.

Manuels :

Maths 3^e, 2003, Collection Cinq sur Cinq, sous la direction de R. Delord et G. Vinrich, Hachette Education.

Math 3^e, 2003, Nouveau décimale, sous la direction de N. Pène et P. Depresle, Belin.

VI Annexes

1. Annexe 1

1. Canevas de séquence	Contenu mathématique et objectifs ; Ressources ; Répartition et articulation des séances ; Nature des séances : découverte, réinvestissement, évaluation ; Références à la BE en séances classiques.
2. Interventions de l'enseignant en séance machine	Contenu, support.
3. Activités des élèves	Traces écrites attendues en séance machine ; Travail seul / en binôme / en groupe en séance machine ; Différenciation (<i>personnalisation</i>) ; Progression (<i>contrainte</i>) ; Travail sur l'ordinateur hors classe (<i>contrainte</i>).

Tableau 1 : Grille de description de scénarios du GRI EMULE

2. Annexe 2

Programmes/manuels	MEP	Séquence Carmen
a. Propriétés des triangles rectangles et vocabulaire associé. Cosinus. (<i>Prérequis</i>)	Chapitre cos en 4 ^e ; en 3 ^e série « Prendre un bon départ »	S1 , travail en binôme sur MEP, exercices de 3 ^e : « cosinus » « configurations ». Trace écrite : 8 questions MEP à rédiger.
b. Définition de sinus et tangente.	Deux exercices "découverte" : un pour sinus un pour tangente.	S2 , classe entière vidéoprojecteur. Appui sur l'exercice MEP « découverte » de la série sinus. Adaptation de l'exercice pour introduire aussi tangente. Fiche de cours issue de MEP à compléter.
c. Calcul de cos, sin, tan pour un angle, et de l'angle connaissant cos, sin, tan à la calculatrice.	Trois exercices sur l'emploi de la calculatrice : sin, tan, synhèse.	S3 , classe entière séance papier/crayon et calculatrice. Évalué en S9 .

d. Utilisations simples, calculs directs de cos, sin, tan ; écriture des bons quotients de côtés. Choisir la bonne formule : sin, cos, tan.	Calculs simples sur sin, tan ou synthèse. « Sin, cos ou tan ? » en série synthèse.	Fiche papier pour travail maison en fin de S2. S4/S5, deux demi-classes par ordre alphabétique. Exercices simples sur MEP (synthèse) et sur papier. Fiche papier pour travail maison en fin de S5. Évalué en S9 pour groupe « Faible ».
e. Utilisation de cos, sin, tan pour déterminer un côté manquant, pour évaluer un angle manquant.	7 exercices, sin, tan, et synthèse.	Accessible sur MEP et papier en S4/S5. Soutien pour « Faibles » en S6 et S8 sur papier. Évalué pour tous en S9.
f. Problèmes concrets.	Un exercice.	Accessible sur MEP en S4/S5. « Forts » : sur papier en S6 et MEP en S8. « Faibles » sur papier en S8. Dans l'évaluation S9, sans détail pour les « Forts », avec questions intermédiaires pour les « Faibles ».
g. Valeurs particulières de sin et cos. Relations : $\cos^2 + \sin^2 = 1$; tan=sin/cos.	Un exercice sur valeurs exactes. 3 exercices sur les relations.	S7, cours papier crayon classe entière. « Forts » sur MEP en S8. Valeurs exactes évaluées pour « Forts » en S9.
h. Calculs dans des configurations complexes.	Un exercice.	« Forts » sur MEP en S8, évalué en S9.
i. Angles complémentaires. Angles dans l'espace. Découverte quart de cercle trigo, autres prolongements.	Un exercice. Deux exercices. Série 7, 4 exercices.	« Forts » sur MEP en S8, 3 exercices. Non évalué en S9.

Tableau 2 : Découpage de l'OM trigonométrie : programmes, MEP et choix de Carmen.

Ajustement d'un modèle de la correction en classe à la contingence

Catherine Marie Chiocca, Suzanna Murillo Lopez

PATRE, ENFA et LEMME

Université Paul Sabatier, Toulouse

Résumé

La correction en classe de mathématiques est une pratique de classe courante et banale dans l'enseignement des mathématiques en France. Le modèle en cours de confrontation à la contingence, d'une correction en classe, repose sur une fonction de trois variables : le discours, le corrigé et le statut des connaissances qui participent de la chronogénèse, topogénèse et de la mésogénèse.

La contingence est de deux sortes : l'enseignement en 4ème-3ème dispensé par un professeur ayant préparé la séquence de statistique avec une didacticienne et l'enseignement en IUT et en Terminale sur la notion de fonction réciproque, dispensé par des professeurs ordinaires dont le choix n'est pas stochastique.

Le choix des professeurs avec lesquels sont menés les études qualitatives se fait parmi les professeurs les plus contributifs aux réseaux mis en évidence par le logiciel C.H.I.C qui repose sur l'Analyse Statistique Implicative.

L'ajustement du modèle à la contingence s'opère par l'observation et l'analyse de corrections menées par ces professeurs ordinaires.

Mots clefs

Correction en classe de mathématiques, enseignants ordinaires

Introduction

La correction en classe de mathématiques est une pratique de classe courante et banale dans l'enseignement des mathématiques en France. Nous nous sommes basées sur un modèle d'épisode de correction en classe que nous ajustons au fur et à mesure de confrontations à plusieurs contingences. L'une d'entre elles permet de proposer un modèle de scène de correction collective ordinaire.

Le mot contingence provient de la philosophie Sartrienne : « La contingence est le caractère de ce qui n'est pas nécessaire, de ce qui n'a pas en soi sa raison d'être. »

Si l'on imagine un chemin entre l'existence et l'essence, on trouve à une extrémité l'existentialisme, théorie radicale qui mène au paradoxe où l'homme est condamné à être libre, aucun déterminisme au delà de lui qui l'entraînerait à poser des actes qu'il n'aurait pas choisis en pleine conscience. A l'autre extrémité de ce continuum imaginaire entre l'existence et l'essence se trouve le déterminisme radical, rien de ce qui arrive à l'homme n'est de sa volonté propre, qui mène aux thèses racistes, xénophobes, intolérantes... Entre les deux la psychanalyse qui explique par le concept d'inconscient cette part d'actes non choisis en pleine conscience, qui assume un certain déterminisme social pour expliquer les reproductions familiales, tout en conservant l'idée d'une grande part de liberté de l'homme.

Nous avons choisi d'employer le terme de contingence dans un sens qui se situe entre les 2 pôles de l'existentialisme et de l'essentialisme pondéré par les apports de la psychanalyse.

Nous employons le terme de contingence comme un synonyme d'une réalité qui ne porte pas en soi sa raison d'être didactique en raison de notre intérêt pour ce qui se passe dans les classes de mathématiques. Une réalité (subjective donc) des observatrices chercheuses. Nous n'avons pas conservé complètement l'idée de non nécessité, de ce qui ne porte pas en soi sa raison d'être didactique car les enseignants ordinaires, ceux qui n'ont pas travaillé avec des chercheur-es en didactique des mathématiques, ont des raisons de faire ce qu'ils font. On peut admettre que parfois ils n'en sont pas conscients. C'est pourquoi nous nous sommes intéressées à leurs représentations.

Actuellement, nous confrontons le modèle à deux contingences : l'enseignement en quatrième et en troisième dispensé par un professeur ayant préparé la séquence de statistiques avec une didacticienne des mathématiques et l'enseignement en IUT et en Terminale sur la notion de fonction réciproque, dispensé par des professeurs ordinaires qui ne sont pas choisis aléatoirement.

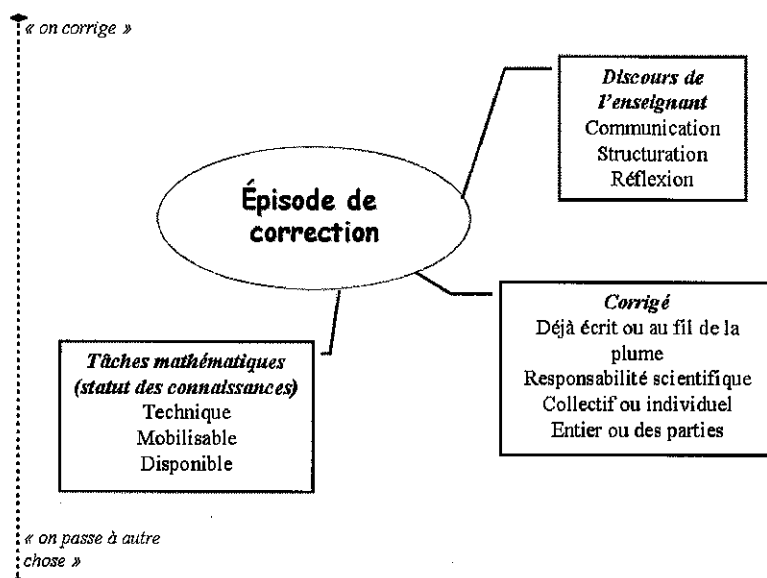
Le modèle est confronté à ces deux contingences : l'observation et l'analyse de corrections menées par des professeurs ordinaires et l'observation suivie sur un temps long d'ingénierie coopérative de correction mises en œuvre par un enseignant associé au programme de recherche.

L'exposé à ce séminaire se présente en trois parties : une description rapide du modèle initial d'épisode de correction en classe, les résultats de la confrontation à la contingence IUT-Terminale et le travail en cours de confrontation à la contingence Quatrième-Troisième.

Le modèle initial de correction en classe

Notre définition d'épisode de correction délimite chronologiquement les phases de correction entre « on corrige » et « on passe à autre chose ».

Le modèle initial d'une correction d'exercice en classe de mathématiques repose sur une fonction de trois variables : le discours d'accompagnement, le corrigé et le statut des connaissances qui participent de la chronogénèse (évolution des savoirs dans le contrat didactique, temps de l'enseignement et de l'apprentissage), de la topogénèse (lieux différentiels des élèves et du professeur) et de la mésogénèse (organisation du milieu et des rapports des élèves aux objets du milieu).



Corrigé

Trace écrite : désignation visuelle à propos de l'exercice, artefact résultant de choix plus ou moins conscients de l'enseignant. Il peut être produit « en direct », au fil de la plume ou être déjà écrit, c'est le cas d'une feuille photocopiee qui serait distribuée aux élèves. On sait que les notes prises en classe par les élèves ne sont pas forcément fidèles à ce qu'écrit le professeur au tableau (Goody, 1979). Cependant on observe la production quasi-systématique d'un corrigé par les enseignants de mathématiques en France. Ce phénomène pourrait reposer sur la croyance forte selon laquelle ne pas faire écrire les élèves handicape l'apprentissage et aussi sur l'idée intuitive de la nécessité de l'écrit pour l'apprentissage.

Responsabilité scientifique

Désigne la personne qui écrit, qui fait le travail et qui le valide.

Cependant cette modalité génère quelques cas qui peuvent entraîner une confusion : qui détient la responsabilité scientifique dans la scène en question ? Par exemple : l'élève (ou l'étudiant) écrit au tableau, l'enseignant intervenant souvent oralement pour lui indiquer ce qu'il doit faire au fur et à mesure du corrigé ou dès que la solution est entièrement écrite. Nous avons décidé de considérer que dans ces cas la responsabilité scientifique est à la charge du professeur, car c'est lui qui maîtrise le déroulement de la solution et le contenu du corrigé.

Individuel ou collectif

Soit toute la classe participe de manière plus ou moins active dans la production du corrigé, soit il est travaillé de manière individuelle.

Cependant, il arrive parfois qu'une correction individuelle prenne un aspect collectif lorsque le professeur se met à s'adresser à toute la classe : par exemple par un regard, par un changement de ton, par un geste vers le tableau, etc.

Entier ou partiel

En lien avec l'utilisation du tableau et en référence à la solution mathématique modèle rédigée dans un contexte donné.

Le *résultat final* fait référence plutôt au produit d'une solution, tandis que *la solution* est conçue comme tout le processus pour arriver à ce résultat final. Pour les solutions, nous faisons une distinction entre *la solution modèle*, celle que développerait ce professeur-là s'il était élève dans cette classe-là, ce jour-là, dans une situation d'évaluation, compte tenu de la mémoire didactique de la classe ; et *une solution* mathématique, correcte ou non, qui peut venir d'une méthode différente de celle que le professeur attendait.

Une solution mathématique, rédigée par un élève, un enseignant ou un chercheur, est une organisation des savoirs mathématiques permettant de résoudre la tâche. La solution modèle est complètement dépendante du « contexte » de la classe ; elle inclut toujours une part de contrat didactique et sert à fixer des éléments de ce contrat.

Le corrigé est entier lorsque le tableau est utilisé comme lieu de savoir (tout est écrit, parfois comme une solution modèle) et il est partiel lorsque le tableau est utilisé comme lieu de travail, intermédiaire (des parties sont évoquées seulement à l'oral).

Le discours d'accompagnement

C-M. Chiocca, au temps des dinosaures qui étudiaient les pratiques des enseignants en 1995 met en évidence dans sa thèse trois fonctions du discours d'accompagnement des professeurs de mathématiques en classe : fonction de communication, fonction de structuration, fonction de réflexion.

Le statut des connaissances

Cette variable possède trois modalités, proposées par Robert (2006) : niveau technique, disponible et mobilisable qui renvoient à la manière dont le professeur propose la tâche aux élèves.

Confrontation à l'interface lycée-IUT

L'une des contingences auquel a été confronté le modèle est celle de professeurs ordinaires du secondaire et d'IUT lors de correction d'exercices « classiques » faisant intervenir la notion de fonction réciproque (qui fait obstacle actuellement en France) dans la résolution, alors qu'elle n'est plus dans les contenus d'enseignement des Instructions Officielles (Cf. article dans Petit x n°77/ 2008).

Le choix des professeurs dont nous avons observé les pratiques de correction n'a pas été aléatoire. La contingence est « contrôlée » par l'étude quantitative (questionnaire portant sur la correction) menée à l'aide du logiciel CHIC qui repose sur l'Analyse Statistique Implicative (Gras 1996). Le logiciel CHIC permet dorénavant, le choix des professeurs avec lesquels sont menées les études qualitatives.

L'ajustement du modèle à la contingence s'opère par l'observation et l'analyse de corrections menées par ces professeurs ordinaires les plus contributifs aux réseaux mis en évidence par l'Analyse Statistique Implicative.

D'un point de vue méthodologique, avec les analyses quantitatives traditionnelles dans les recherches en éducation, on atteint des croyances, des représentations et des connaissances des enseignants (Bailleul 2000). Les analyses qualitatives permettent d'étudier les différences entre les individus globalement ou par catégories, les typologies et les analyses orientées fournies par le logiciel CHIC ; elles renseignent sur les structures de la population et permettent notamment d'identifier les individus les plus contributifs aux réseaux mis en évidence par l'analyse implicative.

Le chercheur peut ensuite mener des études qualitatives en ciblant les individus observés.

D'une certaine manière les observations sont contrôlées par des critères. Nous observons des professeurs sur des ingénieries « ordinaires ». Il s'agit bien de décrire le didactique ordinaire (Sensevy, Mercier 2007). Nous croisons les déclarations avec les observations de pratiques en classe.

On a fait passer un questionnaire. Les réponses ont été analysées à l'aide du logiciel CHIC et nous avons trouvé quatre réseaux : les modernes, les classiques, les prêts à tout et les discrets. Les titres des réseaux ont été attribués à partir du contenu mathématique. Nous avons observé que les réseaux de variables mis en évidence avec le logiciel CHIC sont constitués par le rapport des enseignants à l'organisation et à la présentation des fonctions logarithme et exponentielle, en tant que contenu mathématique reflétant la présence de la fonction réciproque. En général les variables concernant les pratiques de correction n'y figurent pas.

Observations des enseignants choisis

Nous nous inscrivons dans la perspective « clinique/expérimentale » (Leutenegger 2000). Il s'agit de perturber le système pour en étudier la perturbation (composante expérimentale) tout en recueillant sur le terrain des éléments de configuration au cas par cas pour l'interprétation (composante clinique). L'expérimentation met en jeu la confrontation entre les possibles d'un dispositif donné et les effets observés du dispositif tel que réalisé.

Nous proposons deux exercices exogènes aux préparations des professeurs concernés, en créant une perturbation des systèmes didactiques ordinaires observés : la correction de ces deux exercices devant se faire pendant deux séances choisies par l'enseignant, chacune précédée et suivie d'un entretien avec lui. De plus, deux entretiens ont encadré tout le travail : un au début et l'autre à la fin.



Etudier ce qui se passe en classe ordinaire quand on est en présence d'un obstacle didactique constitue un savoir transférable à d'autres obstacles de la même origine. L'obstacle didactique considéré dans ce cas c'est la fonction réciproque.

Problématique de la thèse : Etude d'une pratique ordinaire face à un obstacle didactique : la correction en classe de mathématiques dans le cas de la fonction réciproque.

Comment corrigent les enseignants face à l'obstacle didactique généré par la notion de fonction réciproque ?

Choix de la fonction réciproque

Nous avons étudié comment la construction historique de la notion de fonction réciproque s'étend du XVIII^e jusqu'à nos jours. Elle constitue en effet un obstacle d'origine épistémologique au sens de Brousseau (1998), car elle surgit de manière implicite dans le développement des fonctions logarithme et exponentielle.

Le fait que dans les instructions officielles il n'y ait pas d'indication de travail avec les élèves sur la notion de fonction réciproque constitue soit un vide didactique institutionnel au sens de Bronner (1997) lorsque la notion n'est pas abordée en Terminale mais supposée connue au niveau post-baccalauréat, soit un obstacle nécessitant une dé-transposition au sens d'Antibi et Brousseau (2000, 2002) lorsqu'elle a été abordée de manière intuitive en Terminale créant un obstacle au niveau post-secondaire ; dans les deux cas nous sommes en présence d'un obstacle d'origine didactique au sens de Brousseau (1998).

Exercices exogènes

Dans les manuels scolaires survivent des exercices nécessitant la fonction réciproque pour leur résolution. Exemples : résolution d'équation logarithmique et recherche d'une fonction réciproque d'une fonction donnée. Nous avons introduit la distinction du statut mathématique, considérant pour une tâche l'utilisation de la fonction réciproque en tant qu'outil et pour une autre en tant qu'objet. Nous avons ainsi proposé deux exercices pour lesquels notre choix a été de faire correspondre le premier cas à la modalité « recherche en classe » et le second à la « recherche à la maison ». De plus, nous avons introduit une distinction entre les exercices proposés au lycée et à l'IUT, pour tenir compte des différences de niveau. Nous montrons ici seulement les exercices proposés en lycée.

Exercice 1 pour le lycée (L)

Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation $e^{3x} + 2e^{2x} - 5e^x = 6$

Nous avons proposé la résolution d'une équation afin de voir l'accompagnement du discours ou les explications fournies dans chaque institution lorsqu'il est demandé de passer d'une équation donnée à une autre équivalente et plus simple. Ainsi, en général, pour arriver à trouver la solution d'une équation nous nous servons des fonctions réciproques en tant qu'outil de résolution.

Le fait de poser le changement de variable $X=e^x$ demande d'abord une connaissance disponible, mais qui peut être rendue mobilisable par l'enseignant. Les équations du type $e^x=a$ ou $\ln x=a$ sont « classiques » dans les manuels scolaires. Cependant il se peut que les élèves ne distinguent pas dans leur résolution la propriété de bijection et de réciprocity des fonctions logarithme népérien et exponentielle. Le passage d'une expression comportant un logarithme à une exponentielle ou vice-versa est devenu automatique ; il est considéré comme une connaissance technique.

Lors des observations faites en classe, l'attention s'est portée sur la justification donnée lorsqu'à partir de $e^x=2$ on obtient la solution unique $x=\ln 2$. Il en va de même dans la troisième équation pour justifier le passage des équations du type $\ln x=a$ aux solutions du type $x=e^a$. Dans ces cas on s'intéresse au discours du professeur, à ce qu'il met dans le milieu ou à ce qu'il rajoute pour accompagner le passage de l'expression comportant un logarithme à l'exponentielle ou vice-versa.

Exercice 2 pour le lycée (R)

On considère la fonction définie par $f:]1; +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$ où $x \mapsto \ln(x-1)+2$. Soit C_f la courbe représentative de f .

Parmi les fonctions suivantes, lesquelles ont une courbe représentative symétrique de C_f par rapport à la droite d'équation $y=x$?

- a) $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ b) $h:]-2; +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$ c) $k: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$
 $x \mapsto e^{x+1}-2$ $x \mapsto 1-\ln(x+2)$ $x \mapsto e^{x-2}+1$

On justifiera les réponses.

Le contrat didactique usuel en classe de Terminale est de travailler dans un repère orthonormé (Cf. Instructions Officielles). C'est la raison pour laquelle, dans l'énoncé, nous n'avons pas précisé qu'on se plaçait dans ce cas. De plus, l'aspect réciproque des fonctions reste implicite dans la question. Pour le lycée, où il s'agit des courbes représentatives des fonctions, nous ne nous sommes pas souciées de restreindre le domaine d'arrivée des fonctions, car la bijection n'est pas nécessaire.

La fonction réciproque peut être évoquée en tant qu'objet. Il s'agit alors de repérer la « règle » utilisée, si elle existe, pour savoir si deux fonctions sont réciproques l'une de l'autre.

On peut observer que le statut des connaissances est disponible. Dans ce cas nous nous intéressons au vocabulaire utilisé et à l'argument donné pour justifier l'obtention de l'identité en faisant la composition de deux fonctions réciproques. Comme précédemment notre attention se porte plus particulièrement sur le passage de $e^{(\ln(x-1)+2)-2}+1$ à $x-1$ et au passage de $\ln(e^{x-2}+1-1)$ à $x-2$.

Précisions sur le découpage et choix des scènes

La métaphore des séries télévisées

Pour décrire les niveaux micro-didactique, méso-didactique et macro-didactique dans les corrections nous avons utilisé la métaphore des séries télévisées. Ainsi, nous parlons de la série des corrections pour un même enseignant ; puis, d'une saison lorsqu'il s'agit du travail et de la correction d'un même exercice ; ensuite, d'épisodes de correction de durées hétérogènes qui sont constitués enfin par des scènes, également de durées hétérogènes et découpées à partir de différents critères décrits ci-dessous. Ainsi, une saison ne comporte pas que des épisodes de correction.

Rappelons que nos travaux de recherche portent sur le sujet « professeur », son action didactique dans la classe et ses pratiques en classe.

Pour notre analyse des pratiques enseignantes, nous procédons d'abord, comme Robert (2004), par une description assez globale des séances observées. Cependant, elle effectue un fractionnement par *épisodes* par rapport aux tâches présentes dans l'énoncé d'un exercice (ce qu'elle appelle le scénario tenant compte des activités des élèves nécessaires pour résoudre ces tâches). Tandis que pour nous, le découpage en *épisodes* s'effectue du point de vue de l'action du professeur et chaque activité de l'enseignant correspond à un nouvel épisode ; par exemple une activité de rappel, l'activité de l'enseignant lorsqu'il laisse chercher les élèves en classe, l'activité lorsqu'il distribue une feuille d'exercices ou lorsqu'il demande aux élèves une nouvelle proposition pour avancer dans la résolution de l'exercice ; l'ensemble des activités de l'enseignant en classe (ses pratiques en classe) est ainsi découpé en épisodes.

Le découpage de Robert par rapport à l'énoncé n'inclut pas ce qui relève de la mise en route du travail et parfois de la correction ; par exemple lorsque l'enseignant donne les consignes pour le travail, il peut expliciter des méthodes, ce qui constitue déjà un début de correction.

De même, nous n'avons pas retenu la subdivision en *scènes* à partir des sous-tâches donnant lieu à des activités des élèves. Nous l'effectuons à partir de la dimension de l'activité de la classe privilégiée par le professeur : chronogenèse, mésogenèse et topogenèse.

Pour Robert les *épisodes* sont découpés en se plaçant du côté du savoir ; nous nous situons, pour notre découpage, du côté du professeur. Pour les *scènes*, l'auteur fait le découpage par rapport à l'élève (aux activités nécessaires pour résoudre les sous-tâches) ; nous restons encore du côté du professeur.

Les dimensions de l'activité de l'enseignant

Chronogenèse : Nous voulions repérer les utilisations éventuelles de différents cadres (résolution à partir de représentations graphiques, expression à trouver à partir des calculs algébriques, travail sur des ensembles de définition d'une fonction). Ainsi, une autre scène commence avec la proposition d'une autre idée de résolution ; ou bien avec un changement de cadre.

Mésogenèse : Nous voulions repérer l'éventuel travail sur la structuration des connaissances (une première exploration des méthodes, la conclusion d'une partie de la correction, une vérification, une synthèse de la correction). Ainsi, une autre scène est découpée lorsqu'une logique de raisonnement apparaît permettant de donner une « structure » ou une justification à la technique de résolution ; cela fait évoluer le rapport des élèves aux connaissances mises en fonctionnement.

Topogénèse : Nous voulions distinguer la répartition de la responsabilité scientifique dans la classe (du temps laissé aux élèves pour la recherche, du temps pour des questions des élèves, des rappels du cours). Ainsi, une autre scène commence lorsque la gestion du déroulement change.

Pour dire qu'un professeur privilégie une des dimensions de son activité nous avons observé d'abord la totalité de scènes, puis seulement les scènes choisies ; dans ces deux plans nous avons compté le nombre de scènes relevant de chacune de ces dimensions.

Choix des scènes de correction collective

Suite au découpage des deux *saisons* en *épisodes*, et des *épisodes* en *scènes*, nous avons choisi pour l'analyse quelques *scènes* collectives, en privilégiant trois critères dont deux sont centrés sur le statut de la notion de fonction réciproque :

- Le traitement de la fonction réciproque en tant qu'**objet**, de manière explicite ou non : cela inclut la notion de bijection, un travail avec les ensembles de définition ou un travail sur la composition des fonctions.
- Le traitement de la fonction réciproque en tant qu'**outil**, de manière explicite ou non : faire opérer la fonction réciproque dans la résolution d'une équation, ou bien, passer d'un logarithme à une exponentielle dans la recherche d'une expression algébrique.
- Quelques scènes ne répondant pas à ces deux critères ont été choisies pour leur importance vis-à-vis de notre problématique. Par exemple : s'il s'agit de la seule trace écrite de la correction ; si l'enseignant justifie l'envoi d'un élève au tableau ; s'il est précisé que c'est aux élèves de choisir la méthode juste avant de lancer la recherche ; si pour l'exercice 2 (R : à chercher à la maison) des consignes sont données, qui seront confrontées avec le travail de la séance suivante ; etc.

Quelques résultats

Recherche de régularités sur la correction

Variables principales du modèle

Nous avons observé que les légères différences entre les modalités (surtout en ce qui concerne le corrigé et le statut des connaissances) confirment les relations entre les professeurs par rapport à l'appartenance aux réseaux. En effet, nous remarquons que le niveau d'enseignement est indépendant du statut des connaissances dans les tâches proposées. Par ailleurs, les corrections sont en général collectives, l'enseignant étant le responsable d'un corrigé écrit plus ou moins partiellement au fil de la plume ; les tâches proposées demandent plutôt des connaissances avec un niveau de mise en fonctionnement mobilisable ; et le discours d'accompagnement emploie surtout une fonction de structuration.

Ainsi, on pourrait conclure que les épisodes de correction ordinaires semblent être indépendants du contenu mathématique ; c'est-à-dire que les invariants des épisodes de correction sont au-delà de l'ordre dans lequel un professeur organise les contenus mathématiques entre eux.

Variables supplémentaires du modèle

Nous avons introduit des variables supplémentaires au modèle d'épisodes de correction : le travail de recherche et le temps de recherche. L'analyse de pratiques de classe confirme les travaux de Maurice et Allegre (2002) pour le temps de recherche, à savoir que pour un professeur donné c'est le même temps qui est laissé aux élèves quelque soit l'exercice. Il n'y a que pour un professeur de « classiques » (lycée) qu'on peut repérer une différence de

correction entre un exercice qui a été cherché à la maison et un exercice cherché en classe ; autrement dit, la variable « travail de recherche à la maison ou en classe » n'est pas discriminante vis à vis de la correction.

Régularités sur la dimension de l'activité privilégiée

Les dimensions de l'activité privilégiées sont observées d'abord dans la totalité de scènes des deux saisons, puis seulement dans les scènes choisies pour les analyses.

Trois « regroupements » semblent se former par rapport à ce critère de comparaison : ceux qui privilégient la mésogenèse, ceux qui sont plutôt intéressés pour relever la topogenèse et celle qui donne plus d'importance à la chronogenèse.

Les « modernes » et le « prêt à tout »

Ainsi, pour les scènes de notre intérêt il semble que les professeurs « modernes » et le « prêt à tout » privilégient la mise dans le milieu des idées ou des commentaires afin de favoriser la logique de raisonnement pour la résolution de la tâche, en vue de faire évoluer le rapport des élèves à ces connaissances.

Les « classiques »

Les professeurs « classiques » présentent une différence entre les saisons : pour la 1 les scènes choisies relèvent majoritairement de la topogenèse, privilégiant la mise en évidence des rôles de l'enseignant et des élèves ; tandis que dans la 2, elles relèvent de la mésogenèse, privilégiant la mise en place d'une logique de raisonnement, comme pour les « modernes » et le « prêt à tout ».

La « discrète »

Délia ne montre aucune différence entre les saisons ni entre le changement d'avoir la totalité de scènes ou seulement les choisies : elle privilégie toujours la chronogenèse avec les propositions de nouvelles idées qui aident à faire avancer le temps didactique.

Façons de faire face à l'obstacle didactique généré par la notion de fonction réciproque

Nous limitons les lignes suivantes au croisement entre les réseaux et l'action didactique du professeur :

- Les « **classiques** » enseignent la fonction logarithme conformément à leur propre rapport.
- Pedro, en tant que « **prêt à tout** » semble s'associer aux « **modernes** » (Monica et Marco). Tous les trois ont un rapport à la notion de fonction réciproque explicite à partir des fonctions logarithme et exponentielle, soit en introduisant le logarithme à partir des propriétés de l'exponentielle (Monica et Pedro) soit en associant le logarithme à la fonction réciproque de l'exponentielle (Marco).
- Enfin Délia, en tant que « **discrète** » Elle garde un rapport implicite à la notion de fonction réciproque.

Ainsi, les dimensions de l'activité des professeurs ont révélé un rapport avec l'organisation et la présentation des contenus mathématiques présents dans les réseaux : nous distinguons à ce propos une variabilité des enseignants par rapport à ces derniers. Par conséquent, nous pourrions conclure que la connaissance du réseau auquel un professeur est contributif donne des éléments sur les dimensions de son activité lorsqu'il va corriger des exercices qui font intervenir une notion constituée en obstacle.

En résumé, en face des corrections d'exercices proposés, les six professeurs observés réagissent de trois manières : soit ils institutionnalisent « quand même » la notion de fonction

réci-proque, soit ils évitent la difficulté en la déplaçant vers une propriété admise antérieurement (comme l'équivalence $\ln x = y$ pour $x > 0 \Leftrightarrow x = e^y$), soit ils utilisent une technique invisible sans expliquer la propriété utilisée dans une résolution donnée.

Evolution du modèle de correction collective

Certaines modalités des variables du modèle d'épisodes de correction utilisés pour nos analyses ne font pas de discrimination entre les pratiques enseignantes ordinaires. Par contre, les dimensions de l'activité des professeurs ont révélé un rapport avec l'organisation et la présentation des contenus mathématiques présents dans les réseaux.

Nous avons choisi de nous situer dans des épisodes de correction collective, c'est pourquoi notre méthodologie n'a pas pris en compte les éventuels apports des professeurs à des élèves en particulier. Par conséquent nous proposons d'éliminer dans le nouveau modèle la modalité « collectif/individuel » de la variable « corrigé ».

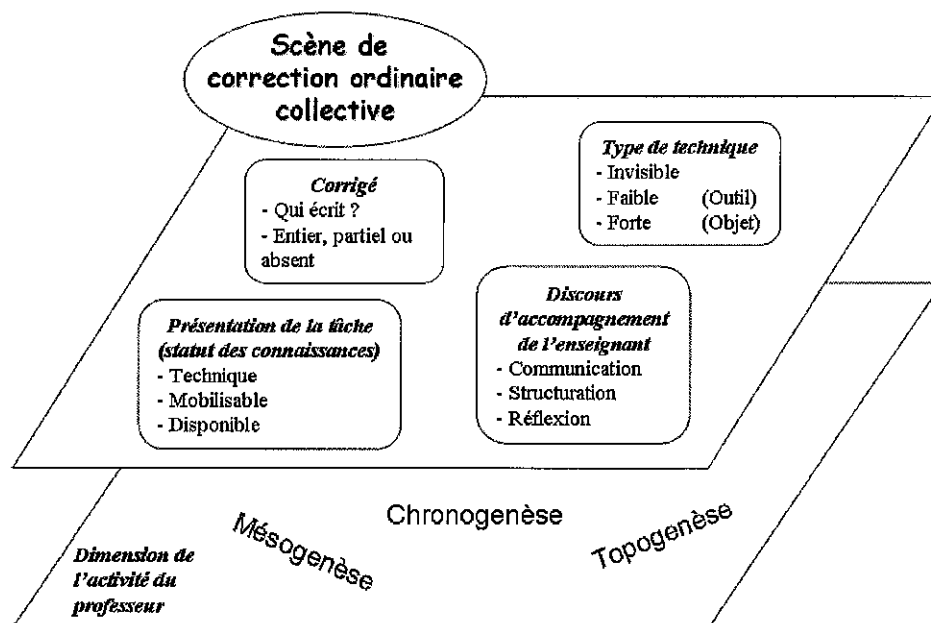
La « responsabilité scientifique » englobe davantage d'actions que la modalité « qui écrit le corrigé », à savoir : communiquer la solution, la valider, décider de passer à une autre idée ou d'y revenir, etc. ; mais d'après les observations de classe nous pouvons affirmer que cette modalité est « fixée » à la charge de l'enseignant, c'est pourquoi nous ne l'incluons pas dans le nouveau modèle proposé, mais elle est remplacée par « qui écrit ? ».

L'autre modalité de la variable « corrigé » qui disparaît aussi du nouveau modèle est : « déjà écrit ou au fil de la plume ». En effet, les observations ont montré qu'elle est fixée à une seule valeur lorsqu'il s'agit de corrections ordinaires collectives : le corrigé est toujours écrit au fil de la plume.

D'autre part, nous avons signalé que les dimensions de l'activité du professeur ainsi que le statut du contenu mathématique et les accompagnements des techniques utilisées semblent mieux distinguer les pratiques des enseignants lorsqu'ils corrigent un exercice dans lequel ils sont confrontés à une notion constituée en obstacle didactique. Nous introduisons donc dans le nouveau modèle de correction le plan de la dimension de l'activité privilégiée par le professeur avec trois modalités (chronogénèse, mésogénèse et topogénèse).

Dans un autre plan nous englobons en une seule variable le « statut du contenu mathématique » à deux modalités (en tant qu'outil ou en tant qu'objet) avec le « type de techniques » (invisible, faible ou forte), qui montrent la manière dont les professeurs traitent le contenu mathématique. Nous conservons dans ce plan les variables « statut des connaissances » et « discours d'accompagnement », qui décrivent de manière assez claire la proposition des tâches par les enseignants ainsi que la fonction de leur discours d'accompagnement favorisant l'apprentissage des élèves.

Ainsi, pour tenir compte des pratiques ordinaires que nous avons observées, nous proposons de modéliser une scène de correction ordinaire collective en classe lorsque la notion mathématique est un obstacle didactique de la façon suivante :



Ainsi, en partant du modèle d'épisodes de correction, notre travail propose un modèle de scènes de correction collective toujours pour l'étude des pratiques ordinaires et en deux plans : l'un avec des variables à modalités plus spécifiques, l'autre avec trois modalités toujours présentes dans l'activité, l'une d'entre elles étant privilégiée à chaque action du professeur.

Confrontation à la contingence de la fin du collège

Nous arrivons dans la deuxième partie de l'exposé qui correspond aux travaux en cours. Nous avons choisi de confronter le modèle initial d'épisode de correction à une autre contingence que celle de Terminale/IUT. Nous nous sommes placées en quatrième et troisième (agricole). Le professeur devait mettre en œuvre dans une classe un enseignement de statistique extraordinaire que nous avons en partie élaboré avec lui. Nous avons particulièrement porté nos observations sur les corrections dans le cas de la médiane. Nous parlons encore de confrontation à la contingence pour cette « expérimentation » de quelque chose qui n'est pas nécessaire. En effet, l'ingénierie mise en œuvre n'est pas issue d'une théorie « purement » didactique estampillée comme TSD ou TAD. Nous nous sommes reposées sur la théorie des champs conceptuels et la conviction que l'entrée dans une question mathématique par la complexité favorise l'apprentissage (même si c'est au détriment de la réussite selon les critères classiques).

Dans les propositions actuelles en didactique des mathématiques, l'accent est mis sur les activités de découvertes de notions nouvelles ou sur les contenus mathématiques des cours. « L'entraînement » est peu travaillé d'un point de vue didactique. De nombreux travaux portent encore sur le moment héroïque d'entrée dans les notions ou de découverte de propriétés voire l'élaboration de définitions. Paradoxalement, les enseignants passent beaucoup de temps à corriger des exercices de mathématiques. Ont-ils une intuition profonde que ce qui est important pour l'apprentissage ce n'est pas le cours ni la façon dont il est fait

mais de faire faire des exercices ? La part extra-ordinaire de l'enseignement mis en place porte donc en particulier sur les modalités des variables de correction majoritaires dans l'enseignement ordinaire qui ont été évoquées dans la première partie de l'exposé.

L'entrée dans la statistique de notre « ingénierie » commence par les questions de comparaison et d'évolution des notes de la classe sur l'année. La redondance est ritualisée : à chaque fois que le professeur rend un devoir qu'il a noté, quelque soit le sujet mathématique, il fait faire (à tour de rôle) l'exploitation des données qu'il transmet « en vrac » aux élèves.

Le cours explicite pour les élèves les types de problèmes (nous en avons dénombré 5 en quatrième et troisième agricole) ainsi que les techniques pour les résoudre. Les cinq types de problèmes à ce niveau d'enseignement, compte tenu des instructions officielles sont :

4. Données *in extenso* : Calcul de paramètre et comparaison.
5. Données *in extenso* : représentations graphiques.
6. Données groupées : lecture de graphique.
7. Données groupées : Calcul de paramètres et comparaison.
8. Données groupées : représentations graphiques.

– 2 catégories : les données d'observation et les données expérimentales

– 4 sortes de questions: lire et construire des graphiques, calculer des paramètres et comparer

Concernant les exercices, nous souhaitons expérimenter une organisation particulière.

En petits groupes les élèves devaient classer 26 exercices selon les 5 types de problèmes sans avoir à rédiger une solution pour chacun d'entre eux.

Le Ministère de l'Agriculture et de la Pêche ayant annoncé la fermeture des classes de quatrième et troisième agricole dans la région où enseigne ce professeur, il n'a pas souhaité mettre en œuvre l'expérimentation et nos observations n'ont pas eu lieu.

Bibliographie

Antibi, A. et Brousseau, G. (2000) La dé-transposition de connaissances scolaires, *Recherche en Didactique des Mathématiques*. Vol 20(1), pp.7-40.

Antibi, A. et Brousseau, G. (2002) *Vers l'ingénierie de la dé-transposition*. Didactiques des disciplines scientifiques et technologiques : concepts et méthodes, 8, pp.45-57.

Bailleul, M. (2000). Mise en évidence des réseaux orientés de représentations dans deux études concernant des enseignants stagiaires en IUFM. In R. Gras, M. Bailleul (Eds), *Actes des journées sur la fouille dans les données par la méthode d'Analyse Statistique Implicative*. Ed. Rennes : Presses Universitaires de Rennes. P.189-208.

Bronner, A. (1997) Les rapports d'enseignants de troisième et de seconde aux objets « nombre réel » et « racine carrée ». *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol 17(3), pp. 55-80.

Brousseau, G. (1998) *Théorie des situations didactiques*. Ed. La pensée sauvage, Grenoble

Chiocca, C-M. (1995) *Des discours des enseignants de mathématiques en classe aux représentations de leurs élèves sur les mathématiques : un essai de réflexion didactique*, Paris VII

Gras, R. et al. (1996). *L'implication statistique. Nouvelle méthode exploratoire de données*. Grenoble. La Pensée Sauvage.

Goody, J. (1979) *La raison graphique, la domestication de la pensée sauvage*. Editions de Minuit.

Leutenegger F. 2000, Construction d'une « clinique » pour le didactique. Une étude des phénomènes temporels de l'enseignement, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 20(2), 209-250

Maurice, J.J. et Allègre, E. (2002) Invariance temporelle des pratiques enseignantes : le temps donné aux élèves pour chercher. *Revue Française de Pédagogie*, n°138, pp.115-124.

Robert, A. (2004) Une analyse de séance de mathématiques au collège, à partir d'une vidéo filmée en classe. *Petit x*, n°65, pp.52-79

Robert, A. (2006) Une méthodologie pour décrire des déroulements de séances de classe à partir de vidéo dans des recherches sur les pratiques d'enseignants de mathématiques au collège et au lycée, in M.J. Perrin-Glorian et Y. Reuter (eds), *Les méthodes de recherche en didactiques*, pp.191-202. Ed. Presses Universitaires du Septentrion Villeneuve d'Ascq.

Sensevy, G. et Mercier, A. (2007). *Agir ensemble, l'action conjointe du professeur et des élèves dans le système didactique*, Ed. Rennes, Presses Universitaire de Rennes.

Intégration de la géométrie dynamique pour favoriser la liaison école primaire collège : une ingénierie au collège pour la notion de propriété

Sylvia Coutat

Equipe DIAM, Grenoble

Résumé

Cet article présente une synthèse d'un travail de thèse s'intéressant à l'enseignement de la notion de propriété comme outil dans la liaison école primaire collège. A partir des travaux de Houdement et Kuzniak (2006) à propos des paradigmes géométriques, nous considérons que le concept de propriété peut établir un lien entre les deux institutions. Nous utilisons la théorie des champs conceptuels de Vergnaud (1990) pour définir le concept de propriété comme une relation de subordination entre les contraintes (données) et la conclusion de la propriété. La maîtrise de cette relation passe par la distinction entre les données et la conclusion. Cette distinction est nécessaire pour le réinvestissement de la propriété dans le raisonnement déductif. Nous utilisons les travaux de Vygotsky (1934) sur la médiation sémiotique et les travaux de Trouche (2005) et Rabardel (1995) sur l'instrumentation. En utilisant ces deux théories conjointement, nous avons conçu des séances d'enseignement intégrant la géométrie dynamique à travers Cabri géomètre pour l'enseignement certaines propriétés de la classe de cinquième (élèves de 12 ans). L'outil déplacement est utilisé dans des constructions « molles ». Les données de la propriété sont satisfaites à l'aide du déplacement, l'observation finale est la conclusion de la propriété. Le processus de médiation sémiotique est déclenché au cours de l'utilisation de l'instrument déplacement par l'élève, il se poursuit lors de phases collectives. Les changements d'environnements s'accompagnent de changement de registres dans l'expression de la relation de subordination. Nous avons analysé l'appropriation par les élèves de la relation entre les données et la conclusion à travers l'étude de :

- la construction de l'instrument déplacement que nous visons lors des activités avec Cabri Géomètre
- l'articulation entre les registres graphiques et discursifs en lien avec le processus de médiation sémiotique

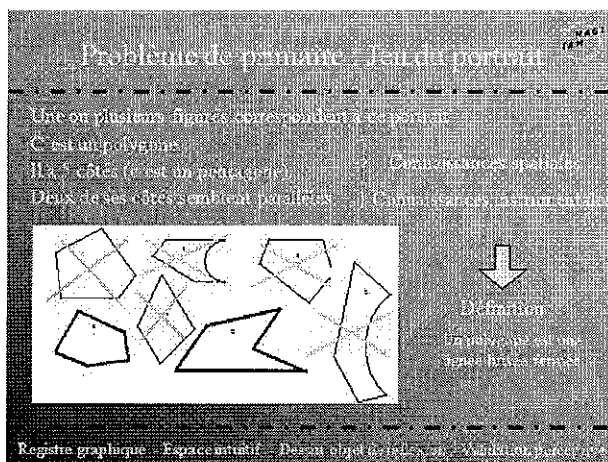
Mots clefs

Géométrie dynamique, décomposition dimensionnelle, registres, propriété, contraintes-conclusion, didactique mathématiques, instrumentation, médiation sémiotique

Introduction

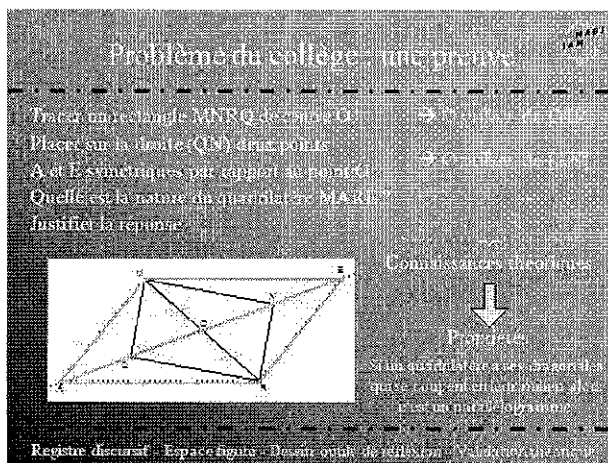
Notre recherche s'intéresse à la liaison école primaire collège pour l'apprentissage de la géométrie. Dans un premier temps analysons les attentes de chacune de ces institutions à travers l'étude de deux problèmes représentatifs. Dans cette analyse nous reprenons les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique étudiée développée par Duval (1994)

Un problème classique de l'école primaire est le jeu du portrait : les élèves doivent identifier parmi plusieurs formes celles qui correspondent à la description donnée.



Ici les élèves mettent en œuvre des connaissances spatiales s'appuyant sur des définitions, comme la définition du polygone. Ensuite, ils peuvent éventuellement utiliser des connaissances instrumentales, ici un gabarit qui leur permet d'identifier les droites parallèles. Ainsi, à l'école primaire, le registre prédominant est le registre graphique. Les élèves travaillent dans un espace intuitif où le dessin est utilisé comme objet de réflexion et de validation, ainsi la validation est perceptive.

Voici maintenant un problème du collège qui repose sur la formulation d'une preuve.



Ici les élèves doivent identifier la nature du parallélogramme MARE, on attend une procédure qui s'appuie sur les propriétés du rectangle, de la symétrie centrale et du parallélogramme, c'est-à-dire que les élèves mettent en œuvre des connaissances théoriques. Ainsi la résolution du problème utilise une validation théorique, l'espace de résolution est un espace qui utilise

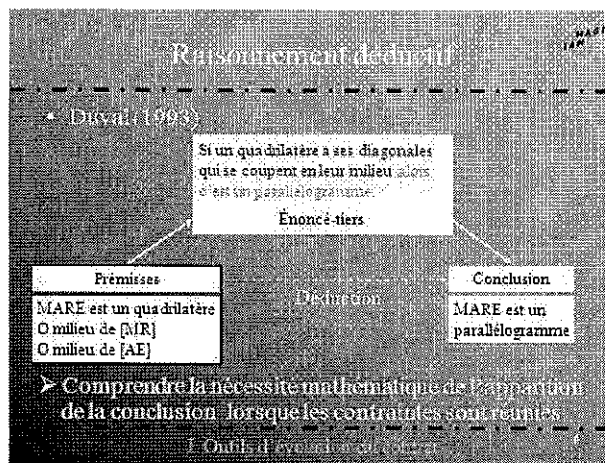
les figures et non les dessins, le dessin intervient comme outils dans la résolution. On attend des élèves qu'ils rédigent une preuve, ainsi le registre dominant est le registre discursif.

Ces deux exemples illustrent quelques points de rupture entre la géométrie enseignée à l'école primaire et celle enseignée au collège. On a pu voir ainsi une évolution dans le type de validation, en passant d'une validation perceptive à une validation théorique, ainsi qu'un changement d'espace, l'espace intuitif de l'école primaire devient un espace qui intègre la notion de figure géométrique, ainsi le statut du dessin évolue d'objet à outils. On a aussi vu que le registre dominant est le registre graphique à l'école primaire et devient le registre discursif au collège. Enfin, les énoncés de références sont différents en particulier de par leur structure, les définitions sont construites à partir de relation d'association alors que les propriétés sont construites sur des relations de subordination entre les données et les conséquences. Ces énoncés de références sont le cœur de la pratique de la géométrie dans les deux institutions, ils nous semblent qu'ils peuvent être le point départ d'une réflexion à propos de la liaison école primaire collège. Cela nous amène à notre thème de recherche : **Comment introduire les propriétés en s'appuyant sur les pré-requis du primaire et respectant les attentes du collège ?**

Outils d'évolution du contrat

Raisonnement déductif

Comme nous l'avons présenté dans le chapitre précédent la validation du collège est théorique, elle utilise principalement le raisonnement déductif. Ce raisonnement ternaire (Duval 1993) revient à relier les prémisses, les données d'un problème, à une conclusion à l'aide d'une énoncé tiers. Par exemple, si nous reprenons le problème précédemment présenté :



Les données du problème sont que MARE est un quadrilatère, à l'aide des propriétés du rectangle et de la symétrie centrale on obtient : O est le milieu de [MR] et O est le milieu de [AE]. Il s'agit ensuite de déterminer quelle propriété possède les contraintes instanciées au cas particulier de l'exercice : Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu alors c'est un parallélogramme. On conclut en utilisant la conclusion de la propriété au problème. On voit dans ce raisonnement qu'il est important de maîtriser la structure de la propriété. C'est-à-dire pouvoir identifier les contraintes et la conclusion et encore plus maîtriser relation entre les contraintes et la conclusion. Ainsi, si l'on veut enseigner les

propriétés en prenant en compte les attentes du collège, cela passe par la compréhension de la relation de subordination entre les contraintes et la conclusion.

Concept de propriété

Pour comprendre cette relation entre les contraintes et la conclusion nous avons utilisé la théorie des champs conceptuels de Vergnaud (1990) et plus particulièrement le triplet référent, signifiant et invariant. Notre invariant étant la relation de subordination, lient entre les contraintes et la conclusion. Le référent est l'ensemble des situations qui donnent du sens au lien contraintes-conclusion. Nous avons identifié trois classes de situations qui donnent du sens au concept.

Tout d'abord la classe des situations d'Illustration, où la propriété est objet d'étude. Ainsi l'exercice permet de visualiser la transformation de l'objet géométrique initial une fois les contraintes réalisées. Avec la propriété exemple après avoir tracé le quadrilatère et les milieux des diagonales, une fois que les milieux sont confondus on voit que le quadrilatère est devenu un parallélogramme. Cette classe de situation fait apparaître l'intérêt d'un environnement dynamique pour la visualisation de lien entre les contraintes et la conclusion.

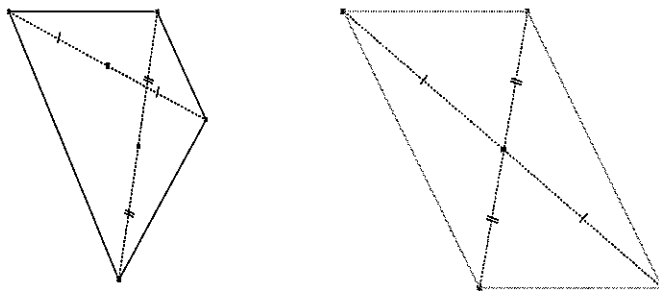
La deuxième classe est formée par les situations de Validation, la propriété cible est validée plus ou moins théoriquement suivant les connaissances et les capacités des élèves par une démonstration ou une preuve pragmatique. Ainsi en expliquant pourquoi cette conclusion apparaît lorsque des contraintes précises sont réalisées, permet d'associer du sens au lien entre les contraintes et la conclusion.

La dernière classe de situations est formée par les situations d'énoncé-tiers. La propriété est utilisée comme outil dans un raisonnement de preuve. Dans notre exemple, l'exercice MARE, notre propriété exemple est la propriété énoncé-tiers qui permet de résoudre le problème.

Pour identifier les différentes expressions de la relation de subordination nous utilisons les registres sémiotiques. Ainsi, apparaissent deux classes de signifiants : les signifiants dans un registre du discours et les signifiants dans un registre visuel.

Dans le registre du discours on retrouve l'énoncé de la propriété qui utilise les mots *si* et *alors*. Cette formulation est la formulation institutionnelle que nous avons appelé la formulation experte. On peut aussi avoir la deuxième formulation : « Lorsqu'un quadrilatère aura ses diagonales qui se coupent en leur milieu il deviendra un parallélogramme » qui associe une chronologie à la propriété. Nous appelons cette formulation, la formulation temporelle, qui pourra être utilisée par des élèves.

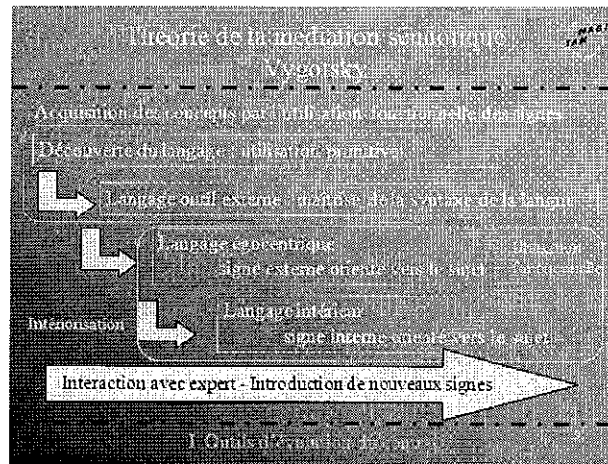
Dans un registre visuel, la relation de subordination que nous visons peut être représentée, comme nous retrouvons dans les travaux de Bellard et Lewillion (2001), par les dessins ci-dessous :



Tout d'abord, le quadrilatère est représenté avec les milieux des diagonales, puis sur un deuxième dessin les milieux des diagonales sont superposés, on peut observer le parallélogramme. Cette vision statique qui s'appuie sur deux dessins, peut être animée ce qui donne une animation Cabri. Le quadrilatère est construit, puis les milieux des diagonales, enfin un sommet est déplacé pour que les milieux des diagonales soient confondus. On observe à la fin que le quadrilatère est devenu un parallélogramme.

Théorie de la médiation sémiotique

Nous savons maintenant un peu mieux ce que nous cherchons à enseigner, voyons maintenant comment l'enseigner. La théorie de la médiation sémiotique initiée par Vygotsky (1934) considère que l'acquisition des concepts passe par l'utilisation fonctionnelle de signes. Il s'appuie sur l'appropriation par les enfants du langage.



Dans un premier temps, le bébé utilise le langage de façon très primitive pour maîtriser son entourage, par exemple « TA » pour demander quelque chose. Dans un deuxième temps, l'enfant commence à maîtriser la syntaxe du langage et l'utilise toujours pour maîtriser ce qui l'entoure, on parle d'outil externe. Dans ces deux premières étapes le langage est tourné vers un environnement externe au sujet. Puis, le langage devient égocentrique, l'enfant se parle à lui-même, le langage n'est plus utilisé pour maîtriser ce qui entoure le sujet mais pour maîtriser ses propres pensées, sa propre conscience. C'est au cours de cette étape que nous parlons de l'utilisation fonctionnelle du signe. Enfin, la dernière étape dans le processus de médiation sémiotique est la mise en œuvre d'un langage intérieur, l'enfant se parle à lui-même intérieurement. Le langage devient un signe interne, tourné vers le sujet. Dans ces deux dernières étapes, le langage est un signe qui vise le contrôle de la pensée du sujet. Ce que Vygotsky appelle l'intériorisation est la réalisation de cette dernière étape. La mise en œuvre de ce processus chez un sujet s'appuie aussi sur les interactions avec un expert, ce qui lui permet l'introduction de nouveaux signes.

Si on reprend cette théorie de la médiation sémiotique pour la relation de subordination que nous visons, l'utilisation du déplacement intervient comme un outil dans un premier temps tourné vers un environnement externe, l'environnement dynamique de Cabri. L'enfant déplace les objets visibles à l'écran. Puis si l'enfant est amené à formuler ces manipulations et à interagir avec l'enseignant, alors on pourra considérer que le processus de médiation sémiotique est amorcé, c'est-à-dire que l'élève est sensibilisé à un nouveau concept qu'il peut utiliser dans un premier temps comme outil externe. Cela constitue notre première hypothèse de travail :

L'utilisation de Cabri Géomètre complétée par les interactions avec l'enseignant peut constituer un outil de médiation sémiotique pour l'intériorisation du lien contraintes-conclusion par les élèves.

Registres sémiotiques

Pour enseigner cette relation de subordination, nous utilisons aussi l'articulation des registres sémiotique développée par Duval (1995). Nous avons identifié quatre registres, trois registres dans l'environnement papier-crayon, le registre discursif, le registre graphique et le registre discursivo-graphique qui utilise des signes des deux registres précédents (Richard 2004). Dans l'environnement dynamique de Cabri Géomètre nous considérons le registre graphique dynamique (Coutat 2006). Travailler et exprimer la relation entre les contraintes et la conclusion dans ces quatre registres contribue à l'appropriation de la relation de subordination par l'élève. Cela constitue notre deuxième hypothèse de travail :

L'utilisation et l'interaction entre les registres contribuent à la construction du sens du concept de propriété c'est-à-dire l'appropriation par les élèves du lien contraintes-conclusion.

Cependant plus qu'une articulation entre registres, ici le travail sur le registres permet une articulation entre deux environnements, l'environnement dynamique de Cabri et l'environnement statique du papier crayon. Pour chaque environnement on peut considérer un registre de référence, dans l'environnement dynamique de Cabri, le registre graphique dynamique, dans l'environnement du papier-crayon parmi les trois registres on peut considérer que le registre de référence doit être ou au moins devenir le registre discursif. Ainsi, l'articulation entre les deux environnements revient à l'articulation entre le registre graphique-dynamique et le registre discursif. Nous considérons que le registre discursivo-graphique qui se compose à la fois de signes du registre graphique et de signes du registre discursif peut être utilisé pour articuler les deux registres (graphique-dynamique et discursif) et les deux environnements.

Cependant l'articulation entre un registre visuel et un registre du discours est très difficile car il passe par la décomposition des formes dans le registre visuel (Duval 2005). Par exemple, considérons le parallélogramme qui est un élément de dimension 2, celui-ci est construit à l'aide de droites qui se coupent. Ces droites sont des éléments de dimension 1, puis l'intersection de ces droites définit des points, des éléments de dimension 0. Parvenir à identifier ces différents éléments qui composent le parallélogramme est appelé par Duval la décomposition dimensionnelle des formes. Si l'on veut articuler un registre visuel et un registre du discours la prise en compte des unités figurales est essentielle car ces unités figurales inférieures sont prises en compte dans le registre du discours et de façon beaucoup moins évidente dans un registre visuel.

Instrumentation

Les situations d'Illustrations font intervenir un environnement de géométrie dynamique, Rabardel (1999) et Trouche (2005) considèrent que lorsque les élèves utilisent un outil (logiciel ou outil matériel comme une équerre) pour résoudre une tâche, les élèves construisent un instrument, c'est-à-dire associent des connaissances à l'outil. Dans le cas du logiciel Cabri Géomètre, l'outil que nous considérons est l'outil déplacement, mais pas l'outil classique qui permet d'identifier les invariances d'une construction. Ici le déplacement est utilisé pour obtenir une configuration particulière par la réalisation d'une contrainte éphémère. Par exemple, on peut utiliser le déplacement pour obtenir un angle droit dans le

parallélogramme. Ce déplacement peut être caractérisé comme un déplacement « mou » dans le sens où il nous permet d'obtenir une construction mole. De plus on peut remarquer que lors d'un tel déplacement, nous utilisons la décomposition dimensionnelle de la figure, par la prise en compte d'un sommet et d'une droite, dans le contrôle du déplacement. Lorsque les élèves utilisent le déplacement dans les situations d'illustration, ils vont donc construire un instrument. Nous considérons ici deux niveaux d'instruments, l'instrument lié au concept que nous visons c'est-à-dire la relation de subordination entre les contraintes et la conclusion. Un autre niveau d'instrument, plus local aux manipulations est associé à chaque propriété ciblée par la manipulation. Cela nous amène à notre quatrième hypothèse de travail :

La manipulation des outils qui participe à la construction de l'instrument déplacement, amorce le processus de médiation sémiotique relativement à la relation de subordination

Problématique et méthodologie

Problématique

Notre problématique se décompose en deux axes. Un premier axe s'intéresse au processus d'instrumentation, relativement au déplacement. Quelle formulation de la relation de subordination les élèves vont-ils utiliser à partir des situations d'illustrations ?

Le deuxième axe s'intéresse au processus de médiation sémiotique au cours de l'articulation entre les registres, quelle expression du lien ce processus permet-il ?

Méthodologie

Pour répondre à ces questions nous avons conçu une ingénierie didactique qui s'est déroulée sur l'année scolaire. Le concept d'ingénierie, nous permet d'observer des situations d'enseignement-apprentissage de la notion de propriété en classe, avec des élèves et un enseignant. Cette ingénierie se déroule sur l'année afin que les processus d'instrumentation et de médiation sémiotique puissent s'installer.

Les scénarios, conçus pour cette ingénierie, considèrent l'intégration de Cabri Géomètre et ont été conçus en collaboration avec l'enseignant. Cette collaboration a permis de concilier les objectifs de notre recherche avec les contraintes institutionnelles.

Chaque séquence d'enseignement comporte trois séances (quatre séances avec l'introduction). Les trois types de situations apparaissent dans ce scénario. L'appropriation du lien contraintes-conclusion évolue tout au long de la séquence, nous considérons que les manipulations du logiciel (processus d'instrumentation) et la phase collective (processus de médiation sémiotique) sont deux étapes clés dans l'acquisition des connaissances visées chez les élèves.

Introduction	Activité d'exploration pour l'introduction de l'objet géométrique en jeu dans la séance et inconnu des élèves.
Activité Cabri	Activité dans un registre dynamique sur et avec les propriétés : exercice d'illustration, exercice d'énoncé-tiers
Cours	Mise en commun Cours - Validation de la propriété : exercice de Validation
Exercices	Travail avec les propriétés, identifier les contraintes, identifier la conclusion : exercice d'Enoncé-tiers

Comme nous l'avons expliqué, cette ingénierie s'est déroulée sur une année scolaire, les différents chapitres de la classe de 5^{ème} ont été abordés suivant l'organisation que nous avons présentée. Ainsi les élèves ont travaillé sur la symétrie centrale, puis le parallélogramme, ensuite sur les angles alternes internes et enfin sur les parallélogrammes particuliers.

Nos observables reposent sur l'analyse du travail de cinq binômes lors d'activités de type Illustration, et les enregistrements audio de phases collectives. Nous avons choisi ces cinq binômes suite à un test posé en début d'année. Voici un des trois problèmes posés aux élèves, le plus connu, issu des évaluations nationales :

Choix des binômes observés

Marc a fait la figure suivante à main levée.
Il cherche la longueur EB, peux-tu retrouver cette longueur ? Explique ta méthode

- Satine & Camille : instrumenté & perceptif théorique
- Willy & Meddi : perceptif instrumenté & théorique
- Salomé & Léane : perceptif & théorique instrumenté
- Léa & Sandra : perceptif instrumenté & théorique
- Jade & Laura : perceptif instrumenté théorique & théorique

IB Mathématiques

Ce problème nous permet d'identifier les procédures des élèves, ainsi un élève qui utilise la perception nous répondra 3 cm s'il considère perceptivement que E est le milieu de [AB] ou 2 s'il considère que les longueurs AD, AE et EB sont égales. Un élève qui utilise un instrument nous donnera comme réponse la mesure réelle de EB. Enfin, une procédure théorique donne comme réponse 4 cm et s'appuie sur un raisonnement théorique et non le dessin.

Les élèves Satine, Willy, Salomé, Léa ont mis en œuvre des procédures que nous rapprochons de l'école primaire. Jade a été choisie principalement à l'issue des observations de classe. En effet elle semble avoir besoin de visualiser les choses pour se les approprier. Nous avons conservé les binômes que les élèves avaient eux même choisis afin de favoriser les échanges interpersonnels. On peut remarquer que les binômes sont équilibrés car les élèves sont complémentaires. Ainsi on retrouve les trois profils chez tous les binômes.

Ingénierie : un quadrilatère particulier

Nous vous présentons la séance quadrilatère particulier, de l'introduction des premières propriétés aux exercices de réinvestissement.

Introduction

Le parallélogramme a été introduit comme un quadrilatère ayant un centre de symétrie. Cette définition nous permet de relier le chapitre précédent sur la symétrie centrale à ce nouveau chapitre. Les élèves travaillent ensuite sur les propriétés directes du parallélogramme.

Activité Cabri

L'activité Cabri que nous avons conçue est décomposée en deux parties, une partie « je découvre » qui contient trois manipulations issues des activités d'Illustration, chaque manipulation permet un travail sur une propriété.

Activité Cabri	
• Organisation :	
« Je découvre » : Trois manipulations issues des activités d'Illustration	
• J'utilise : Activité de type Enoncé-tiers	
« Milieux confondus » :	
Construction	• Construis un quadrilatère ABCD
Déplacement	• Réponds à l'énoncé ci-dessous : A chaque clic, donne les sommets A, B, C, D, centre du point A, point milieu.
Observation	• Construis M le milieu de [AC] et N le milieu de [BD]
	• Déplace le point C pour que les points M et N soient confondus
	Que devient ABCD ?
Essaie de résumer en une phrase le tableau ci-dessus :	

IV. Inégalité

La deuxième partie est la partie « j'utilise » où les élèves travaillent avec une propriété dans une activité de type Enoncé-tiers.

La première manipulation concerne notre propriété exemple. Cette première activité est appelée la manipulation « milieux confondus » les consignes sont données dans un tableau avec sur la première ligne les constructions et déplacement et sur la deuxième ligne l'observation. Cette observation dans un tableau des consignes à pour but de séparer les contraintes et la conclusion. Le résumé que nous attendons des élèves est une première formulation personnelle de la propriété ciblée par la manipulation.

La deuxième manipulation est la manipulation « côtés parallèles » où on attend des élèves qu'ils déplacent un sommet pour obtenir dans un premier temps deux côtés opposés parallèles, c'est-à-dire que les élèves obtiennent la configuration du trapèze. Dans un second temps qu'ils déplacent un sommet pour que tous les côtés opposés soient parallèles. Le but de cette double manipulation est que les élèves identifient, que les deux conditions doivent être réalisées pour obtenir un parallélogramme.

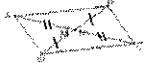
La dernière manipulation est « côtés égaux ». Nous demandons aux élèves de mesurer les côtés et de déplacer un sommet pour que dans un premier temps seulement deux côtés opposés sont égaux, puis tous les côtés opposés sont égaux. La encore la manipulation est scindée en deux pour les mêmes raisons que la manipulation « côtés parallèles ».

Phases collectives

Nous envisageons une phase collective au cours de l'activité Cabri, après la première manipulation. Cette phase collective à deux objectifs, l'un vise le processus d'instrumentation, l'autre le processus de médiation sémiotique. Cette phase collective utilise un vidéoprojecteur ce qui permet de concentrer les observations des élèves sur la même construction. Un élève effectue les manipulations, à partir de ses propres idées ou celles qu'un autre élève lui aura dictées. Ce que nous visons dans le processus d'instrumentation est l'utilisation de l'artefact mais aussi les manipulations de l'outil en liaison avec la tâche. C'est-à-dire expliciter quel contrôle est mis en œuvre au cours du déplacement. Nous attendons aussi que les élèves visualisent et explicitent la transformation du quadrilatère après la

réalisation du déplacement. L'explicitation du contrôle et de la transformation amorce comme nous l'avons dit précédemment le processus de médiation sémiotique. Ainsi, les interactions entre élèves mais aussi avec l'enseignant permettent un début de médiation sémiotique et l'introduction de nouveaux signes.

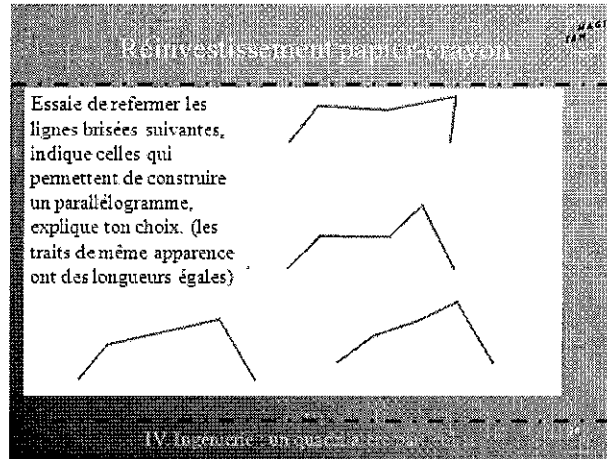
Une deuxième phase collective intervient, nous l'appelons cours puisqu'elle vise l'explicitation de propriétés dans une formulation experte. C'est au cours de cette phase collective que l'enseignant travaille sur l'articulation entre l'environnement dynamique de Cabri et l'environnement statique du papier-crayon par l'utilisation du registre discursivo-graphique. Ainsi, on retrouve le tableau de l'activité Cabri où les lignes sont transformées en colonnes.

Phases collectives - Cours	
• Introduction de signes : alors • Articulation environnement dynamique / papier-crayon par le registre discursivo-graphique	
Si on construit ...	Alors on observe ...
Un quadrilatère de façon que :  + Met N confondus M milieu de [AC] et N milieu de [BD] soient confondus	 ABCD est un parallélogramme
Propriété : Si un quadrilatère a ses diagonales qui ont le même milieu, alors c'est un parallélogramme.	
IV. Ingénierie : un quadrilatère, un parallélogramme	

La première colonne est introduite par le signe SI de la formulation experte, relié aux constructions de Cabri. Le signe Alors, associé à la conclusion, est ici relié à l'observation. De plus nous utilisons à la fois une représentation à l'aide de signes graphiques pour représenter la transformation du quadrilatère en parallélogramme et les signes discursifs pour identifier les unités figurationnelles inférieures présentes dans les contraintes. La distinction entre les contraintes et la conclusion est appuyée par l'utilisation de couleurs : une couleur est associée aux contraintes, une autre à la conclusion. La formulation experte de la propriété qui s'appuie sur les signes SI et ALORS est reliée à la manipulation Cabri par l'intermédiaire des constructions-déplacements et observations.

Réinvestissement

Pour conclure ce scénario sur le quadrilatère particulier nous avons utilisé un exercice qui reprend le déplacement dans l'environnement statique du papier-crayon, cela nous permet d'identifier si les élèves peuvent utiliser le déplacement comme un signe interne, c'est-à-dire de mettre en œuvre un déplacement mental.



Cet exercice est posé dans l'environnement papier-crayon comme devoir maison, les élèves doivent refermer mentalement les lignes brisées et identifier quelles sont celles qui permettent d'obtenir un parallélogramme. L'environnement Cabri peut être utilisé une fois que les élèves ont formulé leurs réponses pour visualiser les quadrilatères formés.

Analyse des données

Méthodologie d'analyse

Notre problématique se décompose en deux axes, nous avons conservé ces deux axes dans nos analyses. Ainsi nous analysons dans un premier temps quelle est l'impact de l'instrumentation dans l'appropriation de la relation de subordination par l'analyse du déplacement et du contrôle du déplacement, par l'analyse de l'observation et par l'analyse de la formulation de l'élève dans le résumé.

Ensuite, nous analysons l'évolution du processus de médiation sémiotique au cours de l'articulation entre les registres, par l'analyse des formulations des élèves, de l'enseignant et les signes utilisés.

Analyse de l'activité Cabri

Pour la première manipulation Cabri : « milieux confondus » les élèves que nous avons observés ont tous utilisé un contrôle sur les milieux des diagonales dans le contrôle de leur déplacement. Ainsi, le déplacement a effectivement permis la prise en compte des unités figurales inférieures.

Dans la deuxième manipulation, les élèves ont tous réalisé le premier déplacement non pas pour avoir deux côtés opposés parallèles mais pour avoir un parallélogramme. Tous les élèves ont déplacé avec un contrôle sur la forme du quadrilatère, c'est-à-dire l'unité figurale supérieure et non les côtés, c'est-à-dire l'unité figurale inférieure de dimension 1. Cependant le contrôle du déplacement a été complété chez deux binômes par une validation qui porte sur

les côtés ciblés dans l'énoncé du problème. Un binôme a utilisé l'Oracle, un autre a utilisé la construction des parallèles. Un dernier binôme a réinvesti l'instrument Déplacement de l'activité « milieux confondus ». Ce déplacement n'était pas celui que nous attendions cependant nous considérons que Jade en réinvestissant cet instrument a mis en œuvre une déduction ce que nous considérons comme un élément positif.

Ainsi, cette volonté d'obtenir un parallélogramme sans prendre en compte les côtés dans le déplacement semble provenir d'une association entre parallèles et parallélogramme. Une association certainement issue du primaire. On peut aussi supposer que la proximité syntaxique des mots ne facilite pas la distinction des propositions. En conséquence cette association a agi comme un obstacle épistémologique pour la prise en compte des unités figurales inférieures.

La dernière manipulation a été conçue avant que nous ne prenions connaissance de la décomposition dimensionnelle des formes. Ainsi, en demandant aux élèves de mesurer la longueur des côtés, nous avons contraint les élèves à un contrôle non pas sur les côtés comme unités figurales de dimension 1 mais un contrôle sur des nombres. Ainsi les élèves n'ont pas utilisé les unités figurales inférieures dans le contrôle du déplacement. Ils ne sont même pas restés dans un cadre géométrique pour résoudre le problème. La mesure est très forte, on peut supposer que même si nous ne l'avions pas introduite dans l'énoncé, les élèves l'auraient utilisée. Le déplacement avec le contrôle sur deux nombres est difficile, ainsi Jade a réutilisé le déplacement de la manipulation « milieux confondus » comme procédure économique pour obtenir un parallélogramme. Les autres binômes à force de patience sont parvenus à réaliser les conditions demandées en utilisant uniquement la mesure.

L'analyse des observations nous montre que les binômes sont parvenus à identifier le parallélogramme, car un élève au moins a su reconnaître le parallélogramme souvent suite à une appréhension opératoire de la figure alors que nous attendions simplement une appréhension perceptive. Ensuite, on a pu remarquer que les élèves se sont tous appropriés la transformation par le déplacement, c'est-à-dire qu'ils attendaient systématiquement un objet différent une fois le déplacement réalisé. On peut ainsi supposer que les élèves ont associé à l'outil déplacement une transformation de la figure Cabri.

Dans le résumé, nous pouvons remarquer que les formulations des élèves restent très proches du contexte. Ainsi les élèves s'appuient sur l'explicitation d'un acteur et de l'action avec des formulations où le nom des points apparaît. Les élèves s'appuient sur la chronologie de la manipulation pour ordonner les constructions, déplacements et observations ce qui permet une première formulation de la relation de subordination que nous visons.

Analyse des phases collectives

Une première phase collective a eu lieu après la manipulation « milieux confondus ». Elle a agi sur le processus d'instrumentation dans le sens où elle a permis l'explicitation du contrôle associé au déplacement. Pour cette manipulation le contrôle a effectivement permis la prise en compte des unités figurales inférieures. L'enseignant a demandé « tu déplaces le point C pour que quoi ? ». Nous attendions aussi une amorce du processus de médiation sémiotique, l'enseignante qui a collaboré à cette ingénierie est une enseignante très présente dans la classe et dans les échanges, ainsi elle a introduit plusieurs signes : « On a construit quoi au **départ** ? » lié à une formulation temporelle. Le signe si pour exprimer les conditions est introduit, ainsi que alors, signe de la formulation experte associé à l'observation et à une formulation temporelle.

La séance Cabri devait être suivie par une phase collective de cours, cependant, dans les faits, nous avons proposé aux élèves l'exercice de réinvestissement, avec les lignes brisées, avant la phase de cours.

Les élèves ne sont pas parvenus à résoudre l'exercice, car ils n'ont pas compris la consigne. Après explication par l'enseignant, les élèves ont résolu collectivement le problème. Cet exercice vise la propriété « si un quadrilatère non croisé a ses côtés opposés égaux, alors c'est un parallélogramme ». La situation d'illustration au cours de l'activité Cabri que nous avons proposée n'a pas fonctionné à cause de la prise en compte de la mesure. Dans cet exercice la mesure n'apparaît pas, ainsi les élèves sont obligés de rester dans le cadre géométrique et de considérer les segments, c'est-à-dire les unités figurales inférieures. La mise en œuvre du déplacement mental a permis une évolution dans l'appréhension de la figure. Ainsi les élèves ont refermé mentalement les lignes afin d'anticiper la solution. Les formulations des élèves sont restées attachées au contexte, c'est-à-dire qu'ils sont parvenus à la réponse : la ligne doit être composée de deux segments bleus, deux segments rouges, les couleurs alternées. Les élèves ne sont pas parvenus à une formulation plus générale de la propriété ciblée.

La phase collective cours et l'utilisation du registre discursivo-graphique intervient après cet exercice. Notre objectif de représenter statiquement l'activité dynamique semble avoir fonctionné car les élèves ont effectivement perçu la transformation du quadrilatère en un parallélogramme. De plus la prise en compte des unités figurales inférieures intervient dans l'analyse des signes issus du registre graphique à travers l'utilisation du codage. Les signes SI et ALORS de la formulation experte des propriétés sont introduits et associés aux constructions et déplacements. L'enseignante a une fois encore utilisé un grand nombre de signes pour expliciter la relation de subordination. Ainsi, les formulations de l'enseignante évoluent, partant de formulations temporelles exprimant l'action qui s'appuient sur l'activité Cabri, puis le temps disparaît, les contraintes sont liées à l'aide du signe +. Cela permet de faire disparaître le temps et l'action. Enfin, la formulation experte est introduite et décontextualise définitivement la propriété de la manipulation Cabri.

Résultats de la recherche

Introduction de Cabri

Nous supposons que la mise en œuvre du déplacement et de son contrôle allait permettre la prise en compte des unités figurales inférieures par les élèves. Nous savions que cette décomposition dimensionnelle des formes était difficile pour les élèves car à l'encontre de la perception naturelle. Il est apparu que dans l'environnement dynamique, la prise en compte des unités figurales inférieures est aussi difficile, cette procédure ne semble être utilisée que lorsque les élèves ne perçoivent pas d'autres procédures, éventuellement plus économiques.

Nous attendions des élèves qu'ils se construisent l'instrument déplacement, associé à une propriété et/ou à la relation de subordination. Il semble que les élèves ont associé au déplacement des situations d'illustration la transformation de l'objet géométrique considéré. Cela est visible dans les formulations des élèves où les élèves réinvestissent le signe « devient » introduit dans les premières fiches Cabri, par la suite supprimé de l'énoncé.

Enfin, les résumés des élèves utilisent fortement le contexte et une formulation temporelle. Cette utilisation du contexte dans la formulation du résumé permet d'organiser les constructions, déplacements et observations. Ainsi les élèves ont utilisé des connecteurs temporels et parfois réinvesti le ALORS dans l'explicitation des conclusions.

L'articulation des registres

Revenons sur les différents registres utilisés dans nos scénarios. Le registre graphique dynamique permet l'introduction du temps et de l'action, ainsi cela fragilise la relation d'association très présente au collège. Cependant la prise en compte des unités figurales inférieures reste difficile dans la mise en œuvre du déplacement, elle apparaît plus spécifiquement dans au cours des phases collectives. Le registre discursivo-graphique bien qu'appartenant à un environnement statique fait tout de même référence au dynamisme de Cabri. Ainsi, ce registre permet une prise en compte des unités figurales inférieures. De plus ce registre, pont entre les deux environnements, permet de supprimer progressivement l'action et le temps. Enfin, le registre discursif peut utiliser les signes SI et ALORS introduits dans le registre discursivo-graphique en référence aux constructions déplacements et observations tout en étant décontextualisé de la manipulation avec Cabri.

Le rôle de l'enseignant

Nous l'avons vu, l'enseignant est central dans les scénarios du point de vue du processus de médiation sémiotique par l'introduction des nouveaux signes et des formulations. L'enseignante qui a collaboré à cette ingénierie a une forte présence au sein de la classe, par son discours. Cela permet l'apparition d'un grand nombre de formulations variées. L'utilisation de ces formulations permettent de faire fonctionner l'instrument déplacement comme un outil de médiation sémiotique pour la relation de subordination. Le côté négatif de cette forte présence de l'enseignante est que les élèves ont eu peu d'occasion de formuler par eux-mêmes cette relation de subordination. Ainsi le Déplacement a certes été introduit par l'enseignant mais n'a pas été utilisé par les élèves, ainsi l'utilisation fonctionnelle du déplacement apparaît peu, ce qui entraîne des difficultés dans son intériorisation.

Perspectives

Comme nous venons de le montrer un enseignant très présent de permet l'introduction d'un grand nombre de signes, mais ne permet l'utilisation fonctionnelle de ces signes par les élèves. Il serait intéressant de reprendre certains scénarios de cette ingénierie et d'identifier si les élèves parviennent à intérioriser les déplacements lorsqu'ils ont la possibilité d'explicitier par eux même la relation de subordination.

Ensuite, on a vu que la prise en compte des unités figurales inférieures pour contrôler le déplacement est possible mais pas systématique. Ainsi, pour des manipulations qui font intervenir par exemple la mesure, il serait certainement judicieux de supprimer l'outil mesure, et de voir comment les élèves parviennent à déplacer les objets.

Ensuite, nous n'avons travaillé qu'avec des propriétés avec équivalence, cependant les équivalences amènent une difficulté supplémentaire, ainsi la relation de subordination peut être abordée dans un premier temps avec des propriétés sans équivalences.

Nous avons vu que le déplacement que nous avons utilisé est un déplacement « mou » qui s'oppose au déplacement usuel, le déplacement « dur ». Avec le recul que nous avons maintenant il nous semble que la mise en œuvre du déplacement « mou » prend tout son sens lorsque les élèves connaissent le déplacement « dur ». Il s'agit alors d'enrichir nos scénarios de situations où le déplacement dur intervient.

Pour conclure, il serait intéressant maintenant de poursuivre cette ingénierie par des observations des élèves dans des situations d'énoncé-tiers dans les classes supérieures. Ainsi nous pourrions évaluer la portée au long terme des scénarios que nous avons mis en place,

c'est-à-dire comment ces élèves parviennent-ils à mettre en œuvre les propriétés dans un raisonnement déductif plus complexe.

Bibliographie

Bellard N., Lewillion M. (2001), *Schémas pour la compréhension des théorèmes en classe de Quatrième*, In Barbin E.

Duval R., Giorgiutti I., Houdebine J., Laborde C. (Eds.) *Produire et lire des textes de démonstration*, (pp.129-142) Paris : Ellipses

Coutat S. (2006), *Intégration de la géométrie dynamique dans l'enseignement de la géométrie pour favoriser la liaison école primaire collège : une ingénierie didactique au collège sur la notion de propriété*, thèse doctorale de l'Université Joseph Fourier, Grenoble 1.

Duval R. (1993), Introduction à la démonstration et apprentissage du raisonnement déductif, *Repère IREM*, 12, 114-140.

Duval R. (1994), Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique, *Repères IREM*, 17, 121-138.

Duval R. (1995), *Sémiosis et pensée humaine: registre sémiotique et apprentissages intellectuels*, Berne : Peter Lang.

Duval R. (2005), Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements, *Annales de didactique des sciences cognitives*, 10, 5-53.

Houdement C., Kuzniak A. (2006), Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie, *Annales de didactiques des sciences cognitives*, 11, 175-193.

Rabardel P. (1995), *Les hommes et les technologies, une approche cognitive des instruments contemporains*, Paris : Armand Colin

Rabardel P. (1999), Eléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques, In M. Bailleul (Ed.) *Actes de la IXème Ecole d'été de didactique des mathématiques*, Houlgate (pp. 202-213).

Richard R.P. (2004a), *Raisonnement et stratégies de preuve dans l'enseignement des mathématiques*, Berne : Peter Lang.

Richard R.P. (2004b), L'inférence figurale : un pas de raisonnement discursivo-graphique, *Educational Studies in Mathematics*, 57(2), 229-263.

Trouche L. (2005), Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques : Nécessité d'orchestrations, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 25, 91- 138.

Vergnaud G. (1990), La théorie des champs conceptuels, *Recherche en didactique des mathématiques*, 10, 133-170.

Vygotsky L.S. (1934), *Pensée et langage*, Traduction française : F. Sève 1985, Paris : Messidor Edition Sociales.

Vygotsky, L.S. (1930), *La méthode instrumentale en psychologie*, In : B.Schneuwly et J.P.

Représentation sous forme d'arbre des expressions algébriques dans le logiciel Aplusix

Jana TRGALOVÁ

Laboratoire d'Informatique de Grenoble (LIG)

INRP

Résumé

Une expression algébrique peut être considérée de deux points de vue :

- comme un *programme de calcul* : elle indique la suite des calculs à effectuer pour obtenir le résultat du programme lorsque des valeurs sont attribuées aux lettres présentes dans l'expression (aspect procédural) ;
- comme un *objet* : la forme duquel peut être décrite et avec lequel des opérations, telles que simplification, factorisation, substitution dans une autre expression etc., peuvent être effectuées (aspect structural).

De nombreuses tâches en algèbre nécessitent la considération de l'aspect structural d'une expression, par exemple déterminer si deux expressions données sont équivalentes. Cependant, dans l'enseignement de l'algèbre au collège en France, il y a prédominance de l'aspect procédural. L'incompréhension ou la non prise en compte de la structure d'une expression algébrique se manifeste dans de nombreuses erreurs commises par les élèves dans la manipulation des expressions (non respect des priorités opératoires, difficulté à appliquer la distributivité...).

La représentation de l'expression algébrique sous forme d'un arbre permet d'en montrer la structure qui est donnée par l'opérateur dans la racine de l'arbre. Un module permettant la représentation des expressions algébriques sous forme d'arbres a été intégré au logiciel Aplusix dans le cadre du projet européen ReMath. Dans ce séminaire, nous présenterons le logiciel Aplusix avec son nouveau module et un scénario d'apprentissage qui a été conçu dans le but d'aider les élèves à comprendre la structure des expressions algébriques. Nous présenterons également les premiers résultats des expérimentations de ce scénario qui sont actuellement en cours.

Mots clefs

Aplusix, expression algébrique, aspect procédural, aspect structural, registre sémiotique de représentation, représentation usuelle, représentation sous forme d'arbre, représentation en langue naturelle

I Introduction

Cette recherche est menée dans le cadre du projet européen ReMath⁵ qui part du constat que les questions d'intégration des technologies éducatives sont traitées au niveau local et de ce fait restent liées à des contextes spécifiques. Un des objectifs du projet est de proposer un cadre théorique commun permettant de traiter les questions de l'enseignement et apprentissage avec des technologies au niveau européen. Le travail mené consiste en processus cycliques de (1) développement de six artefacts pour l'apprentissage des mathématiques, (2) élaboration de scénarios d'usage de ces artefacts et (3) expérimentations de ces scénarios dans des contextes réalistes de classes de mathématiques. S'appuyant sur l'un des résultats majeurs d'un projet commun antérieur, TELMA⁶, qui montre l'influence forte des cadres théoriques sur la conception des artefacts et des situations d'apprentissage construites autour de ces artefacts (Artigue & al., 2006, Cerulli & al., 2008), le projet ReMath se propose d'approfondir l'investigation du rôle des théories dans l'élaboration de scénarios d'apprentissage, leur implémentation et l'analyse des résultats.

Dans ce séminaire, nous présentons brièvement le logiciel Aplusix, l'un des six artefacts développés dans le cadre du projet. Dans un premier temps, le logiciel standard sera présenté (section 2.1), puis nous décrirons plus en détail la nouvelle représentation des expressions algébriques sous forme d'arbre qui a été conçue et implémentée pour le projet (section 2.2). Dans la section 3, nous explicitons les cadres théoriques sur lesquels nous nous sommes appuyés dans cette recherche. La section 4 est consacrée à la présentation d'un scénario d'apprentissage avec Aplusix-arbre et son expérimentation dans trois classes différentes. Cette section se terminera par l'esquisse de quelques résultats préliminaires. Enfin, dans la section 5, nous présenterons quelques conclusions et perspectives que ce travail ouvre.

II Présentation d'Aplusix

Aplusix⁷ est un micromonde et un exerciceur conçu pour favoriser l'apprentissage de l'algèbre. Il est développé dans l'équipe MeTAH du Laboratoire Informatique de Grenoble (LIG).

1. Le logiciel standard

Aplusix permet à l'élève de résoudre librement des exercices d'algèbre du type calculer, développer et réduire, factoriser et résoudre une équation, inéquation ou système d'équations, dans un des deux modes, entraînement ou test. Dans le mode d'entraînement, le logiciel fournit deux principaux types de rétroactions : il vérifie la justesse des calculs et la terminaison des exercices. Dans le mode de test, l'élève ne bénéficie d'aucune rétroaction et a un temps limité pour résoudre un certain nombre d'exercices. Deux autres modes existent dans Aplusix : auto-correction et observation. Dans le mode d'auto-correction, l'élève peut revoir un test passé et corriger les éventuelles erreurs grâce aux rétroactions. Le mode d'observation permet à l'élève, l'enseignant ou un chercheur de revoir le travail de l'élève action par action. Le logiciel a été conçu pour être intégré dans le travail régulier de la classe : il est proche de l'environnement papier-crayon, il utilise un éditeur d'expressions algébriques

5 ReMath (Representation in Mathematics with Digital Media), Project number IST4-26751, <http://remath.cti.gr/>

6 TELMA (Technology Enhanced Learning of Mathematics), Project number IST 507838, <http://telma.noe-kaleidoscope.org/>

7 <http://apluix.imag.fr>

très intuitif (en deux dimensions). Il contient environ 400 patrons d'exercices (Nicaud & al., 2003, Nicaud & al., 2004).

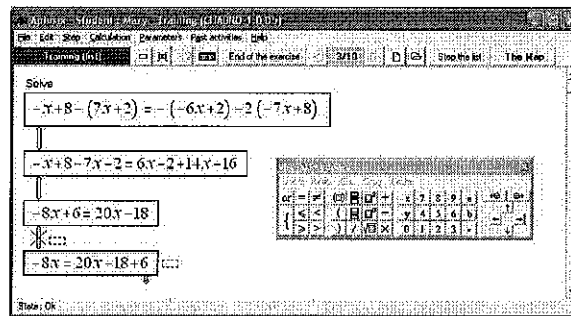


Figure 1. Copie d'écran d'Aplusix.

2. Représentation sous forme d'arbre dans Aplusix

Dans le cadre du projet ReMath, une nouvelle représentation d'expressions algébriques, sous forme d'arbres, a été conçue et implémentée dans le logiciel Aplusix existant. Les raisons pour cette nouvelle représentation des expressions sont nombreuses :

- Du point de vue épistémologique, les arbres sont des représentations naturelles des expressions algébriques.
- Du point de vue didactique, l'introduction d'un nouveau registre de représentation permettrait de concevoir des activités mettant en jeu le changement de registres, ce qui pourrait favoriser l'apprentissage des expressions algébriques, notamment de leur aspect structural (Duval 1995).
- Du point de vue informatique, les arbres sont des objets fondamentaux qui servent à définir la plupart des structures de données. En fait, les objets internes utilisés dans Aplusix pour représenter les expressions algébriques et leur propriétés visuelles sont des arbres (Bouhineau & al., 2007a, b).

Trois modes d'édition des arbres ont été implémentés dans le logiciel : modes libre, contrôlé et mixte. Dans le mode libre (Figure 2a), l'utilisateur a toute la liberté de créer et modifier un arbre.

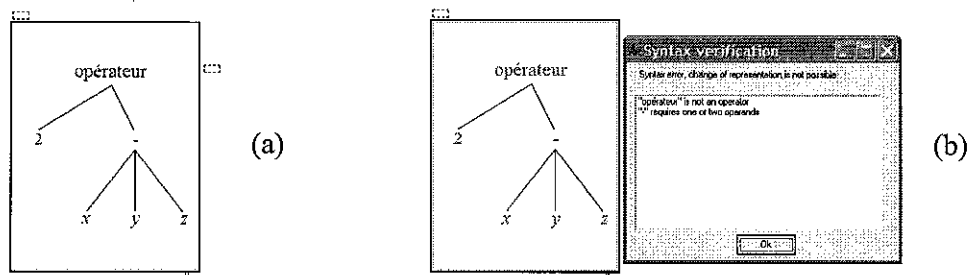


Figure 2. (a) Mode libre permettant d'éditer toute sorte d'arbres, même erronés. (b) Mode contrôlé : seuls les opérateurs connus peuvent être utilisés et le nombre d'arguments d'un opérateur doit être correct.

Dans le mode contrôlé, l'édition des arbres est contrainte par le système et l'utilisateur ne peut utiliser que des opérateurs connus par le logiciel et le nombre correct d'arguments (Figure 2b).

Le mode mixte est le mode contrôlé mais qui accepte des expressions algébriques en écriture usuelle dans les feuilles (Figure 3b).

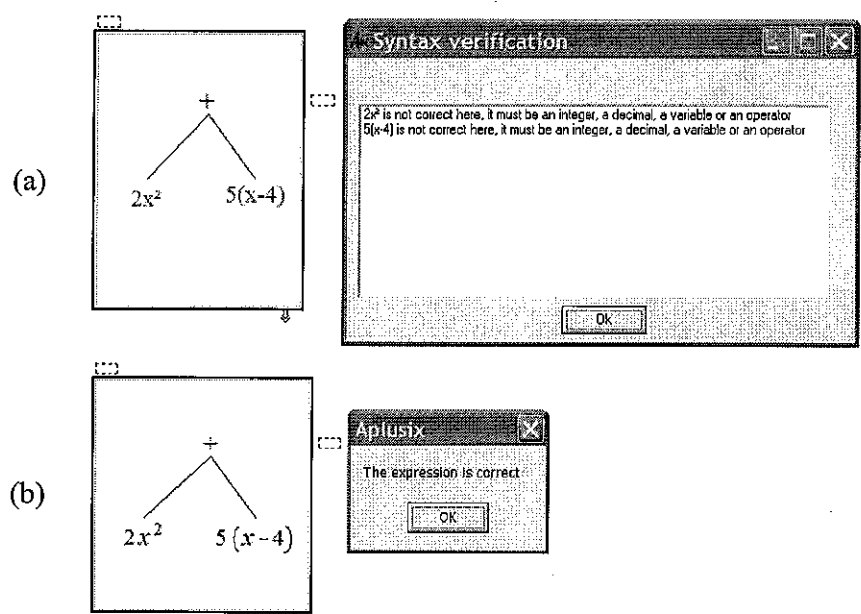


Figure 3. (a) Dans le mode libre ou contrôlé, les feuilles ne peuvent contenir que des nombres, des variables ou des opérateurs. (b) Dans le mode mixte, les feuilles peuvent contenir des expressions dans la forme usuelle.

L'utilisateur peut changer de représentation d'expressions algébriques à tout moment, avec le click droit de la souris (Figure 4).

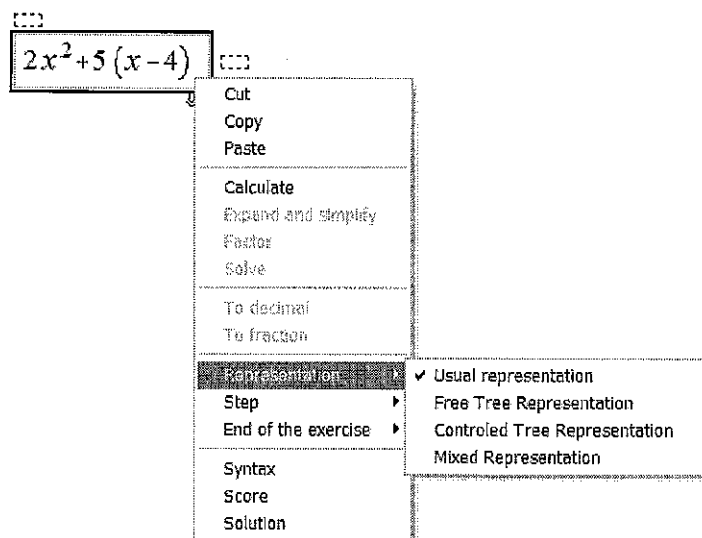


Figure 4. Changement de mode de représentation d'une expression algébrique grâce à l'item « Représentation ».

De plus, grâce à la fonctionnalité « Seconde vue », il peut afficher les représentations d'une même expression dans deux registres sémiotiques différents, par exemple usuel et arbre. Seule la représentation dans la fenêtre principale est modifiable. Toute modification faite dans cette fenêtre se répercute sur la représentation dans la fenêtre secondaire. Le *feedback* du logiciel concernant l'équivalence des expressions est apparent dans les deux fenêtres (Figure 5).

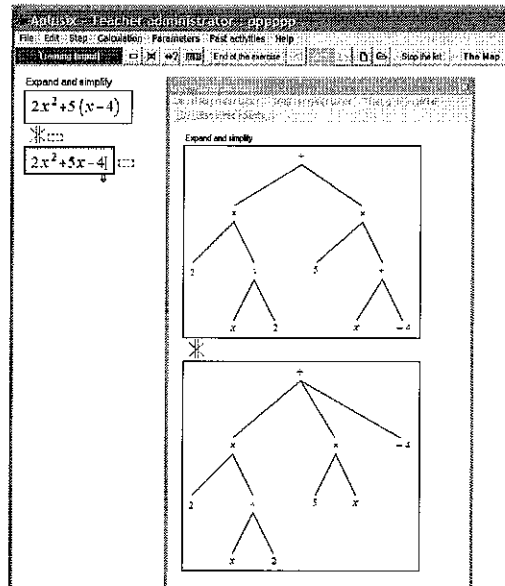


Figure 5. L'expression $2x^2+5(x-4)$ sous forme usuelle dans la fenêtre principale et la seconde vue de cette expression sous forme d'arbre.

III Cadres théoriques

1. Aspects objet / processus d'un concept mathématique

D'après Sfard (1991), les concepts mathématiques peuvent être considérés comme *objets* ou comme *processus*. Concevoir un concept comme objet, d'après l'auteur, suppose être capable de le considérer comme une « chose » réelle et la manipuler comme telle :

Seeing a mathematical entity as an object means being able of referring to it as if it was a real thing – a static structure, existing somewhere in space and time. It also means being able to recognize the idea at a glance and to manipulate it as a whole, without going into details (ibid., p.4).

Interpréter un concept comme un processus c'est le percevoir comme une séquence d'actions. C'est sa dynamique qui est considérée plutôt que sa forme. Ainsi, un concept mathématique peut-il apparaître comme « statique, instantané et intégral » lorsqu'il est considéré comme objet (dans son aspect structural), ou comme « opérationnel est dynamique, séquentiel et détaillé » lorsqu'il est considéré comme processus (dans son aspect procédural) (Bardini, 2003, p. 24).

En reprenant ce point de vue, une expression algébrique admet deux interprétations différentes :

- Au niveau procédural, elle renvoie à un processus de calcul. Par exemple, l'expression $5x-2$ désigne un processus opératoire « multiplier un nombre par 5, puis soustraire 2 » qui est applicable sur des valeurs numériques.
- Au niveau structural, elle réfère à un ensemble d'objets étudiés sur lesquels on peut réaliser des opérations relatives à ce nouvel ensemble. Ainsi, l'expression $5x-2$ désigne le nombre résultat du processus opératoire calculé à partir du nombre x . Elle désigne également la fonction de la variable x , qui à x associe $5x-2$.

Or il apparaît que dans les manuels du cycle central du collège, il y a très peu d'exercices où la réponse finale est une expression algébrique. La dernière question de nombreux exercices mène à un résultat numérique et l'expression algébrique n'apparaît que comme une étape intermédiaire qui n'a pas de fin propre. Ainsi, l'aspect procédural est prédominant.

Le nouveau projet du document d'accompagnement des programmes de mathématiques de collège⁸ témoigne d'une prise de conscience de cette situation : « *La prise en compte de l'aspect "structural" d'une expression dans l'enseignement est moins "visible" pour les élèves que l'aspect "procédural"* » (p. 5). Ce document propose des activités qui « *peuvent aider les élèves à faire la distinction entre ces deux aspects d'une expression algébrique* » (ibid.). L'une des activités consiste à décrire en langue naturelle une expression algébrique, ce qui « *conduit à la considérer sous son aspect "structural" : par exemple, énoncer que $(3x-1)(x^2+2)$ est le produit d'une différence et d'une somme, différence du produit de 3 et de x et 1 et somme du carré de x et de 2 [...]. Le premier nom de la phrase ainsi construite donne la forme de l'expression [...]. Inversement, l'explicitation orale de la suite des opérations à effectuer pour exécuter le calcul met en évidence l'aspect "procédural" de l'expression.* ». Une autre activité suggère l'usage d'un arbre : « *la réalisation de l'arbre s'appuie sur les priorités opératoires et l'ordre des calculs à effectuer (aspect "procédural"), mais l'assembleur de plus haut niveau donne la forme de l'expression (aspect "structural")* » (ibid.).

Ce constat nous a amenées à envisager comme objectif du scénario pédagogique d'aider les élèves à comprendre la structure d'une expression algébrique en introduisant le registre arbre et en le faisant interagir avec les registres langue naturelle et représentation usuelle.

2. Registres sémiotiques de représentation de concepts mathématiques

Il est indéniable que la représentation sémiotique est d'une importance capitale pour toute activité mathématique puisque les concepts mathématiques ne sont accessibles qu'à travers leurs représentations. Duval (1995) appelle *registre de représentation* tout système sémiotique qui permet d'accomplir les trois types d'activités cognitives inhérentes, d'après lui, à toute représentation :

(...) constituer une trace ou un assemblage de traces perceptibles qui soient identifiables comme une représentation de quelque chose dans un système déterminé. Ensuite, transformer les représentations par les seules règles propres au système de façon à obtenir d'autres représentations pouvant constituer un apport de connaissance par rapport aux représentations initiales. Enfin, convertir les représentations produites dans un système de représentation en un autre système, de telle façon que ces dernières permettent d'explicitier d'autres significations relatives à ce qui est représenté (p. 21).

⁸ *Du numérique au littéral*. Collège, mathématiques. Projet de document d'accompagnement. Direction de l'enseignement scolaire, bureau du contenu des enseignements, Avril 2006.

Ces activités, à savoir formation, traitement et conversion, correspondent à des processus cognitifs différents et constituent des sources de nombreuses difficultés dans l'apprentissage des mathématiques. Selon Duval (2006), si le traitement est plus important du point de vue des mathématiques, la conversion est décisive pour l'apprentissage. Ainsi, la conceptualisation des notions mathématiques nécessite la manipulation de plusieurs registres pour une même notion mathématique permettant ainsi de la détacher de ses représentations : en effet, d'après Duval (1993), la conceptualisation « *repose sur la coordination d'au moins deux registres de représentation, et cette coordination se manifeste par la rapidité et la spontanéité de l'activité cognitive de conversion* ».

L'enseignement privilégie l'apprentissage des règles concernant la formation des représentations sémiotiques et celles concernant leur traitement. La place faite à la conversion des représentations d'un registre à un autre est minime, bien que la conversion des représentations sémiotiques constitue l'activité cognitive la plus difficile à acquérir chez l'élève.

Pour notre expérimentation décrite dans la section suivante, nous avons donc choisi trois registres sémiotiques pour la représentation des expressions algébriques : registre de la langue naturelle, registre usuel et registre de représentation en arbre. Le scénario d'apprentissage que nous avons conçu propose des activités de formation, de traitement et de conversion permettant d'articuler ces trois registres.

IV Expérimentation

Précisons tout d'abord que, l'expérimentation s'inscrivant dans le cadre du projet ReMath qui a pour but le développement d'artefacts pour l'apprentissage de l'algèbre et l'expérimentation de scénarios d'usage de ces artefacts dans des classes, l'*objectif de recherche*, partagé avec les autres partenaires du projet, a été d'*étudier les effets des représentations disponibles dans l'artefact sur les apprentissages des élèves*.

D'autre part, nous avons décidé de travailler au niveau de Troisième et de Seconde. Les élèves sont à ce moment familiarisés avec des expressions algébriques qu'ils ont eu l'occasion de manipuler dans le registre usuel en cours de mathématiques. Cependant, plusieurs travaux de recherche ont mis en évidence des difficultés que les élèves rencontrent dans le traitement des expressions, et celles-ci ne sont pas rares en Seconde. Pour cette raison, nous avons choisi de concevoir des activités de remédiation à des difficultés qui sont liées à la non prise en compte de l'aspect structural des expressions algébriques. Nous avons donc adopté comme *objectif d'apprentissage*, défini en adéquation avec les considérations théoriques présentées plus haut, d'*aider les élèves à comprendre la structure d'une expression algébrique en introduisant le registre arbre et en le faisant interagir avec les registres langue naturelle et représentation usuelle*.

1. Scénario d'apprentissage

Le point de départ de la conception du scénario est l'hypothèse suivante : l'introduction du registre arbre et son articulation avec les registres de langue naturelle et de représentation usuelle aura un impact positif sur la maîtrise du registre de représentation usuelle des expressions algébriques. Le scénario que nous avons conçu est composé de 4 unités (cf. Figure 6) : pré-test, apprentissage, évaluation de l'apprentissage et post-test.

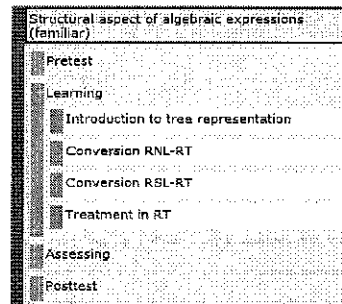


Figure 6. Structure du scénario d'apprentissage « Aspect structural des expressions algébriques »⁹.

Pré-test

Avant d'introduire le nouveau registre de représentation des expressions algébriques, nous avons décidé de faire passer aux élèves un pré-test afin de diagnostiquer leurs difficultés en algèbre, en particulier celles liées à l'aspect structural des expressions algébriques. D'autre part, les résultats obtenus au pré-test comparés à ceux obtenus au post-test devraient nous fournir des éléments permettant d'évaluer l'efficacité du scénario d'apprentissage ; c'est donc pour nous également un outil de chercheur. Les activités proposées au pré-test sont :

- D'une part des exercices classiques de l'algèbre scolaire (calcul numérique, développement et réduction d'expressions littérales et factorisation), donc des activités de traitement dans le registre usuel (RU). Ces activités seront proposées dans l'environnement d'Aplusix standard, en mode de test.
- D'autre part des jeux de communication entre les élèves où ils doivent d'abord décrire en langue naturelle une expression donnée dans le registre usuel. Le message est transmis à un autre élève qui doit le décoder dans le registre usuel. La réponse sera validée par comparaison de l'expression reconstruite avec celle donnée au départ. Il s'agit ici donc des activités de conversion entre le registre de langue naturelle (RLN) et le registre usuel. Ces activités seront proposées dans l'environnement habituel papier/crayon car le logiciel Aplusix ne permet pas d'évaluer les réponses données dans le registre de langue naturelle.

Nous avons mentionné plus haut que dans l'apprentissage de l'algèbre au collège, l'aspect procédural des expressions algébriques est prédominant. Nous nous attendons donc à voir apparaître, chez les élèves, des erreurs traduisant la difficulté à identifier la forme d'une expression ou à la considérer comme un objet sur lequel on peut effectuer des manipulations (aspect structural).

Apprentissage

Cette séquence a pour objectif l'introduction du nouveau registre de représentation des expressions, numériques et littérales, le registre arbre (RA) et son articulation avec les

⁹ Un éditeur spécifique de scénarios a été conçu et implémenté sur une plate-forme pour les besoins du projet.

Le scénario présenté dans cet article peut être consulté en ligne à l'adresse :

<http://remath.itd.cnr.it/scenario.php?cmd=view&f=hipp10-familiar02-f539.xml>

registres usuel et de langue naturelle. Le registre arbre sera introduit en utilisant le logiciel Aplusix en vidéoprojection à la classe entière. C'est en particulier le mode mixte d'édition d'arbres qui permettra de travailler les règles de formation de représentations des expressions dans ce nouveau registre. Seront ensuite proposées des activités de conversion entre ce registre et les deux registres « anciens », RLN et RU. La quasi-totalité de ces activités sont proposées dans l'environnement Aplusix, en mode d'entraînement. En début de l'apprentissage, les élèves seront soutenus par les contraintes du mode contrôlé d'édition des arbres, puis ils travailleront sans contrainte dans le mode libre, bénéficiant toutefois des rétroactions du logiciel quant à l'équivalence des expressions. Des tâches simples de traitement dans le registre arbre (calcul numérique, réduction) seront enfin proposées afin d'évaluer l'appropriation de ce registre par les élèves.

Evaluation

La partie que nous avons nommée « évaluation » a pour but d'évaluer dans quelle mesure le registre arbre et les tâches de conversion entre ce registre et les registres usuel et de langue naturelle sont maîtrisés par les élèves après la séquence « apprentissage ». Cette évaluation est proposée sous forme de jeux de communication entre élèves similaire à ceux du pré-test, mais cette fois, le registre arbre intervient dans les tâches. De plus, cette activité commence par une tâche de formation dans RA : c'est l'élève qui crée un arbre représentant une expression algébrique, il le traduit en RLN (resp. RU) et transmet le message à un autre élève qui décode le message et reconstitue la représentation en arbre (resp. en représentation usuelle).

Post-test

Dans le post-test nous proposons les mêmes types d'activités que dans le pré-test afin de pouvoir comparer les résultats obtenus aux deux tests. La confrontation des résultats à ces deux tests devrait nous apporter des éléments de réponse à notre hypothèse mentionnée plus haut.

Le tableau 1 ci-dessous présente l'organisation du scénario d'apprentissage de manière synthétique :

	Activités	Description	Environnement	Durée
Pre-test	Traitement dans RU	Calculer Développer et réduire Factoriser	Aplusix	50 min
	Conversion RLN $\leftrightarrow$ RU	Jeux de communication	Papier-crayon	30 min
Apprentissage	Introduction de RA	Scénario d'introduction du RA	Aplusix en vidéoprojection	55 min
	Conversion RLN $\leftrightarrow$ RA	Conversion RLN $\rightarrow$ RA Conversion RA $\rightarrow$ RLN	Aplusix : arbre contrôlé, puis libre Papier/crayon	90 min
	Conversion RU $\leftrightarrow$ RA	Conversion RU $\rightarrow$ RA Conversion $\rightarrow$ RU	Aplusix : arbre contrôlé, puis libre	80 min
	Traitement RA	Calcul numérique dans RA Réduction dans RA	Aplusix avec seconde vue	20 min
Evaluation	Formation RA Conversion RA $\leftrightarrow$ RLN	Jeux de communication	Aplusix: arbre libre Papier/crayon	55 min
	Conversion RA $\leftrightarrow$ RU	Jeux de communication	Aplusix: arbre libre ou papier/crayon	
Post-test	Traitement dans RU	Calculer Développer et réduire Factoriser	Aplusix	30 min
	Conversion RLN $\leftrightarrow$ RU	Jeux de communication	Papier/crayon	20 min

Tableau 1. Structure du scénario pédagogique.

1. Expérimentations

Le scénario présenté dans la section précédente a été proposé à trois enseignants pour l'expérimenter dans leurs classes. Il s'agissait d'une classe de 3^e et de deux classes de 2nde. Le scénario leur a été présenté sous forme d'un tableau similaire à celui ci-dessus, accompagné de l'ensemble des activités. Les enseignants ont eu la possibilité de nous demander d'apporter des modifications au scénario proposé afin de l'adapter aux contraintes de leurs classes.

L'enseignant d'une classe de 2nde, que nous désignerons par la suite Ens1, a mis en place l'expérimentation (Exp1) aux mois d'octobre et novembre 2007. Il a demandé de raccourcir le scénario de 6 séances initialement prévues à trois séances maximum, pour des raisons institutionnelles. Ainsi, une version courte du scénario a été élaborée qui présente les modifications suivantes par rapport au scénario initial :

- Les tâches de conversion $RLN \rightarrow RA$ et $RU \rightarrow RA$ ont été proposées en mode contrôlé uniquement ;
- Les tâches de conversion $RA \rightarrow RLN$ ont été données en devoir à la maison ;
- Les tâches de traitement dans RA restaient optionnelles. Elles pouvaient être proposées en aide individualisée avec élèves en difficultés.

Le scénario court a été ensuite choisi également par l'enseignant de 3^e (Exp3) qui l'a mis en place aux mois de novembre et décembre 2007. Seul l'autre enseignant de la classe de 2nde (Ens2) a mis en place le scénario initial complet dans la même période.

Les contraintes des classes et les conditions matérielles différentes ont donné lieu à des mises en œuvre différentes.

Dans Exp1, la version courte du scénario a été mise en place. L'enseignant alternait les séances en classe entière (tests, introduction du RA) avec des séances en demi-classe en salle informatique pendant lesquels les élèves travaillaient seuls avec l'ordinateur. Par ailleurs, cet enseignant ne se sentant pas à l'aise avec le nouveau module d'Aplusix, il a préféré faire appel à un des concepteurs du scénario pour animer la séance d'introduction du registre arbre.

Exp2 se déroulait selon le scénario prévu et toutes les séances ont été assurées par l'enseignant de la classe.

Enfin toutes les séances de l'Exp3 ont eu lieu en classe entière en salle informatique, comme la classe de 3^e ne bénéficie pas d'heures de module en demi-classe. Pour des raisons matérielles, 2 élèves travaillaient sur un même poste. Pour cette raison, le pré-test et le post-test devaient se faire en papier-crayon. Comme pour Exp2, toutes les séances ont été assurées par l'enseignant de la classe. La version courte du scénario a été implémentée, comme dans Exp1.

1. Premiers résultats

Globalement, les élèves de la classe de 2nde où Exp2 a été réalisée sont d'un bon niveau et peu de difficultés ont été observées lors du pré-test. Pour cette raison, nous limiterons la présentation des résultats aux expérimentations Exp1 et Exp3.

Pré-test

Les résultats dans les exercices de traitement des expressions algébriques ont confirmé nos hypothèses sur les difficultés des élèves dans le registre usuel. En classe de 2nde (Exp1), dans les exercices d'algèbre effectués avec Aplusix, nous avons observé chez de nombreux élèves des erreurs de manipulation des puissances et du signe « moins », par exemple :

$$3(-5)^2 \rightarrow -3 \times 5^2 ; 3(-5)^2 \rightarrow \pm 3^2 \times 5^2 ; -5^2 + 7^2 \rightarrow 25 + 49.$$

En classe de 3^e (Exp3), en plus de ce type d'erreurs, d'autres erreurs de manipulation des puissances et du signe « moins » ont été observées, par exemple : $3(-5)^2 \rightarrow 3 \pm 25 ;$

$$(-3x)^2 \rightarrow \pm 3^2x ; (3x)^2 \rightarrow 3x^2.$$

Chez quelques élèves nous avons observé des erreurs au niveau des priorités des opérations :

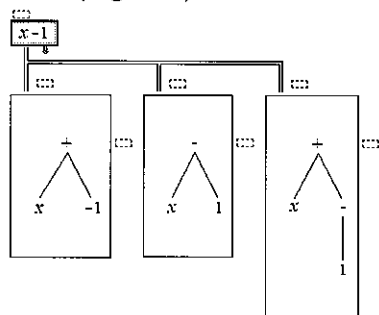
$$2+5*9 \rightarrow 7*9 ; 2+3x \rightarrow 5x.$$

En revanche, les jeux de communication ont posé très peu de difficultés aux élèves des deux classes (Exp1 & 3). Ce résultat nous a surpris, en effet les expressions proposées étant relativement complexes, nous nous attendions à de nombreuses erreurs dans la conversion vers la langue naturelle liées notamment à l'omission des parenthèses. Ce type d'erreur a en effet été observé mais dans une moindre mesure que prévu, par exemple l'expression $a-(x+2)$ est devenue $a-x+2$ à partir du message : « *a moins x plus 2* ». Dans le cas d'expressions plus complexes, même si les élèves n'ont pas véritablement considéré la structure des expressions pour effectuer les conversions, ils ont réussi cet exercice grâce aux stratégies de lecture « proche » de l'écriture algébrique usuelle des expressions. Ainsi par exemple, l'expression $\frac{(3x+2)(3x-1)}{a-(x+2)}$ a été lue de la manière suivante : « ouvrir la parenthèse, 3 x plus 2, fermer la parenthèse, ouvrir la parenthèse, 3 x moins 1, le tout sur a moins, ouvrir la parenthèse, x plus 2, fermer la parenthèse ». Ces messages relèvent de ce qu'on peut appeler le registre oral et ils font ressortir l'aspect procédural plutôt que l'aspect structural. Malgré les ambiguïtés que peuvent contenir ces messages, la majorité de binômes ont réussi la tâche et ceci grâce aux codes implicites du registre oral que les élèves comprennent, par exemple dans la lecture de l'expression $a-(x+2)$, certains élèves ont marqué une pause là où il y a la parenthèse ouvrante : « *a moins [pause] x plus 2* ».

L'objectif que nous avons assigné à ces jeux de communication, à savoir amener les élèves à prendre conscience de l'insuffisance du registre oral auquel ils recourent en algèbre et qui ne prend pas en compte l'aspect structural des expressions algébriques, n'a donc pas été atteint.

Apprentissage

Comme nous l'avons dit, l'enseignant Ens1 a souhaité que la séance d'introduction du registre arbre soit animée par un des concepteurs du scénario. La séance s'est déroulée comme prévu dans le scénario d'usage (cf. annexe). Elle a permis de mettre en évidence les spécificités de la représentation sous forme d'arbre et d'introduire le vocabulaire lié à ce nouveau registre. Une attention particulière a été mise sur la lecture des expressions selon l'aspect structural, par exemple l'expression $x+2y$ a été lue comme « *la somme de x et du produit de 2 par y* ». De plus, la particularité du registre arbre résidant dans le fait que plusieurs arbres peuvent représenter une même expression algébrique a été discutée à partir de l'exemple suivant (Figure 7):



Dans l'expression $x-1$, le signe « moins » peut être interprété de trois façons différentes qui mènent à trois arbres différents (différence peu visible dans RU) :

- Signe d'un nombre relatif (arbre de gauche) ;
- Signe de l'opération « différence » qui est un opérateur binaire (arbre du milieu) ;
- Opérateur « opposé d'un nombre » qui est un opérateur unaire (arbre de droite).

Figure 7. Multiplicité d'arbres représentant une même expression algébrique.

Comme nous l'avons mentionné, le déroulement de la suite du scénario a été raccourci afin de respecter la progression commune aux classes de seconde de l'établissement de l'enseignant Ens1. L'enseignant a pris la décision de différencier la mise en œuvre du scénario selon les élèves de la manière décrite plus haut. De plus, seulement un groupe d'élèves, que nous appellerons G1 et qui a été constitué d'élèves estimés en difficultés par l'enseignant, a bénéficié du travail sur les tâches de conversion $RLN \rightarrow RA$ et $RU \rightarrow RA$ en mode contrôlé.

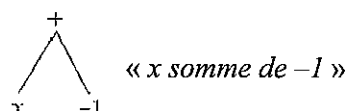
Les résultats des tâches de conversion $RA \rightarrow RLN$ qui ont été proposées en devoir à la maison ont montré une différence significative entre les deux groupes (cf. tableau 2). Ces résultats attestent de l'efficacité du travail sur les tâches de conversion $RLN \rightarrow RA$ et $RU \rightarrow RA$.

	RLN avec aspect « structural »	RLN avec aspect « procédural » (oral)
G1 (15 élèves) Ont travaillé sur les tâches de conversion avec Aplusix, en mode contrôlé	10	5
G2 (15 élèves)	3	12

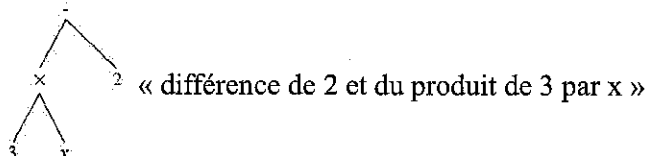
Tableau 2. Résultats obtenus dans les tâches de conversion $RA \rightarrow RLN$ en devoir à la maison.

En ce qui concerne l'Exp3, nous ne disposons malheureusement d'aucune information sur le déroulement de la séance d'introduction du RA par l'enseignant. Pour des raisons d'éloignement géographique de l'établissement où l'expérimentation a eu lieu, nous n'étions pas en mesure de mettre en place un dispositif permettant de recueillir des traces exploitables. L'analyse des réponses des élèves aux exercices de conversion $RA \rightarrow RLN$ témoignent néanmoins d'une appropriation insuffisante de ce nouveau registre. De nombreux élèves ont mis en place des stratégies de conversion erronées suivantes qui montrent leurs difficultés à repérer la structure de l'expression représentée par un arbre :

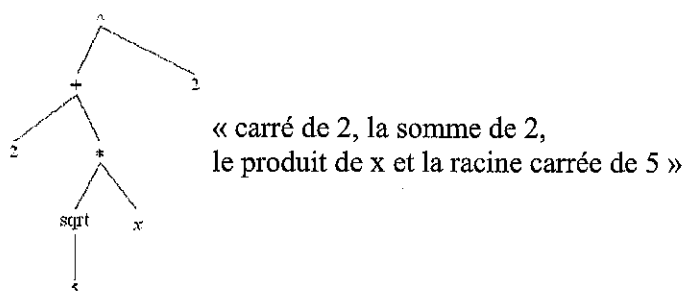
- lecture « linéaire » de gauche à droite : ex.



- début par la branche la plus simple : ex.



- juxtaposition des branches : ex.



Dans le cas de cette classe, nous ne pouvons donc que faire le constat d'échec de la séquence proposée et poursuivre nos analyses afin d'en comprendre les raisons.

V Conclusion et perspectives

La recherche que nous venons de présenter aborde deux questions principales : celle de la conception d'artefacts technologiques pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques et celle de l'impact des représentations de notions mathématiques sur les apprentissages des élèves.

En ce qui concerne la question de la conception de logiciels éducatifs, l'exemple du développement d'Aplusix présenté dans ce texte montre que l'introduction du nouveau registre arbre a été motivée par des considérations didactiques sur la nécessité de disposer de plusieurs registres de représentation pour une même notion mathématique. Les considérations de plusieurs dimensions ont eu un impact sur le développement et l'implémentation de ce nouveau registre :

- La prise en compte de la *dimension didactique* a mené à faire des choix au niveau du développement du nouveau registre permettant de faire vivre dans l'environnement les trois types d'activités liées aux registres, formation, traitement et conversion, en s'appuyant sur le cadre théorique de registres sémiotiques de représentation.
- La prise en compte de la *dimension usage* a permis quelques adaptations et améliorations au niveau de l'interface du logiciel suite aux retours des usagers. Par exemple, initialement la « seconde vue » s'affichait uniquement pour le pas courant. Lors des observations d'une des expérimentations, nous nous sommes rendu compte que lorsque l'élève passe à l'étape suivante, la seconde vue est réactualisée et l'élève ne voit pas dans cette seconde vue la transformation qu'il vient d'effectuer. Ainsi, la visualisation de la seconde vue a été repensée pour permettre l'affichage de deux étapes, courante et précédente (cf. figure 5).
- La prise en compte de la *dimension informatique* garantit la cohérence du logiciel suite à l'introduction d'un nouveau module par le respect des principes fondamentaux qui guident le développement du logiciel (pour plus de détails sur le développement du logiciel, voir Trgalová & Chaachoua, 2008).

Cet exemple illustre comment la synergie entre informaticiens, didacticiens et usagers est mise au service d'un projet de conception d'un logiciel éducatif.

Concernant la seconde question sur l'impact des représentations des objets mathématiques sur les apprentissages, l'expérience de l'une des classes (Exp1) tend à montrer un apport bénéfique du registre arbre sur la conceptualisation de la structure des expressions algébriques. Nous devons toutefois être prudents avant de proposer une conclusion tranchée, notamment au vu de l'échec constaté dans l'Exp3. Les analyses plus fines des résultats obtenus sont nécessaires pour trouver des raisons permettant d'expliquer l'échec constaté et plus généralement pour évaluer l'impact du RA sur les apprentissages des élèves. Par ailleurs, d'autres expérimentations avec Aplusix-arbre sont en cours dans le cadre du projet ReMath. Elles sont menées par des équipes italiennes dans des contextes très différents. Ce n'est qu'après avoir analysé les résultats de ces expérimentations que nous serons en mesure d'apporter des éléments de réponse plus précis à cette question. Cette question reste donc pour le moment ouverte.

Nous souhaitons revenir ici sur deux autres points. L'un concerne le rôle des cadres théoriques choisis dans la conception de scénarios pédagogiques, problématique abordée par l'équipe TELMA à l'échelle européenne. Notre recherche montre clairement que les choix des situations et des activités proposés dans le scénario pédagogique s'appuient sur le cadre théorique de référence, celui des registres sémiotiques de représentation d'objets mathématiques. Plus particulièrement, deux hypothèses de travail ont été adoptées pour la conception des activités : (1) la nécessité, pour la conceptualisation d'un objet mathématique, d'un travail dans au moins deux registres de représentation différents, et (2) l'importance de tâches de conversion entre les différents registres. Ainsi, le scénario que nous avons conçu s'articulait autour de tâches de conversion entre trois registres de représentation des expressions algébriques : langue naturelle, représentation usuelle et arbre. Il est légitime de se demander quel scénario et quels types d'activités nous aurions proposés si nous avions choisi un autre cadre théorique. Par exemple, le choix de la théorie anthropologique du didactique

(Chevallard, 1992) nous aurait certainement amenés à envisager des types de tâches possibles avec le registre arbre, peut-être différents de ceux proposés dans le scénario présenté, à rechercher des techniques associées, à proposer des organisations didactiques particulières... Ces considérations confirment les résultats des recherches menées par le groupe TELMA sur l'impact des choix de références théoriques dans la conception de ressources pédagogiques (Artigue & al., 2006, Cerulli & al., 2008).

Une autre question concerne l'usage du scénario par les enseignants (rappelons que les enseignants n'ont pas participé à la conception du scénario, mais ont eu la possibilité de demander des modifications afin de l'adapter au contexte de leurs classes et aux contraintes institutionnelles de leurs établissements). Il est possible que les résultats observés dans l'expérimentation Exp3 sont dus en partie à l'appropriation du scénario par l'enseignant concerné. En effet, la représentation des expressions algébriques sous forme d'arbre n'est pas un objet institutionnel puisqu'elle ne figure pas dans les programmes scolaires actuels. Le scénario proposait donc des activités « en plus » qui semblaient « peser » sur le temps didactique de l'enseignant plutôt qu'apporter des solutions de remédiation aux erreurs des élèves. En effet, dès les premières activités suivant la séance d'introduction du registre arbre, il a été évident que celui-ci n'avait pas été maîtrisé par la plupart des élèves. Malgré ce fait, l'enseignant, voulant remplir son « contrat expérimental », a poursuivi les activités du scénario sans se préoccuper des difficultés de ses élèves avec ce nouveau registre dont ils n'auront plus besoin.

VI Bibliographie

Artigue, M., Bottino, R.M., Cazes, C., Cerulli, M., Chaachoua, H., Georget, J. P., Kynigos, C., Mariotti, Markopoulos, C., M.A., Morgan, C., Trgalová, J., & Vandebrout, F. (2006). *A report on the comparison of theories in technology enhanced learning in mathematics*. Final Report D20.4.2, Contract N° IST 507838.

Bardini, C. (2003), *Le rapport au symbolisme algébrique : une approche didactique et épistémologique*. Thèse de doctorat de l'Université Paris 7.

Bouhineau D., Chaachoua H., Viudez C. & Nicaud J.-F. (2007a), Introduction de nouvelles représentations dans le micromonde Aplusix : représentations sous forme mixte naturelle & arbre et sous forme graphique d'expressions algébriques, *Actes de la conférence EIAH2007*, Lausanne, 27-29 juin 2007.

Bouhineau D., Chaachoua H., Nicaud J.-F. & Viudez C. (2007b), Adding new Representations of Mathematical Objects to Aplusix. In *Proceedings of the 8th International Conference on Technology in Mathematics Teaching*, Hradec Králové, Czech Republic, 1-4 July 2007.

Cerulli, M., Trgalová, J., Maracci, M., Psycharis, G., Georget J.-P. (2008), Comparing theoretical frameworks enacted in experimental research: TELMA experience. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 40(2), 201-214.

Chevallard, Y. (1992), Concepts fondamentaux de la didactique. Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherche en didactique des Mathématiques* 12(1), 73-112.

Du numérique au littéral. Projet du document d'accompagnement des programmes du collège, Mathématiques, 5 avril 2006.

Duval, R. (1993), Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 5, IREM de Strasbourg.

Duval, R. (1995), *Sémiosis et pensée humaine*. Ginevra: Peter Lang.

Duval, R. (2006), A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics* 61(1-2), 103-131.

Nicaud, J.-F., Bouhineau, D., Chaachoua, H., Huguet, T. & Bronner A. (2003), A computer program for the learning of algebra: description and first experiment. In *Proceedings of the PEG 2003 conference*, St. Petersburg, Russia, June 2003.

Nicaud, J.-F., Bouhineau, D. and Chaachoua, H. (2004). Mixing Microworld and CAS Features in Building Computer Systems that Help Students Learn Algebra. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 9 (2), 169-211.

Sfard, A. (1991). On the dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin, *Educational Studies in Mathematics* 22(1), 1-36.

Trgalová, J. & Chaachoua, H. (2008), *Development of Aplusix software*. 11th International Congress on Mathematics Education, Monterrey (Mexico), July 6 -13, 2008.

Dans des environnements TICE, quelles pratiques d'enseignants pour quelles activités d'élèves ?

Maha Abboud-Blanchard

Equipe DIDIREM

IUFM du Nord-Pas de Calais, Université d'Artois

et Monique Chappet-Paries

Equipe DIDIREM

IUFM de Versailles, Université de Cergy-Pontoise

Résumé

Les recherches concernant les technologies de l'information et de la communication dans l'enseignement (TICE) ont porté, depuis quelques décennies, en priorité, sur les apprentissages des élèves et sur les potentialités et limites de ces technologies. Depuis quelques années, on assiste à une prise en compte croissante de la "dimension enseignant" pour mieux comprendre ce qui se joue du côté des apprentissages des élèves dans les environnements TICE. Les travaux qui se développent à ce sujet se nourrissent des cadres théoriques et des méthodologies développées et mises en œuvre dans les environnements traditionnels non TICE. Pour notre part, nous nous plaçons dans le cadre de la théorie de la double approche didactique et ergonomique en reprenant essentiellement les outils d'analyse développés dans ce cadre.

Nous proposons dans cette communication d'étudier de façon fine les pratiques d'enseignants dans une séance TICE. Nous étudions plus précisément le déroulement de cette séance en prenant en compte divers aspects parmi lesquels les tâches proposées aux élèves et les activités provoquées. Nous compléterons cette étude par l'analyse du discours de l'enseignant au cours de certaines interactions ce qui nous permettra d'approcher de plus près des effets possibles sur les apprentissages des élèves. La comparaison avec l'étude d'une séance en environnement classique, non TICE, nous aide à mieux cerner des caractéristiques de ces pratiques.

Mots clefs

TICE - Pratiques des enseignants - Discours et aides de l'enseignant- Analyse des tâches- Activités des élèves

I Introduction

La recherche présentée dans cet article vise à étudier les pratiques d'enseignants "ordinaires"¹⁰ dans un environnement TICE¹¹, notamment pendant les interactions enseignant-élèves, afin d'approcher leur influence sur les activités possibles des élèves. En effet, de plus en plus de chercheurs s'intéressent depuis quelques années à l'étude de l'enseignant utilisant des outils technologiques (Ruthven, 2006), (Artigue *et al.*, 2007) mais souvent leurs recherches rapportent sur des enseignants engagés dans des projets d'innovations ou sur des enseignants "experts des TICE". Pour notre part, nous souhaitons explorer le travail de l'enseignant ordinaire utilisant un logiciel dans sa classe à sa propre initiative. Certaines recherches ont déjà relevé quelques questionnements, parfois sous forme d'observations faites au cours des

10 Non spécialistes des TICE

11 TICE : Technologies de l'information et de la communication dans l'enseignement

analyses, ou avancé des résultats qui représentent des pistes que nous souhaitons étudier d'une façon plus fine. Nous citons ici, à titre d'exemple, deux recherches qui ont étudié des pratiques d'enseignants ordinaires utilisant des outils informatiques dans leurs classes, en considérant ces pratiques dans leur globalité et leur complexité. La première est celle de Monaghan (2004) qui souligne dans ses résultats concernant les interactions sociales dans la classe que l'enseignant en séance TICE passe plus de temps à s'adresser à des petits groupes (quelques élèves autour d'un ordinateur) qu'à la classe, de façon collective. Il relève également le fait que dans ces environnements, l'enseignant a plus qu'en environnement papier/crayon une activité d'accompagnement des élèves dans l'exécution des tâches prescrites. La deuxième recherche est celle menée par Kendal & Stacey (2002) qui avancent dans leur conclusion le fait que les connaissances mathématiques mises en œuvre pendant les séances TICE restent globalement dans la gamme de celles mobilisables dans des séances papier/crayon. Elles ajoutent que l'apport essentiel de l'outil informatique, du moins tel que le ressent l'enseignant, concerne surtout des connaissances relatives à l'utilisation de cet outil. Dans notre travail, en plus de l'exploration fine de ces pistes, nous cherchons à repérer des spécificités éventuelles de pratiques d'enseignants dans le choix des exercices et l'accompagnement des élèves.

Nous commençons par présenter notre cadre théorique et nos outils méthodologiques que nous faisons ensuite fonctionner dans l'étude¹² de deux séances de géométrie dans l'espace, en classe de troisième dont l'une d'elles utilise un logiciel de géométrie dynamique. Dans cette étude nous relevons, d'une part, les spécificités éventuelles de chaque séance et d'autre part, nous recherchons des invariants et des éléments différenciateurs en analysant les tâches prévues, les activités des élèves et le discours de l'enseignant.

II Cadre théorique et méthodologie

Nous nous plaçons dans le cadre théorique de la "double approche", développé par A. Robert et J. Rogalski (2002) dont l'objectif est de contribuer à l'analyse et à la compréhension des pratiques des enseignants, tant du point de vue de ce qu'elles provoquent en termes d'apprentissages des élèves que du point de vue des impératifs professionnels auxquels elles répondent. Ce cadre articule des approches de didactique des mathématiques et des travaux dans le champ de la psychologie ergonomique basés sur la théorie de l'activité et les théories de psychologie du développement et des apprentissages de Vygotsky et de Piaget. Il légitime de considérer les activités mathématiques des élèves comme intermédiaires entre les apprentissages des élèves et l'enseignement correspondant et insiste sur leur fonction "créatrice" potentielle de connaissances mathématiques. Nous reprenons, dans ce cadre, la distinction que fait J. Rogalski (2003) entre tâche et activité : la tâche est ce qui est à faire ; l'activité est ce que développe un sujet lors de la réalisation de la tâche. Dans notre recherche, nous étudions les activités possibles des élèves en considérant qu'elles dépendent plus ou moins de l'enseignant dans sa façon d'articuler exercices et cours ou d'organiser le travail en classe. Les activités d'élèves que nous étudions sont issues de l'observation de deux séances, en environnement TICE et en environnement papier/crayon¹³. Nous utilisons, pour leur étude, des outils méthodologiques provenant essentiellement de travaux réalisés dans ce cadre théorique.

Dans un premier temps, nous faisons une analyse a priori des tâches, dans les énoncés proposés par l'enseignant. Une tâche mathématique est caractérisée par les mises en fonctionnement des connaissances des élèves déterminées à partir de ce qui est à leur disposition dans leurs cours (Robert 1998). Les mises en fonctionnement des connaissances

12 Notre étude est présentée d'une façon plus détaillée dans Abboud-Blanchard et Chappet-Paries, 2008.

13 Nous utiliserons désormais l'abréviation : p/c pour désigner "papier/crayon"

des élèves demandent des adaptations de celles-ci relatives à un niveau scolaire donné. A. Robert distingue plusieurs types d'adaptation (Robert 2005) comme par exemple : la reconnaissance de modalités d'application des notions, théorèmes, méthodes, formules ; l'introduction d'étapes ; l'utilisation de questions précédentes dans un problème ou encore l'existence de choix. Nous repérons aussi les tâches simples et isolées qui sont des applications immédiates (sans adaptation) d'une propriété.

Dans un second temps, nous étudions les déroulements des séances en repérant les aides de l'enseignant et en essayant de trouver des caractéristiques de son discours.

Les interventions de l'enseignant sont souvent des aides. Certaines peuvent modifier les activités possibles des élèves. Selon le moment où elles interviennent, avant, pendant, après un travail mathématique d'élève, les aides accordées par le professeur seront différentes (Robert, 2007) :

- Les aides au démarrage concernent la façon dont le professeur organise l'orientation du travail à venir (par exemple par un questionnement collectif ou non sur le choix de la procédure à appliquer).
- Les aides procédurales jouent sur les tâches prescrites en modifiant les activités par rapport à celles prévues à partir de l'énoncé (par exemple en découpant les tâches).
- Les aides constructives ajoutent quelque chose entre l'action de l'élève et la construction (espérée) de la connaissance qui pourrait en résulter (par exemple par des rappels et des bilans).

A un niveau plus fin, la qualité du discours de l'enseignant contribue aussi sans doute à modeler les activités des élèves. Pour étudier le discours, nous nous basons sur le travail de M. Paries (2002) qui, dans sa thèse, a construit une méthodologie d'étude du discours de l'enseignant de mathématiques en adaptant notamment des outils utilisés en psychologie. Elle s'est inspirée des fonctions du discours repérées par Bruner dans le processus de tutelle ou d'étayage de l'adulte qui vient en aide à l'enfant, pour attribuer des fonctions aux interventions du professeur. Ces fonctions précisent la manière dont l'enseignant intervient pas à pas dans le détail du travail des élèves. Pour étudier le discours de l'enseignant dans les séances observées, nous avons repris les deux groupes de fonctions ainsi définis :

- Les fonctions cognitives qui ont un rapport avec la tâche à résoudre et le savoir mathématique. Ce sont les fonctions : distribution de tâches, introduction d'une sous-tâche, bilan, évaluation, justification et structuration.
- Les fonctions d' enrôlement qui sont apparemment indépendantes de la tâche, en tout cas dans leur formulation, mais qui peuvent avoir un effet quant à sa résolution. Elles permettent au professeur de maintenir la communication. Ce sont les fonctions : engagement, mobilisation de l'attention des élèves, encouragement et mutualisation.

A partir des analyses précédentes, nous tentons de reconstituer les activités des élèves. En effet, si nous avons accès aux activités possibles de certains élèves, nous ne pouvons pas être sûrs que tous les élèves les ont "faites". Cela nous amène à distinguer des activités *a maxima*, celles des élèves qui répondent rapidement aux demandes du professeur et les autres, *a minima*, celles des élèves qui attendent qu'un maximum de choses aient été indiquées.

III Données et analyses

Nous présentons ici l'analyse de deux séances portant sur la géométrie dans l'espace en classe de troisième. Les deux séances traitent du même thème, l'intersection d'une pyramide par un plan parallèle à la base. Le premier professeur, Anne, propose à ses élèves d'utiliser un logiciel de géométrie dynamique, GeospacW, et le second, Denis, mène sa séance dans un

environnement plus classique papier/crayon. Dans les deux cas, le professeur s'est filmé en plaçant une caméra fixe dans un coin au fond de la salle de classe (prenant ainsi la totalité de l'activité au tableau pour la séance de Denis), aucun observateur n'était présent.

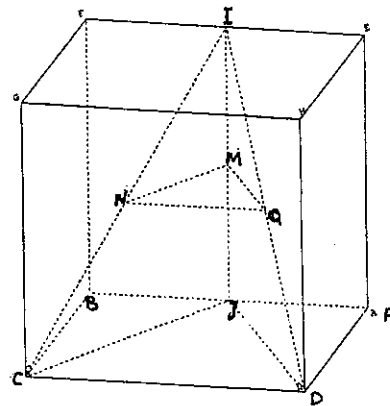
1. La séance d'Anne – environnement TICE

La séance se passe dans une classe de niveau plutôt faible (au dire de l'enseignante). Les élèves travaillent, en salle informatique ; ils sont répartis par groupes de deux sur un ordinateur, ils ont à traiter la troisième partie d'un problème, les deux premières parties ont déjà été traitées dans une séance antérieure.

Présentation et analyse succincte des tâches

Les élèves ont, en début de séance, à charger le fichier contenant la figure et les constructions réalisées lors de la séance précédente et à réaliser les tâches données fournies dans un document papier (figure 1).

3^{ème} partie



1. Soit M le milieu de [IJ]. On a coupé le solide IJCD par le plan P_1 passant par M et parallèle à la base JCD.

Pour effectuer cette section avec le logiciel :

- Créer / solide / polyèdre convexe / défini par ses sommets (nom du polyèdre P_y)
- Créer le plan P_1 passant par M et parallèle au plan JCD
- Créer / ligne / polygone convexe / section d'un polyèdre par un plan (Nom du polyèdre P_y , nom du polygone p)
- Créer le point N, point d'intersection de la droite (IC) et du plan P_1
- Créer le point Q, point d'intersection de la droite (ID) et du plan P_1

Examiner successivement avec le logiciel les plans JCD et MNQ.

Calculer les valeurs exactes de MN, NQ, et MQ.

2. Calculer les aires des triangles MNQ et JCD.
3. Calculer la valeur exacte du volume du solide IMNQ
4. Comparer les volumes de IMNQ et de IJCD

Figure 1 : Fiche élève

La première et la deuxième partie du problème avaient permis, lors de la séance précédente, de : charger le fichier où un cube ABCDEFGH est pré-dessiné, de construire I milieu de [EF] et J milieu de [AB] ; faire une exploration guidée de la figure en la faisant tourner ;

conjecturer que le triangle JCD est isocèle ; calculer les longueurs JC et JD et l'aire de JCD ; reconnaître IJD comme triangle rectangle en J et enfin calculer le volume de IJCD.

Dans la troisième partie (figure 1), il s'agit d'abord (question 1) de réaliser, à l'aide de GeospacW, la section de la pyramide IJCD par le plan parallèle à la base (JCD) et passant par le milieu M de la hauteur [IJ], obtenant ainsi les points N et Q.

La tâche de construction de la section avec GeospacW est entièrement guidée. Les instructions de manipulations sont données pas à pas, les élèves n'ont qu'à suivre ces instructions.

Il est ensuite demandé d'examiner les plans (JCD) et (MNQ) à l'aide de GeospacW. Il s'agit de percevoir que MNQ est la réduction à l'échelle $\frac{1}{2}$ de JCD. Les tâches qui suivent et qui consistent à calculer les aires des triangles MNQ et JCD (question 2), puis à calculer le volume de IMNQ (question 3) et enfin à comparer les volumes de IMNQ et IJCD sont des tâches mathématiques complexes. En effet, elles demandent que les élèves :

- prennent des initiatives (par exemple, construire une hauteur dans un triangle afin de calculer son aire) ;
- fassent les adaptations nécessaires pour appliquer des formules d'aires ou de volumes dans les cas particuliers de cet exercice ;
- effectuent un changement de cadre (question 3 de comparaison) qui consiste à introduire la comparaison de deux nombres dans un cadre géométrique.

Nous considérons maintenant les tâches relatives à l'utilisation de l'outil informatique (que nous nommerons désormais tâches "ROI"¹⁴). Ces tâches concernent exclusivement la première question, les trois questions qui suivent se font en p/c. Nous pouvons en identifier quatre : chargement de la figure ; création du point M ; création de la section ; examen des plans. Les deux premières tâches sont simples et les commandes nécessaires pour leurs exécutions ont déjà été utilisées lors de la séance précédente. Quant à la troisième, elle ne semble demander aucune adaptation, une exécution "fidèle" de la liste détaillée des commandes données suffirait pour aboutir à la construction demandée. Pour accomplir la quatrième, il s'agit d'abord de faire appel, du côté de l'outil informatique, aux questions posées dans la première partie du problème pour reconnaître les modalités d'application de la série de commandes amenant à visualiser un seul plan, puis de faire des allers-retours entre les plans JCD et MNQ. Cette visualisation successive des deux plans va permettre, du côté mathématique, d'identifier visuellement que le triangle MNQ est isocèle et faire la conjecture qu'il est une réduction du triangle JCD.

Les tâches ROI sont donc concentrées dans la première question. La partie la plus complexe (construction de la section) est délibérément facilitée (dans le texte de l'énoncé) en fournissant une liste guidée des commandes à exécuter et les autres parties font appel à des connaissances ROI déjà travaillées dans la séance précédente.

Il est donc raisonnable de penser que les tâches ROI d'une part, n'occuperont qu'un temps limité dans l'activité attendue de l'élève et d'autre part, sont suffisamment détaillées pour permettre, à nos yeux, un fonctionnement autonome des élèves. Les tâches mathématiques sont, elles, plus complexes et demandent des prises d'initiative et des adaptations nombreuses, elles nécessitent donc plus de temps pour la résolution.

Quelques éléments relatifs au déroulement de la séance

Nous avons observé et analysé le fonctionnement de 9 groupes d'élèves. Dans notre étude du déroulement, nous avons systématiquement relevé les interventions de l'enseignante et les

14 Relative à l'Outil Informatique

activités qu'elle propose aux élèves au cours ou à la fin de ses interventions dans les groupes. Nous ne détaillerons pas ici cette étude. Nous notons d'une façon globale que les élèves sont en autonomie de très longs moments. Quand elle est présente, l'enseignante découpe la tâche en sous tâches possibles à exécuter sur le champ par les élèves, afin de les « remettre en selle ». Ses interventions auprès des différents groupes, selon les moments, se ressemblent comme nous le verrons par la suite lorsque nous les examinerons plus finement.

Les interventions collectives de l'enseignante sont rares. Elles portent, en début de séance, sur le démarrage du travail et, en fin de séance, sur le travail à terminer. Une intervention collective, une demi-heure après le début de la séance, pointe le lien entre la question posée dans l'énoncé et le cours.

Les aides de l'enseignant et les activités des élèves

Les aides apportées par l'enseignante sont presque toutes des aides «procédurales» et contribuent à simplifier finalement les activités des élèves. En effet le découpage du travail en tâches simples voire simples et isolées est ici manifeste. L'enseignante va donc au plus court en dictant presque le travail à effectuer, voire en prenant en main la souris lorsqu'il s'agit d'une tâche *ROI*. Les élèves n'ont, la plupart du temps de présence de l'enseignante, qu'à suivre ses instructions, à terminer une phrase ou, au mieux, choisir dans le cahier de cours ou le manuel un théorème sachant qu'après ils seront seuls pour un long moment.

Soulignons que le professeur ne peut accompagner chaque groupe que très peu de temps et que son aide doit permettre aux élèves de poursuivre seuls le travail. On peut se demander si le découpage de la tâche est un gage d'efficacité pour Anne.

Nous constatons cependant que l'enseignante n'a pas réussi à atteindre son objectif, les élèves ont été trop lents dans la construction de la section de la pyramide. Anne avait prévu les tâches *ROI* comme aide dans la phase de démarrage de l'activité pour faciliter l'entrée dans la résolution "mathématique" du problème, en un temps limité. S'apercevant au cours de la séance que ces tâches ont occupé plus de temps que prévu, elle a essayé d'en accélérer l'exécution soit en faisant le travail elle-même, soit en accompagnant pas à pas les élèves. Elle a également tenté de mobiliser les élèves par un bilan collectif du peu de temps de travail restant.

Les aides apportées par l'enseignante se sont centrées sur la construction de la section qui, a priori, ne nécessitait que l'exécution minutieuse de la liste des commandes données.

Nous ne pouvons pas considérer ces aides comme étant de type «procédural», puisqu'il n'y a pas de modification des activités prévues. Ce type ne faisant pas partie de la typologie, définie par Robert (*ibid.*), que nous utilisons dans notre étude, nous proposons d'introduire dans ce contexte un type d'aides que nous qualifierons de «manipulatoire». Nous définissons ces aides comme étant celles qui consistent à accompagner l'élève pour que l'activité prévue se réalise sans modification de la tâche, étant donné que celle-ci est déjà suffisamment « réduite » pour ne plus être découpée. Ce type d'aide est lié directement à l'utilisation d'instruments. Il est plutôt présent dans les séances en environnements informatiques étant donné l'omniprésence de l'instrument mais nous le rencontrons également dans les environnements p/c à l'occasion, par exemple, des premières utilisations d'instruments de dessin (le rapporteur en 6^{ème}).

Nous avons observé que les activités possibles des élèves sont de deux ordres :

- Soit les élèves ne travaillent qu'avec le professeur, comme on peut le constater pour certains groupes dans la vidéo. Un exemple en est un des groupes qui au bout de 38 minutes n'a toujours pas tracé la section de la pyramide par le plan.
- Soit les élèves poursuivent seuls le travail commencé avec ou sans l'enseignante.

- Les groupes que nous avons observés ont tous créé la section et examiné les plans (JCD) et (MNQ) mais très peu ont calculé la longueur MN qui était l'objet de la question 1.

Nous constatons également que les activités des élèves sont très différentes selon les groupes. Aucun n'a pu arriver à la comparaison des volumes des pyramides ni même à celle des aires. Cependant, certains élèves ont eu à leur charge quelques adaptations comme le choix du théorème à utiliser, en particulier le groupe 1 qui contrairement aux autres groupes et à l'attente de l'enseignante, utilise un des théorèmes des milieux pour calculer les longueurs des côtés du triangle MNQ. Ce groupe a aussi réussi à organiser un raisonnement pour calculer l'aire de MNQ (question 2).

Etude des fonctions du discours

Nous avons effectué une analyse des fonctions du discours du professeur pendant la séance que ce soit auprès des différents groupes ou adressé à la classe. Nous avons ensuite calculé le pourcentage de chaque fonction par rapport à la totalité des fonctions recueillies.

Nous constatons tout d'abord que les fonctions d'enrôlement représentent un très faible pourcentage de l'ensemble des fonctions du discours (7%). Nous l'expliquons en partie par la prise en charge de la mobilisation de l'attention des élèves et de l'engagement dans les tâches par l'environnement lui-même. Ce faible pourcentage peut également être dû au fait que l'enseignante s'adresse, la plupart du temps, aux élèves individuellement. En effet, après la première phase de lancement de l'activité (début de séance) nous assistons à un éclatement du groupe classe en plusieurs mini-classes (groupes de 2 élèves devant un ordinateur) qui fonctionnent d'une façon autonome et auxquelles l'enseignante s'adresse en tant que telles.

Nous constatons également que la structuration revêt une importance considérable (28%). En distinguant 3 types de structuration, nous relevons que la structuration du temps occupe une place presque égale à la structuration de la tâche mathématique. Cela rejoint le constat que nous avons fait ci-dessus : le temps d'exécution des tâches avance lentement, l'enseignante en est consciente et essaie par la structuration d'y remédier.

La distribution de tâches et l'introduction de sous tâches concerne particulièrement les tâches mathématiques : 21%. Celles relatives aux tâches *ROI*, sont minoritaires : 5%, nous attribuons ce fait à la nature de ces tâches qui sont simples et bien détaillées dans la fiche élève.

La fonction bilan occupe 15% des fonctions du discours. Ces bilans sont presque tous individuels, faits dans les mini-classes ; les deux seules interventions collectives (présentés précédemment) sont des bilans.

Nous avons constaté de plus que certaines fonctions semblent se succéder dans un même ordre dans les groupes. Les interventions de l'enseignante commencent majoritairement par une évaluation (parfois associée à une structuration) suivie d'une sous tâche. Elles peuvent aussi commencer par un bilan (associé parfois à une structuration) suivi d'une sous tâche.

Nous pouvons ainsi établir la succession des actions de l'enseignante :

- elle arrive dans une mini-classe ;
- elle fait une évaluation ou un bilan du travail accompli ;
- elle accompagne l'élève (avec éventuellement une structuration) en découpant en sous tâches ;
- si l'élève commence l'exécution correctement, elle le laisse pour passer à une autre mini-classe.

2. La séance de Denis – environnement papier-crayon

Le collège dans lequel enseigne Denis est situé dans un quartier favorisé. La séance analysée porte également sur l'intersection d'une pyramide par un plan parallèle à la base. Comme pour Anne, nous ne présentons pas d'une façon détaillée cette séance, nous ciblons plutôt les éléments qui nous permettent de mener par la suite la comparaison des deux séances.

Quelques éléments relatifs au déroulement de la séance

Denis dicte l'énoncé aux élèves et le complète tout au long de la séance : " *Alors vous marquez : $SABCD$ est une pyramide régulière à base carrée ; alors de côté, on va prendre AB égale 3cm, et une hauteur ; alors on avait précisé l'autre fois quand la pyramide était régulière, que O était le centre de $ABCD$, et on va prendre SO égale 6cm* ". Le schéma de la pyramide initiale, $SABCD$ est projeté au tableau (figure 2).

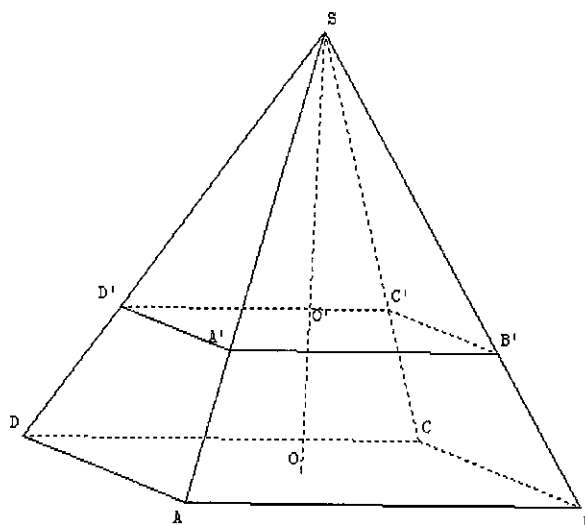


Figure 2 : Schéma projeté au tableau

La plupart des phases de cette séance se décomposent en deux parties : une première d'élaboration, à l'oral des raisonnements et une seconde où un élève reprend pendant que le professeur écrit au tableau. Un temps très long est consacré à la construction de sous figures dans différents plans contenant les faces de la pyramide. C'est comme si implicitement le professeur voulait montrer la richesse de ces figures et l'apport que peut constituer un retour à la géométrie plane.

Les aides de l'enseignant et les activités des élèves

Elles sont pour la plupart de type «procédural», contribuant à structurer, organiser, et donc finalement à simplifier les activités. Le découpage du travail en tâches simples voire simples et isolées est très visible.

L'enseignant utilise les réponses partielles des élèves qu'il sélectionne, relance jusqu'à obtenir la bonne réponse. Il construit lui-même le fil de la stratégie très précise qu'il a choisie de suivre.

Une seule aide peut s'apparenter à une aide "constructive" elle concerne la rédaction de la démonstration.

Le tableau sert de modèle aux élèves. Les élèves peuvent essayer de répondre aux questions posées ou attendre de recopier le tableau. Il y a donc deux types d'activités, *a minima* et *a maxima*.

La prise d'images par une caméra fixe, orientée vers le tableau, ne pouvant nous renseigner d'une façon explicite que sur les interactions de l'enseignant, collectives avec la classe ou avec l'élève qui passe au tableau, nous faisons des hypothèses quant au travail personnel des élèves. On peut ainsi supposer que tous les élèves arrivent à recopier la figure, en perspective cavalière, qui est au tableau et les trois sous-figures planes, elles aussi au tableau. On peut également faire l'hypothèse que les élèves ont tous écrit le raisonnement amorcé et dicté. Certains ont peut-être anticipé et réussi les constructions demandées. De plus certains élèves répondent aux questions posées par l'enseignant. Néanmoins aucune démonstration aboutie de la nature (carré) du quadrilatère A'B'C'D' (formé par la section de la pyramide par un plan parallèle à la base) n'est finalement proposée. Il n'est nulle part question des angles droits quant à l'égalité des longueurs, si elle est évoquée, elle n'est pas écrite jusqu'au bout.

Analyse du discours : les fonctions et la prise en compte des élèves

Nous résumons notre analyse des fonctions du discours dans le tableau suivant :

Phases de la séance	Fonctions	Pourcentage
Détermination de la position du plan de section /Elaboration d'une stratégie	Fonctions les plus utilisées	Mutualisation 20% Bilan 20% Evaluation 15%
	Fonctions d'enrôlement	35%
Correction	Fonctions les plus utilisées	Bilan 33% Découpage en sous tâches 18% Evaluation et structuration 13%
	Fonctions d'enrôlement	18%

Dans cette séance, de nombreux élèves sont interrogés par leur prénom et si le professeur leur propose des activités, il a un projet à suivre et à mener à bien. De ce fait, les réponses des élèves sont évaluées brièvement et le professeur met en place lui même les différents éléments dont il a besoin dès qu'une réponse ne lui convient pas. Les élèves n'ont alors que des phrases à terminer, des sous tâches à effectuer.

La négociation est moins riche, à mesure que le temps avance, d'ailleurs des fonctions associées, mutualisation/évaluation/bilan, que nous remarquons au début de la séance il ne reste, à la fin, qu'évaluation/bilan. La fonction mutualisation qui apparaissait au début de la séance disparaît à la fin.

Au final, il nous semble qu'il y a trop d'enjeux dans cette séance pour trop peu de temps :

- utiliser des " sous " figures planes et même en vraies grandeurs;
- démontrer dans un cas particulier que la section d'une pyramide par un plan parallèle à la base est une réduction de la base;
- introduire le théorème concernant rapport des longueurs, des aires, des volumes dans une réduction (ou un agrandissement).

3. Comparaison des deux séances

Dans cette partie nous mettons en perspective les analyses des deux séances afin de repérer ce qui pourrait relever d'un environnement TICE et ce qui est commun aux deux environnements. Les éléments de comparaison portent essentiellement sur : les tâches

proposées aux élèves, les aides de l'enseignant ainsi que son discours et sur les activités des élèves.

Les tâches mathématiques proposées aux élèves sont plus riches pour la séance d'Anne puisqu'elles demandent de nombreuses adaptations dont la construction d'étapes dans le raisonnement. Les tâches relatives à l'outil informatique, quant à elles, sont bien détaillées (découpées) dans le document papier de l'élève. La séance de Denis est plus balisée, d'ailleurs il ne définit pas la tâche entière mais la bâtit au fil de la séance. Les tâches demandent ainsi des adaptations peu variées et peu nombreuses, les élèves suivent le cheminement tracé par l'enseignant.

Les aides des deux enseignants sont de même nature, en général procédurales. La séance d'Anne est caractérisée par peu d'aides au démarrage de la résolution de la tâche mathématiques et par la rareté des aides collectives. La nécessité pour l'enseignante de s'adapter au raisonnement de chaque groupe d'élèves est manifeste et ses aides laissent alors peu de marge de manœuvre aux élèves. Ces interventions aboutissent ainsi à un découpage des tâches en tâches simples voire simples et isolées voire même l'exécution "mécanique" d'une série de commandes.

Si nous nous plaçons du côté de l'analyse du discours de l'enseignant, nous relevons que les fonctions d'enrôlement revêtent des importances différentes dans les deux séances : 7% en TICE et 28% en p/c. Nous faisons ici l'hypothèse qu'une partie de ces fonctions est prise en charge par l'environnement TICE. Quant aux associations de fonctions, elles se terminent chez Denis par la fonction bilan alors qu'elles se prolongent par une sous tâche chez Anne. La différence de statut des deux séances nous permet d'en donner une interprétation. La séance de Denis est une séance de découverte. D'ailleurs il ne dévoile qu'au fur et à mesure de son cheminement les tâches que les élèves auront à effectuer. Son objectif est donc de leur faire appréhender des résultats (fonction bilan) sur lesquels il pourra s'appuyer pour élaborer son cours. C'est donc lui qui pilote et qui fait émerger ce qu'il faut retenir de la séance. La séance d'Anne est une séance d'entraînement dans laquelle elle a choisi, par la forme même de sa gestion de la séance de laisser les élèves seuls face aux résultats trouvés. Son objectif est donc de les engager à une recherche autonome, en son absence, par une relance (distribution d'une sous tâche).

Un autre élément caractéristique, concerne la gestion de la classe et rejaillit sur l'activité des élèves. Les élèves, en séance TICE, bénéficient de longs moments de recherche en autonomie : 12min, 20 min ... L'enseignante est présente auprès de chaque groupe pendant un temps cumulé qui n'excède pas cinq minutes. Cela explique en partie la présentation très détaillée des tâches *ROI* dont nous avons parlé ci-dessus alors que, dans la classe de Denis, comme nous l'avons déjà évoqué, les élèves suivent le raisonnement du professeur et ne sont jamais autonomes. Cette autonomie des élèves, dans un environnement TICE, implique aussi pour Anne une nécessité à s'adapter au raisonnement des élèves : elle reconstitue ce qu'ils ont fait et tente de leur faire poursuivre leur raisonnement alors que Denis poursuit son projet, les élèves le suivent.

Du côté des activités des élèves, celles *a maxima* sont, par la nature des tâches, plus riches pour certains élèves d'Anne que pour ceux de Denis. Ces activités sont différentes selon les groupes et non homogénéisées par l'enseignante, cette diversité étant renforcée par l'absence d'aides mathématiques au démarrage. Nous ne pouvons pas juger des activités *a minima* des élèves d'Anne car nous n'avons observé qu'une partie de la classe. Par contre, il nous semble que tous les élèves de la classe de Denis ont écouté le raisonnement et recopié le tableau. Le démarrage collectif de la résolution avait favorisé des activités possibles similaires des élèves.

Comme nous l'avons remarqué au cours de l'analyse de la séance TICE, en reconstituant les activités des différents groupes, l'utilisation de l'outil informatique semble différenciateur alors que, dans la séance papier/crayon, l'enseignant s'efforce de neutraliser les différences entre élèves en donnant le tableau pour modèle. Différenciateur par rapport au temps : par exemple, au bout de 38 minutes, un groupe dans la classe d'Anne en est encore aux tâches de démarrage. Différenciateur aussi par rapport aux activités possibles des élèves: les groupes n'en sont pas tous au même point en fin de séance. Le professeur ne tente pas d'uniformiser l'avancement du travail et nous ne relevons que deux interventions collectives dans ce sens. C'est un peu comme si Anne s'adressait successivement à plusieurs « mini-classes » fonctionnant de façon autonome. Ce mode de fonctionnement nous paraît être une caractéristique d'une séance en salle informatique, même si dans des séances p/c organisées en groupes on a pu observer un phénomène analogue mais peut être moins marqué (David 2000).

IV Conclusion

Pour conclure, nous relisons nos résultats en essayant de dégager des spécificités éventuelles de la séance TICE tant au niveau des pratiques des enseignants qu'à celui des activités provoquées des élèves.

Le projet initial, global, de l'enseignante en environnement TICE nous semble être peu différent de celui qui serait mené dans l'environnement p/c. Il s'adresse à la classe : tous les élèves cherchent à résoudre le même exercice. Cet exercice porte sur la résolution de tâches mathématiques, identiques à celles pouvant être proposées en p/c. Ceci rejoint les résultats de recherches cités en introduction.

Le déroulement de la séance, quant à lui, est différent de celui de la séance p/c. En effet, la classe en environnement TICE a "éclaté" en mini-classes qui ont fonctionné indépendamment les unes des autres. La gestion collective de la classe a presque disparu sauf en ce qui concerne la gestion du temps. Nous retrouvons dans ce mode de fonctionnement : éclatement en mini-classes et leurs gestions, un des constats soulevé par Monaghan (*ibid*) à savoir, l'enseignant en séance TICE passe plus de temps à s'adresser à des petits groupes que de temps en interventions collectives.

De plus, pour chacune de ces "mini-classes", le professeur s'adapte à ce que font les élèves. C'est un élément important de la gestion d'une séance TICE en salle informatique et qui la différencie d'une séance p/c. En effet, l'enseignant, dans le premier cas, est amené à se "couler" dans le raisonnement de l'élève puisqu'il arrive, de fait, le plus souvent, "en cours de route", alors que dans le second cas, ce sont plus souvent les élèves qui s'adaptent au projet du professeur. Les interventions collectives, plus fréquentes, de ce dernier permettent une reprise en main de la résolution des tâches et une unification des activités possibles des élèves.

Les aides de l'enseignante au démarrage semblent concerner exclusivement les tâches relatives à l'outil informatique. En cours de séance ces aides sont, pour la plupart, procédurales. Elles sont, en partie, motivées par un souci de faire avancer le travail. Ce souci "d'efficacité" conduit à un découpage des tâches, voire même l'exécution mécanique d'une série de commandes. De ce fait nous en sommes venus, sur le plan méthodologique à introduire un nouveau type d'aide pour en rendre compte, les aides "manipulatoires".

Les fonctions d'entraînement sont peu présentes dans le discours, elles semblent être prises en charge par le logiciel. Les successions de fonctions du discours repérées nous ont amené à une description ordonnée des actions de l'enseignante qui montrent, comme le souligne

Monaghan (*ibid.*), que l'enseignant a bien une activité d'accompagnement des élèves dans l'exécution des tâches prescrites.

Quant aux activités des élèves, nous constatons qu'elles sont très différentes selon les groupes : simple exécution d'une commande ou élaboration et suivi d'une stratégie de résolution. L'outil TICE semble donc engendrer des différences très importantes entre élèves. Pour certains élèves les activités provoquées sont encore enrichies par leur autonomie, pour d'autres, les difficultés d'utilisation de l'outil sont un frein de plus à leur entrée dans la résolution de la tâche mathématique.

L'outil informatique n'est ici pas générateur de mutualisation des connaissances des élèves et n'a pas favorisé les interventions collectives de l'enseignant. L'utilisation de l'outil informatique semble donc, comme nous l'avons déjà dit, différenciateur ; alors que, dans la séance papier/crayon, l'enseignant s'efforce de neutraliser les différences entre élèves en donnant le tableau pour modèle.

Finalement, travailler pour le professeur dans cet environnement TICE semble être d'une part déstabilisant et d'autre part plus coûteux qu'un fonctionnement en environnement papier/crayon :

Déstabilisant pour l'enseignant, car les interventions mathématiques sont identiques à celles en papier/crayon mais répétées dans chaque mini-classe et les interventions relatives à l'utilisation de l'outil informatique occupent parfois un temps conséquent non prévu initialement. Les aides sont parfois inhabituelles et à la limite du mathématique (les aides manipulatoires). Les fonctions d' enrôlement sont peu présentes, prises en charge en partie par l'environnement (engagement, mobilisation de l'attention des élèves) alors qu'elles occupent en général une place importante en séance papier/crayon.

Plus coûteux car la gestion est moins confortable/prévisible et demande à l'enseignant de s'adapter à chacune des mini-classes : reconnaissance et identification des besoins des élèves ; adoption éventuelle de la méthode des élèves ; réactivité et aides appropriées. Le retour à un fonctionnement collectif pour faire un bilan et unifier les connaissances des élèves devient plus difficile, les élèves étant accaparés par les interactions avec la machine et les avancées de leur travail sont déphasées.

Tous ces éléments constituent, à notre avis, des freins à la mise en place de séances TICE, en classe de mathématiques et peuvent, en partie, permettre de comprendre la réticence, encore persistante, de nombre d'enseignants à intégrer les TICE dans leur enseignement.

V Bibliographie

Abboud-Blanchard M., Chappet-Paries M. (2008), L'enseignant dans une séance de géométrie dynamique. Comparaison avec une séance en papier-crayon, in : *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*, Vandebrouck ed. Octarès.

Artigue M., Abboud-Blanchard M., Cazes C., Vandebrouck F. (2007) *Suivi de l'expérimentation de ressources en ligne pour l'enseignement des mathématiques en classe de seconde*. Rapport final de l'IREM de Paris 7 pour la Région Ile de France.

Bruner J. (1983), *Le développement de l'enfant : savoir faire, savoir dire*. Paris: Presses Universitaires de France.

David M.C., (2000), Le travail en petits groupes : un remède à l'hétérogénéité des groupes de travaux dirigés et à la passivité des étudiants. *Actes du colloque de la CFEM*, Grenoble.

- Kendal M., Stacey K., (2002), Teachers in transition: Moving towards CSA-supported classrooms, *ZDM*, 34(5), 196-203.
- Monaghan J. (2004), Teachers' activities in technology-based mathematics lessons. *The International Journal of computers for mathematical learning*, vol.9, 327-357
- Paries M. (2004), Comparaison de pratiques d'enseignants de mathématiques- Relations entre discours des professeurs et activités potentielles des élèves, *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 24, n°2.3, La pensée sauvage.
- Robert A. (2007), Stabilité des pratiques des enseignants de mathématiques (second degré) : une hypothèse, des inférences en formation, *Recherches en didactique des mathématiques*, vol 27/3
- Robert A., (2005), *Un module de licence professionnel*, Document pour la formation des enseignants n°6, IREM de Paris 7.
- Robert A., & Rogalski J., (2002), Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *La revue canadienne des sciences, des mathématiques et des technologies*, vol. 2.4.
- Rogalski J. (2003), Y a-t-il un pilote dans la classe ? Une analyse de l'activité de l'enseignant comme gestion d'un environnement dynamique ouvert. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 23(3), 343-388.
- Ruthven K. (2006), Embedding new technologies in complex ongoing practices of school mathematics education. *International Journal for Technology in Mathematics Education* 13(4), 161- 167.

Séminaire de mars 2008

28 et 29 mars 2008

Formation initiale et continue pour l'enseignement des mathématiques avec les TICE : cadre d'analyse des formations et ingénierie didactique

Fabien EMPRIN

DIDIREM

IUFM Champagne Ardenne

Résumé

L'utilisation des TICE pour l'enseignement des mathématiques reste faible et manque de diversité comme le montre des études statistiques récentes que nous avons synthétisées dans une première partie de la thèse. Notre hypothèse est qu'il existe un déficit qualitatif dans les formations des enseignants qui contribue à expliquer leur difficulté à intégrer les TICE dans leur enseignement. Notre objectif est de préciser l'existence et la nature de ce déficit. Pour cela nous avons construit un cadre théorique d'analyse en spécifiant deux cadres théoriques : la double approche et l'approche instrumentale. Le premier cadre permet une recomposition du travail du formateur et constitue une grille d'analyse des situations de classe proposées en formation alors que le second permet d'analyser le rapport entre l'artefact technologique et respectivement le formateur, l'enseignant ou l'élève. La mise en oeuvre de notre cadre pour analyser un panel de trois formations et les représentations de quatorze formateurs permet de mettre en évidence un genre professionnel, des invariants dans les pratiques de formation et une rupture entre deux identités professionnelles : celle de l'enseignant et celle du formateur. Elle permet aussi de mettre en évidence les limites des pratiques observées, principalement basées sur l'homologie. L'introduction d'une composante réflexive dans les pratiques de formation apparaît alors comme une piste pertinente pour dépasser ces limites. Cette nouvelle hypothèse est testée au moyen d'une ingénierie didactique. Deux mises en oeuvre d'un scénario de formation incluant une analyse réflexive des pratiques montrent l'intérêt de cette modalité ainsi que ses limites.

Mots clefs

Formation des enseignants, ingénierie didactique, TICE, Approche instrumentale, Double approche, Analyse de pratiques, Analyse réflexive, Formateurs, Scénario de formation.

I Problématique et cadre d'analyse

1. Point de départ

Notre travail se base sur un constat de formateur, celui de la difficulté pour les enseignants et les enseignants stagiaires à mettre en oeuvre les technologies dans leurs classes. Ce constat empirique est confirmé par le rapport de l'inspection générale de l'éducation nationale IGEN (2006) qui décrit en ce qui concerne l'enseignement « un environnement mathématique peu modernisé » où « l'utilisation pédagogique des TICE est quasi inexistante ». Nous avons cherché à étayer ces affirmations par une analyse d'études statistiques et d'enquêtes à différents niveaux. L'enjeu a été pour nous de trouver des enquêtes à différentes échelles, nationales et internationales, ce qui nous permet de considérer les conclusions communes qui se dégagent comme relativement fiables. Nous avons choisi d'utiliser quatre types de données qui permettent ces recoupements. D'abord TIMSS – PIRLS (1995) qui est une enquête internationale dont l'enjeu est d'évaluer les performances des élèves mais qui contient

également un volet de questions portant sur les pratiques des enseignants. Les données de cette enquête datent de plus de dix ans. La deuxième enquête est celle de la DPD (Direction de la Prospective et du Développement) de la Direction des Technologies DT (2003) elle comporte deux volets, le premier qualitatif a été mené par l'Institut National de Recherche en Pédagogie INRP et le second quantitatif. Nous ne prenons en compte qu'une partie du public visé par cette étude nationale : 368 enseignants du premier degré dans la mesure où il n'y a pas d'enseignants de mathématiques concernés dans le second degré. La troisième étude utilisée a été commandée par la commission européenne empirica (2006) Cette enquête a été réalisée auprès de plus de 10 000 directeurs d'école et plus de 20 000 enseignants de vingt-sept pays européens. Nous nous sommes concentré sur les données de la France en les mettant en regard, à titre d'élément d'information, avec la moyenne des pays de l'Europe des 15. Cette étude est basée sur 869 interviews en France ce qui constitue un panel important. Enfin nous avons utilisé une synthèse d'étude : BECTA (British Educational Communication and Technology Agency) rédigée par Jones (2004). Même si l'enquête de la DPD présente l'utilisation des TICE en classe comme quantitativement plus importante que les autres enquêtes¹⁵ il se dégage des conclusions communes de ces quatre travaux : les usages des TICE en classe sont relativement pauvres et vont rarement au-delà de la recherche sur Internet ou de l'utilisation d'un traitement de texte. Un des facteurs mis en avant pour expliquer ce manque de richesse est un problème de formation. En effet la première source de formation identifiée est l'autoformation DPD(2003) et une des conclusions de l'enquête BECTA est qu'« un type de formation inadapté a pour conséquence un bas niveau d'utilisation des TICE ». C'est sur ce facteur que nous avons choisi de concentrer notre travail même si d'autres facteurs tels que les problèmes d'équipement par exemple peuvent entrer en compte.

Cette centration sur les problèmes liés à la formation vient du fait que la question de départ est une question de formateur mais surtout parce qu'à bien y regarder il y a un certain paradoxe entre le manque de formation au TICE ressenti par les enseignants et les efforts consentis, au moins d'un point de vue quantitatif par l'institution. En effet lorsque nous examinons l'histoire de la formation aux TICE nous remarquons qu'elle débute par un important effort en terme de formation : celui du plan IPT (Informatique Pour Tous). « Le plan IPT comportait trois axes essentiels : les matériels, les logiciels et la formation des enseignants. Il a consisté en une dotation généralisée des lycées, des collèges et des écoles en nanoréseaux, micro-ordinateurs personnels et logiciels pédagogiques, et dans la formation des enseignants pendant les vacances scolaires. Un plan bien concret et, à ce titre, un symbole de la place à venir de l'informatique dans la société. » (Archambault 2005). Les volumes de formation étaient conséquents, une année de formation pour des enseignants référents encadrant ensuite des formations de 100 heures pour leur collègues. Des formations de 50 heures hors temps scolaire et rémunérées ont concerné 110 000 enseignants. Le plan IPT a été une opération limitée dans le temps mais a été suivi par des politiques de formation des enseignants et des programmes d'amélioration de l'usage des TICE. Entre 1998 et 2002 il s'agit du Plan d'Action Gouvernemental pour la Société de l'Information (PAGSI). En 2007 c'est le plan Pour une République numérique dans la Société de l'information (RE/SO) qui a cette mission. De plus plusieurs dispositifs tels que la mise en place du Brevet Informatique et Internet (B2i) pour les élèves et le Certificat Informatique et Internet pour l'Éducation et l'Enseignement (C2i2e) sont incitatifs pour améliorer le niveau de formation des enseignants. Le cahier des charges pour la formation des enseignants (BO du 4 janvier 2007) affirme comme une des dix compétences professionnelles des enseignants la maîtrise des technologies de l'information et

15 Voir à ce sujet l'article de Georges-Louis Baron tiré de son blog professionnel : « A propos d'une étude européenne récente sur la diffusion de l'informatique dans les écoles », Georges-Louis Baron, novembre 2006 consulté le 30 avril 2008

<http://blogs.univ-paris5.fr/glbaron/weblog/1796.html>.

de la communication. Ce paradoxe, entre le ressenti d'un manque de formation et les efforts quantitatifs qui peut être observé nous amène à formuler l'hypothèse d'un déficit qualitatif dans les formations. Ainsi notre problématique de départ peut-elle être formulée de la façon suivante :

Comment caractériser et analyser le déficit qualitatif des formations d'enseignants en mathématiques avec les TICE ?

2. Choix de cadres d'analyse

Les recherches sur le champ spécifique de la formation aux TICE en didactique des mathématiques ne sont pas nombreuses. Nous en avons retenu principalement trois qui nous semblent significatives. Vergnes (2001) analyse l'effet d'un stage de formation continue à propos de la géométrie. Ce travail ne concerne pas spécifiquement les TICE. Le travail d'Assude et Grugeon (2003) porte quant à lui sur l'intégration de logiciels de géométrie dynamique (LGD) dans les pratiques de classes et sur une ingénierie de formation. Enfin le travail d'Abboud-Blanchard (1994) traite de la formation aux TICE et de son influence sur les pratiques des enseignants. Ces trois recherches nous permettent d'affiner notre problématique. Elles montrent que les effets des formations sur les stagiaires semblent faibles et disparates d'un stagiaire à l'autre. Le manque de connaissances sur l'apprentissage avec les TICE apparaît comme un problème important. Nous manquons cependant de connaissances sur les formations elles-mêmes, du moins, comme pour Abboud-Blanchard (1994) qui porte sur un contexte post IPT, elles nécessitent d'être réactualisées. Les deux premiers travaux que nous avons présentés concernent une formation « en particulier » et l'analyse est centrée sur les pratiques des enseignants à l'issue de ces stages. Nous ne disposons donc pas de cadre d'analyse des formations susceptible de nous permettre de mieux connaître les formations aux TICE. Le premier axe de notre travail consiste donc à construire un cadre d'analyse nous permettant de traiter notre problématique. N'ayant pas trouvé de cadre dédié à l'analyse des pratiques de formation, nous nous sommes intéressé à ceux destinés à l'analyse des pratiques enseignantes. Les pratiques de formations ne peuvent se réduire à une activité d'enseignement, en effet, ne serait-ce que pour avoir une meilleure compréhension des conceptions des formateurs deux niveaux sont imbriqués : le formateur a bien souvent été ou est encore un enseignant à ce titre il a des pratiques de classe mais il est également formateur avec des pratiques de formation, dans lesquelles, comme le précise Abboud-Blanchard (1994) ses pratiques en tant qu'enseignant interviennent. Nous recherchons donc, parmi les cadres d'analyse des pratiques enseignantes, des outils adaptables pour les pratiques de formation.

Nous avons retenus trois cadres, le premier est celui de Monaghan (2004) utilise l'approche de Saxe pour analyser les pratiques des enseignants à partir du concept de but émergent, *emergent goals* dans les textes en anglais d'origine. L'analyse se base sur quatre paramètres : la structure de l'activité, les conventions et les artefacts, les interactions sociales et les conceptions de l'enseignant. Il s'agit d'une approche holistique basée sur l'observation des pratiques de classes. Cette approche a l'intérêt de voir l'activité de l'enseignant comme un tout. Le deuxième cadre d'analyse a été développé par Ruthven et Hennessy (2002). Leur travail est basé sur une analyse des conceptions des enseignants de ce qu'est une intégration réussie des TICE par l'intermédiaire d'entretiens. Enfin le troisième cadre théorique de Robert (1999), Robert et Rogalski (2002), (2003) est appelé double approche ; l'analyse des pratiques enseignantes est vue au travers d'une approche d'ergonomie cognitive et d'une approche didactique. Cette double approche n'a pas été construite pour analyser les pratiques incluant les TICE mais les pratiques enseignantes ordinaires. Elle est basée sur l'hypothèse que les pratiques enseignantes sont stables, cohérentes et complexes. Ce cadre théorique nous

apparaît comme le plus propice à une spécification pour l'analyse des pratiques de formations aux TICE pour trois raisons principales. En premier lieu il a été conçu pour tenter « de présenter et de justifier un cadrage théorique pour mettre en place des recherches didactiques sur les formations professionnelles des enseignants de mathématiques » Robert (1999). Dans un premier temps ce cadre est utilisé par le chercheur pour acquérir des connaissances qui doivent servir ensuite à la formation des enseignants. Cet objectif correspond donc bien à notre problématique. En second lieu, Robert (1999) analyse et définit les pratiques de l'enseignant comme « l'ensemble des activités de l'enseignant qui aboutissent à ce qu'il met en œuvre en classe et à ses activités en classe. Dans cette définition nous tenons compte des projets plus ou moins implicites activés au moment de la préparation des séances. [...] Nous appelons 'lignes d'action' ces projets, auxquels nous ne pourrions accéder qu'indirectement, à travers leur réalisation en classe ou au travers des déclarations de l'enseignant ». Contrairement à Monaghan qui utilise le concept de « but émergent » cette approche vise à accéder aux lignes d'actions. Nous cherchons à analyser les pratiques de formation pour comprendre pourquoi elles manquent d'effet sur les pratiques des enseignants et non à analyser l'influence de l'introduction des TICE dans les pratiques de formations ce qui nous rapproche donc de la double approche. En dernier lieu Robert (1999) précise la place de l'analyse de l'effet des pratiques des enseignants sur les apprentissages des élèves : « [...] en dernière analyse, les effets sur les élèves qui doivent servir d'évaluation de ces pratiques car ce sont les apprentissages des élèves qui sont « visés » ». Là encore, dans notre problématique, ce sont les effets des pratiques de formation sur les pratiques des enseignants qui sont visés ce qui justifie la pertinence de ce cadre. Néanmoins contrairement aux deux autres cadres la double approche ne prend pas en compte les spécificités de l'intégration des technologies. Ceci nous amène à utiliser, conjointement à la double approche, un cadre permettant de prendre en compte la dimension d'usage des technologies. Pour cela l'approche instrumentale développée par Rabardel (1995), (1999) nous apparaît comme pertinente. Cette approche permet de voir un instrument comme composé d'un artefact matériel et de schèmes d'utilisation (et schèmes sociaux d'utilisation) qui lui sont associés. L'instrument n'est pas un donné mais se construit par un double processus d'instrumentalisation, au travers duquel l'individu s'approprie l'artefact en créant des usages par adaptation de schèmes existants et l'instrumentation, où l'utilisateur se confronte aux contraintes de l'artefact et construit ses schèmes instrumentaux. L'ensemble de ces deux processus est appelé genèse instrumentale qui est propre à chaque individu tout en intégrant une dimension sociale. Dans la suite de notre travail nous parlerons de genèses instrumentales dans la mesure où il s'agit d'un processus complexe et que le processus de formation intervient sur plusieurs genèses simultanément.

3. Axes de travail

La spécification de ces deux cadres théoriques, double approche et approche instrumentale, à la situation de formation est donc un premier axe de cette recherche et nous conduit à une nouvelle lecture des situations de formation incluant mathématiques et TICE. La mise en œuvre des cadres théoriques permet d'en vérifier la fonctionnalité mais permet surtout une analyse didactique des pratiques de formation. Ce premier travail débouche sur des hypothèses concernant les formations, les relations entre activité du formateur et activité de stagiaire, le rôle de l'analyse de la relation « activité de l'enseignant – activité de l'élève »...

Le deuxième axe de notre travail concerne la question de la validité de ces hypothèses théoriques et la recherche d'une méthodologie adaptée. Nous choisissons donc d'utiliser une ingénierie didactique, que nous adaptons à la situation de formation, comme méthodologie de recherche.

Le Schéma 1 infra récapitule les deux axes de notre travail.

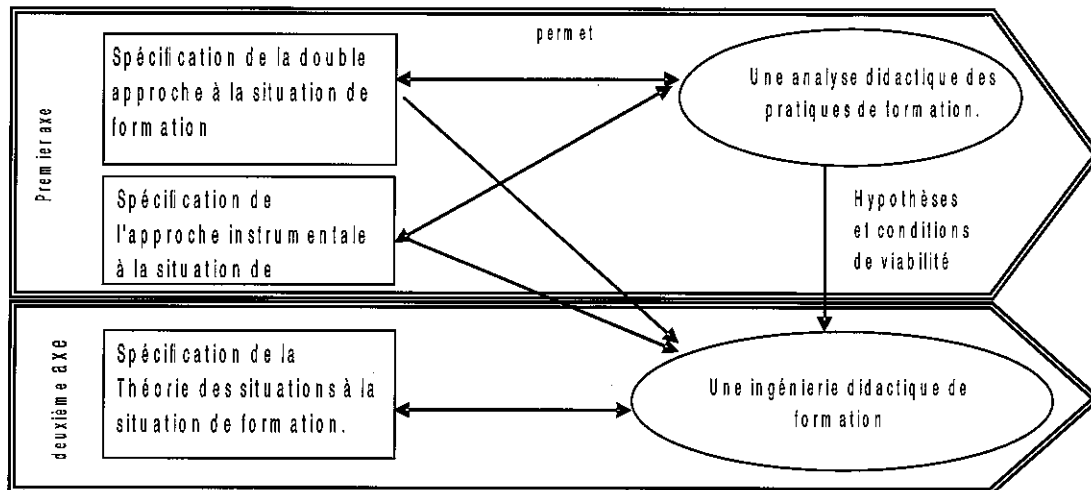


Schéma 1 : axes de la problématique

II Spécification des cadres d'analyse

Nous empruntons à Robert et Rogalski (2002) les définitions de l'activité et des pratiques que nous devons spécifier aux différents niveaux rencontrés lors d'une formation :

Le mot activité est attaché à des actions, en général repérables, spontanées ou provoquées par une tâche, mais il désigne aussi bien ce que fait et dit l'élève(ou le professeur d'ailleurs) que ce qu'il pense, va penser après l'action (éventuellement), ou a pensé pour la faire. Il ne s'agit donc pas seulement de l'action mais aussi de ce qui génère, accompagne et contrôle l'action et qui est en partie invisible.

L'activité de l'enseignant, au sens où nous l'utilisons, se rapproche de l'idée d'activité productive telle que décrite par Rabardel (2005). Elle regroupe l'ensemble de ses actions mais nous y ajoutons également ses dires, ses attitudes et des aspects non observables auxquels nous devons accéder indirectement. Nous prenons comme définition des pratiques la reconstitution des cinq composantes décrites dans la double approche. Robert, Roditi, Gugeon (2007) en donnent une description :

Nous avons mis au point, pour tenir compte de la complexité des pratiques, des analyses qui puissent rendre compte à la fois de ce qui peut être observé en classe, qui résulte des préparations et des déroulements, et de facteurs extérieurs à la classe mais qui pèsent sur les pratiques, y compris en classe et contribuent finalement aux choix des enseignants avant et pendant la classe. En effet les pratiques en classe sont contraintes, par delà même les objectifs d'apprentissage des élèves, par des déterminants liés à l'exercice même du métier d'enseignant : institutionnels, sociaux... Citons les programmes, les horaires, les établissements, les collègues, les classes et leur composition. De plus, les pratiques ont un ancrage personnel qui réfère à l'enseignant comme personne singulière, en termes de connaissances, représentations, expériences, conception du métier et conditionne aussi ses choix. Nos analyses se font à partir de séances en classe en distinguant ainsi des composantes, institutionnelle, sociale, personnelle, médiative (liée aux déroulements en classe et aux improvisations), cognitive (liées aux contenus préparés et aux prévisions de gestion), étroitement liées pour un enseignant donné, et devant être recomposées : il nous faut penser les composantes ensemble, et deviner les compensations, les équilibres, les compromis pour comprendre et commencer à expliquer ce qui est en jeu.

Le premier niveau d'activité est celui de l'élève. Nous le notons niveau A0. L'élève a une tâche à réaliser, il agit dans cet objectif. Son action est médiatisée par un instrument faisant partie des TICE. Elle peut donc être analysée au moyen de la didactique des mathématiques et de l'approche instrumentale. L'observation du processus d'instrumentation / instrumentalisation renseigne sur la genèse instrumentale de l'élève et les instruments qu'il construit.

Le second niveau d'activité est celui de l'enseignant que nous notons niveau A1. Les tâches de l'enseignant consistent à gérer et organiser l'activité de l'élève. Il organise la genèse instrumentale de l'élève.

Dans la situation d'enseignement, la double approche nous permet d'analyser un premier niveau de pratiques que nous notons niveau P1. Ce sont les pratiques de l'enseignant. Elles sont analysées au moins par l'accès aux activités de niveau A0 et A1 dans les composantes médiative et cognitive des pratiques. L'accès aux composantes sociale, personnelle et institutionnelle se fait par l'intermédiaire d'entretiens avec l'enseignant par exemple. L'approche instrumentale permet d'analyser les genèses instrumentales proposées aux élèves mais aussi les instruments professionnels, principalement ceux d'enseignement.

Les deux autres niveaux d'activité sont ceux qui existent dans la situation de formation. Ce sont ceux sur lesquels portent notre recherche. Ils permettent d'accéder au deuxième niveau de pratiques. Les activités des stagiaires (qui sont donc des enseignants) durant la formation, sont notées A2. Elles sont organisées par celles des formateurs notées A3. Dans la situation de formation, la double approche et l'approche instrumentale permettent d'accéder au deuxième niveau de pratiques noté P2, celle du formateur. Les tâches du stagiaire ne sont pas directement mathématiques dans la mesure où nous nous intéressons à la formation professionnelle des enseignants et non à la préparation au concours. Ces tâches visent à faire acquérir des compétences professionnelles. L'approche instrumentale permet d'analyser la genèse instrumentale proposée au stagiaire.

À l'intérieur des pratiques de formation apparaissent plus ou moins directement des pratiques d'enseignement. Dans l'analyse des pratiques du formateur interviennent ses pratiques de niveau P1 existantes ou passées. Dans les contenus de la formation nous pouvons également trouver des pratiques de niveau P1 sous trois formes. La première forme, la plus évidente consiste en l'importation de pratiques d'enseignement captées sous quelque forme que ce soit. Elles peuvent être présentées sous forme de vidéo, d'enregistrement audio ou de transcriptions de façon plus ou moins complètes. En effet la vidéo peut montrer le travail de quelques élèves, être centrée sur le tableau ou encore sur le discours de l'enseignant. Dans ce dernier cas c'est une partie de l'activité de niveau A1 qui est visible. Le formateur peut également amener des travaux d'élèves comme trace de l'activité de niveau A0 ou la préparation de l'enseignant comme une autre partie de l'activité de niveau A1. Dans ce cas nous parlerons de **pratiques montrées**. La seconde forme correspond à une importation indirecte des pratiques de classe par l'intermédiaire des narrations du formateur. Il raconte ce qui se passe ou se passerait dans une classe, des réactions d'élèves. Contrairement à la première forme, les pratiques ne sont pas forcément réelles, le formateur peut faire des synthèses d'activités d'élèves vues ou tirées de lectures par exemple et les réunir. Il ne s'agit pas d'un cas particulier mais plus générique. Nous parlons de **pratiques évoquées**. Enfin la troisième forme est encore plus indirecte ; elle est liée, en particulier, à la démarche d'homologie. Il s'agit de faire vivre aux stagiaires la situation d'enseignement en position d'élèves de façon à ce qu'ils puissent ensuite la transposer pour leurs propres pratiques. Cette transposition est à leur charge. Ainsi les pratiques ne sont pas explicites, elles doivent être déduites de la

situation vécue par les stagiaires. Nous parlons alors de **pratiques sous-jacentes**. Le schéma ci-dessous synthétise et rappelle les différents niveaux de pratiques et d'activités.

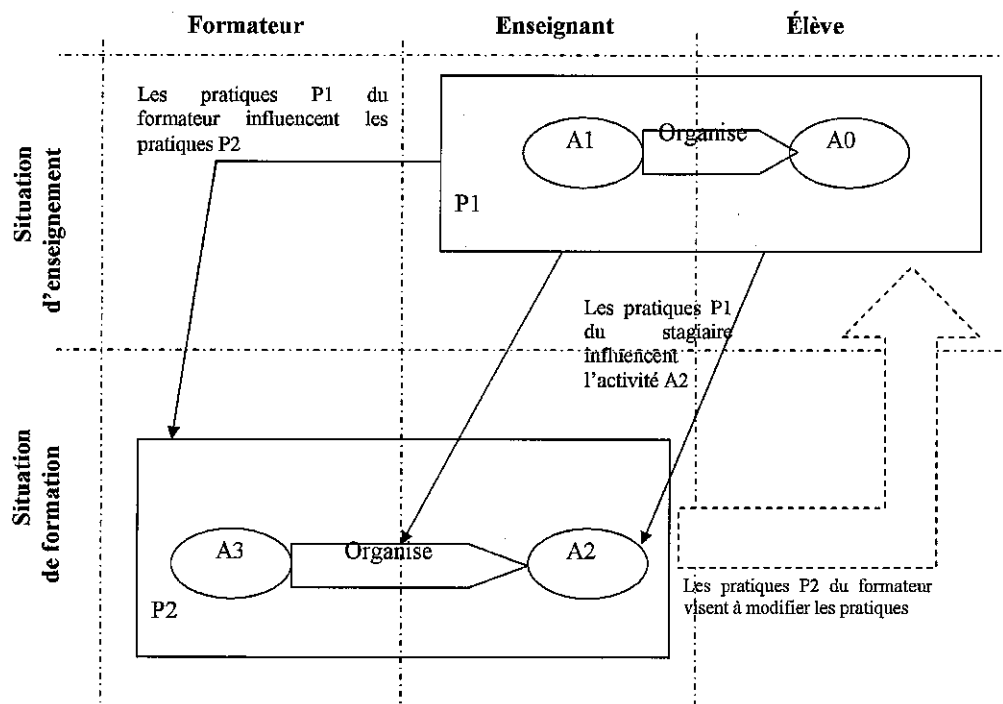


Schéma 2 : imbrication des différents niveaux de pratiques et d'activités.

Notre travail est centré sur l'analyse des pratiques de formation, ainsi nous n'analysons pas directement les pratiques de niveau P1, ni les activités de niveau A1 et A2, néanmoins elles apparaissent dans les formations comme facteur explicatif des pratiques de niveau P2 et des activités de niveau A2 et A3. Les cadres théoriques choisis, la double approche et l'approche instrumentale ne peuvent donc pas s'utiliser de la même manière pour les pratiques de niveau P2 et P1 enchâssées dans le niveau P2. Nous ne regardons pas l'activité du formateur comme une simple activité d'enseignement mais comme une pratique professionnelle au sens de la didactique professionnelle.

Puisqu'il s'agit d'une formation professionnelle, l'activité de l'enseignant, stagiaire lors de la formation, doit mettre en jeu de façon plus ou moins explicite la relation entre pratiques enseignantes et l'activité de l'élève. La double approche est un cadre conçu pour analyser les pratiques réelles des enseignants dans leur classe, elle nécessite de pouvoir observer le déroulement de la séance, de pouvoir interroger l'enseignant sur le contexte dans lequel il travaille. L'utilisation de la double approche dans le cas de pratiques sous-jacentes ou évoquées ne peut donc pas être directe. Pour l'analyse de vidéo elle risque fort d'être partielle si le formateur n'a pas fait le choix de garder toutes les informations nécessaires : enregistrement des échanges entre enseignant et élèves, questionnement de l'enseignant sur le contexte ou le projet de la séance... Pour ce qui est la démarche instrumentale il en est de même. Il est possible d'accéder aux besoins instrumentaux de la situation ou de faire des hypothèses sur la contribution de la situation à la genèse instrumentale de l'élève mais la démarche n'est pas adaptable intégralement. Nous choisissons donc d'utiliser ces cadres comme un moyen pour décrire les pratiques, d'une façon nécessairement partielle. Les choix du formateur peuvent alors être interprétés en terme de double approche et d'approche

instrumentale et vus comme une centration sur une partie du système plus ou moins importante.

III Analyse des représentations des formateurs et des formations

1. Présentation du corpus

Nos choix méthodologiques découlent de la spécification des cadres théoriques. Afin d'accéder aux cinq composantes décrites dans la double approche ainsi qu'aux différents niveaux de pratiques et d'activité, nous avons été amené à utiliser deux principaux dispositifs : une analyse des formations basée sur la double approche et une analyse des représentations des formateurs au moyen de questionnaires. Le Schéma 3 infra permet de visualiser les données recueillies.

Nous avons choisi d'analyser trois formations, pour chacune d'entre elles nous avons mené un entretien *a priori* avec le formateur durant lequel nous avons recueilli des informations sur le contexte de la formation, les enjeux et le déroulement prévu. Ceci nous permet de dégager les lignes d'action du formateur et d'obtenir des premières informations sur les composantes à accès indirect de la double approche. La formation est ensuite entièrement filmée et transcrite ce qui permet d'accéder aux composantes cognitives et médiatives. Nous nous sommes particulièrement intéressé aux contenus de la formation en terme de genèse instrumentale et de savoirs de formation proposés aux stagiaires. Nous avons également analysé la place des pratiques enseignantes dans la formation. Elles sont mises en lien avec une analyse de la nature des échanges durant la session. Pour terminer le recueil de données nous avons mené un entretien avec le formateur *a posteriori* en le questionnant sur les choix opérés lors de la formation ainsi que sur sa perception du déroulement. Cette partie nous permet de mieux comprendre les réactions à chaud durant la formation et de voir, par exemple, si ses choix sont déterminés par des savoirs professionnels conscients.

Nous avons choisi trois formations qui présentent des caractéristiques différentes afin de pouvoir dégager, encore une fois, un certain niveau de généralité. Sur les trois formations, une concerne les professeurs des écoles et les deux autres les professeurs des Collèges et Lycées ; deux concernent la formation initiale et une la formation continue ; leur durée va de trois heures à douze heures ; une est menée par deux formateurs alors que pour les deux autres le formateur est seul.

Afin d'accéder aux composantes à accès indirect : les composantes sociale, personnelle et institutionnelle de façon plus riche nous avons choisi de construire un questionnaire permettant d'accéder aux représentations des formateurs. Ce questionnaire donne lieu à une première passation dans le même IUFM où se sont déroulées les formations analysées et auprès de sept formateurs. Ce premier ensemble de données permet d'avoir une vision plus claire des composantes à accès indirect et de dégager une dimension locale des réponses. Pour dégager des invariants sur les formateurs en mathématiques et aux TICE nous avons été amené à compléter ce premier ensemble de données par sept autres passations dans toute la France. Toujours dans un souci de pouvoir déterminer le niveau de généralités des résultats obtenus nous avons confronté les résultats concernant la composante institutionnelle par une analyse des plans de formation disponibles en ligne. Cette analyse de données objective permet une mise en relation avec les réponses des formateurs.

2. Construction du questionnaire

Nous revenons à présent brièvement sur la construction du questionnaire. Il s'adresse au formateur en tant que formateur mais aussi en tant qu'enseignant ce qui permet d'accéder aux deux niveaux de pratiques. Les questions sur le formateur sont nourries par le travail d'Abboud-Blanchard (1994), de Robert (2005), Réhaume et Laferrière (2002). Ces chercheurs posent en particulier la question du statut du formateur en questionnant son parcours professionnel : Comment le formateur est-il devenu formateur ? Est-ce un « super enseignant » reconnu par ses pratiques ? Quel est son rapport aux TICE ? Quelle est l'influence de ses pratiques professionnelles en tant qu'enseignant dans les formations qu'il construit, ce qui peut également être interprété comme étant l'impact de la genèse instrumentale personnelle sur la genèse instrumentale professionnelle.

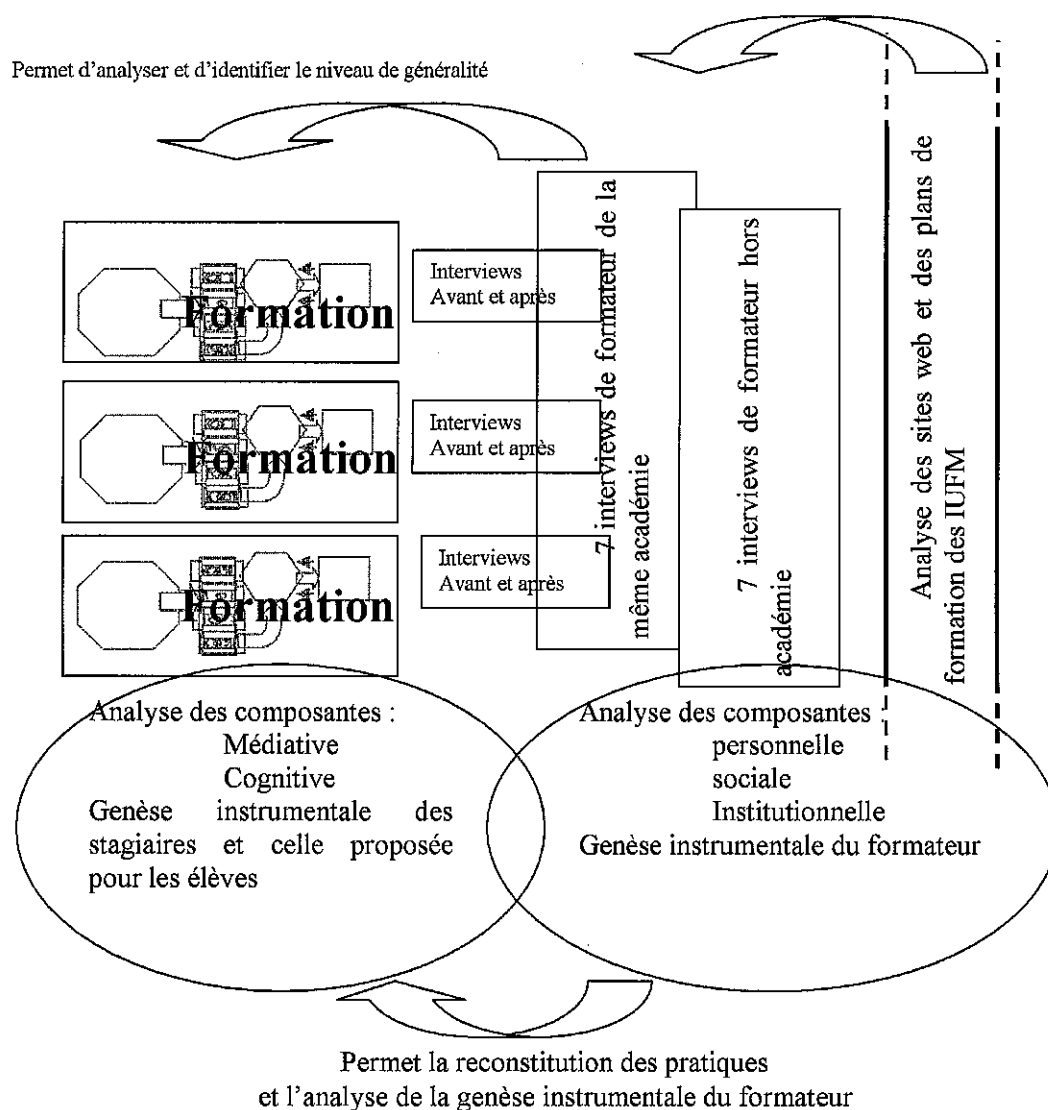


Schéma 3 : présentation du corpus de données et de la méthodologie.

Afin d'éviter le biais des questions directes nous avons choisi de varier les modes de questionnement et de permettre ainsi des recoupements. Le questionnaire est constitué de deux grandes parties, la première concerne le formateur et la seconde ses formations. Pour recueillir et croiser les informations nous avons utilisé plusieurs ressorts :

- des questions ouvertes comme par exemple : « Quelles sont les attentes du public ? » (dans les formations TICE que vous menez) ;
- des choix parmi une liste comme « en cas de problème informatique lors d'une formation :
 - Vous savez vous débrouiller seul pour tout mettre en route et tout installer
 - Vous appelez une personne ressource.
 - Vous mettez en place une autre activité n'utilisant pas les TIC à la place.
- Des analyses d'affirmations sur lesquels le formateur est appelé à donner son avis comme : « Confronter les élèves à des logiciels pédagogiques « bien conçus » permettrait à lui seul les apprentissages »
- Enfin nous avons utilisé une question inversée, c'est-à-dire que nous avons demandé aux formateurs comment faire échouer une formation aux technologies. En inversant les réponses à cette question nous pensons obtenir des informations plus spontanées et plus proches des représentations de l'enseignant.

L'ensemble de ces quatre types de questions permet une analyse statistique et des recoupements entre les différentes réponses. Elles sont mises en relation avec des informations sur le formateur liées à son parcours professionnel.

Nous avons conclu notre questionnaire en demandant aux formateurs de décrire les formations qu'ils mettent en œuvre, dans leur contenu, la démarche employée, les enjeux et le déroulement. Ces informations sont mises en lien avec les analyses de formations.

L'ensemble des données recueillies a fait l'objet d'une analyse croisée pour répondre à nos questions de départ. Nous présentons dans la suite les principaux résultats obtenus.

IV Résultats de l'analyse des formations et des formateurs

1. Vers la définition d'un genre professionnel

Nous remarquons des invariants non seulement dans la façon dont sont menées les formations en mathématiques et en TICE mais également dans les représentations des formateurs sur leur activité et sur l'activité d'enseignement avec les technologies. Ces invariants, que nous précisons dans la suite, permettent aux formateurs de mener à bien sa tâche dans un système de contrainte qui régit son intervention (la durée courte de la session de formation par exemple). Nous expliquons l'existence de ces conduites et de ces représentations communes par l'existence d'un genre au sens de Clot et Faïta (2000). Il y a une transmission du genre dans le temps entre les différentes générations de formateurs. Ce genre assure aux formateurs la viabilité de leurs formations. Plusieurs formateurs diront même qu'il est plus difficile, voire impossible de faire échouer des formations au TICE contrairement aux autres formations.

Nous avons dégagé deux grandes catégories de formateurs en fonction de la genèse instrumentale personnelle du formateur et donc de sa relation avec la technologie. Nous nous inspirons pour cela de la catégorisation de Réhaume et Laferrière (2002). La catégorie majoritaire chez les formateurs TICE est celle de formateurs mordus talentueux dont un exemple typique est Arne. Arne a plus de vingt ans d'ancienneté, il a subi une forte influence du plan IPT dont il n'a pourtant pu bénéficier qu'indirectement au travers de ses collègues. Il a suivi l'évolution des technologies et parle avec émotion des Z81 ou autres TO7¹⁶. Il a des usages personnels nombreux, photo et vidéo numérique, création de sites web... Pour lui les technologies sont naturelles. Il dira par exemple : « c'est devenu assez naturel, on se lève le

16 Ce sont des références d'ordinateurs personnels des années 1980 Spectrum ZX81 et Thomson TO7

matin, on allume son ordinateur, on s'informe ». Ces formations sont principalement basées sur l'homologie. La deuxième génération de mordus talentueux a également une histoire longue avec les technologies, ils ont été repérés lors de stages par la première génération et font des formations TICE par goût.

La deuxième catégorie est celle des optimistes besogneux caractérisés par Emmy. Ils ont une histoire courte avec les technologies initiée en réponse à une contrainte matérielle ou à des aspects pratiques. Leurs pôles d'intérêts sont limités et plus pragmatiques. Ils ont été amenés à encadrer des formations TICE du fait de l'évolution des plans de formation. Par exemple Emmy a acheté son premier ordinateur pour taper son mémoire de CAFIPEMF de façon plus confortable. Elle a une certaine crainte quant aux problèmes de matériel et une vision des TICE au service des apprentissages. Si cela n'apporte pas une plus-value elle n'utilise pas les technologies. Tout en gardant certaines caractéristiques du genre ses formations sont centrées sur des aspects didactiques alors que celles des mordus talentueux sont centrées sur l'artefact.

2. Représentations des formateurs

Quelles que soit la catégorie de formateurs ou leur ancienneté, leurs représentations sont communes en ce qui concerne les questions qui sont suffisamment anciennes pour avoir été rencontrées dans la pratique. Par exemple l'activité de l'enseignant ne se résume pas à exposer des savoirs ou encore le formateur est vu comme quelqu'un qui doit exposer des situations et des usages. Ils ne ressentent que peu de contraintes pour la mise en œuvre des technologies et d'ailleurs ne connaissent que très peu les contraintes institutionnelles. Par ailleurs l'analyse des plans de formation, c'est-à-dire de la contrainte institutionnelle « affichée » par les IUFM, fait apparaître des contraintes assez faibles et sans cohérence apparente au sein d'une même institution. Par exemple la mise en œuvre des TICE dans les formations didactiques peut être décrite dans le plan de formation avec un volume horaire imposé pour les PE2, alors que rien n'est explicité pour les PLC2.

Nous avons également remarqué que les formateurs utilisent leurs pratiques personnelles en formation à condition d'avoir des pratiques récentes.

Leur réponse à la question « contraposée » permet de définir leur vision de l'échec d'une formation par trois grandes impossibilités : impossibilité d'exploitation en classe ; impossibilité d'accès aux contenus ; impossibilité de déroulement. En conséquence une formation réussie est donc une formation : où les stagiaires peuvent exploiter les contenus en classe ; où les stagiaires peuvent accéder aux contenus ; une formation qui se déroule dans de bonnes conditions matérielles.

Les enjeux des formations sont caractérisés par le fait que le formateur doit présenter des possibles, des situations. Les effets des pratiques sur les élèves n'apparaissent que de façon sous jacente: « je leur présente des activités qui marchent » dira un des formateurs.

Cette analyse des composantes personnelle, sociale et institutionnelle nous permet de faire apparaître une rupture entre deux identités chez un même individu : celle du formateur et celle de l'enseignant. Alors que les formateurs affirment que le rôle de l'enseignant n'est pas de présenter des savoirs ou encore que la confrontation des élèves avec l'ordinateur ne peut pas, à elle seule, engendrer des apprentissages, ces affirmations sont réfutées pour la situation de formation. Cette rupture est d'autant plus importante dans notre analyse qu'elle est associée à un mode de formation basé pour plus de moitié des formateurs interrogés sur l'homologie, c'est-à-dire que les stagiaires vont avoir à déduire de ce qu'ils vivent en formation des informations pour leur pratique. Il y a donc un risque fort de tension entre ce que le formateur met en œuvre en formation et ce que son message « prône » pour l'enseignement. Ceci nous

amène à nous intéresser plus spécifiquement à la mise en œuvre des formations et aux dimensions méditative et cognitive.

3. Déroulement des formations basées sur l'homologie.

Nous avons fait un découpage des formations en épisodes, étapes et blocs, de la plus grande unité de sens à la plus petite. La composition d'un épisode est toujours la même. L'épisode commence par une présentation d'une activité autour d'un logiciel, puis est suivi d'une mise en activité des stagiaires et enfin d'une discussion plus ou moins longue autour de ce logiciel sur des questions techniques ou pédagogiques en fonction des formateurs. Nous avons ensuite mené une analyse quantitative et qualitative.

Le temps de travail autonome des stagiaires va de 50 % à 66 %. Puisque ce travail en autonomie se déroule en salle informatique il s'agit d'un temps de travail sur ordinateur. Lors du travail collectif il y a de 10 % à 20 % d'échanges. La répartition de l'initiative est variable d'une formation à l'autre et semble dépendre du formateur. La plus grande partie de ce temps de travail collectif est donc utilisée par le formateur. Nous nous sommes donc intéressé à la nature de des interventions, il y a 35 à 52 % de description, de ce que feraient les élèves, de ce que le stagiaire a à faire, des actions sur un logiciel, 44 à 62 % d'apports d'informations et 0 à 5% d'arguments / analyses. Nous avons classé un bloc dans la catégorie analyse à partir du moment où il y a avait un enchaînement d'idées avec une implication ou un lien de causalité. Par exemple : « mettre les élèves par deux sur les postes les oblige à argumenter » est classée en apport d'information alors que « en mettant les élèves par deux sur un ordinateur, il n'y a qu'une seule souris, ils sont donc obligés de se mettre d'accord pour choisir ce qui doit être fait, cela développe donc les échanges entre élèves » est classé dans les analyses.

Nous pouvons donc conclure sur l'organisation de ces formations qu'elles sont basées sur la confrontation entre les stagiaires et l'ordinateur avec une partie très importante d'apports d'informations du formateur. Il y a une opposition avec les représentations relevées chez les formateurs : l'outil n'est pas efficace intrinsèquement et la présentation seule de dispositifs est insuffisante.

Les contenus font apparaître plusieurs savoirs professionnels au niveau de la fonction de l'outil informatique et des modalités de mises en œuvre. Les TICE sont un bon outil pour la conjecture dans la mesure où elles permettent de réduire le coût des essais - erreurs. Il s'agit également d'un lieu de résolution de problème. Deux démarches sont proposées :

- l'utilisation d'un vidéo projecteur en salle de classe, dans ce cas les formateurs conseillent de placer un élève « sherpa » qui manipule pour les autres,
- le déplacement des élèves en salle informatique, dans ce cas il s'agit de mettre deux élèves par poste afin de favoriser le débat. Une formation propose de mettre les TICE au centre d'un dispositif papier crayon avec des allers-retours entre ordinateurs et tables.

Dans la suite de notre analyse nous avons utilisé nos cadres théoriques comme une grille de lecture des pratiques professionnelles insérées dans la formation. Nous remarquons que les composantes sociale, personnelle et institutionnelle n'apparaissent quasiment pas sauf de façon informelle : « Stagiaire : Et toi, alors, tu travailles en classe entière ? ». La dimension médiative apparaît dans le cadre d'analyse de vidéo et de narrations de situations mais n'est pas réellement questionnée. Pour ce qui est de la vidéo il s'agit plus de prouver la viabilité du dispositif et de donner du crédit à la situation proposée puisqu'elle s'est déroulée dans une « vraie » classe que de faire une réelle analyse. Enfin la dimension cognitive des pratiques n'est développée que dans une formation au moyen d'outil de didactique de la géométrie.

En ce qui concerne la contribution des formations à la genèse instrumentale des enseignants nous avons analysé l'impact de la prédominance de la confrontation des stagiaires avec l'artefact. Il apparaît que ces formations induisent des confusions entre les différentes genèses instrumentales. A titre d'exemple nous prenons la formation de Arne au tableur. Il travaille sur les « boîtes noires » : dans le tableur une formule cachée opère sur les cellules, l'élève doit tester l'effet de la formule sur des nombres bien choisis pour déduire la formule. Du point de vue de l'élève les besoins instrumentaux de la situation sont minces. Il doit être conscient du fonctionnement du tableur et du fait que ce dernier opère sur les nombres de façon rationnelle. Or Arne souhaite faire construire aux enseignants de telles feuilles de calcul ce qui l'amène à proposer des activités pour les élèves qui relèvent plus du travail de l'enseignant. Il raconte durant la formation ce qui se passerait avec des élèves : « Alors tu choisis une cellule vide, comment calculer $2+3$? Les élèves proposent alors de faire ce qu'ils auraient fait avec une calculatrice " $2+3=$ " et ils se rendent compte que ça ne marche pas. [...] et là, habituellement les élèves ne trouvent pas la syntaxe d'eux-mêmes. En fait ça n'est pas logique. J'essaie de les aider, je leur dis "il faut dire à l'ordinateur que c'est un calcul alors il faut mettre quelque chose qui lui annonce que ce n'est ni un nombre ni un texte" [...] et là ils tapent " $=2+3$ " et ça marche. Bon on continue c'est la première leçon et ça dure une heure... ». Il y a donc un fort décalage entre ce qui est proposé ici : faire deviner aux élèves la syntaxe d'une fonction dans le tableur et l'utilisation d'une « boîte noire ».

V Conclusion de l'analyse des formations et des formateurs et hypothèses

Nos principaux résultats sont la construction de catégories de formateurs en relation avec leurs genèses instrumentales ainsi que la mise en évidence d'une rupture entre deux identités celles d'enseignant et de formateur. Nous avons également contribué à la définition d'un genre professionnel des formateurs de mathématiques utilisant les TICE. Notre analyse montre qu'un des écueils des situations d'homologie est d'introduire une confusion entre les différentes genèses instrumentales, de l'élève et de l'enseignant.

Les évolutions récentes, en particulier dans le cahier des charges pour la formation des enseignants qui introduit la nécessité de maîtriser les TICE pour enseigner nous amènent à nous questionner sur l'évolution de nos catégories de formateurs qui ne sont pas figées. De nouveaux usages sont également apparus ces dernières années, en particulier avec les portfolios numériques. Est-ce que les compétences techniques des optimistes besogneux se sont accrues et ont par là même fait évoluer leurs pratiques ? Est-ce que ces contraintes institutionnelles ont amené les mordus talentueux à se décentrer de l'artefact ? Nous avons quelques pistes de réponse issues d'entretiens informels avec Emmy par exemple. Elle nous dit qu'elle a amélioré ses compétences techniques pour un usage personnel mais sans pour autant se sentir à l'aise dans le cadre professionnel. Elle a mis en place de nouvelles stratégies comme par exemple le recours aux compétences des stagiaires en cas d'incident technique mais sans modifier la nature de ses formations. De même Arne ne semble pas avoir modifié ses pratiques. Néanmoins ces questions ne sont pas résolues et mériteraient un traitement rigoureux.

VI Introduction d'une composante réflexive dans une formation

Pour revenir à présent sur la question de départ, celle de l'analyse du manque d'efficacité des formations nous avons pu mettre en évidence deux pistes : les écueils induits par la démarche

d'homologie et un décalage entre les attentes des enseignants et les potentialités des TICE présentées par le formateur comme explicité par Ruthven et Hennessy, (2002) et Lagrange et Dedeoglu (en préparation). Alors qu'un des modèles sous-jacents de la formation en IUFM est celui du praticien réflexif de Schön (1994) et que les recherches françaises sur les formations telles que Altet (1994)(2000), Perrenoud (2003) mettent un fort accent sur l'analyse de pratiques il est remarquable qu'aucune allusion n'y soit faite dans les formations aux mathématiques et aux TICE.

1. Hypothèses

Cela nous amène à envisager l'introduction d'une composante d'analyse réflexive de pratiques ordinaires et à formuler quatre hypothèses :

- L'analyse de pratiques réelles permettrait d'initier chez l'enseignant une posture réflexive (propice à la transformation de ses pratiques.)
- Amener des stagiaires à analyser un problème professionnel réel leur permet de confronter leurs représentations, de mobiliser leurs connaissances issues de la pratique et leurs connaissances théoriques pour arriver à des consensus basés sur des arguments.
- Une analyse des pratiques professionnelles prenant en compte plusieurs dimensions des pratiques au sens de la double approche et basée sur l'analyse de la relation pratiques enseignantes – activité de l'élève permet aux stagiaires de mobiliser leurs connaissances pratiques et leurs connaissances théoriques
- Il est nécessaire de contribuer, en formation, aux genèses instrumentales professionnelles de l'enseignant et d'analyser les situations en termes de besoins instrumentaux et de genèse instrumentale potentielle de l'élève

Afin de vérifier ces hypothèses nous utilisons la méthodologie de l'ingénierie didactique¹⁷ que nous spécifions à la situation de formation. Cette méthodologie définie par Chevallard (1982) et Artigue (2002) est basée sur la vérification d'hypothèses émises *a priori*. Ainsi il nous faut, pour mettre à l'épreuve nos hypothèses, définir des critères observables que nous allons ensuite rechercher dans des mises en œuvre pratiques. Nous déclinons donc nos quatre hypothèses en sept critères observables dans les mises en œuvre :

- La capacité des stagiaires à identifier et à poser un problème
- La formulation et l'utilisation, par le stagiaire, de connaissances pratiques associées à des connaissances théoriques pour analyser la pratique
- L'implication des pratiques personnelles du stagiaire, de ses propres compétences pratiques dans l'analyse.
- Les stagiaires arrivent à un consensus en s'appuyant sur les savoirs pratiques et théoriques.
- L'a-didacticité de la situation.
- Le fait que l'analyse permette de prendre en compte plusieurs dimensions des pratiques
- Il doit alors être possible d'identifier des indices d'une genèse d'instrument professionnel permettant aux enseignants non seulement d'envisager des actions instrumentées mais d'en envisager les implications, parfois contradictoires, sur l'activité de l'élève.

2. Scénario de formation

Le scénario qui découle des hypothèses que nous souhaitons vérifier est inspiré de Pouyanne et Robert (2004, 2005). Il est basé sur l'analyse des pratiques professionnelles au moyen

¹⁷ Nous différencions cette méthodologie du concept d'ingénierie de formation (Le Boterf (1999) qui permet de décrire un processus allant de la définition des besoins de formation, à la définition des contenus, leur mise en œuvre et l'évaluation de leurs effets.

d'une vidéo. Quatre temps sont définis : une analyse *a priori* de la séance proposée et l'émission d'hypothèses sur les effets des pratiques enseignantes ainsi que sur l'activité de l'élève ; une analyse de la vidéo et une confrontation du prévu avec le réalisé ; une recherche d'alternatives basée sur la question « Et vous, qu'auriez-vous conçu en terme de situation à la place de l'enseignant observé » ; et enfin une discussion autour d'une problématique émergeant des trois premiers temps. Le Schéma 4 infra reprend une description de ces différentes étapes.

Nous avons mis en œuvre ce scénario à deux reprises : la première fois lors d'un stage d'enseignants du second degré en analysant l'utilisation de Cabri Géomètre™ pour travailler sur la démonstration de la concurrence des médiatrices du triangle en 4^{ème} ; la seconde fois lors d'un stage avec des enseignants du premier et du second degré autour d'une vidéo montrant l'utilisation de l'atelier de géométrie pour résoudre un problème ouvert. Dans les deux cas la plupart des indicateurs montrent que les critères attendus apparaissent chez « beaucoup » de stagiaires. Il est vrai néanmoins que lors d'une formation de trois heures un nombre limité de stagiaires peut s'exprimer et en conséquence l'évaluation interne de notre méthodologie n'est que partielle.

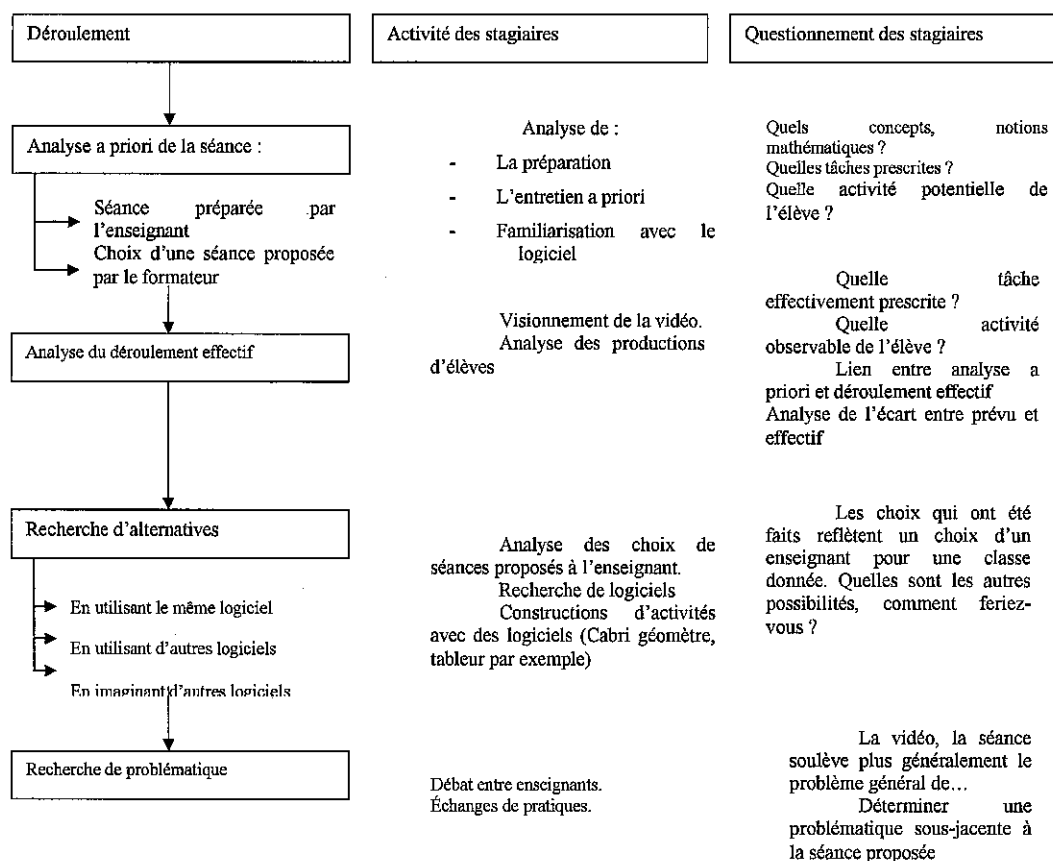


Schéma 4 : scénario de formation

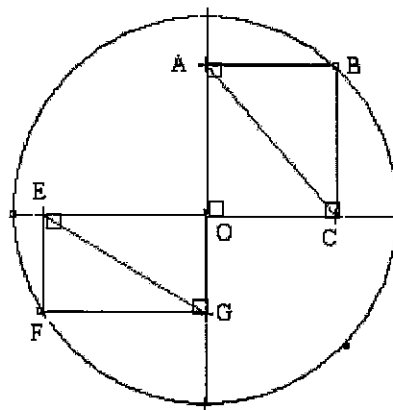
Il est en revanche à noter deux modifications du scénario initial : Un temps d'appropriation de la situation par les stagiaires a été introduit pendant l'analyse *a priori* de la situation et le temps de discussion final a été supprimé. Pour la première modification nous pouvons avancer le fait que le manque de familiarisation des stagiaires avec l'artefact les empêche de

faire une analyse *a priori* de la situation. Ce temps de confrontation n'est pas un temps d'homologie même si les stagiaires font ce qui est attendu des élèves. Cela s'apparente donc à une analyse du logiciel. La deuxième modification vient du fait que les stagiaires ont beaucoup argumenté lors des deux premières phases et qu'il est apparu au formateur que les sujets de débat potentiel étaient épuisés. Un dernier point remarquable est qu'il y a eu à chaque fois un retour au genre professionnel que nous avons défini, au moment du travail sur la recherche d'alternative. Face au mutisme des stagiaires le formateur a repris une démarche de présentation de situations potentielles et a demandé aux stagiaires de tester les différentes possibilités.

3. Principaux résultats sur l'ingénierie

Les principaux résultats de cette ingénierie didactique en lien avec nos critères sont donc dans un premier temps la difficulté à conserver l'a-didacticité de la situation de formation ainsi que la nécessité de conserver un temps d'utilisation de l'artefact. Cette utilisation de l'artefact participe à l'analyse de la situation mais elle semble également correspondre aux attentes du stagiaire. La prise en compte de plusieurs dimensions des pratiques a pu s'opérer mais en nombre inférieur à ce qui était prévu. Il semble que si un travail à la fois sur les dimensions cognitive et méditative est possible ainsi que son association avec la prise en compte d'une des composantes à accès indirect, il est difficile de traiter toutes les composantes à accès indirect. Le scénario construit permet effectivement une analyse réflexive des pratiques qui met en jeu des savoirs issus de la pratique mais ce sont les savoirs non TICE qui sont utilisés pour analyser le problème d'introduction des TICE. La dissociation des genèses instrumentales des enseignants et des élèves est effective comme en atteste le Schéma 5 infra. Ce schéma montre comment la formation contribue aux genèses instrumentales professionnelles des stagiaires en leur permettant d'envisager les implications des choix qu'ils opèrent. Il s'agit de la situation sur le problème ouvert durant laquelle les élèves doivent d'abord réaliser le dessin ci-contre sur un logiciel de géométrie dynamique (LGD) puis conjecturent pour répondre à la question : laquelle des longueurs OE ou AC est la plus grande. Le travail se termine par une recherche de preuve.

Ainsi les enseignants analysent la place de la première partie de l'activité (la construction dans le LGD) comme ayant des objectifs spécifiques distincts de la recherche sur le problème proposé. Il s'agit de mettre à profit les primitives pour travailler le formalisme mathématique par exemple. Les stagiaires proposent donc un deuxième point d'entrée possible dans la situation, avec le dessin réalisé dans le LGD, qu'il ait été fait par l'élève lui-même lors d'une séance préalable ou qu'il ait été fourni par l'enseignant. Avec ce point d'entrée le LGD est un outil de conjecture qui permet à l'élève de travailler sur une classe de dessin et non sur un dessin. Les écueils possibles sont également listés comme par exemple le risque de nuire à l'idée de démonstration en fournissant une garantie de la véracité du résultat au même titre que la calculatrice permet de donner une garantie du résultat d'un calcul.



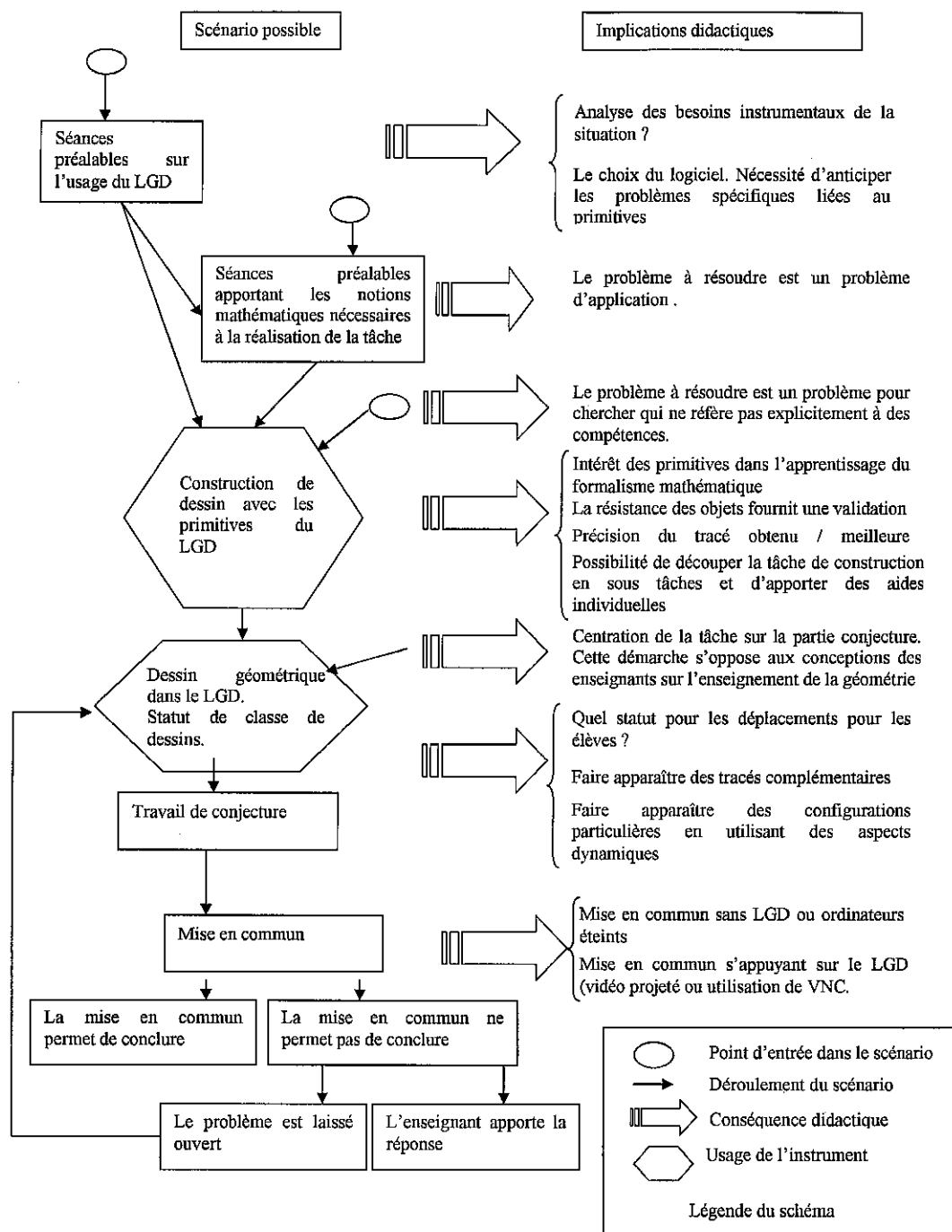


Schéma 5 : analyse des implications liées au choix de scénario dans l'usage de l'artefact

Pour conclure nous proposons quelques pistes de réflexion pour prolonger ce travail.

Comme nous le précisons à l'issue du premier axe de notre travail sur les formateurs, notre contribution à la définition d'un genre professionnel est ponctuelle et mérite d'être complétée et affinée, en particulier au niveau de l'émergence possible de styles nouveaux inhérents à l'apparition de nouveaux types de formateur.

Une réflexion sur les autres pistes d'analyse de pratiques telle que l'analyse de pratiques réelles ou encore les pratiques simulées comme dans le travail de Morges (2006) nous paraît

une piste à explorer. Enfin le fait que les enseignants utilisent des savoirs issus de leurs pratiques « non TICE » pour analyser les pratiques « TICE » nous permet d'envisager la formation aux TICE comme levier pour la formation des enseignants.

VII Bibliographie

Abboud Blanchard M. (1994), *L'intégration de l'outil informatique à l'enseignement secondaire : symptômes d'un malaise*, Thèse de doctorat, Université Paris VII

Altet M. (1994), *La formation professionnelle des enseignants*, PUF

Altet M. (2000), L'analyse de pratiques : une démarche de formation professionnalisante ?, *Recherche et Formation*, n° 35, pp. 25-41

Archambault J.-P. (2005), 1985, vingt ans après... Une histoire de l'introduction des TIC dans le système éducatif français, *Médialog* n° 54.

Artigue M. (2002), Ingénierie didactique : quel rôle dans la recherche en didactique aujourd'hui, *Revue Internationale des Sciences de l'éducation*, n°8, 59-72.

Assude T. Grugeon B. (2003), Enjeux et développement d'ingénieries de formation des enseignants pour l'intégration des TICE, *Actes du colloque ITEM – Reims*.

Chevallard Y. (1982). *Sur l'ingénierie didactique*. Preprint. IREM d'Aix Marseille

Clot Y. et Faïta D. (2000), Genres et styles en analyse du travail Concepts et méthodes, *Travailler* n°4, Paris, CNAM, 7-42.

DPD (2004), Les attitudes des enseignants vis-à-vis des technologies de l'information et de la communication dans les premier et second degrés, *Les dossiers de la DEP* n° 257, septembre 2004, 102 p., téléchargeable à l'adresse :

<ftp://trf.education.gouv.fr/pub/edutel/dpd/dossiers/dossier157/dossier157.pdf>

et note d'évaluation 03-04 téléchargeable à l'adresse :

<ftp://trf.education.gouv.fr/pub/edutel/dpd/noteeval/ne0304.pdf>

Empirica 2006, *Information Society and Media Directorate General, Benchmarking Access and Use of ICT in European Schools 2006 Final Report from Head Teacher and Classroom Teacher Surveys in 27 European Countries*, empirica, téléchargeable à l'adresse :

http://ec.europa.eu/information_society/eeurope/i2010/docs/studies/final_report_3.pdf

IGEN, *Inspection générale de l'éducation nationale, L'enseignement des mathématiques au cycle 3 de l'école primaire*, Rapport - n° 2006-034, juin 2006 téléchargeable à l'adresse :

<http://media.education.gouv.fr/file/46/0/3460.pdf>

Jones A. (2004), *A review of the research literature on barriers to the uptake of ict by teachers*, Becta 2004.

Lagrange JB., DEDEOGLU N. (soumis) Usages de la technologie dans des conditions ordinaires. Le cas de la géométrie dynamique au collège. Potentialités, attentes, pratiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*

Le Boterf G. (1999) Les défis posés à l'ingénierie de formation et à la production des expertises collectives. Quelles évolutions prendre en compte ? Quelles conséquences pratiques ?, *Journées d'étude "Ingénierie des dispositifs de formation à l'international"* - 24-25 novembre 1999 – Montpellier.

Monaghan J. (2004) Teachers' Activities in Technology-Based Mathematics Lessons, *IJCML* n°3 vol. 9, Springer.

- Morges L. (2006), La formation d'enseignants par l'analyse de pratiques simulées sur ordinateur : présentation du dispositif et premières évaluations, *contribution au Colloque Formation d'enseignants : quels scénarios ? Quelles évaluations ?*, IUFM de l'académie de Versailles, 16 et 17 mars 2006, site d'Antony, accessible à : <http://www.versailles.iufm.fr/colloques/scenarios/pdf/Morge.pdf>
- Perrenoud P. (2003), L'analyse de pratiques en questions, In *Cahiers Pédagogiques*, n° 416, Accessible en ligne : http://www.unige.ch/fapse/SSE/teachers/perrenoud/php_main/textes.html
- Pouyanne N., Robert A. (2004), *Formation d'enseignants de mathématiques du second degré : élément pour une formation, Document pour la formation des enseignants*, Cahier bleu de DIDIREM n°5 juin 2004, Université Paris 7 - Denis Diderot.
- Pouyanne N., Robert A. (2005), *Analyse de vidéo de séance de classe : des tâches prescrites aux activités des élèves en passant par des pratiques des enseignants de mathématiques (seconde degré)*, Document pour la formation des enseignants, Cahier bleu de DIDIREM n°2 mai 2005, Université Paris 7 - Denis Diderot.
- Rabardel P. (1995), *Les hommes et les technologies : une approche cognitive des instruments contemporains*, Paris : Université de Paris 8. Accessible à l'adresse : <http://ergoserv.univ-paris8.fr/site/groupes/modele/articles/public/art372105503765426783.pdf> <http://ergoserv.univ-paris8.fr/site/groupes/modele/articles/public/art372102061765426783.pdf>
- Rabardel P. (1999), éléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques, conférence, *Actes de l'université d'été, Université de Caen*.
- Rabardel P. (2005), Instrument subjectif et développement du pouvoir d'agir, In : Rabardel P. et Pastre P. (eds) *Modèles du sujet pour la conception, dialectiques activités développement*, Octarès, 11-31
- Rhéaume J., Laferrière T. (2002), Les communautés virtuelles d'apprentissage, In : Guir R. (dir). *Pratiquer les TICE. Former les enseignants et les formateurs à de nouveaux usages*. De Boeck.
- Robert A. (1999), Recherches didactiques sur la formation professionnelle des enseignants de mathématiques du second degré et leurs pratiques en classe, *DIDASKALIA* 15.
- Robert A., Roditi E., Grugeon B. (2007), Diversités des offres de formation et travail du formateur d'enseignants de mathématiques du secondaire, *Petit x*, IREM de Grenoble
- Robert A. (2005), Sur la formation des pratiques des enseignants du second degré, *Recherches et Formation* n°50, 75-90.
- Robert A. et Rogalski J. (2002), Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche, *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, vol2, n°4
- Robert A. et Rogalski J. (2003), A cross-analysis of the mathematics teacher's activity. An example in a French 10th-grade class, *Recherches en Didactique des Mathématiques*
- Ruthven K. et Hennessy S. (2002), A practitioner model of the use of computer based tools and resources to support mathematics teaching and learning, *Educational Studies in mathematics*, Kluwer Academic publishers
- Schön D.-A. (1994), *le praticien réflexif*, traduit par Heynemand J. et Gagnon D les éditions logique. traduit de «the reflexive practitioner», (1983), basic book inc. U.S.A.
- SDTICE, 2005, *rapport SDTICE 2005*, SDTICE, MEN

TIMSS et PIRLS, 1995, résultats extractibles à partir du site : <http://timss.bc.edu/>

Vergnes D. (2001), Effet d'un stage de formation en géométrie sur les pratiques d'enseignants de l'école primaire, *Recherches en didactique des Mathématiques*, vol.21 n°1.2, 99-122, La pensée Sauvage

Développement professionnel des professeurs débutants pendant les premières années d'exercice

B. Grugeon-Allys

Équipe DIDIREM

IUFM d'Amiens – Université Jules Verne - Amiens

Résumé

Dans le cadre de l'IUFM d'Amiens, une nouvelle équipe de formateurs a pris en charge le dispositif de formation des PLC2 de mathématiques. Nous nous sommes interrogée sur le choix et les potentialités des situations de formation existantes en termes de construction des différents aspects des pratiques enseignantes. Les situations de formation existantes étaient essentiellement centrées sur les apprentissages des élèves, très peu sur le travail réel de l'enseignant. Aussi, guidée par l'expérience d'une recherche portant sur l'étude des effets d'une formation sur l'intégration des TICE et par les choix proposés dans la formation des PLC2 de l'IUFM de Reims et dans le Master professionnel (Robert, Pouyanne 2004), nous avons proposé un nouveau dispositif de formation des PLC2 de mathématiques. Ce nouveau dispositif de formation vise aussi à travailler les pratiques réelles des enseignants débutants en lien avec l'exercice du métier au quotidien dans les classes.

Depuis 2005, dans le cadre d'un appel d'offres de recherche de l'IUFM d'Amiens en collaboration avec le groupe de recherche enseignant du second degré du laboratoire DIDIREM à l'université Denis Diderot Paris 7, nous menons un projet de recherche portant sur « l'étude des effets de la formation sur les pratiques enseignantes dans les trois premières années d'exercice ». Nous avons eu la possibilité et la chance de suivre des enseignants débutants, formés à l'IUFM d'Amiens sur 3 ans. Ces enseignants ont des profils différents et exercent dans des établissements variés.

Dans une première partie, nous présentons les questions initiales. Nous proposons ensuite une synthèse des différentes approches théoriques, synthèse contextualisée aux questions initiales et nous précisons la problématique de la recherche. Nous explicitons ensuite la méthodologie adoptée et l'illustrons à partir d'une étude de cas.

Mots clefs

Pratiques enseignantes, dispositif de formation initiale, situation de formation, développement professionnel, analyse multidimensionnelle, croisement de cadres théoriques

I Présentation de la recherche

Des questions initiales

Les questions initiales travaillées dans cette recherche sont les suivantes :

- Quels éléments du développement professionnel des enseignants débutants ont pu évoluer au cours de la formation, puis des premières années d'exercice? Quelles diversités inter et intra enseignants? Quelles éventuelles régularités voire stabilités en germe? Quelles variabilités?
- Quelles relations entre ces régularités et variabilités et les activités organisées en formation à l'IUFM d'Amiens dans la filière mathématiques?

- Quelles hypothèses faire sur les déterminants des pratiques en lien avec le profil du professeur, les apports de la formation initiale et continue, des contraintes externes ou internes qui pèsent sur les pratiques ?
- Nous étudions le « développement professionnel » d'enseignants débutants, c'est-à-dire l'évolution des connaissances complexes développées sur l'enseignement des mathématiques et le métier d'enseignant par les enseignants débutants et l'évolution de leur pratique hors la classe, en particulier la préparation des séances, et dans la classe. Ces enseignants ont suivi une formation initiale à l'IUFM. Leur développement professionnel peut être la résultante de la confrontation de plusieurs éléments : d'une part la formation suivie en PLC2, voire en T1, d'autre part leur profil personnel et des déterminants des pratiques, les contraintes internes ou externes du métier comme les programmes, les contraintes d'exercice dans leur établissement et le public d'élèves concerné.

II Approche théorique et méthodologique

Les pratiques des enseignants débutants

Des travaux précurseurs

De nombreuses recherches ont étudié les conditions pour l'enseignement et l'apprentissage mises en place par les enseignants débutants. Au-delà de la gestion du temps, plusieurs types de difficultés semblent récurrents chez les enseignants débutants :

- La sélection de contenus mathématiques en prenant en charge les élaborations mathématiques nécessaires lorsqu'il s'agit de les motiver et de les enseigner à un niveau d'enseignement donné (Cirade 2007) : les enseignants débutants sont ainsi amenés à prendre conscience que les mathématiques à enseigner se révèlent problématiques ;
- La priorité donnée à un projet local, notamment sur le plan mathématique, à l'échelle de la séance voire de quelques séances, qui ne s'inscrit pas toujours en cohérence dans un projet global, une séquence ou *a fortiori* dans une progression annuelle (Margolinas et Rivière 2005, Bloch 2005) ;
- Le manque de repères pour organiser l'enseignement des notions, notamment en ce qui concerne leur introduction, ou encore pour accompagner le travail mathématique des élèves : organisation d'intermédiaires, d'adaptations pour organiser la résolution des problèmes, oubli de la nécessité de construire du sens (Bloch 2005) ;
- L'aménagement d'un milieu pertinent pour favoriser l'activité et l'apprentissage des élèves. Souvent le manque de variabilité des formes pédagogiques empêche « la variation nécessaire des rapports aux objets du milieu des situations didactiques selon le type de travail épistémologique qui est attendu des élèves » (Assude T., Mercier A., Sensevy G 2007) ;
- La naturalisation de certaines notions mathématiques et l'oubli des difficultés d'apprentissage qui les conduisent trop rapidement à donner et exiger des expressions très abouties (Lenfant 2002, Bloch 2005).

Robert a renvoyé à d'autres types de difficultés. Les enseignants débutants éprouvent des difficultés à prendre en compte et à gérer des tensions et des dilemmes auxquels ils sont confrontés, liée à l'importance de mobiliser des connaissances professionnelles en lien avec le contexte dans lequel ils enseignent (Robert, Roditi, Grugeon 2008).

Cet autre point de vue s'appuie sur les travaux issus à la fois de l'approche ergonomique (en particulier la théorie de l'activité) et de la didactique, la double approche de Robert et Rogalski (2002).

Ce changement de point de vue nous amène à questionner à la fois le développement de pratiques, complexes, rapidement stables, et les dispositifs de formation existants, en particulier les modalités de formation pour « prendre en compte les pratiques réelles des enseignants et respecter leur complexité » (Robert, Roditi et Grugeon 2008).

Des modalités de formation liées à l'alternance formation/terrain/formation permettraient d'aborder les contraintes et les marges de manœuvre de l'enseignant en classe, de favoriser des dynamiques entre situations de classe, prise de conscience et apport de connaissances sur le temps long, à partir de modalités de travail adaptées.

Des questions d'ordre théorique

Comment repérer et interpréter les connaissances construites en interaction avec la formation ?

Comment décrire et interpréter les pratiques hors et dans la classe ? Comment les recomposer ?

Dans le champ de la didactique des mathématiques, la description des connaissances qui outillent la professionnalité, celle des pratiques, sont liées au choix des approches théoriques et des outils privilégiés pour analyser et jauger les apprentissages visés par les choix de l'enseignant. Les recherches sur les pratiques enseignantes se sont largement développées au fil des dernières années. Les nouvelles questions ont amené les chercheurs à étendre les cadres théoriques déjà développés. En France, plusieurs enrichissements ont vu le jour : l'extension de la notion de milieu dans le cadre de la théorie des situations pour mieux comprendre le rôle du professeur dans les classes ordinaires (Margolinas 1995, 2002), l'extension de la transposition didactique pour décrire l'organisation de l'étude (Chevallard 1999, 2002), la combinaison de ces deux théories pour définir un modèle de l'action didactique du professeur (Sensevy, Mercier et Schubauer-Leoni 2000), l'approche didactique et ergonomique pour mieux prendre en compte la complexité des pratiques enseignantes (Robert et Rogalski 2002). Ces approches théoriques éclairent chacune de façon différente les pratiques enseignantes, mettent certaines dimensions en lumière et en laissent d'autres dans l'ombre.

Chevallard (Chevallard 1999, 2002) modélise l'activité du professeur selon deux grandes composantes co-déterminées les organisations mathématiques et didactiques. Sensevy, Mercier et Schubauer centrent leur étude sur celle de l'activité enseignante à produire des lieux pour le professeur et l'élève (effet de topogenèse), à produire des temps de l'enseignement et de l'élève (effet de chronogenèse), à produire les objets des milieux des situations et l'organisation des rapports à ces objets (effet de mésogenèse) (Sensevy, Mercier, Schubauer-Leoni 2000). Margolinas développe le modèle de la structuration du milieu pour étudier l'activité du professeur en interaction avec un milieu décomposé suivant cinq niveaux, liés à différents niveaux du projet d'enseignement en cours. Diverses échelles d'activité et de temporalités sont mises en jeu.

Ces trois entrées mettent l'accent sur l'analyse des potentialités des situations et des séquences en termes d'apprentissage visé ou de continuité des apprentissages en lien avec les savoirs en jeu mais laissent davantage en filigrane l'étude de l'activité réelle des élèves en lien avec les interventions de l'enseignant en classe et les contraintes réelles du métier. C'est l'analyse des couples (contenus, déroulements effectifs) en lien avec les contraintes effectives du métier qui est privilégiée pour étudier les pratiques réelles des enseignants dans le cadre de

la double approche (Robert et Rogalski 2002). Pour attraper la complexité du développement professionnel des enseignants débutants et en permettre sa description en perspective de la formation proposée, nous articulons ces différentes approches.

Une entrée privilégiée

Pour étudier le développement professionnel des enseignants débutants, sur le long terme, ici de un à trois ans, nous mobilisons le cadre théorique de la double approche. Cette approche permet une interprétation diachronique et globale de l'évolution des pratiques des enseignants débutants. Quels sont les éléments à prendre en compte pour analyser les pratiques ? Les pratiques d'un enseignant mettent en jeu des activités en partie observables, en classe et en dehors de la classe, en direction des élèves et de leurs apprentissages, faisant intervenir des contenus et des modes de gestion. Mais elles sont aussi largement contraintes, par delà même ces objectifs, par des déterminants internes liés à l'exercice du métier d'enseignant : institutionnels, sociaux... Ce peuvent être les programmes, les horaires, les établissements, les classes et leur composition... Ces contraintes « déterminent des normes que tout professeur doit respecter s'il ne veut pas être marginalisé par rapport à ces collègues » (Butlen et al 2002). Enfin, elles dépendent aussi de contraintes internes liées aux personnes.

Pour analyser et interpréter la complexité des pratiques enseignantes, il s'agit donc de tenir compte de composantes liées à la fois aux apprentissages des élèves, les composantes cognitive, médiative et personnelle mais aussi à l'exercice du métier, les composantes institutionnelle et sociale.

La composante cognitive traduit ce qui correspond aux choix de l'enseignant concernant l'élaboration et la réalisation des séquences et séances sur, les contenus, les tâches, leur organisation, leur quantité, leur ordre, leur insertion au sein de la séquence, et les prévisions de gestion pour les séances. Elle renseigne donc sur l'itinéraire cognitif choisi par l'enseignant.

Les choix correspondant aux déroulements réels, les improvisations, les discours, l'enrôlement des élèves, la dévolution des consignes, l'accompagnement des élèves dans la réalisation des tâches, les validations, les expositions de connaissances, incrémentent la composante médiative. Cette composante renseigne sur les cheminements organisés pour les différents élèves en classe.

Les composantes personnelle, institutionnelle et sociale permettent d'étudier des contraintes qui pèsent sur les pratiques :

- *via* les singularités de l'enseignant (conceptions, savoir mathématique, ..)
- *via* la prise en compte des contraintes, de déterminants, liés à l'exercice du métier, d'ordre institutionnel (programmes, ..) ou social (type d'établissement, milieu des élèves, ..).

Robert et Rogalski (Robert et Rogalski 2002) analysent les pratiques selon trois niveaux d'organisation pour tenir compte de diverses temporalités et échelles d'activités :

- le niveau macro, celui des projets global et local dans les préparations en lien avec les conceptions¹⁸,
- le niveau local, celui de la classe au quotidien où se rencontrent les préparations et les improvisations lors de la réalisation effective de la séance et toutes les adaptations du professeur en lien avec l'observation de l'activité des élèves¹⁹,

18 A partir des observables : au niveau global, l'organisation des contenus « introduction / synthèse et cours / exercices / évaluation » et au niveau local, la nature des tâches, leur variété, les types d'adaptations, l'ordre, leur quantité et répétition.

19 A partir des observables : chronologie, nature des modalités (individuelle / collectif / groupes), temps didactique et types d'aides.

- le niveau micro, celui des automatismes : discours, gestion du tableau.

Les analyses *a priori* réalisées ne sont pas tout à fait classiques en didactique. En effet, elles prennent en compte un diagnostic ouvert et ne sont pas seulement référées à des modèles pour l'apprentissage mais à la mise en fonctionnement des connaissances compte tenu des énoncés, des médiations et des connaissances données aux élèves.

Mais cette approche ne permet pas facilement une analyse du développement des pratiques en regard de la formation suivie par les enseignants débutants.

L'évolution du rapport professionnel aux mathématiques en regard de la formation

Pour étudier le développement professionnel des enseignants débutants en regard de la formation reçue, nous caractérisons aussi l'évolution du rapport professionnel aux mathématiques. Pour ceci, nous décrivons les connaissances des enseignants liées aux mathématiques qui outillent la professionnalité en lien avec la formation. Nous nous appuyons sur les travaux d'A. Lenfant (Lenfant 2001). Son objectif est d'obtenir une description structurée, multidimensionnelle des connaissances professionnelles autour de 3 pôles, la vision des enjeux de l'enseignement, la vision des difficultés des élèves, l'élaboration de stratégies d'enseignement, ces pôles étant développés dans des situations de formation. Lenfant décrit les deux premiers pôles selon une grille structurée autour de trois dimensions non indépendantes, épistémologique, cognitive, didactique, à partir des savoirs relatifs à la compétence algébrique qui sert de référence. Ce choix permet de positionner l'évolution du rapport professionnel à l'algèbre par rapport à une référence qui sert d'échelle pour étudier les potentialités des situations choisies par les enseignants par rapport aux apprentissages visés. Lenfant étudie l'élaboration de stratégies d'enseignement à partir de l'étude des organisations mathématiques et didactiques développées par les enseignants (Chevallard 1999). Cette entrée permet d'articuler leurs choix avec les programmes et d'étudier l'évolution des potentialités des stratégies d'enseignement choisies en regard de celles présentées en formation. Cette étude s'appuie sur l'analyse de documents de cours, des préparations, de documents spécialisés utilisés, des manuels utilisés mais aussi d'entretiens.

Nous étendons les outils développés par Lenfant dans le domaine mathématique qu'est l'algèbre à d'autres domaines mathématiques.

Un croisement de différentes approches

Pour étudier le développement des pratiques enseignantes en regard de la formation, nous conjuguons la double approche avec les autres approches pour articuler plusieurs dimensions d'analyse.

Nous analysons d'abord l'évolution du rapport professionnel aux mathématiques des enseignants débutants (Lenfant 2001). Pour ceci, nous étudions à la fois l'évolution de la vision des enjeux de l'enseignement et des difficultés des élèves, des stratégies d'enseignement à partir de celle des organisations mathématiques et didactiques développées par les enseignants. Nous analysons aussi l'activité de l'enseignant à choisir la nature et la variété des tâches prescrites selon les types d'adaptation des connaissances mis en jeu à partir des énoncés (Robert et Rogalski 2002).

Nous étudions l'évolution des pratiques selon diverses temporalités et échelles d'activités (Robert et Rogalski 2002), en distinguant

- l'activité des enseignants pendant le déroulement en classe : d'une part l'organisation du milieu d'apprentissage des savoirs visés, du temps didactique (Sensevy, Mercier et Schubauer-Leoni 2000), d'autre part, la manière dont ces apprentissages sont enclenchés et

régulés en classe par des activités choisies par les enseignants et leur gestion des marges de manœuvre (Robert et Rogalski 2002).

- l'activité des enseignants débutants à réguler leurs pratiques : l'activité de préparation et de bilan (Margolinas et Rivière 2005) et de prise de décision en classe en fonction des contraintes du métier et des marges de manœuvre (Robert et Rogalski 2002).

Une méthodologie d'analyse articulant niveau microscopique et niveau macroscopique

Nous articulons deux niveaux d'analyse, un niveau microscopique et niveau macroscopique.

– Analyse au niveau microscopique :

Pour étudier le développement professionnel des enseignants débutants, nous analysons les activités des enseignants et celles des élèves à trois niveaux d'organisation (Robert 2008) pour appréhender diverses temporalités et échelles d'activités, à différentes étapes de l'exercice du métier (trois fois par an sur trois ans). Pour chaque contenu étudié, nous nous appuyons sur des données variées :

- au niveau macro, des manuels et publications spécialisées, des préparations, des tâches, qui concernent les projets d'ordre global et local (séquences et séances) ;
- au niveau de la classe au quotidien, des déroulements en classe, *via* leurs transcriptions à partir de séances filmées ;
- au niveau micro, des échanges entre professeurs et élèves, des usages du tableau...

Dans les analyses, nous mobilisons selon les dimensions d'analyse et le niveau d'échelle d'analyse les outils développés en TAD et en TSD ou ceux développés dans la double approche, en construisant les observables nécessaires.

– Analyse au niveau macroscopique

Pour interpréter les indicateurs obtenus et décrire les régularités voire les stabilités en germes et les variabilités dans le développement professionnel des pratiques nous proposons une analyse transversale des différentes analyses selon les différentes dimensions. La définition d'échelles d'évolution selon les dimensions est nécessaire, pour chaque dimension pour évaluer le développement professionnel et définir des leviers pour l'action didactique (Grugeon 2008). Nous avons développé deux types d'analyses complémentaires selon la problématique abordée.

Premier type d'analyse : L'étude du développement professionnel en regard de la formation. En fin d'année de formation des PLC2, nous interrogeons le développement des pratiques des enseignants débutants en perspective des éléments de pratiques travaillées en formation. Pour ceci, nous nous appuyons sur les dimensions d'analyse présentées ci-dessus.

Second type d'analyse : L'étude du développement professionnel en regard des contraintes professionnelles. Au cours des trois années, nous interrogeons le développement des pratiques en regard des contraintes professionnelles qui pèsent sur les pratiques. Pour ceci, nous nous plaçons dans la perspective de double approche. Nous interprétons comment se réorganisent les pratiques selon les deux composantes cognitive et médiative en rapport avec les autres composantes, personnelle, institutionnelle et médiative.

Avant d'exploiter cette méthodologie d'analyse sur une étude de cas, nous présentons le dispositif de formation initiale des PLC2 de mathématiques suivi par les enseignants

débutants et le modèle de pratiques sous-jacent. Il est développé à l'IUFM d'Amiens depuis 2002-2003²⁰.

Le dispositif de formation

Il s'appuie sur trois types de situations de formation organisées de façon articulée et chronologique : des situations d'apports de savoirs professionnels sur l'enseignement des mathématiques et de questionnement, des situations d'échange d'expériences et d'analyse de pratique disciplinaire, des situations de compagnonnage entre pairs et formateurs.

Le schéma ci-dessous illustre le dispositif de formation à l'IUFM d'Amiens à partir de 2002-2003²¹. Le schéma met bien en évidence des modules imbriqués articulant les activités en formation à l'IUFM en appui sur les pratiques effectives réalisées pendant les séances en classe dans les stages de terrain, stage en responsabilité ou de pratique accompagnée. Le scénario est évolutif²². Ce scénario de formation est réalisé par une équipe de formateurs associés qui travaillent en collaboration avec la responsable de filière pour assurer de façon coordonnée les différents types de situation de formation. Il a déjà été décrit dans (Grugeon 2006). Nous présentons un résumé synthétique des deux premiers types de situations.

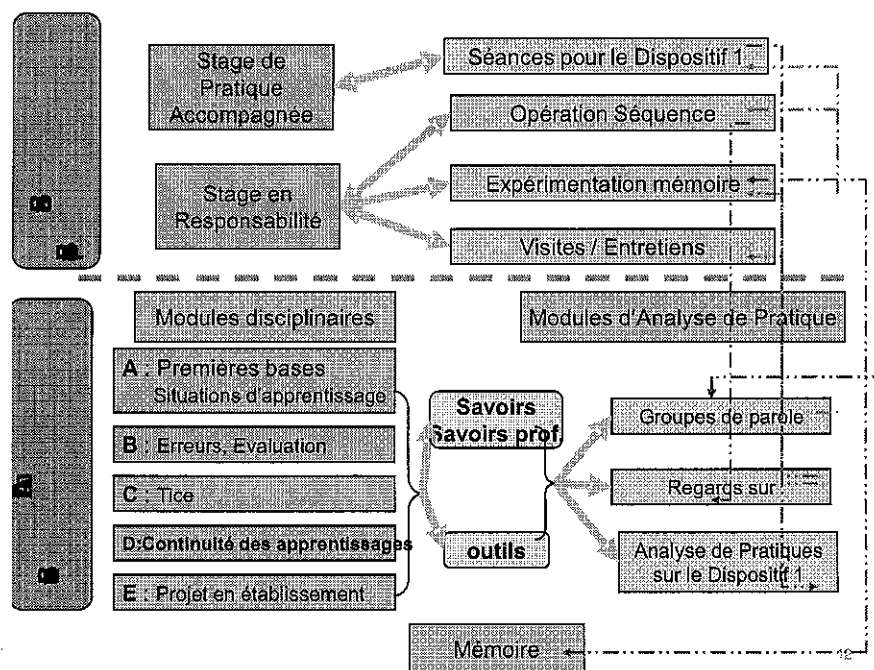


Figure : Schéma présentant la formation (Grugeon 2006)

Les situations d'apports de savoirs professionnels sur l'enseignement des mathématiques et de questionnement

Objectifs des situations de formation

20 Des évolutions locales ont été réalisées au cours des années pour améliorer le dispositif sans en modifier la philosophie.

21 Des évolutions locales ont été réalisées au cours des années pour améliorer le dispositif sans en modifier la philosophie.

22 L'évolution s'appuie sur des phases d'apport d'informations et de questionnement en début de formation puis des analyses de séances des formés par d'autres formés, s'appuyant sur l'alternance effective terrain / centre de formation et utilisant les outils d'analyse et d'observation développés à partir de savoirs didactiques.

Les situations d'apports de savoirs professionnels sur l'enseignement des mathématiques et de questionnement visent deux objectifs : d'une part faire acquérir aux professeurs stagiaires des repères sur les enjeux de l'enseignement des mathématiques au collège et au lycée, les stratégies d'enseignement, les classes de difficultés des élèves, d'autre part, leur faire découvrir et utiliser des questionnements et « outils » variés sur les mathématiques enseignées, issus et transposés d'analyses didactiques (Grugeon 2006, p. 7)²³. Ces situations ont donc pour enjeu d'outiller les PLC2, sur des thèmes à enseigner, pour les aider à travailler les savoirs mathématiques engagés, à choisir des stratégies d'enseignement, des problèmes potentiellement riches parmi des possibles, en prenant appui sur les processus d'apprentissage des élèves.

Caractérisation des activités de formation

Deux caractéristiques complémentaires définissent ces activités de formation.

Les formateurs ont choisi des thèmes représentatifs des programmes pour aborder les principaux enjeux de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques du collège au lycée. Ce peut être, par exemple, la question des continuités et des discontinuités du numérique à l'algébrique liées à l'introduction de nouveaux objets mathématiques, d'un nouveau formalisme et de nouvelles formes de raisonnement et de contrôle ; la notion de fonction et son caractère unificateur ; la géométrie plane et dans l'espace pour aborder le passage d'une géométrie perceptive à une géométrie du raisonnement déductif, les questions de preuve et de démonstration. Pour chaque thème abordé, les formateurs prennent en compte le travail réel des PLC2 dans leurs classes de stage en responsabilité. Au-delà des analyses organisées par les formateurs, chaque professeur stagiaire a en charge d'argumenter le choix d'activités pour introduire une notion, ou des listes d'exercices pour travailler une technique, en lien avec sa progression et le niveau des élèves de sa classe. Pour ceci, il propose une analyse de manuels et compare les activités d'introduction et les types de tâches sélectionnés par chaque manuel pour travailler les différents aspects d'une notion. Cette activité de formation permet de s'appuyer sur l'analyse de tâches prescrites et le travail réel des stagiaires pour dégager au niveau collectif des stratégies d'enseignement et des progressions possibles, des activités préparatoires pertinentes et adaptées aux objectifs d'enseignement visés, des listes d'exercices pour travailler différents aspects conceptuels des notions, propriétés abordées.

Pour tenter d'augmenter l'efficacité de ce travail d'analyse, dès le début de la formation, les PLC2 sont amenés à percevoir la nécessité de s'organiser à la fois pour analyser les manuels, préparer et analyser *a priori* les tâches proposées à leurs élèves dans les séances, prévoir les déroulements, mais aussi pour observer et analyser ces déroulements. Aussi, dans ce but, des outils variés d'analyse et d'observation obtenus à partir de la transposition d'outils didactiques sont fournis aux professeurs stagiaires. Ces outils sont systématiquement mobilisés pendant les activités en formation autour de l'analyse de manuels, de la comparaison d'activités préparatoires et de la modification des énoncés. Ils sont aussi utilisés pendant les analyses de vidéo présentées ci-dessous.

23 Ce peut être des éléments relatifs aux mathématiques enseignées en lien avec les organisations mathématiques et didactiques. Ce peut être aussi des outils pour organiser les apprentissages des élèves : les variables didactiques d'une situation pour faire évoluer les procédures des élèves, le rôle de l'enseignant dans le processus de dévolution, dans la régulation du travail de l'élève en lien avec la gestion du milieu, la place de l'institutionnalisation dans la dépersonnalisation et la décontextualisation du savoir, la gestion du contrat didactique. Ce peut être aussi des outils pour aborder les différences entre tâches prescrites et tâches réelles, activités possibles et activités réelles du côté du professeur et des élèves, la question des aides de l'enseignant en lien avec le niveau d'adaptation des connaissances visées.

Les modalités de travail sont variées : exposés à partir de travaux réalisés dans leurs classes, résolution des problèmes en position d'élèves et production d'analyses *a priori* en petits groupes.

Des situations d'échange d'expériences et d'analyse de pratique disciplinaire

Au-delà des situations de compagnonnage entre pairs et formateurs qui permettent aux formateurs de terrain de questionner les pratiques réelles des PLC2, et de répondre à des questions « urgentes » portant sur la gestion au quotidien de la classe, la formation met en place des situations d'échange d'expériences désignées par « groupes de paroles », et d'analyse de pratique disciplinaire désignées par « Regards sur activités » (Grugeon, 2006)

Objectifs des situations de formation

Les situations d'échange d'expériences organisent l'échange d'expériences vécues entre professeurs stagiaires, leurs difficultés ou leurs réussites. Ce type de situation de formation vise à faire mutualiser des pistes possibles pour gérer des difficultés rencontrées en classe, en lien avec les contraintes du métier et les marges de manœuvre possibles.

Les situations d'analyse de pratique disciplinaire visent à étudier des décalages entre les prévisions de déroulement et les réalisations effectives en classe. Elles ont pour objectif de favoriser des dialectiques entre des pratiques effectives en classe et l'analyse de leur déroulement, en visant l'interaction entre plusieurs échelles d'activités de l'enseignant.

Caractérisation des activités de formation

Nous présentons ici plus particulièrement l'activité de formation correspondant au module « Regards sur activités ». Les professeurs stagiaires sont amenés à motiver, décrire les choix réalisés pour concevoir et mettre en œuvre une séance testée en classe, puis analyser les décalages repérés pendant le déroulement effectif. Avant le module de formation, le professeur stagiaire responsable dépose sa préparation, son analyse et son bilan sur le site intranet de l'IUFM. Il donne accès à son activité de préparation, d'observation et d'analyse de ses pratiques réelles aux autres stagiaires et formateurs. Cette activité préalable permet d'engager la poursuite de l'analyse *a posteriori* de la séance en formation.

Lors du module « Regards sur activité », le formateur organise le travail d'analyse selon le canevas suivant : présentation de la séance analysée par le professeur stagiaire, analyse *a priori* de l'exercice par le groupe de formation pour dégager l'activité prévue mais aussi d'autres activités *a priori* possibles, présentation par le professeur stagiaire du déroulement de l'épisode et des difficultés ou réussites à analyser, des axes d'observation et des observables, observation de la vidéo et/ou étude de la transcription d'un épisode du déroulement de la séance puis analyse par le professeur, analyse collective des pratiques effectives puis proposition d'alternatives globale ou locale en fonction des marges de manœuvre possibles (Grugeon 2006).

Cette activité de formation s'appuie sur l'observation et l'analyse d'épisodes de séances vécues filmées en classe²⁴. L'enjeu est de permettre aux professeurs stagiaires de proposer des alternatives pertinentes suite à l'analyse des décalages reconnus entre les prévisions *a priori* et le déroulement réel, ou d'un incident, compte tenu des contraintes du lieu d'exercice et des marges de manœuvre disponibles. Elle porte la plupart du temps sur la gestion des interactions entre les élèves et le professeur et son influence sur le processus de dévolution, la gestion du contrat didactique, le rôle des interventions du professeur sur l'activité des élèves. Elle peut porter aussi sur les régularités du discours de l'enseignant et son influence sur l'activité des

24 Ces épisodes correspondent soit à une mise en activité des élèves, soit à une phase de recherche, soit à une phase de mise en commun ou de correction collective, soit à une phase de synthèse.

élèves. Une analyse au niveau global (organisation mathématique, choix des situations d'apprentissage) peut s'avérer nécessaire au vu de difficultés liées à l'inadéquation de la tâche effective par rapport aux objectifs d'apprentissage visés. C'est le travail en interaction sur plusieurs niveaux de projet qui est développé ici : l'analyse de l'activité d'élèves trop décalée par rapport aux prévisions peut, au-delà de la gestion didactique, remettre en question le choix de la tâche prévue, voire du projet global.

Nous faisons l'hypothèse, au regard de la problématique, que ce dispositif de formation favorise le développement des pratiques des enseignants débutants selon les différentes dimensions d'analyse.

Nouvelle problématique et hypothèses

Nouvelle problématique

- En quoi le travail développé dans les situations de formation « d'apports et de questionnement », relativement aux dimensions épistémologique, cognitive et didactique, sur des domaines mathématiques donnés, va-t-il favoriser le développement de connaissances professionnelles variées sur les notions à enseigner et agir sur des déterminants personnels ? lesquels ?
- En quoi le travail développé dans des séances d'analyse de pratiques réelles en classe va-t-il favoriser le développement d'une analyse réflexive portant sur la dynamique des déroulements
- Que dire de ces pratiques et de leur évolution au regard de l'apprentissage et de la continuité des apprentissages ?
- Quels éléments des différentes composantes personnelle, institutionnelle et sociale peuvent favoriser la construction de la professionnalité enseignante et une évolution plus ou moins rapide ?
- En fonction des composantes, sur quels déterminants des pratiques la formation initiale a-t-elle pu agir ? Si oui, à quel niveau, en fonction des logiques d'action et des contraintes internes et externes qui pèsent sur ces pratiques ?

Hypothèses

H1 : Impact de la formation sur le développement professionnel d'enseignants débutants.

La dialectique entre les trois types de situation de formation favorise le développement d'aspects complémentaires des pratiques.

H2 : Développement des pratiques en rapport avec les contraintes du métier

Les éléments stabilisés ou variables des pratiques d'enseignants débutants en lien avec les composantes peuvent jouer des rôles plus ou moins prépondérants au fil de la genèse et l'évolution des pratiques

- Les composantes *personnelle*, *institutionnelle* et *sociale* des pratiques de l'enseignant peuvent être « *sur* » ou « *sous-déterminantes* »
- Les composantes *cognitive* et *médiative* peuvent être « *sur* » ou « *sous-déterminées* » conduisant vers des logiques d'action plus ou moins enfermantes (Coulange 2007).

III Opérationnalisation de la méthodologie : une étude de cas

Nous avons opérationnalisé cette analyse multidimensionnelle sur un corpus varié de données recueillies de 2005 à 2008. Nous présentons les grandes lignes de la méthodologie d'analyse développée et les premiers résultats à partir d'une étude de cas.

Présentation de l'expérimentation

L'étude qualitative menée porte sur quatre professeurs qui ont accepté d'être « suivis » sur un, deux ans ou trois ans. Cette recherche n'aurait jamais pu avoir lieu sans leur participation²⁵.

Les enseignants – Les classes

Entre 2005 et 2008, les quatre enseignants observés sont Corinne, Joël, Mirène (PLC2 en 2005-2006) et Bernard (PLC2 en 2006-2007)²⁶. L'observation de Corinne n'a duré qu'un an, Corinne ayant été nommée dans une autre académie. Chaque année, nous avons filmé ces enseignants trois à cinq heures dans leur classe. Les enseignants ont fourni tous les documents relatifs aux séquences correspondantes. Chaque déroulement de séance était suivi d'un entretien.

Les conditions d'expérimentation permettent de couvrir la diversité des situations d'enseignement : le statut d'établissement (collège/lycée), la situation de l'établissement (ville/campagne, centre / banlieue), le niveau d'enseignement, le niveau de la classe, le public d'élèves, le thème mathématique, le moment de l'enseignement dans la séquence, les modalités de travail.

Les moyens d'observation – Recueil de données – Observables

L'étude s'appuie sur une analyse croisée de données publiées et utilisées en formation (programmes, manuels et publications pour enseignants) et de données expérimentales de nature diverse : les écrits des enseignants (cahier journal, préparations, cahier de textes)²⁷, les vidéos et transcriptions de vidéos sur plusieurs séances²⁸, sur une à trois années, des notes sur les séances observées, les transcriptions d'entretiens avec les enseignants, avant et après les observations, des écrits des élèves (cahiers, devoirs, etc.)²⁹. Nous avons laissé aux professeurs la liberté de choisir les thèmes et les moments d'étude concernant les séances observées pour que ceux-ci reflètent au mieux les cohérences en germe des pratiques transitoires des professeurs débutants à différentes étapes de la formation et des premières années d'exercice.

Pour chaque séance, sur un thème mathématique donné, nous réalisons d'une part, l'analyse des projets d'ordre global et local des enseignants débutants, d'autre part une analyse du

25 Une étude s'appuyant sur une analyse des réponses à des questionnaires proposés aux professeurs stagiaires de deux promotions de l'académie d'Amiens permet de faire une étude quantitative.

26 En 2005-2006, Corinne enseignait en classe de 2^e dans un lycée scientifique d'une ville de banlieue. Corinne était contractuelle l'année précédente. En 2005-2006 Mirène enseignait dans une classe de 3^{ème} d'un collège d'une petite ville rurale, classe hétérogène d'élèves peu motivés. Elle a été nommée en 2006-2007 dans un collège difficile de ZEP, ambition réussite. En 2007-2008, elle a rejoint son poste définitif dans un collège dans une petite ville rurale. En 2005-2006, Joël a passé le CAPES sans avoir suivi la préparation correspondante. Il a fait son stage en responsabilité dans une classe de 4^{ème} d'un collège de petite ville rurale, classe d'un assez bon niveau. De 2006 à 2008, il a enseigné dans un collège difficile de ZEP de la région parisienne. Comme PLC2, Bernard a enseigné en 6^e et 5^e dans un collège ZEP d'une ville moyenne de l'Aisne. En 2007-2008, il enseigne dans un collège de petite ville rurale.

27 En formation, il a été proposé aux professeurs stagiaires un canevas des préparations écrites distinguant les objectifs visés, le scénario, l'analyse *a priori* du problème, l'activité prévue pour les élèves et pour le professeur.

28 Les séances lors des visites formatives et des visites évaluatives n'ont pas été filmées mais ont fait l'objet d'une transcription directe lors de l'observation, aussi précise que possible.

29 Joël nous a donné l'ensemble de ses documents produits sur trois ans.

déroulement des séances observées. L'analyse des projets porte sur les stratégies d'enseignement *via* de l'étude des organisations mathématiques et didactiques, sur la diversité des tâches proposées *via* des problèmes et des énoncés (connaissances en jeu et types d'adaptations). En ce qui concerne la première analyse, nous analysons les programmes pour dégager les enjeux de l'enseignement et de manuels pour caractériser des stratégies d'enseignement « typiques » correspondant à ce niveau scolaire en lien avec les points de vue développés en formation. En ce qui concerne le deuxième type d'analyse, nous distinguons l'analyse globale des déroulements de celle des interactions enseignant / élève. A partir d'un découpage en épisodes de la transcription selon la nature du travail en jeu, nous précisons la chronologie du déroulement : nature des modalités (individuelle / collectif / groupes), temps didactique et organisation du milieu, les activités de l'enseignant et celles des élèves, les éléments de discours dans les interactions enseignant/élève.

Une étude de cas : Corinne

Nous nous appuyons sur une étude de cas pour expliciter la méthodologie utilisée.

Les conceptions de Corinne

Corinne était contractuelle avant son année de PLC2. Elle a réalisé son stage en responsabilité en 2^e dans un lycée « scientifique » de Nogent/Oise. Quelles étaient ses conceptions avant sa formation initiale? Elles sont obtenues à partir de l'interprétation de ses réponses au questionnaire d'entrée en formation. Corinne attache une « importance à l'aspect outil » des notions mathématiques lors de leur apprentissage. En ce qui concerne l'apprentissage, elle considère la « résolution de problèmes utile dans l'apprentissage pour donner du sens aux nouvelles notions ». Pour favoriser l'apprentissage des mathématiques chez les élèves, « il faut donner des méthodes de travail, avoir des séances structurées ». Du côté du métier, elle indique qu'un « bon » professeur est organisé dans le déroulement de ses cours ; il doit être à l'écoute des élèves » et que « les connaissances mathématiques et pédagogiques lui semblent utiles ». Corinne considère qu'au-delà des préparations, « il faut s'adapter à l'évolution de la classe » lors du déroulement. Quand les élèves n'arrivent pas à démarrer, « on peut soit les faire réfléchir en petits groupes, soit leur donner une petite indication ». Elle est l'une des seules PLC2 à envisager le travail en petits groupes, avant la formation.

Des conditions d'exercice lors du stage en responsabilité

Corinne enseigne dans le lycée « scientifique » de Nogent/Oise : les enseignants ont l'habitude de travailler en équipe et leur proximité avec l'équipe des inspecteurs favorise la mise en œuvre de stratégies d'enseignement en phase avec les programmes et d'activités d'introduction ou de problèmes assez riches. Corinne travaille en bonne intelligence avec l'équipe des professeurs. Elle est accompagnée par un conseiller pédagogique qui mobilise les outils développés en formation et qui adhère à la formation en alternance développée à l'IUFM.

Trois séances observées

Nous étudions ici des extraits de trois séances en classe de seconde correspondant à des étapes différentes de la progression d'enseignement suivie par Corinne et de la formation : une séance en octobre présentée et analysée en formation à partir d'une vidéo, une séance en novembre présentée lors de la visite formative et une séance en mars présentée lors de la visite évaluative. Nous pouvons faire l'hypothèse qu'elles reflètent des pratiques transitoires de Corinne à différentes étapes de sa formation.

Les séances choisies par Corinne concernent des moments d'introduction ou de rappel de notions dans des domaines différents, géométrique, numérique et fonctionnel. Voici un tableau synoptique des séances :

Séance	Thème abordé	Objectifs
Octobre	<i>Du patron à la perspective</i>	Motiver la mobilisation des configurations de géométrie plane pour étudier des solides
Novembre	<i>Factorisation d'expressions algébriques</i>	Rappeler les types de techniques de factorisation d'une expression algébrique
Mars	<i>Vers la fonction carré</i>	Motiver l'introduction de la fonction carré

Analyse des projets d'ordre global et local

Pour chacune des trois séances, sur un thème mathématique donné, nous explicitons les stratégies « typiques » des manuels et les choix développés en formation. Nous identifions le projet global de Corinne à partir des organisations mathématiques et didactiques et de la motivation des notions enseignées. Nous illustrons ensuite son projet local à partir de l'analyse des tâches prévues dans la séance observée.

Séance d'octobre : « Configurations du plan et applications à l'espace »

Analyse du projet global

C'est la première heure de la séquence sur la géométrie dans l'espace. Elle porte sur la représentation plane d'un solide et d'objets de l'espace. Que disent les programmes ?

La géométrie dans l'espace correspond au cinquième paragraphe du chapitre « Configurations du plan et applications à l'espace » qui articule ces deux thèmes d'étude du programme. Les programmes visent la construction de plusieurs capacités : manipuler, construire, représenter des solides. Les commentaires indiquent « *qu'on mettra en œuvre les capacités attendues sur un ou deux exemples : construction d'un patron, représentation en perspective cavalière (...)* ». C'est l'occasion pour le professeur de faire travailler des connaissances anciennes de géométrie plane et dans l'espace, étudiées en collège, nature de solide ou de section et d'aborder la position relative de droites et de plans de l'espace. C'est en seconde que sont introduites les règles de la représentation d'un solide en perspective cavalière. Ce point ne sera pas abordé dans la séance observée.

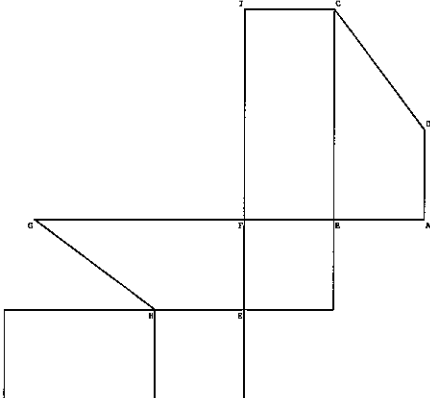
Les manuels (Fractale, Hyperbole, Math'x, Modulo) proposent des activités variées visant à mobiliser ou à tester des connaissances anciennes (solides, patron et autres représentations), à introduire des notions nouvelles en réponse à la résolution d'un problème (représentation en perspective cavalière). Il s'agit en particulier de construire des patrons en vraie grandeur de solide, à partir ou non d'une autre représentation du solide (maquette, schéma), de justifier la nature de solide ou de sections, de construire une représentation en perspective cavalière. D'autres manuels (Déclic, Transmath) abordent plus directement les règles d'incidence à partir d'activités assez formelles. Les activités proposées par les manuels, Fractale, Hyperbole, Math'x ou Modulo sont conformes à l'esprit du programme. A cette période de la formation, les analyses ci-dessus n'ont pas été présentées aux professeurs stagiaires à cette période de l'année.

Le projet global de Corinne

Nous exploitons la préparation du cours de seconde rédigée par Corinne et la vidéo de la séance filmée par son conseiller pédagogique. Sa préparation présente le plan du cours, les contenus mathématiques à enseigner (définition, exemples) et deux indications très brèves sur

les tâches à réaliser au cours du déroulement (coller le patron, intervention orale du professeur). Le document montre aussi les réponses correctes aux questions posées dans l'« activité préparatoire » présentée ci-dessous, ainsi que deux remarques certainement liées à une autre tâche prévue par le professeur après l'« activité préparatoire » que nous détaillerons plus loin. Corinne a indiqué succinctement les phases de la séance sans aucune indication de temps.

Corinne a proposé l'activité 1 p 178 du livre de seconde de la collection Hyperbole.

<u>Activité : du patron à la perspective</u> Voici ci-contre le patron d'un solide. 1 Construire ce patron en vraie grandeur. 2. Quelle est la nature de ce solide ? 3. Représenter ce solide en perspective en plaçant la face ABCD face à l'observateur.	

Corinne s'est appuyée sur l'activité d'introduction : déterminer et justifier la nature d'un prisme droit construit à partir de son patron en vraie grandeur pour motiver l'introduction de la représentation en perspective cavalière de ce solide. La justification de la nature du prisme mobilise des connaissances anciennes de géométrie plane (propriétés du prisme droit, propriétés de quadrilatères particuliers, positions relatives de faces). Ces choix sont bien conformes au programme.

Les tâches prévues

Nous analysons maintenant *a priori* le problème choisi et les tâches proposées. Nous n'étudions ici que les questions 1 et 2³⁰. La construction du patron en vraie grandeur (Q1) met en jeu des connaissances anciennes (interprétation du codage d'une figure géométrique, construction de droites perpendiculaires et parallèles, report de longueur avec les instruments adaptés). En classe de seconde, c'est une tâche simple et isolée. Pour étudier la nature du solide (Q2), les élèves doivent mobiliser des connaissances du collège (propriétés d'un prisme droit et des quadrilatères particuliers, trapèze, rectangle et carré). Q2 propose une tâche complexe même en seconde : la résolution de la question assez ouverte conduit à décomposer cette tâche en sous-tâches : conjecturer la nature du solide reconstitué à partir du patron en vraie grandeur, reconnaître les différentes faces, les désigner et justifier leur nature en organisant un raisonnement à plusieurs pas (position des faces, nature des faces et des bases...). Corinne a prévu une justification s'appuyant sur l'application des propriétés géométriques des figures en jeu et un usage raisonné des lettres. Nous pouvons faire l'hypothèse que cette question nécessitera un guidage important de la part du professeur. Corinne n'a pas anticipé une validation des élèves par la perception ou une démarche instrumentée : cette difficulté risque de la déstabiliser.

Corinne a donné ce problème à chercher à la maison pour que les élèves construisent préalablement le patron du solide en vraie grandeur. Elle a prévu de distribuer en classe les patrons en vraie grandeur pour réaliser le solide, si les élèves n'avaient pas recherché

30 La question 3 n'a pas été abordée dans la séance.

l'exercice. Le scénario reconstruit à partir du document de cours montre que Corinne a aussi prévu d'étudier la multiplicité des patrons d'un solide à partir de cette activité, mais en la complétant par la recherche de différents patrons du cube, ce que montrent les deux patrons distincts du cube dessinés dans son cours.

Séance de novembre : la factorisation d'expressions algébriques

Présentation de la séance

La séance de novembre correspond à la première heure d'une séquence consacrée par Corinne au calcul algébrique. Le paragraphe abordé est le dernier du chapitre « Ordre dans $\mathbb{R}$ ». Les objectifs de la séance sont les suivants : rappeler le rôle de la factorisation, les types de technique de factorisation et des propriétés du calcul algébrique (distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, identités remarquables). Dans le programme, ces objectifs s'inscrivent plus globalement dans les problèmes de reconnaissance de structure d'une expression, de ses différentes écritures, de recherche de la forme la plus adaptée au travail demandé (forme réduite, factorisée, ...), voire de leur modification selon l'objectif poursuivi.

Les manuels Déclic, Fractale, Modulo, Transmath consacrent un chapitre spécifique au calcul algébrique. Fractale prévoit des « activités préparatoires » pour choisir l'écriture la mieux adaptée en fonction du but visé. Modulo propose un module consacré aux différents types de techniques de factorisation. Les exercices de ce module distinguent des tâches simples et isolées avec un facteur commun ou des identités remarquables apparentes, de tâches plus complexes mettant en jeu des recherches de facteur commun ou d'identités remarquables cachés ou combinant plusieurs méthodes. Les activités proposées par Fractale ou Modulo sont conformes aux programmes avec deux points de vue complémentaires. Quant à Math'x, il ne consacre pas de chapitre spécifique sur ce thème.

Les professeurs débutants ont travaillé en formation la nature de l'activité des élèves en fonction des différents niveaux d'adaptation des connaissances en jeu liées à la complexité des expressions, et à la finalité des tâches.

Le projet global de Corinne

Nous présentons le projet global de Corinne à partir de la préparation de son cours de seconde, d'observations et de notes prises à la volée lors de la visite formative. Comme pour la séance précédente, Corinne n'a pas fait de préparation spécifique avec une analyse *a priori* susceptible de l'outiller à anticiper les difficultés de gestion prévisibles pendant le déroulement : elle a préparé sa synthèse avec la définition « factoriser une expression », les propriétés de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, les identités remarquables, sans aucun exemple, mais avec une liste d'exercices d'application. De ce fait, il n'y a aucune indication de temps.

L'objectif de la séance est d'abord de faire un rappel des techniques de factorisation à partir de la structure des expressions, puis de faire rechercher la forme la plus adaptée des expressions, voire modifier leur écriture, selon le but visé par l'exercice. Sa stratégie d'enseignement est celle développée par Modulo : faire dégager les techniques de factorisation à partir de la factorisation d'expressions de structures bien choisies données dans des tâches non finalisées. Les organisations mathématiques correspondant au type de tâche « factoriser une expression » sont assez complètes.

Les tâches prévues

Corinne n'a pas prévu de liste d'expressions algébriques à factoriser pour organiser le rappel. Les élèves devront proposer eux-mêmes des expressions qui, si possible, mettent en jeu différents types de technique (avec facteur commun, avec facteur commun caché, avec identités remarquables) puis les factoriser. Nous pouvons faire l'hypothèse que l'ouverture extrême de la tâche, « pratique caricaturale » risque d'induire des difficultés à gérer la classe : proposition d'expressions adaptées mais sans diversité, proposition d'expressions non factorisables, ...

Pour le moment d'application, Corinne a envisagé de distribuer une feuille d'exercices sur la factorisation d'expressions algébriques. En analysant la liste d'expressions à factoriser, tout se passe comme si Corinne envisageait plusieurs variables didactiques (coefficients numériques (entier, rationnel, mais pas d'irrationnel), structure des expressions, complexité des expressions liée au nombre d'opérations) pour amener les élèves à mobiliser successivement un type de technique et à mettre en défaut celles précédemment utilisées. Les exercices sont variés et vont de tâches simples et isolées à des tâches nécessitant la recherche de facteur commun ou d'identité remarquable sur des expressions où elles sont cachées ou qui nécessitent l'introduction d'intermédiaire.

Séance de mars : sens de variation de la fonction carré

Présentation de la séance

Cette séance vise l'étude du sens de variation des fonctions de référence du second degré. C'est la deuxième séance en ce qui concerne l'étude de la fonction carré, sa représentation graphique et ses propriétés (parité, sens de variation, extremum). C'est le paragraphe II du chapitre fonction de référence, le paragraphe I étant consacré aux fonctions affines. Les programmes indiquent que les élèves doivent être capables d'établir le sens de variation et de représenter graphiquement la fonction x^2 . Préalablement, le programme insiste sur l'importance d'étudier la notion de fonction dans « des situations issues, entre autres, de la géométrie, de la physique, de l'actualité ou de problèmes historiques ».

Les manuels suivent deux types de stratégie pour introduire la fonction carré. Déclic, Fractale, Transmath, proposent d'étudier directement la fonction carré à partir d'une activité préparatoire s'appuyant sur l'usage des calculatrices. Math'x et Modulo, proposent d'introduire la fonction carré et ses propriétés en réponse à un problème s'appuyant sur le cadre géométrique. Il s'agit soit de comparer des aires, soit d'étudier le coût d'un terrain carré en fonction de son aire. Les activités proposées par Math'x et Modulo sont davantage conformes à l'esprit des programmes et des documents d'accompagnement.

C'est le point de vue de la modélisation qui est travaillé en formation pour motiver les notions de variable, la relation entre variables *via* les grandeurs, en lien avec l'usage des logiciels de géométrie dynamique.

Le projet global de Corinne

Nous réalisons cette description à partir des documents de préparation donnés par Corinne au formateur visiteur la veille de la visite évaluative, mais aussi sur les notes prises à la volée lors de la visite évaluative pendant l'observation. Au-delà de l'énoncé de l'« activité préparatoire » « *Vers une fonction du second degré* » présenté ci-dessous,

Soit OAB un triangle rectangle isocèle en O, tel que $OA = 6$ cm.

Soit M un point de [AB], N et P les projetés orthogonaux de M respectivement sur [OA] et [OB].

On pose $ON = x$.

- 1) Démontrer que $OP = 6 - x$.
- 2) Quelles sont les valeurs possibles de x ?
- 3) Exprimer l'aire $A(x)$ du quadrilatère $ONMP$ en fonction de x .
- 4) Représenter la fonction A dans un repère orthogonal.
- 5) Conjecturer le sens de variation de la fonction A sur l'intervalle $[0; 6]$.
- 6) a) Étudier le sens de variation de la fonction A sur l'intervalle $[0; 3]$.
b) Étudier le sens de variation de la fonction A sur l'intervalle $[3; 6]$.

Corinne propose plusieurs documents : l'organisation globale de la séquence, le scénario de la séance et une analyse *a priori*. Le scénario de la séance distingue les différentes phases avec une indication de temps comme présenté ci-dessous :

Correction de la courbe représentative de la fonction de l'activité. (5 minutes)

Cette courbe sera projetée à l'aide d'un vidéo-projecteur de façon à ce que chaque élève puisse se corriger.

Correction de la conjecture sur le sens de variation de la fonction. (2 minutes)

Cette conjecture peut se faire oralement en interrogeant les élèves.

Fin de l'activité :

Phase de recherche individuelle pour la question 5). (10 minutes)

Correction de cette question en les sollicitant. (10 minutes)

Phase de recherche pour la dernière question. (5 minutes)

Correction de la même manière. (5 minutes)

Synthèse : II. La fonction carré

Définition (2 minutes)

Sens de variation en commençant par la démonstration de la propriété, puis on énonce la propriété. (preuve : 8 minutes, propriété : 2 minutes)

Tableau de variations (3 minutes)

(Exercice n°35 page 161 de leur manuel : **application directe du cours** sur le sens de variation de la fonction carré. Phase de recherche individuelle.)

Corinne présente la stratégie d'enseignement et motive l'étude du sens de variation de la fonction à partir d'un problème d'optimisation sur l'aire maximale du quadrilatère $ONMP$. Les raisons d'être de l'introduction du sens de variation sont explicitées dans une analyse *a priori* très développée :

Les potentialités / Objectifs visés : Démontrer qu'une fonction est strictement croissante ou strictement décroissante sur un intervalle donné avec le réinvestissement du chapitre que l'on vient de terminer (ordre et inéquations).

L'activité attendue pour les élèves en rapport avec la forme de l'énoncé : Se rappeler de la définition du sens de variation d'une fonction puis d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante.

A partir de ces définitions, faire le lien avec la comparaison de deux nombres pour comparer les images.

Les cadres en jeu :

J'ai voulu partir d'un cadre géométrique pour éviter d'étudier une fonction sans lui donner un sens.

Déterminer du sens de variation de la fonction dans un cadre tout d'abord graphique (par la conjecture de ce sens de variation), puis dans un cadre algébrique (pour démontrer la conjecture).

Le choix des variables didactiques : J'ai voulu étudier l'aire d'un polygone dont l'expression est connue de tous, ils se rappellent très facilement de l'aire d'un rectangle. Le triangle de départ est un triangle isocèle rectangle de façon à ne pas avoir trop de données.

La longueur du segment $[OA]$ est 6 pour pouvoir faire la représentation graphique sans avoir de trop grand nombre.

Le problème articule d'emblée les cadres géométrique, algébrique et fonctionnel, même s'il est inscrit directement dans le cadre algébrique, la variable x désignant ON dans l'énoncé. Le

problème choisi par Corinne, qui enseigne dans une bonne classe pour élèves scientifiques, est plus complexe que ceux habituellement présents dans les manuels présentés plus haut mais est conforme à l'esprit du programme. Le projet didactique de Corinne met en jeu des types de tâches précises, avec des techniques, explicitées et justifiées, mobilisant les connaissances des différents cadres ou contextes en jeu. L'organisation mathématique locale travaillée est assez complète.

Les tâches prescrites

Que peut-on dire des tâches prescrites prévues pendant la séance ? L'énoncé de l'activité d'introduction est découpé en sous questions variées. Les niveaux d'adaptation des connaissances en jeu sont variés. En particulier, les élèves doivent conjecturer graphiquement le sens de variation de la fonction sur l'intervalle $[0 ; 6]$ en mobilisant la définition du sens de variation d'une fonction sur un intervalle dans la question Q5. Q6 est une tâche complexe mobilisant plusieurs connaissances, la définition du sens de variation d'une fonction, des techniques de comparaison de deux expressions étudiées dans le chapitre précédent. Pour résoudre Q6a, les élèves doivent envisager deux étapes de raisonnement, la première mobilisant des connaissances sur le sens de variation puis la deuxième nécessitant une méthode pour comparer les images de deux nombres distincts : calculer la différence de deux images et transformer l'écriture en une écriture adaptée à l'étude du signe d'une expression, puis étudier le signe de cette différence. Il existe d'autres choix pour comparer deux nombres, mais ici, seule l'étude du signe de deux nombres est adaptée. Les élèves auront sans doute besoin d'aide de la part de l'enseignant pour organiser une stratégie de démonstration pendant la séance et la mener à bien.

Corinne a réalisé une préparation approfondie s'appuyant sur les outils développés en formation. Elle y explicite ses choix d'organisation du déroulement : nous les mettons en perspective de l'analyse ci-dessus. Corinne a détaillé l'activité envisageable du côté des élèves et celle du côté du professeur. Elle a certainement choisi un énoncé découpé en plusieurs questions pour organiser d'une part la *correction de la courbe représentative et de la conjecture* puis d'autre part la recherche de la preuve de la conjecture et la mise en commun des réponses. Corinne a bien prévu des difficultés des élèves liées à la mobilisation des connaissances nouvelles en cours d'acquisition :

(..) La fin de l'activité pour montrer la conjecture émise devrait être plus difficile. Ils savent ce qu'est une fonction croissante sur un graphique mais ne se rappellent pas de la définition « mathématique ». Une fois qu'ils auront cette définition, il faut qu'ils fassent le lien avec le chapitre sur les comparaisons de façon à pouvoir comparer les deux images. Je pense qu'ils auront un problème à cause du fait que l'on prenne deux réels et que l'on prenne l'un strictement inférieur à l'autre : ils n'ont pas l'habitude de poser des conditions.

Une autre difficulté devrait être pour conclure une fois qu'ils ont obtenu l'inégalité souhaitée. Pour montrer que la fonction est strictement croissante, ils auront : si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) < f(x_2)$, le fait d'avoir le signe inférieur va les perturber, ils en concluront que la fonction est décroissante puisque l'on a un signe « plus petit ».

Pour prendre en compte ces difficultés, Corinne a envisagé des aides contextualisées à l'activité prévisible des élèves : des demandes de définition ou de propriété ou des questions concernant la recherche d'une stratégie globale de démonstration :

Je les laisse dans un premier temps chercher seuls, en circulant pour voir s'ils arrivent à commencer cette question. S'ils n'ont pas d'idée, j'arrête quelques temps le temps de recherche individuelle pour passer à un temps de recherche ensemble. Je leur demanderai de me rappeler ce qu'est le sens de variation d'une fonction. Puis je leur demanderai de me rappeler la définition d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante. Ensuite, par rapport à la conjecture, doit-on montrer que la fonction est strictement croissante ou strictement décroissante sur $[0 ; 3]$, de façon à voir quelle inégalité on doit montrer. Ensuite, je leur demanderai comment on appelle le fait de dire qu'une image est inférieure à une autre image de façon à avoir le mot « comparaison » qui arrive. Ils devraient alors penser à étudier le signe de la différence des deux images.

Une fois l'inégalité obtenue, on conclura. Ils me diront peut-être que la fonction est décroissante puisque l'on a le signe inférieur. Il faudra alors revenir sur la définition de la fonction croissante que j'aurai laissée au tableau (à droite, sur le tableau brouillon).

Corinne a modifié l'énoncé initial du manuel utilisé : elle a conservé les questions intermédiaires mais en les transformant en des questions plus ouvertes. Ces questions plus ouvertes peuvent laisser davantage à la charge des élèves la conjecture du sens de variation de la fonction sur les intervalles d'étude puis sa démonstration. Corinne a prévu une gestion plus complexe de la séance pour organiser le travail des élèves en fonction de difficultés prévisibles.

Un aspect du développement professionnel de Corinne

Dans les trois séances observées, Corinne a choisi de présenter des séances se rapportant à un rappel ou à l'introduction d'une nouvelle notion.

Corinne s'est appuyée sur la résolution d'un problème. C'est un aspect invariant qui semble bien ancré dans les pratiques transitoires de Corinne et renforcé par la formation. Les problèmes choisis sont de plus en plus adaptés aux objectifs d'apprentissage visés. En effet, en mars, le problème choisi pour introduire la fonction carré est adapté pour motiver son usage comme *outil* de modélisation fonctionnelle, même si l'expression algébrique est complexe pour l'objectif visé. Ce n'était pas le cas du problème « *Du patron à la perspective* » en octobre, ce problème n'étant pas adapté pour aborder la question de la multiplicité des patrons d'un solide. Et en novembre, Corinne n'avait pas proposé d'énoncé, préférant demander aux élèves de produire des expressions algébriques pour motiver la diversité des techniques de factorisation selon la structure des expressions algébriques.

Nous avons analysé les séquences dans lesquelles sont inscrites les séances. En octobre, Corinne a mis en place des organisations mathématiques ponctuelles juxtaposées. C'était le cas pour la tâche choisie en géométrie dans l'espace, le type de tâche en jeu n'étant pas vraiment connecté aux autres types de tâche étudiés. Ce n'est plus le cas en novembre et en mars : l'ordre des tâches du type *factoriser* proposées dans le moment de travail de la technique est adapté pour dégager les différentes techniques envisageables selon la structure des expressions algébriques en jeu et pointer les limites de certaines techniques, même si le choix reste perfectible ; en ce qui concerne l'étude de la fonction carré, les types de tâches prévues sont coordonnées pour aborder les propriétés de cette fonction. Les stratégies d'enseignement de Corinne organisées autour des contenus enseignés mettent davantage en jeu des organisations mathématiques plus complètes tant au niveau des types de tâches et des techniques que des éléments théoriques envisagés.

Une vision plus précise des enjeux de l'enseignement permet à Corinne de proposer des activités d'introduction plus adaptées aux objectifs d'apprentissage visés et prenant davantage en compte la double dimension outil/objet des notions, le jeu de cadres.

Pour chaque thème observé, tous les moments de l'étude sont présents, même si les situations prévues sont peu adaptées en début d'année. Le moment de l'institutionnalisation est développé en cours d'année en s'appuyant davantage sur les situations d'introduction.

Dans les moments d'application et de réinvestissement, Corinne a proposé des exercices dans les chapitres sur les thèmes factorisation et fonction carré dont les questions ont mis en jeu des niveaux d'adaptation variés des connaissances travaillées (de l'exercice d'application directe à des exercices plus difficiles demandant des étapes intermédiaires).

Les préparations de Corinne s'enrichissent au cours de l'année : pas d'anticipation de l'inadéquation des choix en octobre ; pas d'anticipation des difficultés de gestion en novembre ; une anticipation d'une gestion de l'activité des élèves et du professeur sans trop d'écart avec le scénario prévu.

Analyse des déroulements

Pour chaque séance, nous étudions la chronologie globale du déroulement, l'activité réelle du professeur et les activités des élèves. Nous pointons les dynamiques en jeu dans l'organisation du milieu dans les différentes phases et l'évolution du contrat didactique.

La séance d'octobre

Chronologie du déroulement (Cf. Annexe 1)

Après la correction d'un exercice donné en travail personnel à la maison réalisée par un élève au tableau, Corinne organise une phase collective de mise en commun pour les questions Q1 et Q2 puis la recherche collective de la question Q2 de l'activité *du patron à la perspective*, car les élèves n'ont pas cherché l'exercice. Ces deux phases sont entrecoupées de phases collectives de synthèse pendant lesquelles Corinne écrit exactement les textes prévus dans sa préparation (la définition d'un patron d'un solide, et deux remarques, l'une concernant l'existence de « plusieurs patrons de formes différentes, non superposables » d'un même solide, l'autre concernant « certains solides (qui) n'ont pas de patron, ce qui est le cas de la sphère ». Les élèves travaillent à leur place, lèvent le doigt pour répondre aux questions du professeur. Ils recopient les synthèses écrites au tableau par le professeur. En fin de séance, les élèves cherchent individuellement pendant deux minutes trente deux patrons différents d'un cube, tâche prévue par l'enseignant. C'est la seule phase où les élèves peuvent chercher dans un silence « relatif ».

Interventions collectives du professeur

Un guidage important

Pour la question 2, Corinne ne se suffit pas d'une réponse s'appuyant sur la perception du patron ou l'usage d'un livre : elle propose de justifier collectivement la nature du prisme droit. Elle guide cette recherche par des questions sur les solides construits par chaque élève pour faire désigner sa base, les faces du solide : « ça va être quoi sa base ? » (...) « Ces faces latérales elles vont être comment ? ». L'enseignant utilise les réponses partielles des élèves, relance et reprend les réponses partielles en les modifiant un peu jusqu'à poser une question qui déclenche la bonne réponse.

L'introduction de sous-tâches

Vu les difficultés rencontrées par les élèves, Corinne introduit deux sous tâches non prévues « *désigner les faces latérales d'une pyramide ABCD de base carrée de sommet S et sa base* », pyramide tracée au tableau puis « *désigner les faces d'un pavé droit* », pavé droit tracé aussi au tableau pour amener les élèves à mobiliser des connaissances anciennes sur les bases et les faces latérales d'un solide.

Un milieu pauvre

Corinne organise d'abord la justification de la nature du solide à partir du milieu matériel à disposition, des patrons grandeur nature et des prismes droits construits par certains élèves³¹. Mais, ces objets sont certainement trop petits pour être exploités collectivement et Corinne n'a pas prévu au début de la séance de dessiner au tableau (ou sur rétro projecteur) le patron agrandi du prisme droit qui aurait certainement facilité la nomination des faces et l'usage des lettres. Ce n'est qu'après avoir transformé la tâche initiale en deux sous tâches à partir des questions « déterminer la nature des faces latérales du prisme droit » et « justifier la nature des bases du prisme droit » que Corinne prend la décision de prendre appui d'abord sur les solides qu'elle a réalisés et distribués puis sur la figure du patron qu'elle a dessinée au tableau pour conclure le raisonnement engagé pour justifier la nature du solide.

P : D'accord, donc là vous avez le point A, le point B, C, D, F, G, H, E, et je les ai tous. Alors, on a dit les faces ABCD et EFGH, ça va être les bases de notre prisme, alors moi, je vous demande comment est, comment était la base ABCD

E : trapèze

P : donc un trapèze, d'accord.

E (fille) : Trapèze rectangle??

P : pourquoi ?

Garçon : par hypothèse

E : il faut ??

P : J'ai deux angles droits là, donc, j'ai bien [BC] qui est parallèle à [AD]. Nicolas, Oui ou non ? (montre sur la figure au tableau)

P : Donc, on a [BC] qui est parallèle à [AD] , donc de là j'ai déjà un quadrilatère c'est déjà un trapèze et en plus, j'ai un angle droit. D'accord. Donc comme vous l'avez dit, on a un prisme droit.

Ces interventions modifient l'activité des élèves en la guidant, en découpant la tâche initiale en sous tâches simples et isolées. A la fin, Corinne prend complètement en charge le raisonnement mais sans rien n'écrire au tableau.

Dans la phase de recherche individuelle de deux patrons d'un cube, Corinne n'a pas organisé la dévolution de la tâche, ni avant la recherche, ni au cours de la recherche : l'explicitation des consignes n'a lieu qu'à la demande de quelques élèves, quatre minutes après le début de la recherche.

Peu d'aides « constructives » du professeur

Corinne fait quelques interventions pour structurer les connaissances des élèves en géométrie : lien entre géométrie plane et géométrie dans l'espace,

P : Comme je vous l'avais dit ce chapitre s'intitule configurations du plan et applications à l'espace. Maintenant on passe aux applications à l'espace. Donc, avant d'attaquer tous ces théorèmes dans l'espace, finalement ce sera les mêmes dans le plan, car on va se ramener à des faces de chaque solide ou à des plans qui sont constitués par des solides. Donc avant de passer à tout cela, on va revoir ensemble le patron et la perspective cavalière d'un solide.

31 Milieu retenu *a priori* dans la préparation

remarques sur la structure de l'énoncé l'activité préparatoire et l'organisation du cours.

(...) Donc vous collez votre patron en collant uniquement la face EFGH. Alors pourquoi j'ai choisi cette face là ici ? A votre avis

E : ?? Parce que

P : Oui, c'est parce que dans la dernière question on vous demande : de représenter le solide en perspective en plaçant la face ABCD face à l'observateur. Donc finalement comme cela vous aurez bien votre face ABCD en la repliant face à vous.

Même si ces aides constructives sont peu fréquentes, elles montrent la volonté de Corinne d'amener les élèves à réfléchir sur l'organisation des apprentissages.

Activités possibles des élèves

L'analyse de la vidéo et de la transcription des dialogues nous amène à penser qu'il y a plusieurs niveaux d'activité dans la classe. Ce peut être une activité « a minima » pour certains élèves qui attendent la réponse pour la recopier. Ce peut être aussi « a maxima » pour d'autres élèves qui cherchent à justifier la nature du solide, à chercher plusieurs patrons d'un cube. Le raisonnement n'étant pas écrit au tableau, ni par un élève, ni par le professeur, les élèves ne peuvent pas en conserver de trace. Les interventions de Corinne mettent d'ailleurs bien en évidence que certains élèves, Adrien ou Nicolas par exemple, n'écoutent pas :

P : Combien tu as de faces ABCD ? (Efface le tableau)

P : Chut. Est-ce que quelqu'un peut répondre à cette question ?

E : je peux répondre moi

P : Adrien, est ce que tu peux répondre à la question

E : Réponse d'Adrien incompréhensible

P : Et bien voilà, une fois de plus, tu n'écoutes pas, tu me sors ton carnet, Médi ??

P : Pour le moment tu le sors, j'en ai marre de te reprendre ; la prochaine fois, il est sur mon bureau.

P : Alors, on va le refaire, vous ne faites pas ce que je fais (dessin au tableau)

Les difficultés peuvent être liées à plusieurs origines, à une trop faible dévolution du problème, à un milieu matériel insuffisamment construit (pas de prisme droit agrandi et/ou pas de figure du patron dessinée en début d'activité) ou peu opérant (les solides construits par le professeur trop petits pour être exploités comme support visuel ou matériel). Elles peuvent aussi être liées à une médiation exclusivement orale sans appui sur un support écrit indiquant les étapes du raisonnement. De plus, certains élèves semblent engagés dans une autre activité que celle visée par le professeur (justification de la nature du solide ou recherche de patrons du cube) : construire un solide à partir des patrons avec des languettes fournis par le professeur.

E : ?? Venez voir ici ???

P : Voilà, C'est pour cela que je vous ai fait passer des prismes avec des petites languettes. C'est pour justement le coller. C'est pour cela que je vous le laisse faire comme cela. ça va, mais c'est vrai que cela n'était pas demandé. 20s (revient au bureau)

Pendant la recherche individuelle des patrons du cube

E : mon patron avec les languettes

P : alors pourquoi tu en as fait ? (..) c'est trop, attention

P (s'adressant à la même élève) : voilà. C'est ce que j'allais te dire. Est-ce que tu crois que tu as besoin de toutes ces languettes pour te permettre de pouvoir le coller. Alors là, tu n'en auras pas besoin du côté-là. Déjà, Combien d'arêtes ? (...)

P (en revenant répondre à l'élève au sujet des languettes) : Alors, 12 d'accord. Alors là est ce que tu auras besoin d'une languette pour coller ? Alors là non, mais il en manque une.

Combien tu en as ? il n'y en a pas besoin. Cela veut dire que tu auras besoin de cette languette. Oui. Tu comprends. ... Donc, il t'en faut 7.

En revanche, les réponses ou les remarques de Céline ou Dina, mettent en évidence une activité mathématique et un réel investissement de quelques élèves. D'ailleurs, Corinne est satisfaite d'avoir prévu une erreur, celle réalisée par Dina « *un solide n'a qu'un seul patron* » ainsi que l'intervention correspondante : changer une face de place sur le patron dessiné au tableau pour que les élèves prennent conscience de l'existence d'un autre patron d'un même solide. Au vu des autres interventions de Dina, nous pouvons nous demander si sa réponse n'est pas davantage à mettre en relation avec la forme de la question. En effet la question s'appuie sur le patron du solide étudié et porte sur l'existence de plusieurs patrons.

P : Alors, Donc là, on n'a qu'un patron possible, vous l'avez donné, enfin, il était déjà dans l'énoncé. Est-ce que c'est valable tout le temps ? Qu'il n'y ait qu'un patron pour un solide

E : non

P : oui ou non

P : à votre avis ? Dina ?

Dina : oui, sinon ce ne serait pas le même solide.

P : Alors

Dina : Ah non, non, non,

La séance de novembre

Chronologie du déroulement

Corinne a organisé le rappel en trois grandes phases : recherche collective orale de techniques de factorisation, synthèse collective orale, recherche individuelle d'exercices d'application. Après avoir fait corriger l'exercice cherché à la maison en envoyant successivement deux élèves au tableau, Corinne amène les élèves à rappeler des techniques de factorisation d'expressions algébriques. Dans ce but, Corinne envoie successivement deux élèves au tableau pour factoriser des expressions algébriques qu'ils ont eux-mêmes proposées. Vu l'impasse, Corinne interrompt cette phase après sept minutes en rappelant la méthode pour factoriser des expressions algébriques : recherche d'un facteur commun ou d'une identité remarquable. Pour conclure, Corinne réalise une synthèse collective orale en s'appuyant sur la trace écrite prévue. Dans les phases collectives, les élèves travaillent à leur place, lèvent le doigt pour être interrogés. Les élèves peuvent ne pas copier les solutions écrites par les élèves envoyés au tableau mais copient le cours écrit au tableau. La sonnerie interrompt la phase de recherche individuelle d'exercices d'application trente secondes après son commencement et ne permet pas de travail individuel.

Interventions collectives du professeur

Un guidage important et sans milieu organisé

Corinne fournit essentiellement des aides guidant l'activité des élèves. Pendant l'organisation de la phase de rappel, elle pose des questions pour faire rappeler aux élèves la définition du calcul algébrique, puis engage les élèves à donner des expressions algébriques à factoriser : « *Donne un exemple* », « *Est-ce qu'il faut toujours factoriser par un facteur commun ?* ». Corinne utilise les réponses partielles, relance, reprend les réponses en les modifiant un peu, tente d'« orienter » le choix des expressions en fonction de l'objectif visé. Elle propose le même type d'intervention pour aider les élèves à retrouver les erreurs de factorisation.

Peu d'aides « constructives »

A la fin de la phase de recherche collective, au vu des difficultés rencontrées, Corinne organise un bilan méthodologique sur les techniques de factorisation d'expressions algébriques selon leur structure : ce bilan est sans doute encore peu exploitable par la majorité des élèves, car oral et sans trace écrite pour les élèves.

Activités possibles des élèves

Pendant la correction, les élèves écoutent voire prennent la correction réalisée par l'élève interrogé. Dans la phase collective de rappel, Corinne prend un risque « démesuré » en laissant aux élèves la responsabilité de donner des expressions algébriques à factoriser. Tout se passe comme si K proposait ici un co partage des responsabilités pour organiser cette phase de rappel à partir des connaissances anciennes des élèves. Corinne semble *a priori* convaincue que les élèves vont proposer des expressions adaptées à son objectif. Or, la première expression proposée $(5x+4) - (2x+9)(5x+4)$, même si elle correspond aux attentes de l'enseignant, n'est pas la plus adaptée pour rappeler la technique de factorisation à partir d'un facteur commun et conduit à une factorisation erronée $(5x+4)(-(2x+9))$. Corinne n'a pas encore pris la mesure du rôle de l'analyse *a priori* et des variables didactiques pour anticiper les difficultés d'élèves et prendre des décisions. La deuxième expression proposée $9x^2+2$ n'est pas factorisable dans R. Corinne accepte cette expression mais éprouve des difficultés à convaincre les élèves que l'expression algébrique $9x^2+2$ n'est pas factorisable. Cette décision l'entraîne dans une situation duelle avec l'élève au tableau, ce qui provoque des bavardages dans la classe.

La séance de mars

Chronologie du déroulement

Corinne gère des phases collectives (recherche, mise en commun ou synthèse) : elle avait prévu deux phases de recherche individuelle mais elle les a réduites à une minute. Corinne utilise globalement les mêmes formes de travail que dans les deux séances déjà observées : les élèves travaillent à leur place, lèvent le doigt pour être interrogés, copient les corrections et les synthèses, mais aussi démonstrations réalisées collectivement. Mais, contrairement aux deux séances précédentes, elle écrit maintenant les réponses « dictées » par des élèves au tableau.

Interventions collectives du professeur

La démonstration du sens de variation de la fonction A sur l'intervalle $[0 ; 3]$ est une question difficile en seconde. Tout se passe comme si Corinne voulait amener les élèves à mobiliser des connaissances du chapitre précédent (ordre et inéquation) pour résoudre une question complexe mettant en jeu des intermédiaires, ce que confirme d'ailleurs sa préparation. Elle organise davantage la dévolution de la démonstration. Aussi, Corinne fournit des aides « au démarrage » pour structurer la recherche de la stratégie pour démontrer que la fonction A est strictement croissante sur $[0 ; 3]$, en particulier le rappel de la définition du sens de variation d'une fonction sur un intervalle. En s'appuyant sur les réponses des élèves, Corinne dégage deux étapes qui définissent deux sous tâches explicites : calculer $A(x_1) - A(x_2)$ puis étudier le signe de la différence. Cette étape construit des éléments du milieu pour permettre aux élèves d'organiser la recherche de la démonstration. En voici une illustration :

P : Comment va-t-on organiser la démonstration ?

E : On veut étudier l'inéquation $f(x_1) > f(x_2)$

P : But : comparer $f(x_1)$ et $f(x_2)$

E : Pour comparer 2 nombres, on étudie le signe de la différence

P : Qu'est-ce qu'on va faire ?

E : tableau de signe

P : Première étape

E : Faire la différence

P : je vous laisse faire.

Contrairement à la séance d'octobre, Corinne laisse chercher les élèves mais seulement une minute en écrivant au tableau le calcul à faire. Elle les interroge ensuite pour démarrer successivement chaque sous tâche avec des questions assez ouvertes, utilise les réponses partielles des élèves, les reprend, les modifie pour faire avancer la résolution. C'est en particulier le cas pour déterminer le signe du produit de facteurs où elle conduit par son questionnement les élèves à chercher d'abord le signe du premier facteur puis du second. Corinne écrit au tableau sous la dictée des élèves le raisonnement, mais en le reformulant sous une forme très proche de celle écrite dans sa préparation. Pour la question Q6b, Corinne laisse plus d'autonomie aux élèves qui ont déjà résolu la question analogue Q6a et peuvent dicter la solution sous son contrôle et celui de la classe.

Corinne utilise davantage d'aides « constructives » qui peuvent enrichir les connaissances des élèves. On peut distinguer une simple reprise d'un résultat ou d'une formulation, des rappels (définition du sens de variation d'une fonction sur un intervalle), des interventions sur la nature d'une stratégie de preuve (numérique ou algébrique) ou des bilans de méthode (calcul de la différence et étude du signe de la différence pour comparer deux nombres).

Activités possibles des élèves

Pendant la phase de recherche collective de Q6a, si un élève attend les indications du professeur pour commencer, il aura pu comprendre les étapes de la démonstration et recopier au tableau les calculs et étapes du raisonnement. Pendant la phase de recherche collective de 6b, il aura peut-être essayé de réinvestir la démarche de la Q6a à la Q6b, même si au vu du temps laissé, il aura plus certainement suivi le réinvestissement de la démarche à partir de la résolution réalisée par K sous la « dictée » des bons élèves.

En revanche, on peut penser que des « bons » élèves peuvent participer à la recherche des étapes de la démonstration et au calcul effectif. Corinne a créé un climat de travail propice pour que les élèves expriment leurs idées, même incorrectes, valident les propositions d'autres élèves sous son contrôle. Un élève n'a pas hésité à pas à poser la question du choix de

l'inégalité $x_1 > x_2$ alors que dans le cours la définition avait été donnée avec $u < v$ ou $x_1 < x_2$ ³². Corinne aurait pu gagner du temps en demandant aux élèves de chercher Q6b à la maison. On peut remarquer aussi que pendant cette séance, Corinne évite de se laisser absorber par des relations duelles avec les élèves.

Le développement professionnel de Corinne en classe et hors classe

Relation didactique pendant le déroulement

Pendant toute l'année, Corinne a développé principalement des phases collectives orales, les phases de recherche laissées à la charge des élèves étant très courtes. Elle a proposé le plus souvent aux élèves des aides qui tendaient à guider leur travail. Mais des évolutions sont cependant apparues en cours d'année.

Corinne a proposé des milieux potentiellement plus riches pour organiser l'activité mathématique des élèves : en novembre, Corinne s'était appuyée très tardivement sur la présentation d'un solide de petite taille pour organiser le raisonnement visant à justifier la position de deux faces du solide ; en mars, elle a d'abord fait construire la courbe représentative de la fonction étudiée par les élèves puis a projeté la courbe *via* un rétroprojecteur pour faire conjecturer le sens de variation de la fonction et initier la démarche de justification en organisant les deux étapes. Corinne a ainsi permis d'engager le processus de dévolution avec l'enjeu mathématique visé. Corinne a davantage articulé la médiation orale avec le travail écrit au tableau (séance de mars). Au-delà d'un lieu de savoir, le tableau devient progressivement aussi un lieu de travail collectif (Vandebrouck 2002). Cette évolution peut être sans doute mise en relation avec la prise de conscience du professeur qu'un milieu tant matériel, qu'oral ou écrit, suffisamment riche et organisé, peut favoriser l'activité des élèves.

De plus, Corinne a organisé la gestion des interactions pour laisser davantage d'initiatives aux élèves : à partir d'aides méthodologiques du professeur, les élèves ont pu découper une tâche complexe en sous tâches simples pour mobiliser leurs connaissances algébriques techniques pour étudier le signe d'une différence (séance de mars). Corinne l'avait tenté en novembre de façon inadaptée en laissant à la charge aux élèves le choix de formuler des expressions à factoriser : on peut y lire une pratique transitoire, interprétation du leitmotiv développé à l'IUFM « il faut mettre les élèves en activité ».

Lors de la séance de mars, Corinne a engagé davantage les élèves à proposer des solutions, des conjectures, à les faire valider. Elle a donné davantage de responsabilité aux élèves : on peut y lire une évolution du contrat didactique. Elle a aussi commencé à développer la gestion des erreurs. De plus, on constate moins de décalage entre ses prévisions *a priori* et la réalisation effective.

Régulation didactique

Progressivement dans ses préparations, Corinne a fait évoluer sa capacité à articuler l'analyse à des niveaux global et local. Elle a cherché à anticiper le déroulement de la séance via l'analyse *a priori*, ce qui l'a aidée davantage à prendre des décisions pendant le déroulement des séances. En effet, contrairement aux séances d'octobre et de novembre, au-delà du contenu de « cours » de seconde, Corinne a réalisé une préparation écrite de la séance de mars où elle a mobilisé des outils d'analyse variés développés en formation. Corinne y a développé l'organisation globale de la séquence, le scénario de la séance prenant en compte la dimension du temps mais aussi une analyse *a priori* riche (potentialités de l'activité préparatoire, activité

32 En effet, K a repris le symbolisme utilisé dans sa préparation sans prendre conscience de l'écart avec la définition déjà donnée.

envisageable des élèves et du professeur). Au-delà des enjeux d'évaluation liés à la visite évaluative, nous pouvons faire l'hypothèse que cette évolution paraît significative au vu des préparations des deux autres séances. De plus, pendant les entretiens, elle a analysé avec plus de pertinence les difficultés rencontrées pour proposer des alternatives adaptées aux difficultés rencontrées et en prise sur le contexte de sa classe et les marges de manœuvre possibles. Corinne a commencé à engager une interaction entre différents niveaux de projets pour analyser les décalages entre les prévisions *a priori* et les déroulements effectifs.

En ce qui concerne l'analyse au niveau micro, nous renvoyons à (Grugeon 2008).

IV Premiers résultats et perspectives

Le développement professionnel de Corinne en regard des contraintes professionnelles

Des évolutions en lien avec les composantes personnelle et sociale

Au-delà des pratiques transitoires, on peut déjà parler d'une logique d'action (composante cognitive et médiative) de Corinne : elle s'organise autour d'une stratégie d'enseignement « introduction / synthèse et cours / exercices / évaluation ». Elle prévoit des séances « structurées » qui s'appuient sur des analyses mathématique, cognitive et didactique permettant en cours d'année de proposer des situations de plus en plus riches. Elle prend davantage en compte les connaissances et les difficultés des élèves. Elle implique les élèves pour qu'ils comprennent, en intervenant beaucoup et en les guidant, les phases de recherche restant souvent collectives. Sa vision des enjeux de l'enseignement et des difficultés des élèves commence à évoluer en fonction des savoirs enseignés : c'est le cas pour la notion de fonction, mais cette évolution reste fragile.

Elle a mis en place des conditions de travail cohérentes par rapport à sa conception du rôle du professeur : « donner des méthodes de travail, avoir des séances structurées », « leur donner une petite indication » quand ils n'arrivent pas à démarrer, « être à l'écoute des élèves » et de l'apprentissage des élèves « adapter ses préparations à l'évolution de la classe ».

Au-delà de son expérience propre, le développement de ses pratiques a pu être favorisé par sa nomination dans un lycée technologique et général où les professeurs développent un travail d'équipe, des stratégies d'enseignement pour des élèves de milieux sociaux très hétérogènes, avec un enjeu commun : les valoriser et les faire réussir en faisant des mathématiques riches mais en prise sur leurs connaissances.

Des stabilités en germe

Des aspects invariants des pratiques transitoires de Corinne semblent s'appuyer sur sa représentation du métier correspondant à la composante personnelle. Une première stabilité en germe concerne la composante cognitive à travers la place de la résolution de problèmes dans l'apprentissage et la motivation des notions *via* les activités préparatoires pour donner du sens aux notions enseignées. Même si Corinne n'arrive pas à gérer les phases de travail individuel ou de groupes, elle cherche à favoriser l'activité de résolution des élèves dans les phases collectives. Et même si leur gestion classe en reste difficile pendant l'année de formation, Corinne persiste dans ce choix. En particulier, pour son mémoire, elle a travaillé sur la conception d'« activités préparatoires » ou de problèmes mettant en jeu plusieurs cadres.

Une deuxième stabilité en germe concerne la composante médiative en lien avec la place du discours de l'enseignant, la mise en activité et la prise en compte des élèves lors du

déroulement des séances. Corinne parle beaucoup et il est difficile pour elle de limiter ses interventions. L'organisation qui facilite cette prise en compte, la plus facile à gérer et la moins dévoreuse de temps, est la gestion collective. En effet, le professeur semble plus à même d'organiser et de structurer l'avancée du temps didactique en fonction de ses propres questions et des réponses des élèves, ce qui lui permet de respecter les connaissances mathématiques visées et prévues dans sa préparation, dans une enveloppe de temps donnée qu'elle n'arrive pas encore bien à respecter.

Développement professionnel à mettre en lien avec les activités en formation

Dans quelle mesure, pouvons-nous mettre en relation les évolutions présentées plus haut avec les activités réalisées en formation ? Nous exploitons d'autres données que celles déjà analysées, en particulier, la préparation de Corinne relative à la séquence d'introduction de la multiplication de deux nombres décimaux en classe de sixième lors de son stage de pratique accompagnée et son mémoire professionnel. Nous étudions ainsi la permanence de ces évolutions.

Nous pouvons raisonnablement mettre en relation l'évolution des préparations de Corinne et du choix des tâches d'introduction avec la formation reçue, et plus particulièrement avec les situations d'apports et de questionnement. A partir de décembre, Corinne s'est davantage appuyée sur des outils travaillés en formation, ce qui n'était pas le cas auparavant. Corinne ne fournit plus seulement de documents sous forme de « cours » comme elle le faisait comme contractuelle : elle propose des documents qui présentent une analyse *a priori* des problèmes (potentialités / objectifs d'apprentissage visés, nature des adaptations en jeu dans l'énoncé, variables didactiques pour faire évoluer les procédures, procédures et erreurs envisageables, activités du professeur en fonction de l'activité des élèves). Les « activités préparatoires » et autres problèmes de réinvestissement sont choisis avec soin et présentent davantage de potentialités réelles par rapport aux enjeux d'apprentissage visés (calcul de l'aire d'un rectangle de mesure décimale pour introduire la multiplication des décimaux en 6^e, problèmes mettant en jeu plusieurs cadres dans son mémoire professionnel). De plus, elle modifie les énoncés en fonction du niveau d'adaptation des connaissances visé dans la résolution.

Nous pouvons aussi mettre en relation certains éléments de l'évolution de la gestion et de la régulation didactique de Corinne avec le travail réalisé en formation, certainement dans les modules d'analyse réflexive de pratiques. C'est le cas pour la diminution de ses relations duelles avec les élèves, l'évolution de la structure des interactions « enseignant $\leftrightarrow$ (élèves $\leftrightarrow$ élèves) », qui permet d'attribuer aux élèves davantage de responsabilité. Elle a pu prendre conscience en formation de l'impact d'un guidage lié à un questionnement fermé sur l'activité d'élèves. Corinne renvoie plus des propositions à valider aux élèves sous son contrôle. En fonction des phases travaillées, elle attribue une place importante à deux fonctions du tableau : le tableau comme lieu de savoir et comme lieu de travail des élèves. L'augmentation des types d'aide méthodologique et des tâches proposées aux élèves qui s'appuient davantage sur un enrichissement de la nature des adaptations peut aussi avoir été initiée par l'analyse réflexive.

Des perspectives

Plusieurs perspectives sont à travailler.

- Il s'agit d'explorer les régularités et les variabilités des pratiques d'enseignants débutants à partir d'une analyse quantitative des réponses à des questionnaires proposés aux professeurs stagiaires de deux promotions de l'académie d'Amiens, avant et en fin de formation.
- Il s'agit ensuite d'étudier les invariants en germe dans les pratiques de quatre enseignants débutants et des éléments de leur évolution. Pour ceci, nous terminons les études de cas portant sur l'ensemble des professeurs stagiaires qui ont accepté d'être « suivis » sur trois ans. Nous opérationnalisons la méthodologie présentée plus haut sur l'ensemble des données recueillies, selon les deux types d'analyse complémentaires. L'enjeu est de mettre ensuite en relation ces « invariants » et évolutions de pratiques avec les différentes situations de formation et des déterminants du métier pour mettre en évidence des leviers sur lesquels agir pour améliorer les dispositifs de formation.

V Bibliographie

Artigue M., Grugeon B., Assude T. Lenfant A. (2001) : *Teaching and Learning Algebra : approaching complexity trough complementary perspectives*, In Helen Chick, Kaye Stacey, Jill Vincent et John Vincent (Eds), *The future of the Teaching and Learning of Algebra*, Proceedings of 12 th ICMI Study Conference, The University of Melbourne, Australia, December 9-14, 2001

Assude, T., Mercier, A., Sensevy, G. (2007), L'action didactique du professeur dans la dynamique des milieux, *Recherches en didactique des mathématiques*, 27.2, 187-220.

Bloch I. (2005), Peut-on analyser la pertinence des réactions mathématiques des professeurs dans leur classe ? Comment travailler cette pertinence, en formation, dans des situations à dimension adidactique ? In C. Castela et C. Houdement (eds) *Actes du Séminaire National de Didactique des Mathématiques*, 2005, ARDM et IREM de Paris 7.

Butlen D., Peltier-Barbier M.-L., Pézard M., (2002), Nommés en REP, comment font-ils ? Pratiques de professeurs d'école enseignant les mathématiques en REP. Contradictions et cohérence, *Revue Française de Pédagogie* n°140, Paris, pp 41-52.

Chevallard Y. (1999), L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Grenoble, Vol. 19, n° 2, pp. 221-266.

Chevallard, Y. (2002), Organiser l'étude. 1. Structures & fonctions, *Actes de la XIe école d'été de didactique des mathématiques* (Corps, 21-30 août 2001), La Pensée Sauvage, Grenoble, p. 3-32.

Cirade G. (2007), Devenir professeur de mathématiques : entre problèmes de la profession et formation en IUFM. Les mathématiques comme problème professionnel... In G. Guedet, Matheron (eds) *Actes du séminaire de didactique national, année 2006*. ARDM et IREM de Paris 7

Coulangue L. (2007), Etude de pratiques de professeurs de mathématiques "néo titulaires" dans des collèges de zone d'éducation prioritaire. Dans G. Gueudet et Y. Matteron (eds), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques, année 2006*. ARDM et IREM de Paris 7

Grugeon B. (2006), Conception et évaluation d'une formation PLC2. In Chiocca et Laurençot (eds), *DVD des actes de la CORFEM*. ENFA, Toulouse, 20-21 juin 2006.

Grugeon-Allys B. (2008), Pratiques d'intégration d'un logiciel de géométrie dynamique à l'école élémentaire, Dans E.-H. Riard et B. Poucet (eds), *Revue Carrefours de l'éducation*, n°25 pp 73-88 Université de Picardie Jules Verne.

Grugeon B. (2008), Quelle évolution des pratiques d'un professeur stagiaire de mathématiques pendant son année de formation à l'IUFM, in F. Vanderbrouck (eds), *La classe de mathématiques : activité des élèves et pratiques des enseignants*, Chapitre 6 partie 2, pp 328-366. Octarès Edition.

Lenfant A. (2002), *De la position d'étudiant à la position d'enseignant : l'évolution du rapport à l'algèbre de professeurs stagiaires*. Thèse de doctorat de l'Université Paris 7.

Margolinas C. (2002), Situations, milieux, connaissances – Analyse de l'activité du professeur, *Actes de la 11ème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*. 141-156, Grenoble : La Pensée Sauvage.

Margolinas C., Rivière O. (2005), La préparation de séance : un élément du travail du professeur. *Petit x*. Vol 69 pp 32-57.

Robert A. et Rogalski J. (2002), Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche, *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, vol 2, n°4, pp. 505-528.

Robert A., Pouyanne N. (2004), *Formateurs d'enseignants de mathématiques du second degré : éléments pour une formation*. Document pour la formation des enseignants : Nouvelle série, n°5, IREM de Paris 7

Robert A. (2008), La double approche didactique et ergonomique pour l'analyse des pratiques d'enseignants de mathématiques. Partie 1 - Chapitre 3. In *La classe de mathématiques : activité des élèves et pratiques des enseignants*, F. Vanderbroucke (eds) (pp45-52). Collection Formation, Octarès Editions.

Robert A., Roditi E., Grugeon B. (2008), Diversité des offres de formation et travail du formateur d'enseignants de mathématiques du secondaire. *Petit x* n°74. pp. 60-90.

Sensevy G., Mercier A., Shubauer -Leoni M.L. (2000), Vers un modèle de l'action didactique du professeur. *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol 20/3, pp. 263-304, Editions La Pensée Sauvage.

Vanderbrouck F. (2002), *Utilisation du tableau et gestion de la classe de mathématiques: à la recherche d'invariants dans les pratiques d'enseignants*. Cahier de Didirem, Numéro 42, Publication de l'IREM de Paris 7.

VI Annexes

Annexe 1 (page suivante)

<i>Nature travail : type, forme, durée</i>	<i>Interventions du professeur</i>	<i>Activités proposées aux élèves</i>
Correction de l'exercice cherché à la maison 9'	K interroge la classe puis un élève K envoie cet élève au tableau pour rédiger la démonstration K répond aux questions	Un élève propose la solution de sa place puis va la rédiger au tableau. Les élèves de la classe écoutent et copient. Un élève pose des questions
Présentation orale du § V. 50"	K présente l'organisation du chapitre et la situation du paragraphe V dans ce chapitre. K présente les enjeux de l'activité à venir	Les élèves écoutent
Gestion de la transition entre la correction de l'exercice et le lancement de l'activité préparatoire 2'40	K demande si les élèves ont des questions sur le cours et la correction K fait ranger le cahier d'exercices de Nicky K rappelle la tâche à faire à la maison K fait noter le titre du paragraphe V. K fait coller l'énoncé de l'activité K interroge plusieurs élèves distraits (Sami puis Adrien), gère les oublis.	Les élèves écoutent, un élève questionne K Nicky range son cahier d'exercices Les élèves écoutent Des élèves copient le titre du §V. Des élèves collent l'énoncé Un élève Sami (voire plusieurs) doit laisser de la place pour coller l'énoncé. Adrien doit être plus attentif
Mise en commun collective de la question Q1 2'	K présente un des enjeux de l'activité « s'intéresser aux patrons d'un solide » K rappelle la tâche Q1 K demande d'explicitier les instruments utilisés pour construire le patron précisément K demande une définition du patron d'un solide « Cela va être quoi son patron ? »	Certains élèves indiquent les instruments utilisés (règle, équerre, compas) Un élève répond « une représentation plane »
Synthèse écrite 1'15	K écrit au tableau la définition d'un patron de solide obtenue en reformulant la réponse d'un élève, puis écrit « exemple » pour faire coller le patron réalisé au dessous. K circule dans les rangs et continue à donner des indications sur le collage.	Les élèves écrivent la définition, certains posent des questions
Mise en commun collective – recherche collective de Q2 7'30 Q2 : 2'10 sous tâche T1 : 45" Q2 : 45" sous tâche T2 : 40" Q2 : 3'10	K rappelle Q2 et demande de justifier la nature du solide ; K insiste sur l'insuffisance d'une validation perceptive, recueille les réponses partielles des élèves, évalue celles de 2 élèves (référence à un livre) K rappelle la tâche de découpage du patron. K demande de désigner sa base, les faces du prisme droit K demande de distinguer faces latérales et base puis propose 2 sous tâches non prévues Sous tâche 1 : désigner des faces d'une pyramide tracée au tableau Sous tâche 2 : désigner des faces d'un pavé droit tracé au tableau K redéfinit la tâche initiale par 2 sous tâches: - justifier la nature des faces latérales - justifier la nature des bases après avoir dessiné le patron du prisme droit au tableau.	Les élèves écoutent Certains élèves demandent la parole, donnent la réponse et la justifient (référence à un livre) - Un certain flottement lié au manque de figure. Quelques élèves répondent (pour le plier) Des élèves répondent ensemble sans justifier Adrien Nicolas
Synthèse écrite 1'30	K donne des consignes pour coller le patron sur le classeur, interroge sur son choix de collage, anticipe l'intérêt futur du collage pour la question Q3, gère les oublis (pour Médi) puis écrit au tableau la nature du prisme.	Les élèves écoutent, certains tentent de répondre aux questions du professeur Médi écoute la consigne du professeur pour coller le patron Les élèves écrivent
Transition 1'40	K circule et répond aux questions de certains élèves	Les élèves continuent à copier et / ou coller ; certains posent des questions (languettes)
Introduction d'une nouvelle tâche 1'	K pose la question de la multiplicité ou non des patrons d'un solide à la classe puis à Dina, invalide la réponse de Dina à partir du déplacement d'une face latérale rectangulaire du patron dessiné au tableau	Des élèves répondent puis Dina Les élèves écoutent la justification donnée à Dina et à la classe. D'autres continuent à coller le patron ou à réfléchir sur la construction du prisme droit
Synthèse écrite 50"	K écrit une première remarque : un même solide peut avoir plusieurs patrons de formes différentes non superposables	Les élèves copient

Recherche individuelle des élèves 2''30	K propose de <i>rechercher deux patrons d'un cube</i> . K circule, répond individuellement, assez bas, à Ludovic sur la nouvelle tâche, à une question sur la nouvelle tâche en reformulant les consignes, vérifie l'avancement de la tâche, valide les patrons proposés.	Certains élèves construisent un ou des patrons de cube, Ludovic pose une question sur la tâche à réaliser, un autre élève sur la réalisation du prisme droit à partir du patron (languettes)
Correction et intervention sur l'évaluation des classeurs 3'50	K dessine au tableau le patron habituel du cube K invalide la proposition d'un élève K rappelle qu'elle va ramasser les classeurs pour les noter K dessine au tableau un 2e patron du cube K répond aux questions des élèves sur les patrons du cube et valide leur proposition.	Les élèves copient les patrons puis écoutent et répondent aux questions de K sur les règles d'évaluation du classeur. Des élèves dont Dina posent des questions sur les patrons du cube.
Introduction d'une nouvelle tâche, recherche collective, synthèse écrite 2'20	K pose une nouvelle question « <i>Est-ce que tous les solides ont un patron ?</i> », écrit immédiatement la synthèse et explicite la question de Dina à partir d'un schéma réalisé au tableau	Un élève répond puis Dina pose une question sur le patron d'un cône. Un peu de confusion

Tableau 2 : Déroulement chronologique de l'activité préparatoire

Annexe 2

<i>Nature du travail : type et forme ; durée</i>	<i>Interventions du professeur</i>	<i>Activités proposées aux élèves</i>
Correction de l'ex 28 33'	K envoie un élève au tableau pour corriger Q1 et expliciter sa solution. K ré explique le calcul K propose à l'élève de corriger Q2 K propose une autre rédaction de Q2 puis à un élève le calcul de l'expression pour $n=4$	Essentiellement, les élèves écoutent et prennent la correction. Quelques élèves (rares) interviennent lors de la correction. De nombreux élèves ne suivent plus
Recherche collective orale de techniques de factorisation d'une expression algébrique. 7'	K interroge les élèves pour faire <i>rappeler une « définition du calcul littéral »</i> K <i>demande une première expression à factoriser</i> , la fait factoriser par le même élève au tableau et gère les interactions entre élèves pour la valider. K <i>fait dégager la définition de la factorisation</i> d'une expression K <i>demande d'autres expressions algébriques de structure différente de la précédente</i> pour motiver d'autres types de technique de factorisation Un élève écrit une expression non factorisable au tableau et K amène difficilement cet élève à le percevoir K organise la gestion de réponses peu exploitables d'élèves et décide d'interrompre et de conclure cet épisode	Deux élèves proposent des types de tâche (développer, factoriser) Un élève propose une expression algébrique et la factorise D'autres élèves interagissent dans la validation de l'expression factorisée Un autre élève propose une autre expression Du flottement lié à la gestion duelle de l'échange avec cet élève et à la trop grande ouverture de la tâche
Synthèse collective (cours dialogué) 14'	K fait le bilan oral des types de technique de factorisation d'une expression algébrique K écrit au tableau des définitions et propriétés (distributivité et identités remarquables) à mobiliser pour factoriser une expression algébrique en s'appuyant sur des questions orientées et les réponses des élèves	La majorité des élèves écoutent. Les élèves copient les propriétés dans le cahier de cours
Recherche individuelle 30''	K propose aux élèves de chercher un exercice d'application sur une feuille de TD distribuée et se tait. Interruption immédiate par la sonnerie K propose les exercices à faire à la maison	

Tableau 3 : Déroulement chronologique du rappel des techniques de factorisation

Annexe 3 (page suivante)

Nature du travail : type et forme	Interventions du professeur	Activités proposées aux élèves
Correction collective 6'	K fait vérifier le tracé de la courbe représentative de la fonction $xx(6-x)$ réalisé à la maison, à l'aide du rétroprojecteur ; K circule dans les rangs K fait émettre une conjecture du sens de variation de la fonction sur $[0 ; 6]$	Les élèves évaluent leur tracé et corrigent Les élèves écoutent et un élève répond à la question
Recherche individuelle de Q6a ; 1'	K lance la recherche de la démonstration de la conjecture K circule et répond aux questions d'un élève	Des élèves cherchent des démarches pour justifier la croissance de A sur $[0 ; 3]$ Un élève intervient pour invalider la borne de l'intervalle d'étude
Recherche collective d'une stratégie de démonstration de Q6a. 5'	K demande la définition du sens de variation d'une fonction sur un intervalle donné et valide les réponses des élèves K demande comment démontrer la croissance de la fonction, recueille oralement les stratégies, organise leur validation par les élèves, dégage deux étapes puis lance la recherche individuelle	Certains élèves participent à la recherche ; ils proposent des stratégies diverses (numérique, inéquation, étude du signe de la différence puis tableau de signe) et à la validation des réponses d'autres élèves Classe active et attentive
Recherche individuelle de Q6a ; 1'	K se tait et écrit les données et le calcul à faire au tableau K se déplace sur une rangée de la classe	Certains élèves se lancent dans une recherche individuelle. Tous peuvent copier le début du calcul $x_1 > x_2$ deux réels de $[0 ; 3]$, $A(x_1) - A(x_2) =$
Recherche collective Expression $A(x_1) - A(x_2)$: 7'	K interrompt la recherche individuelle et organise le calcul en écrivant au tableau et en posant des questions <u>Sous tâche 1 : calcul de $A(x_1) - A(x_2)$</u> K écrit l'expression proposée par un élève puis gère les propositions partielles d'élèves pour étudier le signe de $A(x_1) - A(x_2)$ avant d'engager la factorisation de $A(x_1) - A(x_2)$ et d'écrire les transformations au tableau sous la dictée des élèves	Certains élèves participent à la recherche Une stratégie non prévue est proposée par un élève et invalidée par le professeur (erreur dans les données)
Signe de $A(x_1) - A(x_2)$: 6'	<u>Sous tâche 2 : étude du signe de $A(x_1) - A(x_2)$</u> - <u>Sous-tâche 3</u> : K demande à un élève d'explicitier oralement la 1 ^{ère} étape de l'étude du signe du produit puis l'écrit au tableau en s'appuyant sur une autre explicitation d'élève - <u>Sous-tâche 4</u> : K relance la recherche de la 2 ^{ème} étape en découpant : signe du 2 ^{ème} facteur puis du 1 ^{er} et organise la rédaction au tableau à partir des propositions d'élèves K répond aux questions des élèves sur la mise de -1 en facteur	Les élèves écoutent et tous peuvent copier la démonstration écrite sous la dictée de « bons » élèves. De « bons » élèves activement à la recherche et à la validation des réponses d'autres élèves.
Recherche collective de Q6b. 8'	K demande la démonstration du sens de variation de A sur l'intervalle $[3 ; 6]$ et le réinvestissement des étapes de 6a, écrit les calculs et raisonnement sous la dictée par les élèves sous son contrôle et celui de la classe. K reprend une question d'élèves et y apporte une réponse graphique	Les élèves écoutent et tous peuvent copier la démonstration écrite sous la dictée de « bons » élèves. De « bons » élèves participent activement à la démonstration et à la validation des réponses d'autres élèves
Synthèse collective 7'	K rédige au tableau les connaissances à retenir sur la fonction carré et organise la démonstration du sens de variation de la fonction carré sur $[0 ;]$	Les élèves écoutent et peuvent copier les étapes de la démonstration.
Recherche collective 5'	K interroge une élève puis organise, à partir de propositions d'élèves, la démonstration du sens de variation de la fonction carré sur $[0 ;]$.	Les élèves écoutent, copient. Certains répondent aux questions et en posent des questions.
Fin de la séance	K propose le travail à faire pour la séance suivante (fin de démonstration sur l'intervalle $]-\infty ; 0]$	

Tableau 4 : Déroulement chronologique de l'« activité préparatoire » Vers la fonction carré

Apport des études comparatives aux recherches en didactique des mathématiques : le cas Viêt-Nam / France

Annie BESSOT et Claude COMITI

DIAM, Laboratoire LIG

Grenoble

Résumé

Nous présentons brièvement le contexte dans lequel ces études comparatives se sont développées : dix-sept ans de coopération interuniversitaire entre l'Université Pédagogique d'Ho Chi Minh (UPHCM) et l'Université Joseph Fourier (UJF, Grenoble 1) dont l'évolution a permis la création à l'UPHCM d'un pôle vietnamien de formation de haut niveau en didactique des mathématiques (Master 2 et depuis 2008 École doctorale).

Puis nous résumons les caractéristiques au Viêt-Nam de l'organisation et du fonctionnement de l'école, de la formation des enseignants de mathématiques et de la recherche en éducation.

Nous cherchons enfin à identifier, non seulement les principaux apports pour la recherche en didactique des mathématiques des analyses comparatives mais aussi les grandes questions qu'elles suscitent. Nous nous appuyons pour ce faire sur certaines des thèses en cotutelle entre l'UPHCM et l'UJF qui ont de façon plus ou moins explicite mis en relation des analyses didactiques des deux systèmes éducatifs France et Viêt-Nam.

Mots Clefs

Étude comparative, comparaison synchronique, comparaison diachronique, noosphère, praxéologie mathématique à enseigner, praxéologie mathématique enseignée, ingénierie didactique

1 Introduction

C'est en 1989 que la demande du Viêt-Nam d'aide à une rénovation de son système d'enseignement des disciplines scientifiques est prise en considération par le MAE français. Considérée par ce dernier comme susceptible de permettre une avancée de la francophonie dans ce pays, elle est alors institutionnalisée par son inscription au plan pluriannuel (1990-95) de coopération mixte franco-vietnamien, et soutenue financièrement.

De 1989 à 1995, se déroulent de nombreuses actions, qui portent toutes sur la formation des enseignants des établissements universitaires de formation des maîtres en didactique des disciplines scientifiques. Ces actions aboutissent, en mars 1995, à la tenue d'un Premier Colloque Régional des Pays Francophones d'Asie du Sud-Est « Didactique des Disciplines scientifiques et formation des enseignants », qui marque une étape importante dans l'expression de besoins propres au pays.

Dès les années 1996, de grands projets sont en cours au Viêt-Nam, sur le système éducatif en général et tout particulièrement sur l'enseignement des disciplines scientifiques (qui se concrétiseront par la réforme des années 2000). Le besoin de personnes ressources expertes en analyse et évaluation de curriculums, ainsi qu'en élaboration d'ingénierie d'enseignement et de formation se manifeste fortement. La demande vietnamienne est de permettre à des enseignants d'universités chargées de la formation des enseignants (Ecole Normale Supérieure (ENS) et Université Pédagogique (UP)) repérés pour leurs compétences et leur volonté d'innovation, d'acquérir une qualification universitaire de haut niveau (doctorat) ainsi

que les outils indispensables pour assumer des responsabilités au sein du système éducatif de leur pays.

Notons que c'est la réponse de notre équipe à cette demande par la direction de thèses en cotutelle qui aboutira à la création, à l'Université Pédagogique d'Ho Chi Minh Ville, en 2001 du 1^{er} master de Didactique Des Mathématiques (DDM), puis en 2008, à celle de la 1^{re} formation doctorale en DDM³³.

Le choix de centrer les sujets des thèses en cotutelle sur des études comparatives date de cette époque. Il répond à la volonté de :

- réinvestir tout en les mettant à l'épreuve dans un autre contexte les résultats de la communauté de recherche en didactique des mathématiques,
- répondre aux besoins du système éducatif vietnamien, notamment en ce qui concerne l'enseignement des mathématiques, en mettant à disposition des partenaires de nouveaux outils scientifiques afin de leur permettre de s'en saisir pour conduire eux-mêmes des études sur leur propre système éducatif,
- créer, par leur travail sur le système éducatif du Viêt-Nam, les conditions d'une insertion ultérieure rapide des nouveaux docteurs dans la communauté scientifique de leur pays, par des publications sur des sujets vifs et par leurs capacités d'intervention dans les débats et actions en cours : recherches, nouveaux programmes, nouveaux manuels, ...

C'est ainsi que Lê Thi Hoai Châu étudiera l'introduction de l'enseignement des vecteurs dans les programmes vietnamiens de 1990, Nguyen Chi Thanh s'intéressera à la viabilité d'un enseignement d'algorithmique et de programmation dans le contexte des programmes du lycée de 2000, Vu Nhu Tu Huong, aux interrelations entre probabilités et statistiques dans les programmes du lycée de 2006. Lê Van Tien et Lê Thai Bao ThienTrung s'interrogeront sur la reprise au sein du domaine de l'analyse de savoirs anciens dans le passage du collège au lycée, comme le fera Doan Huu Hai dans le domaine de la géométrie dans l'espace. Quant à Nguyen Ai Qoc et Tran Luong Cong Khanh, ils questionneront la différence institutionnelle des choix effectués au Viêt-Nam et en France pour l'enseignement d'un même objet mathématique (résolution des équations du second degré ou calcul intégral). Enfin Bui Thi Khanh Hang posera un problème de formation, celui des enseignants de physique des deux pays à propos de l'enseignement de la notion d'énergie.

Dans cette communication, destinée à ouvrir un débat sur l'apport des recherches comparatives à la didactique des mathématiques, nous proposerons, à partir d'exemples issus de quelques unes de ces thèses, des éléments de réponses aux questions suivantes.

Lors d'une étude comparative de deux systèmes d'enseignement qu'est-il pertinent de comparer ? Qu'est-ce que cela nous apprend ?

Mais il nous a semblé indispensable auparavant, puisque les recherches comparatives sur lesquelles nous allons nous appuyer confrontent l'enseignement des mathématiques en France et au Viêt-Nam, de présenter brièvement la genèse de l'enseignement des mathématiques au Viêt-Nam.

33 Pour plus de détail, on pourra consulter Comiti, Tran Van et al. (à paraître).

II La genèse de l'enseignement des mathématiques au Viêt-Nam³⁴

1. Le Viêt-Nam confucéen

C'est au X^e siècle que le Viêt-Nam a conquis son indépendance, se libérant de la domination féodale chinoise. La dynastie des Ly institue un état monarchique centralisé en réponse à une triple nécessité : la construction et l'entretien d'un réseau de digues très étendu afin de contrôler les inondations du delta du fleuve rouge, la sauvegarde de l'indépendance nationale et la fin des luttes paysannes. Afin de répondre à cette triple nécessité, elle met en place une administration centralisée et institue, au XI^e siècle, les premiers concours mandarinaux. Il s'agit de recruter les fonctionnaires de grade supérieur par des concours ouverts à tous sauf aux comédiens et aux femmes !

Les concours régionaux décernent des titres à ceux qui ont ensuite le droit de se présenter à la capitale pour passer les concours impériaux décernant les titres de docteur. Il y a beaucoup de candidats et très peu d'élus, à peine une centaine sur plusieurs milliers dans les concours régionaux ; seulement un peu plus de 2000 titres de docteur ont été délivrés en dix siècles. Les lettrés confucéens, candidats malheureux aux concours deviennent précepteurs, écrivains publics et maîtres d'école. L'école (maître unique, classe unique), entretenue par les familles riches est laissée à l'initiative privée. Son but est de préparer aux concours : on y apprend à lire, écrire, réciter par cœur des textes classiques en chinois, puis à dissenter sur les thèmes traditionnels de la doctrine confucéenne et à composer des poèmes.

Or les épreuves de concours pour recruter les mandarins ne comportent pas d'épreuve mathématique, même si l'ouvrage *Dai Viet Su Ki Toan Thu*³⁵ relève quelques épreuves contenant des mathématiques en 1077, 1261, 1373, 1404, 1437, 1475, 1477, 1483, 1507, 1722 et 1762. Ces épreuves, servant à recruter des scribes, pour les affaires concernant les taxes, les salaires, les constructions... portent essentiellement sur la division en parties égales ou en parties représentant des proportions différentes ainsi que sur les calculs d'aires et de volumes. Dans les sujets³⁶, figurent non seulement des données nécessaires, mais aussi des données superflues existant dans la réalité. Les candidats doivent rédiger de façon littéraire leur réponse aux questions et leur interprétation des données superflues.

Remarquons de plus que ces épreuves se dérouleront, jusqu'au XIX^e en chinois classique alors que se développe, dès le XVII^e toute une littérature en *nôm*, système d'idéo-phonogrammes formés à partir des sinogrammes et qu'Alexandre de Rhodes (1591-1660) sur la base du travail de missionnaires portugais et espagnols, met au point une écriture romanisée de cette langue, le *quốc ngữ*, qui deviendra bien plus tard un outil de démocratisation de l'éducation, puisque plus simple à apprendre que l'écriture vietnamienne traditionnelle (le *nôm*) qui nécessite un apprentissage préalable du chinois.

Par ailleurs, les lettrés ne représentent qu'un nombre infime de la population, la grande majorité des habitants étant des paysans. Il n'y a donc pas d'école pour tous, et même dans celles qui préparent aux concours, pas véritablement d'enseignement de mathématiques.

34 D'après Bessot, Comiti 2006.

35 Compilation d'annales historiques, à partir du premier ouvrage historique conservé (Lê Van Huu, 1212), complété par Ngo Si Lien en 1479 et par Pham Cong Tru et Lê Hi au 18^{ème} siècle

36 Tels qu'on les trouve dans un manuel de Pham Huu Chung paru au XVII^e et conservé jusqu'à maintenant.

II. L'époque coloniale

Dans la deuxième moitié du XIX^e, le Viêt-Nam doit faire face à l'agression colonialiste française, la monarchie et les mandarins composent avec l'ennemi, les lettrés mobilisent les paysans et organisent la résistance. La colonisation sonne la défaite du confucianisme, en même temps que les traductions chinoises des œuvres comme celles de Rousseau et de Montesquieu introduisent deux notions qui lui sont étrangères : celle de science et celle de démocratie.

De 1905 à 1930 : substitution de l'enseignement en français à l'enseignement en chinois

L'enseignement en chinois est supprimé. Toutes les écoles d'Indochine doivent utiliser la langue française. Des générations nouvelles d'intellectuels, issues de la bourgeoisie vietnamienne, formées à l'école française, apprennent la physique, l'algèbre, la biologie, la géographie, en même temps que les systèmes électoraux et les constitutions républicaines. Mais plus de 90% des vietnamiens restent illettrés. Le nombre d'écoles par district ou par province est très faible, de l'ordre de 5 ou 6. Le Viêt-Nam ne compte que 20 collèges installés dans quelques grandes villes et provinces. Il n'y a que 5 lycées pour tout le pays, dont 2 au Nord, un au Centre et 2 au Sud, dont deux sont réservés aux enfants français ou aux enfants de familles mandarines ou de familles riches. Le programme des mathématiques est alors plus ou moins le programme français ; les manuels viennent de France. Au niveau du lycée, il s'agit des manuels Brachet et Dunarque, Brachet étant alors inspecteur général en Indochine.

De 1930 à 1945 : vers l'écriture de traités scientifiques en langue vietnamienne

L'année 1930 voit la création du parti communiste indochinois et l'arrivée du marxisme au Viêt-Nam comme instrument de libération, après l'échec des luttes des lettrés confucéens et d'intellectuels issus de la bourgeoisie contre le régime colonial et féodal. Le marxisme va alors succéder au confucianisme, tout en considérant ce dernier et l'œuvre des lettrés comme un patrimoine national.

À cette époque, seulement quelques élèves vietnamiens très brillants sont boursiers en France et obtiennent un niveau mathématique universitaire.

Parmi eux, le Pr Hoàng Xuân Hãn, considéré comme le fondateur de la culture scientifique vietnamienne, propose, dès son séjour à l'Ecole Polytechnique de Paris, une traduction des termes scientifiques en vietnamien (*quốc ngữ*), et publie, en 1942, l'ouvrage de terminologie scientifique *Danh Từ Khoa Học* à partir duquel les manuels de mathématiques, physique et chimie de tous les niveaux pourront dorénavant être traduits.

C'est en 1940 que l'enseignement universitaire est ouvert, les élèves français ne pouvant rentrer en France à cause de la guerre.

III. Après 1945

L'influence française dans le développement de l'enseignement mathématique vietnamien

D'avril à juin 1945, le Pr. Hoàng Xuân Hãn alors ministre de l'éducation et des arts du gouvernement indépendant vietnamien de Hanoi, dirige l'élaboration d'un programme du lycée en vietnamien. Ce programme reprend le programme du lycée de l'époque coloniale, avec deux modifications: élargissement de l'algèbre dans les dernières classes de lycée vers

l'analyse pour les deux sessions A et B, ajout des probabilités en A ; répartition de l'enseignement de l'algèbre, l'arithmétique, la géométrie descriptive, la trigonométrie, la mécanique et l'astronomie sur les 3 ans de lycée (au lieu de les réserver à la terminale).

En 1950, pour tenir compte des conditions de la guerre, intervient une première réforme, dans laquelle le nombre d'années de scolarité est réduit à 9 ans (4, 3, 2). Il en résulte pour l'enseignement des mathématiques la suppression des probabilités, de la géométrie analytique, l'analyse, l'arithmétique, la géométrie descriptive, la mécanique et l'astronomie. Ce programme allégé sera appliqué jusqu'en 1956.

L'influence du système éducatif soviétique

A partir des années 50, l'URSS et les pays communistes soutiennent la formation des étudiants et des chercheurs dans différentes disciplines et notamment en mathématiques, en offrant aux étudiants vietnamiens de nombreuses bourses d'études supérieures (licence, maîtrise et doctorat).

Suite aux accords de Genève (juillet 1954) et à la division temporaire qui en découle entre le Nord et le Sud, a lieu au Nord³⁷ une deuxième réforme, qui s'inspire du programme soviétique d'alors. Le programme des mathématiques au lycée vietnamien se rapproche du programme soviétique. Comme le système éducatif soviétique ne comporte que 10 ans (4, 3, 3), le programme mathématique soviétique est plus léger que le programme français. On y voit par exemple, l'arithmétique seulement en classes 5 et 6 mais pas en Terminale, comme alors en France. De plus, l'analyse, la mécanique et l'astronomie sont absents des programmes du secondaire. Le programme vietnamien conserve néanmoins en Terminale (alors classe 10) l'enseignement des éléments d'analyse que sont fonctions, limites, dérivées et primitives. Ce programme de 10 ans s'inspirant du programme soviétique restera en vigueur au Nord de 1956 à 1980.

De même, l'enseignement des mathématiques au niveau universitaire, introduit pendant la résistance à partir de 1951, et élargi après les accords de Genève prend alors en compte les directives et les expériences russes.

Au début des années de la guerre contre les Américains, le 4 septembre 1965, le gouvernement demande au Ministère de l'éducation de créer des classes pour élèves doués en mathématiques. La même année, la première classe dite « spécialisée en mathématiques » est inaugurée à l'université de Hanoi. Par la suite, les classes spécialisés en mathématiques seront également ouvertes dans les meilleurs établissements du second degré, de tout le pays : les enseignants de ces classes sont choisis parmi les meilleurs, les effectifs sont plus légers que dans les classes ordinaires et les élèves y sont recrutés sur concours.

IV. Les années de la réunification

On peut remarquer que le mouvement des mathématiques modernes, issu de l'école française de Bourbaki qui a influencé l'enseignement de presque tous les pays occidentaux dans la fin des années 60 n'a pas eu d'impact sur les programmes du Nord Viêt-Nam alors en guerre contre les Américains. De même, le Viêt-Nam n'a pas été davantage influencé lorsque ces pays ont réagi à ce mouvement.

En 1975, la guerre est terminée, le pays réunifié. Les mathématiciens du Sud formés dans les pays occidentaux comme la France, les USA, l'Allemagne, ainsi que les mathématiciens du

37 Au Sud, alors sous influence américaine, les programmes n'évoluent pas de la même façon.

Nord formés en URSS et dans les pays de l'Est construisent ensemble la culture mathématique vietnamienne.

Jusqu'en 1980, les programmes et les manuels du nord et du sud restent différents.

En 1980 se produit la troisième réforme³⁸ du système éducatif. Le nombre des années de scolarité est porté à 12 ans. La réforme se met en place de 1981 à 85 au primaire, de 86 à 89 au Collège, de 90 à 92 au Lycée (pour lequel trois manuels concurrents existent qui seront fusionnés en un seul en 2000).

En 2000, est amorcée une quatrième réforme, avec l'élaboration progressive, année par année, de nouveaux programmes qui :

- pour le collège « doivent contribuer à la rénovation de la méthode d'enseignement dans le but de rendre les élèves actifs dans leurs apprentissages et de les aider à établir, construire et développer une méthode d'apprentissage autonome et active dans la découverte et la résolution des problèmes » ;
- pour le lycée doivent suivre deux directives principales : « respecter globalement le programme précédent (suivi de 1990 à 1999) et alléger ce programme, c.a.d. abaisser le niveau exigé et simplifier certains contenus ».

Ces nouveaux programmes, donneront lieu à expérimentation avant que ne soient élaborés les manuels correspondants : de 2002 à 2005 pour les classes de collège et de 2006 à 2008 pour les deux sections des 3 années de lycées.

V. Quelques spécificités du système éducatif au Viêt-Nam aujourd'hui

Conséquence de l'influence confucéenne, dans la tradition culturelle vietnamienne, le savoir reste essentiellement conçu comme quelque chose de déjà existant qui doit être transmis. L'enfant est encore un être mineur dont l'avis n'est pas toujours pris en compte, même s'il existe des signes annonçant des changements en cours, comme par exemple les conseils donnés aux enseignants dans les derniers guides pédagogiques cités ci-dessus. Une place prépondérante est accordée à l'enseignant : c'est le maître, celui qui sait (*Si tu sais, tu prends la parole, si tu ne sais pas, adosse-toi au pilier et écoute*), à qui on doit un profond respect (ce qui se traduit notamment par l'importance de la fête des enseignants du 20 novembre).

Il y a unicité du manuel scolaire, la progression qui doit être suivie par l'ensemble des enseignants d'un même niveau de classe, dans tout le pays, étant précisée dans les guides du maître.

L'importance de la formation des enseignants fait qu'elle est confiée à des établissements universitaires (*Dai Hoc Su Pham*, traduit selon les lieux par « Ecole Normale Supérieure » ou « Université pédagogique ») dans lesquels les étudiants sont recrutés par un concours commun post-bac d'entrée à l'université. L'influence soviétique se maintient par la primauté accordée, non à la Didactique des Mathématiques mais à la Méthodologie de l'enseignement, comme l'indique le titre « Méthodologie de l'enseignement des mathématiques - Enseignement des contenus mathématiques fondamentaux », de l'ouvrage destiné aux étudiants de quatrième année de ces établissements, dans lequel sont justifiées l'organisation et le contenu des leçons préconisés par l'institution pour chaque niveau d'enseignement.

L'accent est toujours mis sur la formation des élites, ce qui a pour conséquence une densité d'examens et de concours : examens de fin de premier et de deuxième semestre de chaque année scolaire, concours d'entrée au collège, concours d'entrée dans les lycées d'élite,

38 Qui concerne tout le pays réuni en 1975, même si les collections de manuels diffèrent jusqu'alors.

concours de fin d'étude secondaire (correspondant à notre Bac) et enfin concours d'entrée dans les écoles supérieures et les universités. D'où l'existence d'une véritable institution de cours (collectifs ou particuliers) du soir et d'été pour préparer ces examens et concours conformément aux textes des annales publiées.

III Lors d'une étude comparative de deux systèmes d'enseignement, que compare-t-on ? Pour quoi faire ?

I. Les évolutions des systèmes d'enseignement

Les praxéologies scolaires

« peuvent être fortement naturalisées, au point de devenir complètement transparentes pour les sujets de l'institution qui les assument et les transmettent à travers leurs pratiques institutionnalisées » (Bosch, Gascon 2002)

La prise de distance nécessaire à la dénaturalisation de notre regard sur les praxéologies scolaires peut s'appuyer sur des analyses institutionnelles comparatives. On recourt alors méthodologiquement au croisement de deux axes : synchronique et diachronique.

« L'analyse synchronique vise [...] à :

- mettre en évidence et caractériser les productions différentes et similaires de la transposition didactique d'un même objet de savoir [...] ;
- questionner les ressemblances et dissemblances institutionnelles en termes de conditions et de contraintes ;
- initier un répertoire de praxéologies existantes et envisager leurs développements possibles.

L'analyse *diachronique* nous permet de mettre en évidence l'évolution temporelle d'un système, évolution qui a abouti à son état actuel, et par conséquent, de mieux comprendre cet état (d'équilibre). » (Tran Luong C. K. 2006)

Loin d'une approche « cognitiviste » centrée sur les particularités des élèves et des professeurs, ce type de recherche situe donc le problème des difficultés des élèves et des professeurs dans l'ensemble de conditions et de contraintes qui pèsent sur l'enseignement des mathématiques au lycée.

Pour illustrer notre propos, nous nous appuyons sur deux exemples extraits de la thèse de Tran Luong Cong Khanh (2006). Ce dernier a conduit une étude comparative entre la France et le Viêt-Nam sur l'enseignement de la notion d'intégrale.

Une comparaison synchronique permettant de questionner l'un des systèmes d'enseignement

Le calcul de l'aire sous la courbe représentative d'une fonction (calcul d'une intégrale définie) est présent dans les deux institutions que sont les classes terminales de l'enseignement secondaire des deux pays.

- En France, la surface dont on doit calculer l'aire peut être donnée par un système d'inéquations, ce système assurant l'unicité de la surface « sous la courbe ».
- Au Viêt-Nam, une surface est toujours donnée par une phrase du genre : « On considère une surface plane délimitée par une courbe d'équation $y = f(x)$, la droite d'équation $y = ax + b$ et l'axe des abscisses ». Cette formulation n'assure pas l'unicité de la surface sous la courbe dont on doit calculer l'aire.

Le rapprochement de ces deux résultats issus de la comparaison institutionnelle a surpris Tran Luong Cong Khanh (inspecteur de mathématique dans son pays) et l'a conduit à formuler

l'hypothèse de l'enseignement invisible d'un objet de savoir, celui d'une règle de contrat institutionnel, assurant l'unicité de la surface.

Pour mettre à l'épreuve cette hypothèse, Tran Luong Cong Khanh fait passer au Viêt-Nam à des élèves de classes 11 (avant l'enseignement du calcul intégral) et de classe 12 (après l'enseignement du calcul intégral) un questionnaire. Ce questionnaire porte sur les représentations graphiques possibles de « la surface plane délimitée par la parabole d'équation $y = x^2$, la droite d'équation $y = 2 - x$ et l'axe des abscisses », la surface étant décrite comme dans le calcul de l'aire sous la courbe représentative d'une fonction.

Nous donnons ci-après le texte de ce questionnaire.

On considère une surface plane délimitée par la parabole d'équation $y = x^2$, la droite d'équation $y = 2 - x$ et l'axe des abscisses. Pour chacune des figures ci-dessous, dire si elle peut ou non être une représentation graphique correspondant à la description ci-dessus.

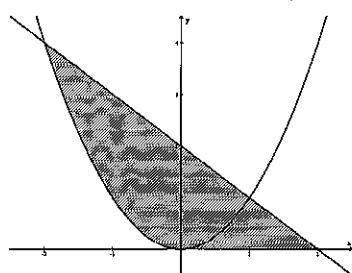


Figure 1

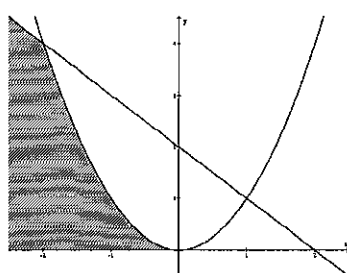


Figure 2

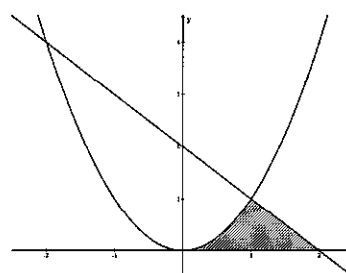


Figure 3

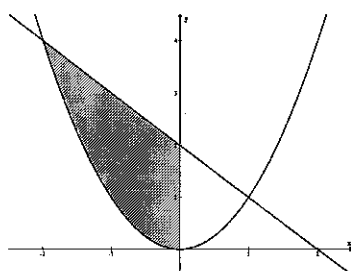


Figure 4

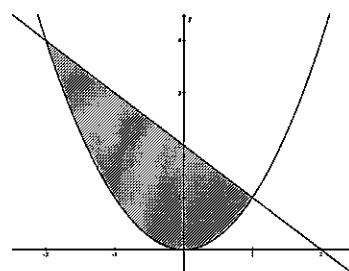


Figure 5

Les figures proposées sont mathématiquement les représentations graphiques possibles de « la surface plane délimitée par la parabole, la droite et l'axe des abscisses ».

Le tableau 1 donne les choix des surfaces selon le niveau scolaire.

Classes	Figure 1	Figure 2	Figure 3	Figure 4	Figure 5
Classe 11 (73 élèves)	19/73 (26%)	19/73 (26%)	45/73 (62%)	9/73 (12%)	37/73 (51%)
Classe 12 (65 élèves)	6/65 (9%)	7/65 (11%)	60/65 (92%)	1/65 (1,5%)	1/65 (1,5%)

Tableau 1. Choix de la surface sous la courbe selon le niveau scolaire

Les choix des classes 11 se répartissent sur les différentes figures proposées, alors que ceux des classes 12 se concentrent sur la figure 3. On peut en déduire qu'en classe 12, seule la troisième figure est institutionnellement la réponse attendue pour le calcul d'aire par une intégrale. Les autres figures sont rejetées pour les raisons suivantes :

- Dans la première figure, un morceau de la parabole est contenu à l'intérieur de la surface.
- Dans la deuxième figure, la surface n'est pas finie, et son contour n'est pas fermé.

- Dans la quatrième figure, le contour de la surface est composé d'une partie de l'axe des coordonnées et l'axe des abscisses ne participe pas au contour de la surface.
- Dans la dernière surface (figure 5), l'axe des abscisses ne participe pas au contour de la surface.

Une règle de contrat didactique liée à la lecture graphique est bien apprise (donc enseignée) en classe 12 et ignorée avant.

Pour obtenir une unique surface, on doit respecter une règle graphique implicite que Tran Luong Cong Khanh formule brièvement comme suit :

- la surface plane dont on demande de calculer l'aire est le plus grand domaine borné (pas forcément connexe) dont le contour est fermé, et composé seulement des courbes qui le délimitent ;
- aucun morceau de ces courbes ne doit être enfermé dans la surface.

Cet exemple montre bien l'effet de dénaturalisation produit par une comparaison synchronique.

Exemple d'une comparaison diachronique

Classiquement en didactique, on découpe le temps selon les « grandes réformes » : Tran Luong Cong Khanh se place de ce point de vue et distingue trois périodes liés aux réformes successives du Lycée qui bien sûr ne coïncident pas en France et au Viêt-Nam.

	France	Viêt-Nam
Période 1	1970 – 1980	1975 – 1990
Période 2	1980 – 2002	1990 – 2000
Période 3	2002 – 2006	2000 – 2006

Tableau 2. Découpage du temps en trois périodes (grandes réformes)

Le tableau 3 montre la présence ou non de traces du calcul intégral approché dans les deux institutions selon la période.

	Terminale S France	Classe 12 Viêt-Nam
Période 1	Absence	Absence
Période 2	Présence dans cours et exercices : méthodes numériques	
Période 3 (Actuelle)	Présence dans exercices : encadrement numérique	

Tableau 3. Traces du calcul intégral approché en terminale selon le pays

En France, absent dans les programmes des années 1970, le calcul approché d'intégrale est officiellement introduit dans les programmes de la période 1980 – 2002. Quoique la méthode proposée par les programmes soit celle des rectangles, les manuels de l'époque présentent d'autres méthodes numériques comme la méthode du point milieu, la méthode des trapèzes, la méthode des tangentes.

Le programme de 2002 – 2006 n'aborde pas officiellement le calcul approché d'intégrale. Cependant les manuels de la période mobilisent dans la partie exercices l'encadrement numérique d'intégrale pour en déduire une valeur approchée de l'intégrale.

Au Viêt-Nam, le calcul approché d'intégrale est complètement absent durant les trois périodes d'enseignement considérées. L'encadrement numérique d'une intégrale existe rarement dans la partie exercices et ne sert jamais au calcul approché.

Pourquoi cette évolution en France et cette absence d'évolution au Viêt-Nam ?

Nous allons montrer comment des explications peuvent être recherchées à une plus haute échelle de détermination du système d'enseignement, c'est-à-dire aux deux niveaux « discipline » et « pédagogie » en menant l'étude comparative des noosphères des deux systèmes d'enseignement des mathématiques considérés.

II. Les Noosphères

« La noosphère prend à sa charge l'élaboration d'un compromis entre l'institution d'enseignement et son environnement. [...] »

Pour justifier des propositions sur l'enseignement d'un savoir, la noosphère doit se livrer à une analyse épistémologique - analyse des contenus et fonctionnement du savoir savant correspondant. Des discours apologétiques noosphériques présentent explicitement ou implicitement ses choix épistémologiques et didactiques. Les choix épistémologiques lui permettent de justifier la légitimité du savoir enseigné vis-à-vis de la communauté des mathématiciens. Les choix didactiques sont argumentés relativement à des contraintes sociales, tout particulièrement des contraintes internes au système d'enseignement.

L'analyse des productions de la noosphère peuvent donc permettre d'éclairer les raisons de la présence, de l'absence, de la disparition ou de la transformation d'un objet dans l'institution d'enseignement.

[...] Nous faisons l'hypothèse qu'en première approximation, les discours apologétiques de la noosphère sont suffisants pour identifier des choix épistémologiques et didactiques sur les savoirs enseignés et par là les conditions et contraintes écologiques de la vie de [certains objets]. » (Lê Van T. 2001)

Les productions publiées aux moments historiques qui précèdent ou accompagnent les changements curriculaires sont particulièrement intéressantes.

En effet, les moments historiques des changements curriculaires marquent le plus souvent une rupture entre deux époques de l'histoire de l'enseignement. Ce sont des périodes où la noosphère présente et défend explicitement ses propositions de rénovation, donc ses choix épistémologiques (discipline) et didactiques (pédagogique).

Les matériaux dont on dispose pour mener une étude comparative sont tout d'abord les programmes et les manuels.

À ce propos, une différence importante existe entre les deux EMS. Au Viêt-Nam, les programmes ne sont disponibles que pour les rédacteurs de manuels, les enseignants ne disposant que des manuels. De plus, c'est seulement durant une courte période de 10 ans qu'il y a eu en concurrence plusieurs manuels et seulement au lycée (trois équipes de rédacteurs de 1991 à 2000). Depuis 2000, il n'y a plus qu'un seul manuel par niveau. La conduite d'entretiens avec les rédacteurs de cet unique manuel peut être d'un grand intérêt pour l'étude de la noosphère vietnamienne (cf. Lê Van T. 2001). En France, les programmes sont disponibles aussi bien pour les enseignants que pour les rédacteurs de manuels.

Les matériaux comportent également les guides pour l'enseignant rédigés par les auteurs des manuels au Viêt-Nam, ou les textes d'accompagnement des programmes en France.

De plus, en France, on peut trouver les traces des débats entre les différents acteurs de la noosphère dans des articles publiés dans des revues comme celles de l'APMEP, les bulletins Inter-IREM, etc.

Par contre, au Viêt-Nam, il n'existe pas une telle publicité des débats. Mais, on dispose de l'ouvrage « Méthodologie de l'enseignement des mathématiques - Enseignement des contenus mathématiques fondamentaux », destiné aux étudiants de quatrième année des Écoles Normales Supérieures (ou Université pédagogique) et dans lequel sont justifiées

l'organisation des leçons et du contenu des leçons préconisés par les décideurs des programmes.

L'exemple d'une étude des noosphères française et vietnamienne dans la thèse de Lê Van Tien

Lê Van Tien (2001) étudie dans sa thèse les liens entre fonction et équation au lycée en France et au Viêt-Nam. Pour cela, il tente en particulier de répondre à la question : pourquoi l'état actuel du domaine de l'analyse dans les deux institutions (Enseignement des Mathématiques au lycée en France et au Viêt-Nam) ?

L'analyse des programmes et des manuels lui permet de repérer les moments historiques des changements curriculaire importants dans les deux pays : 1980 pour la France (dite contre-réforme en référence à la réforme des mathématiques modernes), 1990 au Viêt-Nam (programme qui suit la réunification du pays et qui est accompagné du passage d'une scolarité de 10 ans à 12 ans pour l'ensemble du pays).

a. La contre-réforme en France (1980) manifeste une rupture fondamentale par rapport à la réforme bourbakiste des années 1970 : « les mathématiques ne sont plus conçues comme un univers de structures, mais comme un champ de résolution de problèmes ». L'une des conséquences pour l'enseignement est de mettre en avant le caractère expérimental des mathématiques et la nécessité d'articuler deux moments, expérimental et théorique, considérés comme distincts.

Le moment expérimental a aussi l'intérêt d'accorder à l'activité de l'élève une grande importance en accord avec les théories constructivistes de l'époque pour lesquelles cette activité est le moteur de l'apprentissage et qui sont le cadre idéologique des mouvements pédagogiques.

Dans l'esprit des initiateurs de la contre-réforme, l'activité expérimentale doit s'appuyer sur la résolution de problèmes et sur l'observation de nombres et/ou de graphiques : elle doit déboucher sur la production d'énoncés ayant statut de conjectures et qui, par conséquent, devront être démontrées dans le moment théorique.

Dans ce contexte, l'Analyse est conçue par les initiateurs de la contre-réforme comme le domaine de l'approximation et des techniques de majorations – minoration.

Cependant, l'entrée dans cette Analyse demande de négocier une rupture avec la démarche algébrique et l'on peut prévoir de grandes difficultés pour faire vivre un tel enseignement : Legrand (1993) parle d'obstacle épistémologique.

Cette difficulté se traduit actuellement par une évolution des contenus et des pratiques en France :

- disparition de certains thèmes faisant intervenir des majorations et réduction de la complexité de l'approximation au lycée ;
- détournement de la notion d'expérimentation qui se traduit par l'importance de plus en plus grande de constats numériques et graphiques perdant leur statut de conjecture.

b. La réforme issue de la réunification du Viêt-Nam (1990)

Les caractéristiques fondamentales des choix épistémologiques de la réforme des années 1990 ne sont ni celles de la réforme des mathématiques modernes en France, ni celles de la contre-réforme. Cette réforme cherche à promouvoir dans l'enseignement l'aspect méthodique de l'univers mathématiques basé sur des règles de raisonnement, comme le montre clairement l'extrait suivant des commentaires du programme de 1980 :

Former et développer chez les élèves des capacités de la pensée logique, de la pensée algorithmique et de la pensée dialectique en leur fournissant les connaissances fondamentales sur les méthodes et règles du raisonnement et de la démonstration, des règles du calcul [algébrique], des règles de résolution des équations, les règles des transformations des expressions algébriques, des règles de représentation graphique des fonctions et certaines lois de la dialectique...

Dans ce contexte, l'Analyse est fortement algébrisée au sens où elle privilégie fortement le calcul exact.

Du point de vue pédagogique, bien que les auteurs de manuels attirent l'attention des enseignants sur la relation entre la présentation théorique et les travaux des élèves, le discours de l'enseignant continue à jouer un rôle fondamental dans l'enseignement des mathématiques. L'activité des élèves est conçue essentiellement comme l'application ou l'illustration de connaissances théoriques présentées par l'enseignant. La citation suivante (qui décrit la méthode de l'enseignement moderne) illustre parfaitement cette conception pédagogique.

1. La méthode d'enseignement moderne est d'utiliser la méthode de dialogue entre professeur et élève. [...].

Donc, il faut que l'enseignement des mathématiques soit très souple : la présentation théorique (discours de l'enseignant) alterne avec la pratique des élèves (les élèves résolvent des exercices, appliquent et illustrent l'étude théorique). Il nous semble qu'il ne faut pas appliquer la démarche suivant laquelle l'enseignant développe d'abord un discours pendant une heure, les élèves résolvent ensuite des exercices d'application. (p.9) (Livre de l'enseignant, Algèbre et analyse 11).

Les résultats de Lê Van Tien vont nourrir deux des thèses en co-tutelle suivantes, celle de Nguyen Chi Thanh (2005) et de Lê Thai Bao Thien Trung (2007).

c. Revenons au tableau 3 sur le calcul intégral approché des deux pays proposé par Tran Luong Cong Khanh et montrons en quoi le travail de comparaison des noosphères de Lê Van T. (2001) l'éclaire.

	Terminale S France	Classe 12 Viêt-Nam
Période 1	Absence	Absence
Période 2	Présence dans cours et exercices : méthodes numériques	
Période 3 (Actuelle)	Présence dans exercices : encadrement numérique	

Tableau 3. Traces du calcul intégral approché en terminale selon le pays

En France, la période 2 est marquée par la volonté noosphérienne de la contre-réforme d'introduire l'approximation comme un terrain d'expérimentation dans le domaine de l'analyse, ce qui permet de comprendre l'apparition en Terminale, comme objet d'enseignement, de méthodes de calcul approché, au-delà même de la seule méthode au programme, celle des rectangles.

Dans la période 3, le système résiste à cette introduction (obstacle de l'algébrisation) : disparition dans le cours des méthodes de calcul approché et réduction, au niveau seulement

des exercices, à la production d'encadrement numérique pour donner une valeur approchée d'une intégrale.

Au Viêt-Nam, durant les trois périodes, la conception de l'enseignement des mathématiques au secondaire est celle d'un univers méthodique (règles de raisonnement et de calcul) et privilégie une analyse fortement algébrisée. Cette conception n'offre aucune place au calcul intégral non exact.

III. Les praxéologies à enseigner et les techniques mises en œuvres par les élèves

C'est au travers d'une analyse écologique et praxéologique des programmes et des manuels qu'est précisé le rapport institutionnel de chaque institution : enseignement secondaire en France (F) et enseignement secondaire au Viêt-Nam (V) à un même objet O. La comparaison des praxéologies à enseigner autour de cet objet d'enseignement révèle des différences mais aussi des points communs dans les transpositions du même savoir O.

Si l'on regarde alors de F le rapport institutionnel existant dans V, ce dernier, dénué d'intention didactique dans F, fait apparaître des objets qui vivent dans V mais non dans F : les praxéologies à enseigner dans V nous interrogent sur ce qui se passe dans F. Ceci conduit notamment à se demander si des praxéologies présentes dans une institution mais absentes dans l'autre peuvent y être viables et réciproquement (Chaachoua, Comiti à paraître).

On peut aussi se demander quelles influences ont les praxéologies enseignées dans chaque institution sur les techniques mises en œuvre par les élèves dans la résolution d'un même type de tâche et sur les éléments technologiques pris en compte

Cette comparaison peut alors permettre de mieux identifier certaines raisons des problèmes rencontrés dans la construction du rapport personnel des élèves dans F et dans V.

Nous prendrons comme exemple des apports d'une étude comparative des praxéologies à enseigner et des praxéologies apprises la thèse de Nguyen Ai Quoc (2006) : Analyse comparative de la résolution des équations du second degré dans l'enseignement secondaire au Viêt-Nam et en France.

Les praxéologies à enseigner : étude des programmes et des manuels

Elles sont identifiées au travers de l'analyse de l'organisation des objets de savoir en jeu dans les programmes, manuels et guides de l'enseignant lorsqu'ils existent.

Le programme vietnamien est organisé autour de deux domaines : géométrie et algèbre, l'algèbre regroupant tous les thèmes non géométriques dont les fonctions, les statistiques, et l'algèbre proprement dite.

V	8 (4 ^e)	9 (3 ^e)	10 (2 nd e)
Domaine	Algèbre	Algèbre	Algèbre
Secteur	Addition, multiplication et division des polynômes	Fonctions et équations algébriques	Fonctions et équations algébriques
Thèmes	Factorisation de polynômes, identités remarquables, équations et inéquation de degré 1, équations équivalentes	Fonction du premier ou second degré, équations du second degré. Système d'équations de premier degré. Transformations équivalentes des systèmes d'équations.	Equations du premier degré et du second degré paramétrées, équations avec des fractions rationnelles. Transformations équivalentes des équations.

Tableau 4. Les filiations dans V

L'algèbre est introduite, dès la classe 7, puis en classe 8, à partir de l'étude des polynômes à coefficients dans R . On étudie les opérations et les propriétés qui sont proches de celles de l'anneau $R[X]$, où x est considérée comme variable et non comme indéterminée. Les techniques de factorisation de développement et de réduction sont justifiées par ces propriétés qui ne sont pas démontrées. Cependant, une analogie, justifiée par le fait que x est considérée comme variable, est faite avec les propriétés dans R . La notion d'équations équivalentes est introduite dès la classe 8, par l'égalité des ensembles de solutions. On introduit en classe 9 la résolution des équations de degré 2 par le discriminant. En classe 10, les équations sont interprétées comme égalité entre deux fonctions.

Dans le programme français, l'algèbre en tant que telle ne figure pas en tant que domaine. Les notions algébriques apparaissent comme des thèmes dans les domaines : travaux numériques au collège, calcul et fonctions en seconde et analyse en première.

F	3 ^e	2 nd e	1 ^e
Domaine	Travaux numériques	Calcul et fonctions	Analyse
Secteur	Calcul littéral	Fonctions et formules algébriques	Fonctions
Thèmes	Identités remarquables, Réduction, factorisation, équation de degré 1 et les équations s'y ramenant	Développement, réduction, systèmes d'équations du premier degré, inéquation et équation se ramenant au premier degré	Equations du second degré

Tableau 5. Les filiations dans F

Le thème des équations est traité au sein du domaine travaux numériques en classe de 4^e et de 3^e par le biais du calcul littéral. Le calcul littéral fournit les règles de développement, factorisations et des transformations équivalentes des équations. Contrairement au cas du Viêt-Nam, ces transformations équivalentes n'ont pas un statut officiel car la notion d'équations équivalentes n'est pas enseignée en France. C'est en classe de seconde qu'un lien avec les fonctions est fait. Il s'agit d'interpréter les équations à l'aide des égalités entre deux fonctions mais aucune allusion n'est faite au domaine de définition.

L'étude comparative des programmes montre une différence importante quant à l'introduction de l'algèbre. Alors que dans **V** où l'enseignement de l'algèbre est plus précoce on privilégie le statut objet de l'algèbre, on introduit dans **F** des notions algébriques sans les définir dans le cadre de l'algèbre, pour les utiliser soit dans le calcul numérique, soit dans la résolution et la mise en équation de problèmes divers, et plus tard en analyse.

L'étude des manuels, depuis le travail proposé sur la factorisation jusqu'à la résolution de l'équation du second degré par le calcul du discriminant, est faite sous deux points de vue complémentaires : analyse écologique et analyse praxéologique. L'analyse praxéologique des manuels (basée sur l'analyse du cours et des exercices proposés) éclaire tout particulièrement l'économie scolaire des rapports institutionnels à l'objet « équation du second degré » dans chacune des institutions.

	V		F	
Sous-types de tâche majoritaires	Classe 8 (4°) Résoudre des équations de degré supérieur ou égal à 2 déjà factorisées ou comportant un facteur commun	Classe 9 (3°) Résoudre des équations données sous la forme $ax^2+bx+c=0$ Classe 10 (2^{de}) Résoudre équations paramétrées	3^e et 2^{de} Résoudre des équations du 2 ^e degré déjà factorisées ou comportant un facteur commun	1^e S Résoudre des équations données sous la forme $ax^2+bx+c=0$
Techniques	Factorisation Règles (identités remarquables, etc.)	Discriminant	Factorisation Règles (identités remarquable, etc.)	Discriminant

Tableau 6. Synthèse des praxéologies à enseigner

Cette synthèse montre notamment que dans **V**, le temps d'enseignement de la résolution des équations factorisées est beaucoup plus court que dans **F**, et l'étude des équations canoniques d'autant plus fondamentale qu'une grande place est faite, dans le programme de 10^e, à l'étude des équations et inéquations du second degré paramétrées.

On constate également que, dans **F**, le choix est fait de consacrer plus de temps au bloc du savoir-faire, et en particulier à l'étude des différentes techniques de factorisation (les seules à être enseignées jusqu'en fin de seconde).

L'étude des manuels montre de plus que, bien que les blocs du savoir (θ , Θ) soient différents dans chacune des institutions - la théorie sous-jacente étant dans **V** celle de l'anneau factoriel $R[X]$ des polynômes à coefficients dans R , et dans **F**, celle du corps des réels R - les blocs du savoir-faire (T , τ) sont semblables et la plupart des techniques τ enseignées, comparables.

On peut donc se demander comment influent sur les praxéologies apprises :

- dans **V** les éléments technologiques introduits lors de l'étude des polynômes et dans **F** les éléments technologiques introduits lors du travail sur le calcul littéral,
- la différence de temps passé, dans chacune des institutions, sur les techniques de factorisation et sur celle du discriminant.

Les techniques mises en œuvre par les élèves

Nous ne traiterons ici que la seconde question, en présentant ci-dessous, à titre d'exemple, les résultats d'élèves d'une classe de 10^e spécialisée (46 élèves) dans **V** et de 1^eS (24 élèves) dans

F (classes considérées comme comparables car élèves « sélectionnés » dans les deux systèmes) pour trois sous-types de tâches caractéristiques de RESD.

Cas 1	$(-5x+1)(3x-7)=0$			
	10 ^e dans V	Succès	1e S dans F	Succès
ProdN	23	19	19	16
Dév_Discr	20	8	5	2
Totaux	43	62%	24	75%

Tableau 7. Résolution optimale : annulation du produit

Cas 2	$(3-x)(x+2)+x+2=0$			
	10 ^e dans V	Succès	1e S dans F	Succès
ProdN	10	9	12	12
Dév_Discr	30	17	11	4
Totaux	40	65%	23	70%

Tableau 8. Deux techniques concurrentes

Cas 3	$2x^2+5x-7=0$			
	10 ^e dans V	Succès	1e S dans F	Succès
ProdN	7	5		
Dév_Discr	35	24	21	9
Totaux	42	69%	21	43%

Tableau 9. Résolution optimale : discriminant

On constate que :

- les techniques de factorisation sont, chaque fois que moins coûteuses que celle du discriminant, davantage présentes en classe de 1^{er} qu'en classe de 10^e.
- les techniques de développement suivies de calcul du discriminant sont très fortement majoritaires en 10^e, même lorsqu'elles sont coûteuses, près de la moitié des élèves y recourant même lorsque l'équation à résoudre est donnée sous forme déjà factorisée (cas 1).

Mais si on s'intéresse maintenant à l'efficacité des techniques mises en œuvre en ce qui concerne les résultats obtenus :

- en 10^e, bien que les techniques de factorisation soient fortement minoritaires, elles conduisent à un succès plus fort que celle du discriminant, pourtant majoritaire. Cela peut sans doute s'expliquer par le fait que les élèves de V capables d'analyser la forme de l'équation et de choisir la technique la mieux appropriée sont sans doute aussi ceux qui maîtrisent le mieux les différentes techniques et technologies enseignées.
- en 1^{er}, la factorisation conduit le plus souvent au succès, le calcul du discriminant à l'échec environ 6 fois sur 10, ce qui pose problème dans le cas des équations données sous forme canonique ; on constate par ailleurs un nombre important de cas d'interruption lors de l'utilisation de la technique de développement dans le cas où les élèves veulent se ramener à la forme canonique.

Ce travail montre notamment que le double fait de privilégier, au Viêt-Nam, l'étude générale des polynômes (dont on ne se servira finalement plus) au détriment de la factorisation, puis le travail et la maîtrise d'une technique algorithmique (dans le but de traiter le cas des équations paramétrées), conduit à la naturalisation de la technique du discriminant, au détriment de techniques de factorisation parfois moins coûteuses, alors qu'en France, les élèves de 1^{er}S choisissent le plus souvent la technique la plus adéquate en fonction de la forme algébrique donnée.

Le rapport institutionnel dans *V* est donc tel que la technique du discriminant semble tuer définitivement la technique de factorisation. Ce n'est pas le cas dans *F* où les deux techniques coexistent en 1^{er}S, ce qui semble justifier a posteriori le travail effectué au collège sur les travaux numériques et le calcul littéral.

Il reste à se demander si l'on pourrait développer la réalité didactique existante dans chaque institution étudiée, par l'introduction de nouvelles technologies, de nouvelles techniques et de nouveaux types de tâches de manière à obtenir un nouvel état stable dans lequel les praxéologies enseignées intégreraient à moindre coût les techniques de factorisation et du discriminant. Ceci pose la question de la fonction et de l'apport de l'ingénierie didactique dans les études comparatives.

IV. Analyse comparative et ingénierie didactique

Nous chercherons à montrer comment s'articulent :

- la comparaison institutionnelle de deux systèmes d'enseignement
- la conception, la réalisation et l'analyse d'une ingénierie didactique dans l'un des systèmes.

La conception d'une ingénierie peut se nourrir des résultats de la comparaison institutionnelle des systèmes d'enseignements, par les différences et les invariances dans les transpositions didactiques d'un même savoir qu'elle met en évidence.

La réalisation d'une ingénierie didactique dans l'un des systèmes et son analyse permettent non seulement de poser des questions sur ce système mais aussi sur l'autre système, et favorisent ainsi l'émergence de questions génériques dont la pertinence est attestée dans l'autre système.

De plus, cela pose le problème général de la reproductibilité de l'ingénierie non seulement dans l'institution où elle a été réalisée mais aussi dans l'autre. La comparaison avec un autre système éducatif rend donc encore plus crucial ce problème.

L'exemple de l'étude de Lê Thai Bao Thien Trung (2007)

Lê Thai Bao Thien Trung étudie dans sa thèse les relations entre la notion de limite et la décimalisation des nombres réels. Il se réfère aux nombreux travaux qui étudient le plus souvent séparément soit la notion de limite soit la notion de nombre, sans aborder frontalement le problème de leurs interrelations.

L'analyse des travaux de référence concernant la notion de limite conduit Lê Thai Bao Thien Trung à retenir « l'horreur de l'infini » comme obstacle épistémologique principal à la construction de la notion de limite et à définir deux problématiques fondamentales sur la notion de limite, algébrique et approximation ; et dans la dernière problématique, deux points de vue : « approximation x » et « approximation $f(x)$ »³⁹.

39 Se rattachant à la problématique d'approximation, l'« approximation x » donne à l'approximation de la variable x un rôle prédominant pour approcher $f(x)$; pour l'« approximation $f(x)$ », le degré d'approximation

Le rapport institutionnel à la décimalisation des nombres réels reste inchangé depuis le collège au Viêt-Nam⁴⁰. Il retrouve ainsi des résultats établis en France qui peuvent s'interpréter comme « la connaissance des nombres entiers se constitue en obstacle épistémologique pour l'acquisition des autres ensemble de nombres ». (Brousseau 1987)

Dans son ingénierie, Lê Thai Bao Thien Trung cherche à organiser dialectiquement deux passages :

- celui de l'ordre discret dans N à l'ordre dense (c'est-à-dire non discret) dans D et D^∞ ,
- celui du point de vue de l'« approximation x » à l'« approximation $f(x)$ » sur la notion de limite de fonction.

Le découpage, opéré par les noosphériens du XIX^e siècle (Birebent 2001) dans les pratiques de calcul, aboutit à formuler deux problèmes « fondamentaux » de l'approximation, que nous pouvons relier à une problématique d'approximation de la notion de limite, approximation x pour le premier problème, approximation $f(x)$ pour le second.

Girard et Lentin (1964) énoncent comme suit ces deux problèmes dans leur manuel d'Arithmétique.

On peut envisager, dans les questions d'approximation, deux problèmes principaux.

1°) Les erreurs commises sur les données étant bornées supérieurement par des nombres connus, on veut connaître une borne supérieure de l'erreur commise sur le résultat.

2°) On désire avoir un résultat avec une erreur qui ne dépasse pas une borne fixée à l'avance. On se propose d'évaluer les données avec une approximation suffisante pour qu'il en soit ainsi. (Girard et Lentin, p. 46)

L'ingénierie a été mise en place dans une classe 11 du Viêt-Nam où avait déjà été enseignée la notion de limite.

Ce qu'on apprend dans l'un des systèmes questionne génériquement l'autre

La première situation de l'ingénierie proposait une activité individuelle basée sur deux questions successives. Chacune des questions était suivie d'une conclusion construite collectivement par les élèves et l'enseignant. Nous donnons ci-après le canevas de cette situation.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{2x^2 + 0,1x - 0,21}{x^2 + 0,7x - 0,3}$.

Question 1. Résoudre l'équation $f(x) = 1$. (travail individuel)

L'enseignant conclut collectivement avec les élèves en écrivant au tableau :

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1 ; 0,3\}$

Il n'existe aucune valeur de x telle que $f(x)$ soit égale à 1

Question 2. Donner trois valeurs de x telles que $f(x)$ appartienne à $[0,99 ; 1,01]$. (travail individuel)

L'enseignant organise une synthèse des réponses qu'il écrit au tableau.

La calculatrice CASIO fx-570MS est autorisée sans limitation sur l'usage des touches et des fonctions disponible

Le calcul à la main est autorisé.

de $f(x)$ que l'on veut fixe le degré d'approximation pour x .

40 Lê Thai Bao Thien Trung (2007) l'atteste par l'analyse des réponses à un questionnaire proposé à 174 élèves de seconde, 89 élèves de Terminale, 52 étudiants se destinant au professorat au collège, 26 étudiants de l'Université Pédagogique d'Ho Chi Minh Ville.

Remarque pour le lecteur : $\lim_{x \rightarrow 0,3} f(x) = 1$, la fonction f est prolongeable par continuité en $x = 0,3$, elle est strictement croissante sur chacun des intervalles de son domaine de définition.

Nous présentons deux phénomènes issus de la confrontation des analyses *a priori* et *a posteriori* de la situation.

1. Pour les questions 1 et 2, la calculatrice est constamment utilisée non seulement dans l'exploration numérique, mais aussi dans les stratégies algébriques. La calculatrice cohabite avec le travail algébrique pour renforcer le contrat institutionnel de l'algèbre au travers du programme « EQN-1 Degré 2 » pour le calcul des racines et des touches ab/c et d/c qui rendent ou non acceptables les solutions trouvées : par exemple, l'affichage 0,3000001 n'est pas acceptable du fait de l'impossibilité du passage à une forme fractionnaire par appui de ces touches. Les solutions acceptables d'une équation du second degré sont donc des rationnels, un critère de validité étant que l'appui des touches ab/c et d/c après l'affichage décimal du calcul donne bien une fraction.

2. La question 2 recouvre un problème d'approximation.

Cependant, les élèves n'ont pas les moyens de la reconnaître comme telle. Par contre, ils peuvent aisément ramener celle-ci à des tâches algébriques apparemment classiques, cette interprétation étant renforcée par le contrat institutionnel fortement algébrisé dans l'enseignement secondaire vietnamien et actualisée par la question 1. Cette question cherche à déstabiliser les stratégies algébriques par leur coût et le risque d'erreur pour faire émerger une stratégie d'essais instrumentée par la calculatrice (appelée *Dx.Calculatrice* ou Exploration d'un domaine numérique de x avec la calculatrice). Tous les élèves sauf 4 recourent à une stratégie algébrique.

Algèbre des inéquations (<i>Inq</i>)	22
Algèbre des équations (<i>Eq</i>)	13
Exploration d'un domaine numérique de x avec la calculatrice ⁴¹ <i>Dx.Calculatrice</i>	4
Total	38

Tableau 10. Stratégies algébriques et non algébriques observées

Les phénomènes 1 et 2 vont contre une idée commune qui serait que la calculatrice fait entrer dans un contrat de calcul approché. De plus, Lê Thai Bao Thien Trung montre qu'il y a une volonté institutionnelle au Viêt-Nam d'associer calculatrice et calcul approché (non exact).

Les observés de l'ingénierie attestent que non seulement l'usage de la calculatrice ne met pas les élèves dans un contrat de calcul approché et donc dans une problématique d'approximation mais au contraire qu'elle renforce le contrat algébrique en prenant en charge certains calculs numériques liés aux algorithmes algébriques (programme « EQN-1 Degré 2 » et touches ab/c et d/c).

Il nous semble que ce résultat dépasse le cadre spécifique de l'enseignement des mathématiques au Viêt-Nam et qu'il questionne génériquement le rapport institutionnel au calcul numérique instrumenté par la calculatrice, aussi bien dans le domaine de l'analyse que de l'algèbre.

⁴¹ Cette stratégie peut s'appuyer sur la question 1, avec la règle d'action « approximation x » suivante : « pour que $f(x)$ soit proche de 1, x doit être proche de 0,3 ». Rappelons que 0,3 est une valeur interdite (question 1).

Le problème de la reproductibilité d'une ingénierie didactique dans un autre système

Le jeu fondamental de l'ingénierie repose sur la question « existe-t-il un meilleur couple $(x, f(x))$? », c'est-à-dire un couple tel que $f(x)$ soit le plus proche de *nombre 1* au travers de la recherche du meilleur couple $(x, f(x))$.

Voici une mise en scène possible d'un tel jeu :

Soit f une fonction définie par $f(x) = \frac{x^2 - 0,1x - 0,02}{0,25x^2 - 0,01}$.

Proposer un couple $(x; f(x))$ tel que $f(x)$ soit le plus proche possible de 3.

La classe a été divisée en 10 groupes de 4 élèves, une moitié des groupes travaillant avec $x < 0,2$ et l'autre avec $x > 0,2$.

Remarque pour le lecteur : $\lim_{x \rightarrow 0,2} f(x) = 3$, la fonction f est prolongeable par continuité en $x = 0,2$, elle est strictement croissante sur chacun des intervalles de son domaine de définition.

Les élèves proposent comme meilleurs couples des écritures décimales limitées, des fractions et des écritures décimales illimitées. L'ordre discret hérité de N règne dans $D\infty$.

Quatre groupes (sur 10) de la classe observée ont produit des couples $(x; f(x))$ en « écriture décimale illimitée ». Nous les donnons dans le tableau ci-après.

Type 1	Type 2	Type 3	Type 4
0,1(9) et 2,(9)	0,19999... et 2,9999...	0,199(9) et 2,9(9)7	0,2(0)1 et 3,(0)1

Tableau 11. Types d'« écriture décimale illimitée »

Pour ces élèves, le nombre 0,1(9) (ou 0,1999..., écriture décimale illimitée ayant 9 comme période, noté *EDIP9*) est le plus proche de 0,2 et inférieur strictement à 0,2 (ordre discret dans $D\infty$).

De plus, pour certains élèves, cette écriture est celle d'un irrationnel comme le montre l'interaction entre les élèves d'un groupe :

E1: Avec le nombre $18/90$? (d'après le brouillon : $0,1(9) = 0,1 + 0,9 \times 0,1 = 1/10 + 9/90 = 18/90$)

E2: Ce nombre est le plus proche de 0,2 ? (moqueur, car $18/90 = 0,2$)

E1: Alors, le nombre le meilleur est $17/90$.

E3: Non. Le nombre zéro virgule un neuf neuf neuf ... est plus intéressant

E1: Non. Le nombre $17/90$, parce que si on prend 0,1999..., on ne peut pas savoir quelle est la fraction. Si on prend 0,1999..., c'est un nombre irrationnel

E2: Cet irrationnel, c'est combien?

E1: Cet irrationnel, nous ne savons pas comment le représenter. Donc, nous l'écrivons 0,1(9)

(Extrait des lignes 12 à 19 du protocole du groupe 1 composé des 3 élèves H, V et B)

Ils produisent aussi une sorte d'infini - *fini* activée dans les écritures décimales illimitées comme 3,(0)1.

P : et que signifie cette écriture ?

E : Il y a une infinité de zéro et 1 à la fin.

La construction de la notion de limite ne peut pas éviter une (re)construction du nombre réel, en particulier ne peut pas éviter le problème de la décimalisation des nombres réels, outillée

par les concepts de l'analyse et mettant au centre de cette reprise les écritures décimales illimitées.

L'un des projets de l'ingénierie est de faire rencontrer l'obstacle « horreur de l'infini » par l'activation d'écritures telles que $3,(0)1$, $2,(9)$ ou $2,9999\dots$ pour mettre en place l'ordre dense de R en relation avec la notion de limite dans une problématique d'approximation.

Or cette rencontre dépend de l'existence d'un ostensif pour la période d'un décimal rationnel. Actuellement (ce n'était pas le cas dans les années 1980) un tel ostensif est absent en France.

Cela ne permet pas d'envisager la reproductibilité de l'ingénierie dans le système d'enseignement français sans modifications profondes et met ainsi en évidence des conditions écologiques à la reproductibilité.

IV Conclusion

I. Les apports des études comparatives des systèmes d'enseignement des mathématiques de deux pays

Tout travail didactique contient une dimension de comparaison à partir du moment où il prend en compte l'héritage d'autres études didactiques sur un sujet proche (comme l'a fait Lê Thai Bao Thien Trung dans son étude quand il se réfère aux recherches faites en France, en Belgique et en Espagne).

Mais ici, les travaux effectués comparent frontalement les systèmes éducatifs de deux pays et font émerger quatre apports fondamentaux.

1. Dénaturalisation du regard sur le fonctionnement scolaire d'une institution didactique (cf. Tran Luong Cong Khanh 2006)
2. Prise en compte de niveaux de détermination plus élevés que celui du domaine (cf. Lê Van Tien 2001)
3. Constitution d'un répertoire de praxéologies à enseigner et évaluation des praxéologies mathématiques et didactiques (cf. Nguyen Ai Quoc 2006)
4. Intervention dans un système éducatif particulier (ingénierie didactique) pour enrichir le questionnement sur l'autre système et faire émerger du générique (cf. Lê Thai Bao Thien Trung 2007)

« Face à quelques obligations d'agir, en effet nous commençons par observer et analyser [...] la manière de faire de quelque autrui [...]. Puis nous évaluons ce qu'observation et analyse auront ainsi révélé [...], avant de développer notre propre 'solution' en essayant d'améliorer, sur certains points jugés négativement, la 'solution' observée. » (Chevallard 1998)

II. Des questions qui restent ouvertes

Si la comparaison de deux systèmes éducatifs, par la constitution d'un répertoire de praxéologies et par les interrogations qu'elle suscite sur les raisons d'être de certaines de ces praxéologies (par exemple, présents dans l'une des institutions et absent dans l'autre ou complète / incomplète), pousse à envisager un développement de la réalité didactique existante par la conception d'ingénierie didactique, elle ne donne pas, à elle toute seule, ces raisons d'être dont la recherche exige un questionnement épistémologique.

On l'a vu, la conduite de ces recherches s'appuie sur les outils théoriques issus de différents cadres théoriques, comme ceux de la TAD et de la TSD, qu'elle développe à son tour. Mais ces recherches n'ont pas permis jusqu'à présent d'avancées théoriques nouvelles. On peut alors se demander si les recherches comparatives des systèmes d'enseignement de pays différents ne nécessiteraient pas un développement théorique spécifique qui prendrait notamment en compte les caractéristiques culturelles spécifiques des pays.

V Bibliographie

Bessot A., Comiti C. (2006) Some comparative Studies Between France and Vietnam Curriculums. in Leung, Graf and Lopez-Real (Eds) *Mathematics Education in different traditions: A comparative study in Asian and Western countries*. Springer : USA.

Birebent A. (2001) *Articulation entre la calculatrice et l'approximation décimale dans les calculs numériques de l'enseignement secondaire français. Choix des calculs trigonométriques pour une ingénierie didactique en classe de première scientifique*. Thèse de l'Université Joseph Fourier.

Bosch M., Gascon J. (2002), Organiser l'étude. 2. Théories & Empiries, *Actes de la onzième école d'été de didactique des mathématiques*, 23 – 39, La Pensée Sauvage, Grenoble.

Brousseau G., Brousseau N. (1987) *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*. Document pour les enseignants et pour les formateurs. IREM de Bordeaux.

Bui Thi K. H. (2005) *Une étude didactique de la vie de l'énergie dans l'enseignement de la physique, en France et au Viêt-Nam. Des décalages entre savoirs à enseigner au Lycée et savoirs de la formation universitaires, peuvent-ils être source de difficultés pour les enseignants ?* Thèse en cotutelle France – Viêt-Nam, Université Joseph Fourier et Université Pédagogique d'Ho Chi Minh Ville

Chaachoua H, Comiti C. (à paraître) L'analyse du rôle des manuels dans l'approche anthropologique. *Actes du 2^{ème} congrès international sur la théorie anthropologique du didactique*, Uzès, novembre 2007.

Chevallard Y. (1998) Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. In Noirfalise (coordonné par) *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques*. Actes de l'Université de la Rochelle : IREM de Clermont-Ferrand.

Comiti C., Tran Van T., Birebent A., Bessot A. (à paraître) Comment créer les conditions d'une coopération réussie ? Une étude de cas. *Actes électroniques du colloque Espace Mathématique Francophone 2006*, Sherbrooke, Canada.

Doan Huu H. (2001) *L'enseignement de la géométrie dans l'espace au début du lycée dans ses liens avec la géométrie plane. Une étude comparative entre deux institutions : la classe de seconde en France et la classe 11 au Viêt-nam*. Thèse en cotutelle France – Viêt-Nam, Université Joseph Fourier et Université Pédagogique d'Ho Chi Minh Ville

Legrand M. (1993), Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse, *Repères - IREM*, vol.10, pp.9-12.

Lê Thai Bao T.T. (2007) *Étude didactique des relations entre enseignement de la notion de limite au lycée et décimalisation des nombres réels dans un environnement 'calculatrice'*. Thèse en cotutelle France – Viêt-Nam, Université Joseph Fourier et Université Pédagogique d'Ho Chi Minh Ville.

Version pdf de la thèse téléchargeable sur le site : <http://hal.archives-ouvertes.fr/>

Lê Thi H. C. (1997) *Étude didactique et épistémologique sur l'enseignement du vecteur dans deux institutions : la classe de dixième au Viêt-nam et la classe de seconde en France*. Thèse en cotutelle France – Viêt-Nam, Université Joseph Fourier et Université Pédagogique d'Ho Chi Minh Ville.

Lê Van T. (2001) *Étude didactique des liens entre fonctions et équations dans l'enseignement des mathématiques au lycée en France et au Viêt-Nam*. Thèse en cotutelle France – Viêt-Nam, Université Joseph Fourier et Université Pédagogique d'Ho Chi Minh Ville.

Nguyen Ba K. et al. (1994) *Phuong phap day hoc mon toan - Day hoc nhung noi dung co ban*. Hanoi : NXBGD (Maison de l'édition).

Nguyen Chi T. (2005) *Étude didactique de l'introduction d'éléments d'algorithmique et de programmation dans l'enseignement mathématique secondaire à l'aide de la calculatrice*. Thèse en cotutelle France – Viêt-Nam, Université Joseph Fourier et l'École Normale Supérieure n°1 de Hanoi.

Nguyen Hai Q. (2006) *Les apports d'une analyse didactique comparative de la résolution des équations du second degré dans l'enseignement secondaire au Viêt-Nam et en France*. Thèse en cotutelle France – Viêt-Nam, Université Joseph Fourier et Université Pédagogique d'Ho Chi Minh Ville.

Tran Luong C. K. (2006) *La notion d'intégrale dans l'enseignement mathématique au lycée : une étude comparative entre la France et le Viêt-Nam*. Thèse en cotutelle France – Viêt-Nam, Université Joseph Fourier et Université Pédagogique d'Ho Chi Minh Ville.

Paradigmes géométriques et formation initiale des professeurs des écoles, en environnements papier crayon et informatique.

Françoise JORE
LAREF (Laboratoire de Recherche en Éducation et Formation)
Université Catholique de l'Ouest

Résumé

Ce travail prend appui sur un cadre théorique qui distingue deux paradigmes de géométrie enseignée : d'une part G1 (*spatio-graphique*), dont les objets sont physiques et les validations de nature perceptive, et d'autre part G2 (*proto-axiomatique*), dont les objets sont théoriques et les validations de type hypothético-déductif. Il précise la nature des constructions et des définitions et explicite des styles de rédaction de scénario de construction en lien avec ces paradigmes.

Il met en évidence que le positionnement des PE1 dans G1 ou G2 dépend plus de la situation proposée que de l'étudiant lui-même. Il permet en outre d'explicitier les procédures que les PE1 utilisent pour tracer « aux instruments » une médiatrice sous diverses contraintes et fait émerger une première approche de leur degré d'expertise dans le tracé d'une médiatrice, par l'étude de leur adaptabilité à ces contraintes, adaptabilité liée au caractère disponible ou non de G2.

Cette recherche confirme par ailleurs que les PE1 se situent dans différents paradigmes, G1, G2, mais aussi un « pseudo-paradigme » local et personnel, qui relève à la fois de G1 et de G2. Les styles des scénarios de construction sont utilisés comme indices du positionnement dans G1 ou G2 et l'analyse des productions d'étudiants montre que l'automatisation de procédures de construction semble être un frein à la formulation et à la justification de ces procédures et enferme l'étudiant dans G1. Ce travail démontre qu'une prise de conscience de ces paradigmes peut néanmoins se mettre en place au travers d'une ingénierie spécifique, centrée sur la rédaction et la justification de scénarios de construction, et permettre – au moins à court terme – de faire évoluer les étudiants vers G2 et d'améliorer leurs compétences dans ce dernier paradigme.

Mots clefs

Géométrie plane, paradigme géométrique, géométrie spatio-graphique, géométrie proto-axiomatique, pseudo-paradigme, dessin, objet géométrique, figure, médiatrice, style de scénario de construction, formation initiale des professeurs des écoles, environnement papier-crayon, environnement informatique, analyse implicative.

Considérons le problème suivant, proposé à de futurs professeurs des écoles, en début de formation à l'IUFM :

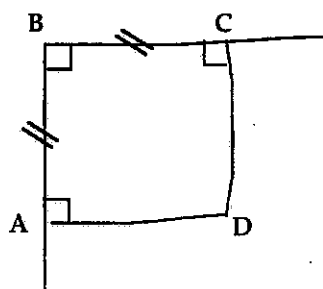


Figure 1. Le quadrilatère ABCD est-il un carré ?

A la question posée : « Le quadrilatère ABCD est-il un carré ? », 43 % des PE1 en début de formation répondent « oui » tandis que 51 % répondent « non » (résultats⁴² obtenus sur 878 questionnaires proposés à des futurs professeurs des écoles, au début de leur première année de formation à l'IUFM ou au CFP⁴³). Nous allons dans ce qui suit présenter succinctement le cadre théorique des paradigmes géométriques de Houdement et Kuzniak (2000), revu par Parzysz (2002), pour interpréter ces réponses. Ce cadre théorique nous permettra d'analyser une partie des résultats de ces questionnaires qui ont été proposés aux PE1, des travaux de PE1 travaillant avec un logiciel de géométrie dynamique, puis des observations effectuées dans les séances avec les PE1 au cours de la formation en géométrie plane. Cette présentation est issue de ma thèse « Paradigmes géométriques et formation initiale des professeurs des écoles, en environnement papier-crayon et informatique », soutenue dans le cadre du laboratoire Didirem de l'université Paris 7, en novembre 2006.

Cadre théorique

Définition des paradigmes géométriques

Nous ne détaillerons pas ici les paradigmes géométriques de Houdement et Kuzniak (2000). Ils ont déjà été présentés au séminaire national par leurs auteurs. Nous nous centrerons sur l'approche de Parzysz (2002), résumée dans le tableau suivant :

	Géométries non axiomatiques		Géométries axiomatiques	
Types de géométries	« Géométrie » concrète G0	Géométrie spatio-graphique G1	Géométrie proto- axiomatique G2	Géométrie axiomatique G3
Objets	réels	géométriques	Théoriques définis par une formulation discursive	
	Physiques réalités spatio-graphiques			
Validations	Perceptives		incomplètes	complètes
			Hypothético-déductives	
Statut du dessin	Objet du travail		Représentant de l'objet théorique	

Tableau 1. Les paradigmes géométriques revus par Parzysz (2002)

42 Le questionnaire d'où est extraite cette question se situe en annexe. Le lecteur pourra trouver le détail de l'analyse de ce questionnaire et des résultats obtenus dans ma thèse [Jore 2006].

43 Centres de Formation Pédagogique, qui préparent les étudiants au concours de professeurs des écoles pour l'enseignement privé.

Il met en évidence 4 paradigmes géométriques, qui se différencient d'une part par la nature des objets de travail, d'autre part par celle des validations. Notons que nous ne nous intéressons ici qu'aux objets du plan. Explicitons quelque peu ces paradigmes.

G0, appelé géométrie concrète, correspond à l'étude des objets réels, de la vie quotidienne, envisagés avec un regard géométrique. Ce regard géométrique se met petit à petit en place, à l'école élémentaire, par l'abstraction, abstraction au sens de « enlever de » : il s'agit en quelque sorte d'enlever à l'objet ses caractéristiques comme la couleur, la taille ou la fonction, caractéristiques sans intérêt en géométrie, mais néanmoins souvent essentielles pour l'enfant. Les objets de G0 sont physiques, réels, et les validations mises en œuvre sont de nature perceptive.

G1, appelé géométrie spatio-graphique⁴⁴, travaille cette fois sur des objets construits pour la géométrie. Les objets sont à nouveau physiques, traces matérielles sur la feuille de papier ou l'écran d'ordinateur, et les validations sont perceptives. L'étudiant qui, dans l'exemple précédent, affirme que ABCD n'est pas un carré se situe dans ce paradigme : il observe la trace matérielle qu'il a sous les yeux et, avec ou sans le recours aux instruments, décide malgré les codages que les longueurs des côtés ne sont pas égales ou que les angles ne sont pas droits. Ainsi, son objet de travail est l'objet physique dessiné sur la feuille de papier et les validations mises en œuvre sont perceptives. Notons que cette perception n'exclut pas l'utilisation des instruments tels que la règle, l'équerre, le rapporteur ou le compas. Que l'on compare deux longueurs d'un seul coup d'œil ou à l'aide d'un compas, c'est bien l'œil qui décide en définitive s'il y a ou non égalité. Les instruments peuvent ainsi être considérés comme des prolongements du corps ayant pour effet d'augmenter la précision, cette problématique de la précision étant caractéristique du paradigme G1. Ceci ne veut pas dire pour autant qu'un apprentissage spécifique ne soit pas utile : il faut en effet apprendre aux enfants à ne pas se contenter d'un coup d'œil et à utiliser les instruments de manière pertinente.

G2 est appelé géométrie proto-axiomatique parce qu'elle est partiellement axiomatisée. Parzysz parle également d'axiomatisation locale : certains éléments d'une démonstration sont explicités tandis que d'autres (concernant l'incidence ou l'ordre des points par exemple), sont lus sur le dessin, ce qui ne relève pas d'une validation déductive. Les objets sont cette fois des objets théoriques, abstraits, présents uniquement dans notre cerveau, définis par une formulation discursive, et les traces sur le papier n'en sont que de modestes représentants, qui n'ont d'ailleurs en général pas exactement les mêmes propriétés⁴⁵ que l'objet théorique (une droite par exemple est infinie tandis qu'aucun trait matériel ne saurait l'être). Ces objets n'étant pas matériels, la perception n'est plus d'aucun secours : il s'agit alors de démontrer, les validations étant de type hypothético-déductif. Reprenons l'exemple du quadrilatère ABCD. Ceux qui considèrent qu'il s'agit d'un carré ne s'attachent pas au dessin, celui-ci n'est pour eux qu'un représentant de l'objet théorique qu'ils ont mentalement construit à partir des informations données par l'énoncé sur cet objet : il s'agit d'un quadrilatère, avec trois angles droits et deux côtés consécutifs de même longueur, et les théorèmes de géométrie plane permettent de conclure qu'il s'agit d'un carré. Notons que le codage est ici considéré comme une forme particulière de formulation, non discursive, mais qui a néanmoins exactement la même fonction d'information qu'un texte.

G3 est comme l'horizon de G2 quand le temps de l'enseignement augmente : petit à petit, l'élève puis l'étudiant disposent de plus en plus d'éléments pour ne plus passer sous silence

44 Cette expression est due à (Laborde & Capponi, 1995)

45 Le lecteur pourra à ce sujet lire (Laborde & Capponi, 1995, p171-172)

une partie de la démonstration : les objets sont théoriques, les validations sont déductives et complètes.

Figure

Le lecteur pourra noter que nous évitons d'utiliser le mot « figure », celui-ci étant en effet trop polysémique, renvoyant selon les auteurs aux traces matérielles sur le papier (Duval quand il parle d'appréhension perceptive des figures (Duval. 1994)), ou à l'objet théorique défini par un texte (Parzysz. 1989)), ou encore comme une classe d'équivalence de dessins ((Arsac & al. 1992) ou (Laborde & Capponi. 1994)). Nous employons donc le mot « dessin » pour parler de la trace matérielle, en précisant lorsque c'est possible « dessin objet » s'il s'agit de l'objet de travail dans G1, ou bien « dessin représentant » lorsque ce dessin représente un objet théorique de G2. Notons qu'il est parfois difficile de déterminer si le dessin est considéré comme un objet ou comme un représentant par celui qui l'utilise ; nous utilisons alors le mot « dessin » seul. Nous utiliserons cependant le mot « figure », au sens de « partie de l'espace ». Nous nommons « figure plane » une partie du plan, mais considérée aussi bien sous son aspect dessin que sous son aspect OGT⁴⁶. Ceci correspond à la définition que l'on trouve dans (Bouvier et al. 1979) : « *figure dans un espace affine E : partie de E* ». Par exemple, le carré, le triangle, etc. sont des figures planes, mais aussi « un cercle de centre O et un carré de sommet O et dont deux autres sommets appartiennent au cercle », cette figure étant elle-même constituée de deux autres figures (le carré et le cercle).

Pseudo-paradigmes

Les paradigmes géométriques tels qu'ils sont ici définis sont cohérents. En particulier, la perception est mise en œuvre sur des objets physiques, les démonstrations sur des objets théoriques. Les productions des étudiants n'ont hélas pas toujours cette cohérence, ce qui nous a amenée à définir le concept de pseudo-paradigme : il s'agit d'un « paradigme » dans lequel se situe l'étudiant à un moment donné, pour un exercice donné, et qui participe d'une manière ou d'une autre simultanément de G1 et de G2. Nous utilisons le terme de « pseudo-paradigme » pour mettre en évidence qu'il ressemble aux paradigmes géométriques mais qu'il lui manque quelque chose, la cohérence. Il s'agissait entre autres, dans mon travail de thèse, de préciser dans quel(s) pseudo-paradigme(s) se situent les PE1.

Afin de mieux expliciter ces paradigmes et en particulier G1 et G2, au centre de notre travail avec les PE1, analysons maintenant deux types d'actions spécifiques en géométrie : construire et définir.

Une action particulière : construire

Dans G1, une construction peut être considérée comme la réalisation effective, physique, d'un objet de G1, c'est-à-dire d'un tracé, le plus souvent avec certains instruments (notamment règle, équerre, compas). Dans G2, une construction peut être considérée comme l'élaboration d'une procédure d'obtention d'un objet de G2, à partir d'objets de G2 pré-existants. Les instruments de G1 peuvent alors être remplacés par des contraintes : les objets doivent être obtenus le plus souvent à partir de droites, de cercles et d'intersections de droites et/ou de cercles. Rien n'empêche d'effectuer ensuite une représentation matérielle de cette construction. Le problème est néanmoins de ne pas confondre le dessin représentant la construction avec la construction elle-même, dans G2, le dessin ne devant être qu'un représentant de l'objet construit. Cette confusion est d'autant plus facile que le langage utilisé

46 Objet Géométrie Théorique

dans G2 pour définir une construction est le plus souvent le même que celui utilisé dans G1, en particulier avec l'utilisation d'un mot clé : « tracer », verbe qui transporte la construction de G2 vers G1.

Trois styles de rédaction des scénarios de construction

Explicitons ce langage au travers de la mise en évidence de différents styles de rédaction des scénarios de construction. Nous appelons « style 1 » un langage qui décrit les actions ou gestes effectués, ainsi que les instruments utilisés, plutôt que l'objet géométrique construit. Prenons un exemple : « mettre la pointe du compas en A, prendre un écartement BC, etc. ». Ce style est un indicateur du paradigme G1. Le « style 2 » au contraire est un langage qui définit directement les objets géométriques, indépendamment des gestes à effectuer ou des instruments à utiliser pour en faire une représentation. Par exemple : « soit le cercle de centre A et de rayon BC, etc. ». Ce style est un indicateur du paradigme G2.

Un troisième style (style 3) est en fait souvent utilisé à la place du style 2, ce qui explique la confusion dont nous parlions précédemment : il s'agit de s'intéresser aux objets géométriques construits, sans tenir compte des instruments utilisés, mais en gardant le verbe tracer, qui renvoie alors la construction dans G1. Le texte précédent devient alors : « Tracer un cercle de centre A et de rayon BC ». Par l'utilisation du verbe « tracer », ce style est à nouveau un indicateur du paradigme G1, mais qui présente l'énorme avantage par rapport au style 1 d'explicitier les objets mathématiques sous-jacents à la construction et permet ainsi plus facilement un passage vers G2 le moment venu.

Une autre action particulière : définir

Une autre action est intéressante à étudier par rapport aux paradigmes G1 et G2 : c'est celle de définir. Certaines définitions sont de type exclusif. On trouve ainsi, dans (Académie française, Huitième édition, version informatisée en ligne) :

« Losange : Parallélogramme dont les quatre côtés sont égaux, sans que les angles soient droits. Deux des angles du losange sont aigus et deux sont obtus.

Trapèze : Quadrilatère dont deux côtés sont inégaux et parallèles »

Ou encore, dans les éléments d'Euclide :

« Parmi les figures quadrilatères est un carré celle qui est à la fois équilatérale et rectangle ; est oblongue celle qui est rectangle mais non équilatérale ; un losange, celle qui est équilatérale mais non rectangle ; un rhomboïde, celle qui a les côtés et les angles opposés égaux les uns aux autres mais qui n'est ni équilatérale ni rectangle ; et que l'on appelle trapèzes les quadrilatères autres que ceux-là. » (Euclide, traduction de Heiberg par Vitrac, 1990)

Ces définitions peuvent être considérées comme relevant de G1 : la perception amène à travailler par opposition, en excluant les familles d'objets les unes des autres. Au contraire, les propriétés utilisées lorsque l'on travaille dans G2 amènent à caractériser les objets, en incluant les familles d'objets les unes dans les autres. Dans G2, on considérera par exemple qu'un losange est un quadrilatère avec quatre côtés de même longueur, un rectangle est un quadrilatère avec quatre angles droits, un carré étant alors un losange et un rectangle particulier. La manière de définir les objets géométriques peut ainsi être considérée comme un indice du fait de se situer plutôt dans G1, ou plutôt dans G2.

Problématique, hypothèses de recherche, hypothèse de travail

Nous pouvons maintenant expliciter la problématique générale de la thèse : il s'agit de déterminer dans quel(s) paradigme(s) se placent les PE1 en début de formation pour traiter un problème géométrique : G1, G2, ou un(des) pseudo-paradigme(s) à déterminer. Cette problématique a été développée au travers de plusieurs questions que nous redonnons ici, sans les développer :

- P1 : Comment se comportent les PE1, en début de formation, du point de vue des paradigmes G1/G2 ?
- P1.1 : Les PE1 en début de formation travaillent-ils « spontanément » dans le cadre de la géométrie spatio-graphique (G1), ou dans celui de la géométrie proto-axiomatique (G2) ? En particulier dans une tâche ambiguë entre G1 et G2, dans quel paradigme ou pseudo-paradigme les PE1 se situent-ils ? De manière générale, peut-on expliciter le paradigme ou pseudo-paradigme dans lequel se situent les PE1 ?
- P1.2 : Lorsqu'on propose plusieurs tâches de géométrie plane dans le micro-espace aux PE1 en début de formation, est-il possible de faire émerger des profils d'étudiants « tout G1 » ou « tout G2 » ou d'autres profils ? De manière plus large, y a-t-il un lien entre leur positionnement par rapport à G1 et G2 dans une situation donnée et leur positionnement par rapport à G1 et G2 dans une autre situation ?
- P1.3 : Dans une tâche de construction de G1, les PE1 sont-ils capables de faire le lien entre la technique de G1 qu'ils ont utilisée et la technologie de G2 qui justifie cette technique ? Autrement dit, y a-t-il cohérence entre leurs procédures (dans G1) et leurs déclarations (dans G2) à propos de ces procédures ?
- P1.4 : Existe-t-il des situations qui favorisent plutôt un traitement dans G1, ou dans G2 ? Et si oui, lesquelles ?
- P2 : Quelle est l'influence de l'environnement (papier-crayon ou informatique) sur le positionnement « spontané » des PE1 dans les paradigmes G1 ou G2 (ou dans un pseudo-paradigme) ? Quel rôle jouent G1I et G2I ?
- P3 : Peut-on proposer un dispositif de formation qui permette aux PE1 d'une part de prendre conscience des paradigmes G1 et G2 et d'autre part d'être capables de se situer de manière consciente et efficace dans G1 ou G2 selon les besoins ?

Ces questions correspondent à deux hypothèses de recherche qu'il s'agissait de tester dans cette thèse :

- HR1 : Certains PE1 ne font pas de différence entre les statuts des dessins géométriques : Objets de la géométrie (G1) ou Représentants d'un Objet Géométrique Théorique (G2), ni entre les validations de type perceptif (G1) ou de type hypothético-déductif (G2) qu'ils utilisent. Ils fonctionnent tantôt dans G1, tantôt dans G2, tantôt dans un pseudo-paradigme personnel qui relève de G1 et de G2, sans en avoir conscience.
- HR2 : Les paradigmes géométriques tels qu'ils ont été précédemment définis, et tout particulièrement G1 et G2, sont un outil pertinent pour analyser l'activité des PE1 en géométrie plane.

Par ailleurs, une hypothèse de travail peut être explicitée :

- T : Il est nécessaire qu'un professeur des écoles ait une conscience claire de la distinction G1/G2, ainsi qu'un minimum de connaissances dans G2.

Notons que ce qui est essentiel pour nous, c'est la prise de conscience par l'étudiant de l'existence de ces paradigmes. Le fait de développer un minimum de connaissances dans G2 n'est lié qu'à la forme actuelle du concours de recrutement des professeurs des écoles, qui demande la plupart du temps à l'étudiant de se positionner dans G2. Il n'est en effet pas sûr

qu'il soit utile de faire travailler les étudiants dans G2 dans le but d'enseigner à l'école élémentaire. La question reste ouverte. Il est encore moins question d'essayer de faire en sorte que les étudiants ne travaillent que dans G2. Cela n'aurait pas de sens dans la mesure où, dans la résolution d'un problème de géométrie élémentaire, même les experts travaillent toujours tantôt dans G1, tantôt dans G2.

En effet, pour modéliser un problème concret, l'expert passe de G1 à G2 ; pour réaliser un dessin dans un but heuristique, il passe de G2 à G1 ; pour démontrer une conjecture résultant d'une observation, il passe de G1 à G2 ; pour vérifier sur un dessin une conclusion théorique, il passe de G2 à G1. Ainsi, G1 reste indispensable, même à l'expert. Il ne s'agit donc pas d'essayer de faire passer définitivement les étudiants de G1 à G2, mais de les rendre conscients de l'existence de ces paradigmes, notamment pour qu'à l'avenir, ils soient clairs dans leurs consignes et leurs attentes avec leurs élèves.

Le cadre théorique étant explicité, nous pouvons maintenant présenter quelques résultats de la recherche.

Analyse quantitative sur 878 PE1

Afin de répondre aux questions P1 (P1.1 à P1.4), un questionnaire a été proposé à 878 PE1 en début de formation. Trois versions ultérieures, proposées à chaque fois à au moins une centaine de PE1, ont par ailleurs permis d'affiner les résultats. Parmi tous les items du tests, nous allons ici présenter les résultats obtenus pour deux types d'items : les items de reconnaissance d'une figure, et les items de tracé de médiatrice. Ces items étaient mélangés dans les tests. Le test initial est en annexe 1.

Les items de reconnaissance d'une figure

Des items étaient proposés aux étudiants, dans des situations volontairement ambiguës, où aucun élément n'indiquait clairement si on attendait un travail dans G1 ou dans G2. L'objectif était d'observer si la réponse spontanée des étudiants était plutôt de type G1 ou de type G2, et éventuellement de repérer des caractéristiques des objets proposés qui favorisaient plus spontanément un travail dans G1 ou dans G2.

Reconnaissance d'objets géométriques déjà construits

Trois items ont été proposés aux PE1 (1, 2 et 3.1), puis deux autres les années suivantes (3.2 et 3.3) :

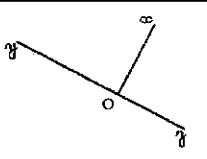
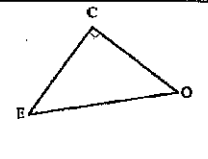
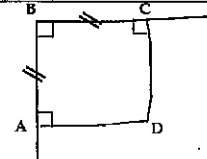
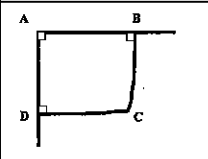
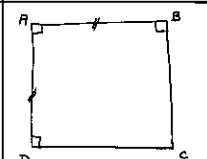
Item 1	Item 2	Item 3.1	Item 3.2	Item 3.3
				
L'angle $x\hat{O}y$ est-il droit ? Justifiez votre réponse.	Quelle est la nature du triangle ECO ? Comment le savez-vous ?	Le quadrilatère ABCD est-il un carré ? Justifier.	Le quadrilatère ABCD a-t-il 4 angles droits ? Comment le savez-vous ?	Que pouvez-vous dire du quadrilatère ABCD ? Comment le savez-vous ? Expliquez en détail.

Tableau 2. Les items de reconnaissance d'un objet déjà construit

Les résultats de l'item 1 montrent surtout un effet de contrat didactique : les étudiants tiennent avant tout à fournir une réponse. Comme G2 seul ne le permet pas, ils se situent alors dans une très large majorité dans G1 (76%), en utilisant seulement la perception pour répondre (perception le plus souvent instrumentée, avec équerre ou rapporteur), ou dans un pseudo-paradigme relevant de G1 et de G2 (18%), en effectuant une construction aux instruments dans G1 afin d'obtenir des hypothèses qui sont ensuite exploitées dans une démonstration de G2 pour conclure.

L'item 2 met plutôt en évidence une autre règle, issue de la logique du discours : il faut donner le maximum de l'information dont on dispose (loi d'exhaustivité, voir (Ducrot 1972)). G1 permet de se persuader, avec ou sans utilisation des instruments, que le triangle est isocèle, tandis que le codage (objet physique mais issu de G2) permet de conclure que le triangle est rectangle. Les trois-quarts des étudiants répondent ainsi que le triangle est rectangle et isocèle.

Dans la situation de l'item 3, il y a conflit entre le su (G2) et le perçu⁴⁷ (G1). Les deux paradigmes conduisent à des conclusions différentes et sont donc source de conflit pour l'étudiant, ce qui l'oblige en général à choisir, contrairement à la question précédente où l'absence de conflit n'invitait pas au choix mais au contraire à la « cohabitation » des deux types de géométrie. De ce fait, la plupart des PE1 font un choix et fonctionnent uniquement dans G1 (43% de réponses : « ce n'est pas un carré ») ou dans G2 de manière exclusive (51% de réponses : « c'est un carré »), même si la rigueur mathématique de leur justification dans ce cas laisse parfois à désirer... Autrement dit, 94% des étudiants résolvent, d'une façon ou d'une autre, la contradiction.

L'item 4 propose une autre version de cette question. Il a été proposé une année plus tard, à la place de la précédente, à 168 étudiants. 90% des étudiants répondent alors que ABCD est un carré. Ils se placent donc spontanément dans G2, alors que la perception visuelle n'invite pas immédiatement à conclure ainsi. La comparaison des résultats de ces deux versions de la question amène à poser l'hypothèse suivante : « Un dessin à main levée permet plus facilement un positionnement dans G2, alors qu'un dessin « mixte », c'est-à-dire comportant des éléments tracés aux instruments et d'autres à main levée, pose plus de difficultés aux étudiants ». On peut penser que le dessin à main levée, par nature imprécis, ne permet pas d'utiliser les instruments habituels de validation dans G1 (règle graduée, équerre) et invite donc à passer dans G2 pour conclure, tandis que le dessin mixte permet des vérifications sur une partie du dessin et invite donc certains étudiants à rester dans G1 pour lire le reste du dessin.

Reconnaissance d'objets géométriques construits par les étudiants eux-mêmes

Les deux items qui suivent permettent cette fois d'étudier le comportement des étudiants - et en particulier le type de justification utilisé, dans une situation où ils construisent eux-mêmes tout ou partie du dessin. Cette activité de construction se situe dans G1, et il s'agit de voir si les PE1 restent dans G1 pour conclure ou s'ils passent dans G2. Le premier item est décrit par le tableau 3.

⁴⁷ Sur le conflit su/perçu, voir (Parzysz 1989).

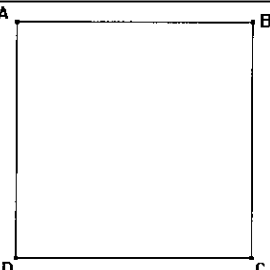
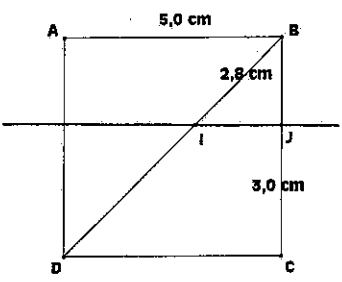
Dessin proposé dans l'énoncé	Enoncé de l'exercice	Figure produite par les étudiants
 (le dessin proposé est un carré qui fait effectivement 5 cm de côté.)	ABCD est un carré de côté 5 cm. Placer le point I de [BD] tel que $BI = 2,8$ cm puis le point J de [BC] tel que $JC = 3$ cm. Que pouvez-vous dire des droites (IJ) et (DC) ?	

Tableau 3. Que pouvez-vous dire des droites (IJ) et (DC) ?

Les réponses à cet item sont très variées : G1 seulement (28 %, par exemple vérification à l'équerre que (IJ) est perpendiculaire à (BC)), G2 seulement (10 %, démonstration utilisant la réciproque du théorème de Pythagore et le théorème de Thalès), ou des pseudo-paradigmes relevant des deux (par exemple mesure de BD à la règle graduée (G1), puis application du théorème de Thalès (G2)). L'analyse détaillée des productions permet de conclure que plusieurs facteurs interagissent : la prégnance du perçu qui amène dans G1, le manque de connaissances et de compétences, d'une part en géométrie et d'autre part sur la nature des nombres⁴⁸, qui empêche de travailler correctement dans G2, le contrat didactique enfin qui invite à essayer de résoudre néanmoins le problème dans G2. Tous ces éléments amènent les étudiants dans un pseudo-paradigme qui relève simultanément de G1 et de G2.

Analysons un dernier item. Cette fois, l'énoncé est « Construisez avec soin un triangle ABC tel que : $AB = 7,5$ cm, $BC = 6$ cm, $AC = 4,5$ cm. Que peut-on dire du triangle ABC ? Comment le savez-vous ? ». Quasiment tous les étudiants tracent correctement le triangle et le reconnaissent comme rectangle. La moitié d'entre eux effectuent une démonstration, plus ou moins correcte, dans G2, mais 35 % citent simultanément l'équerre et le théorème de Pythagore, se situant ainsi simultanément dans G1 et dans G2, en mettant les deux types de validation au même niveau, tandis que 15 % ne citent que l'équerre (G1). Si le théorème de Thalès est encore difficile pour bon nombre de ces étudiants, ce qui nous permettait dans l'item précédent d'expliquer pourquoi ils quittaient G2, ce n'est en général pas le cas pour le théorème de Pythagore. Il est en général disponible, mais manifestement pas toujours mobilisable et, là encore, la prégnance du dessin laisse des étudiants dans G1, alors même qu'ils disposent des éléments théoriques pour travailler dans G2.

Conclusion de l'analyse des items de reconnaissance de figures

Les résultats précédents ainsi que les analyses implicatives effectuées sur les réponses des étudiants mettent en évidence l'impossibilité de faire émerger des profils d'étudiants qui seraient systématiquement dans G1 ou systématiquement dans G2, ou d'autres profils d'étudiants qui choisiraient les mêmes réponses aux mêmes questions. Une conclusion apparaît alors : le comportement en G1 ou G2 dépend de la situation et du contexte plus que de l'individu, qui s'adapte à la question posée.

⁴⁸ On pourra sur ce point lire utilement (Houdement, Kuzniak, 2003)

Les items de tracé de médiatrices

Analysons maintenant trois items concernant le tracé d'une médiatrice. Dans les trois cas, un segment [MN] était tracé dans une position différente à l'intérieur du cadre rectangulaire dévolu à l'item, et la même question était posée : « Construisez la médiatrice du segment [MN]. Précisez quelles propriétés de la médiatrice vous utilisez. ». La question 3 (cf. annexe 1) présentait le segment [MN] complètement en bas de la feuille, de sorte que la procédure standard « deux intersections d'arcs de cercle de part et d'autre du segment » était particulièrement difficile à mettre en œuvre. La question 5 ne présentait aucune contrainte, la place étant suffisante autour du segment pour que toutes les procédures soient utilisables. La question 8 proposait une configuration avec deux triangles isocèles « incomplets » qui devait permettre à un expert de relier simplement deux sommets de ces triangles pour obtenir la médiatrice souhaitée.

Du point de vue des procédures, l'objectif était d'une part de repérer quelle était la procédure spontanément utilisée, mais surtout d'étudier la résistance de cette procédure spontanée sous l'effet de contraintes. La question sous-jacente était : les étudiants utilisent-ils toujours la même procédure, ou s'adaptent-ils à la situation proposée ? En particulier pour la question 8, sont-ils capables d'utiliser efficacement les particularités de la figure proposée pour simplifier leur tracé ?

Du point de vue des commentaires, et c'était là le plus important, l'objectif était de repérer si ceux-ci étaient en adéquation avec la procédure utilisée (c'est même là la modalité qui a été utilisée dans les premières versions du codage des tests, avant de repérer dans la dernière version le contenu même de ce commentaire : milieu, angle droit, équidistance des points, ...). La question sous-jacente était cette fois : le commentaire utilisé dépend-il de la procédure ou bien est-il indépendant du tracé effectué ? Autrement dit : les étudiants sont-ils capables d'explicitier les propriétés qui justifient leur tracé ou est-ce qu'ils mettent d'un côté les techniques de tracé, et de l'autre, de manière quasi-indépendante, les propriétés de la médiatrice ? Le lien avec les paradigmes géométriques est alors le suivant : si l'étudiant effectue les tracés sans faire de lien avec les propriétés utilisées, il se situe dans G1, seul compte le dessin objet obtenu, si au contraire il est capable d'explicitier les propriétés effectivement utilisées, alors il est possible que cet étudiant travaille dans G2. Le lecteur sera certainement sensible à la nuance : dans le premier cas, on affirme que l'étudiant se situe dans G1, puisque, ne disposant pas des propriétés de l'objet, l'étudiant ne peut s'intéresser qu'à la trace matérielle sur la feuille de papier, dans l'autre, il est seulement possible qu'il soit dans G2, rien ne permettant en effet d'affirmer que, pour l'étudiant, le dessin obtenu soit un représentant d'un objet théorique et non l'objet physique du travail géométrique lui-même.

Analyse des procédures utilisées et mise en place d'un degré d'expertise

De nombreux éléments ont été saisis pour chaque production : instruments utilisés, procédure, commentaire effectué, adéquation ou non du commentaire et de la procédure. Nous ne détaillerons pas tous les résultats mais seulement ceux relatifs aux procédures et à l'adéquation aux commentaires que nous analyserons. Le lecteur trouvera les tableaux de résultats des procédures utilisées en annexe 2.

La procédure « standard », très largement utilisée (77 %) quand il n'y a pas de contrainte particulière (Q5), consiste à tracer deux intersections d'arcs de cercle, de part et d'autre du segment [MN]. Tous les arcs de cercle tracés ont, dans la configuration Q5, le même rayon. Ce rayon peut être égal (Q5P-2IMN : 21 %) ou non (Q5P-2I : 56 %) à la longueur MN. On retrouve cette procédure standard dans la question Q8 : 22% d'étudiants l'utilisent encore, soit la grande majorité (67%) de ceux qui n'ont pas utilisé les points E et/ou U.

Cette procédure n'est pas massivement remplacée par la procédure « milieu et angle droit » quand la position du segment est en bas de la feuille (Q3) (28 % seulement de la population totale utilise cette procédure en Q3), mais plutôt le plus souvent « adaptée », en gardant une intersection de deux arcs de cercle et, selon les cas, en utilisant un angle droit (39 %) ou le milieu du segment (12 %). La forte utilisation de la procédure standard par rapport à la procédure « milieu et angle droit » peut s'expliquer par le travail fait au collège : si à l'école élémentaire l'équerre est utilisée de manière exclusive pour tracer des perpendiculaires, la procédure standard est au contraire privilégiée au collège dès que la médiatrice a été travaillée, en particulier parce que cette procédure est généralement plus précise. Pour le tracé de médiatrice, elle est d'autant plus précise qu'elle évite de mesurer la longueur du segment puis de reporter la moitié de cette longueur.

Pour tester la résistance de ces procédures, une analyse implicative a été effectuée. Appliquée aux seules procédures utilisées par les étudiants pour construire la médiatrice dans chacune des questions 3, 5 et 8, la méthode donne le graphe implicatif de la figure suivante. La lecture de ce graphe est très simple : si on utilise la procédure « milieu et angle droit » à la question 8, alors on l'utilise aussi à la question 5. Evidemment, une telle implication n'est pas absolue, il s'agit de « quasi-implication », d'autant plus fiable⁴⁹ que le niveau correspondant à la relation est élevé (celui-ci peut être repéré par la nature de la flèche). Ce graphe met en évidence plusieurs groupes de procédures. L'ordre de ces groupes de gauche à droite sur le graphe est parfaitement aléatoire et n'a pas de signification particulière.

L'analyse de cette représentation va permettre de répondre plus précisément à la question suivante : « Quelle procédure utilise à la question n un étudiant qui utilise telle procédure à la question m ? », en prenant simultanément en compte les procédures des trois situations.

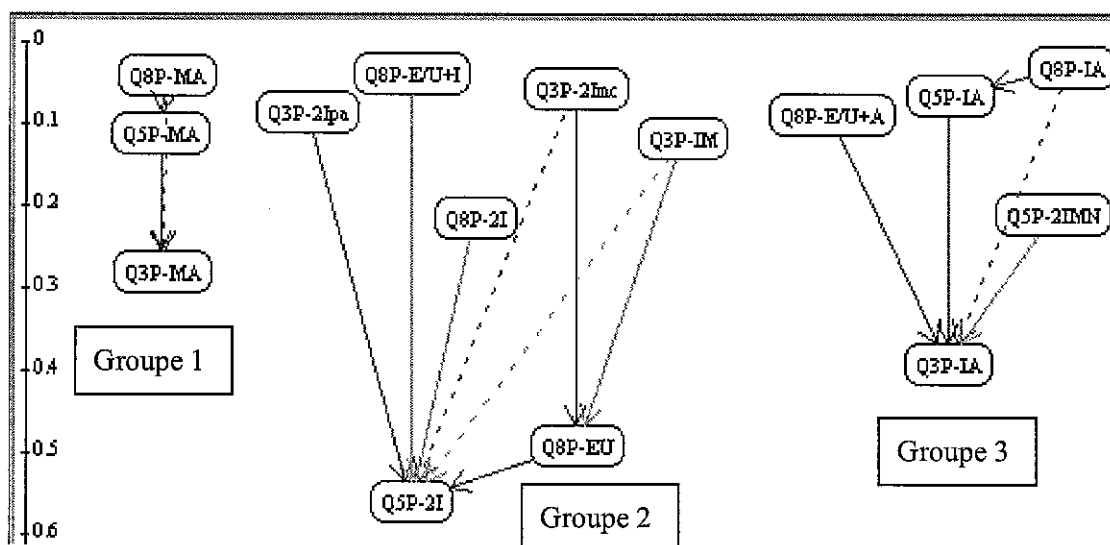


Figure 2. Graphe implicatif sur les procédures avec Chic 1.4 (seuils de 0.90, 0.80, 0.74)

A droite, le groupe 1 regroupe les procédures « milieu et angle droit » (MA) des trois questions avec le lien $Q8P-MA \rightarrow Q5P-MA \rightarrow Q3P-MA$. Compte tenu des configurations des situations 3, 5 et 8, ces relations sont assez naturelles. En effet, le fait d'utiliser la procédure « milieu et angle droit » à la question 8, alors qu'on peut directement relier les points E et U, voire à la question 5, où la procédure « deux intersections d'arcs de cercle » est massivement utilisée, signifie que cette procédure est fortement installée chez l'étudiant, elle

⁴⁹ Pour renforcer la fiabilité, compte tenu des effectifs, l'analyse entropique, plus exigeante, a été préférée ici à l'analyse classique. La loi choisie est la loi de Poisson. L'effectif étudié est de 878 étudiants.

est même éventuellement la seule disponible. Il est donc naturel qu'elle soit également utilisée à la question 3.

Le groupe 2 regroupe d'une part les procédures « une intersection d'arcs de cercle et milieu » de la question 3 (Q3P-IM), les diverses variantes de la procédure « deux intersections d'arcs de cercle » de la question 3 (Q3P-2Imc : du même côté du segment [MN], Q3P-2Ipa : part et d'autre du segment [MN]), la procédure « tracé direct de la droite (EU) » de la question 8 (Q9P-EU) et la procédure « deux intersections d'arcs de cercle de même rayon différent de MN » de la question 5 (Q5P-2I). Il s'agit de procédures qui révèlent une certaine adaptabilité de l'étudiant, et il est aisé de comprendre leur rapprochement : pour pouvoir adapter la procédure classique « deux intersections d'arcs de cercle de part et d'autre du segment » à la question 3 par exemple, il faut pouvoir jouer sur le rayon de ces cercles. Ceci est possible lorsque l'étudiant choisit un rayon quelconque. Quant à la question 8, la procédure qui apparaît dans ce groupe est la plus « opportuniste », celle que l'on peut considérer comme plus « experte », puisqu'elle utilise au mieux les informations spécifiques de cette situation : la donnée des deux points E et U. Le fait d'avoir un bac ou une licence scientifiques est lié à ces procédures. Bac S est en effet par exemple la variable qui contribue le plus à plusieurs implications de ce groupe, avec un risque très faible.

Le groupe 3, *a contrario*, regroupe des procédures moins adaptables. Quand l'étudiant prend pour rayon des cercles la distance MN (Q5P-2IMN), il ne peut plus adapter sa procédure et il est obligé de la modifier de façon radicale pour accomplir la tâche proposée. Ce groupe est constitué des procédures « une intersection d'arcs de cercle et angle droit » des questions 8, 5 et 3 (avec les liens : Q8P-IA → Q5P-IA → Q3P-IA), de la procédure « utilisation du point E et/ou U et angle droit » de la question 8 (Q8P-E/U+A), et bien sûr de la procédure « deux intersections d'arcs de cercle de rayon MN » de la question 5 (Q5P-2IMN). Comme le lien Q8P-MA → Q5P-MA → Q3P-MA, le lien Q8P-IA → Q5P-IA → Q3P-IA met en évidence une persistance des procédures utilisées chez certains étudiants.

Par ailleurs, la procédure « arcs de cercle et milieu », pour les questions 3 et 5, se situe du côté des procédures expertes (groupe 3), tandis que la procédure « arcs de cercle et angle droit » est dans le groupe des procédures moins expertes (groupe 2). Cette information peut d'ailleurs être croisée avec une autre issue de l'analyse des tableaux de tris croisés : parmi ceux qui utilisent à la question 3 la procédure « une intersection et un angle droit », 44% utilisent le tracé direct de la droite (EU) à la question 8, tandis que 57% de ceux qui utilisent la procédure « une intersection et milieu du segment » utilisent cette procédure directe (49% de la population totale utilise cette procédure directe). Le groupe 3 correspond ainsi à des procédures qui sont des techniques non contrôlées par des technologies de G2, tandis que le groupe 2 fait émerger des procédures globalement plus « réfléchies ».

Analyse de l'adéquation entre les commentaires et les procédures utilisées

Du point de vue de l'adéquation du commentaire et de la procédure, on obtient les résultats suivants pour chacune des trois questions :

	Q3	Q5	Q8
Sans commentaire	21 %	21 %	23 %
Adéquation du commentaire à la procédure de tracé	41 %	37 %	51 %
Non adéquation du commentaire à la procédure de tracé	38 %	43 %	26 %

Tableau 7. Adéquation du commentaire et de la procédure utilisée

Le taux de non réponse est relativement stable. Les commentaires non adéquats augmentent dans la question 5 par rapport à la question 3, parce que le commentaire le plus standard est

« la médiatrice est la droite perpendiculaire au segment passant par son milieu ». Or ce commentaire n'est pas adapté au tracé au compas avec des intersections d'arcs de cercles, tracé standard quand il n'y a pas de contraintes. Par contre, la question 8 oblige les étudiants à réfléchir à ce qu'ils ont effectivement fait : ainsi, le taux de commentaires adéquats est nettement supérieur à ceux des deux autres situations. Cette absence de lien entre la procédure utilisée et les propriétés sous-jacentes est particulièrement forte pour certaines procédures : parmi les étudiants qui, en réponse à l'item 5, tracent des intersections d'arcs de cercles dont le rayon est égal à MN, seulement 16% citent la propriété d'équidistance, tandis que 39% citent la perpendicularité au segment au milieu, et que 30% ne citent aucune propriété. Ces résultats mettent en évidence que la routinisation de procédures de construction, comme celle de la médiatrice à la règle et au compas, ne permet pas à l'étudiant de faire le lien entre les procédures de tracé et les propriétés sous-jacentes. Celui-ci est alors bloqué dans G1, puisque les propriétés des objets, qui sont les éléments déterminants de la définition des objets géométriques dans G2, ne sont pas disponibles.

Conclusion de l'analyse des items de tracés de médiatrices

Les étudiants disposent de techniques de tracé de G1, souvent non soutenues par une technologie de G2. Certaines procédures peuvent néanmoins être considérées comme plus expertes que d'autres, parce qu'elles sont plus adaptables et qu'elles sont plus souvent reliées par l'étudiant lui-même à la théorie qui les justifie. On peut hiérarchiser ainsi les procédures utilisant au moins une intersection d'arcs de cercle, dans l'ordre décroissant d'expertise :

- dans le cas de la question Q5, c'est-à-dire sans contrainte :

- deux intersections d'arcs de cercle de rayon quelconque

- deux intersections d'arcs de cercle de rayon MN

- dans le cas de la question Q3, avec le segment en bas de la feuille :

- deux intersections d'arcs de cercle avec des rayons différents

- une intersection d'arcs de cercle et le milieu du segment

- une intersection d'arcs de cercle et un angle droit

Cette analyse nous a donc permis une première approche du degré d'expertise des professeurs d'école en formation initiale dans le tracé d'une médiatrice, par l'étude de leur adaptabilité dans les situations sous contraintes qui leur ont été proposées. Ces premiers résultats donnent à penser que cette adaptabilité est liée à une disponibilité, chez les étudiants, de technologies de G2, dans le but de déterminer la technique de G1 la plus appropriée pour effectuer le tracé qui leur est demandé.

Conclusions générales du test

En réponse à notre question initiale P1, nous pouvons ainsi affirmer que certains PE1 ne font pas de distinction entre les validations théoriques de G2 (démonstration) et les validations perceptives de G1 (constatation, mesure) : ils travaillent, sans en avoir conscience, dans G1 ou dans G2, ou encore dans un pseudo-paradigme qui relève simultanément de G1 et de G2. Nous avons également montré que les mêmes étudiants pouvaient changer de paradigme en fonction de la situation proposée. Par ailleurs, même chez un PE1 qui a conscience de travailler dans G2, l'évidence du dessin peut provoquer une « contamination du su par le perçu ». Nous ajouterons que, même si leur passé scolaire, notamment au collège et au lycée, les invite à travailler dans G2, le recours à G1 reste très présent et réapparaît souvent inopinément, le plus souvent involontairement, lorsqu'une difficulté de démonstration est rencontrée (Dvorat & Dreyfus 2007).

Mise en situation sous Cabri-Géomètre

L'analyse précédente est essentiellement quantitative. Une seconde partie du travail de thèse a permis d'effectuer un travail plus qualitatif, pour affiner les résultats précédemment obtenus. Deux dispositifs ont été mis en place : d'une part une adaptation du test papier précédent à l'environnement Cabri-Géomètre, d'autre part, quelques situations de résolution de problèmes géométriques avec à disposition ce même logiciel de géométrie dynamique. Nous ne détaillerons pas ici cette partie de l'expérimentation mais signalerons seulement quelques résultats obtenus.

Du point de vue de l'automatisation des procédures de tracé, les conclusions précédentes sont fortement confirmées. Les étudiants n'ont aucune habitude du logiciel au moment de l'expérimentation, et en particulier aucun automatisme pour tracer des médiatrices⁵⁰. Ils sont donc obligés de réfléchir à la manière dont ils peuvent effectuer leur construction. Ils sont alors capables en général de fournir les propriétés qu'ils ont effectivement utilisées dans leur tracé.

Du point de vue des connaissances sur la médiatrice, la définition « la médiatrice de $[MN]$ est la droite perpendiculaire à $[MN]$ passant par son milieu » semble mobilisable⁵¹ et disponible dans les deux sens, c'est-à-dire que la majorité des étudiants est à la fois capable de dire que la médiatrice est perpendiculaire au segment et passe par son milieu et de reconnaître une droite perpendiculaire à un segment et passant par son milieu comme sa médiatrice. Par contre, envisager la médiatrice comme ensemble des points équidistants des extrémités du segment s'avère le plus souvent peu mobilisable et encore moins disponible. Prenons l'exemple de Marie, qui s'exprime lors d'un entretien après une situation de résolution de problème où il s'agissait de repérer qu'une certaine droite était une médiatrice. L'entretien met en évidence que la première définition de la médiatrice (droite perpendiculaire au segment passant par son milieu) est mobilisable : *« je vois une droite perpendiculaire passant par le milieu, je la reconnais comme étant une médiatrice. Si je veux montrer que c'est une médiatrice, je dois prouver qu'elle est perpendiculaire et passe par le milieu. Si je sais qu'une droite est médiatrice, elle est perpendiculaire et passe par le milieu »*. La deuxième définition (la médiatrice est l'ensemble des points équidistants des extrémités du segment) est par contre plus problématique : *« Si I est sur la médiatrice de $[AR]$, je peux dire que $IA = AR$ (autrement dit, utiliser la définition pour conclure en termes de distance), je peux dire que tous les points de la médiatrice sont à égale distance des extrémités du segment (autrement dit, réciter la définition), comme une comptine apprise par cœur, mais je ne peux dire que si $IP = IR$, alors I est sur la médiatrice de $[PR]$ (autrement dit utiliser une information d'égalité de distances pour conclure sur l'appartenance à une médiatrice), et encore moins que si I et K sont à égale distance de P et R , alors (IK) est la médiatrice de $[PR]$ (autrement dit démontrer qu'une droite est médiatrice en utilisant cette définition) »*. Ceci est à rapprocher des résultats obtenus dans le test papier à l'item 8 (cf. annexe 1) où il s'agit de tracer une médiatrice dans la situation des deux triangles isocèles incomplets : seulement la moitié des étudiants tracent directement la droite (UE), c'est-à-dire sont capables, après avoir décoder que $NE = ME$ et $NU = MU$, d'en déduire que (UE) est la médiatrice de $[MN]$.

50 La fonction « médiatrice » avait été retirée des outils disponibles dans le menu.

51 (Robert 1995, page 12) définit ainsi connaissances mobilisables et connaissances disponibles :

Nous distinguons pour les élèves :

- le fait d'utiliser des connaissances indiquées ;
- le fait de penser à utiliser des connaissances alors que rien n'est indiqué à leur propos.

Dans le premier cas, nous dirons que les élèves savent mobiliser leurs connaissances (par exemple employer un théorème ou une technique clairement signalés). Nous parlerons de connaissances mobilisables.

Dans le second cas, nous parlerons de connaissances disponibles. Cela ne peut être le cas que si les documents fournis aux élèves ne sont pas extraits d'un chapitre du manuel.

Marie fait alors remarquer que si K avait été à la même distance de P et R que I, elle aurait probablement vu que (IK) était la médiatrice de [PR], parce que cela correspond à la construction type qu'elle a l'habitude de faire pour construire une médiatrice : deux arcs de cercles de chaque côté de [PR], de même rayon. Ainsi, les points tracés pour obtenir la médiatrice sont toujours tous les deux à une même distance des extrémités du segment.

Le travail dans l'environnement Cabri-Géomètre a été fait avec un faible effectif d'étudiants, et ne permet pas vraiment de répondre à la question initiale P2, et donc de tirer des conclusions générales sur l'influence de cet environnement du point de vue du comportement des étudiants par rapport à G1 et G2. Il a par contre permis de préciser des difficultés des étudiants par rapport à leurs connaissances sur la médiatrice.

Un dispositif de formation

La troisième partie de la thèse consiste en l'analyse de quelques éléments issus d'un dispositif de formation auprès de PE1 en géométrie plane.

Description de la formation proposée

Le dispositif de formation mis en place avec 103 étudiants a pour objectifs, entre autres⁵² :

- de faire prendre conscience aux PE1 des paradigmes G1 et G2, ainsi qu'éventuellement du pseudo-paradigme dans lequel ils se situent quand ils résolvent des problèmes de géométrie,
- de raviver des connaissances et développer des compétences dans G2.

Ces objectifs sont bien entendus en lien avec les résultats obtenus dans les deux premières parties de la thèse. Puisque bon nombre d'étudiants se situent dans G1 ou dans G2, voire dans les deux, de manière indistincte, en fonction de la situation qui leur est proposée, il ne s'agit pas de chercher à tout prix à les faire travailler dans G2 mais bien de leur faire prendre conscience de l'existence de divers paradigmes géométriques d'une part, et de celui dans lequel ils se situent dans telle ou telle situation d'autre part. Cette prise de conscience nous paraît indispensable pour que, en tant qu'enseignants, ils puissent proposer des activités et des consignes pertinentes à leurs élèves, et, le cas échéant, valider leurs productions.

L'objectif « raviver des connaissances et développer des compétences dans G2 » est lui directement lié au concours que préparent ces étudiants : c'est, du point de vue déontologique, la priorité, compte tenu de la nature actuelle des épreuves.

Le dispositif de formation se décompose en plusieurs étapes :

- Etape 1 : « Le point sur les quadrilatères ». Il s'agit de rappeler le caractère inclusif des différents ensembles de quadrilatères⁵³, de redéfinir les objets moins bien connus⁵⁴, d'explicitier le concept de définition minimale⁵⁵ et d'attirer l'attention sur le rôle des positions et proportions prototypiques des dessins le plus souvent proposés⁵⁶.
- Etape 2 : « Tracer un triangle rectangle ». Il est demandé aux étudiants de tracer un triangle rectangle à la règle non graduée et au compas, d'écrire le scénario de construction

52 Nous ne nous intéresserons pas ici à l'autre volet de la formation, lié aux aspects didactiques de l'enseignement de la géométrie à l'école

53 Par exemple, un carré est un rectangle particulier, qui est lui-même un parallélogramme particulier, etc.

54 Le cerf-volant par exemple

55 Définir un objet, ce n'est pas donner la liste de toutes ses propriétés, mais seulement une liste de propriétés nécessaire et suffisante

56 Un élève bien souvent ne reconnaît pas un rectangle trop allongé, ou un losange posé sur un côté (alors reconnu comme un parallélogramme).

correspondant à cette construction puis de donner les propriétés qui justifient que l'on a bien tracé un triangle rectangle avec ce scénario. C'est l'occasion de revoir les différentes procédures qui permettent de tracer des perpendiculaires, de travailler la rédaction de scénario de construction, mais surtout de mettre en évidence les propriétés et théorèmes exploités. Les résultats de cette activité sont analysés ci-après. D'autres constructions sont ensuite proposées dans le même esprit.

- Etape 3 : « ABCD est-il un carré ? ». L'item présenté précédemment est proposé aux étudiants. Ils formulent leur réponse par écrit puis un débat s'engage entre eux. Certaines caractéristiques de G1 et G2 apparaissent alors dans le débat, formulées par les étudiants eux-mêmes, une synthèse sur ce sujet est ensuite effectuée par l'enseignant.
- Etape 4 : « Tracer une droite parallèle à une droite d passant par un point A ». L'étape 2 est reprise sur un nouvel objet puis la consigne évolue. Il s'agit alors non plus d'effectuer **d'abord** une construction **puis** de repérer les propriétés étudiées, mais de choisir **d'abord** les propriétés que l'on peut utiliser **puis** de mettre en œuvre ces propriétés pour effectuer la construction demandée. Propriétés et théorèmes ne sont plus utilisés seulement pour démontrer mais pour effectuer des constructions, point de vue nouveau qui permet de leur redonner du sens. En même temps, l'aspect G1/G2 est explicité : la tâche de construction pourrait être considérée dans G1, mais le fait de s'intéresser d'une part aux objets géométriques construits (on remplace dans les scénarios de construction des expressions du type « prendre l'écartement AB, reporter cette longueur à partir de C, etc. » par « tracer le cercle de centre C et de rayon AB ») et d'autre part aux propriétés qui justifient ces constructions (validations hypothético-déductives) fait passer l'activité de G1 vers G2. Ce qui nous intéresse alors n'est plus en effet le dessin obtenu mais les divers objets géométriques (droites, cercles et leurs intersections) qui permettent de définir l'objet construit⁵⁷. Il s'agit donc de construction au sens de G2. D'autres constructions sont alors proposées avec cette démarche.
- Etape 5 : « Activité médiatrice ». Il s'agit d'une situation-problème issue des travaux du GReDiM⁵⁸ (Parzysz 2002). L'objectif de cette activité est entre autres d'analyser dans quel paradigme les étudiants se situent à ce stade de la formation, et d'évaluer leur lucidité par rapport à ce positionnement dans G1 ou G2. Cette situation est détaillée et analysée dans la suite de ce texte.
- Etape 6 : « Démonstrations ». Des exercices classiques de démonstrations sont alors proposés aux étudiants.

Nous ne détaillerons pas ici l'ensemble de ces étapes, mais seulement deux d'entre elles dont les résultats nous paraissent particulièrement intéressants. La première est l'étape « Tracer un triangle rectangle ». Celle-ci est proposée en début de formation et elle permet de faire un état des lieux des procédures proposées et surtout du langage utilisé spontanément par les étudiants pour décrire leur construction. Ce langage est analysé comme indice du paradigme dans lequel se situent ou peuvent se situer les étudiants.

57 Par exemple, pour construire une droite passant par un point donné A et parallèle à une droite donnée d , on peut successivement considérer : deux points quelconques B et C sur d , le cercle C_1 de centre C de rayon AB , le cercle C_2 de centre A de rayon BC . Ces deux cercles ont deux points d'intersection. Nommons D celui des deux points tel que le quadrilatère $ABCD$ soit convexe (notons qu'en admettant l'existence et l'unicité d'un tel point, on se situe dans G2 et non dans G3). La droite (AD) est parallèle à la droite d . D vérifie en effet $AD = BC$ et $CD = AB$. Le quadrilatère $ABCD$ étant par ailleurs convexe, c'est un parallélogramme et ses côtés opposés, en particulier ici $[AD]$ et $[BC]$, sont parallèles.

58 Groupe de Recherche en Didactique des Mathématiques de l'IUFM d'Orléans-Tours

La deuxième étape analysée est l'« Activité médiatrice », proposée au contraire en fin de formation. Elle permet entre autres d'évaluer l'efficacité de la formation du point de vue de la prise de conscience des paradigmes géométriques G1 et G2.

Tracer un triangle rectangle

De nombreux éléments ont été pris en compte pour analyser les trois parties de l'activité : construction, scénario de construction, justification de ce scénario, du point de vue du fond et de la forme : la procédure utilisée (TP), le vocabulaire (TV), l'exactitude du scénario (TS), la formulation du scénario (TFS), la justification du scénario du point de vue de l'exactitude de ce qui est énoncé (TJE), la justification du scénario du point de vue de la pertinence des arguments utilisés (TJD), la formulation de la justification (TFJ).

L'hypothèse de recherche qui sous-tend ces choix de variables est la suivante : le langage utilisé est un indice du paradigme dans lequel est considérée la construction (G1 ou G2) par l'étudiant, et le cas échéant un frein pour passer de G1 à G2. Les variables choisies permettent donc de décrire le fond de la réponse (procédure utilisée, scénario et justification) mais aussi la forme, par le repérage du vocabulaire et l'évaluation de la formulation du scénario et de la justification.

L'analyse implicative est effectuée avec la théorie classique et la loi binomiale, avec la version 1.4⁵⁹ de CHIC qui permet de garder trace des fréquences de chacune des modalités de variables. Le graphe implicatif fait apparaître deux groupes, qui correspondent chacun à un type de procédure de construction, et que nous allons maintenant détailler.

Procédures utilisant la médiatrice

Le premier groupe de variables donne le graphe suivant :

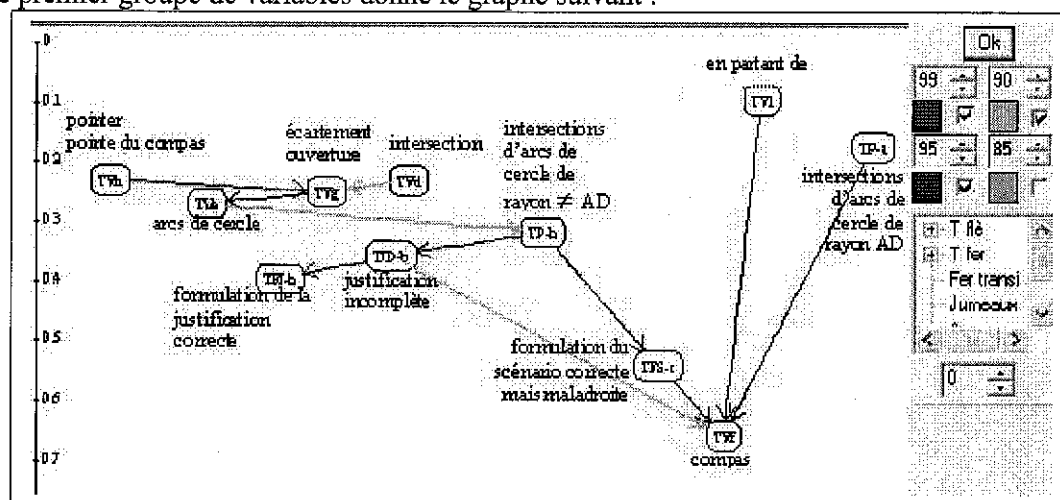


Figure 3. Graphe implicatif sur le tracé de triangle rectangle, avec des procédures basées sur la médiatrice

Il met en évidence des liens entre un vocabulaire peu géométrique, très lié au geste effectué (pointer, reporter) et aux instruments utilisés (écartement, ouverture, pointe du compas, compas) et les procédures liées au tracé d'une médiatrice à la règle et au compas, basées sur des intersections d'arcs de cercles. La formulation du scénario y est en général correcte sur le

⁵⁹ La version 3.5 de CHIC qui dessine le graphe de manière automatique est d'abord utilisée pour repérer la forme du graphe, les différents groupes, les indices pertinents, etc. La version 1.4 est ensuite utilisée pour faciliter l'interprétation en évitant d'attacher trop d'importance à des modalités de faible fréquence.

fond, mais maladroite sur la forme, du point de vue du langage utilisé. La justification de ce scénario est le plus souvent incomplète. Ces résultats corroborent les précédents, concernant les tracés de médiatrice.

Détaillons les procédures utilisées, en explicitant une construction possible dans G2, correspondant à la procédure « standard » de construction d'une médiatrice à la règle et au compas.

Considérer deux points A et D ainsi que la droite (AD).
 Soit deux cercles sécants de centres respectifs A et D et de même rayon.
 Soit d la droite passant par les intersections de ces deux cercles.
 Soit un point C sur la droite d (et pas sur (AD)) et soit B le point d'intersection de d et de (AD).
 ABC est un triangle rectangle.

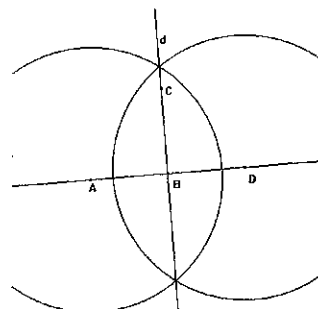


Figure 4. Tracé d'un triangle rectangle ABC à la règle et au compas

Le rayon des cercles tracés peut être égal à la distance AD (TP-a) ou différent de la distance AD (TP-b). Cette procédure est fréquemment présentée au collège à la suite du travail sur la médiatrice mais dans un langage lié à G1 et à l'action effective de tracé (tracer la droite (AD), tracer un cercle ...). Par ailleurs, le plus souvent, d'une part des arcs de cercles seulement sont effectués pour alléger le dessin, d'autre part les élèves, s'ils se souviennent de la méthode de tracé, ont complètement oublié la médiatrice et les propriétés qui sous-tendent cette construction. Ils ont seulement mémorisé cette procédure comme celle permettant de tracer des perpendiculaires. Leur scénario de construction peut alors être du type :

Je trace une droite d. Je prends 2 points sur cette droite que j'appelle D et E. Je prends mon compas je choisis un écartement quelconque. Je pointe le compas en D et je trace un arc de cercle de part et d'autre de la droite d, je garde le même écartement, je pointe en E et je fais un arc de cercle de part et d'autre de d. De part et d'autre de d les arcs de cercle se recoupent en F et en G. Je trace la droite passant par G et F, je l'appelle d'. Les droites d et d' se coupent en B. Je choisis un point C sur d, puis un point A sur d'. Je relie ABC.

Figure 5. Scénario de construction d'un triangle rectangle

Ce premier groupe dans le graphe implicatif rend bien compte de ce type de production. Le vocabulaire en particulier met en évidence que les étudiants s'attachent alors au geste physique à effectuer, caractéristique du paradigme G1, plutôt qu'à l'objet géométrique construit, caractéristique du paradigme G2. Ils « pointent » par exemple le compas en un point A avec un certain « écartement » BC au lieu de tracer un cercle de centre A et de rayon BC. Ce langage de l'action lié à l'utilisation de l'instrument ne leur permet pas de prendre en compte les objets géométriques sous-jacents (droites, cercles et points d'intersection), et ne leur permet donc pas de travailler dans G2. Le lien TP-b → TJD-c du graphe implicatif exprime que les étudiants qui utilisent la procédure standard ne donnent pas une justification complète. Il met ainsi en évidence la difficulté, voire l'impossibilité pour certains, de

travailler correctement dans G2. Or les procédures de ce groupe sont des variantes de la procédure standard pour tracer une médiatrice dont nous avons parlé précédemment, procédure automatisée au collège pour tracer une médiatrice, voire des perpendiculaires. On retrouve ici un résultat obtenu à partir du test papier : la routinisation des gestes à effectuer pour effectuer la construction enferme les élèves dans le paradigme G1. Ils n'ont pas conscience des objets géométriques en jeu, et ils n'ont donc aucun moyen de fonctionner dans le paradigme G2.

Procédures utilisant un triangle rectangle inscrit dans un cercle

Le second groupe de variables est organisé autour de la procédure basée sur le théorème : « tout triangle inscrit dans un cercle dont le diamètre est un des côtés du triangle est un triangle rectangle ». Il suffit alors de tracer un cercle, un de ses diamètres [AB], puis un point C n'importe où sur le cercle. Ce graphe implicatif met tout d'abord en évidence le langage alors utilisé. Le vocabulaire géométrique cercle, centre, rayon apparaît cette fois à la place du langage lié aux gestes ou aux instruments : il est en effet utile ici en particulier de tracer le cercle en entier. De ce fait, la formulation du scénario est correcte, voire parfaite. Par ailleurs, la justification est généralement complète et correcte sur le fond : pour appliquer cette procédure, qui n'a généralement pas été automatisée au collège, il faut penser à ce théorème et le maîtriser suffisamment pour en déduire une technique de construction. Sur la forme, cette justification est cependant parfois maladroite car l'énoncé du théorème est encore difficile pour certains.

Les étudiants scientifiques sont bien typiques de ce groupe : c'est la variable supplémentaire la plus typique du chemin TFS- a $\rightarrow$ TP- c (avec un risque de 0,05) et du chemin TJD- a $\rightarrow$ TP- c (avec un risque de 0,06).

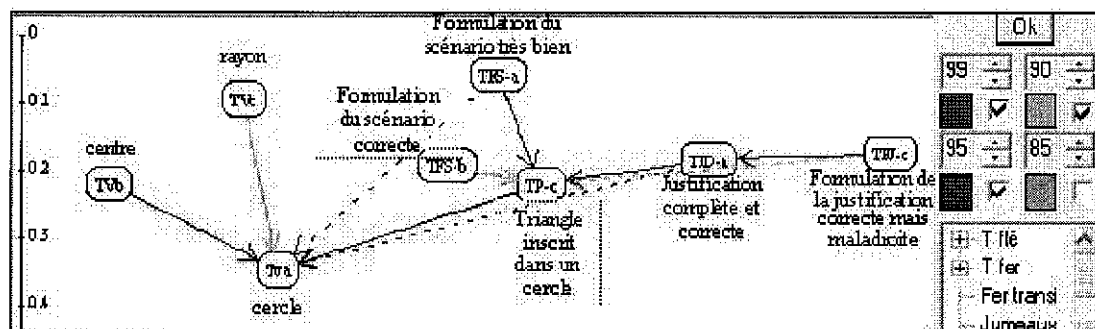


Figure 6. Graphe implicatif sur le tracé de triangle rectangle, avec des procédures basées sur le triangle rectangle inscrit dans un cercle

Ces deux groupes dans le graphe implicatif mettent en évidence que la routinisation de procédures de construction ne favorise ni leur formulation, ni leur justification. Ceci permet de faire des propositions du point de vue didactique dans les classes : il semble ainsi souhaitable d'une part de ne pas automatiser de procédures de construction indépendamment de leur formulation en terme d'objets géométriques, d'autre part d'orienter le langage utilisé vers la description de l'objet géométrique et des propriétés mises en œuvre plutôt que vers l'action effectuée et les instruments utilisés. Le passage de G1 à G2 en sera facilité le moment venu.

La situation médiatrice

Analysons maintenant une des dernières activités proposées aux étudiants en fin de formation en géométrie plane.

Enoncé et caractéristiques de la situation

L'énoncé proposé aux 103 étudiants est :

Tracer une droite d . On appelle O un point de cette droite.

Tracer le cercle C_1 de centre O et de rayon 2 cm. Ce cercle coupe la droite d en deux points A et B .

Tracer le cercle C_2 de centre O et de rayon 4 cm.

Tracer le cercle C_3 de centre A et de rayon 4,5 cm. Ce cercle coupe le cercle en deux points C et D .

Quel(s) moyen(s) pouvez-vous mettre en œuvre pour savoir si la droite (CD) est, ou non, la médiatrice du segment $[AB]$? Conclure.

Le dessin obtenu est alors (attention, l'échelle n'est pas respectée) :

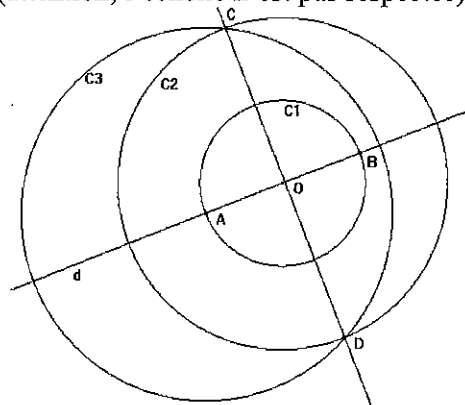


Figure 6. La situation médiatrice

Quand les étudiants ont terminé leur travail, il leur est demandé d'indiquer sur leur feuille s'ils pensent avoir travaillé dans G1 ou dans G2.

Détaillons quelques caractéristiques de cette situation :

- la forme de la question, « quel(s) moyen(s) pouvez-vous mettre en œuvre pour savoir ... », a pour objectif de laisser un peu de marge de manœuvre aux étudiants, et en particulier de leur permettre *a priori* d'effectuer une démarche dans G1 ou dans G2. De ce point de vue, la question est ambiguë : rien n'indique s'il faut se situer dans G1 ou dans G2. En particulier, il n'est pas explicitement demandé de démontrer, ce qui inciterait *a priori* à se situer dans G2, compte tenu du contrat didactique en cours avec ces étudiants.
- Les valeurs numériques sont évidemment choisies pour que perceptivement, c'est-à-dire si on se situe dans G1, on puisse considérer que (CD) est effectivement la médiatrice de $[AB]$, tandis que dans G2, une démonstration permet de conclure que ce n'est pas le cas : la droite (CD) est bien perpendiculaire à $[AB]$, mais ne passe pas par O .
- La formulation n'incite pas à effectuer complètement la démonstration, mais à indiquer une méthode, sans nécessairement la mettre en œuvre. Cela doit permettre aux étudiants qui ne sont pas encore très à l'aise dans la rédaction de démonstrations - compétence qui n'a pas été explicitement travaillée à ce stade du dispositif de formation - de pouvoir néanmoins s'investir dans la tâche en se situant dans G2.
- Par ailleurs, cette formulation incite à proposer plusieurs méthodes, et il s'agit pour nous de voir dans quel(s) paradigme(s) elles se situent et en particulier d'étudier si les paradigmes G1 et G2 vont être ou non simultanément utilisés ou distingués.
- Les démonstrations possibles sont basées sur la contraposée du théorème de Pythagore et la définition de la médiatrice comme droite perpendiculaire au segment passant par

son milieu, deux éléments dont j'ai pu montrer ailleurs qu'ils sont disponibles chez les étudiants. Cette démonstration est donc *a priori* accessible aux étudiants.

Les variables de l'analyse et les questions didactiques sous-jacentes

Les étudiants ont à nouveau effectué cette activité individuellement sur une feuille rendue puis codée. Les éléments pris en compte ont cette fois été les suivants :

- Le nombre de moyens proposés (MM) ; 0, 1 ou plusieurs moyens sont envisagés.
- Les caractéristiques des preuves ou démonstrations proposées (MP) ; correcte, incomplète ou incorrecte dans G1, correcte, incomplète ou incorrecte dans G2, ainsi qu'une procédure particulière incorrecte consistant à montrer que (AB) est la médiatrice de [CD] sont les modalités envisagées.
- La nature des moyens proposés du point de vue des paradigmes géométriques G1/G2 (MA) ; les arguments peuvent être entièrement dans G1, ou dans G2, ou à la fois dans G1 et G2.
- Ce que pensent les étudiants de leur travail, du point de vue G1/G2 ; ils peuvent penser se situer dans G1, ou dans G2, ou dans G1 et G2.

Ces différentes variables doivent permettre de faire émerger le niveau de compétence des étudiants en fin de formation, ainsi que leur rapport aux paradigmes G1 et G2 : fonctionnent-ils dans G1, dans G2, ou dans un pseudo-paradigme relevant des deux ? Et surtout, une question fondamentale se pose, en lien avec les objectifs de l'ingénierie de formation proposée : les étudiants ont-ils pris conscience de l'existence des paradigmes géométriques G1 et G2 et de celui dans lequel ils travaillent dans la résolution du problème « médiatrice » ?

Les moyens effectivement mis en œuvre

La plupart des étudiants n'ont pas seulement proposé des moyens à mettre en œuvre, mais en ont effectivement mis au moins un en œuvre, par un effet de contrat didactique. Etudions alors plus précisément pour commencer chaque production d'étudiant, afin de préciser sa nature. Il s'agit de repérer si l'étudiant propose une démonstration dans G2 ou bien une preuve dans G1. Nous renvoyons le lecteur à (Balacheff 1982, p. 263) et (Jore 2006, p. 430) pour une explicitation de ces deux termes.

On obtient les résultats suivants pour les moyens effectivement mis en œuvre :

Modalité	Effectif	%
MDa : démonstration correcte dans G2	7	6
MDb : démonstration incomplète dans G2	12	11
MDc : (AB) est la médiatrice de [CD]	4	4
MDd : démonstration incorrecte dans G2	21	19
MDe : preuve correcte dans G1	40	37
MDf : preuve incomplète dans G1	4	4
MDg : preuve incorrecte dans G1	4	4
MDh : pas de preuve ni de démonstration	16	15
Total :	108	100

40 % des propositions sont des démonstrations dans G2, 6 % seulement sont correctes

45 % des propositions sont des preuves dans G1 37% sont correctes

Tableau 8. Tris croisés sur le nombre et la nature des moyens proposés

Ce tableau met en évidence qu'il y a à peu près autant de propositions qui se situent dans G2 (40 %) que dans G1 (45 %), mais avec beaucoup moins de réussite : 16 % de celles qui essaient de mettre en œuvre une démonstration dans G2 sont correctes, tandis que 83 % de celles qui mettent en œuvre une preuve dans G1 le sont. Le degré de difficulté n'est évidemment pas le même : la preuve peut être effectuée par une simple application de la définition de la médiatrice par milieu et perpendiculaire, il suffit de vérifier, nous l'avons dit, visuellement ou à l'aide de l'équerre, que la droite (CD) est perpendiculaire à (AB) puis de

voir si elle passe par O, tandis que la démonstration nécessite entre autres d'utiliser la contraposée du théorème de Pythagore. Or, ici, il n'est question d'aucun triangle mais seulement de cercles, ce qui rend le théorème difficile à mobiliser. Par ailleurs, il s'agit d'utiliser la contraposée du théorème et non le théorème lui-même, ce qui est plus délicat. Les étudiants sont habitués à mobiliser le théorème pour calculer une longueur manquante dans un triangle rectangle, mais un peu moins à utiliser la contraposée, surtout pour vérifier, non pas qu'un triangle n'est pas rectangle, mais que deux droites ne sont pas perpendiculaires. L'association est en effet éventuellement effectuée entre « triangle rectangle » et « théorème de Pythagore » mais pas entre « droites perpendiculaires » et « théorème de Pythagore ». Une autre difficulté vient s'ajouter aux précédentes : la définition de la médiatrice nous amène à chercher si (CD) est perpendiculaire à [AB], mais il faut en fait étudier d'abord si (OC) est perpendiculaire à (OA) !

Le nombre important d'essais de démonstrations montre que les étudiants ont bien intégré la règle du contrat didactique à ce niveau : il s'agit de travailler de préférence dans G2. Mais leurs connaissances et compétences ne leur permettent pas d'élaborer entièrement une démonstration correcte.

Analyse implicative sur l'ensemble des variables

L'analyse implicative permet d'étudier simultanément toutes les variables. Elle est à nouveau effectuée avec la théorie classique et la loi binomiale, compte tenu de l'effectif relativement restreint. Le graphe implicatif obtenu est le suivant :

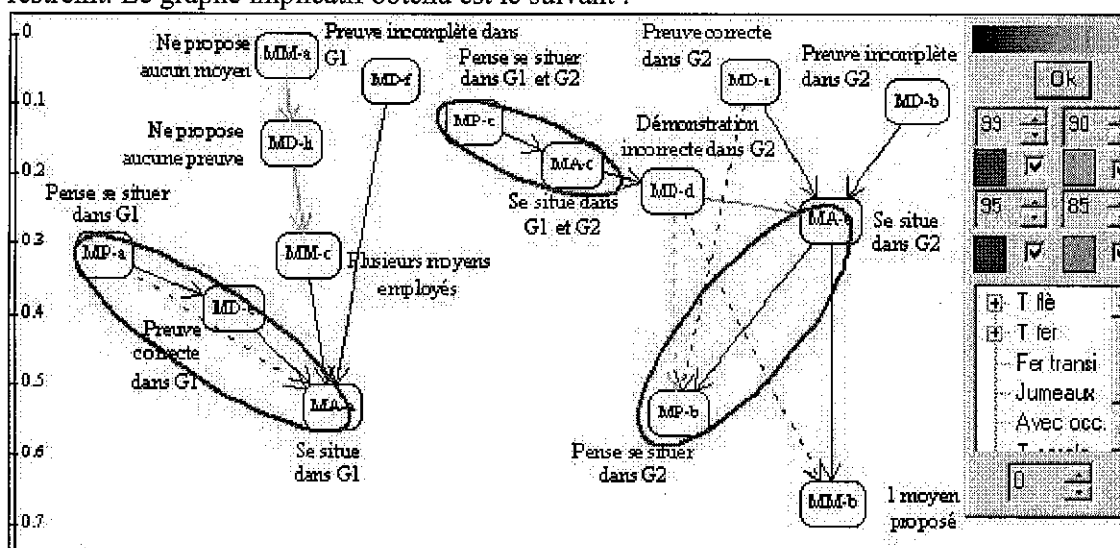


Figure 6. Graphe implicatif sur la situation médiatrice

Lien entre le nombre de moyens proposés et les paradigmes géométriques

Deux implications expriment le lien entre le nombre de moyens proposés et les paradigmes géométriques :

MM - c → MA - a : lorsque plusieurs moyens sont proposés, ce sont des moyens dans G1

MA - b → MM - b : lorsque les arguments relèvent de G2, il n'y en a qu'un

Plusieurs éléments permettent d'interpréter ces relations. Pour ceux qui se situent dans G2, une référence au contrat didactique dans la classe de mathématiques peut être utile : il est habituel de repérer que plusieurs démonstrations d'une même propriété sont possibles, mais qu'une seule suffit ; quand on a effectué une démonstration, on sait que la propriété étudiée est vraie, il n'est pas nécessaire d'en effectuer une seconde. En outre, dans le cas présent, il

est déjà difficile d'aboutir à une démonstration correcte, il est peu probable que les étudiants puissent en effectuer deux différentes, ils n'en ont donc ni l'idée, ni les moyens. Enfin, la consigne « conclure » invite finalement à répondre à la question « la droite (CD) est-elle ou non la médiatrice du segment [AB] ? » et donc à mettre en œuvre ces moyens plutôt qu'à chercher une liste de moyens possibles. Ainsi, pour proposer plusieurs moyens, il faut se situer dans G1, où effectivement plusieurs démarches sont possibles. On peut par exemple, vérifier la perpendicularité de (AB) et (CD) à l'équerre puis vérifier si O est sur (CD), ou encore si C et D sont à égale distance de A et de B avec un compas. On peut également tracer la médiatrice de [AB] (à la règle non graduée et au compas ou à la règle graduée et à l'équerre) puis constater perceptivement si elle se superpose à (CD).

Par ailleurs, l'analyse du tri à plat précédent a permis de mettre en évidence le faible taux de démonstrations correctes dans G2. On retrouve les démonstrations incorrectes dans l'analyse implicative par le lien $MA - c \rightarrow MD - d$: lorsque les arguments relèvent de G1 et de G2, il y a présence d'une démonstration incorrecte dans G2.

L'analyse implicative permet ainsi de caractériser les démonstrations incorrectes par le fait que celles-ci se situent à la fois dans le paradigme G2 et dans le paradigme G1, ou plus exactement dans un pseudo-paradigme qui tient à la fois de G1 et de G2 ; il ne s'agit donc pas en général de l'utilisation d'un théorème erroné mais de l'utilisation incorrecte d'un théorème exact : les hypothèses ne sont pas des informations données dans l'énoncé ou obtenues à partir des informations initiales par un raisonnement hypothético-déductif (ce qui relèverait effectivement de G2), mais des informations lues sur le dessin (ce qui relève alors de G1). Ceci permet de confirmer l'importance de la prise de conscience par les étudiants des paradigmes G1 et G2. En effet, si un travail reste à faire du point de vue de la connaissance des théorèmes, un travail encore plus important est à effectuer avec certains étudiants sur la nature des hypothèses utilisées dans l'application de ces théorèmes.

Analyse de la lucidité des étudiants du point de vue des paradigmes géométriques G1/G2

Le graphe implicatif met par ailleurs en évidence la lucidité des étudiants, avec les liens suivants :

MP - $a \rightarrow MA - a$ (indice d'implication : 1) : quand l'étudiant pense se situer dans G1, c'est le cas⁶⁰.

MP - $c \rightarrow MA - c$ (indice d'implication : 0.98) : quand l'étudiant pense se situer dans G1 et dans G2, c'est également le cas.

MA - $b \rightarrow MP - b$ (indice d'implication : 1) : quand l'étudiant se situe dans G2, il le sait.

Rappelons que dans l'analyse implicative, les liens se font toujours d'une variable vers une autre d'effectif supérieur ou égal. Ce sont les effectifs qui créent ainsi le sens de ces liens : l'effectif de ceux qui pensent se situer dans G1 ou dans G1 et G2 est ainsi inférieur à la réalité tandis que celui de ceux qui se situent effectivement dans G2 est inférieur à celui de ceux qui pensent se situer dans G2.

Il est possible d'affiner cette analyse de la lucidité en étudiant les liens entre les moyens effectivement proposés par les étudiants et ce qu'ils pensent de leur production du point de vue G1/G2.

Si on s'intéresse à ceux qui pensent se situer dans G2, on obtient les liens $MD - a \rightarrow MP - b$ (indice d'implication 0.96) et $MD - d \rightarrow MP - b$ (indice d'implication 0.92) : quand l'étudiant

⁶⁰ Il faudrait à dire « c'est en général le cas », dans la mesure où il s'agit bien sûr de quasi-implication statistique et non d'implication formelle. J'éviterai néanmoins d'ajouter « en général » partout pour alléger le discours, d'autant plus qu'ici, bon nombre d'implications ont des indices relativement élevés.

présente une preuve, correcte ou incorrecte, dans G2, il pense effectivement se situer dans G2. Une autre question aurait été intéressante : « pensez-vous que votre démonstration est exacte ? ». Celle-ci n'a pas été posée et on ne peut déterminer la lucidité des étudiants de ce point de vue, mais ces liens montrent que la forme de la démonstration permet aux étudiants de repérer un travail relevant de G2. Par contre, il n'y a pas de lien fort MD - b $\rightarrow$ MP - b (indice d'implication seulement 0.69) : certains étudiants qui effectuent une preuve incomplète dans G2 ont finalement conscience de ne pas vraiment travailler dans G2. Ces démonstrations considérées comme incomplètes présentent des bribes de G2, mais pas un raisonnement abouti et une partie de ces étudiants s'en rend compte, ce qui explique cette quasi absence d'implication.

Si on s'intéresse à ceux qui pensent se situer dans G1, on obtient le lien MP - a $\rightarrow$ MD - e (indice d'implication 0.97) : quand on pense se situer dans G1, non seulement effectivement on a travaillé dans G1, mais en effectuant une preuve correcte ! Rappelons qu'il est relativement facile, comme nous l'avons déjà expliqué, d'obtenir une preuve correcte dans G1, alors qu'il est plus difficile d'obtenir une démonstration correcte dans G2.

En réponse à P3, l'analyse implicative permet ainsi de montrer que si les performances des étudiants du point de vue de la démonstration sont encore très en deçà des résultats attendus, un objectif de la formation a en grande partie été atteint : une majorité d'étudiants est globalement consciente du paradigme géométrique dans lequel elle travaille.

Conclusions sur les productions des PE1 issues de la formation

En lien avec l'hypothèse de recherche explicitée au paragraphe 5.2 sur le rôle du langage, l'analyse implicative nous a permis dans ce travail de mettre en relation le langage et les procédures de tracé utilisées dans la construction d'un triangle rectangle par des futurs professeurs des écoles en formation initiale. Une des conclusions importante est que la routinisation de procédures de construction est un frein à leur formulation et à leur justification. Les étudiants sont alors amenés à exprimer les constructions dans un langage très lié aux gestes et aux instruments au lieu d'utiliser le langage géométrique. Ce type de langage, lié à une difficulté à justifier la procédure utilisée, indique que les étudiants sont alors enfermés dans le paradigme G1, incapables d'explicitier les objets géométriques utilisés, leurs relations et leurs propriétés, éléments essentiels du paradigme G2. Les conséquences d'ordre didactique sont immédiates : un travail spécifique sur le langage gagne à être effectué avec les élèves dans la description des constructions dans G1, pour leur permettre ultérieurement de travailler dans G2.

Par ailleurs, en réponse à P3, le travail autour de la situation problème « médiatrice » a mis en évidence les insuffisances de la formation du point de vue de la mise en œuvre de démonstrations correctes, mais aussi une relative efficacité de la formation proposée du point de vue de la lucidité des étudiants autour des paradigmes G1 et G2. A défaut d'être capables de résoudre le problème correctement dans G2, les étudiants sont, pour la plupart au moins, capables d'identifier le paradigme géométrique dans lequel ils se situent. Cette évolution positive à court terme mériterait bien entendu d'être réinterrogée à plus long terme. Elle justifie en tous cas de poursuivre un travail dans cette voie.

Conclusion

Pour terminer, en réponse aux hypothèses de recherche de cette thèse, nous pouvons affirmer que, effectivement, « certains PE1 ne font pas de différence entre les statuts des dessins géométriques : Objets de la géométrie (G1) ou Représentants d'un Objet Géométrique

Théorique (G2) ni entre les validations de type perceptif (G1) ou de type hypothético-déductif (G2) qu'ils utilisent. Ils fonctionnent tantôt dans G1, tantôt dans G2, tantôt dans un pseudo-paradigme personnel qui relève de G1 et de G2, sans en avoir conscience » (HR1). Une nuance peut être apportée concernant les types de validation : ils ont conscience que ces validations ne sont pas de même nature, mais utilisent indifféremment l'une ou l'autre. Par ailleurs, « les paradigmes géométriques tels qu'ils ont été précédemment définis, et tout particulièrement G1 et G2, sont un outil pertinent pour analyser l'activité des PE1 en géométrie plane » (HR2).

Ce travail nécessite bien sûr d'être poursuivi et de nouvelles séries de questions se présentent. L'une d'elles concerne le langage utilisé par les étudiants dans la rédaction des scénarios de construction : une utilisation pertinente d'un logiciel de géométrie dynamique peut-elle faire évoluer rapidement et durablement ce langage, et, si oui, quelle est alors l'influence de cette évolution sur le comportement des étudiants du point de vue des paradigmes géométriques ? Une autre série de questions porte sur l'hypothèse de travail que nous avons faite : « il est nécessaire qu'un professeur des écoles ait une conscience claire de la distinction G1/G2, ainsi qu'un minimum de connaissances dans G2 ». Nous avons, sur la base de cette hypothèse, fait prendre conscience à une partie de nos étudiants de cette existence de divers paradigmes. Mais que devient cette prise de conscience sur le moyen et long terme ? Quelle influence a-t-elle sur le fonctionnement de ces étudiants sur le terrain, quand ils deviennent professeurs des écoles ?

Bibliographie

- Arsac Gilbert et al. (1992) : *Initiation au raisonnement déductif au collège*. Ed. Presses Universitaires de Lyon (en particulier chapitre 8, Le problème de la figure, le rôle de la figure dans l'argumentation).
- Balacheff Nicolas (1982) : Preuve et démonstration en mathématiques au collège. *Recherches en didactique des mathématiques*. Volume 3.3. Ed. La Pensée Sauvage. Grenoble.
- Bouvier Alain et al. (1979 & 1993) : Dictionnaire des Mathématiques. Ed. Presses Universitaires de France.
- Dictionnaire de l'Académie française. Huitième édition version informatisée : <http://atilf.atilf.fr/academie.htm>
- Ducrot Oswald (1972) : *Dire et ne pas dire, Principes de sémantique linguistique*. Ed. Hermann, Paris. Collection : Savoir.
- Duval Raymond (1994) : Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. *Repères IREM*. n°17. p 121-138. Ed. IREM de Grenoble.
- Dvorat T. & Dreyfus T. (2004) : Unjustified assumptions based on diagrams in geometry. *Proceedings of the 28th PME international conference* (Hoynes, M.J. & Fuglestad, A.D. eds). Vol. 2, pp311-318.
- Euclide d'Alexandrie (1990) : *Les éléments, livre 1*. Traduit du texte de Heiberg. Traduction et commentaires par Bernard Vitrac. Ed. Presses Universitaires de France.
- Houdement Catherine et Kuzniak Alain (2000) : Formation des maîtres et paradigmes géométriques. *Recherches en Didactique des Mathématiques* Vol. 20. n°1. p 89-116. Ed. La Pensée Sauvage. Grenoble.

Houdement Catherine et Kuzniak Alain (2003) : Quand deux droites sont « à peu près » parallèles ou le versant géométrique du « presque » égal. *Petit x*. n ° 61. p 61-74. Ed. IREM de Grenoble.

Houdement Catherine, Kuzniak Alain (2006) : Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. Vol 11. 175-194.

Jore Françoise (2006) : *Paradigmes géométriques et formation initiale des professeurs des écoles, en environnements papier-crayon et informatique*, Thèse de doctorat de l'Université Paris 7.

Laborde Colette & Capponi Bernard (1994) : Cabri-Géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol. 14. n° 1.2. p 165-210. Ed. La Pensée Sauvage. Grenoble.

Laborde Colette et Capponi Bernard (1995) : Modélisation à double sens. *Actes de la 8ème Ecole d'été de Didactique des mathématiques*. Saint Sauves d'Auvergne. Août 1995. Editions IREM de Clermont-Ferrand.

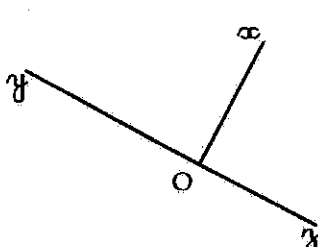
Parzysz Bernard (1989) : *Représentations planes et enseignement de la géométrie de l'espace au lycée. Contribution à l'étude de la relation voir/savoir*. Thèse de doctorat. Université Paris-7. Ed. IREM Paris-7

Parzysz Bernard (2002) : Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique en PE1. *Actes du 28ème colloque Inter-IREM des formateurs et professeurs chargés de la formation des maîtres*. Tours. Mai 2001. p99-110. Ed Presses Universitaires d'Orléans.

Robert Aline (1995) : *L'épreuve sur dossier à l'oral du CAPES de mathématiques*. Tome I. Géométrie. Ed. Ellipses.

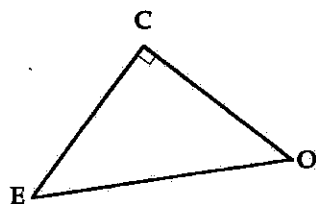
Annexes

Test initial

1	Construisez avec soin un triangle ABC tel que : $AB = 5 \text{ cm}$; $BC = 13 \text{ cm}$; $AC = 8 \text{ cm}$. Que remarquez-vous ?												
		<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 2px 5px;"><i>Je ne sais pas</i></td> <td style="width: 20px; height: 15px;"></td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 5px;"><i>Je n'ai pas eu le temps</i></td> <td style="width: 20px; height: 15px;"></td> </tr> </table>	<i>Je ne sais pas</i>		<i>Je n'ai pas eu le temps</i>								
<i>Je ne sais pas</i>													
<i>Je n'ai pas eu le temps</i>													
2	L'angle $\alpha\hat{O}\gamma$ est-il droit ? Justifiez votre réponse.												
		<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 2px 5px;"><i>Je ne sais pas</i></td> <td style="width: 20px; height: 15px;"></td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 5px;"><i>Je n'ai pas eu le temps</i></td> <td style="width: 20px; height: 15px;"></td> </tr> </table>	<i>Je ne sais pas</i>		<i>Je n'ai pas eu le temps</i>								
<i>Je ne sais pas</i>													
<i>Je n'ai pas eu le temps</i>													
3	Construisez la médiatrice du segment [MN]. Précisez quelles propriétés de la médiatrice vous utilisez.	<table style="width: 100%;"> <tr> <td style="padding: 2px;">règle</td> <td style="text-align: right; padding: 2px;">☐</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">graduation de la règle</td> <td style="text-align: right; padding: 2px;">☐</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">rapporteur</td> <td style="text-align: right; padding: 2px;">☐</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">compas</td> <td style="text-align: right; padding: 2px;">☐</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">angle droit de l'équerre</td> <td style="text-align: right; padding: 2px;">☐</td> </tr> </table>	règle	☐	graduation de la règle	☐	rapporteur	☐	compas	☐	angle droit de l'équerre	☐	
règle	☐												
graduation de la règle	☐												
rapporteur	☐												
compas	☐												
angle droit de l'équerre	☐												
		<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 2px 5px;"><i>Je ne sais pas</i></td> <td style="width: 20px; height: 15px;"></td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 5px;"><i>Je n'ai pas eu le temps</i></td> <td style="width: 20px; height: 15px;"></td> </tr> </table>	<i>Je ne sais pas</i>		<i>Je n'ai pas eu le temps</i>								
<i>Je ne sais pas</i>													
<i>Je n'ai pas eu le temps</i>													

4

Quelle est la nature du triangle ECO ?
Comment le savez-vous ?

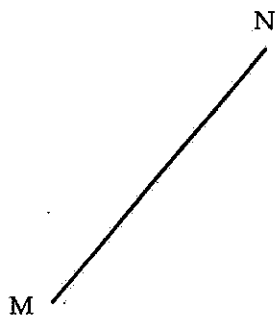


Je ne sais pas

Je n'ai pas eu le temps

5

Construisez la médiatrice du segment [MN].
Précisez quelles propriétés de la médiatrice vous utilisez.



règle

graduation de la règle

rapporteur

compas

angle droit de l'équerre

☐☐☐☐☐

Je ne sais pas

Je n'ai pas eu le temps

6

6.1 Construisez un losange ABCD en utilisant les instruments que vous voulez.
Marquez en couleur les deux premiers sommets placés.

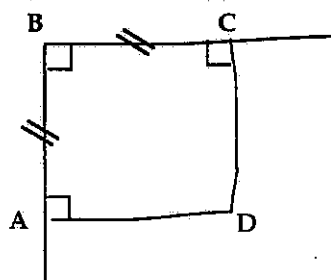
règle ☐
 graduation de la règle ☐
 rapporteur ☐
 compas ☐
 angle droit de l'équerre ☐

Je ne sais pas	
Je n'ai pas eu le temps	

6.2 Donnez une définition du losange.

Je ne sais pas	
Je n'ai pas eu le temps	

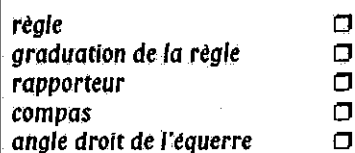
7



Le quadrilatère ABCD est-il un carré ? Justifiez.

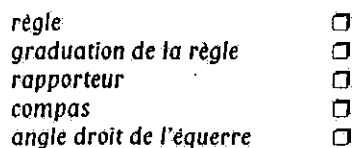
Je ne sais pas	
Je n'ai pas eu le temps	

Construisez la médiatrice du segment $[MN]$.
Précisez quelles propriétés de la médiatrice vous utilisez.



Je n'ai pas eu le temps

Complétez le dessin du parallélogramme ABCD représenté ci-dessous, en utilisant les instruments que vous voulez parmi les suivants : règle (graduée ou non) ; compas ; équerre ; rapporteur.
Vous indiquerez ceux dont vous vous êtes servi (cochez dans la liste). Vous laisserez les traits de construction.



Je n'ai pas eu le temps

Résultats des tris à plat des procédures utilisées pour tracer des médiatrices dans les trois configurations proposées dans le test.

Q3P-IM	tracé d'une intersection d'arcs de cercle et du milieu	12 %
Q3P-IA	tracé d'une intersection d'arcs de cercle et d'un angle droit	39 %
Q3P-2Ipa	tracé de deux intersections d'arcs de cercle, de part et d'autre du segment (et ceci bien qu'il y ait fort peu de place)	9 %
Q3P-2Imc	tracé de deux intersections d'arcs de cercle du même côté du segment	6 %
Q3P-MA	tracé du milieu et d'un angle droit	28 %

Tableau 4. Les procédures de tracé pour la question 3 : médiatrice en bas de page.

Q5P-IA	tracé d'une intersection d'arcs de cercle et d'un angle droit	7 %
Q5P-2I	tracé de deux intersections d'arcs de cercle, de part et d'autre du segment, de même rayon quelconque	56 %
Q5P-2IMN	tracé de deux intersections d'arcs de cercle, de part et d'autre du segment, de rayon MN	21 %
Q5P-MA	tracé du milieu et d'un angle droit	11 %

Tableau 5. Les procédures de tracé pour la question 5 : médiatrice sans contrainte.

Q8P-EU	Tracé direct de la droite (EU)	49 %
Q8P-E/U+M	Utilisation du point E ou du point U et du milieu du segment	4 %
Q8P-E/U+A	Utilisation du point E ou du point U et d'un angle droit	9 %
Q8P-E/U+I	Utilisation du point E ou du point U et d'une intersection d'arcs de cercles	5 %
Q8P-IA	tracé d'une intersection d'arcs de cercle et d'un angle droit	3 %
Q8P-2I	tracé de deux intersections d'arcs de cercle, de part et d'autre du segment	22 %
Q8P-MA	tracé du milieu et d'un angle droit	4 %

Tableau 6. Les procédures de tracé pour la question 8 : médiatrice et triangles isocèles.

Savoir pour imaginer. Un exemple : Les livres de Olivier Keller consacrés aux origines de la géométrie.

François CONNE

DiMaGe, ssed-pse-UniGe

IP-UniL, Ddmes-Ssrdm

Je n'ai pas d'autre texte pour cette communication que le résumé long de son annonce. Suite à la communication donnée à Paris, j'ai été invité à donner une conférence conjointe avec O. Keller. Je propose ici de reproduire la dernière partie du document qui sera publié à titre d'annexe dans le Cd-rom du congrès de la COPIRELEM, Bombannes 2008. En effet cette partie correspond sinon à la lettre du moins à l'esprit de ce que j'ai voulu dire à Paris, et a l'avantage de décrire des recherches effectives. Par ailleurs le propos qui suit entre parfaitement sous la rubrique Ouverture sur Je tiens à remercier Mme L. Coulange et M. C. Hache pour la confiance qu'ils ont témoignée en m'invitant dans cette rubrique. Le document complet relatif à la conférence de Bombannes, d'où est tiré l'extrait suivant, sera publiée dans les Actes de ce colloque de la COPIRELEM 2008. J'en donne ci-dessous le résumé. Je remercie les organisateurs de ce colloque de la COPIRELEM de m'avoir donné l'autorisation de publier cet extrait.

Résumé

Ce texte comporte trois sections. Dans la première, j'expose mes préoccupations. Dans la seconde, j'indique mes entrées dans l'étude de O. Keller qui sont au nombre de quatre et que j'ai intitulées : *Autonomie et caractère symbolique* ; *Formes rituelles et mythiques*, *Théorie des deux mondes* ; et *Évidences et expériences*. Je développe particulièrement cette dernière qui servira de fil rouge au développement exposé dans le document annexe. Dans la troisième section, j'expose schématiquement le raisonnement qui dirige mon interprétation de ses travaux. Dans une partie publiée en annexe sur le Cd-rom des actes du congrès de la COPIRELEM, j'approfondis et je développe mon propos, allant jusqu'à l'évocation de quelques unes de mes propres recherches. Par cette démarche, je tente de mettre en regard mes propres recherches avec ce que je retiens des études de O. Keller. Je le fais sur trois plans distincts au moins, à savoir : la question de l'évidence, celle de l'autonomie des signes et enfin celle de l'analyse des productions. La première section de cette annexe s'intitule : *Autonomie des signes, théorie des deux mondes, formes rituelles et mythique*. J'y présente quelques citations extraites des livres de O. Keller marquant le cadre des liens que je fais entre son étude et ma problématique de recherche (étude de la didactique des mathématiques sur le terrain de l'enseignement spécialisé). Ces citations sont versées en appoint à la première partie, et tout particulièrement à la question du caractère symbolique des activités scolaires. La seconde section de l'annexe s'intitule : *Évidences et échanges didactiques*. J'y reprends la problématique de l'évidence esquissée dans la première partie en la rapportant à la *dynamique de l'échange didactique et l'exploration par expérience*. La troisième partie s'intitule : *Explorations d'un champ d'expériences géométriques dans l'enseignement spécialisé*. J'approfondis la mise en relation des études de O. Keller avec les miennes et à ce propos je donne quelques exemples de recherches effectuées sur le terrain de l'enseignement spécialisé.

Je reproduis ici la dernière partie qui décrit quelques unes de mes recherches en les mettant en parallèle avec l'étude de O. Keller.

Mots clefs

Géométrie, symbolique, évidence et expérience et exploration.

I L'étude de O. Keller

Dans son étude, O. Keller examine la question suivante : au vu des documents que les historiens ont recueillis de sociétés préhistoriques ou primitives, est-il possible d'en inférer des connaissances mathématiques ? Pour y répondre, il se réfère à un vaste éventail de recherches, l'explore en procédant à des recoupements et interprétations croisées. Il propose une grille de lecture qui va supporter les mises en relations et correspondances qui soutiennent son argument. Le point qui m'a retenu est le suivant : nous ne connaissons rien du monde ou de la réalité dans laquelle vivaient les sociétés dont nous analysons quelques productions ; ces documents ouvrent certes quelques fenêtres sur ces mondes, mais nous ne pouvons en avoir qu'une vision très fragmentaire et déformée ; pourtant, les études et recoupements que l'on peut faire nous donnent quelques indications précieuses sur les mathématiques dont elles sont empreintes. L'élément médiateur entre ce que l'on peut supposer des mathématiques de ces sociétés disparues et nous se trouve dans l'analyse de leurs productions, dans l'exploration de la réalité matérielle et symbolique que ces productions jalonnent pour nous.

Voilà ce que je trouve de plus inspirant dans le travail de O. Keller pour comprendre mes propres explorations des réalités auxquelles les élèves sont confrontés lorsqu'on appuie notre enseignement sur des illustrations concrètes, comme par exemple la référence à des pliages pour les symétries, des jeux avec des miroirs, toujours pour approcher la symétrie, le découpage de pavés en pâte à modeler pour aborder la géométrie du cube, des jeux de dessins afin d'étudier des formes géométriques idéales etc. Je considère donc une analogie : O. Keller dans ses analyses, par exemple de l'industrie de la pierre taillée, a été amené à résoudre des problèmes analogues à ceux qui se posent à moi, j'ai tout à apprendre des solutions qu'il nous expose.

La grille que O. Keller propose pour exposer ses thèses sur l'industrie de la pierre taillée – *lieu de travail / plan de travail / produit du travail*, cf. ci-dessous - ne vaut pas que pour cet art mais l'auteur la reprend systématiquement, moyennant quelques accommodations, pour toutes ses analyses. Ce schéma aide à dessiner des évolutions historiques, tant celle de l'art de la pierre taillée elle-même, par exemple, que, à un tout autre niveau, celle de la gestation de la géométrie pré- ou péri- euclidienne. Quatre aspects de son étude m'intéressent particulièrement :

- Ses analyses sur l'industrie de la pierre taillée, et en particulier la manière dont il s'y prend pour faire en quelque sorte une analyse ergonomique des mathématiques (sic) dont elle est porteuse.
- En contraste avec le premier point son analyse des changements qu'accompagne l'apparition du graphisme.
- Les rapports entre ceci et la pensée non plus pratique, mais « vision globale du monde » et « travail collectif d'appropriation et de transformation du monde », selon un processus d'incorporation/projection couplé à un processus de ressaisie de la transformation des objets dans la représentation du monde.
- Le couple mythe/rite :
 - « Nous l'avons vue (la pensée primitive) à l'œuvre dans le plan de travail de l'outil, nous la voyons maintenant active dans un plan de recreation permanente et d'organisation globale du monde.
 - Le mythe est le plan de travail, tandis que le rite est son exécution; la création continue d'outils est muée en création continue du monde. »

Et

« le monde géométrique qu'elle (la pensée primitive) a créé dans le cadre du graphisme rituel. »

II Des expériences à l'occasion d'explorations didactiques

Les productions ne sont pas les finalités du travail scolaire, ce dernier ne s'y arrête pas, et en définitive leur valeur est symbolique. Il en va grosso modo de même des outils et instruments nécessaires à ces productions. Dans les recherches classiques sur l'enseignement des mathématiques cela est parfois traité comme contraste entre novices et experts, mais cette manière de poser le problème occulte justement ce caractère symbolique : un élève aussi expert soit-il ne sera jamais un professionnel. J'ai par ailleurs relevé l'aspect multifonctionnel, et parfois même indifférencié des outils et instruments, et ajouté que leur usage pouvait être lui-même soutenu par des éléments graphiques. Je considère tout cela dans une perspective sémiotique, et cette dimension symbolique renvoie à des jeux de signes ou, comme certains de nos collègues les nomment, des jeux de registres (Duval R.1995). En géométrie le graphisme joue un rôle central dans de tels jeux. Ci-dessus, j'ai abondamment cité des passages des analyses de O. Keller concernant l'avènement du graphisme parce que j'y trouve des informations et enseignements utiles à mes recherches. Ci-dessous, je compléterai par des citations relatives à la manufacture de pierres taillées.

Les produits des pliages ou des découpes que j'évoquerai dans mes deux premiers exemples sont des choses manufacturées prétextes à l'étude. Comme je l'ai déjà rappelé même si à l'école les actions n'ont pas pour finalité les productions pour elles-mêmes, on ne fait néanmoins jamais semblant de les produire. Elles sont par conséquent à prendre comme des productions symboliques⁶¹ ; et, de ce point de vue, elles doivent être mises au même rang que les productions graphiques. Si je les mets en regard des propos de O. Keller sur l'art de la pierre taillée, c'est parce que cet auteur y propose une analyse du travail du point de vue de la géométrie qui s'y manifeste. Sur cet aspect de la question son étude rejoint des préoccupations qui sont les miennes. Dans la seconde section, je prendrai appui sur l'étude de l'avènement du graphisme et la description d'une pensée graphique dans laquelle les figures géométriques n'ont pas encore gagné une pleine autonomie. Toutefois pour ce qui en est de mes exemples, je ne m'arrêterai pas au graphisme en lui-même. Ce thème fait partie de recherches que je mène par ailleurs et un article y a déjà été consacré (Conne F. 2007). Je reviendrai ici sur le côté symbolique et les jeux de signes de différents registres auxquels nous sommes amenés lorsque nous examinons la question de l'expérience dans l'enseignement des mathématiques. Par conséquent, je ne reprendrai pas ici les analyses de O. Keller concernant la prééminence du plan et de l'espace bidimensionnel.

III Choses manufacturées : Géométrie de l'industrie de la pierre taillée dans l'étude de O. Keller

O. Keller examine trois périodes de l'industrie de la pierre taillée (qui courent sur plus d'un million d'années), grosso modo: la production de *choppers*, la production de *bifaces* et celle

61 Il peut être utile de rappeler trois connotations concernant le caractère symbolique des activités scolaires : un caractère métaphorique, un caractère rituel, même si les actions sont des prétextes à l'étude, elles doivent être accomplies selon certaines formes préétablies, et un caractère mythique – ici on rejoint le symbolique au sens peircien – ces actes, tout rituels et métaphoriques qu'ils soient imposent des significations et partant certaines relations.

par *débitage Levallois*, et pour les productions typiques de chacune d'entre elles il propose une analyse selon trois axes qu'il intitule : *lieu de travail*, *plan de travail* et *résultat du travail*. Présentées dans cet ordre, ces analyses vont à rebours du travail de l'inférence du chercheur. De telles inférences sont néanmoins nécessaires. En effet, si nous n'avons accès à cette industrie que par les produits qu'elle a laissés, donc au vu des seuls résultats du travail de taille, comment apprécier ce résultat pour lui-même et pas en fonction de notre vision déformée, de ce à quoi les formes de ces objets nous font penser etc. ? Comment s'assurer que notre appréciation ne revient pas tout simplement à projeter notre géométrie dans de tels objets ? Voici quelques citations de son analyse (p. 92 - 98 Tome 1, à propos des bifaces) :

« **La géométrie sous-jacente.**

« En analysant les évidences géométriques en formation, nous suivons le plan tracé au chapitre précédent : lieu du travail (espace), plan de travail (structuration de l'espace), et produit du travail (les formes). S'il est difficile de distinguer une évolution dans l'industrie oldowayenne, elle existe incontestablement dans l'industrie acheuléenne, et la description historique et factuelle passablement fastidieuse des paragraphes précédents était indispensable pour établir ceci : les meilleurs produits ne sont pas des exceptions dues à des habiletés particulières, mais l'aboutissement d'efforts manuels et intellectuels de centaines de milliers d'années, pour une meilleure soumission de la pierre à la volonté humaine (lieu de travail), des meilleures symétries et un caractère bien affirmé du contour (plan de travail), et des formes plus raffinées (produit du travail).

« *Lieu de travail*, tout d'abord : parlant au chapitre précédent du galet que l'ouvrier oldowayen va débiter ou transformer en *chopper*, je l'ai qualifié de première « page blanche », d'espace local abstrait dans la mesure où la forme naturelle du galet est niée. La négation le transforme en *lieu de création* original, jouet de la volonté humaine ; cette tendance s'approfondit évidemment avec la taille acheuléenne, puisque l'ouvrier détruit totalement ou presque totalement la forme initiale du galet ou du gros éclat, pour lui en imposer une qui figure au préalable, comme idéalité, dans son cerveau. L'abstraction, qui existe incontestablement, est cependant peu profonde ; car il est vrai que, partant du galet ou du gros éclat initial, on le travaille certes entièrement au percuteur dur avant de l'affiner au percuteur tendre, mais c'est toujours *grosso modo* la même forme que le créateur du biface a sous les yeux ; cette forme est seulement affinée progressivement, un peu comme l'on passe d'une vision floue à une vision nette par manipulation de l'objectif photographique.

« *Plan de travail*, ensuite : Il est remarquable par deux traits spécifiques : l'indissociabilité des trois dimensions et l'action symétrique. On trouve en effet dans le produit fini un volume de forme prédéterminée (forme générale de poire ou d'amande, puis lancéolée, cordiforme, ovalaire, triangulaire, etc.), deux surfaces ayant un axe de symétrie (ou tendant à en avoir un), et une ligne (le pourtour) fermée plane, ou tendant à devenir telle. Ce sont trois tâches qui sont menées de concert : l'action sur le volume crée deux surfaces courbes (les deux faces) qui elles-mêmes, par intersection, créent une ligne fermée (le contour).

« Contrairement d'une part au débitage oldowayen antérieur, on ne se contente plus d'un travail partiel sur la surface du galet, stoppé dès l'apparition d'un tranchant convenable ; il s'agit maintenant d'un objet travaillé dans sa totalité physique (il est complètement décortiqué) et structurelle (volume, surface, ligne) et donc pensé selon ses trois dimensions de l'espace.

« Contrairement d'autre part au débitage systématique ultérieur, on ne travaille pas le volume d'abord, la surface ensuite et la ligne pour terminer. Si la surface et la ligne sont bien des buts explicites, et il serait évidemment absurde de prétendre qu'elles sont confondues dans l'esprit du travailleur, le travail lui-même ne les sépare pas en lieux d'actions successifs puisque les retours en arrière (réajustages) peuvent être nombreux.

L'espace n'est pas séparé en sous-espaces autonomes de dimensions inférieures ; la création du biface se fait solidairement dans les trois dimensions, ce qui signifie en particulier qu'il n'y a pas à proprement parler de « dessin » du pourtour du biface.

« Le plus important dans le plan de travail, me semble-t-il, est l'action symétrique. (...) (...) »

« Les symétries des bifaces, dont personne au fond n'a encore percé le secret (la raison) reflètent en tous cas des « évidences », ou réflexes cérébraux, de grande importance ; car les symétries réussies résultent d'une comparaison de grandeurs. Il faut par exemple, que l'espace situé à droite de l'axe (imaginaire) de l'objet vu de face soit égal à l'espace situé à sa gauche ; cette comparaison est purement cérébrale, car il ne peut être question de mesure⁶² ni de vérification concrète au moyen d'un pliage par exemple. Il y a incontestablement une jauge intellectuelle des grandeurs ; cela est tout à fait différent du sens spontané, sensible, animal même, qui fait que l'on choisit un galet de la bonne taille, c'est-à-dire qui tient dans la main. Nous assistons à l'émergence d'un des concepts fondateurs de la géométrie, incrusté dans les replis de notre cerveau comme capacité cérébrale depuis un bon million d'années ; et si on se laisse guider par l'évolution, depuis la vague symétrie grossière des premiers pics et bifaces abbevilliers jusqu'au raffinement des superbes « amandes » de la fin du Paléolithique supérieur, on dira que le travail crée cette capacité et que celle-ci à son tour le guide, dans une interaction permanente des deux.

« *Résultat du travail*, les formes obtenues enfin. L'arête latérale peut dessiner une ligne fermée, qui tend à devenir plane. L'ensemble est assez monotone, avec une forme générale « en amande », mais de nombreux exemplaires, en fin de période, témoignent de la recherche spécifique et de la production standardisée d'une forme bien déterminée ; celle-ci, forme de l'arête latérale en vue de face ne peut être un produit accidentel de l'action symétrique. Sans aucun doute, le but de l'artisan n'est pas seulement de produire un tranchant, ou un objet à deux plans de symétrie, mais également une figure authentique avec les beaux bifaces de l'acheuléen évolué. Mais la forme générale et les formes évoluées, plus spécifiques, ne peuvent être reproduites que grâce à un autre réflexe cérébral, celui de la proportionnalité. Sans rapports suffisamment constants⁶³ des diverses dimensions d'un objet, il ne peut y avoir de forme standardisée. La comparaison des grandeurs, en vue de leur égalisation, décelables dans le plan de travail, est donc contemporaine d'une autre jauge, celle des rapports de grandeurs.

« Espace, comparaison des grandeurs, proportionnalité et création de figures : palmarès impressionnant ! Mais il faut encore une fois maintenir la distance : contrairement à beaucoup de préhistoriens trop enthousiastes, je tiens en effet pour totalement erroné de parler, au stade où nous en sommes, de connaissance de l'espace, voire de géométrie euclidienne⁶⁴. L'espace dont nous parlons ici n'a rien à voir avec l'espace vide des peintres perspectivistes de la Renaissance ; il n'est qu'un lieu de travail, il n'est que de pierre et il n'est que local. En outre la géométrie euclidienne est affaire de concepts éventuellement applicables à toutes sortes d'objets ; ici au contraire, les notions géométriques collent encore à la pierre, et rien ne permet de penser qu'elles en furent détachées pour être appliquées ailleurs. Elles ne sont là qu'à titre de réflexes mentaux, patiemment élaborés dans l'interaction main-cerveau, il s'agit d'un apprentissage

62 Elkin dit que le vocabulaire des aborigènes australiens ne comporte aucun terme qui indique une mesure, superficie ou distance ; cependant, un voyage peut être évalué par le nombre d'étapes, mais sans souci d'égalité des distances parcourues à chaque étape (Elkin, 1967, p. 276). Il est raisonnable d'admettre que si la mesure est inconnue des chasseurs-cueilleurs contemporains, *a fortiori* l'était-elle des hommes du Paléolithique inférieur.

63 Et, dans le cas des bifaces, beaucoup plus nombreux que ceux que François Bordes, a mis en avant.

64 (Jelinek, 1989, p. 89), (Rudgley, 1999, p. 88), (Schick, 1994, p. 133).

cérébral, d'une base cognitive certainement indispensable pour une mutation ultérieure en concepts, mais d'un apprentissage seulement et dans un contexte technique bien précis.

« Un argument très solide en faveur de la non-conceptualisation est que le travail était selon toute vraisemblance un *processus silencieux*. On ne connaît pas à l'époque d'apparition du langage articulé, mais comme les exemples ethnographiques (donc à rapprocher du Paléolithique supérieur ou du Néolithique naissant) appuient la thèse du silence, il est raisonnable d'en déduire qu'il en était de même pour les époques antérieures. L'enseignement d'abord ne se fait pas par des discours, mais par l'exemple⁶⁵ ; (...).

« Le processus silencieux de la taille est en contraste frappant avec le *processus très bavard de son incorporation dans la pensée mythique-rituelle* des chasseurs-cueilleurs et des agriculteurs rudimentaires. D'après M. Eliade, « il est inconcevable que les outils [de pierre] n'aient pas été chargés d'une certaine sacralité et n'aient pas inspiré nombre d'épisodes mythologiques »⁶⁶. (...)

« Ces relations sont extrêmement intéressantes si on les rapproche de l'aspect silencieux, purement gestuel, de l'éducation et de la « discussion » entre spécialistes de la taille ; il n'y a pas de mots qui incorpore une pensée liée au travail, mais il y en a à profusion pour l'indispensable rituel afférent. Ce qui affleure donc à la conscience n'est pas le concept technique ni *a fortiori* géométrique, mais un concept mythique général saisissant l'activité lithique comme un enfantement issu de la « mère des haches » ; les mots, et donc la pensée, sont réservés aux analogies globales, architectes d'un grand tout anthropomorphe, mais n'ont encore rien à faire de concepts spécialisés liés à une activité particulière. *Les évidences géométriques sont bel et bien là comme des réflexes mentaux acquis, et non comme pensées.*

« Dans le même ordre d'idée, T. Ingold⁶⁷ théorise ainsi un aspect « divinatoire » de l'outils de pierre, en s'appuyant sur les Indiens Cree : comme dans la pensée des chasseurs-cueilleurs le monde est un monde de volontés, les outils, affirme-t-il, sont des intermédiaires entre ces volontés, et non de simples agents d'action sur la matière. (...)

« Si, en remontant jusqu'à nos ancêtres du Paléolithique inférieur, il est plus qu'hasardeux de leur attribuer une pensée mythique-rituelle, sorte de chanson de geste intellectuelle qui incorporerait et magnifierait la gestuelle lithique, il est permis en revanche de leur attribuer un souci esthétique. (...) ; si tel est le cas, il s'agit d'un changement qualitatif considérable, puisque pour la première fois la forme créée est un objet purement cérébral, la forme pour le plaisir, la forme pour la forme. De cette indépendance naissante à la géométrie euclidienne, il y a loin ; il n'empêche, il serait agréable de pouvoir penser que l'une de ses racines fut l'amour du beau : non pas la beauté contemplée (formes naturelles) mais la beauté créée. »

65 (Hallpike, 1979, p. 103) ; Wynn (Wynn, 1993) signale la même chose pour la formation des tisseurs et forgerons chez les Navajos, et chez les Duna pour la pierre taillée. Pour J. Pellegrin les formes et les schémas sont en mémoire, et il n'y a pas de doute que l'observation des aînés par les jeunes étaient le moyen d'acquérir une telle mémoire. (Pellegrin, 1993).

66 (Cité dans (Otte, 1993, p. 31).

67 (Ingold, 1993)

IV Exploration d'un champ d'expériences géométriques dans l'enseignement spécialisé

1. *Expériences de pliages de feuilles de papier, de découpages de cubes en pâte à modeler, de dessin de coupes du cube, et d'enveloppes de volumes élémentaires obtenues par pliage*

Expériences de pliage de feuilles de papier : symétrie, relations entre rectangle et carré et plus avant entre formes de quadrilatères.

Du point de vue des chercheurs, l'historien ou le didacticien, des intentions analogues président à leur travail : donner une interprétation mathématique la plus contrôlée possible aux choses que chacun d'eux observe de son côté. Ici, je donnerai un premier exemple.

Exemple 1. Pliage et forme du papier que l'on plie.

Je propose aux élèves d'effectuer quelques pliages. Par exemple, par pliage trouver à déterminer le plus grand carré dans une feuille de papier ordinaire, de format A4, ou, plus élémentaire encore, examiner un pliage composé, disons double, d'une feuille rectangulaire, ne serait-ce que pour apprendre qu'un tel pliage délimite 4 parties – et pas trois seulement – sur la feuille une fois dépliée, et éventuellement comprendre pourquoi il en est ainsi.

On dispose au départ d'une feuille de papier. Pour moi elle est rectangulaire, mais cette propriété est-elle à prendre en compte dans le pliage effectué ? Cela dit, le morceau de papier plié que l'on obtient possède une forme, lui aussi. Quelle sera sa forme ? Cette propriété sera-t-elle prise en compte ? Pour un pliage en quatre de la feuille, que je dirai banal, un point ressort : la forme du morceau plié est rectangulaire, elle aussi, elle est encore rectangulaire, elle est toujours rectangulaire (on peut considérer la chose de différents points de vues). Et si nous avions affaire à une feuille de dimension standard, A4, A5 etc., elle lui sera semblable. Par contre ce ne serait pas le cas si nous avions plié un morceau de forme carrée puisqu'un pliage donne un rectangle, et deux pliages composés, en croix, donnent à nouveau un carré.

Cette stabilité de la forme lors du pliage influe sur les représentations que les sujets se font de leur action et de leurs gestes. On – élèves aussi bien qu'enseignants ou chercheurs – aura tendance à considérer et à dire que l'on a fait deux fois le même pliage pour aboutir au pliage en quatre. Plus avant, cela supportera l'idée que les pliages se composent comme les puissances de 2.

Mais comprendre cela dans l'expérience n'impose nullement que toutes ces relations soient explicitées, en particulier que la forme rectangulaire soit explicitement prise en compte. En effet, les pliages se font par application d'un bord sur son opposé et ce n'est que cela qui est pris en compte dans l'action. Comment s'en convaincre ? Proposez donc un morceau de papier de la forme d'un parallélogramme, assez allongé pour que le pliage des petits côtés l'un sur l'autre ne les fasse pas s'appliquer, soit qu'ils ne fassent que se recouvrir partiellement, soit qu'ils ne se recouvrent pas du tout. La forme du morceau plié n'est alors plus un parallélogramme, mais a la forme d'un trapèze (avec éventuellement une encoche en pointe dans sa base⁶⁸). Cette forme reste symétrique et donc on peut la replier en deux, bords à bords, mais cela n'est plus tout à fait la même chose et ce n'est plus deux fois le même pliage.

68 Si vous ne vous représentez pas la chose, eh bien faites donc le pliage évoqué ! Ce conseil vaut pour toutes mes descriptions.

Il faut donc que les éléments retenus par le chercheur à titre de *résultat du travail*, correspondent à ceux que livreront les analyses du *lieu de travail* et du *plan de travail*. Pouvoir faire de telles analyses exige que l'on observe attentivement les élèves faire leurs pliages :

- *Quel est le lieu de leur travail ?* La forme du morceau de papier ou seulement tel ou tel élément : tel bord, tel coin ? Etc. Est-ce que le résultat du pliage va tenir compte du morceau de papier duquel on est parti ? Ceci est encore plus important lorsque vous demandez aux élèves de découper des figures dans des pliages. Est-ce que la position de ces découpes par rapport à la forme du morceau de papier sera prise en compte ? Etc.
- *Quel est le plan de travail ?* Dans quel ordre l'élève procède-t-il ? Une fois qu'il a agi, est-ce qu'il peut retrouver cet ordre ? Est-ce qu'il peut envisager ce qui se passerait s'il intervertissait telle ou telle action ? Etc.

On peut s'inspirer de telles analyses pour imaginer des ensembles de problèmes de pliages, en faisant varier :

- la forme des morceaux de papier dans lesquels confectionner un morceau de forme donnée ;
- les modes de pliage d'un morceau de papier donné et examiner ce qu'on obtient ;
- le produit que l'on cherche à obtenir, en procédant à des adaptations idoines soit dans le mode de pliage, soit dans la forme du morceau de papier plié, soit dans les deux.

Exemple 2. Plier et déplier.

Bien entendu de telles interprétations didactiques visent d'autres significations que celles de l'historien. Ce que je cherche à savoir du travail des élèves est ce dont ils font l'expérience et surtout quelles pourraient être des interventions adéquates sur le champ même de cette expérience. Ainsi toujours à propos du pliage de la feuille rectangulaire (peu importe ici quelle soit A4 ou non), un nouvel exemple.

Une fois qu'on a plié notre feuille, on peut demander de la déplier. Généralement le geste de cette action fera à rebours le pliage⁶⁹. On déplie la partie qui est venue recouvrir le morceau de papier. Cette action restituera le morceau de papier dans sa position initiale. Mais on peut envisager une autre manière de déplier la feuille, en dépliant non pas par le dessus, mais par le dessous. À prime abord on ne remarquera pas de différence, le morceau de papier semblera avoir repris sa position initiale. On suggérera alors de procéder de la même manière mais sur un papier plié en deux seulement, ou alors en huit (trois plis) et en prenant un papier qui ne soit pas identique sur le recto et sur le verso. Alors les deux manières de déplier ne reviendront pas au même, puisque la seconde manière aura retourné le morceau de papier. Comment comprendre cela ? Devra-t-on reconsidérer ce qui se passait dans le cas d'un pliage en quatre ? Imaginer une telle expérience et estimer son intérêt ne me serait jamais venu à l'esprit si je n'avais pas poussé mes analyses sur le pliage des feuilles de papier au-delà des *produits de ce travail* en observant attentivement les élèves, et en considérant tout aussi attentivement ce qui pour moi allait de soi dans de telles expériences, et pourtant pas pour eux.

69 On est ici en plein dans le jeu entre une schématisation mathématique et une réalité bien plus complexe. Avec la manipulation en effet, on a affaire à des feuilles de papier qui ont deux faces (ce ne sont donc pas des plans stricto sensu) et on distingue ces faces. La feuille et nos gestes sont plongés dans un espace orienté 3D. À cela s'ajoutent (s'amalgament) une orientation temporelle, et une inversion des actions et de l'ordre de leurs combinaisons. Il y a jeux de mise en contraste d'au moins deux ordres de significations qui chacune nous imposent sa logique propre. On peut considérer la manipulation comme une contremarque expérientielle faite à la composition de deux symétries axiales d'axes perpendiculaires. On a ici un exemple d'un jeu symbolique, au sens où je l'ai défini.

Exemple 3. Plier un carré dans une feuille rectangulaire.

Comme je l'ai défendu ailleurs (Conne F. 2008a et 2008b), l'expérience est un véritable creuset de relations mathématiques. Le pliage d'un carré dans une feuille ordinaire nous en donne un profond exemple. Ceci nous introduit à un troisième exemple.

Je ferai tout d'abord remarquer que si je dispose de deux feuilles ordinaire, je puis déterminer ce carré, en appliquant une feuille en travers de l'autre (et ce sera le moyen le plus intuitif de se convaincre que l'on obtient alors le plus grand carré inscrit dans une telle feuille). Pour ceci, je devrai au moins appliquer largeur sur longueur, l'une par rapport à l'autre en T, ou encore mieux, les appliquer l'une sur l'autre coin sur coin, à angle droit, l'une par rapport à l'autre en L ou en équerre. Si on ne dispose que d'une seule feuille de papier rectangulaire, le rabat du coin, à l'équerre, permettra de déterminer ce carré. Si j'insiste sur cette expression : *à l'équerre* c'est que dans une telle construction, le coin de la feuille que l'on rabat joue exactement le rôle d'une équerre, que le *lieu de travail* fournit en quelque sorte un de ses instruments. Si je déplie mon pliage en suivant l'idée (de l'exemple 2 supra) de déplier la feuille du dessous (qui a la forme d'un trapèze rectangle), alors mon morceau de papier se retrouvera par rapport à sa position d'origine dans une position transverse, en L. La procédure de pliage et de dépliage décrite ici permet donc de faire l'expérience de l'équivalence des deux constructions : celle qui fait usage de deux feuilles et celle qui fait usage du rabat du coin. Du point de vue des représentations une telle équivalence n'est pas anodine, mais ce n'est pas tout puisqu'elle fait le lien entre cette expérience et une représentation directrice concernant les parallélogrammes et les croix en ceci qu'on peut les considérer comme la forme obtenue par recouvrement de deux bandes de largeurs distinctes ou égales, à angle quelconque ou à angle droit.

Expériences de découpe de cubes en pâte à modeler : bords et lignes, coupes et formes des morceaux, arêtes, faces, volumes.

Il porte sur la géométrie du cube, en ce sens il est plus proche des questions discutées par O. Keller que l'exemple précédent. Toutefois, il prolonge l'exemple précédent sur la question des instruments que l'on utilise. Il s'agit d'expérience de découpe de pavés de forme grosso modo cubique en pâte à modeler à l'aide d'un fil.

J'ai commencé à explorer ce milieu avec des élèves et mes étudiants à la suite de mes recherches portant sur un matériel de découpes de cubes en bois et de l'exploration de quelques polyèdres à l'aide d'esquisses de perspectives cavalière de ces volumes (Conne F. 2007). Il s'agit donc de confectionner avec de la pâte à modeler quelques pavés approximativement cubiques, et de les découper à l'aide d'un fil tendu (à couper le beurre, le fromage, fil de potier, etc.) selon des découpes planes transverses et verticales (des découpes non verticales sont explorées aussi, j'en dirai juste un mot en passant à la fin de ma description).

Notons tout de suite que la pâte à modeler permet sans difficulté d'effacer son action, ou ses traits de découpage, soit en écrasant son cube, soit en lissant les faces. Cela importe énormément pour les élèves.

Un premier type d'observations est à retenir : souvent les élèves avec qui je travaille n'arrivent pas à confectionner un pavé de pâte à modeler cubique qui les satisfasse : les bords ne sont pas lisses comme ils voudraient, les proportions sont approximatives, et les faces ne sont pas très parallèles, les arêtes ne sont pas très nettement marquées. Néanmoins cette insatisfaction est vite dépassée pour la plupart dès le moment où ils procèdent à leur première découpe réussie : en effet, par contraste avec les bords confectionnés à la main, la coupe de la

pâte à modeler est nette et précise et marque des arêtes bien franches, et apparemment bien droites, les coins sont nets, eux aussi.

Je me limiterai ici à un répertoire de deux types de coupe en moitiés :

- 1°) coupes transversales *parallèles* aux faces latérales et au milieu du cube ;
- 2°) coupes transversales *en diagonale* de la face supérieure.

Déjà pour décrire ces coupes nous devons distinguer la face supérieure, sur laquelle on va appliquer le fil pour entamer la découpe, et les faces latérales.

Par ailleurs ces découpes laissent des traces – créent une ligne de coupe – qui se marquent tantôt sur les faces au milieu d'elles, tantôt le long des arêtes et de ce fait sont moins « remarquées » car elles ne font que se superposer à des lignes déjà perçues. Notons aussi que les élèves dirigent leurs actions sur la ligne du découpage qu'ils veulent faire, c'est-à-dire la position de la ligne du fil sur le carré de la face supérieure. La ligne de découpage produit une ligne de coupe et, lorsqu'on sépare les morceaux, de « nouvelles arêtes ».

Nous procédons à des combinaisons de telles découpes, réitérées tantôt sur la même face supérieure, tantôt sur une autre de ses faces, après avoir fait subir au cube une rotation d'un quart de tour.

Le propre de la combinaison des coupes est de toujours opérer sur le même pavé. La pâte à modeler a ceci de particulier que les morceaux découpés restent collés les uns aux autres et qu'il faut une action pour les séparer après la coupe. À l'inverse, une fois qu'on a coupé un cube et qu'on en a séparé quelques parties, voire toutes les parties, on doit alors les rassembler à nouveau pour opérer une nouvelle découpe. Comme la pâte à modeler est collante, cela permet de reconstituer des cubes à partir des parties obtenues, ce qui donne lieu à des exercices de puzzle en 3D très instructifs. En particulier on peut reconstituer des cubes en prenant des parties issues de plusieurs découpes, ce qui permet d'établir des équivalences.

Les morceaux que l'on obtient n'ont pas toujours des formes très évidentes. Ceci oblige le sujet à trouver des descripteurs méthodiques pour juger de leur forme : nombre de sommets, d'arêtes, de faces, forme des faces. Les morceaux sont aussi de tailles inégales, par contre ils sont assez précisément de formes semblables. La reconstitution de cubes avec les morceaux ne donne pas un cube parfait, néanmoins la rétroaction du matériel est nette : le sujet sait s'il a bien reconstitué un cube ou non.

La géométrie de ces découpes de cubes n'est pas triviale, surtout pour les combinaisons de découpe en diagonales. Si on combine toutes les coupes possibles, on obtient 24 tétraèdres identiques. Mais soit par découpe, soit par réassemblages, on peut obtenir toutes les parties des découpes intermédiaires.

Lorsqu'on combine deux découpes en diagonales, on obtient bien 4 parties, mais non égales : deux tétraèdres valant $1/6$ de cube et deux pyramides valant $1/3$ de cube.

S'il n'y a qu'une manière de découper un cube par combinaison de deux coupes en diagonale sur des faces adjacentes, il y a deux possibilités distinctes de faire trois découpes sur les faces du trièdre : l'une donne 6 tétraèdres identiques, $1/6$ de cube, l'autre donne 8 parties non égales, 4 paires de polyèdres : deux hexaèdres $1/4$, deux tétraèdres $1/12$ et deux tétraèdres $1/6$. L'organisation et la forme de ces morceaux de cube peuvent être reliée aux isométries paires du cube.

Que ce soit en vue de ces découpages, lors de la séparation des parties encore collées, ou lors des tentatives de reconstitution du cube à partir de certains morceaux, les élèves s'appuient sur les lignes et arêtes que font les découpes. Ils s'aident aussi de la considération que les faces de coupe, les nouvelles arêtes, sont plus lisses que les éléments du bord du cube et que les nouveaux coins sont bien marqués.

Il convient ici de noter la fonction multiple de l'instrument de découpe : le *fil*. Ce dernier n'est pas une *scie*, ni un *couteau* en ce sens que pour opérer sa découpe le sujet est obligé de tendre ce fil, il prendra alors une forme rectiligne. Mais il faut encore positionner le fil dans une direction bien précise et cela se fera par une marque, en quelque sorte une amorce de coupe, laissée sur la face supérieure du cube. Le fil a donc tout autant fonction de *scie* que de *règle-crayon*. Ceci peut être utilisé à bon escient pour discuter de ce que l'on anticipe comme effet d'une coupe.

Mais on peut aussi en tirer parti afin de faire quelque découpe particulière. On peut en effet appliquer le fil le long de la ligne de découpe que l'on voudrait obtenir, de manière à enlacer le pavé dans une boucle. Cela fait, on tire la boucle, voire on la ferme comme pour un nœud. Le pavé sera alors découpé, pas toujours selon une coupe plane, mais cela n'est pas impossible à obtenir non plus.

En particulier c'est ainsi que l'on peut obtenir une découpe dont la ligne de découpe est le triangle fait par les diagonales des faces du trièdre. On obtient alors un tétraèdre dans un des coins du cube. En procédant de cette manière par 4 fois, on peut obtenir la découpe du cube en 4 de ces tétraèdres de coin et comme noyau un tétraèdre régulier dont les arêtes sont les diagonales des faces du cube. L'intérêt de cette découpe est dans la manière de positionner le fil, puisqu'il devra longer les arêtes des découpes déjà effectuées.

Par les explorations de ce milieu mathématique, au détour de tâches variées, on rencontre des considérations analogues à celles de O. Keller. Bien entendu il s'agit de tout autre chose, et les techniques ne sont pas comparables. Et surtout les techniques utilisées à fins didactiques ne sont pas appelées à se développer afin d'augmenter leurs capacités de production. Toutefois dans ce genre de travail sur des objets en trois dimensions, on observe qu'au départ, les trois dimensions sont données et traitées de manière indifférenciée, puis, progressivement, les actions s'organisent en prenant en compte distinctement les des trois dimensions. Cela se produit à la faveur de la répétition combinée des mêmes découpages, tout comme je l'analysais à propos du pliage des morceaux de papier.

En fait, ces tâches croisent deux analyses dimensionnelles distinctes : celle des directions dans l'espace et celle des dimensions : sommets, arêtes, faces. Ce travail coordonné est supporté par ce qui dirige tout aussi bien les coupes que les réassemblages de morceaux : des lignes, des marques et des figures obtenues en deux dimensions. Cela était déjà ressorti très nettement dans mes recherches antérieures sur des plots en bois. **L'usage des instruments est donc en quelque sorte lui-même instrumentalisé par des éléments graphiques.** C'est d'ailleurs ce que j'ai fait déjà remarquer en parlant du *rabat du coin de la feuille de papier à l'équerre*.

Expériences graphiques dans l'étude de cubes découpés.

La recherche que j'ai évoquée ci-dessus concernant la découpe de cubes de pâte à modeler fait suite à une autre recherche sur le même thème que j'ai décrite dans un article intitulé : *Quelques pas esquissés dans l'univers des polyèdres* (Conne F. 2007). Cette recherche a été effectuée dans une classe de niveau 3P/4P de l'enseignement spécialisé. Elle faisait partie d'investigations que je menais en classe sur le thème de l'introduction de ces élèves à la géométrie de l'espace. Je travaillais avec divers matériels, *polydrons* (plaques géométrique permettant la confection de coques de polyèdres), pliages élémentaires, ainsi qu'un jeu de 10 cubes en bois, découpés de manières diverses en demi, tiers, quart, et huitièmes et d'un cube en bois témoin non découpé. Chacune des découpes de cubes était faite de telle sorte que tous ses morceaux soient identiques. Il s'agit ici de solides plus que de polyèdres. La partie de cette recherche que j'ai rapportée a débuté au moment où, après avoir fait des activités avec

chacun des élèves à fin de leur faire connaître ce matériel de plots en bois, je leur ai présenté les 11 cubes sur une table, et leur ai demandé de relever par dessin ces 11 cubes afin que, la semaine suivante, on puisse se souvenir de la composition de mon matériel, sans qu'il me soit nécessaire de le ramener en classe.

Pour cette première activité la plupart des élèves a recouru à un codage plan des cubes découpés. Deux ou trois élèves ont produit un dessin en perspective pour l'un ou l'autre des 11 cubes découpés, mais jamais systématiquement. Il s'est trouvé qu'un élève disposait d'une procédure systématique de dessin de cube en perspective cavalière (sur quadrillage) et qu'il l'a rigoureusement appliquée à tous ses dessins. Lorsque j'eus présenté en collectif les solutions de chacun, et qu'ils ont vu les dessin de cet élève, tous les autres ont voulu apprendre à dessiner un cube – esquisse en perspective cavalière – et ont été d'accord pour chercher à représenter sur ce moule les cubes diversement découpés (donc pour exécuter à nouveau la tâche). Pour ce faire, ils ont dessiné le cube en perspective sur lequel ils ont reporté des indications graphiques analogues aux codes qu'ils avaient élaborés précédemment. Une part d'entre eux a complété ses dessins sur diverses faces du cube.

Je leur ai alors demandé de bien vouloir dessiner la forme d'un des morceaux découpés dans le cube. Il s'agissait cette fois de trouver des moyens d'esquisser des dessines de prismes et de pyramides. Puis nous avons tenté de dessiner d'autres polyèdres, dont un octaèdre, confectionnés en polydrons.

Cette recherche a donné lieu à des observations très riches. Lorsque dans la première tâche je leur ai demandé de dessiner les cubes, je cherchais à observer comment ils allaient s'y prendre pour « rendre le volume », mais ils ont contourné la difficulté en dessinant une face du cube, et en y apposant les motifs de découpes qui apparaissaient sur celle-ci. Dans plusieurs cas, cela suffisait à identifier le cube découpé.

Les cubes étaient découpés selon les principes que j'ai décrits pour la pâte à modeler, ce qui faisait que leurs codes ont repris les lignes de découpage et les ont combinées en motifs simples, connus des élèves : un carré dans lequel sont inscrits ces lignes, à savoir une ligne transversale ou diagonale, deux de ces lignes en croix, 3 ou 4 de ces lignes en étoile, des quadrillages en 4 ou en 9 du carré, etc.

Les élèves ont donc élaboré un système graphique pour désigner et distinguer les cubes découpés, systèmes graphiques relativement autonomes puisqu'on a pu observer des dessins qui ne correspondaient à aucun des cubes découpés présentés.

Le second point que je mentionnerai ici, concerne le dessin esquissé de cube en perspective cavalière, appris comme un « truc » de dessin facile à obtenir et produisant son effet de vision en profondeur.

Le cube est dessiné en transparence, obtenu par le dessin d'un carré, le dessin d'un second carré, décalé par rapport au premier, et du tracé des lignes de liaison entre les sommets correspondants de ces deux carrés. Ceci est en soi, lui aussi, un petit système graphique.

Il a été fort intéressant alors de regarder comment les élèves ont combiné les deux systèmes graphiques ainsi obtenus pour arriver à dessiner, de manière « réaliste » les cubes découpés.

Le troisième point à relever est que pour dessiner non plus les cubes découpés, mais la partie ainsi obtenue, ils ont cherché à généraliser le truc de dessin appris pour le cube afin d'obtenir des prismes, des pyramides puis l'octaèdre. Ils ont aussi cherché à s'appuyer sur le dessin du cube découpé, obtenu par superposition des deux systèmes sus-mentionnés afin de les guider. Le graphisme développé l'a donc été à partir de savoirs-faire graphiques déjà disponibles : dessiner un carré et par le jeu réglé d'éléments graphiques pour produire un ensemble de

figures géométriques. Ces graphismes parce qu'ils pouvaient être développés de manière relativement autonome leur ont permis de contourner l'obstacle du rendu par dessin d'un objet en 3 dimensions. Puis, pour eux l'apprentissage du dessin du cube en perspective cavalière s'est substitué non pas à leur premier système graphique, mais uniquement au carré sur lequel il s'était développé. On a donc pour le dessin de mêmes objets une combinaison de deux systèmes graphiques, dès le départ autonomes l'un vis à vis de l'autre. Pour en arriver là les élèves n'ont pas analysé leur tâche, mais les choses se sont présentées autrement : primo une réduction de la tâche, et secundo, forts de la pertinence de ce premier traitement, complétion par assimilation de leurs codes au nouveau procédé de dessin.

Bien entendu, les productions des élèves n'ont pas été des épures et il ne s'est pas du tout agi de dessin technique, ni même de techniques de dessin, mais essentiellement de *dessins à main levée*, je le répète, des *esquisses*. Le véritable objet de tout ce travail aura été l'exploration du cube, instrumenté et dirigé par les contraintes de la tâche dessin, puis, fort de ces résultats, la poursuite de cette exploration vers d'autres types de polyèdre dont la variété a pu être mise en relation avec la variété des adaptations (assimilations et accommodations) de la technique du dessin en perspective cavalière nécessitées pour représenter ces formes.

Expérience des volumes que l'on peut faire prendre à des feuilles de papier.

Exemple 1. Une évidence intuitive qui cache une indifférenciation de connaissance.

À l'origine de mes recherches portant sur la géométrie de l'espace, j'avais le motif suivant : que peut apporter aux élèves des jeux – voire des jouets – comme le matériel des polyèdres, quelque pliages très simples, éventuellement inspirés de l'origami, des boîtes de plots en bois, des trucs de dessin, etc. ? Cela m'a amené à me demander comment ils envisageaient des moyens de « produire du volume » ? Par exemple, comment envisagent-ils de construire un cube ou un tétraèdre en papier ? Mais tout aussi bien des effets de volume par le dessin en perspective. Comment envisagent-ils ce qui se passe, par exemple lorsque leur construction en polyèdres vient à lever, à quitter le plan de travail ? Comment appréhendent-ils les solides et leurs formes ainsi que les transformations de ces formes que l'on obtient par de simples découpages ? Ou encore les représentations qui permettent de classer les polyèdres en prismes et pyramides, etc., voire en ce qu'on pourrait appeler en *polyèdres boules* (dodécaèdre, icosaèdre etc.).

Je me suis aussi attaché à examiner une question qui m'intriguait et à laquelle je consacre encore aujourd'hui quelques explorations. Dans tous les articles à propos des maquettes de polyèdres on fait grand cas des polyèdres parfaits ou platoniciens et de la démonstration qu'il en existe 5. Dans la partie de la démonstration qui établit qu'il ne peut en exister plus que 5, on se base sur une « évidence » symbolique : *la somme des angles des faces en un sommet d'un polyèdre est inférieure à 360°*.

Lorsqu'on aborde cette question à la faveur de constructions avec des pièces polygonales (genre polyèdres), on s'appuie sur le constat empirique de constructions d'angles polyèdres. Il ne faut pas confondre ce qui dans la démonstration joue le rôle d'évidence symbolique avec un simple constat empirique et souvent, hélas, dans la pratique on pense pouvoir se suffire d'une telle réduction. Mes observations (Conne F., 2008b) ainsi que celles de T. Dias et V. Durand Guerrier (Dias T., 2006), montrent cependant que le cas où la somme de ces angles fait 360° exactement : soit par assemblage de 3 pièces hexagones réguliers, soit par assemblage de 4 pièces carrées, ou encore de 6 pièces triangles équilatéraux, pose souvent problème. On obtient bien des plaques, mais le matériel fait que ce sont des plaques articulées, mobiles autour de leurs charnières. Dans le cas des 6 triangles ou des 4 carrés, les charnières entre pièces concourent au centre de la grande plaque qu'elles constituent. On peut

« plier » cette dernière le long de certaines de ces charnières. Dans le cas des 4 carrés, le pli se fait le long de deux charnières alignées alors que les articulations des charnières transverses se rigidifient. Le cas des de la plaque faite de 6 triangles est bien plus compliqué⁷⁰. Le cas des 3 hexagones est différent. Nous avons affaire à un trièdre plat. Mais ici c'est le matériel qui montre ses limites et la construction présente un léger jeu qui suffit à suggérer que l'assemblage pourrait prendre une courbure. Dans ce cas, comme si la construction avait une certaine souplesse et ce phénomène n'est plus, comme précédemment, une rotation autour de l'axe des charnières. Ce sont les axes des charnières qui se déplacent réduisant l'angle qu'ils font entre eux en dessous de 120° . Du *constat empirique* de cette **petite courbure**, les sujets novices – non initiés au théorème – infèrent à **juste titre** qu'il serait éventuellement possible de construire un polyèdre. Et alors pourquoi pas en assemblant un grand nombre de telles plaques ? Tout récemment, un élève de huit ans et demi a spontanément déclaré à ce propos qu'avec beaucoup de pièces hexagonales on pourrait ainsi construire « la plus grande de toutes les planètes » !

Cette observation nous oblige à revenir sur l'évidence du cas où la somme des angles fait moins que 360° . Dans ce cas, si on veut assembler les bords de notre plaque, on est « obligé » de faire lever notre construction dans l'espace et de la faire décoller du plan de la table. La construction obtenue, assemblage de pièces en cornet, n'est pas pour autant nécessairement rigide. Elle le sera dans le cas d'assemblages de 3 plaques (trièdres). C'est très net avec les trièdres de triangles, de carrés et de pentagones – et devrait l'être dans celui des hexagones aussi. Dans d'autres cas, il n'y aura pas de rigidité : par exemple dans le cas d'un cornet pour lequel on a assemblé 4 ou 5 triangles. La rigidité de tels assemblages s'obtiendra lorsqu'on les fermera, dans les exemples ci-dessus, par une base carrée ou pentagonale afin d'obtenir des pyramides. Ici il faut noter une chose : lorsqu'ils obtiennent des constructions non rigides, parfois les élèves les retournent sur la table (ouverture du cornet plaquée sur la table) et ce simple appui de quelques sommets ou arêtes sur une surface plane peut suffire à les rendre rigides. Ces propriétés font que les assemblages en tétraèdre, cube et dodécaèdres sont faciles à construire. Leurs sommets sont sommets de trièdres, aussi les assemblages de pièces sont tout de suite rigides. Cela n'est pas sans effet. Fabriquer un dodécaèdre avec autant de facilité est un constat empirique qui impressionne beaucoup les enfants, les enseignants et les parents. Plus généralement, j'ai pu observer (Conne F. 2008b) que dans le travail avec un tel matériel, les deux caractères de rigidité d'une part et de fermeture de l'autre jouaient pour les élèves un rôle primordial, que cela les orientait dans leurs constructions.

Ceci dévoile chez les sujets, et nous-mêmes, une certaine indifférenciation des représentations de ce théorème de la somme des angles. Ici il faut prendre en compte ensemble : angles – quantité de matière – rigidité, fermeture, et éventuellement encore souplesse du matériau. Cela se révèle bien plus subtil qu'on ne pouvait le croire de prime abord. Là encore dans la théorie, ce théorème n'est qu'une *évidence symbolique*, qui suffit à l'établissement du fait qu'il ne peut y avoir plus de 5 polyèdres parfaits, et qui se détache ainsi de tout un tissu d'autres évidences spatiales dont nous ne soupçonnons pas l'ampleur. Ainsi se focaliser sur le théorème mathématique au prétexte que sa démonstration est relativement intuitive ou empirique⁷¹ nous fait passer à côté de la richesse des connaissances spatiales dont les élèves

70 On peut assembler plus de 6 triangles équilatéraux (ou de quoi que ce soit) et cela donne des surfaces froissées, voire si on ne les ferme pas, des surfaces en spirales que dans le cas d'assemblages de triangles j'appelle « girolles ». Ce genre de construction n'a pas été prévu par le matériel des polyèdres mais il offre une expérience fort intéressante : les girolles sont mobiles, autour de leurs charnières. Le prolongement, virtuel, des axes de celles-ci sont tous concourants en un même point. Ce point, non matériel, est le point fixe de tout l'assemblage auquel il semble noué, contraint. Afin de ne pas trop compliquer mon exposé, je n'envisagerai pas ce cas ici, mais je tenais à le mentionner explicitement.

71 Il faut prendre en compte la multiplicité des connaissances et leur degré de différenciation/indifférenciation,

disposent. Il faut explorer diverses situations autour de cette question. Par exemple, il ne suffit pas d'éprouver le théorème de la somme des angles par de simples jeux de plaques articulées, mais il faudrait au moins l'examiner dans le cas de secteurs de disques en papiers que l'on recollerait sur les bords. J'ai récemment commencé à examiner cette question avec des élèves.

Parallèlement à ces considérations, je suis très intéressé par le travail inverse qui consiste à partir d'un objet polyédrique, par exemple toutes sortes de boîtes en carton de toute forme que l'on trouve dans le commerce, et d'examiner comment on peut s'y prendre pour les aplatir : soit on les écrase et on regarde ce que cela donne, soit on les déchire et on peut réfléchir à différentes manières de le faire. C'est donc l'opération inverse, la déchirure amenant à ouvrir ce qui était fermé et à rendre flexible ce qui était rigide. Le déchirement et l'aplatissement font alors apparaître des « jours », des angles déficits de l'angle au sommet par rapport à 360° .

Toutefois, il n'est pas nécessaire que l'on produise une construction fermée pour « produire » du volume et sont tout aussi intéressants les cornets, gobelets et autres coins trièdres, ou polyèdres). En particulier j'ai pu observer que dans certaines situations, par exemple lors de la confection du dodécaèdre régulier à partir d'un jeu de pièces pentagonales, retourner un forme en bol pour en faire une calotte (un chapeau) n'était pas quelque chose qui sautait aux yeux des élèves. Pour ces derniers, c'était une pièce qui venait fermer la construction comme un couvercle et ils allaient jusqu'à refuser de la décomposer en deux calottes de 6 pentagones chacune ! Jouent ici des questions de volumes ouverts, de volumes enfermés et aussi d'enveloppes de volumes.

J'ai aussi abordé ces questions de deux points de vue : on peut en effet chercher à reproduire une chose tridimensionnelle, mais notre expérience ne s'arrête pas là. En effet, on fait aussi l'expérience inattendue de choses qui viennent à prendre des dispositions spatiales alors qu'on ne s'y attendait pas. On se trouve par exemple confronté à ce que quelque chose à qui l'on pense pouvoir donner telle forme tridimensionnelle, vienne à en prendre une autre. (J'ai donné un exemple de ceci dans Conne F. 2008a, pp. 249-255).

Toutes ces investigations, encore en cours, m'ont amené à ne pas me restreindre à un seul type de support d'étude, mais au contraire à en examiner plusieurs et surtout à examiner les mises en relations que cette diversité permet. J'ai déjà évoqué à propos des cubes découpés de telles correspondances : les combinaisons de traits en figures d'un code graphique correspondent exactement aux combinaisons des découpes dans les cubes en pâte à modeler.

Exemple 2. Pliages de formes tridimensionnelles.

Dans mes recherches, j'ai aussi beaucoup investi les pliages, au départ pour mieux comprendre comment en tirer parti pour étudier la symétrie. Ceci a un rapport direct avec la géométrie de l'espace, puisque la réalisation d'une symétrie par pliage joue justement sur le fait que toute symétrie plane est la restriction à son plan de l'action d'une rotation d'un demi-tour autour d'une charnière (le pli) qui, dans le plan considéré, sera l'axe de la dite symétrie.

Le matériel polydron permet en particulier des recherches fort intéressantes sur la question des polyèdres énantiomorphes. Toutefois, l'usage scolaire de ce matériel, officiel en Suisse romande depuis 1997, est quasiment limité à la question des développements de polyèdres, par le truchement de patrons d'assemblage des pièces requises pour la confection de tel ou tel polyèdre.

ce qui m'a amené à distinguer trois niveaux d'évidences : les *évidences intuitives*, les *constats empiriques* et les *évidences symboliques*.

Je me suis intéressé à la confection de polyèdres en papier, et en particulier à trois pliages / découpages remarquables pour leur simplicité.

Le premier consiste à prendre un morceau de feuille carrée, de marquer les plis des diagonales et de rentrer – en quelque sorte par soufflet – un des quarts de carré. Cela fait lever le pliage en un cornet tétraèdre, dont les trois faces en papier sont les trois quarts du carré restant et la base, ouverte celle-ci, a un triangle équilatéral comme bord. Un cornet est un des moyens de « créer » de l'espace. Avec de tels cornets on peut envisager de confectionner un cube, en les assemblant par le bord de leur face ouverte, ou alors en accolant certaines faces, créer des polyèdres en « alvéoles ».

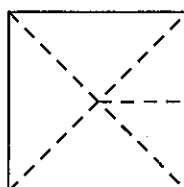


Figure 1. Pliage dans une feuille carrée d'un cornet tétraèdre coin de cube, $1/6$ de cube.

L'autre pliage remarquable consiste à prendre une feuille de format A4, de marquer par des plis la ligne du milieu parallèle à la largeur, ainsi que les diagonales de chacun de ses quarts, de manière à faire apparaître un losange inscrit dans la feuille. Les sommets du tétraèdre sont les sommets du losange, milieux des bords de la feuille, l'angle des faces qui les entoure est de 180° . Ce pliage est le développement d'un tétraèdre quasi régulier et les proportions de la feuille A4 font que ce tétraèdre est droit. L'intérêt est que nous avons ici un développement de polyèdre qui tient dans une figure simple comme un rectangle, un développement de forme convexe et qui ne prend pas une forme compliquée. Autre résultat : le volume de ce tétraèdre est un douzième du volume du cube dont l'arête est égale à la largeur de la feuille A4. Pourtant, et c'est aussi fort intéressant, on ne peut pas obtenir un cube en assemblant de tels tétraèdres.

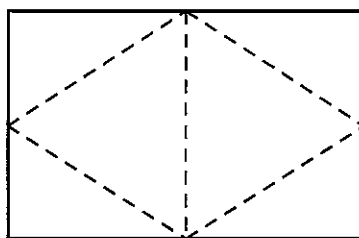


Figure 2. Pliage dans une feuille A4 d'un tétraèdre droit, dont toutes les faces sont égales.

Les proportions de la feuille A4 permettent de la considérer comme le plan diagonal d'un cube, ou dit autrement, le plan d'une coupe diagonale faite dans un cube. Les dimensions de la feuille A4 font que sa largeur correspond à l'arête d'un cube, sa longueur à la diagonale d'une face de ce cube et sa diagonale la diagonale de ce même cube. Ceci, combiné avec l'idée de pliage en cornet décrite à partir d'une feuille carrée, permet de confectionner très aisément un nouveau cornet. Le marquage par pli des deux diagonales d'une feuille A4 délimite 4 triangles isocèles. On replie (en soufflet) un des triangles qui a pour base une longueur du morceau de papier, et cela fait lever la construction en un cornet de forme tétraédrique. La base ouverte a la forme d'un demi carré (triangle rectangle isocèle). Les faces papier du cornet sont des morceaux de plans de découpes diagonaux. En assemblant, en alvéoles, 12 de ces tétraèdres on peut obtenir un cube. Les faces de papier assemblées deux à deux donnent les découpes du cube en moitiés. On retrouve donc et les plots en bois et les découpes en pâte à modeler.

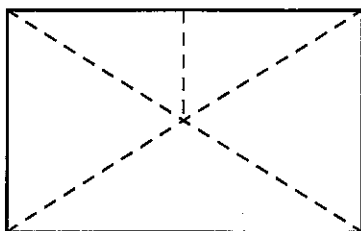


Figure 3. Pliage dans une feuille A4 d'un cornet tétraèdre 1/12 de cube.

Ce pliage, en cornet, repose sur le fait d'appliquer l'un sur l'autre deux huitièmes de la feuille A4. (Entre autres, dans D. Boursin & V. Larose, 1997, pp. 47 à 49. on trouvera des propositions de pliages fondés sur le même principe). On peut obtenir une moitié tétraédrique de ce cornet en coupant la feuille en 2 le long de la ligne du pli rentrant du soufflet. Ce tétraèdre élémentaire est la 24^{ème} partie du cube obtenue par les découpages en moitiés transverses et diagonales aux 3 paires de faces du cube. À partir de ces pièces on peut recombinaison tous les morceaux des découpages obtenus en combinant systématiquement découpes en moitiés transversalement ou en diagonale des faces. Les propriétés de la feuille A4 font que plusieurs de ces combinaisons peuvent s'obtenir par un pliage dans une même feuille A4.

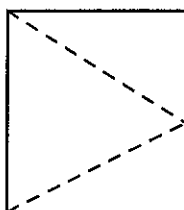


Figure 4. Demi cornet tétraèdre ci-dessus, 1/24ème de cube, la partie que l'on on obtient si on découpe un cube selon tous ses plans diagonaux. 24 est bien entendu égal au nombre d'isométries paires du cube.

Un module de pliage fort intéressant consiste à accoler deux de ces parties dans une feuille A4, pour donner 1/6 de cube.

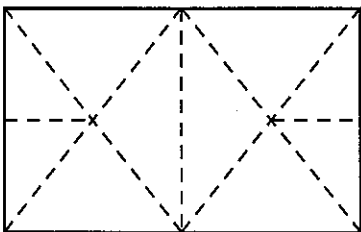


Figure 5. Pliage qui permet d'obtenir un cornet 1/6 dont la face ouverte est une face de cube.

L'intérêt de ce **nouveau jeu de signes de cubes découpés** est multiple. Les figures des plis sont des figures analogues à celles des découpes, en croix, en étoiles, etc. On peut tenter aussi de dessiner les pièces obtenues. Je ne connais pas de matériel de plots qui reproduisent toutes ces découpes et ce n'est pas si facile que cela à fabriquer. Par contre, les découpes dans de la pâte à modeler autant que les pliages sont « à portée de main ». **Ces pliages sont donc en quelque sorte les duaux des découpes.** Souvent, comme c'est le cas dans les pliages cités du livre de D. Boursin et V. Larose cité ci-dessus, on parle de « partition de cubes », à mon avis ce terme masque la dualité que je veux souligner ici. Cela masque aussi ce que le pliage produit, et qui est lié aux phénomènes décrits ci-dessus à propos des matériels genre polydrons⁷².

⁷² Dans beaucoup de livres consacrés à la confection de tels modèles, les phénomènes qui apparaissent lors des manipulations – et certains sont « mathématiques », comme celui relatif aux angles dièdres – sont ramenés et enfouis dans les productions qui sont proposées. Pourtant ce sont bien ces phénomènes qui les rendent

J'ai dit que les découpes donnaient des formes approximatives, grosso modo leur forme est rendue mais pas leur dimension. Les pliages, eux, restituent bien les dimensions. Par contre les assemblages des tétraèdres (ci-dessus, 1/12 ou 1/24) qui permettent d'obtenir les fractions de cube demandent à être dirigés par le système des découpes. Et bien entendu ce travail implique quelques considérations sur les fractions.

Un dernier point me semble essentiel au vu de l'étude des solides, et c'est ce qui me fait écrire qu'il y a **dualité** entre les découpes dans la pâte à modeler et les pliages. Lorsque je découpe un tel solide, le plan de coupe produit les faces de chacun des deux morceaux. Comme je l'ai dit plus haut, sur le matériau de la pâte à modeler il va falloir les décoller. À l'inverse, le pliage et le réassemblage procèdent en appliquant (recollant) l'une sur l'autre deux faces (en gommant ce que la découpe a ou aurait produit). Ceci est en rapport direct avec l'idée que l'on crée du volume en l'enfermant dans une surface ou qu'on développe un volume en l'ouvrant – en le déchirant par exemple, afin de l'aplatir, ou alors qu'on l'écrase et l'aplatit en faisant se superposer quelques parties écrasées. Ces jeux de signes de volumes sont donc étroitement reliés à des phénomènes dont nous avons tous quelque expérience dans la vie de tous les jours.

Les jeux de plots, de pièces polydrons, de pliages, de dessins, fonctionnent chacun comme des mondes relativement autonomes. Ils sont tous évoqués en classe une fois ou l'autre ne serait-ce que superficiellement et évasivement. Mais ils renvoient à des objets mathématiques permettant d'appréhender schématiquement des choses très concrètes. C'est donc ce jeu d'autonomie du signe par rapport à son objet qui le rend disponible à des figures du monde dont l'étude de O. Keller nous entretient qui a retenu toute mon attention.

V Conclusion.

Lorsqu'on veut enseigner les mathématiques aux élèves on est amené à chercher avec eux un socle d'évidences en général intuitives afin de contrôler l'ancrage des savoirs que l'on veut faire apprendre aux connaissances disponibles. Cette manière de faire, qui ressort d'une didactique toute intuitive, rencontre deux problèmes :

1° Ce que le savoir tient pour être des évidences sont toujours des faits déjà analysés et finement différenciés, en quelque sorte rendus ponctuels alors que les connaissances intuitives sont essentiellement indifférenciées et confuses : on réduit les évidences à leur caractère empirique⁷³. L'exemple de la confusion entre caractère plan ou non d'un assemblage de plaques de polydrons et sa rigidité est à ce propos tout à fait parlant, mais il en va de même de tout ce qui concerne les figures géométriques, qui n'ont pas d'épaisseur, ou pour ce qui en est des figures planes qui n'ont pas de seconde face au verso. Etc.

2° Le second problème est que les évidences auxquelles on fait ainsi appel dans les échanges didactiques sont symboliques, je veux dire par là qu'elles ne sont pas questionnées, et qu'elles ne font que poser les limites de ce qui sera pris en considération, elles filtrent, trient a priori entre ce qu'on tiendra pour évident et qu'on gardera et ce qu'on tiendra pour non pertinent et qu'on rejettera.

Ma conception du développement des savoirs est qu'il est illusoire de croire pouvoir ne s'en tenir qu'à des dérivations à partir d'évidences posées comme prémisses, mais que tout

possibles. Il y a là une manière de réduction : les nécessités mathématiques que ces productions signifient aux auteurs, qui eux ont passé pas mal de temps à apprendre à les confectionner, s'estompent aux yeux des lecteurs derrière de simples constats empiriques. Il faut prendre en compte que ces productions ne peuvent pas avoir la même valeur pour l'auteur, qui présente son art, et le lecteur qui ne s'y adonnera que symboliquement et très superficiellement. On retrouve ici ce que j'ai dit du caractère symbolique des activités scolaires. Telles sont les réalités didactiques !

73 Et on les dénature alors parce qu'elles ne sont plus que des constats.

développement au-delà de telles prémisses s'accompagne, comme par répercussion, d'un réexamen des connaissances et intuitions qui se situent en deçà des seuils ainsi fixés. Le savoir sert aussi à revisiter les connaissances qui l'ont précédé. Le développement des savoirs est pour moi essentiellement bouclé, entraînant aussi des révisions de ce qui était déjà connu avant lui.

Je trouve dans le travail de O. Keller une enquête sur ce qui a précédé la géométrie euclidienne devenue domaine des mathématiques autonomes. Je trouve donc une enquête qui tente de remonter le plus loin qu'il se peut à partir des évidences posées par les *Éléments*, et qui cherche à identifier de quoi ces évidences se sont détachées, permettant à la géométrie de prendre tout son essor. Je vois ici une analogie avec mes propres recherches en didactique des mathématiques, et la direction que le fait de me trouver confronté à des élèves en grande difficulté m'a fait prendre : profiter de ce qui paraît évident aux élèves comme à moi pour révéler la richesse des connaissances sur lesquelles l'enseignement peut tabler au lieu de leur seriner sempiternellement les mêmes bases sans jamais réussir à leur donner ancrage. Et ceci pour la raison toute simple qu'avant de pouvoir opérer de tels ancrages, il faudrait un tant soit peu savoir dans quoi ils pourraient le faire. Cela suppose qu'on ne passe pas trop vite sur ce que chacun trouve évident mais qu'on sache trouver des situations qui permettent de travailler les évidences par l'expérience et l'exploration et qu'on y consacre suffisamment de temps.

VI Bibliographie

1. Textes cités

Olivier Keller, 2004, *Aux origines de la géométrie. Le paléolithique. Le mode des chasseurs cueilleurs*, Vuibert.

Olivier Keller, 2006, *La figure et le monde. Une archéologie de la géométrie. Peuples paysans sans écriture et premières civilisations*, Vuibert.

2. Textes mentionnés

Didier Boursin & V. Larose, 1997, *Pliages et mathématiques*, Paris, ACL-Éditions.

François Conne :

- 2008a, L'expérience comme signe didactique indiciel, *Recherches en Didactique des mathématiques*, n° 28-2, pp. 219-264, Grenoble, La Pensée Sauvage.

- 2008b, Coupes sémiotiques, In *Le film de classe. Étude sémiotique et enjeux didactiques*. Jean-Pierre Sautot, éd., pp. 105-142, Limoges, Lambert-Lucas.

- 2007 Quelques pas esquissés dans l'univers des polyèdres. Suivi de situations de dessin en 4^{ème} primaire de l'enseignement spécialisé. In *Difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques. Hommage à Gisèle Lemoyne*. Collectif sous la direction de Jacinthe Giroux et Diane Gauthier. Montréal 2007, chap 9, pp.219-256.

Thierry Dias, 2006, Présentation du corpus de mathématiques polyèdres, in *Interactions verbales, didactiques et apprentissages*, Guernier M.-C., Durand Guerrier V. & Sautot J.-P. eds, Presses universitaires de Franche Comté.

Ddmes, 2005, L'enseignement spécialisé, un autre terrain de confrontation des théories didactiques à la contingence. *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques année 2003*, Durand Guerrier V. & Cl. Tisseron eds., Cahier Didirem, Paris VII, pp. 77-171.

Raymond Duval, 1995, *Sémiosis et Pensée humaine*, Berne, Peter Lang.

Séminaire d'octobre 2008

18 et 19 octobre 2008

La documentation des professeurs de mathématiques

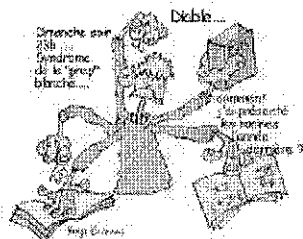
Ghislaine Gueudet

CREAD

IUFM de Bretagne – Université de Bretagne Occidentale

et Luc Trouche

EducTice (INRP) et LEPS (Université Lyon 1)



Résumé

Les professeurs ont à faire avec des *ensembles de ressources* : un manuel scolaire, les programmes officiels, un logiciel sont, bien entendu, des ressources pour le professeur. Celles-ci relèvent de ce que les travaux anglo-saxons nomment le *curriculum material* (Remillard 2005). Mais une copie d'élève, un conseil donné par un collègue... constituent également des ressources, au sens de ce qui *re-source* l'activité et le développement professionnel (Adler 2000). Ces ressources sont à prendre en compte dans la situation du professeur comme des éléments essentiels du milieu (Margolinas 2002).

La communication s'intéressera au *travail documentaire* des enseignants : collecter des ressources, les sélectionner, les transformer, les recomposer, les partager, les mettre en œuvre, les réviser... La *documentation*, qui désigne simultanément ce travail et son produit, se déploie dans le temps et dans l'espace, hors classe comme en classe. Elle est à la fois le *résultat* et le *moteur* des interactions du professeur avec le milieu ; elle est ainsi au cœur de son développement professionnel.

Nous proposerons une approche théorique pour l'étude de cette documentation (Gueudet & Trouche 2008b), de ses aspects individuels et de ses aspects collectifs. Y voyant des éléments précurseurs, et accélérateurs, des changements à venir, nous examinerons particulièrement les conséquences de l'essor du numérique sur les formes du travail des enseignants (Bueno-Ravel & Gueudet 2008), sur les communautés qu'ils constituent, sur la structure et la dynamique de la documentation qui en résulte (Guin et al 2008).

Un site web est dédié à l'approche documentaire. Il présente les éléments essentiels de cette approche, ses développements en cours, un ensemble de références et de travaux qui y sont liés.

http://educmath.inrp.fr/Educmath/recherches/projets-de-recherche/approche_documentaire

Mots clefs

Activité des professeurs, Communautés de pratique, Documentation, Développement professionnel, Genèses documentaires, Invariants opératoires, Ressources.

I Toile de fond et historique de la réflexion

Le 24 septembre 2008 s'est tenue à Paris une journée de réflexion intitulée « Associations d'enseignants et travail collaboratif : quels modèles ? », journée organisée par trois associations d'enseignants : les Clionautes, Sésamath et Weblettres, et l'INRP (Gueudet & Trouche, à paraître). Ces trois associations « en ligne » proposent des ressources pour les enseignants, élaborées par des enseignants. Sur les sites de ces associations, on trouve ainsi des ressources issues de la mutualisation, mais aussi d'un travail coopératif, ou collaboratif. Ce phénomène est d'importance : chaque mois, le site web des Clionautes enregistre ainsi 110 000 visiteurs ; celui de Sésamath 1 000 000 et celui de Weblettres 250 000.

Au-delà des chiffres, ce phénomène français témoigne d'évolutions internationales, dont nous retenons les dimensions suivantes :

- de plus en plus de ressources en ligne sont disponibles pour les professeurs, qui font face à un réel foisonnement de l'offre disponible (Artigue & Gueudet 2008) ;
- l'institution prend en compte ce foisonnement, avec des projets de « plate-forme de présentation et d'identification des ressources », de « labellisation », et des clefs USB fournies aux nouveaux enseignants, qui contiennent et donnent accès à certaines ressources (mission e-Éduc 2008).
- l'accès à Internet a modifié les processus collectifs dans l'activité professionnelle des professeurs ;
- la frontière entre ce qui est dédié à être en ligne et ce qui ne l'est pas s'estompe progressivement : la plupart des ressources papier actuelles ont existé, à un moment ou l'autre, sous forme numérique, et comme telles, peuvent donner lieu à une mise en ligne.

Il est donc essentiel que la recherche en didactique s'empare de ces phénomènes. Ceux-ci ont été jusqu'alors abordés par des courants de recherche distincts :

- d'abord dans le domaine de la recherche en éducation mathématique, à travers les recherches sur les TIC, leur intégration en classe (dans lesquelles la recherche française a d'ailleurs joué un rôle important (Guin & Trouche 2002) et les recherches sur le *curriculum material*, développées plutôt dans le monde anglo-saxon (Ball & Cohen 1996, Remillard 2005, Ruthven 2008) ;
- ensuite dans le domaine des recherches sur les pratiques, les connaissances professionnelles et le développement professionnel des professeurs, recherches actives en France (Sensevy, Mercier & Schubauer-Leoni 2000, Vandebrouck 2008) mais largement au-delà aussi (Cooney 1999 ; Ball, Hill & Bass 2005) ;
- enfin, d'autres champs de recherche sont concernés par les ressources : l'informatique, l'ergonomie, l'ingénierie documentaire etc. (Baron, Guin & Trouche 2007).

Il est donc sans doute nécessaire de développer une approche théorique spécifique, qui prenne en compte ces aspects multiples et travaille leurs articulations. Lorsque les recherches sur les TIC se sont étendues, l'approche instrumentale a émergé comme réponse à un besoin de nouveaux moyens d'analyse et de compréhension des phénomènes. L'étude des ressources pour l'enseignement met à jour un besoin semblable.

Evidemment la présentation que nous en faisons ci-dessous est une reconstruction *a posteriori* d'un mouvement dans lequel nos travaux se sont inscrits. Nous avons tout d'abord travaillé séparément :

- sur des questions liées à l'intégration des TIC (Guin & Trouche 2002) et sur la formation des maîtres dans le cadre du projet SFoDEM (Guin, Joab, & Trouche 2008) ;
- sur les bases d'exercices en ligne (Cazes *et al.* 2007) et en particulier sur Mathenpoche (noté MEP par la suite, Bueno-Ravel & Gueudet 2008).

C'est à l'occasion de l'école d'été 2007 (Gueudet & Trouche 2008a) que nous avons abordé un questionnement élargi à l'ensemble de la documentation des professeurs de mathématiques. Nous étions responsables du thème « Situations mathématiques et documents pour les professeurs », et y avons présenté un cours intitulé « Vers de nouveaux systèmes documentaires pour les professeurs de mathématiques ». Nous avons depuis l'école d'été 2007 effectué d'autres travaux, porteurs d'évolutions que nous mentionnerons ; cependant ce cours demeure une source essentielle de ce que nous présentons ici.

Nous en retenons un ensemble de données, recueillies à cette occasion : nous avons réalisé une série d'entretiens, avec 9 professeurs, rencontrés à leur domicile (nous nous sommes inspirés pour ce choix d'une méthodologie mise en place par Margolinas *et al.* 2007). L'entretien comportait trois temps : la *présentation* de ce qui a été utilisé pendant l'année pour préparer/faire la classe, puis une *visite guidée* de trois documents les plus importants cette année, enfin un *regard vers le passé et vers le futur*. Nous avons choisi 5 professeurs de collège et 4 professeurs de lycée, qui ne sont ni débutants, ni en fin de carrière ; la plupart ont autour de 40-50 ans. Nous avons de plus été attentifs dans notre choix à trois critères dont nous faisons l'hypothèse qu'ils pourraient avoir une influence sur le travail documentaire : le degré d'intégration des TICE (Assude 2008), les responsabilités institutionnelles (par exemple, l'implication dans la formation continue) et le degré d'implication dans une communauté de professeurs (par exemple MEP ou SFoDEM). Les exemples que nous présenterons par la suite sont, pour la plupart, issus de ces entretiens. Ceci pose, bien entendu, des problèmes méthodologiques : nous nous appuyons sur les déclarations des enseignants, et les ressources transmises, pour reconstruire un processus que nous n'avons pas observé directement, et qui a eu lieu sur des durées importantes. Nous évoquerons plus tard cette limitation, et les nouvelles orientations méthodologiques que nous tentons de développer actuellement.

Ce que nous retenons du cours donné à l'école d'été, c'est surtout un point de vue sur l'activité et le développement professionnel des enseignants. Nous nous intéressons *au travail documentaire* des enseignants : collecter des ressources, les sélectionner, les transformer, les recomposer, les partager, les mettre en œuvre, les réviser... La *documentation* désigne simultanément ce travail et son produit, elle se déploie dans le temps et dans l'espace, hors classe comme en classe. Nous considérons que le travail documentaire est au cœur de l'activité professionnelle des professeurs, et qu'il est également central pour leur développement professionnel. Ce que nous exposons ci-dessous permettra à la fois de préciser et de légitimer ce point de vue.

II Genèses documentaires

Notre point de départ est l'approche instrumentale, telle qu'elle a été développée par Rabardel (1995) en ergonomie cognitive, puis intégrée en didactique des mathématiques (Guin & Trouche 2002). Rabardel distingue un *artefact*, disponible pour un utilisateur donné, et un *instrument* que cet utilisateur construit, à partir de cet artefact, dans le cours de son action située. Ces processus de développement, les *genèses instrumentales*, reposent, pour un individu donné, sur l'appropriation et la transformation de l'artefact, pour résoudre un problème donné, à travers une variété de contextes d'usage. À travers cette variété de contextes se constituent des *schèmes* d'utilisation de l'artefact. Un schème (Vergnaud 1996) est une organisation invariante de l'activité, qui comporte notamment des règles d'action, et est structurée par des *invariants opératoires* qui se forment au cours de cette activité, dans différents contextes rencontrés pour la même classe de situations. On peut alors proposer une définition synthétique : *instrument* = *artefact* + *schème*. Cette approche distingue aussi, au

cœur des genèses instrumentales, deux processus imbriqués, les processus *d'instrumentation* (constitution des schèmes d'utilisation des artefacts) et les processus *d'instrumentalisation* (par lesquels le sujet met à sa main les artefacts) ; c'est la dialectique profonde instrumentation/instrumentalisation qui est au cœur des genèses instrumentales.

Nous voulons aller plus loin, en montrant que les concepts de genèse, d'instrumentation et d'instrumentalisation sont pertinents, plus généralement, pour fonder une approche documentaire du didactique. Les évolutions actuelles des ressources disponibles pour les professeurs nous semblent nécessiter une approche prolongeant l'approche instrumentale, mais prenant, de plus, en compte les différents champs de recherche déjà évoqués (§1).

Nous considérons que le professeur a à faire avec des *ensembles de ressources*. Nous conférons à ce terme de ressource une acception très large : un manuel scolaire, les programmes officiels, un logiciel sont, bien entendu, des ressources pour le professeur (celles-ci relèvent du curriculum material évoqué ci-dessus). Mais une copie d'élève, un conseil donné par un collègue... constituent également des ressources, au sens attribué à ce terme par Adler (2000) : ce qui *re-source* l'activité et le développement professionnel des enseignants. Le professeur, dans son travail documentaire, dispose, pour une classe de situations donnée, d'un ensemble de ressources de diverses natures. En introduisant un vocabulaire nouveau, inspiré de l'ingénierie documentaire (Pédaque 2006, Crozat, in Baron, Guin & Trouche 2007), nous considérons que cet ensemble de ressources donne naissance, pour cette classe de situations, au cours d'une *genèse documentaire*, à un *document* (figure 1).

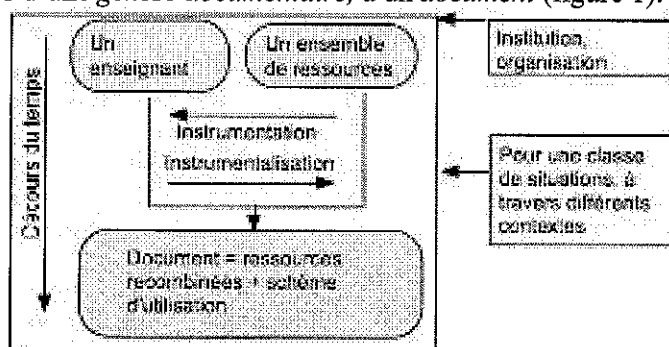


Figure 1. Représentation schématique de la genèse d'un document

Le travail documentaire du professeur est le moteur d'une genèse documentaire, qui développe conjointement une nouvelle ressource (composée d'un ensemble de ressources sélectionnées, modifiées, recombinaées) et un schéma d'utilisation de cette ressource. Nous pouvons, pour le moment, représenter, de manière très simplifiée, ce processus par l'équation :

$$\text{Document} = \text{Ressources} + \text{Schéma d'utilisation.}$$

Voici un premier exemple issu de nos entretiens : Frédéric, 50 ans, collège, participation à des groupes IREM, faible degré d'intégration des TIC⁷⁴. Il nous a présenté un exercice qu'il utilise pour l'introduction de la racine carrée. Il nous a déclaré l'exploiter depuis plus de dix ans (d'abord en quatrième, et maintenant en troisième, suite aux évolutions du programme). Il l'avait trouvé à l'origine dans un manuel (il garde dans un classeur les différents supports relatifs à cette activité, dont la photocopie de la page de manuel d'origine). Cet exercice porte sur l'aire de carrés (figure 2). On donne aux élèves différentes mesures du côté de carrés ; ils doivent calculer les aires correspondantes, puis placer sur un graphique les points associés.

⁷⁴ Lorsque nous évoquons pour la première fois un enseignant interviewé, nous précisons : son âge, s'il exerce en collège ou en lycée, ses éventuels engagements collectifs et responsabilités institutionnelles et son degré d'intégration des TIC.

Ces points sont alors joints approximativement ; et la courbe obtenue est utilisée pour déduire des mesures de côtés fournissant une aire donnée. Ces mesures sont alors comparées avec des valeurs numériques obtenues par la touche $\sqrt{}$ de la calculatrice.

II) ① Sur du papier millimétré, tracer deux axes perpendiculaires se coupant en O. [l'unité est le centimètre] *→ laissa de bon choix.*

② Placer les points de coordonnées $(2, a^2)$. *A. Repère.*

③ Tracer à main levée la courbe passant par ces points.

④ Marquer le nombre 3 sur l'axe des ordonnées.

- Quelle est la valeur correspondante à 3 sur l'axe des abscisses? *≈ 1,7*

- Avec une calculatrice, donner la valeur approchée à 0,1 près de $\sqrt{9}$? *≈ 3,0*

⑤ Compléter le tableau suivant à l'aide du graphique :

Aire du carré	2,25	4	4,8	9	10	15
Mesure du côté du carré	1,5	2	2,2	3	3,2	3,9

- Compléter le tableau suivant à l'aide d'une calculatrice :

Aire du carré	2,25	4	4,8	9	10	15
Mesure du côté du carré	1,5	2	2,2	3	3,2	3,9

Figure 2. Frédéric, extrait d'une fiche élève annotée par le professeur pour une préparation ultérieure

Nous n'avons pas observé Frédéric durant ces dix années ; en nous basant sur ses déclarations, nous faisons toutefois l'hypothèse que Frédéric a développé, au fil des années, pour la classe de situations « concevoir un exercice pour introduire la racine carrée », un document. L'ensemble de ressources qui donne matière à ce document, en 2007-2008, comporte la page de manuel initiale ; la fiche élève de l'année précédente, remplie avec les valeurs numériques à trouver et annotée en fonction d'observations faites en classe ; un transparent avec les points placés et la courbe qui les joint, mais aussi les calculatrices des élèves... Le document développé comporte une part matérielle issue de ces ressources et un schème. A propos de ce schème, les données dont nous disposons nous conduisent de plus à inférer la présence d'invariants opératoires du type :

- « l'introduction d'une nouvelle notion se fait avec le support d'une activité qui met en évidence le sens de cette notion et s'appuie sur un contexte connu » (invariant général) ;
- « la racine carrée est le processus inverse du carré », « chercher la mesure de la longueur du côté d'un carré, pour une aire donnée, permet de mettre en évidence le sens de la racine carrée », « la touche racine carrée de la calculatrice permet d'introduire le symbole $\sqrt{}$ » (invariants spécifiques au contenu mathématique en jeu).

Ces invariants sont des connaissances (que l'on peut considérer comme des convictions ou des croyances) professionnelles qui ont probablement amené le choix initial de cette page de manuel, et des adaptations qui y ont été faites, dans un mouvement d'instrumentalisation. Mais les versions successives de cette activité ont aussi sans doute contribué au renforcement de ces convictions, dans un mouvement d'instrumentation.

Rabardel (1999, p. 212) ne considère pas, pour un sujet donné, des instruments isolés, mais des systèmes d'instruments, qu'il définit ainsi : « l'ensemble organisé des moyens disponibles pour l'activité du sujet en fonction des tâches et des contextes ». De même, les observations que nous avons réalisées mettent en évidence qu'un document ne vit pas isolé et nous conduisent à introduire la notion de *système documentaire*. Les documents des professeurs

que nous avons rencontrés sont organisés et articulés entre eux. Comment analyser la structure d'un tel système ?

Des articulations apparaissent au niveau matériel, lorsque l'on considère les ressources du professeur : papier et numérique sont associés, les fichiers sont rangés en dossiers et sous-dossiers sur l'ordinateur. Mais les articulations entre documents vont certainement au-delà. En effet, l'étude des schèmes développés pour ces classes de situations conduit à expliciter des invariants opératoires, dont certains ont une portée qui dépasse la classe de situations concernée. Donnons un premier exemple, dans le cas de Marie-Françoise : 54 ans, lycée, ex-formatrice SFoDEM et animatrice IREM, formatrice en formation continue, fort degré d'intégration des TIC. Lorsqu'elle introduit les nombres complexes en Terminale S, Marie-Françoise met en avant l'interprétation géométrique. Elle va même au-delà de ce que requiert le programme, choisissant des textes historiques orientés vers cette interprétation géométrique (Argand). Nous pouvons en inférer la présence d'un invariant opératoire : « l'interprétation géométrique doit être mise en avant pour l'introduction des nombres complexes ». Mais cet invariant peut aussi être considéré comme une instanciation, dans le cas des complexes, d'un invariant plus général : « l'interprétation géométrique doit être mise en avant pour l'introduction d'une notion nouvelle, dès que cette possibilité existe ». L'emploi d'une telle interprétation, dans le cas des systèmes d'équations, semble confirmer cette hypothèse.

La structure du système documentaire est liée à la structure des activités professionnelles du professeur. Rabardel et Bourmaud (2005) mettent ainsi en relation la structure des systèmes d'instruments avec celle de l'activité professionnelle des sujets. Les situations d'activité professionnelles sont d'abord regroupées en *classes de situations*, qui vont donner matière au développement d'un même schème. Rabardel et Bourmaud proposent de regrouper ensuite ces classes de situations en *familles d'activités*, qui correspondent à un même type de finalité générale de l'action. Déterminer ces familles d'activités, pour les professeurs, est complexe. La recherche d'invariants opératoires communs à plusieurs classes est susceptible d'éclairer les regroupements pertinents.

La prise en compte, non pas de documents isolés, mais de systèmes documentaires, est un point fondamental de notre approche. Une autre dimension essentielle est la prise en compte des évolutions temporelles. Les genèses documentaires sont toujours à comprendre comme des processus en œuvre : un document est développé à partir d'un ensemble de ressources, à travers une variété de contextes d'usage, pour une même classe de situations. Ce document va à son tour donner matière à de nouvelles ressources. Nous représentons ce processus sous la forme d'une hélice (figure 3).

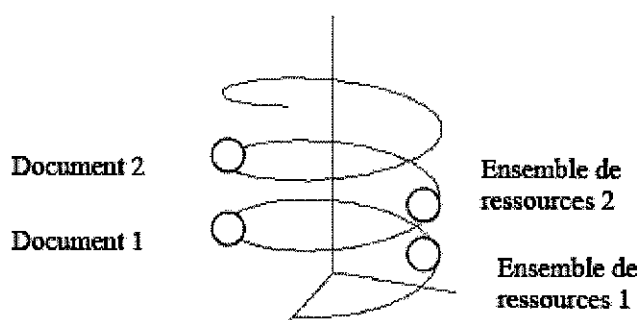


Figure 3. Dialectique ressources/document et évolution temporelle

Ces phénomènes sont une manifestation de la *conception dans l'usage* (Rabardel 2005) : les ressources sont modifiées, recombinaées au fil de leur utilisation, les processus de conception

se poursuivent dans l'usage. Ainsi, dans le cas de Marie-Françoise, qui pratique les narrations de recherche, une idée de problème ouvert peut constituer une ressource, qui, associée à d'autres ressources (supports matériels, par exemple), va être engagée dans le développement d'un document. Celui-ci va produire de nouvelles ressources, par exemple les productions d'élèves associées, qui seront engagées dans le développement d'un nouveau document. Notons que nous ne présentons pas ici l'idée de problème ouvert comme le point de départ d'un processus ; il faudrait, pour ce faire, identifier un instant initial, or l'idée de problème ouvert peut elle-même provenir de différentes sources.

La présentation de ces premiers concepts nous permet de préciser en quoi l'approche documentaire est une approche du développement professionnel des professeurs, et quel point de vue cette approche propose sur ce développement professionnel. Nous nous référons en particulier à la dialectique du *productif et du constructif* (Rabardel 2005), à l'œuvre dans tout processus de développement : une activité est finalisée, elle a un objectif de production (réalisation d'une tâche donnée). Dans cette activité, le sujet se développe aussi lui-même et modifie donc les conditions de productions ultérieures. Cette dialectique a déjà été employée pour l'étude du développement professionnel des professeurs de mathématiques, en particulier par Abboud-Blanchard, Cazes et Vandebrouck (2008). Dans une perspective d'approche documentaire, le développement d'un document comporte clairement une part productive et une part constructive ; en particulier, l'évolution associée des connaissances professionnelles relève d'une dimension constructive. Ainsi l'étude du développement professionnel doit être combinée avec celle du système documentaire.

Considérons un exemple issu des entretiens que nous avons menés : le cas de Benoîte, 52 ans, collègue, inscrite sur MEP réseau, degré moyen d'intégration des TIC. Benoîte a mis en place des séances de calcul mental en classe entière, s'appuyant sur des diaporamas (figure 4) qu'elle projette dans une salle équipée d'un vidéo-projecteur et d'un ordinateur. Il y a deux ans, dans les mêmes conditions, elle ne pratiquait pas ces séances. C'est une collègue, Sophie, qui lui a donné cette idée (Sophie a elle-même pris ces diaporamas à l'origine sur le site de Sésamath). Désormais Benoîte et ses élèves apprécient ces moments de calcul mental. Ceci conduit Benoîte à faire plus de calcul mental qu'auparavant, avec des diaporamas qu'elle a construits en s'inspirant de ceux transmis par Sophie.

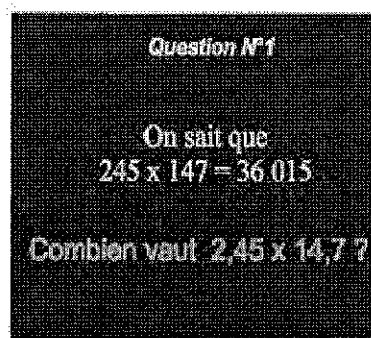


Figure 4. Diaporama de calcul mental en 6e, Benoîte.

Benoîte a développé un document, pour une classe de situations relative à l'enseignement du calcul mental en 6e. Ce développement est porteur d'un développement professionnel à long terme : Benoîte porte désormais un nouveau regard sur le calcul mental, qui affecte peut-être encore plus généralement son approche des calculs avec les élèves. Il s'agit ici d'une évolution du système documentaire de Benoîte, correspondant à l'intégration d'une nouvelle ressource. Dans notre approche, une telle intégration signifie que la ressource concernée fait partie d'un ensemble de ressources à partir duquel sera développé un document. Ce document

doit pouvoir prendre place dans le système documentaire, c'est-à-dire qu'il doit y avoir compatibilité au niveau matériel (pour Benoîte, présence dans sa salle d'un vidéo-projecteur, d'un ordinateur), mais également au niveau des connaissances professionnelles (« les élèves développent des procédures de calcul mental s'ils sont obligés de calculer en temps limité »). Ainsi l'étude de la structure du système documentaire est à même d'éclairer les processus d'intégration ou de non-intégration de ressources ; au-delà, il constitue une forme d'étude du développement professionnel.

Nous nommons *approche documentaire du didactique* l'approche dont nous avons présentés ici les concepts élémentaires ; pour un exposé plus détaillé de ces concepts, et d'autres exemples, nous invitons le lecteur à se reporter à (Gueudet et Trouche, online).

III Genèses documentaires communautaires

Nous voulons aborder ici les aspects collectifs de la documentation des professeurs, dont l'essor semble être fortement lié au développement du numérique. C'est ce que relève le récent rapport Pochard (2008). C'est aussi un point fort qui se dégage des travaux du Réseau Thématique Pluridisciplinaire (Pédaque 2006) : « Voilà donc ce que change la numérisation : elle fabrique des communautés virtuelles, flottantes, illimitées, insaisissables, mieux qu'aucun livre », évolution qui débouche sur une nouvelle définition du document : « Document = contrat entre les hommes ».

3. Collectifs enseignants et communautés de pratique

Ces aspects apparaissent dans les entretiens que nous avons eus avec les professeurs. Sonia (50 ans, enseignant en collège, associée à la cellule TICE de son académie) nous dit par exemple « On est 5 profs, on est deux à bosser ensemble, on fonctionne le soir, on s'envoie des choses direct par mel... ». L'aspect collectif est évidemment encore plus fort au sein des associations d'enseignants. Pour préparer la conférence que nous avons faite lors de la journée inter-associations, le 24 septembre dernier (Gueudet & Trouche, à paraître), nous avons interrogé, par questionnaire, des enseignants. Ceux-ci nous avaient été proposés par les responsables de ces associations, représentatifs des différents cercles, des simples utilisateurs aux membres les plus actifs. Toutes les réponses témoignent d'un intérêt fort pour le travail collectif de documentation ; reviennent très régulièrement en particulier les notions de « don, gratuité, partage, ouverture sur le travail des autres... ».

Dans tous les contextes où elle est évoquée, la documentation commune apparaît intéressante pour celui qui s'y implique, liée à un *engagement* commun, coûteuse en temps, et enfin complexe à organiser dès lors qu'elle réunit plus de 3 personnes. Pour analyser ces aspects collectifs, plusieurs approches théoriques pourraient être envisagées (Gueudet & Trouche 2008b), il nous semble que le cadre des *communautés de pratique* (Wenger 1998) convient bien au contexte des regroupements professionnels au cœur de notre étude. Pour Wenger, on peut parler de communautés de pratique dès lors que trois conditions sont réunies, que nous illustrons avec des extraits des réponses de nos questionnaires aux associations d'enseignants :

- un *engagement* commun : on le retrouve dans les expressions « une passion commune », « une vision commune », « une envie très forte », « une envie, un besoin, d'un grand nombre de personnes » ;
- la *participation* active à une entreprise collective : là aussi, les illustrations sont nombreuses, par exemple « un démon, celui du partage », « participation active à un ouvrage collectif », « élaborer ensemble un ensemble de ressources » ;

- enfin la *production d'objets* (symboles, gestes, documents...) qui réifient des éléments de pratique, le développement d'un répertoire partagé qui intègre les résultats de ce processus de réification, processus et résultats que traduit bien la phrase d'un professeur interrogé : « cette communauté géante, cette salle des professeurs immense, cette banque où piocher ».

Ces critères sont relativement précis : tout regroupement professionnel ne constitue pas, en soi, une communauté de pratique. L'intérêt de ce cadre n'est pas de permettre une sélection entre ce qui serait, et ce qui ne serait pas, une communauté de pratique, mais plutôt de donner des moyens pour repérer des évolutions de collectifs divers, pour analyser les processus à l'œuvre au sein de ces collectifs. Wenger met en évidence, en particulier, les relations dialectiques entre participation et réification. Un équilibre est nécessaire entre les deux processus, trop de l'un peut étouffer l'autre : la réification n'est pas une production d'objets inertes, elle doit produire des objets vivants, reconnus (Honneth 2005) par les membres de la communauté comme résultat actuels, donc provisoires, d'une histoire commune.

Ce cadre des communautés de pratique convient bien à notre étude, articulant participation à un collectif et production d'objets partagés qui deviennent les *ressources* de la communauté.

4. Genèses documentaires et communautés

Il est clair, bien sûr, qu'aucune genèse documentaire individuelle n'est isolée. Toutes sont *contraintes* par un cadre institutionnel, toutes *bénéficient* de ressources d'autrui (les élèves dans la classe, les professeurs rencontrés dans l'établissement, l'expérience professionnelle et l'expertise didactique incorporées dans les ressources empruntées sur la Toile...). Le cadre des communautés de pratique nous permet de concevoir un nouveau modèle, de préciser des concepts, de regarder des processus dans un cadre assez bien défini, avec une hypothèse forte :

- les genèses documentaires sont des processus profonds (une enseignante interrogée nous dit « partager des exercices avec des collègues, oui, mais la préparation des cours, ce n'est pas possible, c'est trop personnel... ») ;
- l'existence d'éléments significatifs de genèses documentaires collectives suppose donc engagement, participation, constitution d'un ensemble de ressources partagées, c'est-à-dire une communauté de pratique.

Adaptant la figure 1, nous distinguerons (figure 5), pour une communauté de pratique enseignante :

- un *vivier de ressources* : ce sont les ressources mises explicitement en partage pour l'organisation de l'enseignement ;
- le *répertoire* de la communauté : il excède le vivier de ressources, c'est tout ce que produit le processus de réification (mots, histoires, gestes, attitudes, symboles...) ;
- des *invariants opératoires* communs, c'est-à-dire des éléments communs dans les schèmes documentaires qui pilotent la documentation des enseignants. C'est évidemment la partie la plus complexe, nous allons illustrer cela par un exemple fondateur, le SFoDEM, qui servira ici à illustrer un modèle d'autant plus facilement qu'il a grandement contribué à le fonder.

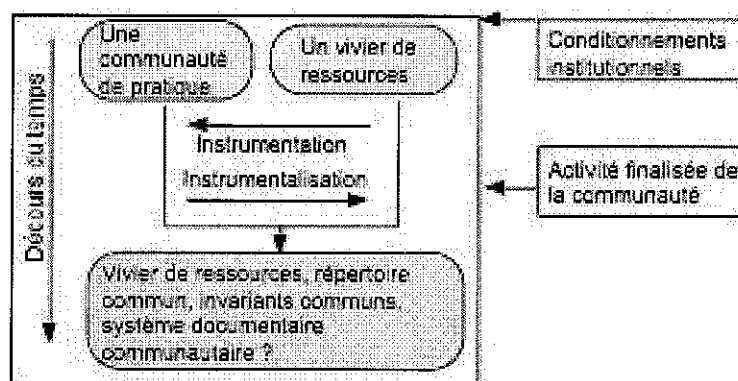


Figure 5. Éléments d'une genèse documentaire communautaire

5. Le cas du SFoDEM

Le SFoDEM (Suivi de Formation à Distance pour les Enseignants de Mathématiques), dispositif développé par l'IREM de Montpellier entre 2000 et 2006, a déjà été présenté à plusieurs occasions (Guin *et al.* 2008, Guin & Trouche 2008). Dispositif de formation à l'intégration des TICE dans la classe de mathématiques, il était basé sur le principe de la conception collaborative de ressources pédagogiques, expérimentées en classe, critiquées et révisées dans chaque groupe. Le SFoDEM était constitué à l'origine de 5 groupes spécifiques (constitués autour d'un thème mathématique, d'un ensemble de technologies et d'un dispositif d'intégration technologique : par exemple la géométrie, les logiciels de géométrie dynamique et la vidéo projection). Le temps long du SFoDEM (7 ans) a permis l'émergence, au sein de chaque groupe de formation, de réelles communautés de pratique : même si chaque groupe était fortement renouvelé chaque année, des engagements communs, réifiés dans une charte, ont pu donner un cadre à une participation réelle à la conception de ressources partagées. Le SFoDEM apparaît ainsi comme une *constellation* de communautés de pratique *cultivées* (Wenger *et al.* 2002).

Le SFoDEM était un dispositif hybride, avec des séances en présence et un travail continu à distance via une plate-forme. Pour chaque groupe, se constitue un *vivier de ressources* partagées : elles évoluent au fil des expérimentations et de l'expérience du dispositif. C'est donc un ensemble composite : certaines ressources sont à l'état de germe (une idée de problème, une animation géométrique), d'autres ressources, après plusieurs expérimentations, sont sous une forme « complète », qui réalise un certain consensus dans le groupe.

La vie propre des groupes produit davantage que des ressources : tout un *répertoire* émerge de l'expérience partagée. Par exemple la notion de « germe » de ressource apparaît vite fructueuse, permettant d'initier la conception collaborative au sein des groupes très en amont

de la ressource finale. Dès lors, le mot de « germe » devient un mot partagé dans tous les groupes, il évoque bien plus que le sens courant du mot, c'est une partie des conditions de viabilité de la collaboration qu'il encapsule. La constitution du répertoire accompagne celle du vivier de ressources : ainsi la notion de *scénario d'usage*, description des conditions possibles de mise en œuvre d'une situation mathématique dans la classe émerge comme une nécessité pour transmettre à d'autres l'expérience du concepteur initial. Apparaissent ainsi successivement des besoins pour la description ou la structuration des ressources, qui vont être décrits par des expressions communes et participer à la structuration des ressources. Un modèle des ressources émerge, correspondant à chaque étape de développement des communautés de pratique impliquées. Il se compose (figure 6) d'un ensemble d'éléments qui apparaissent vite indissociables. Le CV (curriculum vitae d'une ressource) apparaît en dernier, il est, d'une certaine façon, la clé de voûte de ce modèle, donnant corps à la notion de « vivier » de ressources.

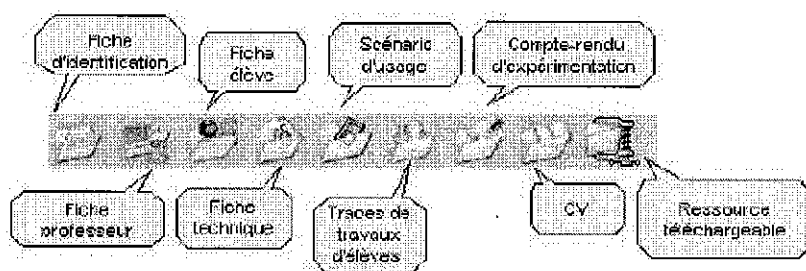


Figure 6. Le modèle de ressources du SFoDEM en 2006

Si l'on veut analyser plus profondément les processus à l'œuvre, avoir accès à certains invariants opératoires, il faut regarder non plus l'ensemble du SFoDEM, mais chacun des groupes qui le composent, c'est-à-dire se placer au niveau des communautés de pratique. Ainsi, dans le groupe dédié à l'intégration des logiciels de géométrie dynamique, le travail documentaire commun passe par plusieurs étapes successives : choix d'un problème mathématique, réflexion sur la contribution possible d'un logiciel de géométrie à l'exploitation de cette situation en classe, écriture d'une « fiche » à destination des élèves, conception *a priori* de *scénarios d'usage*, mise en œuvre effective de la ressource dans chacune des classes, discussion collective sur les effets de cette mise en œuvre, écriture d'une fiche à destination d'un autre professeur (proposant des variables possibles pour le scénario, avertissant d'éventuelles difficultés), réflexion sur les liens à établir entre les différentes fiches numérisées, réflexion sur l'indexation de cette ressource. Il apparaît ainsi un ordre commun dans la conception d'un document à partir d'un ensemble de ressources. Cet ordre commun s'appuie sur un ensemble d'invariants opératoires, par exemple : « l'engagement des élèves dans l'étude d'un problème de géométrie suppose une réflexion préalable sur une figure animée de géométrie » ou « le débat scientifique autour de figures de géométrie est efficace mathématiquement s'il est piloté par le professeur s'appuyant sur une seule figure animée ».

Dans la dernière période de son développement, la réflexion du SFoDEM a débouché sur la notion d'assistants méthodologiques, répondant à un double objectif : cultiver les communautés de pratique et appuyer le processus de conception collaborative de ressources pour l'enseignement, c'est-à-dire réguler le jeu participation/réification qui est à la base des communautés de pratique.

6. Documentations individuelles et documentation communautaire

Dans le cas du SFoDEM, il est sans doute possible de parler d'émergence de documents communautaires et donc de systèmes documentaires communautaires. Quelles sont les interactions entre documentation individuelle et documentation communautaire ? Cette question est certainement complexe, et suppose sans doute une analyse plus approfondie des systèmes documentaires, de leur composition et de leur structure. Une étude réalisée dans le cadre d'un master (Sabra 2008) met en évidence une variété de phénomènes : pour un enseignant observé, on remarque une *propagation* d'éléments de structure du système documentaire communautaire vers le système documentaire individuel. Pour un autre enseignant, le système communautaire semble produire des effets de *différentiation* dans le système communautaire individuel.

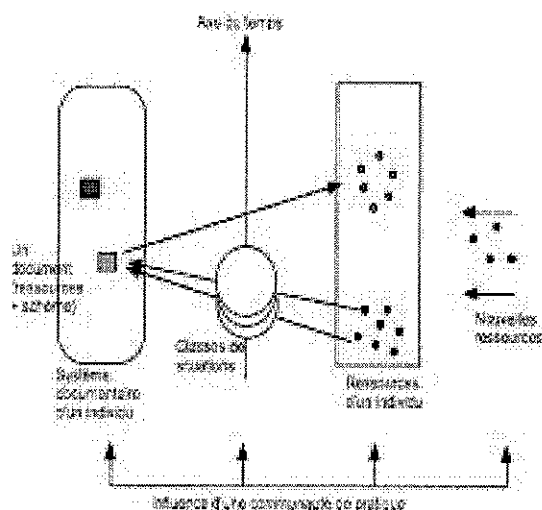


Figure 7. Représentation schématique de l'influence d'une documentation communautaire sur une documentation individuelle

Ces interactions sont certainement complexes, comme nous avons essayé de le représenter sur la figure 7. La communauté a une influence dans quatre aspects au moins des genèses documentaires individuelles : la communauté apporte de nouvelles ressources aux ressources d'un individu (elle augmente ses ressources), elle exploite aussi les ressources propres d'un individu que celui-ci met dans le vivier commun (elle participe à l'évolution et à la réorganisation de ses ressources), elle contribue au renouvellement des classes de situations (d'enseignement) qui mobilisent les ressources, enfin elle participe aussi à l'évolution des documents eux-mêmes à travers les discussions sur la mise en œuvre des ressources.

Élucider ces interactions reste, pour l'essentiel, un travail à faire.

Notons aussi que, dans notre élaboration, nous sommes allés de l'individuel vers le collectif, et nous avons, à ce dernier niveau, précisé de nouveaux concepts (vivier, répertoire). Il serait sans doute nécessaire de revenir au niveau individuel pour étudier les retombées éventuelles du modèle collectif sur le modèle individuel : on pourrait certainement parler de vivier et de répertoire aussi au niveau individuel, c'est, là encore, une étude qui reste à faire.

IV Une approche en construction

Nous avons bien conscience que les questions que nous avons mis à l'étude ensemble depuis deux ans restent, pour l'essentiel, en chantier. Avancer de manière significative supposerait de travailler les articulations avec d'autres approches, qui ont cours en particulier dans notre

communauté, et d'avancer sur les questions méthodologiques : suivre le travail des professeurs dans la classe n'est pas chose facile ; suivre le travail documentaire du professeur dans sa continuité suppose, en plus, de prendre en compte une variété de lieux et de temps, ce qui est, on le comprend bien, particulièrement complexe.

1. Travailler les articulations entre différentes approches

Ces articulations à penser sont nombreuses. Nous ne ferons qu'aborder ici les relations avec la théorie des situations (Brousseau 1998) et avec la double approche (Robert & Rogalski 2002), d'autres articulations sont aussi à penser, en particulier avec l'approche anthropologique.

Les relations avec la théorie des situations sont certainement importantes. Soulignons que le sens du mot *situation*, dans l'expression « classe de situations » à laquelle nous nous sommes référés, est tout à fait différent de celui que retient la théorie des situations didactiques, pour laquelle la situation du professeur est *l'environnement* de celui-ci (Salin 2002). Dans ce cadre, on introduit le concept de *milieu*, qui désigne tout ce qui agit sur un sujet, et ce sur quoi un sujet agit ; le professeur, comme tout sujet, modifie ses connaissances au fil de ses interactions avec un tel milieu (Margolinas 2002). Ceci invite à un rapprochement entre *ressources* et *éléments du milieu* du professeur : les ressources du professeur fournissent un milieu pour son action, aussi bien lorsqu'il prépare la classe (lorsqu'il construit le jeu qu'il va faire jouer aux élèves), que lorsqu'il met en œuvre ce jeu (jeu qu'il doit jouer lui-même en prenant en compte l'ensemble de ses acteurs). Autre aspect mis en lumière par la confrontation des deux approches, l'étude du milieu du professeur a conduit les chercheurs à donner à celui-ci une « épaisseur », traduisant l'épaisseur de l'activité du professeur. Nous n'entrerons pas ici dans toute la complexité de ces questions de structuration du milieu ; nous soulignons simplement le fait que cette structuration vise notamment à prendre en compte l'activité du professeur dans la classe, mais aussi hors de la classe, et les articulations entre ces deux dimensions de l'activité, articulations qui sont aussi centrales dans l'approche documentaire. De plus, les deux approches proposent une analyse cognitive du professeur. Nous abordons cette analyse en termes de *schèmes professionnels*, tandis que la théorie des situations parle de *connaissances du professeur*. Les invariants opératoires dont nous avons donné des exemples seraient ainsi désignés par la théorie des situations comme des connaissances de différents niveaux : ce point est à approfondir, il nous semble notamment susceptible d'éclairer la structure du système documentaire. De même, mettre en regard la prise en compte de la dimension temporelle dans les deux approches nécessite un approfondissement, source potentielle d'un enrichissement des deux cadres.

La double approche didactique et ergonomique des pratiques enseignantes a joué un rôle pionnier dans la référence en didactique des mathématiques à des concepts issus de l'ergonomie pour l'étude de l'activité professionnelle des professeurs de mathématiques. Ainsi des rapprochements naturels entre double approche et approche documentaire existent, du simple fait de ce positionnement commun ; certains concepts de didactique professionnelle sont utilisés dans les deux cadres, nous l'avons déjà signalé (§ 2) au sujet de la dialectique productif/constructif. Cependant les articulations entre ces deux cadres sont complexes, nous signalons ici simplement quelques points qui nous semblent nécessiter un approfondissement. La double approche distingue les pratiques des enseignants (composantes cognitive et médiative), et les déterminants de ces pratiques (composantes personnelle, sociale, institutionnelle). Dans l'approche documentaire, les assujettissements institutionnels (Chevallard 1992) sont pris en compte ; en revanche les aspects liés à la composante personnelle sont abordés sous l'angle des connaissances professionnelles, à travers la notion d'invariants opératoires. Le choix d'un regard en termes de schèmes associe ainsi fortement

pratiques et déterminants personnels de ces pratiques, qui ne peuvent être considérés séparément. Il amène aussi un type particulier de prise en compte des régularités dans l'activité professionnelle des enseignants, pour lequel, là encore, des articulations sont à éclaircir avec les modes de prise en compte des régularités dans la double approche.

Par ailleurs, nous avons souligné l'importance que nous accordons au fait de considérer l'ensemble de l'activité des professeurs, hors classe et en classe, individuelle et collective. L'activité collective des enseignants n'a pas encore fait l'objet (à notre connaissance), de travaux se référant à la double approche ; plus généralement, ces travaux considèrent essentiellement ce qui se passe en classe. Le travail hors classe des professeurs est mentionné, par exemple à travers la proposition (Robert 2008) de distinguer pour l'analyse des pratiques un niveau *micro* (ce qui est automatique, dans les pratiques en classe), un niveau *local* (la classe au quotidien), et un niveau *macro* (celui des projets et préparations). Cependant l'un des choix centraux de la double approche consiste à choisir comme observables les activités des élèves. Nos orientations méthodologiques sont nettement différentes, étant avant tout centrées sur les professeurs, dans les différents lieux qui peuvent intervenir dans son activité professionnelle. Nous allons maintenant revenir sur ces questionnements méthodologiques.

2. Les questions méthodologiques

Analyser le travail documentaire des professeurs, dans ses composantes individuelles et collectives, est une tâche complexe, nous l'avons dit. Nous voulons ici présenter des éléments de méthodologie, en phase de conception et de test, pour avoir des retours critiques de la communauté de didactique des mathématiques permettant de progresser dans la constitution des outils et de la démarche de recherche. Il s'agit d'aller au-delà d'une observation temporelle isolée, et de prendre en compte à la fois le travail en classe et le travail hors classe. Notre méthodologie, par rapport à ce que nous avons fait pour la préparation de l'école d'été, repose sur trois éléments nouveaux : un journal de bord ; la méthodologie d'« instruction au sosie » utilisée pendant l'entretien ; la représentation schématique du vivier de ressources. Nous allons décrire ci-dessous chacun de ces éléments. Le dispositif associé comporte : le renseignement en continu du journal de bord, par l'enseignant, sur une période significative ; un entretien en début de cette période, au domicile de l'enseignant ; un retour sur certains points de l'entretien de début lors d'un entretien en fin de période, lui aussi au domicile de l'enseignant.

Journal de bord et recueil des ressources

Pendant une durée significative (une durée de trois semaines semble un minimum), l'enseignant prend note de toutes ses activités, en classe comme hors classe, professionnelles, ou non professionnelles, dès lors qu'elles sont susceptibles d'avoir une incidence sur ses activités professionnelles. Pour chacune, on demande de donner précisément : l'horaire, le lieu, les protagonistes, les ressources utilisées, ce qui est produit, ce qui est archivé (en précisant où), et d'éventuels commentaires ; on demande aussi à l'enseignant de qualifier le type d'activité. On récupère autant que possible les ressources produites. Pour donner à ce travail une ampleur raisonnable, nous proposons de le limiter à la partie de l'activité de l'enseignant relative à une classe dans laquelle il enseigne. Ceci amène naturellement à prendre en compte des aspects de l'activité qui ne sont pas directement liés à cette classe, mais qui peuvent avoir des conséquences sur ou être conséquence de l'activité dans cette classe. Nous faisons, de plus, l'hypothèse que l'observation de phases de *réorganisation* dans le travail documentaire est susceptible de mettre à jour des processus qui seraient moins visibles dans un contexte plus routinier. Cette hypothèse orientera le choix de la classe, qui se fera en accord avec l'enseignant. Le support fourni à l'enseignant dans cet objectif est appelé

Entretien sur le système documentaire et instruction au sosie

Représentation schématique du vivier de ressources (RSVR)

- une représentation externe, un schéma, qui pourra être exploité par le chercheur, qui essaiera d'en inférer des éléments de structure du système documentaire du professeur (cf. un exemple figure 8) ;
- une représentation interne, au sens où elle donne à voir la façon dont le professeur se représente, et souhaite présenter à celui qui l'interroge, des éléments d'organisation de son travail.

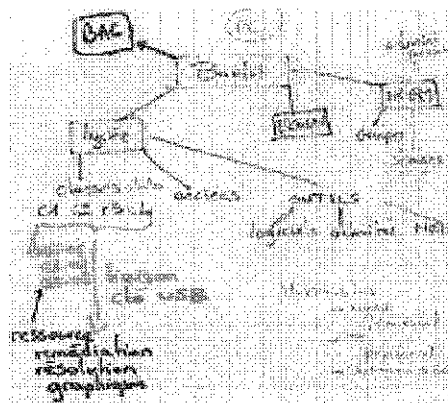


Figure 8. Représentation schématique du vivier de ressources d'un professeur (Sabra, 2008)

263

Pratiquement, la réalisation du schéma se fera en deux temps :

- à la fin de l'entretien, qui aura permis au professeur de présenter un ensemble de ressources rassemblées pour appuyer son activité, nous lui demandons de synthétiser et de compléter éventuellement ce qui a été dit sous une forme schématique (avec la question ci-dessous), en lui donnant le support et les outils (papier quadrillé A3 et crayons de couleurs), on lui laisse un quart d'heure ;
- on propose de laisser le schéma pour le reprendre à tête reposée quinze jours après. On donne une feuille de papier calque, et on convient que, si des choses sont rajoutées ou modifiées, elles le sont sur le calque ;
- à la fin de l'entretien suivant, on reprend le dessin et le calque. On demande de commenter d'éventuels ajouts.

A propos de la RSVR, nous voulons souligner deux aspects :

- premièrement, il s'agit bien d'une représentation schématique. Celle-ci ne peut, en aucun cas, être considérée comme donnant la structure du vivier de ressources du professeur. Sa réalisation doit être comprise dans un double mouvement : d'une part elle montre au chercheur comment le professeur se représente l'organisation de ses ressources et comment il souhaite communiquer cette représentation au chercheur, d'autre part, elle participe à la constitution, par le professeur, d'une représentation mentale de son système documentaire. Ces éléments pourront être confrontés ensuite au journal de bord, à ce qui est dit lors de l'entretien etc. ;
- ensuite, bien qu'il s'agisse du vivier de ressources, nous faisons l'hypothèse que ce qui nous est donné à voir, ce n'est pas qu'un arbre de ressources, mais une mise en relation entre ressources et familles d'activités du professeur, ainsi que des éléments sur l'utilisation de ces ressources, ce qui nous permettra une approche du système documentaire de l'enseignant.

Fragment de CV d'un document (FCVD)

Il s'agit ici de concevoir un outil de suivi de l'évolution, pour un enseignant donné, d'un document donné. Pour ce faire :

- on définit une classe de situation bien délimitée (exemple : introduction de la notion x au niveau scolaire y) ;
- dans un entretien avant la séance où cette situation sera mise en œuvre, on interroge l'enseignant selon la méthode de l'instruction au sosie : « c'est votre sosie qui va mettre en œuvre dans la classe demain cette situation. Vous lui expliquez où sont les ressources nécessaires, comment elles ont été réunies et organisées (leur histoire), comment elles ont évolué au cours du temps, comment il doit les mettre en œuvre ». On utilise aussi le support de la RSVR, en demandant où sont situées les ressources qui vont être utilisées lors de la séance prévue ;
- on assiste à la séance (qui est filmée), et on remplit une grille d'observation dans l'objectif de confronter le prévu et le réalisé ;
- à la fin de la séance, entretien à chaud de 5mn ;
- une semaine après avoir observé la séance où la situation a été mise en œuvre, nouvel entretien. A refaire les instructions au sosie, on modifierait quoi ? Pratiquement, dans l'organisation de la ressource, qu'est-ce qui va être modifié d'ici la prochaine mise en œuvre ? On utilise à nouveau le support du RSVR. On demande si, à la suite de la séance observée, des modifications vont apparaître dans le schéma (des ressources révisées, de nouvelles ressources, de nouvelles relations entre les ressources, de nouvelles activités, de nouvelles classes d'activité ?).

Cet ensemble d'outils devrait être mis en œuvre en suivant un agenda précis (figure 9).

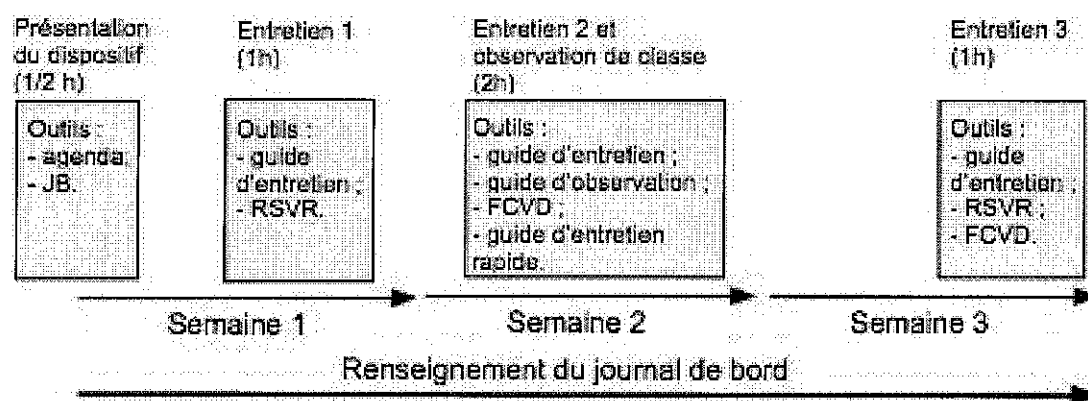


Figure 9. Agenda et outils de la méthodologie

Au moment du séminaire, cet agenda se mettait en place. L'analyse des données issues de ce travail d'observation sera évidemment cruciale pour l'approfondissement de notre approche documentaire. Cette observation de trois semaines ne constitue du reste qu'une fenêtre ouverte sur le travail documentaire du professeur. Disposer de la vue panoramique permettant de saisir les genèses dans leur mouvement supposerait de reproduire cette investigation de trois semaines sur plusieurs années, pour les mêmes professeurs, confrontés à des classes de situations du même type. Cette perspective est inscrite dans notre programme de travail.

V Travaux en cours et perspectives

De ce que nous avons exposé ressort un ensemble de questions sensibles, en particulier la structure des systèmes documentaires, l'articulation de ces systèmes et des systèmes d'activité, les influences croisées des genèses documentaires individuelles et communautaires. Ces questions sont à l'étude dans un ensemble de dispositifs, par exemple :

- l'étude des effets de la diffusion de clés USB « pour démarrer »⁷⁶ sur les genèses documentaires des nouveaux enseignants dans le cadre du projet GDoN⁷⁷ ;
- l'étude des conditions de viabilité d'un catalogue de parcours de formation pour assister les genèses documentaires des formateurs dans le cadre du projet INRP-Pairform@nce⁷⁸ (Gueudet, Soury-Lavergne & Trouche 2008).

Une variété de terrains d'étude est visée : différents professeurs (pionniers, membres d'associations conceptrices de ressources... ou « ordinaires »), différents niveaux d'enseignements, différents contextes curriculaires (dans le cadre en particulier d'un projet France-Brésil), d'autres disciplines mathématiques (en particulier dans le projet européen Mind the Gap⁷⁹, qui interroge l'enseignement scientifique).

Un travail sur la théorie est aussi nécessaire, qui mobilise nécessairement différents champs disciplinaires. Nous développons en ce sens, avec un ensemble d'auteurs, dont certains travaillent au sein de la communauté de didactique des mathématiques, et, au niveau international, de mathematics education, et d'autres sont issus d'autres champs disciplinaires (histoire et épistémologie, informatique, ingénierie documentaire), le projet d'un ouvrage

76 <http://www2.educnet.education.fr/priorites/cle-usb/>

77 <http://educmath.inrp.fr/Educmath/parteneriat/parteneriat-inrp-08-09/gdon/>

78 <http://www.pairformance.education.fr>

79 <http://www.uio.no/english/research/projects/mindingthegap/>

intitulé « Le travail documentaire des professeurs, regards croisés : le cas des mathématiques », qui devrait paraître en 2009.

Nous concluons le thème « documents » de l'école d'été de didactique 2007 par ces mots :

« Il nous semble finalement que la documentation des professeurs (de mathématiques), longtemps négligée par notre communauté, devrait constituer un terrain d'étude important, susceptible de mettre à jour des phénomènes touchant de vastes pans de l'enseignement et de l'apprentissage. Cela suppose sans doute, à l'intérieur de différents cadres théoriques, de réinterroger des objets, de considérer des articulations nouvelles. Cela suppose des croisements interdisciplinaires (didactique, sciences de l'éducation, ingénierie documentaire, informatique). Cela suppose aussi de considérer une complexité méthodologique certaine, pour prendre en compte des évolutions dans une longue durée et des espaces largement ouverts dans et hors la classe ».

Un an après, nous mesurons le chemin parcouru, mais surtout le chemin à parcourir. Les aspects collectifs de ce cheminement nous semblent essentiels, en particulier au sein de la communauté de didactique des mathématiques, c'était le sens de notre communication à ce séminaire.

VI Bibliographie

Abboud-Blanchard, M., Cazes C., Vandebrouck F. (2008), Une base d'exercices en ligne dans la classe : l'analyse de l'activité des enseignants. In F. Vandebrouck (dir.) *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp.319-344). Toulouse : Octarès éditions.

Adler J. (2000), Conceptualising resources as a theme for teacher education, *Journal of Mathematics Teacher Education* 3, 205-224.

Artigue M., Gueudet G. (2008), Ressources en ligne et enseignement des mathématiques. Conférence à l'Université d'été de mathématiques, Saint-Flour, http://www3.ac-clermont.fr/pedago/maths/pages/UE2008/prog_UE_2008.htm.

Assude, T. (2008), Teachers' practices and degree of ICT integration. In D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (eds.), *Proceedings of the fifth congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, CERME 5, Larnaca, Chypre, <http://ermeweb.free.fr/CERME5b/>.

Ball D.L., Cohen D. (1996), Reform by the book: what is –or might be– the role of curriculum materials in teacher learning and instructional reform? *Educational researcher* 25(9), 6-8, 14.

Ball D.L., Hill H.C., Bass H. (2005), Knowing mathematics for teaching. Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American educator*, fall 2005, 14-46.

Baron M., Guin D., Trouche L. (dir.). (2007), *Environnements informatisés et ressources numériques pour l'apprentissage : conception et usages, regards croisés*. Paris: Hermès.

Bueno-Ravel L., Gueudet G. (2008), Online resources in mathematics: teachers' genesis of use. In D. Pitta-Pantazi, G. Philippou (eds.), *Proceedings of the fifth congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, CERME 5, Larnaca, Chypre, <http://ermeweb.free.fr/CERME5b/>.

Cazes C., Gueudet G., Hersant M., Vandebrouck F. (2007), Using e-Exercise Bases in mathematics: case studies at university, *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 11(3), 327-350.

- Chevallard Y. (1992), Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 12 /1, 77-111.
- Clot Y. (1999), *La fonction psychologique du travail*. Paris : PUF.
- Cooney T.J. (1999), Conceptualizing teachers' ways of knowing. *Educational Studies in Mathematics* 38, 163-187.
- Gueudet G., Soury-Lavergne S., Trouche L. (2008), Soutenir l'intégration des TICE : quels assistants méthodologiques pour le développement de la documentation collective des professeurs ? Exemples du SFoDEM et du dispositif Pairform@nce. *Communication pour le colloque DIDIREM*, Paris, septembre 2008.
- Gueudet G., Trouche L. (online), Towards new documentation systems for mathematics teachers? *Educational Studies in Mathematics*.
- Gueudet G., Trouche L. (dir.) (2008a), Thème « Situations mathématiques et documents pour le professeur ». In I. Bloch, F. Conne, F. Chellougui, G. Gueudet, M. Hersant, & E. Roditi (dir.), *Actes de l'Ecole d'été de didactique des mathématiques*. Grenoble : La pensée sauvage.
- Gueudet, G., Trouche, L. (2008b) Du travail documentaire des enseignants : genèses, collectifs, communautés. Le cas des mathématiques, *Education et didactique*, vol. 2, n°3, PUR, Rennes, 2008, p. 7-33
- Gueudet G., Trouche L. (à paraître), Conception et usages de ressources *pour et par les professeurs* : développement associatif et développement professionnel, *Dossiers de l'ingénierie éducative*.
- Guin D., Joab M., Trouche L. (dir.) (2008), *Conception collaborative de ressources pour l'enseignement des mathématiques, l'expérience du SFoDEM (2000-2006)*. INRP et IREM (Université Montpellier 2).
- Guin D., Trouche L. (dir.) (2002), *Calculatrices symboliques : transformer un outil en un instrument du travail mathématique, un problème didactique*. Grenoble : La pensée sauvage.
- Guin D., Trouche L. (2008), Un assistant méthodologique pour étayer le travail documentaire des professeurs : le cédérom SFoDEM 2008. *Repères-IREM*, 72, 5-24., en ligne http://educmath.inrp.fr/Educmath/lectures/dossier_mutualisation/
- Honneth A. (2005), *La réification. Petit traité de théorie critique*. Paris : Gallimard.
- Margolinas C. (2002), Situations, milieux, connaissances. L'activité du professeur, in J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot, R. Floris (dir.), *Actes de la XI^e Ecole d'été de didactique des mathématiques* (pp.141-155). Grenoble : La pensée sauvage.
- Margolinas C., Canivenc B., de Redon M.-C., Rivière O., Wozniak F. (2007), Que nous apprend le travail mathématiques hors classe des professeurs pour la formation des maîtres ? *31^{ème} colloque Inter-IREM des formateurs et professeurs chargés de la formation des maîtres*, pp. 1-19.
- Mission e-Éduc (2008), *Pour le développement du numérique à l'école, rapport de la mission e-Éduc*, ministère de l'éducation nationale, http://media.education.gouv.fr/file/2008/24/5/Pour_le_developpement_du_numerique_a_l_ecole_27245.pdf
- Pédaque R.T. (coll.) (2006), *Le document à la lumière du numérique*. Caen : C & F éditions.

- Pochard M. (2008), *Livre vert sur l'évolution du métier d'enseignant*. Ministère de l'éducation nationale,
http://media.education.gouv.fr/file/Commission_Pochard/18/8/Rapport+_couverture_-_12-02-08_23188.pdf
- Power M. (2008), *Le concepteur pédagogique réflexif : un journal de bord*. Athabasca, AB: Athabasca University Press.
- Rabardel P. (1995), *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains*. Paris : Armand Colin.
- Rabardel P. (1999), Eléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques. In M. Bailleul (dir.), *Actes de la X^e Ecole d'été de didactique des mathématiques* (pp. 202-213). Caen : IUFM.
- Rabardel P. (2005), Instrument subjectif et développement du pouvoir d'agir. In P. Rabardel, P. Pastré (dir.), *Modèles du sujet pour la conception. Dialectiques activités développement* (pp. 11-29). Toulouse : Octarès.
- Rabardel P., Bourmaud G. (2005), Instruments et systèmes d'instruments. In P. Rabardel, P. Pastré (dir.), *Modèles du sujet pour la conception. Dialectiques activités développement* (pp. 211-229). Toulouse : Octarès
- Rabardel P., Pastré P. (dir.) (2005), *Modèles du sujet pour la conception. Dialectiques activités développement*. Toulouse : Octarès.
- Remillard J.T. (2005), Examining key concepts in research on teachers' use of mathematics curricula. *Review of Educational Research* 75(2), 211-246.
- Robert A. (2008), La double approche didactique et ergonomique pour l'analyse des pratiques d'enseignants de mathématiques. In F. Vandebrouck (dir.) *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp. 59-68). Toulouse : Octarès éditions.
- Robert A., Rogalski J. (2002), Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche, *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies* 2(4), 505-528.
- Ruthven K. (2008), Teachers, technologies and the structures of schooling. In D. Pitta-Pantazi, & G. Philippou (eds), *Proceedings of the fifth congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, CERME 5, Larnaca, Chypre,
<http://ermeweb.free.fr/CERME5b/>.
- Sabra H. (2008), *Interactions entre systèmes documentaires individuels et communautaires. Etude dans le cas du projet e-CoLab*, mémoire de master HPDS, Lyon 1.
- Salin M.-H. (2002), Repères sur l'évolution du concept de milieu en théorie des situations. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot, R. Floris (dir.) *Actes de la XI^e Ecole d'été de didactique des mathématiques* (pp.111-124). Grenoble : La pensée sauvage.
- Sensevy G., Mercier A., Schubauer-Leoni M.L. (2000), Vers un modèle de l'action didactique du professeur. A propos de la course à 20, *Recherches en didactique des mathématiques* 20(3), 263-304.
- Vandebrouck F. (dir.) (2008), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*. Toulouse : Octarès éditions.
- Wenger E. (1998), *Communities of practice. Learning, meaning, identity*. New York: Cambridge University Press.

Wenger E., McDermott R., Snyder W. (2002), *Cultivating communities of practice: a guide to managing knowledge*. Harvard Business School Press.

Approche anthropo-didactique du temps dans l'enseignement des mathématiques : fondements, résultats et perspectives

Marie-Pierre Chopin

Équipe DAESL (Didactique et Anthropologie des Enseignements Scientifiques et Langagiers)

Laboratoire LACES (EA-4140, Laboratoire Cultures, Education, Sociétés)

Université Victor Segalen Bordeaux 2

Résumé

Le texte présenté rend compte des principaux résultats d'une thèse sur le temps didactique dans l'enseignement des mathématiques (Chopin, 2007). Au croisement de thématiques variées (le temps de l'élève, du savoir, de l'horloge...), de développements théoriques importants (Chevallard, 1991 ; Mercier, 1995 ; Sensevy, 1996...) et de questions vives liées par exemple à la différenciation de la pédagogie, au traitement des hétérogénéités, etc., le temps didactique dessine un espace vaste et complexe. Loin de vouloir en épuiser l'épaisseur, nous proposons de l'investir par une entrée particulière, celle du temps de l'enseignement.

Après une contextualisation rapide de la recherche et un positionnement théorique liminaire au croisement du didactique et de l'anthropologique, nous présenterons une première série de résultats expérimentaux. Ils seront interprétés sous un modèle théorique issu des approches anthropo-didactiques des situations d'enseignement (Marchive 2006 ; Sarrazy, 2002, 2006) : le modèle d'hétérogénéisation (Sarrazy & Chopin, à paraître). Ceci ouvrira sur les prolongements de l'étude et la présentation de quelques aspects d'un concept qui en est issu, permettant la modélisation des pratiques d'enseignement dans leur dimension dynamique et contextualisée c'est-à-dire temporalisée : la visibilité didactique du professeur.

Mots clefs

temps didactique, temps de l'enseignement, hétérogénéité didactique, visibilité didactique, approche anthropo-didactique

I Le temps de l'enseignement : une question de durée ?

Le temps est un thème très présent dans les discours sur l'enseignement. Censé expliquer ou solutionner un grand nombre de maux scolaires, son surgissement s'exerce régulièrement à de nombreux niveaux : à propos de l'allongement des scolarités aujourd'hui accusé de générer une *Inflation scolaire* (Duru-Bellat 2006), à travers la restructuration des études universitaires en trois cycles L-M-D, sur le fait de la semaine de 4 jours, celui de la restructuration des horaires de français et de mathématiques, de l'allocation d'heures hebdomadaires d'aide aux élèves en difficulté ou encore dans le cadre des comparaisons internationales⁸⁰... Les exemples sont nombreux.

Le thème du temps de l'enseignement occupe également une grande place dans les recherches en éducation où apparaissent les multiples enjeux (sociaux, économiques, didactiques, etc.) auxquels il est connecté. Aux États-unis en particulier, une véritable tradition de recherche lui est consacrée depuis plus d'un siècle (Bloom 1974 ; Metsker 2003 ; Smyth 1985). Malgré la

⁸⁰ Le « total intended instruction time » [le temps total alloué à l'enseignement] est par exemple le premier des 7 indicateurs caractérisant « l'environnement d'apprentissage et l'organisation scolaire » de l'enquête PISA 2005.

variété des études qui la jalonnent⁸¹, certaines régularités peuvent être dégagées, et notamment une propension à vouloir établir un lien statistique entre le temps consacré à l'enseignement (la durée de l'enseignement) et le niveau de réussite atteint par les élèves. À partir de différents niveaux d'analyse⁸², l'idée qu'il pourrait exister un effet propre de cette durée sur les acquisitions scolaires semble fasciner⁸³.

Lorsque l'on ne s'intéresse pas directement à la réussite des élèves, c'est la relation entre temps et pratiques d'enseignement qui focalise l'attention, en rapport bien souvent avec la question de leur efficacité et de leur contribution au maintien des inégalités scolaires. Pour le dire rapidement, une restructuration du temps permettrait de faciliter le travail de gestion de l'hétérogénéité, de mieux différencier la pédagogie, ou encore, selon la formule usuelle, de « donner du sens aux apprentissages », en vue de la construction d'un enseignement plus juste et performant (Husti 1992 ; 2001 ; Meirieu 1996). La thématique du temps – et plus précisément celle du « manque de temps » se développe donc aussi du côté du professeur (Collinson & Cook 2000 ; Duis 1995 ; Meirieu 1996 ; Waaub 2006, etc.), et toujours selon le même principe : le temps serait une ressource dont l'allocation pour l'enseignement pourrait être efficacement gérée. Nous parlerons à ce propos d'une « dimension provisionnelle du temps ».

Le temps comme provision donc, comme une ressource dont il conviendrait de maîtriser la gestion. La légitimité d'une telle approche ne saurait évidemment être récusée dans le cadre d'une réflexion globale sur l'école nécessitant la mise en rapport des fins et des moyens de l'éducation : quelle durée allouer à l'enseignement en vue de quels objectifs ? Pour autant, sa prégnance dans les discours invite à sa mise en question sérieuse. Pour en évaluer les limites d'une part – peut-on par exemple, comme nous y invite Morlaix (2006), aller jusqu'à proposer de définir scientifiquement « l'efficacité du temps scolaire » (p. 88) ? – mais aussi pour déterminer les éventuels effets de masquage qu'elle occasionne à propos notamment d'autres ressorts importants de l'action éducative. C'est à cette mise en question que nous nous livrerons ici.

II Mise en question de l'approche provisionnelle du temps à partir du concept de temps didactique

Aussi séduisante qu'elle soit, l'idée d'un « effet-temps » sur les acquisitions scolaires des élèves apparaît structurellement analogue à celle d'« effet-maître » dont les limites conceptuelles sont clairement identifiées aujourd'hui (Bressoux 1994 ; Bru & al. 2004). Comment l'efficacité du temps scolaire pourrait-elle être déterminée indépendamment des processus par lesquels se réalise la diffusion du savoir ? La question des effets du temps sur l'enseignement conduit à considérer les processus par lesquels se transmet le savoir, jouant le rôle d'interface (et non simplement de courroie de transmission, au sens strictement mécanique) entre temps d'instruction et acquisitions scolaires. Ce n'est pas une approche provisionnelle du temps de l'enseignement qu'il s'agit de pouvoir mener mais une approche que nous qualifierons cette fois de « processuelle ». Le concept de temps didactique est adapté à un tel projet, comme l'ont montré un certain nombre d'études déjà réalisées (Favre 2003 ; Giroux & De Cotret 2003 ; Sensevy 1996).

81 Nous en proposons une synthèse dans Chopin (2007).

82 Le modèle de Smyth (1985) par exemple en distingue plusieurs : le temps total d'instruction, le temps d'instruction par élève, la durée d'enseignement consacrée à une discipline, le temps d'engagement de l'élève dans la tâche, ou encore le fameux ALT (« Academic Learning Time »).

83 Pour quelques exemples de travaux français typiques de cette approche, Cf. Morlaix (2000) ou Suchaut (1996).

La dimension processuelle du temps didactique se situe au fondement même du concept. Dans les écrits *princeps* de Comenius par exemple, l'analogie faite entre didactique et typographie – Comenius parle de « didacographie » – est particulièrement éclairante. La tâche du professeur selon l'auteur est double : préparer le papier (métaphore de l'élève) en l'assouplissant pour qu'il devienne « apte à recevoir l'impression » et encre les types de métal « pour que l'empreinte se fixe avec netteté » (Comenius 2002, p. 273). L'objectif de ce processus étant la reproduction d'un manuscrit déjà-là, d'un texte du savoir préétabli. Entre exigence du programme et réalité des élèves à enseigner, la méthode coménienne vise un idéal où le professeur « avancera progressivement dans sa leçon et [où] tous passeront de l'ignorance au savoir » (p. 274). D'après Comenius donc, le temps didactique est le temps d'un passage, et ce doublement : il est *ce qui réalise* ce passage et *ce qui est réalisé par* ce passage. Il est le temps de la construction du savoir (Chevallard & Mercier 1987) mais également une construction de temps, ou chronogénèse (Chevallard 1991). Le temps didactique est un *produit* autant qu'une *production*. Ici réside sa dimension processuelle.

Cette spécificité conceptuelle possède un caractère proprement anthropologique qu'il nous semble nécessaire d'appuyer. Le temps didactique, au sens où nous en parlons, s'accorde par exemple particulièrement bien avec la définition de l'océaniste Alban Bensa à propos de la temporalité : « comparable à l'air déplacé par tout mouvement, nous dit-il, la temporalité est l'abîme que l'action ouvre sous ses pas » (2006, p. 168). La temporalité est donc un mouvement, une avancée : elle est générée par l'action et tout autant constitutive de celle-ci puisqu'elle en esquisse le prolongement. Une telle définition établit de manière très claire l'immanence du temps à la pratique à laquelle elle se rapporte. Bourdieu n'avance pas autre chose lorsqu'il propose « réintroduire le temps dans la représentation théorique d'une pratique temporellement structurée, donc intrinsèquement définie par son tempo » (2000, p. 343). Le temps didactique est bien de ce point de vue plus qu'une simple durée réservée à l'enseignement, il est le moteur de la pratique spécifique qu'est l'enseignement.

Nous nous accorderons ainsi sur une définition du temps didactique neuve dans sa formulation mais néanmoins épistémologiquement compatible avec celles déjà proposées en didactique et clairement positionnée au croisement du didactique et de l'anthropologique. Le temps didactique est ce qui *génère*, mais aussi ce qui *est généré par* la pratique d'enseignement (sous l'aspect particulier de la diffusion du savoir). Trois questions seront successivement abordées sur la base de cette définition : 1/ celle des rapports entre temps alloué pour l'enseignement (nous parlerons de « temps légal ») et temps didactique ; 2/ celle de la nature du temps didactique (de ses modes d'avancée) ; 3/ celle enfin des pratiques d'enseignement et des modélisations dont elles peuvent faire l'objet lorsque l'on cherche à les appréhender d'un point de vue interactif et contextualisé (Bru 1991).

III Temps légal et avancée du temps didactique

L'idée de l'existence d'un effet-temps – pour reprendre l'expression citée plus haut – c'est-à-dire d'un effet automatique du temps légal sur l'avancée du temps didactique résiste-t-elle à la mise à l'épreuve empirique ? C'est ce que nous avons d'abord tenté de savoir.

1. Protocole

L'étude a porté sur des séquences d'enseignement du calcul relationnel dans 8 classes de CM2 (197 élèves). Afin de recréer les conditions d'observation permettant la comparaison des classes, nous avons proposé à tous les professeurs de faire travailler leurs élèves sur un objet de relativement nouveau : la quatrième structure additive de la typologie de Vergnaud (1990, 1994), les problèmes dits « TTT »⁸⁴. Rappelons ici rapidement un problème type :

Louise joue deux parties de billes.
Elle joue une partie. A la seconde partie, elle perd 4 billes.
Après les deux parties, elle a gagné 6 billes.
Que s'est-il passé à la 1^{ère} partie ?

L'objet d'enseignement est présenté à chaque professeur (individuellement) puis ces derniers sont chargés de réaliser des leçons permettant de faire progresser leurs élèves dans la résolution de tels problèmes. Ils sont laissés libres du contenu de l'enseignement. La seule contrainte imposée est temporelle :

- quatre professeurs disposent de 2 heures (2 séances d'1h) pour réaliser leur enseignement – nous désignerons ces classes par « classes-moins » ou « CLAM » ;
- les quatre autres disposent de 4 heures (4 séances d'1h) – nous les nommerons « classes-plus » ou « CLAP ».

Les élèves ont été soumis à une batterie de tests tout au long de la séquence :

- un pré-test constitué de 22 problèmes TTT de difficulté variée ;
- un mi-test, à « mi-parcours » (il est constitué d'un assortiment représentatif des problèmes du pré-test) ;
- un post-test, à l'issue de l'ensemble des leçons (identique au pré-test, il permet de mesurer les progressions des élèves grâce à un indice de progression I_p ⁸⁵) ;
- enfin, un re-test, 6 semaines après la fin de l'enseignement (il est constitué de deux parties : la première reprend des problèmes TTT du pré-test et du post-test permettant d'évaluer la pérennité des acquisitions réalisées ; la deuxième porte sur d'autres structures additives de façon à mesurer le domaine de validité des acquisitions).

Le déroulement du protocole est synthétisé par la figure qui suit :

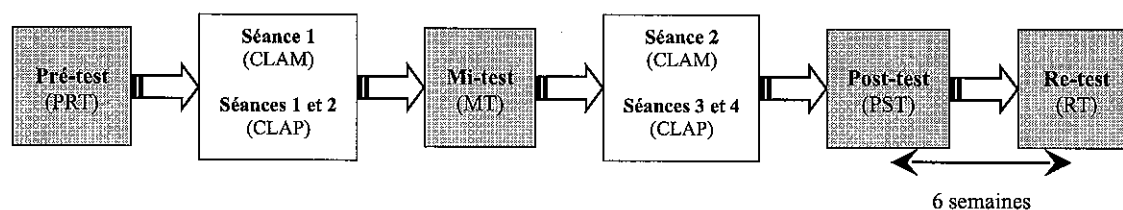


Figure 1 – Déroulement du protocole expérimental dans le temps

Précisons que les professeurs ne sont pas informés du jeu que opéré sur la variable temps légal. Pour eux, nous travaillons sur l'enseignement des mathématiques dans le domaine du calcul relationnel. C'est ce qu'on pourrait appeler, avec Goffman (1991), un « canular expérimental », c'est-à-dire d'une transformation (fabrication) opérée par l'expérimentateur, à l'insu des enquêtés, sur le cadre réel de l'expérience⁸⁶. Goffman qualifie lui-même cette

84 La particularité de cette structure est de ne mettre en jeu que des transformations positives ou négatives, sans qu'aucune indication ne soit fournie sur l'état numérique initial – d'où son appellation courante : " TTT " (" 1^{ère} Transformation – 2^{ème} Transformation - Transformation composée ").

85 Il n'est pas possible d'en présenter ici le mode de construction. Pour plus de détails sur cet indice, nous renvoyons le lecteur, à Sarrazy (1996), qui en est l'auteur (cf. aussi Chopin, 2007).

86 Cette transformation fait partie des transformations dites « bénignes » que Goffman définit ainsi : « [Ce sont] celles qui prétendent servir les intérêts de la personne qui se fait manœuvrer ou qui, du moins [ce qui est le

fabrication de bénigne, puisqu'elle ne nuit à personne. La contrainte temporelle imposée est assimilable à une fin d'année scolaire où les enseignants n'ont pas le choix que de faire avec le temps qui reste.

Pour finir, indiquons que les 197 élèves de l'échantillon ont été répartis en trois niveaux scolaires (« bon », « moyen », « faible ») sur la base de leur score au pré-test et que les classes sont comparables du point de vue de la distribution des niveaux scolaires ($\chi^2 = 15,18$; $p. = 0,37$).

2. Première série de résultats : les effets du temps légal

Comme on pouvait s'y attendre, le temps didactique est un temps possédant une autonomie relative par rapport au temps légal : la comparaison des classes disposant de 2 heures d'enseignement (CLAM) et celles disposant de 4 heures (CLAP), montre que le temps légal n'a pas d'effets directs sur l'effectivité de l'avancée du temps didactique. Une analyse de variance à deux facteurs de classification précise ce résultat en intégrant la variable niveau scolaire (NS) :

Sources De variation	Somme des carrés des écarts à la moyenne	Nombre de degrés de liberté	Variance (carré moyen)	F	Probabilité
1 ^{er} facteur : CLA	0,06	1	0,06	F1 = 0,26	.611
2 ^{ème} facteur : NS	3,71	2	1,85	F2 = 8,51	.000
Interaction	0,01	2	0,01	F3 = 0,02	.976
Résidus	30,87	141	0,22		
Total	39,55	146	0,27		

Tableau 1 – Analyse de variance à deux facteurs de classification : les progressions des élèves sont-elles liées au temps légal (CLA) et au niveau scolaire (NS) ?⁸⁷

cas pour nous ici] ne se font pas à son détriment. Cette personne peut bien découvrir par hasard ce qui se trame [...]. Mais pour autant la moralité du combinard ne sera guère mise en cause. » (Goffman, 1991, p97).

87 La normalité des distributions des I_p dans les CLAM et les CLAP et l'homogénéité des variances ont été vérifiées.

Si CLAM et CLAP ne diffèrent pas du point de vue des progressions réalisées ($p = .611$), on note en revanche que le niveau scolaire est fortement associé à ces progressions ($p < .001$). La figure suivante souligne particulièrement ce phénomène :

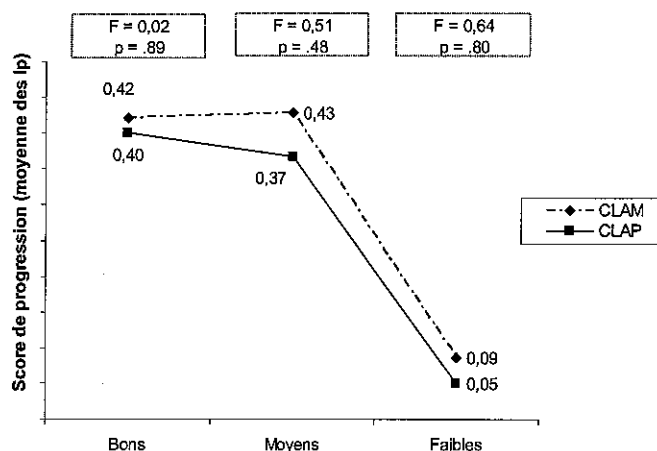


Figure 2 – Profils de progression des CLAM et des CLAP⁸⁸

Dans les deux groupes de classes CLAM et CLAP, ce sont les bons élèves et les élèves moyens qui profitent le plus de l'enseignement. Les élèves faibles en revanche progressent très peu. L'absence d'effet de l'interaction des deux variables CLA et NS ($p = .976$ dans le Tableau 1) est clairement illustré par le parallélisme des segments de la Figure 2⁸⁹. Il n'y a pas d'effet surajouté par le fait d'appartenir à un groupe de classes (CLAM ou CLAP) et à un niveau scolaire. Nous pouvons ainsi affirmer que CLAM et CLAP ne diffèrent pas du point de vue de l'équité de l'enseignement dispensé, comme le confirme l'examen de l'écart-type des distributions des indices de progression dans chaque groupe : il est de 0,43 pour les CLAM et de 0,46 pour les CLAP.

Notons que l'hypothèse de l'existence d'un effet-plafond a été éprouvée et rejetée : la similarité des profils de progression des CLAM et des CLAP ne traduit pas l'existence d'un seuil maximal de progression pour chaque niveau scolaire. En outre, une autre dimension fondamentale des acquisitions des élèves a été testée : celle relative à la qualité de la conceptualisation du savoir en jeu. Elle a été appréhendée à travers deux indicateurs :

- la pérennité des acquisitions réalisées 6 semaines après la fin de l'enseignement – nous avons montré que plus de temps n'avait pas eu d'impact positif de ce point de vue puisque les élèves de CLAM ne régressent pas entre le post-test et le re-test ($\chi^2 = 0,78$; $p = .37$)⁹⁰, alors que les CLAP régressent ($\chi^2 = 3,77$; $p = .05$)⁹¹ ;
- le domaine de validité des connaissances acquises (ou leur extensionnalité) – la comparaison des séries de scores sur les problèmes relevant d'autres structures additives au re-test révèle

88 La représentation sous forme de courbes pourrait paraître surprenante au vu de la nature des données en jeu. Nous la justifions pour des raisons didactiques : faire apparaître l'existence éventuelle d'intersections traduisant des différences d'équité entre les groupes de classes.

89 Les analyses de variance réalisées montrent que les scores de progressions des élèves de chaque niveau scolaire sont comparables (cf. les rectangles sur la figure 2).

90 On ne peut pas rejeter l'hypothèse d'une différence entre le nombre de progressions (échec/réussite ; $n = 37$) et de régressions (réussite/échec ; $n' = 45$) entre le post-test et le re-test.

91 On peut rejeter l'hypothèse d'une différence entre le nombre de progressions (échec/réussite ; $n = 43$) et de régressions (réussite/échec ; $n' = 63$) entre le post-test et le re-test.

une différence significative entre CLAM et CLAP en faveur des CLAM ($U = 5335$; $p = .02$)⁹².

En résumé, les enseignements réalisés dans les CLAP n'ont permis ni une plus grande efficacité, ni une équité plus importante, ni des acquisitions de connaissances plus "consistantes" que ceux réalisés dans les CLAM. Voilà le premier résultat fort de l'étude qui, s'il ne peut être considéré sous forme isolée (en tant qu'il n'explique rien des processus à l'œuvre et qu'il pourrait ouvrir la porte à des usages abusifs du type « il faudrait moins de temps pour que l'enseignement soit plus efficace »), permet de poser deux jalons solides pour la suite : d'une part, il bat en brèche l'idée d'un effet automatique du temps légal sur le temps didactique (premier signe de l'autonomie relative du temps didactique) ; d'autre part, il dégage des axes d'étude de ce temps autonome, comme nous le montrerons maintenant.

3. Deuxième série de résultats : éléments pour l'étude du temps didactique

Ce qui précède invite en effet à pousser plus loin la réflexion. Par exemple, on a pu faire apparaître une certaine stabilité des profils des CLAM et des CLAP du point de vue des profils de progression (Cf. *supra*, Figure 2). Ce résultat, qui ne montrait pas d'effet surajouté de l'interaction entre le temps légal et le niveau scolaire, est particulièrement intéressant à propos des élèves faibles.

On aurait pu s'attendre en effet à ce que la restriction de temps (appartenance à une CLAM) soit spécifiquement préjudiciable aux progressions de ces élèves-là. Dans un grand nombre de considérations sur le temps (dont celles bien connues du psychologue américain Carroll 1963, par exemple), le temps alloué par le professeur est jugé insuffisant pour les élèves les plus faibles⁹³. Les entretiens réalisés dans notre étude montrent que les professeurs partagent cette idée. L'un d'entre eux, Thomas, déclare à l'issue de la dernière séance ne pas avoir eu le temps de s'arrêter sur les difficultés des élèves faibles de la classe : « Je n'avais pas le temps d'attendre », regrette-t-il. Sa collègue Marion précise également que « pour les élèves faibles, c'est du temps qu'il manque là ». Catherine enfin, professeur expérimenté, évoque elle aussi cet aspect : « Il faut du temps, confie-t-elle, surtout pour les élèves faibles, pour que ça s'installe ». Bref, logiquement, l'accroissement du temps aurait dû permettre une distribution différente des effets didactiques, en faveur des élèves les plus faibles. La comparaison des CLAM et des CLAP a montré qu'il n'en était rien.

De deux choses l'une. Soit on considère que les professeurs entretiennent consciemment un écart entre ce qu'ils disent vouloir faire et ce qu'ils font effectivement – et il s'agit alors pour les instances éducatives de continuer de les convaincre de traiter l'hétérogénéité, de différencier leur enseignement, *etc.* – soit, et telle sera notre position, il existe une autonomie de la pratique didactique non réductible aux intentions professorales, une « logique de la pratique », dirait Bourdieu, non réductible à la « pratique de la logique » (1980, p. 144). Il y aurait des raisons expliquant que le temps représente pour les professeurs une condition de

92 Nous avons étayé ce résultat en comparant les scores de nos échantillons expérimentaux à ceux d'un échantillon témoin n'ayant pas reçu d'enseignement sur les problèmes TTT de façon à pouvoir interpréter les différences de scores comme des effets didactiques des enseignements reçus.

93 Rappelons que le modèle d'apprentissage de Carroll établi dans les années 60 se base sur le postulat selon lequel « un apprenant réussira l'apprentissage d'une tâche donnée dans la mesure où il y passe la quantité de temps dont il a besoin pour apprendre cette tâche » (1963, p. 725). Pour ne prendre qu'un exemple de l'actualisation de cette idée dans les travaux français, le sociologue B. Suchaut (1996) soutient l'existence d'une dimension « égalisatrice » du facteur temps (le temps serait censé permettre de compenser l'écart de niveau entre les élèves faibles et les autres).

possibilité du traitement des hétérogénéités et que, pour autant, la distribution observée des effets didactiques ne dépende pas du temps alloué. Nous ferons l'hypothèse que l'action du professeur (vue sous l'angle de la gestion des hétérogénéités) répondrait en fait à une contrainte relative à une économie interne de la diffusion des savoirs scolaires, peu sensible au temps légal alloué pour l'enseignement⁹⁴. C'est ce que corroborent d'autres résultats issus de l'examen des profils d'interaction maître-élève(s) dans les CLAM et dans les CLAP.

Les interactions verbales constituent un instrument important de l'avancée du temps didactique (Giroux & de Cotret 2003 ; Sarrazy 2001)⁹⁵. Leur étude s'avère de ce fait tout à fait cruciale pour notre sujet.

Nous avons comptabilisé, pour chaque séance (soit 24 heures de leçons) l'ensemble des interactions didactiques maître-élèves (qui concernent le projet de diffusion du savoir). Voici les distributions observées dans les deux groupes :

	Niveau scolaire de l'élève			Total
	Bon	Moyen	Faible	
CLAM	13	17	23	53
CLAP	20	24	31	75
Différence	7	7	8	22

Tableau 2 – Distribution des interactions selon le niveau scolaire dans les CLAM et les CLAP

D'après ce tableau, les volumes d'interactions sont liés au statut scolaire de l'élève : on interagit d'autant plus avec un élève que son niveau scolaire est faible. On pourrait donc penser, en accord avec certaines idées sur la question (cf. par exemple Talbot, 2007), que les interactions assumeraient une fonction de *compensation* du niveau initial de l'élève. Mais nos résultats invitent à nuancer cette interprétation. En effet, ils montrent que le temps en plus n'accentue pas le phénomène de sur-interrogation des élèves faibles : les distributions des interactions ne sont pas significativement différentes entre CLAM et CLAP ($\chi^2 = 0,09$; ns ; $p = .96$). Or si le fait d'interagir était un moyen de compenser des positions "absolues" des élèves (leur niveau scolaire général par exemple), les interactions supplémentaires permises par le temps en plus (identifiées dans la dernière ligne du Tableau 2) se seraient majoritairement reportées sur les élèves faibles. Ce n'est pas le cas. En conséquent, il est possible d'avancer que les interactions maître-élève(s) assument moins une fonction de *compensation* du niveau initial de l'élève (caractéristique externe au processus d'enseignement *stricto sensu*) qu'une fonction de *régulation* entre les différents niveaux scolaires dans la classe (caractéristique interne au processus d'enseignement) : la régulation permise par les interactions s'opère sur les positions relatives des élèves dans la classe, sur la distance qui les sépare les uns des autres plus que sur leur caractéristique absolue et individuelle. Pour byzantine qu'elle paraisse, cette distinction est tout à fait importante selon nous pour établir l'existence de nécessités propres à l'avancée du temps didactique.

Tout porte à penser en effet que le temps didactique posséderait une cohérence interne, celle-là même qui fait que, sous la pression exercée par le temps légal dans notre protocole, les actions des professeurs paraissent achopper à une sorte de noyau dur, une *praxis* enseignante relative à l'avancée du temps didactique. Nous voyons apparaître ici l'intérêt du cadrage

94 Cette « logique de la pratique » n'est pas sans rappeler les travaux menés par Voigt (1985), mêlant les apports de la didactique des mathématiques aux concepts ethnométhodologiques. Voigt sollicite les concepts de « pattern » et de « routines » pour décrire les processus stéréotypés et souvent inconscients dans le fonctionnement usuel du régime de la classe. Son approche porte sur les formes d'interactions entre le maître et les élèves et vise à rendre compte des nécessités pratiques liées aux façons dont chacun d'entre eux participe de concert au déroulement de l'enseignement.

95 Dans notre étude d'ailleurs, la fréquence d'interaction augmente avec la pression du temps légal : un élève de CLAM est interrogé en moyenne 9 fois par heure, contre 6 pour un élève de CLAP.

anthropologique de la question du temps didactique. Il s'agit maintenant de dépasser le stade de la description pour gagner celui de l'explication. Au-delà du caractère praxique de l'enseignement mis en évidence, par quels modes le temps didactique a-t-il pu avancer dans les CLAM et les CLAP ? Et surtout, comment expliquer les phénomènes de déperdition temporelle entre les deux groupes de classes ?

4. Troisième série de résultats : fonctionnalité des actions d'enseignement pour l'avancée du temps didactique

Resserrons l'étude autour de l'examen du lien entre actions didactiques des professeurs et fonctionnalité de ces actions pour l'avancée du temps didactique. Cet examen sera décrit en deux temps et débute par de nouvelles données issues de l'analyse des interactions maître-élève(s).

Le premier résultat concerne une catégorie particulière d'interaction verbale, les interactions dites « d'explicitation » (E). Ces interactions correspondent aux moments où le professeur demande à un élève d'explicitier ou d'approfondir sa réponse, ou bien de présenter sa "manière de faire" remarquée en circulant dans les rangs (« Dis-nous comment tu as fait ? », « Qu'est-ce que tu t'es dit pour faire cela ? », etc.). Elles visent, selon les déclarations des professeurs, à faire émerger les procédures des élèves et à permettre d'établir un état des lieux précis de leur état de connaissances pour réguler plus efficacement leurs erreurs.

La comparaison des deux groupes de classes sur ce point fait apparaître que les interactions d'explicitation sont plus fréquentes dans les CLAP (9,7 %) que dans les CLAM (6 %). La méthode de l'écart réduit renvoie une différence significative entre ces deux pourcentages ($p < .05$). Il semble que plus de temps ait permis aux professeurs de mettre en place un enseignement davantage dévolu à l'identification des difficultés conceptuelles de leurs élèves (et en conséquent à leur régulation). Comment expliquer alors l'absence de différence significative entre CLAM et CLAP par rapport à la qualité de conceptualisation des élèves (cf. partie 3.1) ? Nos résultats permettent de lever le paradoxe.

Nous avons, dans notre grille d'analyse des interactions, introduit une modalité particulière de codage relative au lieu d'apparition de l'interaction : se déroule-t-elle en public (tous les élèves sont témoins de l'interaction) ou bien en privé (à l'occasion d'un échange individuel entre le professeur et un élève) ? Les résultats sont surprenants :

		MODALITES D'INTERACTION	
Total		Publicques	Privées
surreprésentées dans les CLAM	Déclaration du professeur (D) Inter. fermée nominative (X)	Inter. fermée nominative (X)	Interaction de contrôle (C) Inter. fermée nominative (X)
surreprésentées dans les CLAP	Demande d'explication (E) Interaction d'orientation (O) Intervention spontanée (S) Interaction de validation (V)	~~Demande d'explication (E)~~ Intervention spontanée (S) Interaction de validation (V) Inter. fermée choisie (Y)	Interaction d'orientation (O) Interaction de validation (V)
Pas de différence entre CLAM et CLAP	Interaction de contrôle (C) Inter. fermée choisie (Y)	Interaction de contrôle (C) Déclaration du professeur (D) Interaction d'orientation (O)	Déclaration du professeur (D) ~~Demande d'explication (E)~~ Intervention spontanée (S)

Tableau 3 – Synthèse des modalités interactives surreprésentées dans les CLAM et les CLAP

Ce tableau montre que les interactions d'explicitation (surlignées) ne sont prépondérantes qu'en public et non en privé. Ceci interroge directement leur fonction pour l'avancée du temps didactique. Pour les professeurs, rappelons-le, elles permettaient d'établir un diagnostic des difficultés conceptuelles des élèves. Si tel avait été le cas pourtant, il n'y aurait aucune raison que de telles interactions se déroulent en public plutôt qu'en privé. Bien au contraire,

ce diagnostic aurait plus de chances d'advenir au cours de phases de régulations individuelles. Nous pouvons en conclure que les interactions d'explicitation auraient assumé une autre fonction pour l'avancée du temps didactique que celle déclarée à leur rencontre, et notamment une fonction d'enseignement par procuration : les demandes d'explicitations publiques pourraient pallier la faiblesse du volume d'interactions d'enseignement plus directes telles que les déclarations du professeur sur le savoir en jeu par exemple (modalité D surreprésentée chez les CLAM dans le tableau ci-dessus). En d'autres termes, les interactions d'explicitation joueraient pour l'avancée du temps didactique la même fonction que d'autres types d'interaction. La conclusion à laquelle nous aboutissons est la suivante : la variation de temps légal entre CLAM et CLAP a eu une incidence sur les instruments d'enseignement sollicités par les professeurs mais n'a pas nécessairement agi en conséquence sur les modes de cette avancée, ce qui peut expliquer l'absence de différence du point de vue des effets de l'enseignement⁹⁶.

Cette voie ouverte par la distinction entre *instruments* de l'avancée du temps didactique et *modes* de cette avancée conduit à examiner de plus près la fonctionnalité des actions didactiques sur l'avancée du temps didactique. Une hypothèse se dégage de tout ce qui précède : avec plus de temps (dans les CLAP), les instruments d'enseignement sollicités par les professeurs auraient été moins fonctionnels que ceux des CLAM pour l'avancée du temps didactique. La mise à l'épreuve d'une telle hypothèse a exigé une désagrégation des deux groupes CLAM et CLAP permettant de considérer les 8 classes dans leur spécificité.

Les 8 séquences ont donc été décrites indépendamment les unes des autres à partir de l'étude de trois types de donnée susceptibles de caractériser les situations d'enseignement mises en place : 1/ les contrats didactiques (Brousseau 1988 ; Sarrazy 1995) ; 2/ les assortiments didactiques (Esmenjaud-Genestoux 2002) ; 3/ la fréquence des régulations réalisées par le professeur au cours de l'enseignement.

Variables liées aux contrats

L'analyse des contrats a été menée à partir d'une grille basée sur deux typologies importantes déjà réalisées : celle de Brousseau (1996) identifiant pas moins de 17 contrats, et celle de Perrin-Glorian et Hersant (2003) introduisant une distinction fondamentale des types d'échelle temporelle en jeu dans la description des contrats. Après une longue familiarisation avec le corpus (visionnage des vidéos), trois types de contrat ont été identifiés :

1. **Les contrats plutôt expositifs (EXP)** – Dans ces contrats, la responsabilité de l'élaboration du savoir revient surtout au professeur. On retrouve les caractéristiques du contrat d'ostension : le professeur enseigne en "montrant" un objet, ou une propriété ; « l'élève accepte de le "voir" comme le représentant d'une classe dont il devra reconnaître les éléments dans d'autres circonstances » (Brousseau, 1996, p. 50). Le contrat expositif se rapproche également du contrat d'application : les élèves ont à leur charge l'utilisation du savoir qu'on leur a enseigné.
2. **Les contrats plutôt interactifs (INT)** – Ces contrats sont caractérisés par un plus grand partage des responsabilités entre professeur et élèves du point de vue de l'élaboration du savoir. Ils concernent principalement deux types de contrat identifiés par Brousseau (1996) : la maïeutique, sûrement l'un des plus usités par les professeurs (Marchive 2002) ; et le contrat de conditionnement, où « le professeur prend à sa charge l'organisation d'une répartition "raisonnée" d'exercices "raisonnablement" répétitifs, et

⁹⁶ Ce phénomène a également été repéré sur d'autres aspects (d'autres interactions, mais aussi le décalage entre l'organisation de phases dites « d'activités » plus importantes chez les CLAP que chez les CLAM sur certains problèmes sans que la teneur du milieu didactique possède les conditions de satisfaction de la dévolution des dits problèmes).

légèrement informatifs et gère le débit en fonction du rendement de son procédé qui est globalement assez faible. Le rôle de l'élève est de se prêter à la répétition » (Brousseau, 1996, p. 53).

3. Les contrats plutôt empiristes (EMP) – Ce contrat est basé sur la croyance selon laquelle le contact avec la "nature" (des problèmes TTT par exemple) est censé tout faire dans l'appropriation de nouvelles connaissances chez les élèves. La responsabilité de l'élaboration du savoir est ainsi très largement dévolue à ces derniers⁹⁷. Il diffère du contrat de conditionnement dans le sens où le professeur n'organise pas les énoncés selon une répartition "raisonnée". Souvent, il propose des situations très ouvertes où l'objectif déclaré est davantage de « chercher » que de « résoudre ». Ou bien il décide de changer de situation sans pouvoir justifier didactiquement ce changement, invoquant généralement la nécessité de livrer les élèves à du « nouveau ».

Les 8 séquences ont été décrites sous la forme d'un enchaînement de contrats. Deux variables en sont issues : le profil de contrat dominant (PCD), plutôt expositif (EXP), interactif (INT) ou empiriste (EMP) ; le nombre de changements de contrat au cours d'une même séquence (CC), plutôt élevé (CC1, 5 changements), moyen (CC2, 3 changements), ou faible (CC3, aucun changement).

Variables liées aux assortiments

Deux types d'assortiment ont été distingués : l'assortiment global qui rend compte de tous les énoncés soumis aux élèves ; l'assortiment TTT qui ne rend compte que des énoncés relatifs aux problèmes TTT.

Les énoncés de l'assortiment global ont été classés en plusieurs catégories :

- la **catégorie A** correspond aux problèmes TTT tels que nous les avons soumis aux élèves, mettant en scène des enfants jouant deux parties de billes : nous les appelons « problèmes standards » ;
- la **catégorie B** concerne des énoncés relevant de la quatrième structure additive sans habillage : l'énoncé prend la forme d'une écriture (sagittale ou autre) à compléter ;
- la **catégorie C** regroupe des problèmes standards mais qui diffèrent par leur habillage : il n'est pas relatif aux parties de billes ;
- les énoncés de la **catégorie D** sont toujours basés sur la quatrième structure additive mais sont plus complexes dans le sens où ils composent par exemple plusieurs compositions de transformations ;
- la **catégorie E** concerne des énoncés relevant d'autres structures additives ;
- la **catégorie F** regroupe l'ensemble des autres énoncés : invention de problèmes, lecture de graphique ...).

Les énoncés soumis aux élèves ont été répertoriés pour les huit classes. L'étude de leur distribution a conduit à la construction de deux variables : l'homogénéité de l'assortiment global (HOM) qui rend compte de la focalisation de l'assortiment global sur une, deux, ou trois catégories d'énoncés ; et l'alternance de l'assortiment global (ALT) qui possède un caractère plus dynamique et qui permet de savoir si les professeurs ont multiplié les changements de catégorie d'énoncés ou bien si les différentes catégories ont été proposées sous forme de blocs successifs.

⁹⁷ Sans que les situations remplissent nécessairement les critères d'adidacticité ni même ne possèdent une « dimension adidactique » (Mercier, 1995).

Concernant l'assortiment TTT maintenant, deux variables ont été construites : la quantité d'énoncés soumis d'une part (QUAN) ; et la continuité du débit d'introduction de ces problèmes dans la classe (DEB)⁹⁸.

Variable liée à la fréquence des régulations du professeur

Les régulations correspondent aux interventions du professeur visant à recadrer un ou des élèves par rapport à l'objectif de son enseignement, de le ou les replacer sur le chemin qu'il souhaite lui ou leur faire emprunter. Les régulations ont été pointées une à une grâce à la retranscription écrite des séances vidéoscopées. La retranscription est basée sur l'analyse d'épisodes successifs relatifs aux différents énoncés soumis. Il s'agit de pouvoir établir une mesure de l'"interventionnisme" du professeur. Nous avons calculé, pour chaque classe, la fréquence horaire des régulations.

Au total, sept variables ont donc été construites. Elles définissent le profil de situations des huit séquences d'enseignement⁹⁹ :

Classe	Temps légal	Style ¹⁰⁰	Variables descriptives des profils de situation						
			Assortiment global		Assortiment TTT		Contrats		Régulations
			Homogénéité HOM	Alternance ALT	Quantité QUAN	Débit DEB	Profil de contrat dominant PCD	Chang. de contrats CC	Fréq. Des régulations REG
			1. forte 2. moyenne 3. faible	1. plutôt élevée 2. plutôt faible	1. plutôt élevée 2. plutôt faible	1. plutôt continu 2. plutôt discontinu	1. expositif 2. interactif 3. empiriste	1. Important 2. moyen 3. faible	1. plutôt élevée 2. plutôt faible
Eco1	CLAP	ACT	2	1	2	2	3	2	2
Eco2	CLAM	ACT	1	2	2	1	2	2	2
Eco3	CLAM	MAG	3	2	1	2	1	1	1
Eco4	CLAP	ACT	3	1	2	2	3	2	2
Eco5	CLAP	MAG	2	1	2	2	2	3	2
Eco6	CLAM	ACT	1	2	2	1	2	3	2
Eco7	CLAM	MAG	3	2	2	2	1	1	1
Eco8	CLAP	ACT	2	1	1	2	1	2	2

Tableau 4 – Profils de situations des huit classes

Une analyse factorielle de correspondances multiples a été réalisée sur cette matrice.

98 Cf. Chopin (2007) pour plus de détail sur la construction.

99 Le style d'enseignement (STY) a été construit sur la base d'une étude des formes d'enseignement sollicitées par les professeurs ainsi que de leurs déclarations pédagogiques au cours des entretiens (cf. Chopin 2007).

100 Le style d'enseignement (STY) a été construit sur la base d'une étude des formes d'enseignement sollicitées par les professeurs ainsi que de leurs déclarations pédagogiques au cours des entretiens (cf. Chopin 2007).

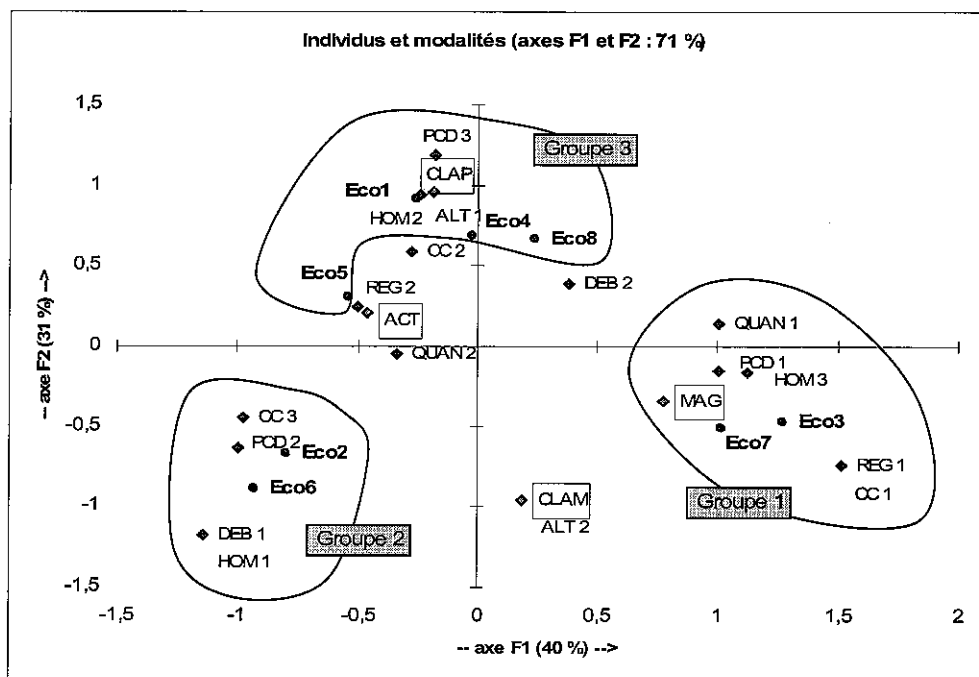


Figure 3 – Analyse factorielle des correspondances multiples sur les profils de situation : représentation des 8 classes et des 17 modalités de variables sur le plan principal¹⁰¹

Nous avons décrit les trois groupes dégagés par l'analyse à travers les informations rapportées par les deux axes du plan principal. Celui des abscisses renvoie à ce que nous avons nommé « l'autonomie des situations mises en place par le professeur » : doit-il intervenir beaucoup dans l'enseignement (faible autonomie) ou non (autonomie importante) ? L'axe des ordonnées renseigne sur ce que nous appelons « la focalisation des situations » : une intention didactique spécifique est-elle décelable dans les situations mises en place (focalisation importante) ou non (focalisation moindre) ? Ces deux axes renseignent au final sur le type de rapport entretenu par le professeur avec le milieu mis en place pour son enseignement. Décrivons les trois groupes obtenus :

- **le groupe 1** (Eco3 et Eco7) est caractérisé par le fait que le milieu "ne tient pas" sans le professeur (l'autonomie des situations y est faible). Il s'agit d'une posture assumée par le professeur et non d'une évaluation du degré d'adidacticité effectif des situations ;
- **le groupe 2** (Eco2, Eco6) est caractérisé par le fait que le milieu "tient" sans la présence directe du professeur (l'autonomie des situations est importante). Toutefois, ces situations sont également caractérisées par une focalisation importante, c'est-à-dire que les situations proposées par les professeurs paraissent porter une intention didactique ciblée ;
- **le groupe 3** (Eco1, Eco4, Eco5 et Eco8) est caractérisé par un rapport "lâche" du professeur au milieu mis en place. Le profil de contrat dominant est de type empiriste et l'assortiment global présente une forte variabilité. Nos analyses fournissent toutefois de bonnes raisons de penser que cette variabilité répond moins d'une logique de progression didactique (on pourrait alors parler de variabilité didactique *stricto sensu*, Cf. Bru, 1991, Sarrazy, 2002c) que du fait que les professeurs considèrent que les élèves doivent être confrontés au plus grand nombre d'énoncés possibles (du point de vue de l'habillage, du contexte, etc.) pour apprendre.

¹⁰¹Le regroupement des classes a été réalisé à partir d'une classification hiérarchique ascendante réalisée sur les coordonnées des individus sur les trois premiers axes de l'AFCM.

Ces éléments permettent de penser que les professeurs du groupe 3 entretiendraient une sorte de "distance" au milieu mis en place pour leurs élèves : leur rôle dans la structuration de ce milieu serait relativement réduit, dans le sens où ils estimeraient que les situations porteraient quasi "naturellement" les conditions de satisfaction de leurs intentions didactiques. À l'inverse, le groupe 1 et le groupe 2 tenteraient d'exercer plus de contrôle sur la structuration de ce milieu, en "raccourcissant" la distance avec le milieu. Deux moyens seraient utilisés pour cela :

- les professeurs du groupe 1 interviendraient directement dans le milieu : ils y sont très "visibles", comme pour gérer "personnellement" le déroulement des événements ;
- les professeurs du groupe 2 médiatiseraient leur intervention par les assortiments : ces derniers portent de manière plus visible leurs intentions didactiques.

Revenons à la question du temps. Les professeurs de CLAM se répartissent dans les groupes 1 et 2 ; ceux de CLAP appartiennent tous au groupe 3. Tout se passe comme si la variation de temps légal avait agi sur la "distance" entre le professeur et le milieu qu'il met en place pour son enseignement. "Plus de temps" serait associé à un accroissement de cette distance ; "moins de temps" entraînerait un "raccourcissement" de cette distance (ce raccourcissement se réalisant, comme nous l'avons vu, de deux manières différentes selon le style d'enseignement). Ceci nous permet de revenir sur la différence introduite plus haut entre *instruments* et *modes* de l'avancée du temps didactique. Plus la distance entre le professeur et le milieu est importante, plus les *instruments* d'enseignement seraient "déconnectés" de leur fonction *modale* dans l'avancée du temps didactique. À l'inverse, plus cette distance est réduite, plus les professeurs seraient conduits à ajuster leurs instruments à leurs intentions didactiques (relatives à l'avancée du temps didactique). Ceci permettrait d'expliquer que le temps supplémentaire n'a pas eu d'effet positif sur l'avancée du temps didactique, comme si le bénéfice temporel avait été "digéré" par l'accroissement de la distance entre le professeur et le milieu.

Le modèle de l'hétérogénéisation didactique permettra de donner une cohérence à l'ensemble de ces résultats et de montrer que le raccourcissement entre le professeur et le milieu mis en place s'explique largement par des nécessités pratiques.

IV Le modèle d'hétérogénéisation

Le modèle d'hétérogénéisation a d'abord été développé dans les travaux de Sarrazy (2002b) sur la régulation des hétérogénéités dans l'enseignement des mathématiques. Nos travaux en permettent une re-formulation et mettent en exergue ses fondements épistémologiques, sa cohérence théorique et ses potentialités heuristiques.

1. Fondements

À l'origine du modèle se trouve la nécessité pointée par Sarrazy d'un éclaircissement notionnel à propos de l'hétérogénéité omniprésente dans les discours sur l'enseignement. La « différenciation des hétérogénéités », selon son expression (2005), lui permet de distinguer :

- l'**hétérogénéité exogène**, relative à des caractéristiques non didactiques des élèves (origine socioprofessionnelle, couleur des yeux...) ;
- l'**hétérogénéité péri-didactique** qui renvoie à des caractéristiques non directement didactiques mais pouvant être considérées comme des effets émergents des processus didactiques (niveau scolaire, motivation, estime de soi...) ;

- **L'hétérogénéité didactique** qui concerne le processus didactique *stricto sensu* dans le cadre plus resserré de l'enseignement d'un objet de savoir ;
- enfin **L'hétérogénéité des situations** relative aux conditions permettant de préserver le sens et l'usage des connaissances et des savoirs.

Les usages les plus fréquents du terme « hétérogénéité » renvoient généralement, et souvent indistinctement, aux deux premiers niveaux de la typologie (positions socioculturelles et scolaires des élèves). Face à ces types d'hétérogénéité, la communauté éducative propose souvent une « réponse » unique : la différenciation de la pédagogie. L'introduction du niveau d'analyse de l'hétérogénéité didactique déconstruit radicalement cette idée selon laquelle la différenciation se présente comme une réponse à un *constat* d'hétérogénéité, en relativisant précisément ce statut de constat, de déjà-là des hétérogénéités. Car « hétérogénéité » n'est pas synonyme de « différence ». L'hétérogénéité est toujours la conséquence d'une construction de catégories permettant d'interpréter le réel.

C'est par un processus de catégorisation en effet que l'on institue des *différences* en *hétérogénéités*. Ce processus est naturel aux institutions. Il est inhérent à leur fonctionnement. Dans un célèbre article sur la construction sociale des handicaps, intitulé « Culture as disability », Mc Dermott et Varenne (1995) illustrent quelques-uns des processus d'institution quotidiens permettant le fonctionnement de nos sociétés, sur des domaines aussi "objectifs" *a priori* que celui du handicap physique (par exemple le fait d'être aveugle ou sourd) ou celui de l'échec scolaire. Voici la thèse défendue par les auteurs :

Les cultures offrent une abondance de positions que les êtres humains doivent occuper. Chaque position exige que son occupant possède, et soit considéré comme possédant, des caractéristiques particulières qui symbolisent, et même légitiment, la réalité de leur position pour les autres. Les gens sont seulement accidentellement nés différents ou très tôt façonnés par la culture pour l'être. Il est plus important de comprendre comment ils sont affectés à ces positions pour être traités différemment. (Mc Dermott & Varenne, 1995)¹⁰².

Cette définition du handicap comme une « fabrication culturelle » permet à Mc Dermott et Varenne de rapporter les caractéristiques par lesquelles les individus sont décrits (normaux ou handicapés, en échec scolaire ou pas) aux conditions institutionnelles présidant à l'établissement des modes de catégorisation du réel. Mehan (1997) parle à ce sujet d'« activité instituante »¹⁰³. L'hétérogénéité didactique est (comme les autres types d'hétérogénéités mais sans doute de manière plus visible), le produit d'un type particulier d'activité instituante, d'un processus de catégorisation. En quoi consiste un tel processus ?

Imaginons qu'un professeur débute son enseignement à propos d'une notion quelconque. S'il propose un exercice extrêmement complexe à ses élèves, ces derniers risquent de buter collectivement devant l'énoncé. Si en revanche le professeur soumet un exercice très facile, l'ensemble de la classe devrait le réussir. Dans ces deux premiers cas, tous les élèves peuvent être caractérisés de la même façon du point de vue de leur réussite : la classe est homogène. Si maintenant c'est un problème de difficulté moyenne qui est proposé aux élèves, il est fort possible qu'une partie de la classe réussisse et qu'une autre échoue. La classe peut alors être considérée comme hétérogène. Qu'en aurait-il été avec un autre énoncé de difficulté similaire ? Sont-ce les mêmes élèves qui auraient réussi ou échoué ? L'hétérogénéité aurait-elle été la même que dans le cas précédent ? Ce n'est pas certain.

¹⁰²Traduction de la version originale par D. Peret et P. Clanché.

¹⁰³Selon l'auteur, l'activité instituante « définit le sens des objets et des événements par l'établissement minutieux de conventions culturelles, de pratiques institutionnelles et des règles instituantes » (p. 335).

Ceci invite à considérer que les fondements de l'hétérogénéité sont moins à rechercher dans les caractéristiques des individus que dans celles de la situation à l'origine de leur affectation à telle ou telle position. Ainsi, l'hétérogénéité didactique peut être définie comme un effet émergeant des différents positionnements des élèves face à une situation donnée au cours de l'enseignement ; elle est à la fois spécifique de, et créée par, cette situation – même si le positionnement des élèves correspond souvent à des positions scolaires plus génériques (péri-didactiques d'après la typologie de Sarrazy).

S'il est important de souligner l'aspect institutionnel (ici didactique) de la fabrication de l'hétérogénéité, il l'est également de rappeler son inexorabilité, voire même sa nécessité. Une nécessité à considérer sous un double aspect : d'une part, elle ne peut pas ne pas être (comment un professeur pourrait-il en effet enseigner en dehors de toute situation d'enseignement, sans proposer d'exercices ou de problèmes à ses élèves générant nécessairement de l'hétérogénéité didactique ?) ; d'autre part, elle est une condition de la diffusion des savoirs (comment un professeur peut-il faire progresser ses élèves sans introduire de nouveautés ?). La création d'hétérogénéité didactique peut ainsi être rapportée à ce que Searle (1998) appelle des « règles constitutives », c'est-à-dire des règles qui « créent [...] la possibilité même de certaines activités » (p. 46). L'activité d'enseignement est rendue possible par la création d'hétérogénéité de la classe. Toute décision prise par le professeur relative à la structuration de son cours (traitement de tel ou tel problème, dans tel ou tel ordre...), génère des phénomènes d'hétérogénéisation, c'est-à-dire la création de différents positionnements parmi les élèves ; sa mission consiste à faire évoluer ces positions, c'est-à-dire à réduire les hétérogénéités créées et à en révéler d'autres, relatives à d'autres situations. L'avancée du temps didactique correspond ainsi à des successions d'hétérogénéisations et d'homogénéisations de la classe. Nous simplifierons en parlant de « processus d'hétérogénéisation ».

2. Un modèle du temps didactique dans le cadre micro-didactique de séquences d'enseignement

Un tel modèle offre un cadre théorique solide pour penser le temps didactique dans un cadre micro-didactique. Les théorisations les plus poussées de ce concept ont en effet privilégié un cadre plus macro ou méso-didactique (Chevallard, 1991 ; Mercier, 1995). Or, selon la focale choisie, le temps de la construction du savoir ne possède pas les mêmes spécificités.

Du point de vue de ses scansionnements par exemple, le temps méso ou macro didactique (à l'échelle d'une année scolaire ou d'un semestre) est bâti sur les introductions linéaires de nouveaux objets de savoir. En revanche, le temps micro-didactique se déploie dans l'espace de deux introductions successives, selon un processus plus spiralaire. Cette spirnalité trouve une illustration paradigmatique dans le cadre de la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998), par la dialectique opérée entre dévolution et institutionnalisation. Dans les phases d'institutionnalisation, le professeur manipule l'histoire didactique entamée par le processus de dévolution : il la réorganise, met en lumière ce qui est important, ce qui doit être retenu, et passe sous silence ce qui doit être oublié. Tant que cette écriture finale n'est pas produite, le sens des événements du début de l'histoire est en sursis. Le commencement et la fin prennent sens, ensemble, pour opérer un marquage de cycles toujours inscrits dans une dynamique de progression : d'où le caractère de spirnalité de ce temps micro-didactique.

Le modèle d'hétérogénéisation permet de penser une telle spirnalité puisque les phénomènes de création/réduction d'hétérogénéité didactique peuvent aussi bien être successifs qu'enchaînés. Ce n'est parfois qu'au moment de clore l'enseignement qu'est opérée une institutionnalisation relative à des connaissances mises en œuvre de manière implicite tout au début de

l'enseignement. Cette régulation finale réduit ainsi une hétérogénéisation très ancienne dans l'histoire didactique de la séquence ; entre l'un et l'autre de ces moments d'autres phénomènes d'hétérogénéisation peuvent avoir pris place.

Ici se dessine une autre spécificité du cadrage micro-didactique pour le temps didactique. Dans cette perspective en effet, le temps de l'enseignement et le temps de l'élève ne sont pas considérés indépendamment l'un de l'autre (ni hiérarchiquement¹⁰⁴) puisque c'est l'enseignement qui génère les positionnements didactiques des élèves, et c'est le déplacement de ces positionnements qui génère à son tour le temps didactique. De cette consubstantialité entre ces deux temps découle la possibilité de penser ensemble la dynamique de l'enseignement et des acquisitions sous une acception dépsychologisée puisque référée aux situations.

Enfin, le modèle d'hétérogénéisation est également compatible avec le caractère anthropologique du temps didactique de séquences d'enseignement que nous avons posé au cœur de notre définition et éprouvé empiriquement dans nos premiers résultats. Le temps didactique est le temps d'une pratique. Les scissions de ce temps correspondant aux déplacements d'hétérogénéités didactiques possèdent une dimension fonctionnelle : c'est par eux que se réalise l'enseignement ; ils sont inhérents à ce que fait le professeur *en enseignant* sans que le professeur ait à faire cela *pour enseigner*. Le modèle d'hétérogénéisation permet toutefois d'aller plus loin en établissant solidement la consubstantialité de cette dimension anthropologique (liée à la nécessité, pour le professeur, de répondre au contexte dans et par l'action) avec le caractère didactique relatif aux moyens de cette action : ce sont les propriétés didactiques des situations d'enseignement qui génèrent les phénomènes d'hétérogénéisation.

3. Interprétation des résultats précédents sous le modèle d'hétérogénéisation

Reprenons les trois groupes de professeurs là où nous les avons laissés et montrons en quoi le modèle d'hétérogénéisation offre à leur propos un surcroît d'intelligibilité.

Nous avons établi que, par leurs actions didactiques, les professeurs entretenaient un rapport plus ou moins éloigné au milieu mis en place pour leur enseignement (nous avons parlé de « distance au milieu »). La reprise de ces trois groupes identifiés par des profils de situation a été associée à une étude plus qualitative des vidéos des séquences et des entretiens réalisés. Cette mise en perspective (non détaillée ici par manque de place) a permis de définir 3 idéaltypes professoraux du point de vue des modes de créations de l'hétérogénéité didactique au cours de l'enseignement : *le planificateur*, qui anticipe la création d'hétérogénéité (groupe 1), *l'investigateur* qui la recherche (groupe 2) et *le stochastique* chez qui elle est créée de manière plus aléatoire (groupe 3).

Le planificateur – Dans notre description de profil de situation, le groupe 1 est caractérisé par le fait que le milieu "ne tient pas" sans le professeur (faible autonomie des situations). L'analyse plus qualitative de ce profil a montré que ce professeur anticipe (avec succès ou non), la nature des difficultés que rencontreront ses élèves par rapport à l'objet de savoir. Il déclare savoir ce qui leur posera problème, et agit en fonction pour préparer sa classe et planifier l'enseignement. Dans notre étude, sa leçon débute souvent par un enseignement magistral censé préparer les élèves aux exercices d'application qui

¹⁰⁴Dans le cadre méso où le temps didactique est envisagé comme la « programmabilité de l'acquisition du savoir » (Chevallard, 1991, p. 65), l'existence d'une hiérarchie entre plusieurs temporalités est généralement établie : « le temps de l'enseigné, soumis au temps didactique, le temps didactique puis le temps scolaire [...], les temps plus généraux de la société, et enfin le temps physique ou cosmique » (Mercier, 1992, p. 57).

suivront. L'hétérogénéité didactique est attendue. Le professeur tente même de la réguler avant son apparition grâce à l'enseignement d'une méthode, d'une règle, etc.

L'investigateur – Associé au groupe 2 dans l'analyse précédente, l'investigateur est caractérisé par le fait que le milieu "tient" sans sa présence directe (l'autonomie des situations est importante). Toutefois, ces situations sont également caractérisées par une focalisation importante. Dans ce groupe, le professeur ne sait pas, avant de commencer sa leçon, quel type de connaissance posera véritablement problème à la classe en rapport avec l'objet de savoir en jeu mais il cherche à le déterminer en abordant la leçon sur la base d'une planification souple destinée avant tout à « tâter le terrain » pour trouver certains lieux de création d'hétérogénéité didactique. Par exemple, dans le cas de notre étude (où la structuration conceptuelle de l'objet de savoir le permet), il propose une série d'énoncés organisés du simple au complexe (selon lui) pour déterminer le niveau de difficulté qui créera une hétérogénéisation substantielle de la classe. Nous le nommons « investigateur » en rapport avec cette attitude d'enquêteur : son dispositif vise à repérer petit à petit les variables didactiques générant des différences entre élèves.

Le stochastique – Dans le groupe 3, le professeur est caractérisé par un rapport plus "distancié" au milieu mis en place. Le profil de contrat dominant est de type empiriste et les situations d'enseignement présentent une forte variabilité du point de vue de l'assortiment global – variabilité, on le rappelle, fondée sur l'idée que les élèves doivent être confrontés au plus grand nombre de situations possibles (du point de vue de l'habillage, du contexte, etc.) pour apprendre. Ainsi le professeur paraît guidé ni par la nécessité de créer de l'hétérogénéité didactique (comme l'investigateur), ni par l'anticipation de cette hétérogénéisation (comme le planificateur). Le plus souvent, ce sont des principes génériques non liés au contenu du savoir mathématique qui justifient les dispositifs d'enseignement. Par exemple, du travail de groupe sera organisé car il serait « propice à un apprentissage coopératif », selon les termes des professeurs, la variation du type d'énoncé sera favorisée car, « en donnant l'occasion aux élèves de se confronter au plus grand nombre de contextes possibles », elle serait en elle-même « source de progression », etc. Ainsi, pour le stochastique, l'hétérogénéisation didactique de la classe, ni anticipée, ni recherchée, apparaît de manière plus aléatoire sous l'effet des situations proposées, d'où le terme de « stochastique ».

Ces trois idéal-types permettent de différencier les professeurs du point de vue de la manière dont ils ont géré la création d'hétérogénéité didactique dans leur classe. La pression temporelle semble avoir favorisé la recherche de création d'hétérogénéité didactique : elle est anticipée (planificateur) ou recherchée (*investigateur*). Plus de temps n'aurait pas rendu cette création d'hétérogénéité aussi nécessaire, ce qui peut expliquer (sous l'aspect d'une logique de la pratique) une certaine distance entre les instruments de l'avancée du temps didactique et les modes de cette avancée et par conséquent l'absence d'effets positifs du temps légal sur l'avancée du temps didactique dans les CLAP. Il n'y a pas de raison de penser que les professeurs de CLAP diffèrent du point de vue de leurs qualités d'enseignants de ceux de CLAM. Aussi, si c'est la pression temporelle qui a rendu nécessaire la recherche d'hétérogénéité didactique, c'est bien que celle-ci est une nécessité proprement pratique. Le didactique et le praxique se confondent dans le processus de l'avancée du temps didactique. Comment ? C'est ce que nous avons souhaité travailler plus particulièrement dans la dernière partie de la thèse à travers le concept de visibilité didactique.

V La visibilité didactique du professeur

Nous ne développerons pas ici tous les aspects du concept de visibilité didactique et renvoyons le lecteur à un article paru récemment (Chopin 2008). Il s'agira seulement de pointer son intérêt pour comprendre les phénomènes rapportés dans cette étude.

1. La visibilité didactique comme « possibilité de voir » l'hétérogénéisation de la classe

La visibilité didactique du professeur n'est pas à entendre comme le fait que le professeur soit plus ou moins visible (au cours de l'enseignement par exemple). La visibilité didactique correspond à la « possibilité de voir » dont bénéficie le professeur au cours du processus d'enseignement (sur le mode de la visibilité d'un conducteur automobile par exemple). Cette « possibilité de voir » concerne ici les phénomènes d'hétérogénéisation didactique de la classe. Définissant dans la partie 4 l'avancée du temps didactique comme un processus nécessaire de création et de déplacement d'hétérogénéité didactique, il n'est pas déraisonnable de poser que l'effectivité de cette avancée dépend fondamentalement de la possibilité qu'a le professeur de prendre le contrôle de tels processus.

La visibilité didactique se décline en deux dimensions : perceptive et projective.

Dans sa dimension perceptive, elle permet au professeur de prendre acte de l'hétérogénéité didactique créée, c'est-à-dire de reconnaître que les positionnements des élèves dans la classe ont été générés par les situations mises en place, en lien avec le savoir en jeu. En effet, repérer que des élèves ne répondent pas de la même façon à un problème posé est une chose, interpréter cette différence de réponse comme un signe didactique pertinent, c'est-à-dire par exemple un écart (mis à jour par tel ou tel énoncé) entre les connaissances dont dispose un élève et celles visées par l'enseignement, en est une autre. La visibilité perceptive correspond à la possibilité donnée au professeur d'interpréter didactiquement les différences de positionnements entre les élèves, c'est-à-dire de les relier aux caractéristiques didactiques des situations générant ces positionnements, et en particulier à la structure conceptuelle du savoir en jeu.

Dans sa dimension projective maintenant, la visibilité informe le professeur sur ce qu'il reste encore à réaliser comme déplacements d'hétérogénéité didactique pour mener à bien son projet d'enseignement. La pertinence informative d'un état d'hétérogénéisation donné varie en effet selon : son caractère discriminant d'une part (l'hétérogénéisation est-elle suffisante dans le groupe-classe pour justifier une régulation spécifique ou bien le nombre d'élèves concernés est-il trop faible pour que le professeur consacre du temps à une régulation ?) ; son enjeu didactique d'autre part (l'état d'hétérogénéisation produit est-il imputable à des connaissances importantes du point de vue de l'acquisition du savoir visé ?). Ces deux considérations sont indissociables. En outre, la visibilité projective souligne le caractère contextualisé de la visibilité didactique. Celle-ci dépend toujours du projet d'enseignement particulier à l'aune duquel la pertinence informative d'un état d'hétérogénéisation peut être évaluée.

Dimensions perceptive et projective sont interdépendantes dans le concept de visibilité didactique. D'une manière plus synthétique, nous dirons que la visibilité correspond à la possibilité, pour le professeur, de *contrôler* les états d'hétérogénéisation de la classe. Le terme de « contrôle » tenant réunies les dimension perceptive de la visibilité (le *contrôle de leçon* permet de vérifier les connaissances des élèves) et projective (*prendre le contrôle de quelque chose* équivaut à pouvoir en gérer l'évolution).

2. Visibilité didactique, milieu pour le professeur et praxis du professeur

La fonctionnalité pratique des trois idéals-types identifiés précédemment (planificateur, investigateur et stochastique) apparaît à travers le concept de visibilité didactique. Nous avons présentés ces trois profils comme trois manières de gérer la création d'hétérogénéité

Pour commencer rappelons que le planificateur (qui tente d'anticiper la création d'hétérogénéité didactique), comme l'investigateur (qui la recherche dans le cours même de leur enseignement) ont logiquement de plus grandes chances que le stochastique de faire apparaître des états d'hétérogénéisation pertinents pour l'enseignement. On pourrait parler de visibilité projective. Mais le planificateur et l'investigateur disposent également de plus de moyens pour reconnaître l'hétérogénéité créée (visibilité perceptive). En effet, leur niveau de référence respectif (0 et +1) leur donne plus de moyens de mettre en lien les réactions des élèves au niveau -1 avec les caractéristiques didactiques des situations qui leur ont été proposées et les spécificités du savoir en jeu : l'investigateur interprètera plus largement les réactions des élèves par rapport au canevas didactique qu'il a mis en place ; le planificateur par rapport aux anticipations des difficultés conceptuelles qu'il avait réalisées.

Qu'en est-il pour le stochastique ? Non seulement nous avons vu que la visibilité projective y est plus aléatoire, mais surtout l'identification de cette hétérogénéité didactique (visibilité perceptive) risque d'être problématique du fait de la prégnance du niveau noosphérique sur l'orientation de sa pratique en classe. En effet, de quel(s) cadre(s) ce type de professeur dispose-t-il pour interpréter les réactions de ses élèves ? Le niveau noosphérique offre un grand nombre d'explications totalement indépendantes de la spécificité didactique de la situation d'enseignement. Par exemple, les difficultés peuvent être considérées comme la manifestation de l'hétérogénéité initiale des élèves et non comme l'effet des situations proposées. Comme nous le notions au début de cette présentation, l'idée selon laquelle les élèves sont « naturellement différents » est très vive actuellement au niveau noosphérique.

Ce caractère néfaste de la prégnance du niveau noosphérique apparaît également lorsque l'on considère le modèle d'hétérogénéisation d'un point de vue plus dynamique. Pour l'investigateur et le planificateur en effet, le niveau de référence a de grandes chances de ne constituer qu'une amorce au processus d'enseignement : la mise en dialogue entre leur niveau de référence et le niveau -1 permettrait "d'activer" d'autres niveaux d'activité qui à leur tour iraient nourrir leur action. Par exemple, nous avons pu observer dans notre étude que le planificateur qui se rendait compte que les réactions des élèves n'étaient pas conformes à celles attendues dans son anticipation avait pu localement investir le niveau de la situation (niveau 0) pour ajuster son enseignement. De la même façon, l'investigateur qui parvenait à "mettre le doigt" sur les types d'énoncé posant particulièrement problème à sa classe avait la possibilité d'envisager la suite de son enseignement en conséquence, en planifiant le reste des activités (le niveau +1 prenait alors plus d'importance). Ce que nous avons appelé « bouclage souple », représenté sur la figure 4 ci-dessus, traduit cette possibilité de circulation entre les différents niveaux d'activité, favorable à l'accroissement de sa visibilité didactique puisque le professeur aura plus de moyens de contrôle des phénomènes de création et d'identification de l'hétérogénéité didactique : il disposera de davantage de cadres d'action et d'interprétation liés aux aspects situationnels, au sens didactique, de son enseignement.

Ceci est moins évident pour le stochastique. On peut en effet penser, dans ce cas, que le dialogue amorcé entre le niveau de référence (niveau noosphérique +3) et le niveau -1 ouvrirait plus difficilement au même type de circulation. Si les différences de positionnement des élèves au fur et à mesure de l'enseignement sont vues comme l'effet de différences préexistantes aux situations, celles-ci trouvent en retour leur légitimité par le constat selon lequel les élèves, *in situ*, ne réagissent pas de la même manière. Nous avons parlé de « bouclage fort » (cf. figure 4) pour décrire la possibilité d'un tel circuit fermé entre le niveau +3 et -1 au cours de l'enseignement. Le niveau noosphérique est suffisamment puissant pour fournir une explication à l'ensemble des phénomènes survenant dans la classe et en expulsant le rôle de la situation d'enseignement, et du savoir en particulier. Ainsi, dans le *bouclage fort*, une partie du milieu du professeur aurait plus de chance d'être laissée comme sclérosée :

l'influence de certains niveaux d'activité (les niveaux intermédiaires, relatifs à la situation et au savoir spécifique en jeu) serait plus facilement neutralisée. Ces niveaux jouent pourtant un rôle très important dans la visibilité didactique, et celle-ci est fondamentale pour l'efficacité de l'enseignement, comme nous le verrons pour finir.

3. Influence de la visibilité didactique sur l'avancée du temps didactique

Un indicateur de la visibilité didactique des 8 professeurs de l'étude a été construit à partir de l'idée selon laquelle la capacité du professeur à « voir » les états d'hétérogénéisation didactique de sa classe pouvait être mesurée à l'aune d'une analyse des assortiments concernant les structures TTT¹⁰⁵. Plusieurs caractéristiques de ces assortiments ont été combinées à travers une analyse factorielle de correspondances multiples : leur degré de difficulté, leur variabilité (Bru 1991), leur dépendance didactique (Vinrich 1976). Une classification hiérarchique ascendante réalisée sur les coordonnées des individus sur les trois premiers axes du compte-rendu de l'AFCM a permis de dégager trois types de visibilité (élevée, moyenne, faible).

Sur la base de cette mesure une analyse de variance à un facteur de classification a permis de montrer que la visibilité didactique était liée de manière très significative aux progressions des élèves ($p = .002$) :

Sources de variation	Somme des carrés des écarts à la moyenne	Nombre De degrés De liberté	Variance (carré moyen)	F
Effets des traitements	2,51	2	1,25	6,68
A l'intérieur des groupes	32,43	173	0,19	$p = .002$
Variation totale	34,94			

Tableau 5 – Analyse de variance (1 facteur de classification) : les progressions des élèves sont-elles liées à la visibilité didactique ?

Ce premier résultat a été complété par une analyse de segmentation montrant que c'est la visibilité didactique qui explique le plus les progressions réalisées par les élèves ($\chi^2 = 23,750$; s ; $p < .001$), avant le niveau scolaire, l'appartenance à une classe ou le temps légal. En outre, lorsque la visibilité didactique est élevée, le second facteur expliquant l'avancée du temps didactique est la classe d'appartenance, c'est-à-dire concerne les caractéristiques agrégées des pratiques d'enseignement (le degré d'adidacticité des situations proposées, la nature des régulations effectuées, etc.). Lorsque la visibilité didactique est moyenne ou faible, c'est le niveau scolaire de l'élève qui détermine sa progression et non les pratiques d'enseignement. Les élèves progressent alors d'autant plus que leur niveau initial est élevé. La visibilité didactique se dessine ainsi comme l'un des ressorts majeur pour une action didactique efficace.

Conclusion

Il s'agissait dans cette recherche de dépasser les approches provisionnelles de la question du temps de l'enseignement cristallisées dans l'idée de l'existence d'un « effet-temps ». Si le temps demeure une variable fondamentale du processus de diffusion des savoirs, ne serait-ce qu'en ce qu'il en constitue une condition première de possibilité (structurellement parlant), nos résultats établissent que son importance est à considérer dans un lien nécessaire avec le temps didactique et ses modes d'avancée. Nous avons montré que

¹⁰⁵La place manque ici pour entrer dans le détail méthodologique de la construction de notre variable. Nous rapporterons seulement le principe retenu (Cf. Chopin 2007, pour plus de précisions).

ces derniers étaient soumis de manière très significative à des contraintes diverses, actualisables en un moment donné du processus d'enseignement à travers le concept de visibilité didactique, et analysables à travers une étude du milieu pour le professeur dans la lignée par exemple des travaux déjà réalisés à partir du modèle des niveaux d'activité de Margolinas (2002).

Disons-le clairement, la variable temps légal dans notre étude a joué un rôle essentiellement phénomotechnique. Elle a "forcé" l'apparition de diverses sources d'influences sur la possibilité donnée au professeur de contrôler le processus d'hétérogénéisation didactique de sa classe dans le feu de l'action. Elle a surtout permis, résultat beaucoup plus significatif, de mettre en évidence les rapports de force entre ces différentes sources. Sans doute le choix d'autres durées pour les enseignements aurait-il abouti à des résultats différents : la distinction 2 heures / 4 heures semble avoir été particulièrement opérationnelle dans notre protocole. Il n'en demeure pas moins qu'elle a conduit de manière tout à fait généralisable à ré-envisager les effets du temps sur l'enseignement, ne serait-ce qu'en examinant les raisons pour lesquelles a pu être observée une activation plus ou moins prononcée des niveaux d'activité intermédiaires dans le milieu du professeur, ceux où la question du savoir enseigné et de ses spécificités conceptuelles a de plus grandes chances de se poser. Pour rappeler notre résultat, la pression temporelle aurait rendu plus nécessaire, d'un point de vue praxique, l'activation de ces niveaux intermédiaires, circonscrivant de ce fait le pouvoir du niveau noosphérique peu propice à un traitement des positions strictement didactiques occupées par les élèves au cours de l'enseignement.

Pour raisonner dans un cadre plus large que celui du protocole expérimental et dans une perspective praxéologique d'amélioration des conditions de l'enseignement, il va de soi que la contrainte temporelle n'est pas le moyen le plus pertinent pour renforcer l'importance des niveaux d'activité intermédiaires du milieu pour le professeur. En ce sens nos travaux font écho à l'ensemble des recherches soucieuses d'établir la nature des influences de certaines dimensions du métier du professeur sur les pratiques d'enseignement telles qu'elles se déroulent dans le cœur même de la classe : celles concernant la formation des professeurs (Marchive, 2008 ; Orange, 2006 ; etc.), les idéologies noosphériques (Roiné, 2005), les ressources dont ils disposent pour préparer leur enseignement (Gueudet & Trouche, à paraître), etc.

La visibilité didactique entend fournir un cadre permettant de penser ces rapports en lien avec leurs effets sur ce qui se passe au cœur de la classe, c'est-à-dire au moment où le professeur actualise son enseignement dans le cours même de son action, gère sur un mode non exclusivement mais nécessairement praxique l'avancée de la leçon. Elle formalise conceptuellement la consubstantialité du praxique (ou de l'anthropologique) et du didactique au niveau de l'enseignement « en train de se faire », pour reprendre une expression usitée, ce lieu que beaucoup caractérisent avec raison comme un lieu d'improvisation, que l'on reconnaîtra pour notre part et de manière plus nuancée comme un lieu d'« improvisation réglée » (Bourdieu, 2000) dont les conditions de réalisation demeurent à la portée de l'étude.

Références bibliographiques

- Bensa A. (2006), *La Fin de l'exotisme : essais d'anthropologie critique*, Toulouse: Anacharsis, 364 p., coll. « Essais ».
- Bloom B. S. (1974), « Time and Learning ». *American Psychologist*, n°29, p. 682-688.
- Bourdieu P. (1980), *Le Sens pratique*, Paris: Les Éditions De Minuit, 474 p., coll. « Le sens commun ».

- Bourdieu P. (2000), *Esquisse d'une théorie de la pratique* [Précédé de *Trois études d'ethnologie Kabyle*], Paris: Seuil, 429 p., coll. « Essais ».
- Bressoux P. (1994), « Les recherches sur les effets école et les effets maîtres », *Revue Française de Pédagogie*, n° 108, p. 91-137.
- Brousseau G. (1988), Le contrat didactique: le milieu. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 9(3), 309-336.
- Brousseau G. (1996), *Théorie des situations didactiques*. Cours donné à l'Université de Montréal en juin 1997 à l'occasion de la remise du doctorat *honoris causa*.
- Brousseau G. (1998), *Théorie des situations didactiques*, [textes rassemblés et préparés par N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, V. Warfield]. Grenoble : La Pensée Sauvage, 1998, 395 p., coll. « Recherches en didactique des mathématiques ».
- Bru M. (1991), *Les Variations didactiques dans l'organisation des conditions d'apprentissage*, Toulouse : Éditions Universitaires du Sud, 1991, 163 p.
- Bru M., Altet M. & Blanchard-Laville C. (2004), « À la recherche des processus caractéristiques des pratiques enseignantes dans leurs rapports aux apprentissages » *Revue Française de Pédagogie*, n° 148, p. 75-87.
- Carroll J.B. (1963), A Model of school learning. *Teachers college record*, 64(8), 723-733.
- Chevallard Y. & Mercier A. (1987), *Sur la formation historique du temps didactique*. IREM d'Aix Marseille, n°8.
- Chevallard Y. (1991), *La Transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné* [réédition revue et augmentée avec un exemple d'analyse de la transposition didactique d'Y. Chevallard et M.-A. Johsua], Grenoble : La Pensée Sauvage, 240 p., coll. « Recherches en didactique des mathématiques ».
- Chopin M.-P. (2007), *Le temps didactique dans l'enseignement des mathématiques. Approche des modes de régulation des hétérogénéités didactiques*. Thèse pour le doctorat de l'Université Victor Segalen Bordeaux 2, 337 p.
- Chopin M.-P. (2008), La visibilité didactique : un concept pour l'étude des pratiques d'enseignement. *Éducation et Didactique*, vol.2, n°2.
- Collinson V. & Cook T. F. (2000), « "I Don't Have Enough Time": Teachers Interpretations of Time as a key to Learning and School Change », Paper presented for the annual meeting of the American Educationnal Research Association, New Orleans, US department of education, 24
- Comenius (2002), *La Grande Didactique*. Sl : Klincksieck, 284 p., coll. « Philosophie de l'éducation ».
- Duis M. (1995), « Making Time for Authentic Teaching and Learning », *Kappa Delta Pi Records*, vol. 30, n° 3, p. 136-138.
- Duru-Bellat M. (2006), *L'inflation scolaire. Les désillusions de la méritocratie*. Paris: Éditions du Seuil , 105 p., coll. "La République des Idées".
- Esmenjaud-Genestoux F. (2002), Les assortiments didactiques. TD 2 du thème 2. *Actes de la 11ème École d'Été de Didactique des Mathématiques*. Version électronique du cd-rom d'accompagnement. Paris: La Pensée Sauvage éditions.
- Favre, J.-M. (2003), « Étude des effets de deux contraintes didactiques sur l'enseignement de la multiplication dans une classe d'enseignement spécialisé ». *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*.

- Giroux J. & De Cotret, S. (2003), « Le temps didactique dans trois classes de secondaire I (doubleurs, ordinaire, forts) », *Éducation et francophonie*, vol. XXXI, n° 2.
- Goffman E. (1991), *Les Cadres de l'expérience*. Paris: Les éditions de Minuit, 573 p., coll. « Le sens commun ».
- Gueudet G. & Trouche, L. (à paraître), "La documentation des professeurs de mathématiques". *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*. Grenoble: La pensée sauvage édition.
- Husti, A. (1992), « Le temps, une variable de la démarche pédagogique », *Temporalistes*, n° 21, p. 12-15.
- Husti A. (2001), « Temps approprié et temps mobile: un levier de changement en France », p. 117-140 in L. Dupuy-Walker & C. St-Jarre (dir.), *Le temps en éducation : regards multiples*, Sainte-Foy (Canada) : Presses de l'Université du Québec, XXIV, 434 p., coll. « Éducation et recherche ».
- Marchive A. (2006), *Approche anthro-po-didactique des phénomènes d'enseignement et de formation*. Contribution à l'étude des rapports entre pédagogie et enseignement. Note de synthèse pour l'habilitation à diriger des recherches. Laboratoire de Didactique et d'Anthropologie des Enseignements Scientifiques et Techniques - EA 2964 DAEST - Université Victor Segalen Bordeaux 2, 159 p.
- Marchive A. (2008), *La pédagogie à l'épreuve de la didactique*. Approche historique, perspectives théoriques et recherches empiriques. Presses Universitaires de Rennes, 152 p., coll. "Paideia".
- Margolinas C. (2002), Situations, milieux, connaissances. Analyse de l'activité du professeur. Cours 3, thème 2: la notion de milieu. Actes de la 11ème école d'été de didactique des mathématiques. Version électronique. La pensée sauvage éditions, 1-14.
- Mc Dermott R. & Varenne H. (1995), "Culture as disability", [traduction P. Clanché et D. Peret] *Anthropology and Education quarterly*, 26(3): 324-348.
- Mehan H. (1997), Comprendre les inégalités scolaires: la contribution des approches interprétatives. In J-C Forquin, *Les sociologues de l'éducation américains et britanniques. Présentation et choix de textes*. Paris, Bruxelles: De Boeck & Larcier, 390 p., coll. "Pédagogie", 319-350.
- Meirieu P. (1996), « Pour l'allongement des modules d'enseignement », *Cahiers pédagogiques* (supplément : « Le temps de l'élève »).
- Mercier A. (1995), La biographie didactique d'un élève et les contraintes temporelles de l'enseignement. *Recherches en didactique des mathématiques*. La Pensée Sauvage, 15(1), 43, 97-142.
- Metsker B. (2003), *Time and Learning*. ERIC Digest. ERIC Clearinghouse on Educational Management Eugene.
- Morlaix S. (2000), « Rechercher une meilleure répartition du temps scolaire en primaire pour favoriser la réussite au collège », *Revue Française de Pédagogie*, n° 130, p. 121-131.
- Morlaix S. (2006), « Qualité du temps, efficacité de l'apprentissage », *Administration et Éducation*, n°111 (Actes du XXVIII^{ème} colloque de l'AFAE, "Concordance et discordances des temps de l'Éducation), pp. 88-89.

- Orange C. (2006), Analyse de pratiques et formation des enseignants. Un point de vue didactique. *Recherche et Formation*, 51, 119-131.
- Perrin-Glorian M-J & Hersant M. (2003), Milieu et contrat didactique, outils pour l'analyse de séquences ordinaires. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 23(2), 217-276.
- Roiné C. (2005), *Étude des effets didactiques des idéologies pédagogiques*. Contribution à une approche anthropo-didactique des phénomènes d'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire. Sous la direction de B. Sarrazy, Travail d'Étude et de Recherche, Master Recherche Sciences Humaines et Sociales, mention Sciences de l'Éducation, Université Victor Segalen Bordeaux 2, 154 p.
- Sarrazy B. (1995), Le contrat didactique. *Revue Française de Pédagogie*, Note de synthèse, n° 112, p. 85-118.
- Sarrazy B. (1996), *La sensibilité au contrat didactique. Rôle des Arrières-plans dans la résolution de problèmes d'arithmétique au cycle trois*. Thèse de doctorat en sciences de l'éducation, Bordeaux : université Victor Segalen Bordeaux 2, 775 p.
- Sarrazy B. (2001), « Les interactions maître-élèves dans l'enseignement des mathématiques : Contribution à une approche anthropo-didactique des phénomènes d'enseignement », *Revue Française de Pédagogie*, n° 136, p. 117-132.
- Sarrazy B. (2002a), *Approche anthropo-didactique des phénomènes d'enseignement des mathématiques*. Contribution à l'étude des inégalités scolaires à l'école élémentaire. Habilitation à Diriger des Recherches. Université Victor Segalen Bordeaux 2.
- Sarrazy B. (2002b), Les hétérogénéités dans l'enseignement des mathématiques. *Educational Studies in Mathematics*, 49, 89-117.
- Sarrazy B. (2002), Effects of variability of teaching on responsiveness to the didactic contract in arithmetic problem-solving among pupil of 9-10 years. *European Journal of Psychology of Education*, XVII, 4, 321-341.
- Sarrazy B. (2005), *La différenciation des hétérogénéités*. Une condition de l'étude de leurs effets dans les systèmes didactiques. Cours pour la 13^e Ecole d'été de didactique des mathématiques, thème 2 : Etude d'une question vive : *Différenciations et hétérogénéités*. Sainte-Livrade, 18-26 août 2005.
- Sarrazy B. (2006), "Approche anthropo-didactique des phénomènes d'enseignement des mathématiques: fondements épistémologiques et ancrages théoriques", *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*.
- Sarrazy B. & Chopin, M.-P. (à paraître), Analyse des rapports entre efficacité et équité sous le modèle de l'hétérogénéisation didactique. Cas de l'enseignement de l'arithmétique au cycle 3. Colloque international "Efficacité & Équité en Éducation", Université Rennes 2, Campus Villejean, 19, 20 et 21 novembre 2008.
- Searle J.R. (1998), *La construction de la réalité sociale* [traduit de l'anglais par Claudine Tiercelin]. Sl: Éditions Gallimard, 303 p., coll. "nrf essais".
- Sensevy G. (1996), « Le temps didactique et la durée de l'élève. Étude d'un cas au cours moyen : le journal des fractions », *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 16, n° 1, p. 7-46.
- Smyth W.J. (1985), « Time and School Learning », p. 5265-5272 in T. Husèn, *International Encyclopedia of Education*, Oxford: Pergamon Press.

Suchaut B. (1996), « La gestion du temps à l'école maternelle et primaire: diversité des pratiques et effets sur les acquisitions des élèves », *L'Année de la recherche en sciences de l'éducation*, p. 123-153.

Talbot L. (2007), « Pratiques d'enseignement au CP et élèves en difficulté », in P. Marquet, N. Hedjerassi, A. Jarlegan, E. Pacurar, & P. Remoussard (Eds) *Actes du congrès AREF 2007* (version électronique, CD-Rom), Strasbourg, 28-31 Août 2007.

Vergnaud G. (1990), « La théorie des champs conceptuels », *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 10, n° 23, p. 133-170.

Vergnaud G. (1994), *L'Enfant, la mathématique et la réalité : problèmes de l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire*, Berne : Peter Lang, 217 p., coll. « Exploration ».

Vinrich G. (1976), *Études en didactique des mathématiques. Dépendances. Cohérence et interprétation des décisions du maître relatives à l'ordre de présentation des activités mathématiques*. DEA de 3ème cycle, 83 p.

Voigt J. (1985), « Patterns and routines in classroom interaction. *Recherches en Didactique des Mathématiques* », vol. 6, n° 1, p. 69-118.

Waaub P. (2006), *Le Temps d'enseigner*, Lovreval : Éditions Labor, 130 p., coll. « Quartier Libre ».

Une étude de la genèse des pratiques de professeurs des écoles enseignant les mathématiques

Christine MANGIANTE

Laboratoire de Mathématiques de Lens

Université d'Artois, IUFM Nord Pas de Calais

Résumé

Grâce à une méthodologie qui emprunte à la fois à la didactique des mathématiques et à la psychologie ergonomique, nous proposons une étude de la genèse des pratiques de trois professeurs des écoles lors de leur année de formation professionnelle puis lors de leur première année d'exercice.

Le modèle d'analyse mis au point permet de décrire l'activité du maître comme un processus de modifications de la tâche prescrite. L'étude de séances menées dans le cadre d'Ateliers d'Analyse de Pratiques Professionnelles (dispositif de formation centrée sur l'analyse des pratiques effectives des professeurs novices) complétée par celle de séances menées au cours de la première année d'exercice rend compte de la trajectoire personnelle de chacun des enseignants suivis et permet d'approcher la cohérence en germe dans ses pratiques.

Cette cohérence se manifeste à travers des régularités intrapersonnelles dans la façon de modifier la tâche prescrite à différents niveaux : ceux de la représentation, de la redéfinition ou de la réalisation de la tâche. De l'élaboration du projet jusqu'à sa mise en œuvre, chaque enseignant puise des informations. La façon dont chacun des trois enseignants prend en compte et analyse les trois sources d'aides et de contraintes que sont les prescriptions institutionnelles, l'activité du maître et l'activité de l'élève caractérise les pratiques de chacun.

L'analyse des pratiques observées permet de mieux comprendre comment ces pratiques sont marquées par des éléments prédéterminés qui conditionnent l'activité de l'enseignant mais aussi leur développement.

Mots clefs

pratiques enseignantes, analyse de l'activité, formation

I Problématique de la recherche

Cette recherche se présente comme une contribution à l'analyse des pratiques enseignantes dans le cadre de la didactique des mathématiques. Son objectif est de mieux comprendre comment se forment et se stabilisent les pratiques de professeurs des écoles au moment où ils entrent dans le métier. A l'origine de ce travail, il y a des questions générales à propos des pratiques de ces enseignants débutants. Comment chacun d'eux s'approprie-t-il les situations d'enseignement proposées en formation ? Comment initie-t-il, à travers ses toutes premières expériences, ses pratiques futures de l'enseignement des mathématiques ?

Inscrivant cette recherche dans le cadre de la "double approche des pratiques enseignantes" développée par Robert et Rogalski (Robert et Rogaski, 2002), nous reprenons à notre compte l'hypothèse de travail selon laquelle les pratiques enseignantes constituent un système complexe, cohérent et stable. La question initialement posée se précise alors. S'interroger sur la genèse des pratiques consiste à se demander comment peu à peu les pratiques d'un enseignant débutant s'organisent en un système cohérent. Comment se structurent, chez cet enseignant, les premiers acquis de son histoire professionnelle ? Existe-il des éléments

présents dès la formation initiale susceptibles de marquer la façon dont vont se sédimenter les premières expériences vécues au fil de la formation et de la première année d'exercice ? Comment s'installe peu à peu et se renforce une certaine cohérence de ses pratiques, cohérence qui semble assurer un lien invisible à ce système en train de s'ériger ?

En outre, si, comme nous le supposons, cette cohérence est présente dès l'année de formation alors on peut s'interroger à propos du rôle qu'elle joue dans le développement des pratiques. Cette cohérence constitue-t-elle un frein à leur évolution ou au contraire favorise-t-elle leur développement ? Cette logique interne qui s'installe dans les pratiques si elle stabilise les pratiques va-t-elle jusqu'à les figer ou faut-il voir la cohérence comme une condition favorable à l'émergence d'un système embryonnaire, base à partir de laquelle les pratiques pourraient continuer à s'enrichir ?

D'un point de vue de formateur, il est raisonnable de penser que si tout n'est pas possible pour un enseignant donné, une certaine évolution de ses pratiques est pourtant réalisable et que si tout semble déjà là, il reste pourtant un certain nombre de possibles. Au cœur de cette recherche se trouve ainsi posée la question du lien entre une possible prédétermination des pratiques et leur développement.

II Méthodologie générale

La question de la genèse des pratiques est complexe. Décrire le cheminement d'un enseignant en tenant compte des multiples influences auxquelles il est soumis tout au long de sa formation initiale n'est pas l'ambition de cette recherche. Comment, en effet, mesurer l'impact du vécu de chaque individu, de son expérience d'élève mais aussi des savoirs théoriques et pratiques rencontrés dans les séances de formation dispensées à l'IUFM et en stage ? La complexité de notre objet d'étude nous conduit à poser les limites à notre travail. Il ne s'agit pas ici d'étudier les effets de caractéristiques individuelles liées à l'histoire personnelle de chacun sur la genèse de ses pratiques mais d'étudier la trajectoire qu'il suit afin d'y déceler une cohérence en germe que nous pourrions, en partie, interpréter à la lumière de ce que nous savons de chacun ces enseignants.

La complexité des pratiques enseignantes nous incite, en outre, à chercher un moyen d'accès privilégié à ces pratiques : il s'agit de regarder leur genèse à travers l'analyse des effets d'un scénario de formation. En d'autres termes, pour étudier comment se forment les pratiques, nous regardons une intervention visant justement à travailler la formation des pratiques : les Ateliers d'Analyse de Pratiques Professionnelles.

Ces AAPP constituent un dispositif de formation au cours duquel des professeurs-stagiaires¹⁰⁶, par petits groupes, préparent et mettent en œuvre une séquence de mathématiques dans la classe d'un maître formateur. Une première séance a lieu à l'IUFM en présence des maîtres formateurs et du professeur d'IUFM. Les professeurs-stagiaires y préparent un projet de trois séances. Puis, un jour par semaine, ils se rendent dans la classe du maître formateur. Chaque séance donne lieu à une analyse "à chaud" et un temps est prévu à l'IUFM pour permettre à chaque groupe d'affiner la préparation de la séance suivante. Enfin, une séance de regroupement conduite par le professeur d'IUFM constitue un temps de mise en commun : les professeurs-stagiaires, réunis en grand groupe, visionnent des extraits de séances filmées et analysent, de manière différée, les pratiques mises en œuvre par certains d'entre eux. Ce scénario se répète ainsi trois fois dans l'année : chaque stagiaire participe à chacune de ces trois séries d'AAPP.

¹⁰⁶Nous désignons par professeurs-stagiaires, les professeurs des écoles en deuxième année de formation à l'IUFM.

Pour légitimer notre choix d'étudier les pratiques de ces enseignants à travers l'étude de ces AAPP, nous nous appuyons sur le travail de Perrin (1992) à propos de l'ingénierie didactique. Elle écrit en effet dans les conclusions de sa thèse que l'ingénierie didactique « *donne un moyen d'accès au fonctionnement réel du système par l'étude des perturbations qui lui sont apportées* » (Perrin-Glorian 1992). Modifier le réel permet de mieux le comprendre.

Rien, dans les recherches, ne s'oppose à ce que nous transposions et adaptions ce point de vue, au cas de la conception et de la mise en œuvre d'un scénario de formation et nous admettons par conséquent que le scénario de formation choisi, parce qu'il vise la formation des pratiques, fournit les moyens de mieux comprendre cette genèse.

Ainsi, la méthodologie adoptée pour ce travail consiste à suivre des professeurs-stagiaires et à décrire ce qui se passe du moment de la préparation du projet de séquence jusqu'à sa mise en œuvre tout en tenant compte des effets du scénario de formation sur leurs pratiques, c'est-à-dire de ce qui est dû au scénario lui-même (contraintes imposées par l'organisation des AAPP, choix des situations faits par les formateurs..etc.)

III Cadres théoriques

Comme nous l'avons déjà indiqué, cette recherche se situe dans la perspective de la "double approche des pratiques enseignantes" développée par Robert et Rogalski puisque nous retenons de ces travaux l'hypothèse de travail selon laquelle les pratiques enseignantes sont complexes, stables et cohérentes. Cette hypothèse paraît raisonnable car un professionnel dont les choix et les actes seraient désorganisés, incohérents, sans logique auraient trop de difficultés à assumer de manière durable ses fonctions. Mais, avant d'aller plus loin dans l'exposé des concepts théoriques retenus, il convient de préciser ce que nous entendons par "cohérence".

1. Cohérence des pratiques, de quoi parle-t-on ?

Certaines des recherches menées dans le cadre de la double approche ont mis en évidence la cohérence des pratiques d'enseignants anciens dans le métier. Les méthodologies utilisées dans ces travaux consistent à effectuer un "découpage" des pratiques observées en différentes composantes (Massetot 2000) ou en différentes dimensions (Roditi 2001) pour ensuite chercher d'éventuelles oppositions entre les différents éléments obtenus grâce à ce découpage.

Dans son travail de thèse, Masselot cherche à repérer l'influence de la formation initiale sur les pratiques de professeurs des écoles. A cette fin, est proposé un découpage du travail de l'enseignant en cinq composantes complémentaires : le choix de la situation pour l'enseignant, la fiche de préparation, la consigne, les moments de recherche réservés aux élèves, les phases de mise en commun.

Au terme de l'analyse de ces composantes, une synthèse des résultats met en évidence une cohérence à travers les choix de chaque enseignant. L'analyse croisée des cinq composantes retenues fait apparaître, en effet, que ce qui lie ces composantes : une certaine logique propre à chacun, une certaine cohérence. Sont ainsi mises en parallèle des régularités ou des différences portant sur les contenus, les tâches proposées, l'élaboration du projet de l'enseignant avant la séance, les mises en actes du projet. La cohérence des pratiques est donc approchée, ici, en comparant des observables (les cinq composantes analysées) afin de vérifier non seulement qu'on ne décèle pas opposition entre elles mais qu'une "certaine logique" les lie. Cette logique diffère d'un enseignant à l'autre.

Un autre travail de recherche contribue à l'étude de cette cohérence des pratiques. La question centrale posée, dans le travail de Roditi, est celle de la régularité et de la variabilité des pratiques ordinaires, dans le cas précis de l'enseignement de la multiplication des nombres décimaux en classe de sixième.

Les constats de régularité permettent d'évaluer les contraintes communes qui pèsent sur les enseignants observés. Ces contraintes expliquent, au niveau global, une grande convergence de leurs projets : durée des séquences, contenus abordés, présentation des savoirs... Les constats de variabilité sont interprétés comme l'investissement d'une marge de manœuvre dont chacun dispose par delà ces contraintes. Au-delà de la prise en compte des contraintes et des marges de manœuvre, la pratique de chaque professeur est observée dans son ensemble, dans et en dehors de la classe afin de rendre compte de la cohérence de ses choix. Plus précisément, Roditi confirme, pour chaque enseignant suivi et pour chaque séance observée, l'existence d'une cohérence entre le projet et sa réalisation.

Il s'agit donc là encore de rendre compte de la cohérence des pratiques en comparant des résultats recueillis à partir de différentes observables (les activités effectives et les scénarios prévus) afin d'y repérer d'éventuels décalages. Pour chaque individu, se manifeste une cohérence dans la façon dont il investit la marge de manœuvre dont il dispose.

Dans le langage courant, une chose est cohérente ou ne l'est pas. Mais, dans ces travaux, la cohérence apparaît, certes, comme une propriété commune aux pratiques enseignantes mais en même temps, il est clair que ce qui caractérise cette cohérence diffère d'un enseignant à l'autre. Il ne s'agira donc pas, dans notre travail, de se contenter de montrer que les pratiques de tel enseignant sont cohérentes ou ne le sont pas mais de s'intéresser à cette *logique* évoquée par Masselot c'est à dire à ce qui, pour chaque enseignant, caractérise la cohérence de ses pratiques.

2. Un certain point de vue pour approcher la cohérence des pratiques

Si nous retenons des travaux que nous venons d'évoquer, l'idée de l'existence de cette logique interne aux pratiques enseignantes, nous en proposons, toutefois une autre approche. Contrairement aux méthodologies employées par Masselot et Roditi, notre démarche vise, non pas à découper les pratiques en différents éléments pour ensuite les mettre en parallèle mais à mettre au point un modèle d'analyse de l'activité du maître qui fournit une première série de résultats à partir desquels nous mettons en évidence une certaine "logique" qui guide l'action du maître. Ce choix s'appuie sur des hypothèses que nous posons comme préalables à notre étude, avant de chercher à les valider.

La première hypothèse posée est que les pratiques d'un enseignant sont cohérentes à partir du moment où celui-ci s'est donné un projet général d'enseignement¹⁰⁷ et possède les moyens suffisants pour le mettre en œuvre (au moins partiellement). Alors, lorsque cette cohérence existe, ce qui fait cette cohérence est caractéristique de cet enseignant et sert de guide à son action.

La seconde hypothèse est que ce projet se développe dès la formation initiale. Ainsi, nous supposons que tout en s'appropriant les projets proposés par les formateurs dans le cadre de ces ateliers, le professeur novice élabore son projet général d'enseignement ainsi que des moyens pour l'appliquer. Nous supposons que cette appropriation s'accompagne de modifications (aussi minimales soient-elles) révélatrices de la cohérence en germe dans leurs

¹⁰⁷ Il s'agit des grands choix stratégiques (qui dépendent en partie des représentations de l'enseignant à propos des différentes théories de l'apprentissage)

pratiques individuelles. Selon cette hypothèse, les pratiques des enseignants encore en formation s'organiseraient peu à peu en un système cohérent à travers l'appropriation des situations d'enseignement qui leur sont proposées et que cette appropriation s'accompagne de la création d'un écart (aussi minime soit-il) entre le projet initial et le projet réalisé.

Ces hypothèses induisent des choix d'ordre méthodologique. Considérant que pour s'approprier une situation, celui-ci doit nécessairement apporter des transformations (même minimales) au projet initial, nous décrivons l'activité du maître comme un processus de modifications. Ainsi, nous renonçons à rechercher des traces de la cohérence à partir d'observables issues directement des pratiques et nous choisissons de mettre au point un modèle d'analyse visant à décrire l'activité du maître.

Empruntant des concepts à la fois à la psychologie ergonomique et à la didactique des mathématiques, notre approche est double.

D'une part, nous étudions les choix de chaque enseignant comme ceux d'un individu en situation de travail, (un travail qui comporte ses contraintes, ses habitudes, ses difficultés) en tenant compte de ses caractéristiques personnelles.

D'autre part, nous identifions les contenus mathématiques en jeu, les savoirs mathématiques et didactiques qu'il doit mobiliser pour réaliser la tâche et nous observons les gestes professionnels qu'il met en œuvre pour réaliser les processus de dévolution, de régulation et d'institutionnalisation.

IV Mise au point d'un modèle d'analyse de l'activité du maître

Le point de départ de l'élaboration de notre méthodologie d'analyse est un schéma proposé par Jacques Leplat dans « Regards sur l'activité en situation de travail ». (Leplat 1997, p.17). Celui-ci y décrit l'activité de l'agent comme une succession de tâches et nous reprenons une partie de ce schéma.

La tâche représentée par l'agent dépend bien évidemment de la tâche qui lui a été prescrite. Cette tâche correspond à la question : "Qu'est-ce que vous croyez qu'on attend de vous ?"

Mais, la tâche prescrite n'est qu'un modèle imparfait car très souvent définie seulement par son but. Pour opérationnaliser cette tâche, l'agent doit prendre en charge la part d'implicite inhérente à cette tâche. Ce faisant, il redéfinit la tâche en fonction de ses propres caractéristiques personnelles (liées à sa formation, à ses conceptions sur les mathématiques et leur enseignement, à sa tolérance et son attitude vis-à-vis des contraintes que lui impose l'exercice de son métier) et de ses propres finalités.

La tâche réalisée est celle qui correspond à ce que fait effectivement de l'agent au moment où il exécute la tâche.

L'agent n'étant pas un simple exécutant de la tâche qui lui a été prescrite, des écarts se créent entre ces différents types de tâches.

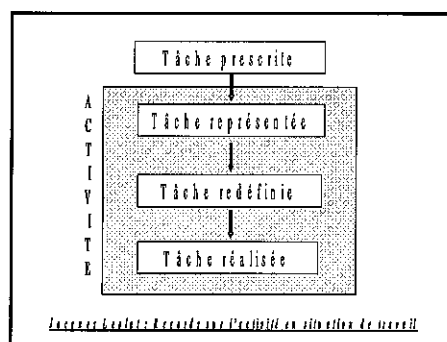


Fig.1

Le schéma proposé par Leplat est général, centré sur la tâche et non sur l'agent chargé de l'exécuter. Pour l'adapter à notre objet d'étude et à notre problématique, il convient de le modifier. Cette adaptation est constituée de trois étapes.

Première étape : Transposition du schéma de Leplat à la situation de formation

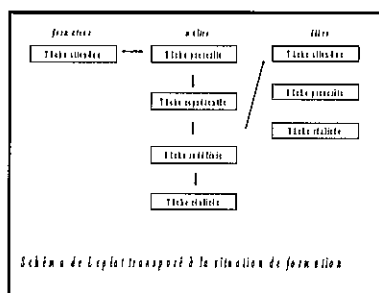


Fig.2

Nous transposons ce schéma dans le cadre d'une situation de formation en faisant apparaître en parallèle l'activité du formateur, celle du maître et celle de l'élève.

Sur ce schéma, figure, du côté du maître, la tâche prescrite. Il s'agit de la tâche prescrite au professeur-stagiaire par le (ou les) formateurs) au moment de la préparation de la séance. La tâche est ici prescrite de manière plus ou moins implicite. Elle correspond plus ou moins fidèlement à la tâche attendue par le formateur du professeur-stagiaire.

Du côté de l'élève, est mentionnée la tâche prescrite. Il s'agit de la tâche prescrite aux élèves par le professeur-stagiaire au cours de la séance. Elle correspond plus ou moins fidèlement à la tâche attendue par le professeur-stagiaire des élèves. Cette tâche attendue est déduite de l'activité du maître. A travers la façon dont il se représente, redéfinit et réalise la tâche qui lui a été prescrite par le(ou les) formateur(s), le professeur-stagiaire détermine ses propres attentes vis-à-vis des élèves.

Deuxième étape : centration de l'activité à la fois sur la tâche et sur le sujet

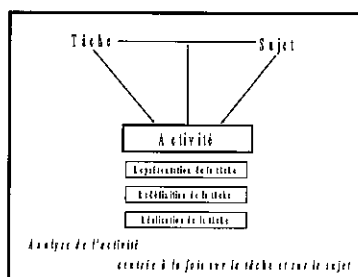


Fig.3

Le schéma proposé par Leplat est centré sur la tâche. Pour répondre à la problématique qui est la nôtre, nous cherchons à déceler, pour chacun des enseignants suivis et pour chacune des séances observées, ce qui est à l'origine des écarts constatés entre le projet initial et sa mise en œuvre (quels sont les savoirs mathématiques et didactiques mobilisés ? quels sont les gestes professionnels utilisés ?...). C'est pourquoi, nous faisons le choix de prendre en compte l'activité et non la tâche, c'est-à-dire tout ce que l'enseignant met en œuvre pour exécuter cette tâche.

Cela nous conduit à définir trois niveaux ou positions du maître :

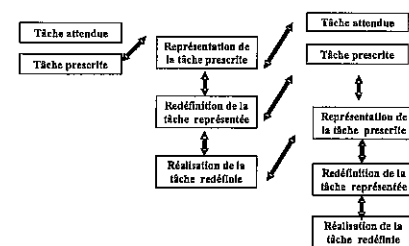
- La représentation de la tâche (prescrite)¹⁰⁸ : tout ce que fait l'agent pour se représenter la tâche prescrite.
- La redéfinition de la tâche (représentée) : tout ce que fait l'agent pour redéfinir la tâche représentée.
- La réalisation de la tâche (redéfinie) : tout ce que fait l'agent pour réaliser la tâche redéfinie.

L'étude de l'activité du maître consistera à décrire comment le maître passant d'une position à l'autre (certaines peuvent avoir lieu simultanément) prépare et met en œuvre la séance. L'analyse des entretiens consistera pour l'essentiel à cerner sur quel niveau (ou position) porte les échanges.

Troisième étape : prise en compte de la complexité des pratiques par un feuilletage de l'activité

Cette dernière étape est motivée par la volonté de prendre en compte la complexité de l'activité du maître. Notre modèle fait apparaître trois niveaux qui ne sont pas sans liens. Par exemple, lorsque le maître redéfinit la tâche qui sera la sienne, il interroge la façon dont il s'est représenté la tâche (niveau situé en amont sur notre schéma) et, en même temps, il anticipe sur la réalisation de la tâche (niveau situé en aval sur notre schéma). Notre intention est donc d'étudier l'activité du maître en effectuant un "feuilletage" de ces trois niveaux. Feuilletter un livre, c'est regarder (rapidement) chaque page pour avoir une idée de l'ensemble du livre. De la même façon, nous étudions l'activité du maître dans sa globalité en prenant en compte les interactions entre représentation, redéfinition et réalisation de la tâche. Nous étudions chacun de ces niveaux les uns après les autres comme si nous regardions successivement les "pages" d'un livre tout en gardant en mémoire les liens qui existent entre elles au sein de cet "ouvrage".

¹⁰⁸Afin de ne pas alourdir notre discours, nous ne préciserons plus, par la suite, les qualificatifs notés ici entre parenthèses. Ils seront implicites.



"Feuilleter l'activité"
afin de prendre en compte sa complexité

Fig.4

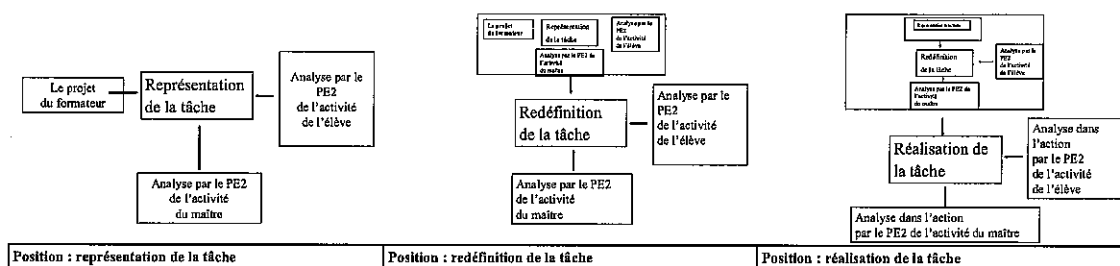


Fig.5

Trois sources d'aides et de contraintes

Il apparaît à l'examen de ce modèle d'analyse, qu'il existe trois sources d'informations à partir desquelles le maître se représente, redéfinit et réalise la tâche (sur chacun des schémas précédents, trois cadres sont reliés par des flèches au cadre central).

La tâche prescrite constitue une première source d'informations. En effet, le maître analyse et utilise les indications données par le formateur pour préparer et mettre en œuvre la séance. Les prescriptions du formateur constituent donc pour le stagiaire à la fois des aides et des contraintes qu'il va, plus ou moins, utiliser pour se représenter, redéfinir et réaliser la tâche. Plus tard, devenus titulaires, les enseignants analysent et prennent plus ou moins en compte les prescriptions institutionnelles.

Une deuxième source d'aides et de contraintes provient de l'analyse que fait le maître de sa propre activité (ce qu'elle sera, ce qu'elle devrait être, ce qu'elle est ...)

L'analyse de l'activité des élèves constitue une troisième source d'aides et de contraintes. Pour se représenter, redéfinir et réaliser la tâche, le maître analyse (par anticipation puis dans l'action) l'activité des élèves.

Nous complétons donc la description de l'activité du maître par l'étude de la façon dont celui-ci prend en compte trois sources d'aides et de contraintes : son analyse des prescriptions institutionnelles, de l'activité du maître et de l'activité des élèves.

Si le savoir mathématique en jeu n'apparaît pas comme une source d'aides et de contraintes dans notre modèle d'analyse, il ne faut pas pour autant en conclure que nous ne le prenons pas en compte. Bien au contraire. Le savoir mathématique n'est pas une quatrième source parce que justement l'analyse que fait l'enseignant de ce savoir est présente dans chacune des trois autres sources. En effet, l'analyse des prescriptions institutionnelles, l'analyse de sa propre activité et l'analyse de celle des élèves dépendent de l'analyse qu'il fait du contenu

mathématique. Ainsi, les savoirs mathématiques mobilisés ou non par chaque enseignant sont susceptibles d'expliquer les écarts constatés entre la tâche prescrite et la tâche réalisée.

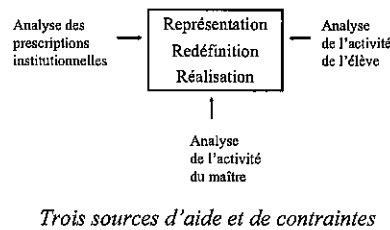


Fig.6

V Démarche d'analyse des données

1. Méthodologie de recueil des données

Le recueil des données s'est déroulé sur trois années consécutives. Au cours de la première année, nous avons recueilli des données afin de caractériser le dispositif : le situer par rapport à des cadres théoriques utilisés de manière implicite par ses concepteurs et dégager les effets attendus a priori par ces derniers. Puis, au cours de la deuxième année, nous avons suivi plusieurs groupes de professeurs-stagiaires durant les trois séries d'AAPP dans les classes de maître-formateur. Enfin, au cours de la troisième année, nous avons retenu les données de trois professeurs-stagiaires parmi ceux suivis l'année précédente car ces trois stagiaires paraissaient, d'après notre expérience de formateur, emblématiques par rapport aux questions que nous nous posons. Nous avons filmé des séances afin d'étudier comment avaient évolué les pratiques de ces trois professeurs des écoles au cours de la première année d'exercice et, ainsi, affiner les résultats obtenus à propos des effets du dispositif de formation.

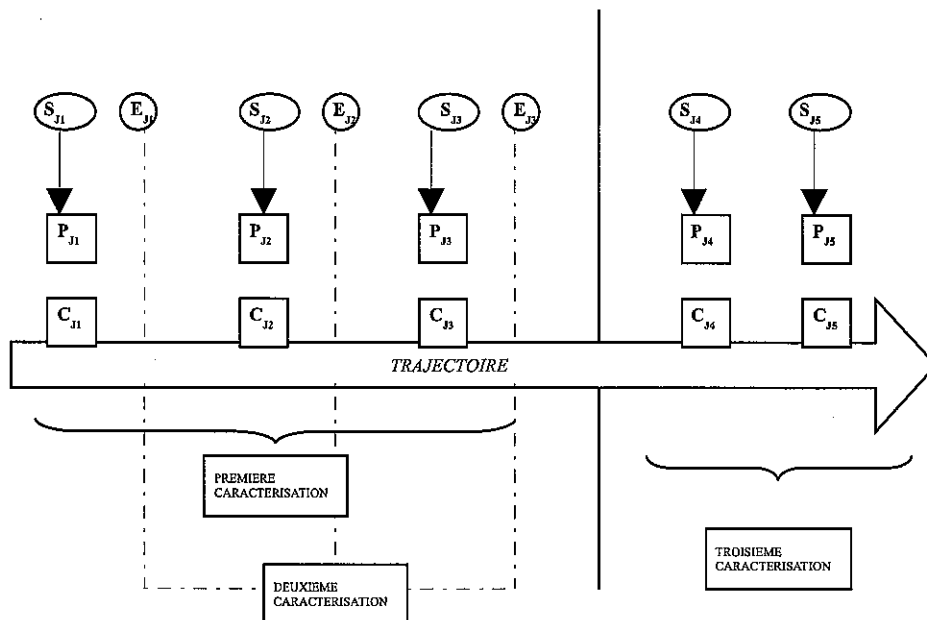


Fig.7

Pour chacun des trois enseignants suivis, nous avons donc analysé cinq séances et à chaque individu correspond un parcours : $S_1, S_2, S_3 \dots$ constitué d'une succession de moments au cours desquels celui-ci a été amené à élaborer, préparer et mettre en œuvre une situation d'enseignement. Chaque séance S_j est suivie d'un entretien E_j . Notre modèle d'analyse, nous permet d'obtenir des exemples de contextualisation du processus de modifications : $C_{S1}, C_{S2}, C_{S3} \dots$. De l'examen de ce "produit" du modèle d'analyse, nous en déduisons des caractéristiques, des régularités. Ce qui est commun et évolutif dans $C_{S1}, C_{S2}, C_{S3} \dots$ permet de rendre compte de la trajectoire suivie par chaque individu. Enfin, à travers la description de cette trajectoire nous dégagons la cohérence qui peu à peu se stabilise dans les pratiques de l'individu observé. L'analyse des entretiens « à chaud » et en différé contribue à mettre en évidence et à caractériser la cohérence des pratiques.

2. Une analyse à la fois locale et globale

Ces exemples de contextualisation du processus de modifications offrent deux types d'observables. Le modèle d'analyse permet, tout d'abord, de décrire le mode d'appropriation de chaque situation comme un processus de modifications. De plus, il nous renseigne sur la façon dont chaque individu prend en compte et analyse trois sources d'aides et de contraintes : les prescriptions institutionnelles, l'activité du maître et celle de l'élève.

Ces deux types d'observables sont fortement liés. Tout d'abord, il existe un lien qui provient du modèle d'analyse lui-même. La façon dont chacun prend en compte et analyse les trois sources d'aides et de contraintes se déduit de l'analyse de la représentation, de la redéfinition et de la réalisation de la tâche et par conséquent du processus de modifications ainsi mis en évidence. Mais, conjointement, c'est précisément les priorités qui s'installent entre les trois sources d'aides et de contraintes qui sont à l'origine des modifications apportées au projet initial. Ces priorités guident les décisions de l'enseignant. Une certaine dynamique se crée. Les modifications s'organisent en un processus plus ou moins important de la représentation à la réalisation de la tâche.

Ces observables nous fournissent pour chaque individu des informations quant à la façon dont il s'approprie une situation donnée (étude locale à un temps t) mais aussi des informations quant à la trajectoire suivie (étude globale au fil du temps). Et c'est à travers la description de cette trajectoire que nous observons pour chaque individu les manifestations de la cohérence de ses pratiques.

3. Un cheminement en quatre étapes

L'analyse des données progresse au cours de quatre étapes vers la mise en évidence et la caractérisation d'une certaine cohérence qui s'installe peu à peu dans les pratiques de chacun des enseignants suivis.

Dans une première étape, l'étude des séances conduites dans le cadre de la troisième série d'AAPP constitue une première approche de la cohérence qui se développe dans les pratiques de ces trois enseignants sur le point d'achever leur formation initiale. L'ordre dans lequel les données sont analysées ne correspond donc pas à l'ordre chronologique. Nous commençons par étudier la dernière des trois séries d'Ateliers car les séances menées sont davantage représentatives de la cohérence qui s'installe dans les pratiques des enseignants suivis.

La deuxième étape consiste à analyser les séances conduites au cours des deux premières séries d'AAPP afin de confirmer cette première approche et aboutir à une première caractérisation. L'existence de traces de cette cohérence déjà en germe au début de la

formation des stagiaires, montre qu'il existe une certaine prédétermination dans l'émergence de cette cohérence.

Ces deux premières étapes fournissent 9 exemples de contextualisation du processus de modifications (3 par stagiaires) fonctionnant dans 3 séries d'Ateliers différents, dans 5 classes et 5 maîtres formateurs différents, autour de 4 projets d'enseignements différents. Elles permettent à partir de la description de ces 9 exemples de processus de modifications, de déduire des résultats à propos du fonctionnement du processus de modifications par lequel ces trois enseignants s'approprient les projets proposés par les formateurs (ce qui initie le processus, ce qui « l'alimente », s'il est continu ou non, les paramètres susceptibles de le renforcer ou de l'affaiblir...). Ces résultats n'apportent pas de réponses directes aux questions posées mais permettent de déduire du parcours de chaque individu une caractérisation de la cohérence installée dans les pratiques au cours de la troisième série d'AAPP mais déjà en germe au cours des deux premières séries. Des régularités par rapport à la façon dont chacun prend en compte et utilise les trois sources d'aides et de contraintes apparaissent. Ces régularités conditionnent les décisions des enseignants et par là même jouent sur les modifications apportées. La façon dont chacun prend en compte et analyse les trois sources d'aides et de contraintes ainsi que les modalités du processus de modifications engagé constituent des éléments spécifiques à chacun des trois enseignants et prédéterminent leurs pratiques.

La troisième phase du travail est l'analyse des entretiens des trois séries d'AAPP. Cette partie permet de décrire le regard que porte, a posteriori, chaque enseignant au processus de modifications dans lequel il s'est engagé et apporte des précisions à la caractérisation de la cohérence des pratiques pour chacun des trois stagiaires. Cela permet d'obtenir, dans un premier temps, les choix d'analyse des formateurs et des formés. Caractériser (compte tenu des contraintes des formateurs) l'analyse a posteriori de chacun des stagiaires nous permet de voir si ce qui guide leurs choix de la préparation de la séance à la mise en œuvre coïncide avec ce qui guide leur analyse a posteriori. Il s'agit donc de vérifier si la façon dont chacun s'engage dans un processus de modifications à partir d'une recomposition d'informations issues des trois sources d'aides et de contraintes coïncide avec le regard qu'il porte, a posteriori, sur ce même processus.

La volonté de déceler l'évolution des pratiques conduit, alors, dans une quatrième et dernière étape du travail, à suivre les trois enseignants au cours de leur première année d'exercice. Ce suivi consiste à faire fonctionner à nouveau notre modèle d'analyse afin de déceler comment évoluent les pratiques de ces trois enseignants. Les trois premières parties ont mis en évidence des éléments susceptibles de marquer les pratiques, il s'agit ici de décrire un éventuel développement de ces pratiques.

Les paragraphes suivants retracent le parcours des trois enseignants suivis : Julie, Pierre et Cécile. Pour chacun d'eux, nous présentons la cohérence mise en évidence à travers l'étude de leurs pratiques, les rapports de priorité qui se sont installés entre les trois sources d'aides et de contraintes ainsi que l'évolution constatée au cours de la première année d'exercice. Nous ne pouvons, ici, décrire les nombreuses séances observées néanmoins nous en détaillerons trois qui sont emblématiques par rapport aux questions que nous nous posons. Il s'agit de trois séances menées par Julie, Pierre et Cécile, au cours de la troisième série d'AAPP, dans une classe de CE1. Les grandes lignes de la séquence sont fixées au moment de la première séance de préparation avec le maître-formateur et le PIUFM. Le projet retenu par le groupe est l'introduction de la multiplication.

VI Trajectoire suivie par Julie

1. Analyse d'une séance emblématique : vers une première caractérisation de la cohérence en germe

Julie est chargée de mener la première séance (cf. Annexe A). Le projet initial, mis au point pendant la séance de préparation, est d'introduire l'écriture multiplicative comme une écriture plus économique de l'addition répétée. Dans ce but, le maître-formateur conseille à Julie de mettre en place une situation de communication : les enfants doivent commander les cubes nécessaires à la construction de tours de même taille et laisser leurs calculs apparents (par ex : $15+15+15 + \dots$). Julie devra, au cours d'une phase de synthèse, introduire le signe "x" afin de simplifier les écritures utilisées par les enfants.

La méthodologie que nous avons mise au point nous permet de déceler et de décrire comment se contextualise le processus de modifications.

Au moment de la préparation de la séance, Julie pense ne pas réussir à gérer le projet des formateurs à cause de contraintes matérielles (préparer les cubes nécessaires) et des difficultés liées à la gestion de la classe (organiser les commandes et les déplacements). Elle fait, alors, le choix de modifier le projet initial. Elle supprime la situation de communication et met des cubes à disposition des élèves. Elle propose trois exercices issus du fichier Cap Maths¹⁰⁹ sans tenir compte de la progression dans laquelle ils s'inscrivent. Il s'agit de calculer le nombre de cubes nécessaires pour construire huit tours de cinq cubes puis douze tours de quinze cubes et enfin deux tours, l'une de douze et l'autre de quinze cubes.

Les modifications apportées ne sont pas sans conséquence sur la tâche réalisée par les enfants. Ceux-ci construisent des tours puis pour obtenir le nombre de cubes nécessaires, ils dénombrent les cubes utilisés. Rien ne les contraint à écrire les calculs à effectuer. L'objectif que Julie s'est fixé n'est pas en cohérence avec le parcours proposé aux élèves. Au cours de la mise en œuvre, elle n'anticipe pas le "piège" dans lequel elle est en train de s'enfermer et se retrouve en difficulté lorsqu'elle tente d'institutionnaliser l'écriture multiplicative comme une écriture plus économique.

Caractérisons ce processus au regard des trois positions du maître définis précédemment : la représentation de la tâche prescrite, la redéfinition de la tâche représentée et la réalisation de la tâche redéfinie. Lorsqu'elle rédige sa fiche de préparation, Julie, analyse par anticipation l'activité du maître. Estimant qu'il lui sera difficile de gérer la situation de communication, elle décide de s'écarter du projet du formateur. Le processus est initié, au niveau de la redéfinition de la tâche par anticipation sur sa réalisation.

Elle décide, alors d'utiliser Cap Maths afin de mettre au point son projet mais le projet ainsi construit est une recomposition d'éléments puisés dans le projet des auteurs de Cap Maths avec celui des formateurs et nous faisons l'hypothèse que Julie ne veille pas à s'assurer que le tout soit cohérent par rapport aux objectifs fixés. La redéfinition de la tâche se fait sans convoquer à nouveau la représentation de la tâche prescrite.

Au moment de la mise en œuvre, Julie n'exige pas l'écriture de calculs. Ce faisant, elle s'éloigne de son projet et crée un décalage encore plus important avec celui proposé par la formatrice. Les modifications créées à travers la redéfinition de la tâche au moment de la rédaction de la fiche de préparation perdurent et s'amplifient au moment de la réalisation de la tâche.

¹⁰⁹Cap maths CE1, Guide des activités, édition 2000 Roland Charnay, Marie-Paule Dussuc, Paul Madier, Hatier

L'étude du processus de modifications permet de caractériser les choix de Julie et de rendre compte de la cohérence de ses pratiques.

Le processus de modifications dans lequel s'est engagée Julie a été initié par sa propre analyse a priori de l'activité du maître. Julie se donne des objectifs puis quoiqu'il arrive, elle s'efforce de les atteindre. Elle n'hésite pas à s'écarter de la tâche prescrite par le formateur. Tout se passe comme si elle prenait peu en compte l'activité des élèves. Au moment de l'institutionnalisation, elle sollicite les élèves à propos des calculs effectués mentalement : « *On a compté de 30 en 30 ; donc, on a ajouté plusieurs fois le même nombre. Alors, vous savez quelle opération on a faite là ?* » Pour les enfants, il s'agit d'une addition. Julie ne semble pas avoir conscience du fait que les enfants n'ont pas eu à mobiliser le savoir qu'elle cherche à institutionnaliser

2. Analyse des autres séances

Les autres séances menées par Julie au cours des deux autres séries d'AAPP ont été analysées. Les trois exemples de contextualisation du processus de modifications que nous avons obtenus révèlent des régularités dans la façon dont la stagiaire prend en compte et analyse les trois sources d'aides et de contraintes. Julie analyse l'activité du maître et décide de la façon dont elle souhaite organiser et mettre en œuvre le projet qui lui est proposé. L'idée qu'elle se fait de ses propres capacités lui sert de repère dans cette analyse. Julie modifie le projet en fonction de ce qu'elle se sent capable de faire ce qui la conduit parfois à s'éloigner des prescriptions institutionnelles. Les séances observées montrent en outre qu'elle analyse peu par anticipation l'activité des élèves et utilise peu de moyens de contrôle de cette activité au cours de la mise en œuvre du projet.

Les régularités intrapersonnelles mises en évidence permettent de définir un certain profil. Les difficultés de la stagiaire à prendre en compte les apprentissages des élèves le caractérisent. Ce qui guide les choix de celle-ci avant et pendant la séance, provient de son analyse a priori de l'activité du maître. Julie poursuit l'objectif fixé. Si les élèves se heurtent à des difficultés au cours de leur apprentissage, la stagiaire expose le savoir visé par la séance et l'institutionnalise, s'écartant, si nécessaire, des documents sur lesquels elle s'est appuyée pour préparer la séance.

De l'élaboration du projet jusqu'à sa mise en œuvre, le professeur-stagiaire puise des informations afin d'être guidés dans ses choix, mesurer les contraintes auxquels il est soumis et investir une certaine marge de manœuvre. La méthodologie que nous avons mise au point pour décrire l'activité du maître, nous conduit à considérer l'analyse de la tâche prescrite par le formateur, l'analyse a priori de l'activité du maître et l'analyse a priori de l'activité de l'élève.

Parmi ces trois sources, c'est l'analyse de l'activité du maître qui prime. Julie détermine son projet à partir du savoir à institutionnaliser et d'une organisation de la séance en deux temps (manipulation, institutionnalisation). Cette organisation vise à lui assurer un certain confort en lui évitant une prise de risque qu'elle juge inutile. Pour mener son projet à bien, Julie n'hésite pas à modifier les documents sur lesquels elle s'appuie et à s'éloigner des prescriptions institutionnelles. L'analyse de l'activité des élèves pèse peu dans les décisions que prend Julie.

3. Analyse des entretiens

Les difficultés auxquelles sont confrontées les stagiaires ne sont pas forcément celles prévues par le formateur. Lorsqu'un décalage est mis en évidence entre la tâche prescrite et la tâche

réalisée, l'écart peut provenir de la réalisation de la tâche, mais aussi de la redéfinition de la tâche ou encore de la représentation de la tâche. Il est d'autant plus difficile pour le formateur de prévoir les problèmes rencontrés par les stagiaires que la situation proposée est peu robuste. En effet, si le stagiaire modifie la tâche prescrite au moment de la représentation et/ou de la redéfinition, il va devoir réaliser une tâche qui n'est pas celle prévue par le formateur et faire face, au moment de la mise en œuvre, à des problèmes auxquels il ne s'attendait pas. Il est, par conséquent, difficile pour le formateur d'anticiper sur ce que sera l'activité du maître.

C'est précisément ce qui s'est passé au cours de la séance présentée plus haut à propos de la multiplication. Julie a modifié le projet au moment où elle l'a préparé seule. Il était difficile pour le formateur d'anticiper sur les difficultés rencontrées par la stagiaire au moment de la mise en œuvre. Néanmoins, au cours de l'entretien, à partir de l'observation de la séance, le groupe, aidé par le formateur doit pouvoir "redérouler" le processus de modifications, comprendre l'origine des difficultés rencontrées par Julie au moment de l'institutionnalisation et cerner les effets des choix effectués sur les apprentissages réalisés.

Cependant, il n'est pas facile pour les formateurs d'amener Julie à adopter un point de vue réflexif sur sa propre prestation. L'analyse des entretiens confirme, en effet, son autonomie vis-à-vis des prescriptions institutionnelles. La stagiaire oppose une certaine résistance à la formation qui lui est proposée. Au début des entretiens, Julie évoque, le plus souvent, l'activité des élèves. Les formateurs doivent la solliciter à plusieurs reprises avant qu'elle accepte d'analyser la façon dont elle a exécuté la tâche qui lui a été prescrite. Julie préfère laisser penser qu'elle a agi avec maladresse plutôt que confier ses vraies difficultés. Ce n'est que vers la fin des entretiens qu'elle laisse, parfois, transparaître ses préoccupations.

4. *Suivi au cours de la première année d'exercice*

Le suivi de Julie au cours de sa première année d'exercice en tant que titulaire, montre que libérée des contraintes dues à la formation, Julie fait preuve de plus d'autonomie encore vis-à-vis des prescriptions institutionnelles. L'enseignante utilise les guides pédagogiques comme des ressources dont elle puise certains éléments qu'elle juge utiles à la préparation et à la mise en œuvre de son propre projet. Ce projet est déterminé essentiellement par le savoir que Julie a décidé d'institutionnaliser. Une fois son objectif fixé, Julie organise la séance en fonction de celui-ci et s'autorise à procéder par monstration si elle le juge nécessaire.

Notre étude révèle également la façon dont l'enseignante conçoit son propre rôle. Pour Julie, une séance d'enseignement s'organise en deux temps : le maître prévoit une première phase de manipulation afin de faciliter la dévolution de la tâche puis dans une seconde phase, il institutionnalise le savoir visé. L'analyse des séances montre que Julie ne s'assure pas de l'existence de liens entre ces deux phases. En effet, elle ne veille pas toujours à ce que la phase de manipulation donne l'opportunité aux élèves de mobiliser le savoir visé.

Enfin, nous constatons à nouveau chez Julie des difficultés à analyser par anticipation l'activité des élèves. Cependant, l'enseignante a mis au point des moyens susceptibles de compenser ce manque. Elle s'autorise à apporter des ajustements au déroulement de la séance si elle constate que les élèves ont des difficultés à exécuter la tâche et elle organise son enseignement à partir de l'évaluation des performances des élèves.

Ainsi, au cours de la première année d'exercice, les rapports de priorité entre les trois sources d'aides et de contraintes ne sont plus exactement les mêmes qu'au cours de l'année de formation. Les modifications des conditions d'exercice expliquent en partie ces variations.

Julie prend davantage en compte l'analyse qu'elle fait de l'activité des élèves pour construire ses projets de séquences. Ses pratiques ont donc évolué.

5. Trajectoire suivie par Julie

Adoptons, à présent, un point de vue plus large et considérons l'ensemble de la trajectoire suivie par Julie afin d'en dégager ce qui caractérise la cohérence de ses pratiques.

La cohérence des pratiques est révélée par la manifestation de l'existence d'un projet général d'enseignement et de moyens suffisants pour le mettre en œuvre. Le projet de Julie se caractérise notamment par la façon dont elle envisage et réalise les processus de dévolution, régulation et institutionnalisation. Pour Julie, prévoir une phase de manipulation constitue un moyen de dévolution de la tâche, estimant, probablement, que si les enfants sont actifs, alors ils sont acteurs. L'enseignant est là pour institutionnaliser le savoir visé en sollicitant les élèves à s'exprimer à propos de la tâche réalisée au cours de la phase de manipulation. Les moyens dont dispose Julie pour mettre en œuvre ce projet limitent sa marge de manœuvre : les savoirs mobilisés et les gestes professionnels mis en œuvre ne lui permettent pas une analyse suffisamment fine de l'activité des élèves (par anticipation ou au cours de l'action). Elle ne perçoit pas toujours l'enjeu des situations proposées et/ou la pertinence des projets proposés. Lorsque leur mise en œuvre lui semble difficile, Julie préfère alors les modifier.

Des rapports de priorité s'installent entre les trois sources d'aides et de contraintes. Parmi les trois sources d'aides et de contraintes, c'est l'analyse de l'activité du maître qui prime. Julie détermine son projet à partir du savoir à institutionnaliser et d'une organisation de la séance en deux temps (manipulation, institutionnalisation). Cette organisation vise à lui assurer un certain confort en lui évitant une prise de risque qu'elle juge inutile. Pour mener son projet à bien, Julie n'hésite pas à modifier les documents sur lesquels elle s'appuie et à s'éloigner des prescriptions institutionnelles. L'analyse de l'activité des élèves pèse peu dans les décisions que prend Julie (surtout au cours des AAPP).

Ces rapports de priorité conditionnent le processus de modifications : ils conduisent, en effet, Julie à redéfinir la tâche en fonction de son analyse par anticipation de la réalisation de la tâche. Si elle estime que la mise en œuvre du projet qui lui est proposé (soit par les formateurs, soit par l'intermédiaire de documents pédagogiques) présente des difficultés importantes de mise en œuvre ou ne correspond pas à l'objectif mathématique visé alors Julie s'éloigne de ce projet et ne réinterroge pas pour autant la représentation de la tâche.

Les variations qui surviennent au sein de ces rapports de priorités fournissent une interprétation de l'évolution des pratiques. Notre analyse montre qu'au cours de la première année d'exercice, les rapports de priorité entre les trois sources d'aides et de contraintes ne sont plus exactement les mêmes qu'au cours de l'année de formation. Les modifications des conditions d'exercice expliquent en partie ces variations. Julie prend davantage en compte l'analyse qu'elle fait de l'activité des élèves pour construire ses projets de séquences.

VII Trajectoire suivie par Pierre

1. Analyse d'une séance emblématique : vers une première caractérisation de la cohérence en germe

Dans le cadre du projet sur l'introduction de la multiplication, Pierre est chargé de mettre en œuvre la deuxième séance (cf. Annexe B). Pour l'aider dans sa préparation, le professeur

d'IUFM lui a remis un document présentant des extraits de préparation d'une séquence de mathématiques introduisant l'écriture multiplicative au CE1.

Il s'agit d'une situation de communication. Les enfants travaillent par groupes et jouent, successivement, le rôle d'émetteurs et de récepteurs. Dans un premier temps, les élèves jouent le rôle d'émetteurs : une grille rectangulaire (reproduite sur une feuille) de a lignes et b colonnes leur est distribuée et ils doivent rédiger un message destiné au groupe récepteur qui possède un lot de grilles parmi lesquelles se trouve la grille du groupe émetteur.

La consigne est la suivante :

« le groupe émetteur doit envoyer un message au groupe récepteur lui permettant de retrouver le plus rapidement possible et le plus facilement possible la grille correspondante dans son lot. Ce message doit être le plus court possible et doit désigner le nombre de carreaux de la grille. »

La tâche de l'enseignant est d'amener les élèves à utiliser l'écriture $a \times b$ et de mettre en évidence le caractère numérique de cette écriture ($a \times b$ désigne le nombre de carreaux de la grille).

Pierre respecte les grandes lignes du projet du formateur : l'organisation générale de la séance, les grandes étapes de son déroulement. Il conserve également les données numériques. Par contre, il s'en écarte car le document fait référence à la notion de "jeux de cadres"¹¹⁰ et il ne comprend pas pour quelles raisons il devrait montrer aux élèves que $a \times b$ désigne un nombre. Au cours de la séance, il ne prescrit qu'une partie de la consigne, occultant une contrainte : *« le message doit désigner un nombre »*. De plus, en fin de séance, il apporte des explications sur des notions qu'il juge probablement plus importantes comme la commutativité et les tables de multiplication.

Caractérisons ce processus au regard des trois positions du maître définis précédemment : la représentation de la tâche prescrite, la redéfinition de la tâche représentée et la réalisation de la tâche redéfinie.

Le processus de modifications est initié dès le niveau de la représentation de la tâche car Pierre ne peut mobiliser les savoirs nécessaires pour se représenter l'intérêt d'un "jeu de cadres". L'écart, ainsi créé, se répercute sur la redéfinition et la réalisation de la tâche.

Pierre apporte peu de modifications au projet initial à travers la rédaction de la fiche de préparation. Néanmoins, Pierre souhaiterait pouvoir fixer pour cette séance d'autres objectifs que ceux des formateurs. Ainsi, il redéfinit la tâche, s'éloigne du projet initial en se donnant un autre projet.

Tout se passe comme si Pierre résistait à la formation en évitant, notamment, de faire fonctionner le jeu de cadres. Un autre élément semble confirmer cette hypothèse. Pierre retient les enfants en classe pour aborder sous forme d'un jeu de questions-réponses, la commutativité, les tables de multiplication... Cet épisode est révélateur de ses préoccupations. Il semble important pour Pierre de « transmettre des connaissances » à propos de la multiplication puisqu'il réussit à maintenir l'attention des enfants. Les modifications créées à travers la représentation et la redéfinition de la tâche perdurent et s'amplifient au moment de la réalisation de la tâche.

Le processus de modifications ainsi mis en évidence renseigne sur ce qui guide les choix de Pierre. Celui-ci conserve du projet initial ce qui est le moins coûteux pour lui en termes de difficultés (le plus facile à comprendre, à préparer, à mettre en œuvre...) et s'écarte du projet

¹¹⁰Notion définie par Régine Douady. Les jeux de cadres sont des changements provoqués à l'initiative de l'enseignant pour faire avancer les phases de recherche et notamment pour élaborer une filiation de questions pertinentes par rapport au problème posé.

lorsque cela le met en difficulté et/ou lui demande un effort d'adaptation trop important. Se dégage à travers les choix de Pierre, une stratégie qui consiste à donner l'impression de respecter le projet du formateur tout en poursuivant son propre projet. Son objectif est de rendre les enfants capables d'associer une écriture multiplicative et une grille donnée et de leur donner quelques connaissances sur la multiplication (la commutativité, les tables...)

2. Analyse des autres séances

L'analyse des séances menées par Pierre dans le cadre des AAPP fournit trois exemples de contextualisation du processus de modifications dont nous déduisons des régularités dans la façon de prendre en compte et d'analyser les trois sources d'aides et de contraintes.

Le profil de Pierre se distingue de celui de Julie dans la mesure où celui-ci accorde une place plus importante dans sa pratique à l'analyse de l'activité de l'élève. Il s'interroge sur les difficultés rencontrées par les enfants et veille à évaluer les apprentissages réalisés. Néanmoins, son analyse de leur activité est guidée par le projet qu'il s'est fixé à travers sa représentation de la tâche du maître. Au cours des AAPP, Pierre mène les séances préparées avec les formateurs mais résiste, cherchant un compromis entre le projet initial et son propre projet.

Notre étude montre que Pierre, au cours de la préparation et de la mise en œuvre de la séance, analyse l'activité du maître de manière relativement précise. En effet, nous avons montré que Pierre élaborait, en parallèle, son propre projet, c'est-à-dire celui qu'il aurait probablement préparé et mis en œuvre s'il n'avait pas été soumis aux contraintes que lui impose la formation. L'analyse qu'il fait de l'activité du maître lui permet donc de trouver un compromis entre son propre projet et celui des formateurs.

L'analyse des séances montre, également, que Pierre s'interroge à propos de l'activité des élèves. Il semble en effet souvent préoccupé par la passation des consignes et cherche, en donnant le maximum d'informations et/ou par d'autres moyens à s'assurer de la dévolution de la tâche auprès de chacun des élèves.

Enfin, notre étude montre que l'analyse des prescriptions institutionnelles participe également à la réalisation du compromis que Pierre cherche à établir entre la demande des formateurs et son propre projet. Pierre s'autorise une certaine autonomie vis-à-vis des prescriptions institutionnelles mais seulement après avoir répondu au moins en partie aux attentes des formateurs.

3. Analyse des entretiens

Nous avons enregistré et analysé les entretiens "à chaud" menés à l'issue des séances observées. Si le scénario de formation permet aux différents acteurs d'effectuer un retour réflexif sur l'activité du maître et de prendre en compte le processus de modifications, les différents acteurs de la formation ne portent pas, nécessairement, un regard commun sur l'ensemble de ce processus. Cependant, au cours de l'entretien qui a suivi la séance de Pierre sur l'introduction de la multiplication, les échanges entre les différents partenaires portent sur l'ensemble du processus : de la difficulté de Pierre à désigner l'écriture multiplicative comme celle la mieux adaptée au problème posé, jusqu'à la notion de "jeu de cadres". En l'invitant à rechercher l'origine du problème rencontré, les formateurs amènent le stagiaire à changer de niveau, à revisiter les différentes positions de son activité, à cerner les liens entre ses choix et les apprentissages réalisés.

L'analyse des entretiens confirme, néanmoins, les réticences de Pierre vis-à-vis des projets qui lui sont proposés (quand parfois celui-ci ose exprimer ses doutes). Néanmoins, nous avons mis en évidence sa volonté de s'engager dans une analyse réflexive de sa propre prestation : il fait part de son vécu, expose au groupe les questions qu'il se pose, n'hésite pas à discuter ses choix. Ses interventions témoignent de sa volonté d'analyser le projet proposé et plus largement les prescriptions institutionnelles.

L'analyse des entretiens permet ainsi de mieux cerner ses préoccupations. Pierre s'interroge à propos des décisions qu'il a prises. Il s'intéresse surtout à la consigne donnée, à la manière de conduire les échanges et aux interactions à travers le discours du maître en général (composante médiative). Il se pose des questions, fait part de ses préoccupations et de ses difficultés. Son analyse est centrée sur la composante médiative[6] des pratiques. Qu'est ce que j'aurais dû dire ? Qu'est ce que j'aurais dû préparer ? Il prend donc en compte son analyse de l'activité des élèves pour mieux analyser sa propre activité.

4. *Suivi au cours de la première année d'exercice*

L'analyse des séances menées au cours de la première année d'exercice montre que les préoccupations de Pierre ne sont plus tout à fait les mêmes. Savoir comment formuler la consigne ne semble plus lui poser problème et Pierre n'accumule plus les informations comme pour reculer le moment où les enfants vont s'engager dans la tâche. Pierre semble davantage confiant au moment de la dévolution de la tâche aux élèves. Nous en déduisons que les doutes qu'il exprimait au cours des AAPP quant à la réussite de la dévolution, étaient probablement dus à un manque d'adhésion aux projets proposés par les formateurs. A partir du moment où il se donne un projet, Pierre est confiant et garde le cap des objectifs fixés.

5. *Trajectoire suivie par Pierre*

La cohérence des pratiques est révélée par la manifestation de l'existence d'un projet général d'enseignement et de moyens suffisants pour le mettre en œuvre. Le projet de Pierre se caractérise par sa volonté d'apporter le maximum de connaissances aux élèves. Au cours des AAPP, il n'hésite pas à "compléter" le projet proposé par des questions subsidiaires ou par des informations non nécessaires à la tâche attendue des élèves. Mais, l'analyse des séances menées au cours de la première année d'exercice montre qu'il fixe, lui-même, les contours du contenu mathématique à institutionnaliser et que ces contours sont parfois à la limite de ce qui est prescrit par les programmes. Au-delà de l'apport de connaissances, le projet général de Pierre consiste à apporter également un certain nombre de "techniques qui marchent" pour tous.

Des rapports de priorité s'installent entre les trois sources d'aides et de contraintes. Ce qui prime pour Pierre c'est l'analyse de l'activité du maître. Il a sa propre analyse ce qui le conduit à opposer une certaine résistance aux propositions des formateurs. Au cours de la première année, il prépare ses séances avec très peu de documents issus de manuels. Pierre s'interroge sur l'activité des élèves afin d'analyser sa propre activité et évaluer ses prestations.

Ces rapports de priorité conditionnent le processus de modifications. Lorsque Pierre ne perçoit pas l'enjeu du projet proposé, de la représentation à la réalisation de la tâche les modifications s'enchainent car peu à peu Pierre s'éloigne du projet proposé pour se rapprocher de son propre projet

Les variations qui surviennent au sein de ces rapports de priorités fournissent une interprétation de l'évolution des pratiques. Au cours de la première année d'exercice les priorités évoluent. Devenu titulaire, Pierre décide de ses projets d'enseignement. Il les

détermine en ayant une meilleure connaissance des élèves auxquels ils s'adressent et dans la pratique quotidienne de la classe, il n'a pas à répondre aux attentes de formateurs. Notre analyse montre qu'il ne rencontre plus les mêmes difficultés.

VIII Trajectoire suivie par Cécile

1. Analyse d'une séance emblématique : vers une première caractérisation de la cohérence en germe

La dernière des trois séances visant à introduire la multiplication est menée par Cécile (cf. Annexe C). Le projet fixé initialement est d'amener les enfants à associer plusieurs écritures multiplicatives à un même nombre. Au cours de l'entretien portant sur la séance de Pierre, l'objectif de la séance que doit mener Cécile est précisé. Stagiaires et formateurs conviennent de la nécessité d'insister, au cours de la troisième séance, sur le lien entre l'écriture multiplicative et le nombre qu'elle représente. Ils conviennent donc ensemble de proposer une activité au cours de laquelle les enfants devront mettre en corrélation deux cartons portant différentes écritures d'un même nombre : écriture usuelle et écritures multiplicatives

Alors que Julie s'était écartée, dès la préparation, du projet des formateurs, alors que Pierre avait redéfini la tâche dans l'action en menant son propre projet, Cécile satisfait à la demande du groupe, moyennant quelques difficultés au niveau de la mise en œuvre. Est-ce dû aux compétences de la stagiaire ou à l'aide apportée par le groupe ? Quel est le rôle joué par le "collectif" ?

Un élément de réponse se trouve dans l'adhésion de Cécile au projet construit, en commun, en cohérence avec les observations réalisées, dans le respect et à partir des remarques faites par les stagiaires. Au cours de l'entretien précédent, les échanges entre les différents membres du groupe ont créé une synergie. Parce que formateurs et stagiaires ont ensemble, réfléchi aux problèmes posés et ont, ensemble, proposé des éléments de réponses, ils ont partagé la prescription de la tâche construisant dans le même temps sa représentation et réduisant les sources d'écarts au moment de sa redéfinition. Tout se passe comme si la tâche prescrite coïncidait avec la tâche que Cécile se prescrit à elle-même.

Le processus se caractérise par l'absence de modifications importantes au niveau de la représentation de la tâche et de sa redéfinition. Seule la réalisation de la tâche amène Cécile à s'écarter du projet conçu par le groupe.

Au cours de cette troisième séance, Cécile sollicite régulièrement les élèves, les invitant à exposer leurs procédures. Néanmoins, elle étaye peu les formulations des élèves et intervient rarement pour institutionnaliser le savoir à enseigner.

2. Analyse des autres séances

Au cours des séances observées, il apparaît que la prise en compte de l'analyse de l'activité des élèves prévaut pour Cécile qui estime que pour se former, elle doit, avant tout, "apprendre des enfants". Elle veille à laisser les élèves s'exprimer, les met en situation d'apprentissage mais intervient peu. Elle fait confiance aux manuels et aux documents fournis par les formateurs pour l'aider à progresser dans sa connaissance des élèves et de leur cheminement cognitif.

A travers la description de la trajectoire suivie, nous en déduisons ce qui caractérise la cohérence des pratiques de Cécile. Notre analyse des séances menées met en évidence la façon dont Cécile prend en compte et analyse les trois sources d'aides et de contraintes.

Les trois exemples de contextualisation du processus de modifications montrent que la stagiaire transforme très peu le projet proposé par les formateurs. Cécile modifie peu la tâche qui lui est prescrite et respecte de manière générale les prescriptions institutionnelles. Très attentive aux réactions des élèves et à leurs difficultés, Cécile analyse et prend en compte l'activité des élèves pour évaluer sa propre activité.

3. Analyse des entretiens

L'entretien qui suit la troisième séance à propos de la multiplication porte essentiellement sur la gestion du temps. Le formateur suggère à la stagiaire, différentes techniques pour progresser dans ce domaine. Néanmoins, devenue titulaire, Cécile ne se résout pas réduire le temps de parole des élèves et ne modifie pas ses habitudes. Laisser chaque élève s'exprimer est, pour elle, une condition indispensable de l'apprentissage. La formation lui a proposé des techniques mais n'a pas modifié certaines de ses représentations à propos de l'enseignement des mathématiques.

Si l'analyse des séances démontre que Cécile apporte peu de modifications au projet proposé, l'analyse des autres entretiens confirme combien la stagiaire se "soumet" aux prescriptions institutionnelles. Elle réussit en effet à préparer et à mettre en œuvre certains projets préparés avec les formateurs alors qu'elle n'en perçoit pas du tout les enjeux.

L'étude des entretiens dévoile en outre combien Cécile est dubitative quant à l'intérêt de la formation mais plus encore combien elle doute de ses capacités (notamment à cause du rapport qu'elle entretient avec la discipline). Au cours des entretiens, la stagiaire répond aux injonctions des formateurs. Les maîtres-formateurs lui donnent généralement des conseils techniques. Elle évoque avec eux des reconstructions possibles de la séance mais ces reconstructions apportent peu de réponses aux questions qu'elle se pose.

L'analyse des entretiens rend compte également de son souci de prendre en compte l'analyse qu'elle fait de l'activité des élèves. Elle estime qu'elle doit avant tout apprendre des élèves.

4. Suivi au cours de la première année d'exercice

L'analyse des séances menées au cours de sa première année d'exercice montre qu'elle se conforme toujours aux prescriptions institutionnelles à travers le guide pédagogique qu'elle a choisi de suivre. Ses fiches de préparation sont la copie exacte des documents pédagogiques sur lesquels elle s'appuie. Cependant, Cécile émet des doutes quant à la pertinence des modalités de mise en œuvre proposées par le guide. Elle n'ose pas s'en écarter probablement parce qu'elle ne peut renoncer à laisser le temps nécessaire aux élèves de valider leur recherche. Pour Cécile, le maître doit guider les élèves dans leurs découvertes mais ne jamais forcer l'avancée des apprentissages.

5. Trajectoire suivie par Cécile

La cohérence des pratiques est révélée par la manifestation de l'existence d'un projet général d'enseignement et de moyens suffisants pour le mettre en œuvre. Celui de Cécile est de respecter les injonctions des formateurs et des prescriptions institutionnelles en général mais aussi de mettre les enfants en situation de recherche et de les laisser chercher, s'exprimer pour ensuite institutionnaliser leurs découvertes.

Des rapports de priorité s'installent entre les trois sources d'aides et de contraintes. Cécile estime que pour se former, elle doit, avant tout, apprendre des élèves. Elle veille à laisser les élèves s'exprimer, elle les met en situation d'apprentissage mais intervient peu. Peu confiante en elle-même, Cécile fait a priori confiance aux formateurs et aux ressources qu'elle a choisies pour l'aider dans la réalisation de son projet général d'enseignement.

Ces rapports de priorité conditionnent le processus de modifications. Cécile apporte, en effet, peu de modifications à travers la redéfinition de la tâche. Néanmoins, elle introduit parfois des modifications au niveau de la représentation de la tâche. De plus, sa volonté de ne rien modifier par rapport au déroulement prévu par le guide la conduit parfois à trahir le projet des auteurs.

Les variations qui surviennent au sein de ces rapports de priorités fournissent une interprétation de l'évolution des pratiques. Au cours de la première année d'exercice les rapports de priorités entre les trois sources d'aides et de contraintes ne sont plus tout à fait les mêmes. Cécile veille toujours à être au plus près des prescriptions institutionnelles et s'attache à suivre le guide pédagogique qu'elle a choisi. Mais, ce qui prime à présent pour Cécile, c'est de placer les élèves en situation de recherche et de les laisser s'exprimer en évitant d'imposer une institutionnalisation prématurée du savoir.

IX Conclusion

1. La genèse des pratiques : prédétermination et développement

La recherche menée aborde la problématique posée à travers une étude de cas : la description de trois trajectoires individuelles. Dans l'optique de présenter une synthèse, nous intégrons en une même conclusion les résultats relatifs à ces trois exemples.

La méthodologie employée permet de récolter des informations à propos du parcours $C_{S_1 P_i}$, $C_{S_2 P_i}$, $C_{S_3 P_i} \dots$ d'un individu P_i . Deux finalités coexistent au sein même de ce parcours : enseigner et se former.

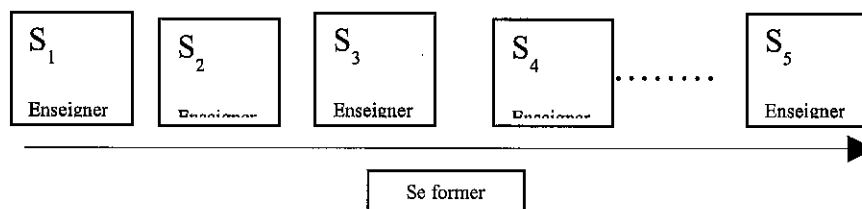


Fig.10

Pour enseigner, chaque professeur stagiaire est amené à s'approprier un minimum la situation qui lui est proposée et notre recherche confirme l'hypothèse selon laquelle l'appropriation de situations s'accompagne de modifications (aussi minimes soient-elles).

Ce faisant, chaque professeur-stagiaire développe une appropriation qui lui est spécifique de ces situations, en substituant à l'itinéraire prescrit un itinéraire qui lui est propre, révélé par une trajectoire personnelle. Il se forme, acquiert (ou modifie) sa manière d'analyser, d'identifier les difficultés et de trouver des solutions.

Notre modèle d'analyse permet de décrire ce qui se passe lorsqu'un individu P_i modifie une situation S_j pour la mettre en œuvre (il enseigne) mais notre intention est d'étudier l'évolution de ses pratiques (il se forme) (cf. Figure 10). Et c'est justement ce qui est commun et évolutif dans $C_{S_1 P_i}$, $C_{S_2 P_i}$, $C_{S_3 P_i} \dots$ qui permet de rendre compte de la **trajectoire** suivie par P_i .

Nous avons pu le constater au fil des analyses de séances menées par Julie, Pierre et Cécile : les cinq exemples de contextualisation du processus de modifications obtenus pour chacun des enseignants suivis possèdent des caractéristiques communes qui néanmoins ne sont pas définitivement figées puisque nous avons pu constater dès la première année d'exercice une évolution des pratiques.

Nous avons déjà exposé ces caractéristiques mais nous voudrions à présent montrer en quoi les conclusions obtenues à propos de la trajectoire de chaque enseignant témoignent du fait que la genèse des pratiques se réalise entre prédétermination et développement.

Pour se représenter, redéfinir et réaliser la tâche, chacun utilise trois sources d'aides et de contraintes. La façon dont il prend en compte et analyse ces trois sources, lui est particulière. La description de chaque trajectoire rend compte de certains rapports de priorités qui s'établissent entre ces trois sources d'aides et de contraintes. L'ordre de priorité dans l'analyse des trois sources d'aides et de contraintes ainsi que l'analyse qui en est faite est à la fois relativement stable mais évolue au fil du temps et des expériences vécues.

L'importance de la prise en compte des prescriptions institutionnelles peut, par exemple, s'amoinrir au fil du temps au profit de l'analyse de l'activité des élèves. L'analyse de l'activité du maître peut aussi s'affiner. Le rôle du contexte et des expériences vécues n'est pas négligeable dans cette évolution.

En étudiant sur trois exemples comment se forment les pratiques, nous avons mis en évidence que tout se passait comme si ces pratiques étaient marquées par des éléments prédéterminés qui conditionnaient l'activité de l'enseignant mais aussi son évolution.

D'une part, la façon dont chacun des enseignants prend en compte et analyse les prescriptions institutionnelles, l'activité du maître et celle des élèves détermine le processus de modifications inhérent à l'appropriation d'une situation.

D'autre part, les rapports de priorités qui s'installent entre ces trois sources d'aides et de contraintes ainsi que l'analyse elle-même de l'enseignant sont susceptibles d'évoluer et conditionnent le développement des pratiques.

Ainsi, ces éléments conditionnent à la fois l'activité du maître en un temps T et le développement de ses pratiques au fil du temps.

2. La genèse des pratiques ou un certain champ de possibles

Le suivi de ces trois enseignants s'est arrêté à la fin de leur première année d'exercice. Dès lors, nous avons déjà constaté un développement de leurs pratiques dues à des modifications dans les rapports de priorités existant entre les trois sources d'aides et de contraintes. Parce que les finalités et les préoccupations d'un enseignant débutant ne sont pas celles d'un enseignant expérimenté, il est raisonnable de penser que ces rapports de priorités continuent à évoluer après la première année d'exercice. Chaque enseignant posséderait donc un certain répertoire potentiel de pratiques. Pourtant les recherches menées dans le cadre de la didactique des mathématiques autour des pratiques enseignantes constatent une certaine stabilité des pratiques. Un nouveau questionnement émerge alors.

Si tout n'est pas joué à l'issue de la formation initiale, est ce que l'amplitude du champ des possibles peut varier ? Est-ce que cette amplitude évolue dans le temps ? Y a-t-il un moment où elle commence à se réduire ? Quels sont les facteurs susceptibles de jouer sur cette amplitude ? Si les expériences professionnelles jouent un rôle déterminant dans l'évolution des pratiques, quel rôle peut jouer la formation (initiale et/ou continue) ? Agir sur les rapports

de priorités qui s'établissent entre les trois sources d'aides et de contraintes est-il un moyen d'accroître la variété des possibles ?

Un des prolongements de cette recherche serait de s'intéresser à ce répertoire potentiel de pratiques. Il serait en effet intéressant de décrire, comprendre et interpréter la réduction-extension de ce champ des possibles afin de mieux comprendre pourquoi, et comment certaines pratiques se stabilisent rapidement et définitivement alors que d'autres continuent à se développer et à s'enrichir.

X Bibliographie

Brousseau G. (1986), Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. Recherches en didactique des mathématiques, Vol 7-2, pp.33-115, Grenoble. La Pensée Sauvage (Eds).

Butlen D. (2004), Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire. Des difficultés des élèves de milieux populaires aux stratégies de formation des professeurs des écoles. HDR, Université de Paris 8.

Leplat J. (1997), Regards sur l'activité en situation de travail. Contribution à la psychologie ergonomique. Paris. PUF(Eds).

Masselot P. (2000), De la formation initiale en didactique des mathématiques (en centre IUFM) aux pratiques quotidiennes en mathématiques en classe des professeurs d'école (une étude de cas). Thèse de Didactique des Mathématiques. Université de Paris 7.

Perrin-Glorian M.J (1992), Aires de surfaces planes et nombres décimaux. Questions didactiques liées aux élèves en difficulté aux niveaux CM-6^{ème}. Thèse de Didactique des Mathématiques. Université de Paris 7.

Robert A. & Roglaski J. (2002), Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. La revue canadienne des sciences, des mathématiques et des technologies. Vol 2, n°4. pp.505-528. Toronto.

Roditi E. (2001), L'enseignement de la multiplication des nombres décimaux en sixième, étude de pratiques ordinaires. Thèse de Didactique des Mathématiques. Université de Paris 7.

Annexe A

Date : jeudi 3 février
Heure : 13h45 - 14h30
Durée : 45 min.

1- Champs disciplinaire : Maths.

Enjeu de la séance : introduction à la multiplication.

2- Objectifs de la séance :

Type de séance : découverte, manipulation.
Objectifs : comprendre le sens de la multiplication.
Différencier le sens de la multiplication et celui de l'addition.

3- Matériel utilisé et à préparer :

Par la préparation : CAP MATHS CE1 le guide des activités.
CAP MATHS CE1 le fichier élève.
Pendant la séance : un brouillon par enfant.
Des cubes pour construire les tours.

4- Déroulement de la séance :

Phase 1 : Introduction de l'activité : (5min).

On va aider Moustik à construire des tours.
But : trouver le nombre exact de cubes à commander pour la construction des tours.

Phase 2 : série d'exercices multiplicatifs : (10 min).

Recherche individuelle au brouillon suivie d'une validation du résultat par la manipulation des cubes par un élève.
L'énoncé du problème est écrit au tableau.

Exercice 1 : Moustik veut faire 8 tours de 5 cubes chacune. Combien de cubes lui faut-il ? (5min)

Exercice 2 : veut faire 12 tours de 15 cubes chacune. Combien de cubes lui faut-il ? (5min)

Phase 3 : exercice additif : (5min).

Recherche individuelle au brouillon suivie d'une validation du résultat par la manipulation des cubes par un élève.

Exercice : Alex a fait une tour avec 12 cubes et Lisa une tour avec 15 cubes. Combien ont-ils utilisés de cubes ensemble.

Phase 4 : Synthèse : (15min).

Après avoir rassemblé les stratégies des élèves, nous allons rédiger ensemble une synthèse sur les découvertes de la journée en mettant en avant les deux points suivants :

- La distinction entre la multiplication et l'addition. (L'addition sert à ajouter plusieurs nombres et la multiplication sert à ajouter plusieurs fois le même nombre).
- L'économie de la multiplication qui permet d'éviter des additions répétées.

Phase 5 : Exercices de réinvestissement : (10min).

Exercices du fichier. D'abord l'exercice 6 puis le 7. Pour les enfants rapides possibilité de faire l'exercice 5.

Exercice 6 :
Réponses : $6 \times 3 = 18$
 $10 \times 4 = 40$
 $8 \times 1 = 8$
 $2 \times 8 = 16$

Exercice 7 :
Réponse : $11 \times 4 = 44$
 $4 \times 3 = 12$
 $3 \times 10 = 30$
 $2 \times 9 = 18$

Exercice 5 :
Réponses : 36 tours de 1 cube.
12 tours de 3 cubes.
6 tours de 6 cubes.
3 tours de 12 cubes.
1 tour de 16 cubes.

18 tours de 2 cubes.
9 tours de 4 cubes.
4 tours de 9 cubes.
2 tours de 18 cubes.

5- Trace de la séance :

Synthèse élaborée par les enfants (soit recopiée et photocopiée par l'enseignant, soit recopiée par les enfants lors d'une séance de copie).

6- Bilan et prolongement par l'enseignant :

Annexe B

[illegible]

Début : 13:55	Phase n° 4 : COMPARAISON DES PRODUCTIONS ➤ Déroulement : confrontation des méthodes ➤ Situation : résultats et commentaires par groupe ➤ Tâche de l'élève : argument, formule, re-formule ➤ Tâche du professeur : dégaucher ou introduire (si aucun message de ce type apparaît) les avantages d'un codage à l'aide d'une écriture multiplicative « On arrive et je vais inviter chaque groupe à venir exposer ses résultats. Ça va voir quelle méthode répond le plus à la consigne qui était d'envoyer un message le plus court possible tout en désignant le nombre de caractères de la grille. »
Fin : 14:10	durée : 15 minutes Phase n° 5 : SYNTHÈSE et VALIDATION ACTIVITE + PROLONGEMENTS (travail indiv + construction d'une grille) ➤ Déroulement : synthèse ➤ Situation : collectif (groupe classe) puis individuel ➤ Tâche de l'élève : donner du sens à la multiplication ➤ Tâche du professeur : montrer que 12 x 7 ou 7 x 12 répond le mieux à la consigne comme écriture la plus adéquate pour répondre au problème posé. « Maintenant que l'on a trouvé une formule adéquate, je vais venir demander un peu temps pour compléter l'activité message qui est attachée à cette grille : 12 x 21 » Si l'on considère d'une grille correspondant à une certaine multiplicative.
Début : 14:10	Début : 14:10
Fin : 14:15	Fin : 14:15

Annexe C

Domaine : Mathématiques Matière enseignée : La multiplication ➤ Niveau : CE1 (21 élèves) ➤ Période de l'année : 17/02/2005 Objectif : Réinvestir l'activité en insistant sur l'écriture multiplicative associée à un résultat. Compétence : Être capable d'associer plusieurs écritures multiplicatives Type de situation : Réinvestissement et découverte Place de la séance : 4 Matériel : Feuilles A3 quadrillées (1 par groupe de 4), fiches « multiplication » polycoptes (1 par groupe de 2), feuilles A3 (1 par groupe de 2), feutres, crayons, ciseaux, colle, cubes, 8 feuilles pour affiches. Pré-travail : le quadrillage, l'écriture multiplicative Forme de travail : par groupes de 4 (<i>quatre enfants, deux adultes, deux adultes</i>) Durée de la séance : ➤ Durée totale de la séance : 60' ➤ Nombre de phases : 5	
Phase n° 1 : SITUATION DE DÉCouverte ➤ Modalités de travail : organisation : travail écrit ou groupe ➤ Type de situation : réinvestissement ➤ Tâche de l'élève : tracer des quadrillages à partir d'un nombre total de cartons ➤ Tâche du PE : circuler dans les groupes, aider les élèves en difficulté et faire une synthèse collective sur les différentes écritures multiplicatives d'un même nombre. « Vous allez tracer un quadrillage avec 12 cartons au total en vous aidant du papier quadrillé. Vous repasserez bien le contour du quadrillage au feutre et vous pourrez, si vous le voulez, colorier les cases du quadrillage. » Lancement de l'exercice par groupes de 4 à 5 élèves. Problèmes rencontrés : « Pour 12 cartons : 1x12 ; 2x6 ; 3x4 (passer à la complexité de la multiplication) « Appliquant, nous allons observer vos quadrillages et je vais demander à un représentant de chaque groupe de trouver l'écriture multiplicative de son quadrillage. »	Début : 10 : 30 15 minutes Fin : 10 : 45 10 : 45 5 minutes
Phase n° 2 : FORMULATION DU PROBLÈME ➤ Modalités de travail : organisation : par binômes ➤ Type de situation : oral ➤ Tâche du PE : amener le problème « Nous pourrions écrire un même nombre sous différentes formes. Le c est 4 x 3, mais : 4x3 ; 2 x 6, mais aussi... Maintenant, par deux, vous allez essayer de retrouver les	Début : 10 : 45 10 : 45 5 minutes

Activités multiplicative des écritures associées à un même nombre et les retrouver en les collant sur la feuille dans une même colonne. Présentation de la fiche, du matériel (fiche « écritures multiplicatives » et 1 feuille A3). Lancement de l'exercice par binômes. « Amener la moitié des nombres aux élèves en difficulté »	Fin : 10 : 50 10 : 50 20 minutes Début : 10 : 50 10 : 50 20 minutes Fin : 11 : 10 11 : 10 10 minutes Fin : 11 : 20 11 : 20 10 minutes Début : 11 : 20 11 : 20 10 minutes Fin : 11 : 30 11 : 30
Phase n° 3 : RECHERCHE ➤ Modalités de travail : organisation : travail de recherche par groupes ➤ Type de situation : découpage, collage ➤ Tâche de l'élève : retrouver les écritures multiplicatives d'un même nombre ➤ Tâche du professeur : veiller au bon déroulement des recherches, aider les élèves en difficulté « Vous devez placer le nombre en haut de la feuille et en dessous les écritures associées à ce nombre. La PE fait reformuler la tâche à accomplir par un élève et écrit l'exemple au tableau. »	Phase n° 4 : MISE EN COMMUNE DES RÉSULTATS ➤ Modalités de travail : organisation : au tableau en collectif ➤ Tâche des élèves : argumenter, valider ou invalider leurs choix, contre argumenter si nécessaire ➤ Tâche du professeur : classer les productions. « Que pouvez-vous dire pour 16 ? Nous chercherons, ensuite, des écritures multiplicatives correspondant à 16, mais pour l'instant, nous allons vérifier vos productions en comparant les vôtres correspondant aux cartons. » Quatre élèves viennent au tableau construire les tours pour le nombre 16 (1x16 ; 4x4 ; 8x2 ; 2x8) ou seulement dans les cas problématiques.
Phase n° 5 : TRACE ÉCRITE ➤ Modalités de travail : organisation : par binômes ➤ Tâche des élèves : recopier les écritures multiplicatives associées à un nombre ➤ Tâche du professeur : vérifier les copies « Pour garder une trace de ce que nous avons découvert aujourd'hui, et au cas où nous en aurions besoin plus tard, nous allons écrire les écritures multiplicatives correspondant à un même nombre sur une fiche. Chaque groupe recopiera les égalités correspondant à un seul nombre. Remettez-les, maintenant, pour que nous puissions les afficher dans la classe par la suite. »	Début : 11 : 30 11 : 30 10 minutes Fin : 11 : 40 11 : 40

Le manuel scolaire carrefour de tensions mais aussi outil privilégié de vulgarisation des recherches en didactique des mathématiques

Joël Briand

DAESL

Université Bordeaux 2

et Marie-Lise Peltier

Equipe DIDIREM

IUFM de Rouen, Université de Rouen

Le titre auquel vous avez échappé :

« Peut-on être raisonnablement chercheur en didactique et auteur de manuels scolaires ? »

Résumé

Le manuel scolaire est une interface entre des plusieurs institutions : ministère comme donneur d'ordre de programmes, éditeurs comme vendeurs, enseignants décideurs d'achat, donc vu comme « clients » par l'éditeur et comme professionnels par les auteurs, IUFM et circonscriptions comme institutions d'analyse, et enfin parents souvent lecteurs.

En tant que tel, il est donc au carrefour d'injonctions et d'attentes souvent contradictoires.

S'appliquer, en tant que didacticien, à la conception d'un tel ouvrage relève donc d'un défi.

Nous relaterons dans cette intervention notre propre expérience.

Dans un premier temps nous exposerons rapidement les différentes contraintes auxquelles

sont soumis les auteurs de manuels. Puis après avoir précisé nos propres objectifs pour la conception d'un manuel scolaire pour le premier degré et du livre du professeur qui lui est associé, nous présenterons les outils théoriques dans le champ de la didactique qui nous ont permis de les concrétiser.

Mais un livre ne fait pas tout : à partir d'une même page de manuel, nous présenterons trois scénarios possibles de mise en œuvre dans lesquels l'activité mathématique des élèves, la prise en compte des savoirs, le travail de l'enseignant et son rôle sont radicalement différents.

Nous concluons en justifiant pourquoi la conception et l'écriture de manuels scolaires nous semblent être un maillon déterminant dans la transposition des savoirs mathématiques à enseigner et à ce titre sont une « niche » privilégiée pour les didacticiens dans le nécessaire travail de vulgarisation des résultats de recherches en didactique des mathématiques.

Mots clefs

Manuel scolaire, transposition didactique, travail de l'enseignant milieu, situation, livre du professeur, situation de découverte, soutien, consolidation.

Nous ferons appel à des exemples issus de nos manuels parce qu'ils sont une œuvre collective qui nous engage.

I Introduction

Il en est du manuel scolaire comme de tout ouvrage qui vise la transmission d'un contenu à l'aide d'une mise en scène. Dans tous les cas, on peut s'interroger sur les conditions de réception de ce contenu et sur l'usage effectif qu'en fait le lecteur, que ce soit le livre du maître lu bien souvent sans tutorat, ou le manuel de l'élève dont la lecture est elle-même le résultat d'une mise en scène organisée par le professeur. Comme dans toute communication, la réception du message délivré n'est pas toujours, de loin s'en faut, celle présumée par les auteurs

Pour autant, cet outil est actuellement incontournable dans l'enseignement obligatoire en France. Qu'on le veuille ou non, il est le vecteur de principes pédagogiques et didactiques¹¹¹. Nous allons donc tenter de justifier le titre auquel vous avez échappé.

1. Quels sont les rôles habituellement assignés à manuel scolaire de l'école élémentaire ?

Il doit s'adresser à des enseignants polyvalents (d'où certaines différences avec les manuels destinés au second degré), faciliter leur travail, contribuer à leur formation, être un outil de référence pour l'élève, être un livre que l'élève souhaite ouvrir. Mais nous savons aussi que le manuel étant conçu pour « tout le monde », il n'est en fait réellement adapté à personne !

2. Le vilain manuel :

Freinet disait à propos des manuels scolaires : « *ils servent basement les programmes officiels* »...« *ils préparent la plupart du temps l'asservissement de l'enfant à l'adulte* » (1928). « *Tout manuel, distribué en autant d'exemplaires que d'élèves, est un carcan et un outil totalitaire.* » On comprend cette position surtout en face des manuels scolaires de l'époque qui, le plus souvent, affichaient le savoir, mais nous retiendrons plutôt une critique d'un autre ordre : le manuel scolaire peut contribuer à l'idée que les savoirs sont « *choses sûres* ». La question décisive, à cet égard, est celle de la *problématicité* des savoirs. Reprenons ce que déclare Yves Chevallard : « *tout savoir n'est d'abord qu'une hypostase, une entité supposée, une idée de substance, dont nous faisons l'hypothèse en certains contextes institutionnels, en supposant que tel ou tel agit comme si ses gestes procédaient d'un certain corps de connaissances, que nous croyons deviner à travers son faire. Il faut ici, avec le didacticien, passer de l'autre côté du miroir : ce savoir réputé sûr parce qu'il est censé assurer nos gestes n'est en fait lui-même jamais assuré.* »

« *Toujours le savoir fait problème. Au-delà d'un faire observable, un savoir supposé renvoie, plus globalement, à ce que je nomme une organisation praxéologique, ou praxéologie. À l'origine d'une praxéologie se trouvent une ou plusieurs questions qui, génétiquement, apparaissent comme les raisons d'être de l'organisation praxéologique, parce que celle-ci est censée leur apporter réponse.* » (Chevallard, 1994). Comment concilier une organisation linéaire de fait d'un manuel scolaire et une approche qui concilie fréquentation avec des situations a-didactique et une organisation praxéologique acceptable ?

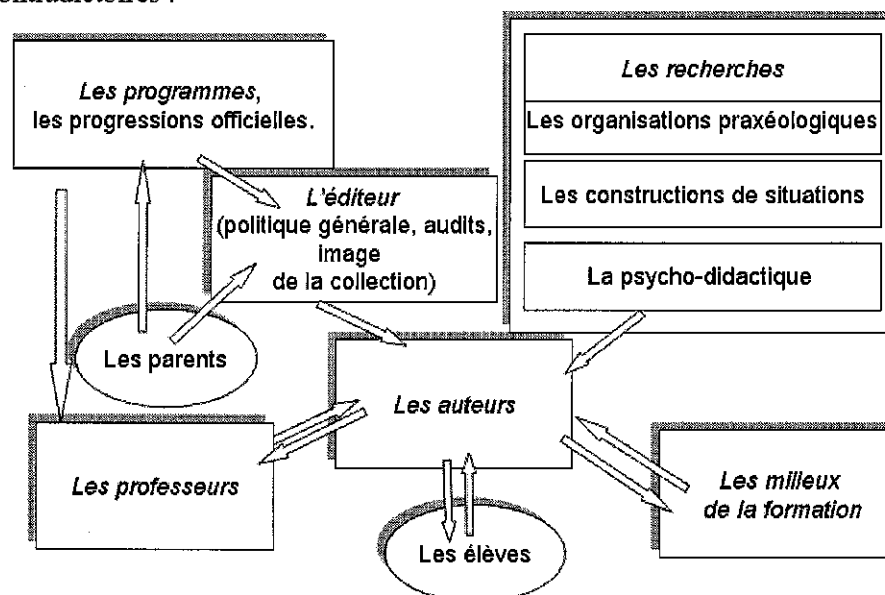
¹¹¹Les manuels sont de plus en plus pris comme objet d'étude dans la recherche en didactique des disciplines. Citons comme exemple R. Goigoux (2009) : « étude didactique de génèses instrumentales dans l'enseignement de la lecture »,

3. Quelques points de réflexion :

- Le « manuel » n'est pas uniquement un outil didactique. Il est un objet didactique qui réunit deux dimensions constitutives de toute approche didactique : *une dimension transpositive* d'une part puisqu'il propose une réorganisation des savoirs en vue de leur enseignement, *une dimension situationnelle* puisqu'il est censé réunir un ensemble de conditions spécifiques, qui bien que non suffisantes, doivent permettre de donner un sens aux connaissances visées. (B.Sarrazy 1997)

- Le manuel ne peut a priori contrôler les aménagements artisanaux du professeur : soit le manuel est didactiquement fiable et efficace : il devrait s'imposer alors à tous mais avec le risque de paraître être un carcan limitant la liberté pédagogique ressentie du professeur, soit il est conçu pour se mettre au service du « bricolage didactique » du professeur. Dans ce cas, les auteurs ont renoncé à se donner comme objectif de contrôler *a minima* ces aménagements artisanaux.

- Les auteurs se trouvent au centre d'un réseau d'attentes et de demandes parfois cohérentes, parfois contradictoires :



- Les programmes : programmes faussement exigeants dont les contenus sont de plus en plus soumis aux influences de la noosphère (la 'règle de trois') et dont la rédaction est confuse (programmes de mathématiques du cycle trois rédigés tantôt à la mode des capacités, tantôt à la mode des contenus). Suivre les progressions officielles peut conduire hélas à des absurdités, comme c'est le cas pour l'addition des nombres décimaux qui se trouve programmée au CM1 tandis que l'addition des fractions décimales nécessaire pour donner du sens à la technique d'addition des décimaux se trouve programmée en CM2.

- Les éditeurs : le manuel est un produit à vendre. L'auteur doit donc comprendre cette logique tout en ne renonçant pas à ses projets didactiques. Les auteurs se doivent donc de négocier avec l'éditeur le fait que les programmes sont rédigés par cycle pour pouvoir construire des progressions conformes à l'organisation didactique des savoirs et donc pas obligatoirement aux propositions officielles de progressions, mais ils doivent cependant prendre en compte les futures évaluations nationales en cours de CM2. L'éditeur se porte garant de la conformité aux programmes : il reste donc très vigilant sur ce point.

La tendance actuelle des éditeurs est de vouloir qu'un manuel scolaire se rapproche d'un cahier de vacances : un peu de tout chaque jour, parce que le choix du manuel se fera souvent en feuilletant quelques pages. Considérer comme « vieux jeu » de faire une semaine plutôt dédiée au démarrage de la construction de l'algorithme de la division est très tendance. Ce qui crée un obstacle de nature didactique à l'idée d'ouvrir des « chantiers ». La conséquence se mesure dans les classes : c'est le papillonnage. Les éditeurs font appel à un panel (ou plutôt un groupe constitué plus ou moins par relation avec l'aide de quelques délégués pédagogiques) de 15 enseignants consommateurs qui vont, en une matinée pouvoir critiquer un travail qui a été validé par des recherches connues... et qui vont être attirés par la facilité (au sens de « céder à la facilité ») à mettre en œuvre dans la classe, par des trucs pédagogiques, ou par une curiosité, un inattendu, une numération génétiquement modifiée, l'existence de produits dérivés : fichiers, livrets bilans, CDrom. L'enseignant consommateur cédant le pas à l'enseignant professionnel.

- Les parents : sont pris en compte à la fois par l'institution et l'édition. Les programmes doivent être lisibles par les parents (ce fait est un objectif ministériel depuis pas mal d'années ; souvenons nous du petit livre de Chevènement à destination des parents). L'édition doit rappeler les auteurs à l'ordre si le manuel propose des situations, des procédés de calcul, etc. que les parents auraient des difficultés à comprendre.

- Les élèves doivent aimer feuilleter le manuel. La scénarisation de séquences doit être attractive. Les auteurs doivent proposer des exercices qui sont proches des centres d'intérêts des enfants. Mais nos sociétés changent : les enfants ne manient plus beaucoup la monnaie, mesurent rarement, effectuent des pesées avec des instruments qui affichent du nombre, sont plus dans des jeux virtuels que dans des activités de travail manuel.

- Les professeurs en exercice, prescripteurs potentiels des manuels doivent pouvoir s'appuyer sur le manuel sans avoir à faire trop de travail d'appropriation, d'adaptation, d'approfondissement car une journée n'a que 24 h et ils doivent enseigner au moins 9 matières.

- Les milieux de formation (en centre IUFM, en circonscription) sont également des demandeurs d'outils et de matériels pour la formation initiale ou continue. A ce titre, les manuels et surtout les livres du professeur peuvent devenir des vecteurs de transmission des recherches en didactique.

- Les recherches en didactiques : les auteurs veulent généralement faire partager des messages didactiques, rendre reproductibles des organisations de classe qu'ils ont vécues comme des moments privilégiés avec des élèves, montrer que ce qu'ils ont pu vivre dans des recherches, des recherches action peut être transmis par le manuel scolaire, via et au-delà des lieux de formation et des colloques.

II Notre position parmi les auteurs de manuels scolaires

1. Plusieurs postures chez les auteurs de manuels

Sans être exhaustifs, nous pouvons repérer les postures suivantes : les auteurs sont

- porte-parole de leur propre pratique,
- porte-parole d'une équipe d'enseignants ayant rédigé des « expériences locales »,
- porteurs d'une méthode originale,
- porte-parole d'une équipe de recherche action,
- plutôt influencés ou/et membre de la communauté des chercheurs en didactique.

2. Nos objectifs de rédaction

- mettre en évidence différentes facettes des mathématiques (outil pour la vie quotidienne, pour d'autres disciplines, objet d'étude qui peut être fascinant, ludique), la variété des champs étudiés (géométrie, nombres, mesure).
- maintenir une problématisation des savoirs, éviter l'ostension déguisée (est-ce possible ?), sinon éviter, du moins trouver des moyens pour que l'ostension déguisée ne fasse pas obstacle au travail de recherche et d'appropriation personnelle des questions.
- ponctuer la vie scolaire mathématique : les situations de découverte, les activités de découverte, les conseils, les soutiens, les consolidations, les phases d'institutionnalisation, les entraînements, les évaluations, tout cela organisé sur une planification annuelle.
- Permettre à l'enseignant de pouvoir effectuer un pas de côté pour réfléchir sur sa pratique. En cela, le livre du maître peut aller au delà du simple « cahier des réponses » et être un vecteur de réflexion didactique. (Là aussi, nous sommes tiraillés entre réaliser un ouvrage de didactique et sensibiliser à...)

En nous plaçant parmi les formateurs qui font partie de la communauté des chercheurs en didactique, nous sommes donc amenés à nous poser la question de la transposition des savoirs. Dans cette communauté, les points de vue diffèrent : « *la vulgarisation n'est pas un vilain défaut* » ? C. Orange (2008) affirme : « Le chercheur en didactique doit renoncer au prescriptif ». La question n'est pas d'être ou non d'accord avec cette affirmation. Pour nous, le chercheur ne peut pas ne pas être d'une façon ou d'une autre être prescriptif (où alors il renonce à publier). Qui plus est, lorsque le didacticien rédige un manuel (ou bien lorsqu'il est formateur), il n'est plus un chercheur qui « s'intéresse aux conditions dans lesquelles des apprentissages peuvent se réaliser » : il devient prescripteur assumé même s'il prend des précautions.

G. Vergnaud (2008) écrit : « Chercheurs-professeurs deux communautés qui n'en font qu'une : dans les deux, on pointe quels savoirs à enseigner?, quelles difficultés ? Quels moyens pour y remédier ? » et il ajoute : « la vulgarisation n'est pas un vilain défaut ». Nous dirons que les deux communautés n'ont pas les mêmes contraintes de temps : les uns mettent parfois plusieurs années pour pouvoir répondre à des difficultés d'enseignement ; le professeur doit travailler à l'échelle de la séquence de classe.

III Les écueils

C'est donc un travail pratique de transposition que le chercheur en didactique conduit lorsqu'il rédige un manuel scolaire. Mais de nombreux écueils l'attendent.

- Les situations a-didactiques lorsqu'elles sont évoquées dans le manuel de l'élève ont dû être construites par le professeur, invité qu'il est en cela par le livre du maître. Le manuel scolaire, en scénarisant des situations, ne fait que les évoquer. Or rien ne garantit les auteurs d'une utilisation *a minima* de leur manuel. Dans ce cas, même si les auteurs s'en défendent, l'élève fait des mathématiques comme le téléspectateur fait du football et les réponses des élèves sont évaluées et non pas validées ou invalidées (au sens de la théorie des situations).
- D'un point de vue déontologique : peut-on affirmer que l'on « s'appuie sur les résultats récents de la recherche » ? G. Brousseau mettait il y a déjà longtemps en garde les formateurs sur ce qu'il nommait la « perméabilité didactique » : cette vocation du formateur à montrer des séquences « laboratoire » (sans doute pour justifier sa raison d'être) sans se préoccuper des inévitables questions de transposition non évoquées qui allaient être immanquablement à

la charge du futur enseignant formé. Nous avons, nous-même réfléchi à cette question dans un article intitulé « l'amère leçon du lendemain » (2000).

IV Quels outils théoriques dans le champ de la didactique pour la conception d'un manuel ?

La tâche de conception et d'organisation nous donne ainsi la possibilité de tenter une vulgarisation des résultats de recherche en didactique sur l'apprentissage et l'enseignement des notions au programme : en ce sens, il s'agit pour nous d'un véritable travail didactique de transposition.

Cette transposition concerne à la fois les organisations mathématiques et didactiques et là nous utilisons des outils issus de la théorie anthropologique du didactique.

L'élaboration de situations d'apprentissage prend largement en compte les concepts de situations didactiques et de milieu développés dans le cadre de la théorie des situations.

Nous sommes également nourris du fait que les travaux développés par Gérard Vergnaud sur la notion de champ conceptuel nous ont permis de construire des organisations didactiques nouvelles sur les structures additives et multiplicatives en découpant le savoir autrement.

1. Organisations mathématiques et didactiques régionales spirales

Un manuel de l'école élémentaire ne peut plus se réduire à une présentation des savoirs. Il se doit de proposer une présentation dynamique des apprentissages. Pour les auteurs il s'agit donc de proposer une linéarisation des savoirs : dans un manuel de l'école, les notions ne sont pas traitées par chapitre. Ceci présente plusieurs avantages :

- la possibilité de mettre en œuvre un enseignement spiralaire des notions : le manuel peut revenir sur certaines notions et les approfondir au cours de la même année scolaire mais aussi sur plusieurs années
- la mise en réseau des connaissances : il est possible de faire des ponts entre des « leçons » issues de champs différents mais relevant d'un même concept (par exemple la proportionnalité dans le domaine numérique et dans le domaine géométrique), ou entre des « leçons » portant sur des notions différentes mais pouvant être liées (par exemple aire et fraction)
- la prise en charge de tous les moments de l'étude de chaque notion (rencontre, soutien, entraînement, évaluation)

Au point de vue régional (niveau 4 au sens de Chevallard), il s'agit de décider comment linéariser à la fois l'étude de chacune des notions mais aussi des notions entre elles : cet aspect nous conduit à faire une étude en termes « d'écologie » des savoirs : comment proposer un « parcours » dans les mathématiques à étudier au cours de l'année, que faut-il pour pouvoir faire vivre une notion suffisamment longtemps, pour pouvoir la reprendre après avoir étudié autre chose afin de la voir sous un nouvel aspect et de l'approfondir ?

2. Organisations « départementales » et locales

D'un point de vue plus local, oserions-nous dire « départemental » il s'agit d'organiser mathématiquement et didactiquement l'étude. Prenons l'exemple des figures planes en CM2, dans quel ordre étudier les différentes figures ? Pour notre part nous avons fait le choix de construire la progression à partir du concept de distance. Le cercle est donc introduit en

premier comme ensemble de points situés à une distance fixée d'un point donné (le centre). Vient alors l'étude des triangles, comme figures entièrement caractérisées par la donnée de trois nombres (longueurs des côtés) sous certaines conditions.

Les quadrilatères sont étudiés ensuite comme figures déformables et donc non caractérisées par la longueur de ses côtés : d'où la nécessité de penser un autre élément pour les caractériser : diagonale, angle, etc. Enfin les polygones peuvent être reproduits par triangulation...

Sur le plan local au sens strict, il s'agit de choisir une ou plusieurs situations (en fait, d'organiser les déclinaisons d'une situation fondamentale) permettant un apprentissage d'un aspect ou d'un élément d'une notion.

C'est ici que se pose naturellement la question des conditions de reproductibilité des situations didactiques expérimentées par des chercheurs, et particulièrement la question de l'ostension déguisée car le manuel « stricto sensu » ne peut maintenir « l'incertitude » nécessaire à une réelle situation d'action.

A ce niveau local se pose également la question de la manière de faire émerger les éléments à officialiser : la mise en mots des savoirs dans un vocabulaire à la fois précis, rigoureux et accessible à de jeunes enfants proposée dans le livre du professeur nous conduit à prendre en compte les travaux sur le développement langagier des élèves. Il s'agit ensuite de construire un cheminement pour que ces différentes « officialisations » (« conclure avec les élèves ») concourent à la constitution progressive d'un aide mémoire (« institutionnalisation stricto sensu »)

3. Comment choisir les situations ?

Les mathématiques de la vie de tous les jours ne sont pas facilement repérables pour un élève de l'école primaire (nous avons déjà évoqué le faible écho des activités de mesurage, monnaie, bricolage, instruments de mesure, etc.) d'où notre choix :

- de limiter le nombre de situations « parlantes » par évocation souvent désignées par l'expression: proche du « vécu des élèves ». Peut-on parler d'un vécu commun à l'ensemble des élèves d'une classe? Le professeur peut-il avoir accès à ce « vécu » notamment dans les ZEP? La proximité avec des situations réelles renforce le risque de résolution pragmatique de la question, résolution pouvant éviter complètement l'utilisation du concept dont l'apprentissage est visé.
- de proposer des situations ayant le plus possible les caractéristiques de situations fondamentales que nous appelons des situations « hors sol ». Nous désignons par cette expression des situations construites par le professeur spécifiquement pour travailler une notion, qui vont enrichir l'histoire commune des élèves. Ces situations peuvent être concrètes ou non, elles peuvent donner lieu à des manipulations effectives de matériels, elles peuvent consister en des jeux, des défis, des histoires fictives, des prévisions, mais elles n'ont pas d'ancrage particulier dans le réel quotidien.

Ces situations donnent lieu généralement à des activités dites « préparatoires » qui sont signalées dans le manuel de l'élève et qui sont décrites dans le livre pour le professeur, et qui sont reprises sous forme d'un énoncé de problème le plus souvent accompagné d'une illustration qui les évoque.

V Pour que le professeur adhère à ce choix, le manuel de l'élève ne suffit pas

C'est dans le livre du professeur que nous donnons des éléments pour que celui-ci s'approprie le concept de situation fondamentale et qu'il puisse organiser l'ingénierie qui y est associée et faire évoluer le milieu. C'est également dans ce guide que nous accompagnons le professeur dans ce qui peut être une démarche inhabituelle, notamment pour l'aider à maintenir l'addidacticité d'une situation, mais aussi pour « tirer » les élèves vers des expérimentations qui « s'aventurent » dans le domaine des signes, en maintenant la curiosité et l'intérêt, savoir prendre en compte, faire partager la genèse de vrais théorèmes qui pourraient n'être considérés que comme de simples remarques.

1. Le livre du maître pour redonner tout son rôle au professeur

Nous prendrons un exemple pris au début du cycle deux : une enseignante fait lancer un dé par chaque élève. A chaque lancé, elle écrit le résultat au tableau et met, en même temps dans une tirelire, un nombre correspondant de jetons. Au bout de 9 jeux (par exemple), est écrit : $5+4+2+4+1+6+4+4+5$. Elle pose alors la question suivante : « Quand j'ouvrirai la tirelire, à chaque fois qu'il y aura 10 jetons, on les échangera contre un bonbon (*on peut contester le choix de ces bonbons*). D'après vous, combien de bonbons on va pouvoir avoir ? ». Dès cet instant, plusieurs élèves, en montrant le texte au tableau affirment « il n'y en aura pas dix, tu vois bien [en montrant ce qui est écrit], il n'y a que 6, maximum ». Dans cette première phase, le professeur a constitué un premier milieu de référence (le dé, la tirelire, une règle du jeu, des joueurs, une production écrite) à partir duquel il installe un milieu d'apprentissage en ajoutant la question relative aux bonbons. Il s'agit de tenter d'anticiper des faits expérimentaux (il y aura (ou non) possibilité d'avoir des bonbons), de les vérifier d'abord de façon empirique (« on n'a qu'à ouvrir la boîte »), passage obligé pour que s'installe un milieu propice à une autre activité : celle d'une construction théorique faite de langage essentiellement écrit qui permettra l'élaboration de processus de vérification d'une autre nature, devenant autonome, allant jusqu'à négliger l'ouverture de la tirelire.

Qui d'autre que le professeur peut organiser cette mise en scène qui va créer le désir « d'en savoir plus » sans ouvrir la boîte ? Qui fera comprendre aux élèves qu'au-delà de la règle du jeu, cet interdit de l'ouverture de la boîte est une invitation à d'autres découvertes ?

2. Le livre du maître comme outil de réexamen de situations

Nous avons souhaité montrer l'influence que peuvent avoir des choix didactiques différents sur la façon dont les élèves s'approprient les mathématiques et sur le sens que celles-ci prennent pour eux. Pour cela, nous proposons dans le livre du maître une réflexion sur quatre scénarii en CM1 « presque pareils » mais pourtant différents :

Les écritures à virgule ont été introduites à partir des fractions décimales.

Le professeur écrit un énoncé au tableau : « *Pour construire une grande frise chronologique, des enfants mettent bout à bout deux bandes de carton. La première mesure 1,45 m et la seconde mesure 2,7 m. Quelle est la longueur de la bande ainsi obtenue ?* ».

Scénario 1 : Élaboration collective de la solution à partir des écritures fractionnaires.

Scénario 2 : Consigne : « Prévoyez par le calcul la longueur de la bande obtenue lorsque l'on mettra les deux bandes bout à bout ». Travail par groupes. Écriture des démarches sur une grande feuille. Affichage des prévisions. Synthèse collective par le professeur (cf. scénario1)

Scénario 3 : Par groupe : deux bandes : 1,45 m et 2,7m :

Les élèves manipulent et mesurent pour trouver la longueur totale. Recensement des mesures trouvées et synthèse collective (cf. scénario1)

Scénario 4 : Dans la classe, deux bandes : 1,45 m et 2,7m :

Consigne : « Vous devez prévoir par le calcul la longueur de la bande obtenue lorsque l'on mettra ces deux bandes bout à bout. Une fois les prévisions effectuées, nous vérifierons en mesurant puis nous étudierons comment vous avez procédé pour faire votre prévision ». Recensement des prévisions. Organisation en collectif du mesurage effectif en mettant les bandes bout à bout. Rejet des solutions manifestement fausses. Recherche des raisons qui conduisent au résultat juste

Un étude détaillée et comparative de ces quatre scénarii nous font espérer que les professeurs seront plus sensibles à l'influence des conditions initiales (au « milieu ») qu'ils créent dans leur classe sur la nature de l'activité de leurs élèves.

3. Le livre du maître comme outil d'aide à l'analyse préalable

Du fait que les professeurs d'école sont des enseignants polyvalents, les situations ou activités proposées sont justifiées par une analyse a priori rapide permettant à l'enseignant de jouer sur certaines variables, d'envisager certaines réponses d'élèves, de prévoir certaines erreurs, des aides sont proposées pour les élèves : aides de « bas niveaux » (en utilisant la classification de L. Coulanges, 2008) permettant aux élèves de s'approprier la situation, sans pour autant supprimer leur activité, aides pour le professeur : aide à la formulation et à la synthèse de l'activité.

Nous avons le plus souvent possible proposé dans le livre pour le professeur des aides qui peuvent être donnés à certains élèves en fonction des difficultés qu'ils peuvent rencontrer en étant vigilant à ce que ces « aides » ne tuent pas la recherche.

4. Complémentarité du livre du professeur et du manuel.

Il s'agit aussi d'accompagner le professeur des écrits de travail des élèves aux phases de consolidation, d'institutionnalisation, de décontextualisation, tout en le sensibilisant au fait que dans certaines situations, l'élève a besoin de connaissances que l'école n'enseigne pas, mais qu'il doit pourtant mettre en œuvre pour apprendre le savoir ou pour utiliser ce qu'il a appris.

Enfin, le manuel propose d'autres formes de dévolution que celles des situations fondamentales (défis, jeux construits et matériel fonctionnant en auto-suffisance, mise en scène, problèmes) car toutes les leçons ne se prêtent pas à cette forme de travail.

VI L'ostension (assumée, obligée)

Dans un certain nombre de cas nous utilisons une forme d'ostension assumée avec précautions : « ni court circuit, ni institutionnalisation ». Prenons l'exemple de l'enseignement des techniques de calcul de la soustraction : nous avons fait le choix de présenter (par le biais d'élèves fictifs) plusieurs techniques s'appuyant sur des propriétés de la soustraction et de la numération de position. Il s'agit bien sûr d'une forme d'ostension, mais il reste un enjeu pour l'élève : relever un défi conduisant à un travail possible pour comprendre comment et pourquoi « cela marche ». La difficulté que peuvent rencontrer certains élèves à entrer dans la

méthode d'un autre est à prendre en compte, mais c'est aussi le « prix à payer » pour entrer dans la méthode usuelle.

Nous suggérons ensuite, en fonction des nombres concernés, un entraînement faible sur chacune des techniques proposées et une appropriation plus systématique des techniques usuelles. Mais des écueils sont possibles : le maître peut montrer toutes les techniques et les expliquer ou bien il peut exiger l'appropriation de toutes par les élèves...

- Un autre exemple : c'est par ostension que nous introduisons l'écriture à virgule pour les nombres décimaux en nous appuyant sur le texte historique de Stevin de Bruges

VII Les institutionnalisations

L'institutionnalisation :

- dans le livre du professeur, l'institutionnalisation est envisagée en terme de processus sur plusieurs leçons.
- Dans le manuel de l'élève, un « médiateur », représenté par un furet, donnent parfois des explications, rappelle des savoirs antérieurs, définit certains termes, indique ce qu'il faut retenir.
- Les savoirs « officiels » ne sont pas présentés sous forme d'un « cours » dans chaque chapitre, ils font l'objet d'un aide mémoire, soit en fin de manuel, soit par période qui correspond aux différents éléments qui ont été institutionnalisés progressivement au cours des leçons.

VIII Les limites

- Les auteurs peuvent difficilement anticiper tout ce qui relève du groupe classe, même s'ils peuvent préparer des activités de soutien et de consolidation. En proposant des activités de consolidation préalables à l'introduction d'une notion importante, le manuel s'inscrit dans son rôle d'organisateur du cursus.

- Nous avons déjà mis en évidence le risque de situations a-didactiques évoquée si elle n'est pas la reprise d'une situation d'action (paradoxe de la dévolution-effet Topaze)

- Le manuel scolaire ne peut pas prendre en compte complètement l'évaluation. Celle-ci ne peut être raisonnablement bien pensée que pour des élèves réels après un enseignement effectif. Le rôle d'un manuel ne peut être finalement que de donner des pistes pour que les professeurs puissent mettre en lien finement des compétences à tester chez les élèves et des exercices. Les propositions d'évaluation que nous faisons se fondent donc sur des hypothèses de travail dont nous ne sommes pas certains, et sur une activité potentielle que nous n'avons pas maîtrisée. Elles ne peuvent pas tenir compte de la spécificité d'un élève, d'une classe, d'un professeur. Ce sont des évaluations de produits finis écrits ce qui limite leur potentiel d'analyse. Elles sont présentes dans le livre de l'élève (ce que je dois savoir faire seul) et dans le livre du professeur (banques d'exercices, fiches autocorrectives). Enfin, certaines évaluations ne peuvent se réaliser qu'au travers d'observations de situations d'actions, ce que le manuel du maître ne peut que suggérer.

IX Conclusion

Pour reprendre l'expression de J-M. Zakhartchouk (1998), nous avons décidé à une époque de nous « salir les mains » en acceptant de devenir auteurs de manuels. Nous l'avons fait parce que notre expérience de formateur nous avait montré que ce type d'ouvrages constituait un

des médias essentiels dans la formation des maîtres, que ce soit pour le passage de témoin lorsqu'un enseignant laisse sa classe à un stagiaire pour un stage en responsabilité ou pour conduire l'activité en classe elle-même. Vouloir faire partager ce que nous vivons dans des activités de recherche, en prenant l'indispensable précaution de ne pas commettre l'erreur de nous appuyer sans discernement « sur les résultats récents de la recherche » comme il est fréquent de le lire ci et là, a été notre principale préoccupation. Ce faisant, il nous fallait ne pas confondre notre travail de chercheur et celui d'auteur de manuels. Cet article, non encore tout à fait abouti, voulait montrer l'ensemble des questions auxquelles nous avons été confrontés et un aperçu des décisions que nous avons été conduits à prendre en tant qu'auteurs.

X Bibliographie

Manuels : Collection *Euromaths* (2007-2009), CP CE1 CE2 CM1 CM2, Ed. Hatier

Briand J. Peltier ML. (2000) L'amère leçon du lendemain in *Les cahiers du formateur* tome. 4, pp 103-113, COPIRELEM

Brousseau G. (1997) consulter:

http://pagesperso-orange.fr/daest/guy-brousseau/textes/TDS_Montreal.pdf

Chevallard Y. (1971-2010) : consulter : <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/> cours PLC1 1994 : *Les savoirs enseignés et leurs formes scolaires de transmission : un point de vue didactique*

Goigoux R. (2009), Etude didactique de génèses instrumentales dans l'enseignement de la lecture, *actes du colloque de didactique comparée* Genève Janvier 2009 à paraître

Orange C. (2008), table ronde dans le colloque Bordeaux 2 IUFM d'Aquitaine, les didactiques et leurs rapports à l'enseignement et à la formation : Quel statut épistémologique de leurs modèles et de leurs résultats ?

Sarrazy B. (1997), Formation des professeurs et usage idéologique de la recherche, *cahiers pédagogiques*, n° 350-351.

Vergnaud G. (2008) table ronde dans le colloque Bordeaux 2 IUFM d'Aquitaine les didactiques et leurs rapports à l'enseignement et à la formation : Quel statut épistémologique de leurs modèles et de leurs résultats ?

Zakhartchouk J-M. (1998), Ni ange ni démon, *Cahiers pédagogiques*, n° 369.

Formation initiale des professeurs du secondaire supérieur et changements de rationalité mathématique entre l'institution secondaire et l'institution universitaire. Le cas éclairant du thème des dérivées.

Emmanuelle Rouy

Université de Liège, Belgique

Présentation de la thèse de doctorat en sciences, option didactique et épistémologie des mathématiques, défendue à l'université de Liège le 13 décembre 2007.

Jury :

M. Schneider (Promoteur) Mathématiques – Université de Liège

P. Gérard (Président) Mathématiques – Université de Liège

P. Lecomte (Secrétaire) Mathématiques – Université de Liège

A. Mercier Sciences de l'éducation – Université de Provence

B. Hespel Sciences, philosophies, sociétés – Facultés Universitaires de Namur

J. Winkin Mathématiques – Facultés Universitaires de Namur

Résumé

Ce travail étudie les difficultés éprouvées par les étudiants en formation initiale à passer du statut d'étudiant universitaire à celui de professeur du secondaire. En analysant leurs pratiques et leurs discours à propos de l'enseignement de la dérivée et du critère de croissance, nous montrerons comment ils adoptent spontanément des pratiques d'ostension déguisée pour pallier l'absence de discours technologique, c'est-à-dire de discours rationnel et justificatif. Sur base d'une analyse spécifique du thème mathématique concerné et de ses transpositions, nous caractériserons deux niveaux de rationalité. Le premier correspond à la modélisation mathématique d'un système formé d'objets mentaux (ici, la détermination de grandeurs), et le second concerne un travail d'organisation déductive du modèle ainsi créé (ici, l'analyse réelle) et de ses propriétés. A ces deux niveaux de rationalité peuvent alors être associés des niveaux de discours qui leur sont spécifiques et qui nous serviront à analyser les pratiques et discours des élèves-professeurs.

En confrontant les élèves-professeurs à des projets d'enseignement relevant de ces différents niveaux, nous mettrons alors en évidence comment l'absence d'identification du premier niveau, comme l'impossibilité à comprendre le milieu effectivement proposé aux élèves, amène les élèves-professeurs à mettre en place un discours hybride tentant de faire cohabiter des arguments de nature visuelle sur les objets mentaux avec des énoncés directement extraits de la théorie.

Nous en dégagerons des perspectives concernant l'enseignement du thème mathématique choisi, mais aussi les enjeux de la formation initiale et de la recherche en didactique sur cette formation.

Mots clefs

Niveaux de rationalité, formation initiale, épistémologie, dérivée

I Introduction

1. Motivations et objectifs

Ce travail se propose d'étudier l'existence d'une difficulté que rencontrent les élèves-professeurs lorsqu'ils doivent mettre en place un discours explicatif alors qu'ils ne peuvent exposer la théorie mathématique proprement dite. Nous étudierons les manifestations de cette difficulté dans les pratiques et les discours de ces élèves-professeurs, ainsi que la possibilité d'inclure dans un dispositif de formation initiale certaines actions destinées à mettre en évidence cette difficulté et à y remédier, autant que faire se peut.

Les motivations de cette étude sont liées à l'évocation par certains auteurs d'un « *manque d'assurance* » chez les élèves-professeurs et de la nécessité pour eux de rechercher une « *nouvelle disponibilité des connaissances* » leur permettant, non plus de résoudre des problèmes, mais d'entendre les questions des élèves et d'y répondre sur un plan mathématique (Robert 1991). Nous pouvons aussi la situer dans une perspective de « *recherche de vigilance épistémologique* » au sens où l'entend M. Legrand (2003). Enfin, elle rejoint également la préoccupation de comprendre pourquoi le caractère fondamental du savoir mathématique ne parvient pas toujours à être mis en évidence dans les situations d'enseignement.

Une des conséquences de cette difficulté est en effet le risque pour les élèves professeurs, placés face à ce manque d'assurance et guidés par une envie légitime de justifier les résultats énoncés aux élèves, d'être amenés à développer des pans de théorie dès que l'occasion s'en présente, et ce même sans besoin réel. Dans le même temps pourtant, le travail effectif de mathématisation risque d'être passé sous silence, conduisant alors à une illusion de transparence entre la réalité et les modèles mathématiques, alors que c'est vraisemblablement ce travail qui permettrait la mobilisation des connaissances dans d'autres contextes. La relation didactique est dans ce cas biaisée dans la mesure où, en l'absence d'un savoir mathématique à questionner, le professeur et les élèves ne peuvent s'engager dans « *cette collaboration très spéciale au sujet d'un savoir* » (Fregona 1995).

2. Pratiques liées à l'introduction de la dérivée et au critère de croissance

Nous nous intéressons aux pratiques relatives à l'introduction de la notion de dérivée et à la présentation du critère de croissance établissant que le signe de la dérivée première détermine la croissance ou décroissance de la fonction. Concernant l'introduction de la dérivée, la pratique actuellement la plus répandue consiste à :

- proposer une courbe ;
- tracer des droites passant par un point fixé sur la courbe ;
- en rapprochant un autre point d'intersection, mettre en évidence « une certaine droite » ;
- proposer de l'appeler « tangente » de par sa caractérisation « visuelle » ;
- énoncer alors que cette tangente étant la « limite des sécantes », son coefficient directeur est donc la limite des coefficients directeurs des sécantes.

Pour le critère de croissance, il est courant de montrer une courbe sur laquelle on trace des tangentes de manière à suggérer le lien entre la pente de la tangente et la croissance de la fonction. Ce lien est alors légitimé par l'énoncé du théorème des accroissements finis, lui-même appuyé par une figure montrant qu'en un point d'un intervalle $[a,b]$, il est possible de tracer une tangente parallèle à la sécante déterminée par les extrémités de l'intervalle. Soulignons déjà que les courbes proposées sont visiblement associées à des fonctions

croissantes ou décroissantes alors que l'utilisation essentielle de ce résultat (les études de fonctions) nécessitera sa mise en oeuvre sous une forme de condition suffisante : il suffit que la dérivée soit positive¹¹² sur l'intervalle pour que la fonction y soit croissante. Et pour montrer cela avec la technique choisie, il faudrait tracer les tangentes en chaque point de l'intervalle...

Ces pratiques sont donc susceptibles de nous interpeller sur le plan des mathématiques qui peuvent en être apprises. La notion de dérivée s'appuie ici sur celle de tangente qui n'a pourtant pas de statut mathématique à ce stade du cursus et le seul énoncé « le nombre dérivé est le coefficient directeur de la tangente » devient une définition circulaire entre les deux objets. De plus, cette même tangente est utilisée sous sa forme « dessin » pour valider un théorème appartenant au domaine numérique. Outre la question de la condition suffisante déjà mentionnée, il existe aussi un risque d'éluder la nature des nombres en jeu et de réduire le théorème des accroissements finis à une « caution externe ». On peut aussi se demander si une telle introduction se voulant géométrique favorise la compréhension de l'efficacité de la dérivée à modéliser la notion de vitesse instantanée et donc sa mobilisation dans les problèmes d'application.

Sur le plan didactique, l'utilisation de la tangente masque les obstacles épistémologiques spécifiques à la notion de dérivée : par exemple, quelle est la nécessité de la limite et de quelle définition de la limite a-t-on réellement besoin ? De plus, cela rajoute des difficultés propres à l'apprentissage de la notion de tangente. M. Schneider (1991) montre par exemple que la définition comme « limite de sécantes » provoque un transfert inapproprié entre le numérique et le géométrique et C. Castela (1995) met en évidence le rôle du professeur dans l'articulation des différents points de vue sur la tangente. Ces difficultés sont en effet liées à l'ambiguïté propre à la notion de tangente qui est à la fois 1) un objet mental (Freudenthal 1973) que tout le monde (re)connaît sans toujours pouvoir le définir ; 2) un objet géométrique répondant à des problématiques de position relative et d'intersection et 3) un objet analytique défini par son coefficient directeur ou comme la représentation graphique d'une fonction du premier degré particulière. Les pratiques ainsi décrites ont donc pour effet de mêler sans les clarifier les difficultés de la dérivée et de la tangente.

Se posent alors les questions relatives au rapport au savoir que révèlent ces pratiques. Les étudiants observés viennent en effet de terminer leurs études universitaires. Il ne s'agit donc pas de connaissances insuffisantes de la théorie, mais plutôt de connaissances « mal utilisées ». De plus, ces pratiques sont accompagnées de références à la rigueur mathématique. On peut donc se demander pourquoi et comment le rapport au savoir peut ainsi se modifier du seul fait de passer du statut d'étudiant à professeur et en chercher une explication à la lumière du savoir lui-même. D'où la première formulation des questions de notre recherche : comment les élèves-professeurs articulent-ils leurs connaissances mathématiques universitaires, les connaissances correspondantes dans le secondaire et leurs connaissances didactiques pour élaborer, ou non, un discours rationnel et justificatif sur le thème des dérivées ?

112 Sans en négliger l'intérêt, nous n'avons pas mis l'accent ici sur la question des points isolés.

II Problématisation

1. Cerner la question

Cette phase vise à identifier les enjeux de la question initiale ainsi qu'à la construction d'outils en permettant une analyse effective.

Le fait que la formation initiale soit aussi une transition entre institutions et que le thème mathématique présente précisément une double visibilité institutionnelle nous invite à nous référer à la TAD d'Y. Chevallard et à procéder à une analyse permettant de dissocier le savoir de ses transpositions. Au niveau du savoir, nous mettons en évidence le vide théorique entre le point de vue géométrique et le point de vue numérique sur la tangente. L'analyse des transpositions montre ensuite que le thème des dérivées est caractéristique de ce que Chevallard (1999) appelle un phénomène de « déconnexion » lorsque « *de génétiquement nécessaires, les tâches deviennent institutionnellement contingentes* » et que « *le rapport entre question et réponse tend à s'inverser* ». De plus, nous soulignerons dans les manuels belges la naturalisation de ce que nous appellerons une « praxéologie à trous » dans laquelle le discours proposé est constitué du discours théorique dont on ne garde que les éléments facilement « illustrables ».

L'étude de recherches sur le rapport au savoir chez les professeurs débutants nous amènera ensuite à proposer de distinguer deux formes de rapport au savoir : la mobilisation de connaissances acquises ou la mise en place de connaissances dans une posture de modélisation.

Nous ferons référence à plusieurs cadres théoriques de didactique :

- 1) la TAD pour son éclairage institutionnel ; pour la notion de praxéologie (ou organisation) qui distingue le discours technologique, dont la fonction est de justifier l'utilisation d'une technique pour réaliser une tâche, de la théorie dont la fonction est l'obtention d'un niveau de rationalité dégagé des implicites éventuels ; pour la dialectique système/modèle.
- 2) la TSD pour la notion de milieu, désignant au départ les référents externes permettant aux élèves de situer leur action, et qui sera étendue à l'étude du milieu du professeur.
- 3) la dialectique outil/objet qui nous permettra de discerner comment la dérivée et la tangente sont alternativement présentées sous leur facette outil ou objet.

2. Le savoir et ses transpositions

Une lecture de textes sélectionnés dans l'histoire de l'analyse (Saelens 1995 ; Tannery 1912) nous amène à distinguer en résumé les étapes suivantes :

- 1) La tangente est d'abord un objet géométrique en tant que tangente au cercle telle que définie par Euclide. C'est alors une tâche dans la mesure où un objectif est de construire la tangente. Apollonius en étend la définition et propose une caractérisation de la tangente en un point d'une parabole (propriété de la sous-tangente).
- 2) Toujours en cherchant un procédé de construction de la tangente, Fermat puis Barrow proposent des procédures de type infinitésimal faisant intervenir des « nombres » au statut ambigu puisqu'on peut les simplifier dans les calculs et les considérer ensuite comme nuls. La dérivée est alors un outil implicite numérique.
- 3) En particulier Barrow fait le rapport de ces « infinitésimaux », préfigurant la notion de dérivée. Une médiation par la cinématique, en considérant d'abord la courbe comme une trajectoire puis comme la représentation d'une loi de position, permettra à Newton de faire accepter ce rapport par analogie avec la notion de vitesse instantanée (*ultima ratio*). La dérivée devient un outil explicite numérique.

4) Leibniz reste dans le cadre géométrique lorsqu'il utilise la similitude de triangles dont l'un est « porté » par la tangente et va alors se heurter à une double utilisation de la tangente, à la fois objet à construire et fondement du discours. Remarquons que Leibniz avait par contre l'intuition que la courbe obéissait en quelque sorte à une « loi des pentes ».

5) Un basculement s'opère avec un texte de d'Alembert présentant la tangente comme « limite de sécantes ». Alors la tangente devient une technique didactique, mais au prix d'une perte de définition.

6) Les développements de l'analyse (Lagrange, Euler, Cauchy) fournissent une définition de la dérivée à partir des concepts de fonction et limite. La dérivée devient un objet numérique.

7) Même si la propriété de « droite donnant une bonne approximation » apparaissait dans certains textes de Barrow, la tangente reçoit ensuite une autre définition après précision de la notion de « bonne approximation ». La tangente devient aussi un objet numérique.

Le développement historique de la dérivée montre donc que l'association dérivée-tangente est effectivement toujours présente, mais que la tangente n'y a pas toujours le même statut. Elle passe d'objet mathématique à technique didactique au risque de faire intervenir alors l'objet mental plutôt que le concept mathématique. Cet objet mental possède en effet l'avantage d'avoir déjà un statut mathématique en géométrie et d'offrir des propriétés particulièrement visibles (le schéma parle souvent tout seul). Au contraire, la notion de vitesse instantanée, qui aurait pu jouer le même rôle, ne bénéficie pas d'une légitimité mathématique antérieure et appartient au domaine des grandeurs (en étant même un rapport de grandeurs).

Une praxéologie constitutive de la dérivée peut être proposée comme suit :

- Type de tâches : construction de tangentes, problèmes de vitesse variable, d'optimisation et d'approximation ;
- Technique : calcul de dérivées ;
- Discours technologique : argumentations locales et souvent hybrides (cinématique, géométrie)
- Théorie : analyse réelle avec ses axiomes, la manipulation d'inégalités et de quantificateurs.

Toutefois la transposition de cette organisation dans des manuels, volontairement contrastés, va nous amener à distinguer trois catégories :

1) Définition de la dérivée dans un cadre numérique en recherchant un développement d'ordre un, puis vérification que la tangente définie par son coefficient directeur possède la propriété de n'avoir « localement » qu'un point d'intersection avec la courbe. On observe cependant quelques glissements au moment de réintroduire la tangente dans le cadre géométrique.

2) Approche volontairement heuristique (le manuel A.H.A.) qui définit séparément la tangente comme un outil d'approximation, puis la dérivée comme un modèle de la vitesse instantanée.

3) L'approche généralisée dans les manuels belges qui mêle les cadres théoriques et propose des pseudo-raisonnements à partir de la limite géométrique. Les problèmes de vitesse deviennent des illustrations de la théorie (non questionnement de la pertinence du modèle vitesse-dérivée) et l'approximation devient une conséquence de l'observation de la figure.

En ce qui concerne le critère de croissance, apparaissent aussi trois catégories. La première contient des manuels qui se contentent d'énoncer le critère et de proposer des activités préparatoires qui pourraient permettre le développement d'un discours spécifique. La deuxième correspond à l'approche, annoncée comme heuristique, de l'ouvrage A.H.A qui va poser une question cinématique (suffit-il que la vitesse soit positive?) et proposer une démonstration numérique utilisant explicitement l'axiome des intervalles emboîtés. La troisième propose ce que nous avons appelé une « praxéologie à trous » dans laquelle le

critère est « démontré » au moyen de l'énoncé des théorèmes de Rolle et Lagrange qui sont illustrés par une figure et même parfois directement exprimés sous forme géométrique.

L'appellation « praxéologie à trous » souhaite refléter le fait que l'organisation proposée dans ces manuels contient seulement des tâches et des techniques accompagnées d'un semblant de discours constitué en fait de référence épisodiques et sélectionnées à la théorie proprement dite qui vont apporter en quelque sorte une légitimité « externe » à l'organisation en jeu.

Le discours technologique proposé est en effet lui-même constitué du discours théorique proprement dit (tel que nous l'analysons dans un cours d'analyse de niveau universitaire) dans lequel on aurait « fait des trous » pouvant être comblés par le recours aux propriétés visuelles de la tangente, dont on a vu qu'elle n'est pas toujours mathématiquement définie au préalable et qu'elle peut alors rajouter des difficultés d'apprentissage.

Dans cette organisation, les tâches liées à la vitesse instantanée ou à l'approximation deviennent des illustrations d'une théorie, au prix de l'absence du travail mathématique correspondant. Malgré leur intérêt, les exercices et problèmes vont alors demander la mobilisation de la dérivée pour résoudre des problèmes de vitesse et d'approximation alors que rien n'a permis d'admettre la dérivée comme un bon modèle de la vitesse ou la tangente comme une bonne approximation affine, l'expression « meilleure approximation » étant aussi utilisée sans plus de précaution.

En résumant ces observations, on peut alors comparer comme suit les deux institutions sur le plan du rapport à la dérivée :

A l'université	Dans le secondaire
oubli des types de tâche, légitime car on est en fait dans un autre type de travail visant à mettre en place une organisation déductive ;	les tâches ont un statut inégal avec prédominance de la tangente ;
théorie : analyse réelle avec axiomes, définition des objets limite, fonction, etc. ;	accent mis sur la technique (étude systématique de fonctions) ;
la dérivée est un objet dans un modèle.	ersatz de théorie ;
	la dérivée est un outil pour utiliser le modèle dans le système

Les transpositions proposent donc soit un travail dans le modèle (université), soit un travail dans un système comme illustration du modèle (secondaire). Il n'y a pratiquement pas de travail du système au modèle, excepté A.H.A et quelques activités peu développées dans certains manuels et dont l'exploitation dépendra alors du rapport au savoir des professeurs.

3. Rapport au savoir chez les élèves-professeurs

Que sait-on du rapport au savoir des élèves-professeurs ? D'autres études confirment à ce sujet l'existence de la difficulté évoquée en introduction.

A. Lenfant (2002) étudiant le rapport à l'algèbre chez les professeurs débutants, cite des étudiants disant par exemple « je sais la raison mais je ne peux pas la dire » ;

C. Ben Breigeat (2001) parle de connaissances de niveaux n et $n+p$, et de l'impossibilité d'utiliser celles de niveau $n+p$, leur mobilisation étant même « concurrencée » par les manuels.

C'est aussi ce qu'on retrouve dans une étude de S. Coppé (2006) qui montre qu'en préparation de leçons, les professeurs débutants procèdent à un agencement de pièces existantes comme si ils faisaient un puzzle, même si les pièces ne s'emboîtent pas vraiment sur le plan mathématique.

Une explication peut être fournie en utilisant le modèle du milieu du professeur proposé par C. Margolinas (2005) qui distingue plusieurs niveaux :

- le niveau +3 est celui des valeurs et croyances sur l'enseignement et l'apprentissage¹¹³ ;
- le niveau +2 est celui des mathématiques ;
- le niveau +1 est celui de la préparation de leçon ;
- le niveau 0 est celui de la réalisation de la leçon
- le niveau -1 est celui de la perception de l'activité des élèves.

Ces niveaux sont idéalement en interaction mais Margolinas montre à partir de cas d'études l'existence de faiblesses liées à une influence prédominante du niveau +3 (sur-légitimité des manuels et confiance dans leur efficacité), une réflexion insuffisante au niveau +2 du thème mathématique et une insuffisance dans la capacité à effectivement prendre en compte le niveau -1 (questions et stratégies inattendues des élèves).

Elle propose alors par exemple des actions de formations visant en quelque sorte à placer le professeur dans le milieu de l'élève pour le « contraindre » à adopter une posture de modélisation, car c'est alors que « la complexité des maths va lui apparaître ».

Nous rapprochons en effet cette étude de la thèse de G. Cirade (2006) qui identifie les mathématiques comme étant finalement le principal problème professionnel des professeurs en formation. Vouloir faire semblant que les mathématiques ne sont pas complexes aboutissant selon elle à une « démathématisation », elle propose de faire travailler les élèves-professeurs avec ce qu'elle appelle des « *élaborations transpositives intermédiaires* » pouvant être des mathématiques pour l'enseignement.

Notre problème sera alors de voir quel(s) discours vont développer les élèves-professeurs lorsqu'ils sont confrontés à de telles situations demandant un travail de modélisation, lié à la dérivée dans le cadre de notre étude.

4. Cadres de rationalité et discours associés

Afin de caractériser le(s) discours adopté par les élèves-professeurs dans différentes situations de formation, nous proposons de distinguer deux types de discours, en se basant sur la dialectique système-modèle telle que la conçoit Chevallard (1989).

Un premier type de discours est celui qui « va » du système au modèle et qui utilise des arguments pouvant rester liés à la nature du système, par exemple le temps et la vitesse instantanée dans notre étude. Un deuxième type de discours est alors celui qui correspond au travail dans le modèle et qui s'appuiera sur les objets mathématiques définis.

Ces deux types de discours sont en fait associés à des activités mathématiques distinctes, prenant place dans ce que M. Schneider (2007) appelle des praxéologies de type 1 et de type 2. Le premier niveau de discours remplit alors la fonction du discours technologique associé à la praxéologie de type 1. Sa fonction est en effet dans un premier temps de présenter la dérivée comme un bon modèle mathématique de la notion de vitesse instantanée, et dans un second temps de présenter le calcul de dérivée comme une technique plus efficace que

¹¹³ Ajoutons que l'on pourrait ensuite chercher à distinguer celles qui sont d'ordre personnel de celles véhiculées par l'environnement

d'autres pour résoudre des problèmes de vitesse, puis des problèmes concernant l'optimisation et l'approximation.

Ces deux types de discours relèvent de plus de cadres de rationalité différents, notion proposée par A. Lerouge (2000) à partir de l'épistémologie de Bunge (1983). Le discours cherché est en effet un discours explicatif permettant 1) de valider l'adéquation de la technique (calculer une dérivée, même sous forme embryonnaire) à la tâche (répondre à une question portant sur la vitesse instantanée sans en avoir de définition mathématisée) et 2) de construire (et maintenir) une association entre la pratique et le discours à propos de l'objet mathématique de manière à en contrôler, en raison, la mobilisation.

Tout en s'inscrivant aussi dans une dialectique entre une forme de rationalité quotidienne et « la » rationalité scientifique, les modèles de rationalité locale, comme l'îlot déductif (Choquet 1964) ou l'îlot de rationalité (Fourrez 1997) ne répondent pas à cette question. La référence au « jeu de cadres de rationalité » permettra de prendre en compte la dualité entre une « rationalité personnelle », constituée d'objets mentaux, de conceptions, de processus plus ou moins explicites, et une « rationalité culturelle » constituée de concepts et de procédures (de calcul et/ou de validation) possédant un statut dans une culture donnée. En effet, c'est précisément le discours médiateur de l'une à l'autre qui nous intéresse. De plus, on peut prendre aussi en considération

- sur le plan mathématique, la culture géométrique par rapport à la culture analytique concernant la tangente ;
- sur le plan institutionnel, la culture de l'université et la culture du secondaire.

En reprenant cette distinction entre les niveaux de discours, on peut identifier dans l'histoire le niveau 1 (travaux de Newton sur la dérivée) comme le niveau 2 (développement de l'analyse réelle, la tangente dans le cas des coniques). Nous soulignerons à ce sujet un texte de Bolzano () qui distingue le cadre théorique de l'analyse (dont, en fait il demande les fondements) d'un discours dit « éclairant » et qui refuse « des preuves pseudo-géométriques ».

C'est pourtant ce type de preuves que l'on a majoritairement retrouvé dans notre analyse des transpositions, en même temps qu'un discours explicitement de niveau 2 et de quelques opportunités de discours de niveau 1. Ce discours intermédiaire (voulant mêler analyse, géométrie et observation) sera par la suite appelé « discours 2bis » car il ressemble à un discours de niveau 2 mais n'en possède que les apparences. Il consiste en effet à mélanger des extraits choisis de la théorie (énoncés, notations) qui doivent être supportés par des arguments que nous qualifierons « de niveau 0 » sur le plan de la rationalité, du type « ça se voit », ou des analogies d'écritures. Ce discours accompagne en particulier la praxéologie à trous définie plus haut, et nous apparaît caractéristique de l'ostension déguisée.

On peut alors proposer une deuxième formulation des questions de notre recherche :

- à quel niveau de rationalité se situe le discours développé ?
- quand et comment change le discours ? Quand et comment est-ce rendu explicite ?

On peut aussi les exprimer en termes de milieu comme suit :

- à quel niveau du milieu se situent les arguments des élèves-professeurs ? En particulier quelle y est la place du savoir mathématique ?
- le milieu effectif de l'élève est-il compris par les élèves-professeurs ?

Ces questions guideront alors la conception de notre dispositif de formation et de recherche.

III Dispositif de recherche et de formation

Afin d'explorer les manifestations de l'hypothèse étudiée, nous avons observé des élèves-professeurs pendant 4 ans à l'Université de Liège (BE) et 3 ans aux Facultés Universitaires de Namur (BE). L'objectif est de se référer à la notion de milieu de l'élève-professeur et d'utiliser comme outils d'analyse les différents niveaux de rationalité identifiés pour analyser leurs pratiques et leurs discours lors de travaux libres et lors de travaux guidés à propos de l'enseignement de la dérivée et du critère de croissance.

Les différentes situations sources de données sont :

- 1) L'analyse de préparations de leçons sans contrainte, avec ou sans enseignement de didactique, avec ou sans exposé oral, avec ou sans entretien ;
- 2) la dévolution aux élèves-professeurs d'une situation adidactique : on leur demande de résoudre le problème dit « du vase conique » qui concerne une question de débit instantané et qui les rend susceptibles de développer une technique de calcul spécifique sans forcément mobiliser d'eux-mêmes la dérivée ;
- 3) il est demandé aux étudiants d'analyser des transpositions existantes, dont une ingénierie relevant du premier cadre de rationalité;
- 4) Il leur est explicitement demandé de rédiger un discours technologique qui puisse accompagner cette ingénierie, et en particulier qui justifie les techniques proposées par les élèves ;
- 5) En dernier lieu, il est de nouveau demandé une analyse de transpositions, cette analyse étant alors guidée par des questions cherchant à « canaliser » le discours vers les niveaux S2 (thème mathématique) et S-1(travail et milieu effectifs de l'élève) ; dans ce cas, les étudiants reçoivent l'ingénierie dans une version incluant des commentaires sur ses enjeux ;
- 6) enfin, des entretiens avec des professeurs d'université et du secondaire cherchent à éclaircir l'aspect institutionnel de la question.

Les caractéristiques de ce dispositif sont de proposer une distanciation par rapport à la nécessité immédiate, toujours présente en formation initiale, et de modifier le milieu de l'élève-professeur en y injectant des transpositions non naturalisées, des questions sur les obstacles et des questions d'analyse.

Un élément clé réside dans le fait de les confronter à plusieurs praxéologies concernant la dérivée et le critère de croissance. La première correspond à la transposition naturalisée, la deuxième est le discours proposé par le manuel A.H.A () qui cherche à articuler le cadre I et le cadre II et qui met en évidence l'importance de la nature des nombres en jeu (réels) en faisant intervenir la propriété des intervalles emboîtés dans une démonstration du critère, et la troisième est l'ingénierie se voulant du cadre I. Une analyse *a priori* nous permet de préciser en quoi elle peut être perçue comme différente et les moments où un discours spécifique devrait être développé. Précisons seulement ici la motivation pour avoir utilisé la notion de mouvement :

- l'utilisation du temps comme variable permet de disposer d'une continuité naturelle,
- la notion de mouvement est un moyen reconnu (Arsac, 1996) de se situer entre l'expérience effective et l'expérience de pensée,
- le travail sur la vitesse instantanée permettra un accès direct à la fonction dérivée qui serait peut-être moins facile si on était dans un cadre géométrique,
- c'est justement l'occasion de prendre du recul par rapport à la naturalisation de l'expression « la vitesse instantanée est la limite de la vitesse moyenne ».

Les élèves-professeurs vont donc devoir travailler essentiellement avec des graphiques représentant la loi de position de deux mobiles, l'une étant représentée par une droite et l'autre par une courbe, et avec des stratégies proposées par les élèves pour répondre à la

question « à quel moment les mobiles ont-ils la même vitesse ? ». Après avoir montré comment l'enchaînement des questions et la différence de nature des stratégies proposées constitue un milieu pour l'élève, nous allons observer de quelle manière les élèves-professeurs parviennent à intégrer ce milieu adidactique avec leurs connaissances théoriques pour élaborer un discours adéquat.

IV Observations et analyse : aperçu

Dans les travaux libres, nous observons de manière récurrente un choix majoritaire de la praxéologie à trous, y compris l'utilisation de définitions circulaires entre la dérivée et la tangente.

La définition de la tangente reste d'ailleurs problématique, en particulier pour articuler les points de vue numérique et géométrique, donnant alors lieu à des définitions mixtes comme « la droite qui approxime le mieux la fonction en un seul point » ou « droite qui colle le mieux à la courbe en un point donné et qui, par conséquent, ne coupe la courbe qu'en un point ».

L'analyse des préparations de leçons, comme le choix des ouvrages proposés, montre aussi que cette phase est guidée par des arguments du niveau +3 (valeurs) et la volonté de rester dans le cadre de rationalité de type II (la théorie), même si c'est pour n'en conserver les signes extérieurs.

En ce qui concerne les travaux guidés, il s'avère manifeste que en voulant à la fois exploiter l'ingénierie et « retrouver » le discours de niveau de rationalité 2, les élèves-professeurs passent dès le début par le discours 2bis en utilisant en guise de discours explicatif des analogies de formules ou des tableaux de valeurs.

L'ensemble montre finalement un rapport ambigu à la théorie dans la mesure où il est admis d'en reprendre les énoncés, même sans les valider, tandis que la démonstration par l'absurde est considérée comme trop théorique.

Cette question de validation s'avère cruciale dans la mesure où les niveaux de rationalité identifiés diffèrent par la forme de validation qui y est possible. Or l'analyse des entretiens montre une forme de renoncement à l'existence d'une rationalité dans le secondaire en admettant implicitement une répartition : enseignement des techniques au secondaire et enseignement de la théorie à l'université.

Enfin, la dernière phase de l'expérimentation montre une meilleure articulation des organisations mathématiques proposées.

V Conclusions et perspectives

Concernant tout d'abord le thème mathématique proprement dit, cette étude peut expliquer pourquoi la notion de dérivée n'est pas si facilement mobilisable, même dans des problèmes d'application intéressants, ses aspects fondamentaux (en particulier sa pertinence pour modéliser une vitesse) n'étant pas pris en compte dans la transposition naturalisée facilitant même le risque de recourir au discours appelé 2bis.

On peut aussi se demander si le théorème des accroissements finis ne mérite pas mieux que ce rôle de caution théorique. Il est à ce sujet intéressant de rappeler que ce résultat apparaît comme « théorème en acte » (Vergnaud 1985) dans un discours de niveau 1.

Enfin, le statut des notions de topologie s'avère intéressant à questionner.

Rappelons toutefois que le but n'est pas de proposer un projet d'enseignement « clé en main » mais de permettre aux élèves-professeurs de prendre en charge leur part de responsabilité dans l'articulation des savoirs et discours associés. Si un objectif de la formation initiale est d'aider à développer le discours explicatif recherché, il apparaît donc que cela passe par une relecture du savoir qui n'est pas une vérification des connaissances mais qui vise à rendre le savoir étranger, voire étrange, à l'ancien étudiant en mathématiques. Notre étude montre en effet que c'est dès le début de la mise en œuvre de l'ingénierie que les étudiants bifurquent vers le discours 2bis.

En ce qui concerne la recherche sur la formation et les questions méthodologiques associées, il nous semble intéressant de s'interroger sur la double posture de chercheur et formateur, sur les moyens de mettre en évidence une absence de discours, sur l'évaluation de l'apprentissage en formation par rapport à l'impact sur la pratique effective et sur la possibilité d'un « contrat de formation ».

Enfin, si la question se pose certainement pour d'autres thèmes mathématiques, il nous semble opportun de rappeler que l'analyse passe par une analyse *a priori* des savoirs en jeu. La possibilité que le travail sur un thème ait un impact sur la posture des jeunes professeurs par rapport à d'autres thèmes reste à étudier.

VI Bibliographie

Nous ne reprenons ici que les références citées dans ce résumé.

Arsac G. (1996), Un cadre d'étude du raisonnement mathématique. In Grenier, D. (ed). *Séminaire didactique et technologies cognitives en mathématiques*. Grenoble : IMAG.

Ben Salah Breigeat C. (2001), *Les connaissances mathématiques des nouveaux enseignants de mathématiques au collège à l'épreuve du feu : une étude de cas*. Thèse de doctorat en didactique des mathématiques. Université Paris 7.

Bunge M. (1983), *Epistémologie*. Paris : Maloine.

Castela C. (1995), Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures. Un exemple concret, celui de la tangente. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 15, n°1, pp. 7-47.

Chevallard Y. (1989), Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x*, n° 19, pp.43-72.

Chevallard Y. (1991), *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard Y. (1992), Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 12, n°1, pp. 73-111.

Chevallard Y. (1999), L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19/2, p. 221-266.

Choquet G. (1964), *L'enseignement de la géométrie*. Paris : Hermann.

Cirade G. (2006), *Devenir professeur de mathématiques : entre problèmes de la profession et formation en IUFM. Les mathématiques comme problème professionnel*. Thèse de doctorat.

- Comiti C., Grenier D., & Margolinas C. (1995), Niveaux de connaissances en jeu lors d'interactions en situation de classe et modélisation des phénomènes didactiques. *Différents types de savoirs et leur articulation*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Coppé S. (2006), Les connaissances antérieures des professeurs de mathématiques à travers la préparation de séances de classe. Cas de stagiaires en fin de formation initiale, in G. Gueudet et Y. Matheron (dir) *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*, pp. 139-168, IREM de Paris 7, Paris
- Douady R. (1992), Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. *Repères Irem*, n°6.
- Douady R. (1995), *Didactique des mathématiques*. Article de l'Encyclopaedia Universalis.
- Fourez G. (1997), Qu'entendre par flot de rationalité ? et par flot interdisciplinaire de rationalité ? *Enseignants et élèves face aux obstacles*, n°25, pp. 217-225. Paris : INRP.
- Fregona (1995), *Les figures planes comme milieu dans l'enseignement de la géométrie : interactions, contrats et transpositions didactiques*. Thèse de l'Université Bordeaux I, Bordeaux.
- Freudenthal H. (1973), *Mathematics as an educational task*. Kluwer.
- Legrand M. (2003), *Paradoxes et tensions entre « choix de pertinence en didactique » et « vigilance épistémologique »*. Conférence séminaire DidaTech.
- Lerouge A. (2000), La notion de cadre de rationalité à propos de la droite au collège. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 20, n°2, pp. 171-208.
- Margolinas C. (2005a). La situation du professeur et les connaissances en jeu au cours de l'activité mathématique en classe. In Simmt, E. and Davis, B. (Eds), *Proceedings of the 2004 Annual Meeting of the Canadian Mathematic Education Study Group*. CMESG/CGEDM : Edmonton, AB, pp. 3-21.
- Margolinas C. (2005b), *La préparation de séance : un élément de travail du professeur*. Conférence Commission de Recherche sur la Formation des Enseignants de Mathématiques.
- Robert A. (1991), *Formation à l'enseignement des mathématiques : exemples de pratiques effectives et éléments de réflexion d'un point de vue didactique*. Irem – Université Paris 7.
- Saelens I. (1995). *Proposition de repères historiques et épistémologiques pour une approche heuristique de l'analyse dans l'enseignement secondaire*. Mémoire de licence. FUNDP-Namur.
- Salin M.-H. (2002), Les pratiques ostensives dans l'enseignement des mathématiques comme objet d'analyse du travail du professeur. In O. Venturini, C. Amade-Escot & A. Terrisse (éds). *Etude des pratiques effectives : l'approche des didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage, p.71-81.
- Schneider M. (1991), Quelques difficultés d'apprentissage du concept de tangente. *Repères-Irem*, n°5, pp. 65-82.
- Schneider M. (2001), Praxéologies didactiques et praxéologies mathématiques. A propos d'un enseignement des limites au secondaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol. 21, n° 1.2, pp. 7-56.
- Schneider M. (2007), *Entre recherche et développement : quel choix de valeurs pour l'ingénierie curriculaire ?* Conférence INRP, juin 2007. Publication électronique.
- Tannery P. (1912), *Mémoires scientifiques*. Paris : J. Gabay. Réed. 1996.

Vergnaud G. (1985), *L'enfant, les mathématiques et la réalité*. Berne : Peter Lang.

Etude de l'activité mathématique de lycéens dans une correspondance mathématique à propos d'un problème de maximum

Magali HERSANT, IUFM des Pays de la Loire,

CREN, EA 2661

IUFM Pays de la Loire, Université de Nantes

Résumé

Les enseignants de l'Université déplorent souvent que leurs étudiants ne savent pas chercher un problème de mathématiques. Lithner (Lithner, 2008) montre que leurs raisonnements relèvent plus de l'imitation que de la création. Il explique ce phénomène par l'influence des conditions d'apprentissage des mathématiques dans la scolarité, en référence aux exercices proposés dans les manuels, au contrat didactique, et au milieu (Brousseau, 1997). Lorsqu'on lève certaines contraintes de milieu et de contrat didactique que signifie « résoudre un problème » pour un élève à la charnière lycée – université ?, quels démarches et raisonnements utilisent effectivement les élèves pour résoudre un problème ?

Dans la recherche « ECCE » en cours (recherche INRP, IREM de Nantes et IUFM des Pays de la Loire), nous avons développé un dispositif pédagogique particulier - la correspondance mathématique - qui permet d'engager les élèves dans une activité mathématique consistante, à l'abri de certaines contraintes du contexte scolaire. Je présenterai d'abord les origines et caractéristiques de ce dispositif qui consiste en un échange épistolaire entre un lycéen et un étudiant à propos d'un problème – ouvert (Arsac, Germain, Mante, 1988). J'analyserai ensuite quelques correspondances lycéen – étudiant à propos d'un problème de maximum pour caractériser l'activité mathématique des élèves. Dans cette analyse, je ferai notamment référence au cadre de la problématisation (Orange, 2005) et au concept de schème (Vergnaud, 1990).

Mots clefs

Maximum d'une fonction de deux variables, résolution de problèmes, correspondance mathématique, activité mathématique

I Introduction

Les études scientifiques à l'Université, et en particulier en mathématiques, sont délaissées depuis une dizaine d'années en France (Fretigné 2004 ; Motot 2008). Dans le même temps, des enseignants de mathématiques à l'Université déplorent que leurs étudiants ne savent pas chercher un problème, n'ont pas le goût de cette recherche. Mais qu'est-ce que chercher un problème de mathématiques pour un élève à la fin du lycée ou un étudiant au début de l'Université ?

Dans le cadre d'un partenariat INRP¹¹⁴, IREM de Nantes, IUFM des Pays de la Loire et Université de Nantes, l'équipe « ECCE les Maths »¹¹⁵ explore cette question depuis 2006. Une

¹¹⁴Équipe Educmaths, <http://educmath.inrp.fr/Educmath>

¹¹⁵ECCE les maths signifie Ecrire, Chercher, Concevoir, Echanger les mathématiques. Cette équipe, dirigée par E. Barbin (Centre François Viète, Université de Nantes) et M. Hersant (Centre de Recherche en éducation nantais, IUFM des Pays de la Loire & Université de Nantes), comprend une douzaine de membres, enseignants de lycée, de l'université, formateurs de l'IUFM des Pays de la Loire, chercheurs en didactique des mathématiques, histoire des mathématiques et mathématiques. Pour plus de précisions, voir le site :

première étude menée en 2006 - 2007 nous a conduit à imaginer en 2007 – 2008 un dispositif particulier, la *correspondance mathématique*, qui permet d'une part aux élèves de s'engager dans un travail mathématique plus authentique et d'autre part d'analyser l'activité mathématique déployée.

Le point de vue développé dans ce texte est celui de la didactique des mathématiques¹¹⁶. Nous cherchons à savoir comment procèdent les lycéens pour chercher et, si possible, résoudre un problème de mathématiques, en référence aux connaissances mathématiques qu'ils ont, normalement, au moment de la recherche du problème. Autrement dit, nous cherchons à décrire, comprendre et caractériser leur activité de recherche et de résolution d'un problème donné. Les questions qui structurent cette analyse sont les suivantes :

1. Quelle est l'activité des lycéens lors de la recherche du problème ? En particulier, quelles sont leurs stratégies ? Quelles connaissances mathématiques mobilisent-ils lors de cette recherche ? A quel moment ? De quelle façon ? Comment évoluent ces connaissances au cours de la recherche du problème ?
2. En quoi cette activité est-elle mathématique ?

Ce texte correspond à une intervention inscrite dans la rubrique « Travaux en cours » du Séminaire National ; notre objectif est principalement de présenter notre méthodologie de recherche et nos premiers résultats à partir de l'analyse d'une partie très réduite du corpus dont nous disposons.

Pour situer le contexte de ce travail, nous présentons d'abord les résultats et limites de l'étude exploratoire menée en 2006 – 2007 qui ont conduit à élaborer le dispositif de *correspondance mathématique*, puis les caractéristiques du dispositif.

II L'étude exploratoire menée en 2006 – 2007 : résultats et limites

Nous avons proposé aux élèves de six classes de Terminale S de Loire Atlantique et de Vendée, ainsi qu'à trois groupes d'étudiants de l'Université de Nantes (L1 sciences ou étudiants en IUT) de résoudre trois problèmes et de répondre à trois questionnaires. Les participants avaient quinze jours pour chercher le problème et nous faire part de leur recherche, puis à ce terme, nous leur demandions de répondre à un questionnaire sur la façon dont ils avaient mené leur recherche. Voici les consignes qui leur étaient données pour le premier problème, les autres sont identiques :

« Nous sommes une équipe de recherche composée d'enseignants de mathématiques et de chercheurs de l'Université de Nantes qui s'intéressent à la résolution de problème de mathématiques par les élèves et les étudiants. Pour nous aider, merci de bien vouloir chercher ce problème et de rendre à votre professeur le résultat de votre travail. »

Vous avez 15 jours pour chercher ce premier problème. Au bout de cette période, votre professeur vous demandera de répondre par écrit à des questions sur la façon dont vous avez cherché. Il importe donc que vous vous souveniez des « grands » moments de la recherche de ce problème.

Nous vous proposerons ensuite, par l'intermédiaire de votre professeur, de résoudre deux autres problèmes dans les mêmes conditions. »

<http://educmath.inrp.fr/Educmath/partenariat/partenariat-inrp-08-09/eccemaths/>

¹¹⁶D'autres points de vue sont adoptés dans le groupe ECCE pour analyser ces correspondances, en particulier celui du dialogisme (Bakhtine M., *Esthétique de la création verbale* (1979), Gallimard, Paris, 1994) développé par E. Barbin.

A l'issue de ce travail, dans chacune des classes a été organisée une séance de « restitution » au cours de laquelle les lycéens ont travaillé sur les réponses apportées au problème.

L'analyse des productions et des questionnaires, menée dans cinq directions : chercher et écrire, chercher et concevoir, chercher et justifier, chercher et apprendre, chercher et échanger (cf. site ECCE maths 2007-2008 : <http://educmath.inrp.fr/Educmath/partenariat/partenariat-inrp-07-08/ecce-math/>), apporte en particulier les résultats suivants.

1. Pour la majorité des élèves chercher un problème reste une activité scolaire d'une durée courte mais raisonnable (entre 1h et 2h 30 pour la moitié d'entre eux).
2. Pour la moitié des élèves, la recherche s'effectue en deux ou trois reprises (deux reprises correspondent à la fréquence la plus importante et à 50% des réponses, trois reprises à 25% des réponses) ; cela leur permet d'« avoir de nouvelles idées », de « laisser reposer » le problème, de « prendre du recul », cet intermède étant souvent l'occasion pour les élèves de discuter du problème avec leurs camarades.
3. La moitié des élèves explore une seule piste lors de la recherche du problème, les autres n'exploitent pas longtemps d'autres pistes, mais ils ne disent pas pourquoi ils les abandonnent.
4. L'écriture est présente dès le début de la recherche pour la quasi-totalité des élèves, d'abord au brouillon puis au « propre ».
5. Plus de la moitié des élèves n'ont pas écrit au brouillon de choses qu'ils n'ont pas réussi ensuite à mettre au propre, ce qui recoupe le fait qu'ils n'explorent pas, en général, des pistes différentes, ni des pistes au-delà de celles proposées dans le problème.
6. Malgré un encouragement de la part des enseignants, les élèves ne rendent pas en général leur brouillon qui semble demeurer un écrit privé.
7. La moitié des élèves expriment qu'ils ont eu des difficultés à transcrire certaines idées.
8. Le passage par le brouillon semble plus lié à une volonté de rendre un écrit lisible par l'enseignant qu'à une pratique de la recherche.

Une limite forte du dispositif « problème - questionnaire » apparaît lors de l'analyse des réponses des élèves : les élèves nous livrent des écrits scolaires adressés de façon convenue à leur enseignant. Les réponses à notre question initiale restent donc circonscrites au contexte scolaire et ne nous permettent pas d'envisager pleinement le « potentiel » des élèves dans ce domaine. En particulier, la question suivante se pose : dans quelle mesure l'activité des élèves lors de la recherche du problème s'émancipe-t-elle du contrat didactique (Brousseau, 1998) habituel de la classe ? Autrement dit : dans quelle mesure l'activité des élèves est une activité « authentique » ? ; dans quelle mesure ce que nous livrent les élèves reflète leur activité réelle ?

Ce constat n'est pas nouveau. Des études comme celles de Lithner (Lithner, 2000) montrent que, dans le contexte scolaire, en résolution de problème, les élèves sont peu créatifs.

En France, plusieurs dispositifs pédagogiques ont été développés pour permettre un engagement des élèves dans une activité mathématique plus authentique (Artigue, Houdement, 2007). Ils s'appuient tous sur un type de problème particulier, le « problème ouvert » dont les caractéristiques sont les suivantes (Arsac, Mante, 2007, p. 20) :

« Nous appelons « problème ouvert », un problème qui possède les caractéristiques suivantes :

- l'énoncé est court ;
- l'énoncé n'induit ni la méthode, ni la solution (pas de questions intermédiaires ni de questions du type « montrer que »). En aucun cas, cette solution ne doit se réduire à l'utilisation ou à l'application immédiate des derniers résultats précédents en cours ;
- le problème se trouve dans un domaine conceptuel avec lequel les élèves ont assez de familiarité. Ainsi, peuvent-ils prendre facilement « possession » de la situation et s'engager dans des essais, des conjectures, des projets de résolution, des contre-exemples. »

L'objectif du « problème ouvert » est de mettre les élèves en véritable situation de recherche d'un problème de mathématiques et en particulier leur permettre d'avoir une démarche scientifique : essayer, conjecturer, tester, prouver (Arsac, Mante, p. 20). Plusieurs pratiques des problèmes-ouverts ont été développées. Les situations de « débat scientifique » (Legrand 1993) permettent une élaboration collective de mathématiques par confrontation directe et reposent d'un point de vue épistémologique sur le débat que l'on peut observer entre mathématiciens soit lors d'une discussion informelle, soit lors d'un séminaire. Elles utilisent la dimension sociale de l'activité mathématique pour lever le poids du contexte scolaire. Les narrations de recherche (Sauter, 2000 ; Bonafé et al, 2002) sont des écrits individuels en langage naturel sur la résolution d'un problème ouvert. L'élève ne livre pas sa solution au problème, mais retrace l'histoire de sa résolution, faisant part, entre-autres de ses impasses. La narration est réalisée en dehors de la classe et un travail collectif en classe sur ces productions est ensuite organisé par l'enseignant.

Dans ces situations deux éléments déterminants permettent à l'élève de s'engager dans une activité mathématique plus détachée des contraintes scolaires :

- les caractéristiques du problème ouvert,
- la régularité de la pratique de débats et de narrations qui permet d'installer un contrat didactique (Brousseau, 1998) différent de celui à l'oeuvre habituellement dans la classe.

Pour notre recherche, il nous a semblé intéressant d'utiliser un problème qui a les caractéristiques d'un problème ouvert mais l'étude est ponctuelle et l'usage d'un débat scientifique ou d'une narration ne nous permettrait pas d'induire l'activité mathématique souhaitée chez les élèves. Par ailleurs, le débat mathématique permet une résolution collective d'un problème, ce qui est d'un certain point de vue une richesse mais nous souhaitons accéder à l'activité individuelle d'élèves lors de la résolution de problèmes.

III Le dispositif « correspondance mathématique »

L'élaboration du dispositif « correspondance mathématique » répond à une double contrainte de la recherche :

1. créer une situation qui permette aux élèves de s'investir dans la résolution d'un problème et de déployer une activité mathématique consistante ;
2. accéder à cette activité mathématique des élèves.

Elle tient compte des travaux existants sur l'activité mathématique des élèves en situation scolaire de résolution de problème, des pratiques de problèmes ouverts et du rôle des correspondances mathématiques dans l'histoire des mathématiques.

1. Écriture, échange et activité mathématique

L'activité du mathématicien se nourrit d'échanges avec des collègues, souvent à propos d'un travail plus solitaire réalisé en amont. Lors de ce travail, le mathématicien écrit : les phrases, les formules, schémas et figures posées sur le papier constituent des traces de son activité mathématique, le plus souvent, dans un premier temps, destinées à lui-même, pour mémoire.

Dans le contexte scolaire, la recherche d'un problème ne s'accompagne pas systématiquement d'un écrit : de nombreux étudiants déclarent chercher dans leur tête. Cela constitue probablement une façon d'éviter de soumettre à l'évaluation de l'enseignant la partie privée de leur travail mathématique. Il semble que lorsque le destinataire appartient au corps enseignant, et sans qu'un contrat didactique spécifique ne soit installé (comme c'est le cas pour les narrations de recherche par exemple), la transmission soit biaisée.

Mais, pour le mathématicien professionnel, l'écriture mathématique permet aussi l'échange avec un ou des collègues. L'histoire des mathématiques compte de nombreuses correspondances (par exemple, Sophie Germain - Gauss) qui rapportent les avancées, doutes, questions des mathématiciens à propos de la résolution d'un ou plusieurs problèmes. Les deux correspondants ne travaillent pas forcément de concert à la résolution d'un même problème. Dans certains cas, comme la correspondance Germain - Gauss, il y a une dissymétrie entre les correspondants : Sophie Germain s'adresse le plus souvent à Gauss comme une élève à un professeur, lui demandant son avis sur ses découvertes.

Cette idée d'échange épistolaire dissymétrique nous a semblé intéressante à exploiter pour notre recherche : écrire à un presque pair qui pourra aider, porter un regard critique et constructif sur le travail effectué incite plus facilement à livrer ses pistes de recherches, doutes, questions et impasses et à relater son activité de résolution de problème.

2. Caractéristiques de la « correspondance mathématique »

Tenant compte de ces éléments, le dispositif pédagogique de « correspondance mathématique » vise à permettre à des lycéens d'avoir une activité mathématique relativement dégagée du contexte scolaire et à générer une trace exploitable de cette activité. Pour cela, le choix du problème en fonction des connaissances des correspondants, le choix des correspondants, en particulier du destinataire des écrits du lycéen, et le déroulement de la correspondance sont essentiels.

Le problème

Pour notre recherche, le choix du problème doit répondre à deux critères essentiels :

1. que l'élève de Terminale puisse s'approprier facilement l'énoncé et possède des outils pour le résoudre, sans toutefois avoir les connaissances expertes permettant la résolution du problème ;
2. que l'étudiant dispose des connaissances expertes pour résoudre le problème et donc d'autres outils que ceux du lycéen lui permettant d'avoir des conceptions épistémologiques différentes des notions et savoirs en jeu.

Le problème a été proposé début mars aux lycéens. Son énoncé est le suivant : « L'expression $(x+y)/(1+x^2+y^2)$ admet-elle un maximum lorsque le point de coordonnées (x, y) décrit le premier quadrant ($x \geq 0, y \geq 0$) ? Si oui le déterminer ».

L'étude des fonctions à deux variables n'est pas au programme de Terminale S et les théorèmes connus par les lycéens pour les fonctions à une variable ne s'appliquent pas

directement. Cependant, pour résoudre ce problème les lycéens peuvent effectuer un passage en coordonnées polaires (programme de Première S), utiliser l'intersection de la surface avec un plan d'équation $z = h$ (programme de spécialité en Terminale S) ou utiliser sous différentes formes l'inégalité $2xy \leq x^2 + y^2$. Par ailleurs, ce problème de recherche de maximum d'une fonction à deux variables, s'inscrit dans le prolongement des connaissances des lycéens sur les fonctions à une variable : la notion de maximum qui leur est familière pour les fonctions à une variable demande ici à être « prolongée » pour une fonction à deux variables. Les lycéens ignorent l'existence de cette extension.

Les fonctions à plusieurs variables et les dérivées partielles sont étudiées au début de l'année de Licence 1. Ainsi, le problème qui fait l'objet de la correspondance est un problème ouvert pour le lycéen mais pas pour l'étudiant. C'est-à-dire que le lycéen ne dispose pas des théorèmes « experts » pour le résoudre mais peut toutefois le résoudre avec les connaissances qu'il possède. En revanche, l'étudiant a, depuis sa sortie du lycée, étendu le champ de ses connaissances sur les fonctions numériques avec l'étude des fonctions à plusieurs variables.

Les correspondants

Les correspondants sont donc des élèves « presque pairs » : un élève de Terminale S et un étudiant en première ou deuxième année de licence (idéalement). Ils se trouvent géographiquement éloignés et ne se connaissent pas.

La dissymétrie entre les correspondants doit permettre à l'étudiant d'avoir un regard critique sur le travail du lycéen, tout en ayant encore en mémoire ce que sait un lycéen en mathématiques.

Le lycéen initie la correspondance à partir de la consigne suivante :

« écrire en détails vos essais, tentatives, pistes de recherche et résultats (partiels ou intermédiaires) ».

L'étudiant a pour tâche d'aider le lycéen à avancer dans sa recherche, le but n'est pas de lui fournir la réponse, il ne doit pas hésiter à demander des précisions. Pour lui la consigne est la suivante :

« aider le lycéen à avancer dans sa recherche, le but n'est pas de lui fournir une réponse, ne pas hésiter à lui demander des précisions ».

Par ailleurs, les élèves et étudiants impliqués dans ce dispositif sont tous des volontaires. Nous avons motivé leur participation à cette recherche en leur indiquant que cette expérience leur permettrait d'apprendre sur les mathématiques et en les invitant une journée à la Faculté de Sciences de Nantes.

Le déroulement de l'échange épistolaire

Les élèves ne se rencontrent pas durant la correspondance, leur seul moyen d'échange est la lettre papier. Cela implique donc qu'ils soient le plus explicites possible dans leurs écrits.

Les lettres sont transmises à des dates précises. Les correspondants prennent connaissance au même moment du problème, le lycéen a une quinzaine de jours pour commencer à chercher le problème et rédiger une première lettre.

Les professeurs présentent le dispositif aux élèves et acheminent les lettres, tels des facteurs, sans en prendre connaissance. Ils n'échangent pas avec les élèves sur leur résolution et ne répondent pas non plus aux questions à ce sujet.

A l'issue de la correspondance (mai 2008), à l'occasion de la venue des lycéens à la Faculté de Sciences, nous organisons une séance de restitution. C'est l'occasion pour les correspondants de se rencontrer et d'échanger en direct, c'est aussi pour nous l'occasion de mutualiser les démarches utilisées pour chercher le problème, de répondre aux questions qui se posent encore sur le problème, de demander aux lycéens et étudiants ce qu'ils ont appris avec cette correspondance et de recueillir leurs avis sur le dispositif.

IV Précisions méthodologiques, références théoriques

En 2007-2008, avec le dispositif décrit précédemment, nous avons recueilli seize correspondances. Les lycéens sont répartis dans trois lycées de la région et leurs correspondants sont des étudiants (4 L1 mathématiques, 1 L1 chimie, 1 L1 informatique, 5 L2 mathématiques, 2 L3 de mathématiques, 2 M1 de mathématiques) et, faute d'avoir réussi à recruter suffisamment d'étudiants, et enseignant de la faculté (S. Moulin, alors ATER).

Nous nous intéressons à deux aspects non indépendants de l'activité de recherche du problème par un lycéen : la résolution du problème en tant que tel (comment avance cette recherche ? comment fait le lycéen ? quelles sont ses stratégies ? quelles connaissances mathématiques mobilisent-ils lors de cette recherche ? à quel moment ? de quelle façon ?) et les apprentissages mathématiques qu'elle peut générer (comment évoluent les connaissances mathématiques du lycéen au cours de la recherche du problème ?). Pour étudier cette activité nous avons choisi de nous référer, d'une part, au cadre de la problématisation (Orange 2005) et, d'autre part, à la théorie de l'activité, et en particulier aux travaux de Vergnaud (1996, 2007).

Les lettres que le lycéen adresse à son correspondant ne nous livrent pas directement son activité de résolution du problème. Cette activité doit être reconstruite pour permettre d'analyser la façon dont il « travaille » le problème (au sens de Orange, c'est-à-dire ce qu'il « fait entre la question qui lui est posée, d'une manière et d'une autre, et la résolution du problème ») et la conceptualisation des notions mathématiques en jeu. Pour cela, nous adoptons le point de vue du lycéen, et en particulier ce qu'il tient pour vrai, correct et ce qu'il tient pour faux, erronée ou encore douteux, et procédons de la façon suivante.

Dans cette étude, nous nous référons aussi aux travaux de Lithner (2000, 2003, 2008) qui portent sur l'analyse des raisonnements d'étudiants en situation de résolution de problèmes mathématiques, à la fois pour ce qui concerne la méthodologie d'analyse et la caractérisation de l'activité des élèves.

1. Reconstruire l'activité d'un lycéen à partir de ses écrits

Référents théoriques

Pour reconstruire l'activité mathématique d'un lycéen, nous nous référons à la fois aux travaux de Vergnaud (1996, 2007) et de Lithner (2008). Nous découpons son raisonnement en unités relatives à un but que nous appelons *boucle de raisonnement*. Une boucle de raisonnement est organisée autour d'un *but* (et de sous-buts) que nous inférons à partir de la conduite de résolution de problème par le lycéen et s'achève par une conclusion que le lycéen tire du raisonnement déployé. Nous appelons préférentiellement cette conclusion *issue* car elle ne correspond pas nécessairement à une conclusion mais peut être, par exemple, la formulation, directe ou indirecte, d'une question. A l'intérieur d'une boucle de raisonnement, le lycéen essaie de réaliser son but en effectuant des *choix stratégiques* qui requièrent la mobilisation de

connaissances mathématiques et aboutissent quelquefois à des résultats provisoires qui génèrent des *sous-buts*.

Nous utilisons le terme de *boucle de raisonnement* plutôt que celui de *raisonnement* comme le fait Lithner car à chaque but est associée une issue qui permet une forme de clôture du raisonnement, provisoire ou définitive, mais ne correspond pas nécessairement à une conclusion sur le problème. Ainsi, la boucle peut-être reprise à un autre moment de la recherche pour arriver à une autre issue, comme dans l'exemple donné ci-dessous (cf. tableau 1). En particulier, l'issue d'une boucle de raisonnement associée à un but peut être une question qui ramène au but initial et invite à d'autres choix stratégiques : cela « boucle ».

Exemple : reconstruction de l'activité de l'élève dans la correspondance 1

Résumons la correspondance. La première lettre débute par une recopie de l'énoncé du problème où les mots « maximum » et « premier quadrant » sont encadrés. L'élève écrit à la suite :

« Pour résoudre ce problème, j'ai pensé à plusieurs méthodes mais je ne sais pas si elles sont possibles ou justes. »

puis, indique clairement les idées développées successivement dans la lettre :

« 1ère idée :

J'ai pensé à la méthode de dérivation mais je ne sais pas le faire avec deux inconnues.

Je ne sais pas si j'ai le droit mais je choisis de remplacer y par x c'est-à-dire, on considère $x = y$ d'où [...]

Peut-on conclure que $f(x,y)$ admet un maximum en $x = \frac{1}{\sqrt{(2)}}$ et $y = \frac{1}{\sqrt{(2)}}$

puisque'on avait considéré $x=y$ au départ ?»

« 2ème idée :

Dans l'expression, on reconnaît l'équation d'un cercle au dénominateur [...]. J'ai pensé à faire le lien avec les coordonnées polaires.[...]

Je suis bloquée à ce niveau et je ne sais pas si ma démarche est bonne.»

« 3ème idée :

Après l'essai avec les polaires, cela me donne l'idée de m'attarder aux complexes puisqu'il y a un lien.[...]

A ce niveau, je ne sais pas comment faire le lien entre $x+iy$ et $f(x,y)$ sachant que $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$.»

Cette première lettre s'achève de la façon suivante :

« Voilà toutes les démarches essayées mais je ne suis sûre d'aucune d'entre-elles. Merci de m'éclairer. »

La réponse du correspondant débute par une explication concernant l'invalidité de la première idée de l'élève : la restriction à la droite $y = x$ ne nous indique pas si f admet un maximum. Pour ce faire, à partir de l'idée 2, on peut essayer de majorer $f(x,y)$ par une fonction d'une seule variable $h(r)$ qui ne tend pas vers l'infini quand r tend vers l'infini.

Puis, il fait un « petit cours sur les dérivées partielles » avant d'inciter l'élève à poursuivre sa recherche avec son idée 1 :

« tu dérivés par rapport à x et tu considères y comme une constante. [...]

exemple : $f(x,y) = x^2 + y^2 + y$ [...]

Maintenant tu peux utiliser le théorème suivant :

théorème : Si f a un maximum (ou un minimum à déterminer), il est en un point critique. Un point critique est un point où l'on a :

$$df/dx = df/dy = 0.$$

C'est cette égalité là qui va nous intéresser tu vas voir. Avec ça, tu devrais y arriver, grâce à ma prochaine astuce : $-x = x \Leftrightarrow x = 0$ [...].

Avec cette petite astuce, tu trouveras une condition qui te permettra d'utiliser ton idée n°1.

Remarque : tu peux aussi utiliser le théorème en coordonnées polaires, ça marche aussi.

Pour ta troisième idée, tu introduis l'inconnue z mais je ne vois pas comment tu peux le mettre dans f pour que ça puisse nous aider. »

Entre la rédaction de sa première lettre et la réception de la lettre de son correspondant, l'élève a poursuivi sa recherche, de façon infructueuse, en utilisant les coordonnées polaires :

« J'ai continué mes démarches en fonction de ce que j'avais commencé avant sur les coordonnées polaires (idée 2).

J'avais obtenu $f(x,y) = r(\cos \theta + \sin \theta) / (1+r^2)$. [...] »

Les indications de l'étudiant lui donne ensuite l'idée d'écrire la fonction f comme le produit de deux fonctions à une variable et, ainsi, de se ramener aux techniques qu'il connaît et de résoudre le problème :

$$\text{« On rappelle : } f(x,y) = \frac{r}{1+r^2} \cdot (\cos \theta + \sin \theta)$$

En fait, c'est à ce niveau que ton explication avec $h(r)$ qui doit être une fonction d'une seule variable m'a aidé bien que je n'ai pas très bien compris.

$$\text{Je pose alors } f(x,y) = h(r) \cdot (\cos \theta + \sin \theta) \text{ avec } h(r) = \frac{r}{1+r^2}.$$

Je fais pareil pour θ puisque je voulais une valeur de $h(r)$ pour laquelle r est max et une valeur de θ max donc je pose $g(\theta) = \cos \theta + \sin \theta$, d'où $f(x,y) = h(r) \cdot g(\theta)$. »

Dans la seconde partie de sa lettre, l'élève revient sur les commentaires de son correspondant et indique :

« D'autre part, j'aimerais comprendre pourquoi ma première idée n'était pas exacte, qu'est-ce qui fait qu'on ne peut pas utiliser cette méthode puisque je trouve le même résultat que celui de la méthode avec r et θ . »

A partir de ces éléments nous reconstruisons les boucles de raisonnement, et donc l'activité de l'élève, en identifiant les buts, stratégies et issues qui y sont associés. Nous résumons cette activité dans un tableau, comme le tableau 1 ci-après, dont la lecture de haut en bas permet une lecture chronologique de l'activité du lycéen. Dans la première colonne figurent les buts et sous-but (reconstruits) de l'activité, dans la seconde colonne les choix stratégiques effectués pour réaliser le but (ou sous-but) et dans la troisième le résultat de cette action qui correspond soit à une issue intermédiaire ou provisoire soit à l'issue de la boucle. Les questions indiquées dans cette troisième colonne correspondent aux questions qu'adresse l'élève, au style direct ou indirect, à son correspondant, résumées, toujours au style direct, par nos soins. Les buts, choix stratégiques et issues regroupés dans un cadre (sur trois colonnes) correspondent à une boucle de raisonnement.

Ainsi, dans l'exemple étudié, la première lettre est constituée de quatre boucles de raisonnement associées aux buts B1 et B2, B2 faisant l'objet de trois boucles de raisonnement. La seconde lettre constitue une reprise de la troisième boucle, à partir du sous-but B'3.

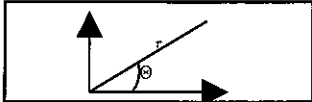
La troisième boucle de raisonnement correspond à la recherche de réalisation du but B2. Pour cela, l'élève utilise les coordonnées polaires et réécrit alors $f(x,y)$ comme $f(r,\theta)$ puis se fixe le sous-but B'3. Ainsi la réécriture de f est une issue provisoire qui amène à définir B'3 dont la réalisation conditionne la réalisation de B2. La question Q3 est une issue provisoire de cette boucle, les résultats intermédiaires obtenus dans la seconde lettre engendrent le sous-but B4. L'issue définitive de cette troisième boucle de raisonnement est constituée par le résultat « le maximum de la fonction f est obtenu pour $x=y=\frac{1}{\sqrt{2}}$ » et la question Q5.

Tableau 1

Première lettre : quatre boucles de raisonnement

B1 : trouver (directement) le max de f	Dériver $f(x, y)$	Q1 : ai-je le droit de dériver ?
B2 : me ramener à une variable pour dériver	Poser $x = y$	$g(x) = \frac{2x}{1+2x^2}$
B3 : trouver le max de g s'il existe	Dériver $g(x)$	max de g pour $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ Q2 : peut-on conclure que $f(x,y)$ admet un max quand $x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}$?
B2 : me ramener à une variable pour dériver	Passer en polaires : $x = r \cos \theta$ $y = r \sin \theta$	$f(x,y) = \frac{r(\cos \theta + \sin \theta)}{1+r^2}$
B'3 : trouver le max de $f(x,y) = f(r, \theta)$, s'il existe		Q3 : comment étudier cette fonction ?
B2 : me ramener à une variable pour dériver	Passer aux complexes ($z = x + iy$), séparer R et I	Q4 : comment faire le lien entre $x+iy$ et $f(x,y)$?

Deuxième lettre : reprise de la boucle 3

B'3 : trouver le max de $f(x,y) = f(r, \theta)$ s'il existe		$f(x,y)$ grand quand r est grand. Non, θ intervient aussi
	écrire $f(r, \theta)$ comme produit de 2 fonctions	$f(r, \theta) = h(r)l(\theta)$ avec $h(r) = \frac{1}{1+r}$, $g(\theta) = \cos \theta + \sin \theta$
B4 : chercher le max de h et le max de l s'ils existent	Dériver les fonctions	$h(r)$ max pour $r = 1$ $l(\theta)$ max pour $\theta = \pi/4$
B2 : chercher le max de f s'il existe		$f(r, \theta)$ max quand $x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ Q5 : pourquoi est-ce que ma première idée était fausse alors que je trouve le même résultat ?

La reconstruction de l'activité d'un lycéen nous permet d'analyser deux aspects non indépendants de son activité : la recherche / résolution de problème proprement dite et la conceptualisation des notions mathématiques en jeu dans la résolution du problème. En particulier, pour le problème choisi, la résolution du problème est étroitement liée à la conceptualisation de la notion de maximum d'une fonction.

2. Analyser et caractériser l'activité d'un lycéen

Le « travail du problème »

Les travaux de Lithner sur la résolution de problèmes de mathématiques à l'Université l'amène à distinguer les raisonnements de type « imitation » et ceux de type « créatif » en fonction des types de connaissances mobilisés par les étudiants et du questionnement de leur pertinence. Nous nous référons à cette catégorisation en l'adaptant au contexte de cette recherche, en particulier car le problème proposé aux élèves de Terminale est « ouvert ». Ainsi, nous caractérisons les boucles de raisonnement des lycéens en fonction des connaissances mathématiques mobilisées. *A priori*, un lycéen peut :

- recourir à une technique, une méthode routinière justifiée par un théorème, mais qui est devenue tellement familière pour lui qu'elle n'est pas systématiquement associée à une explicitation de ce théorème (par exemple, le lycéen calcule la dérivée pour trouver les points critiques de la fonction) ;
- recourir plus explicitement à un théorème, à une définition, à une propriété mathématique ;
- utiliser une démarche « expérimentale » (faire des schémas, des essais numériques, les observer, conjecturer) ;
- utiliser une aide fournie par son correspondant.

Les conceptualisations à l'oeuvre

La construction du problème et son travail doivent permettre aux lycéens d'identifier sa singularité : le maximum d'une fonction à deux variables possède des propriétés mathématiques différentes du maximum d'une fonction à une variable. La recherche de ce problème devrait donc conduire les lycéens à identifier les singularités d'un tel point au regard de leurs connaissances à propos du maximum d'une fonction à une variable, ce qui, de façon concomitante, devrait les amener à mieux identifier les propriétés du maximum d'une fonction à une variable. Ainsi, leur conceptualisation de la notion de maximum d'une fonction est susceptible d'évoluer au cours de la recherche du problème.

Pour étudier cette évolution chez un lycéen, nous identifions les concepts-en-actes et théorèmes-en-actes (Vergnaud 1996) qu'il utilise au cours de sa correspondance.

V Analyse de deux correspondances

Cette analyse est effectuée à partir des deux lettres que chaque lycéen envoie à son correspondant ; la première initie la correspondance, la seconde est rédigée après une première réponse du correspondant. Nous ne donnons pas l'intégralité des lettres mais citons des extraits qui permettent de résumer la correspondance et la recherche du problème par l'élève.

1. L'activité de l'élève dans la correspondance 1

Le résumé de cette correspondance, ainsi que le résumé de l'activité reconstruite de l'élève, sous forme de tableau, figurent dans le paragraphe « reconstruire l'activité d'un lycéen à partir de ses écrits ».

Chronique de l'activité

La première boucle de raisonnement correspond au but 1 « trouver (directement) le maximum de la fonction f » et s'achève sur une question : « ai-je le droit de dériver f comme une fonction à une variable ? » Les autres boucles de raisonnement correspondent à différentes stratégies déployées pour répondre au but 2 « se ramener à une variable pour pouvoir dériver ». Dans la seconde boucle, la stratégie de l'élève consiste à poser $x = y$ et à formuler une question relative à la validité du résultat obtenu. Dans la troisième boucle, l'élève utilise le passage par les coordonnées polaires. Cette stratégie correspond à une exploration du problème dans la durée : elle est entamée dans la première lettre, provisoirement abandonnée suite à la rencontre d'un problème technique, mais est poursuivie entre le moment où l'élève envoie sa première lettre et sa seconde, puis reprise dans la seconde lettre en utilisant l'aide fournie par le correspondant. Dans la quatrième boucle l'élève essaie d'utiliser les nombres complexes pour séparer les variables x et y mais se heurte à une difficulté technique. Cette première analyse de l'activité de l'élève met en évidence l'importance des aspects temporels de la résolution du problème par l'élève et les relations entre les différentes boucles de raisonnement.

Intéressons nous maintenant aux types de connaissances mathématiques mobilisées et aux questions adressées au correspondant pour caractériser la façon dont cet élève travaille le problème.

Le « travail du problème » : sa résolution et les questions posées

Reprenons le tableau 1. Pour cet élève, la résolution du problème s'organise d'abord à partir de la mobilisation de techniques algorithmisées (dériver la fonction pour en étudier les variations et déterminer les éventuels *minima* et *maxima*). En effet, dans la première boucle, à partir d'indices de surface (ancrage mathématique faible), par référence à une situation familière (trouver le maximum d'une fonction à une variable), il pense à dériver mais indique qu'il ne sait pas le faire avec deux « inconnues ». Si l'on utilise la catégorisation de Lithner, on peut dire qu'initialement son raisonnement relève du FAR (familiar algorithmic reasoning). Mais il mobilise aussi des connaissances mathématiques relatives au domaine d'application / de validité de la technique mobilisée, ce qui l'amène à questionner la validité de sa démarche et à se fixer un nouveau but tenant compte du domaine de validité de la technique dont il dispose, c'est le but B2.

Pour réaliser ce but B2, il déploie alors plusieurs stratégies. La première est basée, là encore, sur un indice de surface : x et y sont les deux variables de la fonction, le lycéen pose $x = y$ et élimine de fait une des deux variables. Il peut alors dériver la fonction à une variable obtenue et chercher, par la méthode habituelle, son maximum. Il obtient comme résultat

$$x = y = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et s'interroge sur sa validité au regard de la démarche utilisée dont il doute dès$$

le début (il écrit « je ne sais pas si j'ai le droit de le faire » puis « si la méthode est exacte ») : c'est la question Q2.

Probablement pour tester la robustesse de ce résultat, il envisage une autre stratégie qui consiste à passer en coordonnées polaires (référence à une routine utilisée en classe). Mais il abandonne rapidement : il n'envisage pas la fonction obtenue comme le produit de deux fonctions à une variable et ne sait (toujours) pas étudier les fonctions à deux variables. La troisième boucle s'achève donc provisoirement sur une difficulté technique qui donne lieu à la question Q3 (comment étudier cette fonction ?) et l'expression d'un doute sur la validité de la démarche. Cet obstacle génère le déploiement d'une autre stratégie pour répondre au but B2 : utiliser les complexes (boucle de raisonnement 4). Cette stratégie aboutit aussi à une impasse pour des raisons d'ordre technique (« je ne sais pas comment faire le lien entre $x+iy$ et $f(x,y)$ ») et génère donc une nouvelle question d'ordre technique (Q4).

La première lettre s'achève sur ces difficultés. L'élève poursuit son exploration du problème entre l'envoi de cette première lettre et la réception de la lettre de son correspondant. Ayant, probablement exploité toutes les stratégies de type algorithmique qu'il connaît, il s'engage alors dans une démarche plus expérimentale (construction et observation d'un graphique). De l'analyse de son schéma, il tire une première conjecture - $f(x,y)$ est grand quand r est grand - qu'il remet immédiatement en cause (θ intervient aussi).

Les remarques de son correspondant l'amènent à écrire $f(r,\theta)$ comme le produit de deux fonctions d'une variable pour lever la difficulté technique (il écrit : « En fait, c'est à ce niveau que ton explication avec $h(r)$ qui doit être fonction d'une seule variable m'a aidé bien que je n'ai pas très bien compris. »). Il exploite cette aide et parvient finalement à trouver un résultat qui semble le satisfaire puisqu'il ne le remet pas en cause : f admet un maximum qui est atteint quand $x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Cependant ce résultat ravive sa question Q2 : son correspondant a

invalidé la méthode qu'il a utilisée dans la boucle 1, il n'a pas bien compris pourquoi cette méthode était erronée mais il constate qu'elle permettait d'obtenir le même résultat. D'où une nouvelle question Q5 : pourquoi est-ce que mon idée était fausse puisque je trouve le même résultat ?

En résumé, cet élève utilise d'abord un raisonnement de type FAR qui est rapidement questionné et permet d'identifier, en référence au domaine de validité d'un théorème, la singularité de la question. Il balaie alors les stratégies qu'il connaît pour se ramener à une fonction à une variable et donc au cadre d'utilisation possible du théorème qu'il utilise habituellement pour trouver les points critiques d'une fonction. Une fois ce balayage effectué sans succès, il utilise une démarche plus expérimentale. Finalement, l'aide du correspondant est décisive pour répondre à l'énoncé du problème.

Il apparaît que le but ultime de l'activité de résolution du problème pour l'élève n'est pas la production d'un résultat du type « f atteint son maximum lorsque ... » mais une production compréhensible et problématisée de ce résultat. En effet, le travail du problème génère des interrogations relatives à la validité de sa démarche (Q1, Q2, Q5), de son résultat (Q2) et d'ordre technique (Q3, Q4) qui l'amènent à questionner, et peut-être même identifier, les domaines de validité des théorèmes et techniques qu'il utilise et la singularité du problème par rapport aux autres problèmes qu'il a rencontrés jusque là.

La conceptualisation de la notion de maximum

Les lettres écrites par cet élève mettent en évidence une évolution de la conceptualisation de la notion de maximum d'une fonction au cours de la recherche du problème qui se caractérise par la mise en oeuvre successive de concepts-en-actes et théorèmes-en-acte, la plupart du temps en association étroite avec les questions posées dans le travail du problème.

Initialement, pour cet élève, le concept-en-actes « maximum d'une fonction », quelle qu'elle soit, correspond à « point critique ». Les théorèmes-en-actes successivement associés à ce concept-en-actes au cours de l'identification de la singularité du problème sont :

- TA1 : le maximum d'une fonction est un point où la dérivée est nulle ;
- TA2 : le maximum d'une fonction d'une variable est un point où la dérivée est nulle ;
- TA3 : le maximum d'une fonction f de deux variables est un point où la dérivée de $f(x,x)$ s'annule.

Ce troisième théorème-en-acte est rapidement mis en doute.

Dans la recherche entre la première et la seconde lettre, lorsque l'élève bascule vers une démarche plus expérimentale, il y a mobilisation d'un autre concept-en-actes : le maximum d'une fonction n'est plus envisagé comme un point critique (référence à l'analyse, sans référence à un graphique) mais comme le maximum d'une courbe, c'est soit $f(0,y)$ si f est décroissante, soit « le moment du changement de variation » si f est croissante puis décroissante (il dessine les schémas correspondants) (TA4).

Ce point de vue qui est ensuite abandonné permet à l'élève d'identifier clairement que le maximum d'une fonction de deux variables dépend de ces deux variables (cf. début de la reprise de la boucle 2 dans la lettre 2), c'est le théorème-en-actes TA5. Enfin, l'élève utilise un dernier théorème-en-actes, TA6 : le maximum d'une fonction de deux variables produit de deux fonctions d'une variable est le produit du maximum de chacune de ces fonctions.

L'écart entre le TA1 et le TA6 témoigne de l'évolution, au moins contextualisée à ce problème, de la conceptualisation de la notion de maximum d'une fonction pour cet élève ; il nous semble qu'il y a là des apprentissages potentiels.

2. L'activité de l'élève dans la correspondance 2

Nous donnons un résumé de cette correspondance et de l'activité reconstruite de l'élève en annexe 1.

Chronique de l'activité

La première boucle de raisonnement que nous reconstruisons correspond à l'inventaire des propriétés mathématiques en relation avec la notion de maximum d'une fonction que le lycéen dresse ; certaines sont correctes d'autres pas. Nous y associons le but B1 qui se situe à un niveau assez général : « déterminer une stratégie de résolution du problème ».

Cet inventaire lui permet d'identifier la singularité du problème (f n'est pas une fonction d'une variable réelle, mais une « expression ») et de déterminer son but B2, qu'il n'annonce pas clairement (« déterminer si f a un max ») dont la résolution correspond à la boucle 2. Ayant montré que f admet un maximum en calculant les limites en 0 et $+\infty$, il cherche alors à le localiser, c'est son but B3 auquel est associée la boucle 3. Pour cela, il recherche d'abord l'allure de la courbe (il fait une erreur) d'où il tire une première conjecture C1 « le maximum de la fonction existe lorsque x et y sont proches de 0 » qu'il teste en étudiant les limites de la fonction autour de (0,0). Il conclut que le maximum ne se trouve pas en (0,0) ni en l'infini. Il effectue alors des calculs de valeurs organisés, d'où il conclut dans un premier temps que le maximum de la fonction se situe autour de $x = 0.7$ ou 0.8 et qu'il augmente avec y . Puis, en tâtonnant, il trouve que ce maximum est atteint pour $y = 0.71$. Ce résultat semble constituer pour lui une étape de la résolution du problème et non une conclusion. Il paraît en effet douter de la valeur obtenue, mais surtout il s'interroge sur l'unicité du maximum. D'où un nouveau but B6, proche de B3 mais distinct, « trouver le ou les maximum de f » et une quatrième boucle de raisonnement. Pour résoudre ce but, il s'autorise à dériver f selon x et y à la fois en exprimant toutefois un doute sur la pertinence de cette méthode et achève sa première lettre par :

- une affirmation : « l'expression n'a qu'un seul maximum sur le premier quadrant » ;
- et une question indirecte : « je ne sais pas si ma dérivée est vraie ou si elle est possible tout simplement. ».

Dans la seconde lettre, après avoir effectué un récapitulatif de ce qui est connu sur le problème, l'élève effectue essentiellement une reprise dans la boucle de raisonnement 4 en utilisant la « dérivée » qu'il a calculée dans la première lettre. Il conclut d'abord qu'il y a un seul maximum atteint quand $xy = \frac{1}{2}$ et cherche alors à déterminer le couple (x,y) pour lequel il est atteint. En dérivant, selon x , la fonction $f(x,y) = f(x, 1/2x)$ il trouve que y vaut approximativement 0.7, remarque que c'est environ $\sqrt{\frac{1}{2}}$ et émet une seconde conjecture C2

: le maximum est atteint pour $x=y=\sqrt{\frac{1}{2}}$. Il teste ensuite cette conjecture en dérivant la fonction $f(x,x)$ comme une fonction à deux variables. En utilisant les méthodes classiques de Terminale, il trouve que le maximum de cette fonction est atteint quand $x=y=\sqrt{\frac{1}{2}}$. Pour lui, à ce stade, le problème n'est pas résolu car il faudrait encore expliquer pourquoi $x = y$.

Le « travail du problème » : sa résolution et les questions posées

Un premier aspect du travail du problème consiste pour cet élève à déterminer une stratégie globale de résolution du problème (boucle 1) à partir d'une première analyse du problème et

d'une sorte d'inventaire de propriétés relatives au maximum d'une fonction. Les deux premières propriétés relient l'existence du maximum et les limites, la dernière remarque associe « maximum d'une fonction » et « dérivée ». Cette première boucle laisse penser que le lycéen procède à un inventaire par mot-clé à partir de « maximum » (indice de surface) et qu'il a identifié rapidement la singularité du problème, ce qui le conduit à écarter l'utilisation de routines liées à la dérivation pour résoudre le problème. Le lycéen s'engage alors dans une étude des limites de la fonction pour montrer qu'elle admet un maximum. Dans ces raisonnements, il se ramène toujours à une fonction à une variable, c'est-à-dire qu'assez naturellement il fixe une variable. Utilisant ainsi des propriétés mathématiques, il « montre », que ce maximum existe (boucle 2) puis cherche à le localiser (boucle 3) par différents moyens que nous qualifions d'expérimentaux.

En effet, dans la boucle 3, sa première stratégie consiste à s'appuyer d'abord sur une représentation graphique, erronée et partielle, de la fonction qui interpelle. En effet, il se réduit à $f(x,1)$ sans dire pourquoi et (donc ?) associe à la fonction une courbe de type hyperbole en contradiction avec une propriété précédemment établie de la fonction (elle est définie en $(0,0)$). De l'observation de cette courbe, il tire la conjecture C1 « le maximum existerait lorsque x et y sont proches de 0 ». La formulation au conditionnel de cette conjecture indique-t-elle le doute sur l'existence de ce maximum ? Il teste en partie cette conjecture en effectuant des calculs de limites et trouve que le maximum n'est pas à l'origine. Dans cette première partie de la boucle 3, l'élève utilise un raisonnement de type « expérimental » ou « créatif » (selon Lithner) en association avec des calculs sur les limites. Son raisonnement permet d'une certaine façon une première exploration du problème mais les différents résultats obtenus ne sont pas confrontés et des incohérences existent (calcul de limite en 0 alors que f est définie en 0 ; limite en $(0,0)$ et allure de f).

Toujours dans la boucle 3, sa seconde stratégie pour localiser le maximum de f consiste à réaliser des tables de valeurs qu'il observe pour déterminer comment évoluent les maxima de f en fonction des variations de x , les y étant fixés successivement. Elle s'ancre en partie dans la conjecture C1 (le maximum est proche de 0) puisque l'élève donne à x et y des valeurs comprises entre 0 et 1. Cette « observation » des valeurs de la fonction l'amène à formuler une première question (Q1) orientée vers la résolution du problème et qui marque l'identification d'un nouveau problème mathématique : pour quelle valeur de y le maximum de $f(x,y)$ est-il le plus grand ? La résolution expérimentale (« en tâtonnant ») de ce problème débouche sur la formulation d'une question relative à la validité du résultat et implicitement de la démarche qui est non exhaustive (Q2) : « l'expression a-t-elle plusieurs sommets ou un seul ? »

Ainsi, dans la troisième boucle de raisonnement, la démarche du lycéen nous semble fortement guidée par une intuition : le maximum est proche de l'origine. Cela pourrait expliquer qu'il n'identifie pas les incohérences dans sa démarche.

Abandonnant alors sa démarche « expérimentale », dans la boucle 4, il revient à l'utilisation de techniques connues et utilise la dérivation dont il questionne d'emblée la validité (Q3). Il dérive effectivement selon les deux variables et recherche les points critiques de f à partir de cette dérivée mais achève sa première lettre sur un questionnement relatif à la validité du résultat obtenu et de la démarche utilisée (Q4) : « ma dérivée est-elle vraie ou tout simplement possible ? ».

La seconde lettre débute par un inventaire de ce qui est connu et « sûr » à propos de la fonction, avec une garantie de validité donnée par le correspondant. Reprenant alors le raisonnement de la boucle 4, à partir de l'idée que la dérivée de f s'annule en $xy = \frac{1}{2}$, l'élève ne questionne plus l'unicité du couple (x,y) qui donne la valeur maximum de f et affirme que la fonction admet un seul maximum dans le premier quadrant, en $xy = \frac{1}{2}$. Ainsi, les questions

Q1 et Q2 qui ont émergé avec un raisonnement expérimental construit en référence à la singularité du problème ne sont pas reprises dans ce raisonnement plus associé à l'usage d'une technique algorithmisée, et ce malgré la remarque du correspondant : « tu as 6 possibilités [...] tu as oublié de regarder les réels qui vérifiaient l'équation donnée ». Pour cet élève, tout se passe comme si le retour à un raisonnement de type algorithmisé empêchait un questionnement. L'égalité $xy = \frac{1}{2}$ lui permet d'exprimer y en fonction de x et de revenir à une fonction à une seule variable qu'il dérive pour en trouver le maximum. La dérivée obtenue est un quotient dont le dénominateur est un polynôme de degré 6 ($48y^6 + 48y^4 + 12y^2 + 8y^4 + 8y^2 + 2$) qu'il ne cherche pas à simplifier dont il approxime le 0 à 0.7. Ce résultat corrobore ses résultats précédents mais ne le satisfait pas car cela « reste une approximation ». De nouveau, il nous semble que cet élève est fortement guidé par l'intuition que la valeur du maximum qui est proche de 0.7 n'est pas un nombre « simple ». Il conjecture que cette valeur est $\sqrt{\frac{1}{2}}$ ce qui implique que $x=y=\sqrt{\frac{1}{2}}$ et vérifie une partie de cette conjecture C2 en dérivant la fonction $f(x,x)$ comme une fonction à une variable. Ce raisonnement qui repose sur des hypothèses successives, le conduit à une dernière question relative à la preuve du problème (Q5) : comment expliquer que $x = y$?

En résumé, cet élève utilise plutôt un raisonnement de type « expérimental » ou « créatif » (cf. Lithner) bien marqué par la formulation écrite de conjectures tirées d'expériences qui jalonnent sa recherche et de réfutations ou validations mais sans avoir de contrôle systématique de la cohérence de résultats intermédiaires établis. Il ne pose pas réellement de questions d'ordre technique car il les contourne toujours en revenant à l'utilisation de valeurs numériques approximatives. En revanche le travail du problème est jalonné par l'identification de nouveaux problèmes à résoudre formulés par des questions (Q1 et Q5) et orientés vers la preuve (Q5). Il pose des questions sur la validité des résultats obtenus et des démarches utilisées, en particulier quant à leur correction mathématique et à l'exhaustivité des résultats qu'elles permettent d'obtenir ; ces questions sont localisées à partir de la moitié de la boucle 3. Globalement, il semble mener une enquête, à partir d'hypothèses plus ou moins fondées, pour localiser le ou les maximum de la fonction f avant de donner une preuve de ce résultat.

La conceptualisation de la notion de maximum

Pour cet élève et dans la résolution de ce problème, la notion de maximum d'une fonction ou, plutôt d'une expression de son point de vue, est d'abord associée à la croissance et à la majoration (boucles 1, 2, 3). Le concept-en-actes « maximum d'une fonction » correspond à « plus grande valeur de la fonction », il est mis en oeuvre car l'élève écarte dans un premier temps la possibilité de dérivation de la fonction. Les théorèmes-en-actes associés à ce concept-en-actes, qui appelle une résolution plus expérimentale du problème, sont étroitement liés à sa conceptualisation de la notion de fonction. Ce sont les suivants :

- TA1 : si une fonction admet un maximum, alors elle a un majorant ;
- TA2 : si une fonction n'admet pas de maximum, alors l'expression tend vers $+\infty$ lorsque $x \geq 0$ et $y \geq 0$;
- TA3 : une fonction a une seule variable, s'il y a plus d'une variable c'est une expression ;
- TA4 : on peut étudier les limites d'une expression mais pas son sens de variation, ni sa dérivée donc pour déterminer le maximum d'une expression on étudie son allure et ses limites, en fixant successivement les variables x et y ;

- TA5 : le maximum d'une expression $f(x,y)$ correspond au maximum des maxima de $f(x,y_i)$, les y_i étant successivement fixés ; on peut le localiser avec des tests de valeurs.

Ces théorèmes-en-actes préexistent à la résolution du problème, c'est-à-dire qu'ils ne semblent pas évoluer en lien étroit avec le travail du problème. En effet, le travail du problème et les limites de cette conceptualisation ressenties par le lycéen le conduisent à mobiliser le concept-en-acte de « maximum » comme « point critique » (boucle 4). Les théorèmes-en-actes associés sont alors les suivants :

- TA6 : le maximum d'une fonction de deux variables est le point où la dérivée de cette fonction est nulle ;
- TA7 : le maximum d'une fonction $f(x,y)$ est le point où la dérivée de $f(x, g(x))$, avec $y=g(x)$, est nulle.

VI Conclusion

Les deux activités de résolution du problème étudiées ici sont très différentes. Dans les deux cas, les élèves exploitent plusieurs pistes de recherche. Leur activité renvoient l'une et l'autre aux raisonnements de types FAR et « créatifs » que distingue Lithner. Sans les opposer, cette étude appelle plutôt à analyser la façon dont peuvent s'articuler ces types raisonnements au cours d'une recherche « longue » d'un problème de mathématiques. En particulier, l'activité de ces lycéens recoupe au moins deux des facettes de l'activité mathématique chères à des mathématiciens professionnels :

« Faire des mathématiques, c'est poser - et si possible- résoudre des problèmes » (Perrin, 2007) ;

« faire des mathématiques c'est augmenter sa compréhension des mathématiques » (Thurston, Brette, 1996).

Ainsi, le dispositif de correspondance mis en place pour cette recherche semble intéressant pour saisir la dimension plurielle de l'activité mathématique des élèves, leur potentialité dans le domaine de la résolution de problèmes mathématiques et les conceptualisations associées, notamment ici à propos de la notion de maximum d'une fonction.

L'étude reste à poursuivre avec l'analyse de l'ensemble du corpus recueilli. Une analyse didactique plus fine des caractéristiques du problème choisi semble aussi utile pour déterminer plus précisément en quoi la richesse des écrits obtenus est liée au problème lui-même (en particulier à la symétrie de la fonction) et en quoi elle est liée au dispositif.

VII Références

- Arsac G., Mante M. 2007, *Les pratiques du problème ouvert*, Ed. Sceren, Lyon : CRDP
- Artigue M., Houdement C. 2007, Problem solving in France: didactic and curricular perspectives, *ZDM*, 39.5, p. 365-382
- Bonnafé et al. 2002, *Les narrations de recherche de l'école primaire au lycée*, IREM de Montpellier
- Brousseau G. 1998, *Théorie des situations didactiques*, Grenoble : La pensée Sauvage.
- Frétygné P. 2004, La crise des vocations scientifiques, *Bulletin de l'APMEP*, 453, p. 559-581.
- Legrand M. 1993, Débat scientifique en classe de mathématiques, *Repères-IREM*, 10, p. 123-158.

- Lithner J. 2000, Mathematical reasoning in task solving, *Educational Studies in Mathematics*, 41, p. 165 – 190
- Lithner J. 2003, Students' mathematical reasoning in university textbook exercises, *Educational Studies in Mathematics*, 52, p. 29-55
- Lithner J. 2008, A research framework for creative and imitative reasoning, *Educational Studies in Mathematics*, 67-3, p. 255-276
- Motot F. 2008, Les élèves des pays riches snobent la science, *Bulletin de l'APMEP*, 476, p. 383.
- Orange C. 2005, Problème et problématisations dans l'enseignement scientifique, *ASTER*, 40, p. 3-11
- Perrin D. 2007, L'expérimentation en mathématiques : quelques exemples, *Actes du XXXIIIème colloque sur la formation des maîtres*, p. 37-72.
- Sauter M. 2000, Formation de l'esprit scientifique avec les narrations de recherche au cycle central du collège, *Repères-IREM*, 39, p. 7-20.
- Thurston W. P., Brette J. 1996, Preuve et progrès en mathématiques, *Repères-IREM*, 21. p. 7-26.
- Vergnaud G. 1996, Au fond de l'apprentissage, la conceptualisation, *Actes de la 8ème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*, p. 174-185.
- Vergnaud G. 2007, Représentation et activité : deux concepts étroitement associés, *Recherche en Education*, 4, p. 9-22, disponible à l'adresse : <http://www.cren-nantes.net/spip.php?article61>

VIII Annexe 1 : éléments pour l'analyse de l'activité du lycéen dans la correspondance 2

1. Résumé de la correspondance 2

La première lettre du lycéen débute par une recopie de l'énoncé du problème suivie d'un inventaire de propriétés mathématiques ou remarques :

- « - Si la fonction admet un maximum, alors l'expression admet un majorant.
- Si la fonction n'admet pas de maximum, alors l'expression tend vers $+\infty$ lorsque $x \geq 0$ et $y \geq 0$.
- Mais cette expression n'est pas une fonction, donc l'étude de la limite, du signe de la dérivée et du sens de variation de l'expression ne correspond pas dans ce problème. »

Cette dernière remarque est barrée, avec une annotation :

- « Faux, on peut étudier la limite de cette expression mais je ne dois pas confondre cette expression avec une fonction. »

Ensuite, l'élève cherche le domaine de définition de f (« l'expression est définie sur $[0, +\infty[$ ») et, sans aucune remarque, ses limites en l'infini et 0 :

$$x \rightarrow +\infty, y \rightarrow 0, \quad \lim \frac{x+y}{1+x^2+y^2} = 0 \quad ; \quad x \rightarrow +\infty, y \rightarrow +\infty, \quad \lim \frac{x+y}{1+x^2+y^2} = 0$$

qu'il utilise pour tracer l'allure de la courbe après avoir fixé y à 1. A partir de cette courbe à l'allure d'une hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$ il émet une conjecture :

« Conjecture ? »

Sur le premier quadrant, le maximum de l'expression $\frac{x+y}{1+x^2+y^2}$ existerait lorsque x et y sont proches de 0. »

Il étudie ensuite la limite de l'expression lorsque x ou y tend vers 0, en fixant y (sans lui donner de valeur particulière), puis les limites lorsque y tend vers $+\infty$ et 0. Il obtient successivement :

$$\text{pour } y \text{ un réel fixé, quand } x \rightarrow 0, \quad \lim \frac{x+y}{1+x^2+y^2} = \frac{y}{1+y^2}$$

$$\text{quand } y \rightarrow +\infty, \quad \lim \frac{y}{1+y^2} = 0$$

$$\text{quand } y \rightarrow 0, \quad \lim \frac{y}{1+y^2} = 0$$

d'où il conclut :

« Donc le maximum, s'il existe, ne se trouve pas à l'origine du repère, ni lorsque x et y tendent vers l'infini. »

Il commence alors des « tests de valeurs pour trouver le maximum avec la calculatrice », il choisit pour x et y des valeurs proches de 0 et dresse plusieurs tableaux successifs dont il tire des remarques. Nous résumons cela dans le tableau ci-dessous :

test	Valeurs de f calculées	Remarques écrites par l'élève
	$x = y, x \text{ et } y \text{ variant de } 0.1 \text{ à } 1 \text{ avec un pas de } 0.1$	
1	$y = 0.1, x \text{ varie de } 0.1 \text{ à } 1 \text{ avec un pas de } 0.1$	Max pour $x = 0.8, M1 = 0.545$
2	$y = 0.2, x \text{ varie de } 0.2 \text{ à } 1 \text{ avec un pas de } 0.1$	Max pour $x = 0.8, M2 = 0.595,$ $M1 < M2$
3	$y = 0.3, x \text{ varie de } 0.3 \text{ à } 1 \text{ avec un pas de } 0.1$	Max pour $x = 0.8, M3 = 0.635$ $M1 < M2 < M3$
4	$y = 0.4, x \text{ varie de } 0.4 \text{ à } 1 \text{ avec un pas de } 0.1$	pour $x = 0.7, M = 0.66$ pour $x = 0.8, M = 0.66$ on ne sait pas lequel des deux est le maximum $M1 < M2 < M3 < M4$

A ce stade, il écrit :

« Au lieu de continuer à faire des tableaux de valeurs, on peut observer que le maximum augmente. Pour quelle valeur de y , le maximum est-il le plus fort ? »

En tâtonnant, je trouve $y = 0.71$ et $x = 0.7$ et $\frac{x+y}{1+x^2+y^2} \approx 0.70708$

Je décide alors d'augmenter le nombre de décimales des x et y , mais ceci n'est pas concluant.

Donc d'après les tableaux de valeurs, nous pouvons faire une approximation, le maximum est ≈ 0.71 pour $y \approx 0.71$ et $x \approx 0.7$.

Mais maintenant, je me pose une question, l'expression a-t-elle plusieurs sommets ou un seul.

Peut-on utiliser la dérivée pour étudier les variations de l'expression en fonction de x et y . Est-ce possible ? »

Il procède alors à une dérivation à la fois selon x et y , trouve $\frac{-4xy+2}{1+x^2+y^2}$, dresse un tableau de variations (en x et y !) de f (la fonction est croissante entre 0 et $xy = \frac{1}{2}$ puis décroissante) et conclut sa lettre ainsi :

« De cela, nous pouvons en conclure que l'expression n'a qu'un seul maximum sur le premier quadrant.

Mais je préfère ne pas aller plus loin avec cette méthode car je ne sais pas si ma dérivée est vraie ou si elle est possible tout simplement. »

Dans sa réponse, son correspondant reprend le domaine de définition de f , précise que f est dérivable (« on expliquera plus tard comment ») et donc continue, rappelle les limites en 0 ($= 0$) et en l'infini ($= 0$) pour montrer que f , si elle n'est pas constante, a un maximum. En utilisant le théorème de croissance comparée, il indique de plus que le maximum est proche de 0.

Il précise ensuite :

« Tes tableaux sont utiles pour se donner un ordre d'idée, en revanche attention à ne pas trop s'y fier et à ne pas conclure sur cette seule donnée. En effet, la calculatrice faisant de nombreux arrondis, tes valeurs sont de plus en plus approximatives. Fie-toi plus à ton intuition et à tes calculs qu'à ta calculatrice.[...]

En l'état actuel des choses, je ne vois pas comment avec les connaissances de Terminale, on pourrait résoudre le problème (mise à part l'approximation). »

Il explique alors la méthode qu'il nomme « principale », à savoir l'utilisation des dérivées partielles. Il ajoute les deux dérivées partielles obtenues, trouve $\frac{-4xy+2}{1+x^2+y^2}$ et conclut que le point critique est atteint lorsque $xy = \frac{1}{2}$:

« Tu as donc 6 possibilités pour que lorsque tu multiplies deux nombres entre-eux (pas forcément égaux), le résultat te donne $\frac{1}{2}$. Grosso modo, tu as presque résolu le problème, mais tu as oublié de regarder les réels qui vérifiaient l'équation donnée. »

Au début de sa seconde lettre, le lycéen dresse un récapitulatif à partir de son travail et de la lettre de son correspondant. Il indique en particulier « $f'(x,y) = \frac{-4xy+2}{1+x^2+y^2}$ », reprend le tableau de variation dressé dans la première lettre sur $[0, +\infty[$ et conclut :

« - l'expression n'a donc qu'un seul maximum sur le premier quadrant

- le maximum est quand $f'(x,y) = 0$ d'où $xy = \frac{1}{2}$ donc $y = 1/2x$. Cette information va nous permettre de revenir avec une variable. »

Il utilise en effet cette égalité pour exprimer f en fonction de y seulement puis dérive cette nouvelle fonction et écrit :

« donc $f'(y) = 0$ lorsque $y \approx 0.7$ ce qui confirme mes approximations mais cela reste une approximation donc cela n'est pas très utile.

Or, on peut remarquer que $\sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0.7$ et $xy = \frac{1}{2}$

donc conjecture : x est égal à y , x ou $y = \sqrt{\frac{1}{2}}$ »

Exploitant cette conjecture il écrit f uniquement en fonction de x , calcule la dérivée de cette fonction, les points critiques et dresse son tableau de variation. Il retombe alors sur la valeur

$x = \sqrt{\frac{1}{2}}$ comme maximum. Il conclut alors sa deuxième lettre :

« donc le maximum est lorsque $x = \sqrt{\frac{1}{2}}$ et $y = \sqrt{\frac{1}{2}}$, $\frac{x+y}{1+x^2+y^2} = \sqrt{\frac{1}{2}}$.

Donc, cette preuve semblerait être en accord avec les approximations et le calcul de la dérivée où l'on a remplacé x par $\frac{1}{2}y$. Ce qui me pose problème à présent est comment expliquer que x est égal à y pour pouvoir compléter la résolution du problème. »

2. Résumé de l'activité du lycéen

Tableau 2 : 4 boucles de raisonnement dans la lettre 1

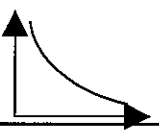
B1 : déterminer une stratégie de résolution	Inventaire de propriétés connues	Les moyens habituels ne conviennent pas. Utiliser le lien entre majoration et existence d'un max
B2 : déterminer si f a un max	Etude de limites en $+\infty$	f admet un max
B3 : localiser le max de f	Allure de la courbe 	C1 : le max est proche de (0,0)
B4 : vérifier C1	Etude de limites de $f(x,y)$ autour de (0,0) :	le max n'est pas en (0,0), ni quand x et y tendent vers ∞
B3 : localiser le max de f	Calculer des valeurs de $f(x,y)$: y fixé, x varie	Le max est quand $x = 0.7$ ou 0.8 Il augmente avec y . Q1 : pour quel y le max est-il le plus fort ?
B5 : trouver la valeur de y qui donne le max de f	« En tâtonnant »	$y = 0.71$
	Calculs de valeurs, avec plus de décimales	Q2 : l'expression a-t-elle plusieurs sommets ou un seul ?
B6 : trouver le(s) max de f		Q3 : ai-je le droit de dériver ?
	Dériver, étudier le signe de la dérivée	L'expression n'a qu'un max dans le premier quadrant, en $xy = \frac{1}{2}$ Q4 : ma dérivée est-elle vraie ou possible tout simplement ?

Tableau 3 : reprise de la boucle de raisonnement 4 dans la lettre 2

B7 : résumer ce qu'on sait	Inventaire avec appui sur correspondant	x ou $y \rightarrow \infty, f(x,y) \rightarrow 0$ le max est entre 0 et 1 la fonction est majorée
B6 : trouver le(s) max de f	Dériver $f(x,y)$	Un seul max, quand $xy = \frac{1}{2}$ i.e. quand $y = \frac{1}{2x}$
B8 : trouver le max de $f(x, \frac{1}{2x})$	Dériver	Max quand $y = 0.7$ Confirme mes approximations mais reste une approximation
	Fait numérique : $\sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0.7$	C2 : max $x = y = \sqrt{\frac{1}{2}}$
B9 : vérifier C2	Dériver $f(x,x) = f(x)$	max quand $x = y = \sqrt{\frac{1}{2}}$
		Q5 : comment expliquer que $x=y$?

Annexe

Annonces des séminaires 2008

Programme du séminaire national de didactique des mathématiques des 18 et 19 janvier 2008

Séminaire organisé par l'Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques (ARDM)
<http://www.ardm.asso.fr/>

Les conférences se dérouleront à la Halle aux Farines sur le site PRG de l'Université Paris Diderot Paris 7.

Accès :

<http://www.univ-paris-diderot.fr/sc/site.php?bc=universite&np=SitePRG>

Plan de la Halle (3,6Mo) :

http://www.diderot7.jussieu.fr/PRG/includes/halle_tout_envers.pdf

Vendredi les conférences se dérouleront dans l'amphithéâtre 1A
 Samedi les conférences se dérouleront dans l'amphithéâtre 7C

Responsables du séminaire national de didactique des mathématiques :

Lalina Coulangue

lalina.coulangue@creteil.iufm.fr

IUFM de Créteil, rue Jean Massé, 94861 Bonneuil-sur-Marne

Christophe Hache

chache@math.jussieu.fr

Université Paris 7, case courrier 7018, 75205 Paris cedex 13

Le séminaire est organisé avec le partenariat de l'IREM de Paris 7.

NB : Dates du prochain séminaire : 28 et 29 mars 2008

Vendredi 18 janvier 2008 – 16h-19h – Amphi 1A

16h15 à 17h30 Présentation de thèse

Le concept de typicalité appliqué aux registres figuratifs et numériques : figures archétypes et figures prototypes. Typicalité dans la résolution d'une tâche
 Eric LAGUERRE (DIDIREM et IUFM de Versailles - Univ. de Cergy Pontoise)

17h45 à 19h Travaux en cours (thème TICE)

Genèses instrumentales pour l'enseignement : une proposition d'analyse en terme de tâches et techniques didactiques instrumentées.
 Laetitia BUENO-RAVEL (CREAD et IUFM de Bretagne)

Samedi 19 janvier 2008 – 9h-12h – Amphi 7C

9h15 à 10h30 Travaux en cours

L'ajustement à la contingence d'un modèle de la correction en classe de mathématiques.
 Catherine-Marie CHIOCCA et Susana MURILLO-LOPEZ (PATRE, ENFA et LEMME, Univ. Paul Sabatier, Toulouse)

10h45 à 12h Présentation de thèse (thème TICE)

Intégration de la géométrie dynamique dans l'enseignement de la géométrie pour favoriser une liaison école primaire – collège : une ingénierie au collège sur la notion de propriété.
 Sylvia COUTAT (Equipe IAM Grenoble)

Samedi 19 janvier 2008 – 14h-18h – Amphi 7C

14h à 15h Plage de l'ARDM

Informations, discussion sur les publications (actes des écoles d'été, du séminaire national, quelles publications en ligne...)

15h15 à 16h30 Travaux en cours (thème TICE)

Représentation sous forme d'arbre des expressions algébriques dans le logiciel Aplusix.
 Jana TRGALOVA (Laboratoire LIG à Grenoble, INRP à Lyon)

16h45 à 18h Travaux en cours (thème TICE)

Dans des environnements TICE quelles pratiques d'enseignants pour quelles activités d'élèves ? Une étude de cas en géométrie dynamique
 Maha ABOUD-BLANCHARD (DIDIREM et IUFM du Nord Pas de Calais Univ. d'Artois) et Monique CHAPPEL-PARIES (DIDIREM et IUFM de Versailles - Univ. de Cergy Pontoise)

Séminaire National de Didactique des Mathématiques, 18 et 19 janvier 2008

Le concept de typicalité appliqué aux registres figuraux et numériques :

Figures archétypes et figures prototypes
Typicalité dans la résolution d'une tâche

Eric LAGUERRE

eric.laguerre@versailles.iufm.fr

Vendredi 18 janvier - 16h15 à 17h30

Dans la littérature scolaire, les expressions de « figures-clés » de « configuration de ... », de « triangles en situation de .. » ou de « figure de référence » sont très courantes. A priori, ces vocables ont pour caractéristique de désigner des dessins reproduisant exclusivement les prémisses d'un théorème ou d'une définition dans le but de faciliter leur mise en oeuvre. Dans cet exposé, dont le champ est restreint au théorème de Thalès mais qui pourrait être étendu à d'autres propriétés, nous nous attachons, dans un premier temps, à comprendre la façon dont se constituent des représentations typiques pour les élèves en dégagant des figures que nous nommons archétypes ou prototypes suivant leur moment d'apparition par rapport à l'enseignement du théorème. Nous nous interrogeons ensuite sur la manière dont certains paramètres superflus qui définissent ces prototypes peuvent générer des difficultés, d'une part, dans la reconnaissance de figures, ce qui nous a conduit à mettre en lumière des figures pathologiques, et d'autre part dans la mise en oeuvre du théorème, ce qui nous amène à mettre en évidence des figures pathogènes. Dans un second temps, à partir de deux figures prototypes, nous nous intéressons à la typicalité de la distribution de mesures de longueurs sur un dessin dans le cadre du calcul de l'une d'entre elles.

Bibliographie succincte :

- CORDIER F. et J. (1991). L'application du théorème de Thalès. Un exemple du rôle de représentations typiques comme biais cognitif. Recherche en Didactique des Mathématiques. Vol n°11.1. La Pensée Sauvage. Grenoble.
- DUVAL R. (1993). Registre de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. Vol n°5. IREM de Strasbourg.
- DUVAL R. (1994). Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. Repère IREM n°7. Topiques édition. Pont-à-Mousson.
- DUVAL R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. Vol n°10. IREM de Strasbourg.
- HOUBEDINE J. et KERBOEUF M-P. (2005). Les figures-clés : une idée pour le début de l'apprentissage de la démonstration en quatrième. Repère IREM n°59. Topiques édition. Pont-à-Mousson.

L'ajustement à la contingence d'un modèle de la correction en classe de mathématiques.

Catherine Marie CHIOCCA

catherine-marie.chiocca@educagri.fr

Susana MURILLO-LOPEZ
sumurilloct@yahoo.fr

Samedi 19 janvier - 9h15 à 10h30

La correction en classe de mathématiques est une pratique de classe courante et banale dans l'enseignement des mathématiques en France. Le modèle en cours de confrontation à la contingence, d'une correction en classe, repose sur une fonction de trois variables : le discours, le corrigé et le statut des connaissances qui participent de la chronogénèse, topogénèse et de la mésogénèse.

La contingence est de deux sortes : l'enseignement en 4ème-3ème dispensé par un professeur ayant préparé la séquence de statistique avec une didacticienne et l'enseignement en IUT et en Terminale sur la notion de fonction réciproque, dispensé par des professeurs ordinaires dont le choix n'est pas stochastique.

Le logiciel C.H.I.C. repose sur l'Analyse Statistique Implicative et permet dorénavant, le choix des professeurs avec lesquels sont menés les études qualitatives, à l'issue d'une étude quantitative. L'ajustement du modèle à la contingence s'opère par l'observation et l'analyse de corrections menées par ces professeurs.

Bibliographie succincte :

- Robert, A. et Rogalski, J. (2002).. Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Canadian Journal of Science ; Mathematics and Technology Education*, 2(4), 505-528.
- Sensevy, G. et Mercier, A. (2007). *Agir ensemble, l'action conjointe du professeur et des élèves dans le système didactique*, Ed. Rennes, Presses Universitaires de Rennes.
- Bailleul, M. (2000). Mise en évidence des réseaux orientés de représentations dans deux études concernant des enseignants stagiaires en IUFM. In R. Gras, M. Bailleul (Eds), *Actes des journées sur la fouille dans les données par la méthode d'Analyse Statistique Implicative*. Ed. Rennes : Presses Universitaires de Rennes. P.189-208
- Gras, R. et al. (1996). *L'implication statistique. Nouvelle méthode exploratoire de données*. Grenoble. La Pensée Sauvage.

Séminaire National de Didactique des Mathématiques, 18 et 19 janvier 2008

Genèses instrumentales pour l'enseignant : une proposition d'analyse en terme de tâches et techniques didactiques instrumentées.

Laetitia BUENO-RAVEL

Laetitia.bueno-ravel@bretagne.iufm.fr

Vendredi 18 janvier – 17h45 à 19h – Thème TICE

Depuis quelques années, l'emploi des bases d'exercices en ligne en cours de mathématiques s'est largement répandu. Il est alors légitime de se poser la question de l'existence d'une genèse instrumentale pour l'enseignant dans le cas où l'artefact considéré est une base d'exercices en ligne. Dans le cadre du travail du groupe de recherche EMULE (Enseignement des Mathématiques et Usages en Ligne d'Exercices) dépendant du projet GUPTEn (Genèse d'Usages Professionnels de Technologies par les Enseignants) piloté par J.B. Lagrange et soutenu par l'INRP, nous avons dans un premier temps identifié des évolutions de scénarios d'utilisation des bases d'exercices par les enseignants. En nous référant à l'approche instrumentale telle qu'elle a été développée en didactique des mathématiques, nous interprétons ces évolutions en terme de genèses. Dans le cas d'un sujet enseignant, il nous semble essentiel de tenir compte du système de conditions et de contraintes pesant sur les choix de celui-ci. Nous avons donc développé une approche théorique et méthodologique nous conduisant à analyser des types de tâches et des techniques didactiques de l'enseignant instrumentés par une base d'exercices. Nous la mettons en œuvre pour analyser un enseignement de trigonométrie en classe de 3ème intégrant la base d'exercices en ligne Mathenpoche.

Bibliographie succincte :

- Chevallard Y. (2001) Ecologie et régulation, in J.-L. Dorier, (ed.) *Actes de la XIème Ecole d'été de didactique des mathématiques*, Corps, Isère.
- Gueudet G. et Trouche L. (à paraître) Vers de nouveaux systèmes documentaires des professeurs de mathématiques ? In Bloch, I. et Comme, F. *Actes de la 14ème école d'été de didactique des mathématiques*, Sainte-Livrade.
- Guin, D. & Trouche, L. (Eds.). (2002) *Calculatrices symboliques. Faire d'un outil un instrument du travail mathématique, un problème didactique*. La Pensée Sauvage, Grenoble.
- Lagrange, J.-B., Bessières, D., Blanchard, M., Loisy, C., Vandebrouck, F. (dir.) (2007). *Genèses d'usages professionnels des technologies chez les enseignants, rapport intermédiaire de l'ACI GUPTEn*, <http://gupten.free.fr>

Intégration de la géométrie dynamique dans l'enseignement de la géométrie pour favoriser une liaison école primaire – collège : une ingénierie au collège sur la notion de propriété.

Sylvia COUTAT

sylvia_coutat@hotmail.com

Samedi 19 janvier – 10h45 à 12h – Thème TICE

Cette recherche s'intéresse à l'apprentissage de la notion de propriété géométrique en début de collège. Nous vous présentons dans un premier temps comment nous avons caractérisé les propriétés ciblées à l'aide du triplet de Vergnaud (1990). Cela nous amènera à considérer les propriétés comme une relation de subordination entre les contraintes, les données de la propriété, et la conclusion. L'apprentissage de cette relation s'accompagne de la distinction entre contraintes et conclusion. Cette distinction sera aussi nécessaire pour l'utilisation des propriétés dans la mise en œuvre du raisonnement déductif. Dans un deuxième temps, nous vous présenterons comment d'un logiciel de géométrie dynamique peut répondre à nos attentes. Enfin nous vous présenterons comment les élèves s'approprient la relation entre les données et la conclusion à travers l'étude de :

- la construction de l'instrument déplacement que nous visons lors des activités avec Cabri Géomètre
- l'articulation entre les registres graphiques et discursifs en lien avec le processus de médiation sémiotique

Bibliographie succincte :

- Duval R., 2005, Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements, *Annales de didactique des sciences cognitives*, 10, 5-53
- Houdement C., Kuzniak A., 2006, Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie, *Annales de didactique des sciences cognitives*, 11, 175-193
- Trouche L., 2005, Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques : Nécessité d'orchestrations, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 25, 91-138.
- Vergnaud G., 1990, La théorie des champs conceptuels, *Recherche en didactique des mathématiques*, 10, 133-170
- Vygotzky L.S., 1934, *Pensée et langage*, Traduction française : F. Sève 1985, Paris : Messidor Edition Sociales.

Représentation sous forme d'arbre des expressions algébriques dans le logiciel Aplusix.

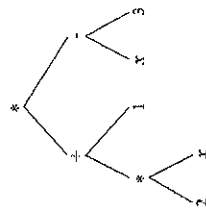
Jana TRGALOVA
jana.trgalova@imag.fr

Samedi 19 janvier – 15h15 à 16h30 – Thème TICE

- Une expression algébrique peut être considérée de deux points de vue :
- comme un *programme de calcul* : elle indique la suite des calculs à effectuer pour obtenir le résultat du programme lorsque des valeurs sont attribuées aux lettres présentes dans l'expression (aspect procédural) ;
 - comme un *objet* la forme duquel peut être décrite et avec lequel des opérations, telles que simplification, factorisation, substitution dans une autre expression etc., peuvent être effectuées (aspect structural).

De nombreuses tâches en algèbre nécessitent la considération de l'aspect structural d'une expression, par exemple déterminer si deux expressions données sont équivalentes. Cependant, dans l'enseignement de l'algèbre au collège en France, il y a prédominance de l'aspect procédural et, par conséquent, l'aspect structural est moins « visible » pour les élèves. L'incompréhension ou la non prise en compte de la structure d'une expression algébrique se manifeste dans de nombreuses erreurs commises par les élèves dans la manipulation des expressions (non respect des priorités opératoires, difficulté à appliquer la distributivité...).

La représentation de l'expression algébrique, par exemple $(2x+1)(x-3)$, sous forme d'un arbre permet d'en montrer la structure qui est donnée par l'opérateur dans la racine de l'arbre (ici, il s'agit du produit de deux expressions, dont l'une est la somme de $2x$ et de 1 et l'autre la différence de x et de 3 , etc.) :



Un module permettant la représentation des expressions algébriques sous forme d'arbres a été intégré au logiciel Aplusix dans le cadre du projet européen ReMath.

Dans ce séminaire, nous présenterons le logiciel Aplusix avec son nouveau module et un scénario d'enseignement qui a été conçu dans le but d'aider les élèves à comprendre la structure des expressions algébriques. Nous présenterons également les premiers résultats des expérimentations de ce scénario qui sont actuellement en cours.

Bibliographie succincte :

- Du numérique au littéral. Projet du document d'accompagnement des programmes du collège, Mathématiques, 5 avril 2006.
http://eduscol.education.fr/D0015/du_numerique_au_litteral.pdf
- Bouhineau D., Chaachoua H., Viudez C. & Nicaud J.-F. (2007). Introduction de nouvelles représentations dans le micromonde Aplusix : représentations sous forme mixte naturelle & arbre et sous forme graphique d'expressions algébriques, *Actes de la conférence EIAH2007*, Lausanne, 27-29 juin 2007.
[http://telearn.noe-kaleidoscope.org/warehouse/Aplusix_EIAH_2007_\(000948v1\).pdf](http://telearn.noe-kaleidoscope.org/warehouse/Aplusix_EIAH_2007_(000948v1).pdf)

Dans des environnements TICE quelles pratiques d'enseignants pour quelles activités d'élèves ? Une étude de cas en géométrie dynamique

Maha ABBOUD-BLANCHARD
maha.blanchard@math.jussieu.fr
Monique CHAPPET-PARIES
monique.paries@orange.fr

Samedi 19 janvier – 16h45 à 18h – Thème TICE

Les recherches concernant les technologies de l'information et de la communication dans l'enseignement (TICE) ont porté, depuis quelques décennies, en priorité, sur les apprentissages des élèves et sur les potentialités et limites de ces technologies. Depuis quelques années, on assiste à une prise en compte croissante de la "dimension enseignant" pour mieux comprendre ce qui se joue du côté des apprentissages des élèves dans les environnements TICE. Les travaux qui se développent à ce sujet se nourrissent des cadres théoriques et des méthodologies développées et mises en œuvre dans les environnements traditionnels non TICE. Pour notre part, nous nous plaçons dans le cadre de la théorie de la double approche didactique et ergonomique en reprenant essentiellement les outils d'analyse développés dans ce cadre.

Nous proposons dans cette communication d'étudier de façon fine les pratiques d'enseignants dans une séance TICE. Nous étudions plus précisément le déroulement de cette séance en prenant en compte divers aspects parmi lesquels les tâches proposées aux élèves et les activités provoquées. Nous compléterons cette étude par l'analyse du discours de l'enseignant au cours de certaines interactions ce qui nous permettra d'approcher de plus près des effets possibles sur les apprentissages des élèves. La comparaison avec l'étude d'une séance en environnement classique, non TICE, nous aide à mieux cerner des caractéristiques de ces pratiques.

Bibliographie succincte :

- Abboud-Blanchard M., Lagrange J.-B. (2006) Uses of ICT by pre-service teachers: towards a professional instrumentation?, *The International Journal for Technology in Mathematics Education*, volume 13, issue 3.
- Lagrange J.B., Arigue M., Laborde C., Trouche L., (2003) Technology and mathematics education: a multidimensional study of the evolution of research and innovation, *Second International Handbook of Mathematics Education*, A.J. Bishop, M.A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick and F.K.S Leung.
- Robert A., Rogalski J., (2002), Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *La revue canadienne des sciences, des mathématiques et des technologies*, vol 2.4.
- Paries M. (2004), Comparaison de pratiques d'enseignants de mathématiques- Relations entre discours des professeurs et activités potentielles des élèves, *Recherches en didactique des mathématiques*, volume 24, n°2.3, La pensée sauvage

Programme du séminaire national de didactique des mathématiques des 28 et 29 mars 2008

Séminaire organisé par l'Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques (ARDM)

<http://www.ardm.asso.fr/>

Les conférences se dérouleront à la Halle aux Farines sur le site PRG de l'Université Paris Diderot – Paris 7 (Amphithéâtre 8C le vendredi et amphithéâtre 7C le samedi).

Accès et plans du bâtiment :

<http://www.ardm.asso.fr/rencontre/SemNat-Acces.html>

Responsables du séminaire national de didactique des mathématiques :

Lalina Coulange

lalina.coulange@creteil.iufm.fr

IUFM de Créteil, rue Jean Macé, 94861 Bonneuil-sur-Marne

Christophe Hache

chache@math.jussieu.fr

Université Paris 7, case courrier 7018, 75205 Paris cedex 13

Le séminaire est organisé avec le partenariat de l'IREM de Paris 7.

Vendredi 28 mars 2008 – 16h-19h – Amphi 8C

16h15 à 17h30 Présentation de thèse

Formation initiale et continue pour l'enseignement des mathématiques avec les TICE : cadre d'analyse des formations et ingénierie didactique

Fabien EMPRIN (DIDIREM, IUFM de Champagne Ardennes, Univ. de Reims Champagne Ardennes)

17h45 à 19h Travaux en cours

Étude de l'évolution des pratiques d'enseignants débutants de mathématiques
Brigitte GRUGEON-ALLYS (IUFM d'Amiens, Équipe DIDIREM Paris 7)

Samedi 29 mars 2008 – 9h-12h – Amphi 7C

9h15 à 10h30 Revue de questions

Apport des études comparatives aux recherches en didactique des mathématiques : le cas Viêt-nam – France

Annie BESSOT et Claude COMITI (équipe DIAM, Didactique et Informatique pour l'Apprentissage des Mathématiques, Laboratoire LIG, Grenoble)

10h45 à 12h Présentation de thèse

Paradigmes géométriques et formation initiale des futurs professeurs des écoles.

Françoise JORE (Université Catholique de l'Ouest à Angers, LAREF, Laboratoire de Recherche en Éducation et Formation, UCO, Angers)

Samedi 29 mars 2008 – 14h-18h – Amphi 7C

14h à 15h Plage de l'ARDM

Assemblée générale de l'ARDM.

15h15 à 16h30 Ouverture sur...

Savoir pour imaginer. Un exemple : Les livres de Olivier Keller consacrés aux origines de la géométrie.

François CONNE (dimage, Unige, et IP Unil).

16h45 à 18h Travaux en cours

Problèmes didactiques liés au développement d'outils pour le professeur

Alain MERCIER (UMR ADEF, Université de Provence, Institut National de Recherche Pédagogique)

**Formation initiale et continue pour l'enseignement des mathématiques avec les TICE :
cadre d'analyse des formations et ingénierie didactique**

Fabien EMPRIN
femprin.apmep@wanadoo.fr

Vendredi 28 mars 2008 – 16h15 à 17h30

L'utilisation des TICE pour l'enseignement des mathématiques reste faible et manque de diversité comme le montre des études statistiques récentes que nous avons synthétisées dans une première partie de la thèse. Notre hypothèse est qu'il existe un déficit qualitatif dans les formations des enseignants qui contribue à expliquer leur difficulté à intégrer les TICE dans leur enseignement. Notre objectif est de préciser l'existence et la nature de ce déficit. Pour cela nous avons construit un cadre théorique d'analyse en spécifiant deux cadres théoriques : la double approche et l'approche instrumentale. Le premier cadre permet une recomposition du travail du formateur et constitue une grille d'analyse des situations de classe proposées en formation alors que le second permet d'analyser le rapport entre l'artefact technologique et respectivement le formateur, l'enseignant ou l'élève. La mise en œuvre de notre cadre pour analyser un panel de trois formations et les représentations de quatorze formateurs permet de mettre en évidence un genre professionnel, des invariants dans les pratiques de formation et une rupture entre deux identités professionnelles : celle de l'enseignant et celle du formateur. Elle permet aussi de mettre en évidence les limites des pratiques observées, principalement basées sur l'homologie. L'introduction d'une composante réflexive dans les pratiques de formation apparaît alors comme une piste pertinente pour dépasser ces limites. Cette nouvelle hypothèse est testée au moyen d'une ingénierie didactique. Deux mises en œuvre d'un scénario de formation incluant une analyse réflexive des pratiques montrent l'intérêt de cette modalité ainsi que ses limites.

Bibliographie succincte :

- Abboud Blanchard M., 1994, *L'intégration de l'outil informatique à l'enseignement secondaire : symptômes d'un malaise*, Thèse de doctorat, Université Paris VII
- Clot Y. et Faïta D., 2000, Genres et styles en analyse du travail Concepts et méthodes, *Travailler* n°4, Paris, CNAM, 7-42
- Lagrange J.-B., 2000, L'intégration des instruments informatiques dans l'enseignement : une approche par les techniques. *Educational Studies in Mathematics*, 43 (1), 1-30.
- Rabardel P., 2005a, Instrument subjectif et développement du pouvoir d'agir, In : Rabardel P. et Pastre P. (eds) *Modèles du sujet pour la conception, dialectiques activités développement*, Octares, 11-31.
- Robert A., 2003, *Analyse de vidéo de séances de classe : des tâches prescrites aux activités des élèves, en passant par les pratiques des enseignants de mathématiques (second degré)*, Document pour la formation des enseignants, IREM de Paris 7.
- Schön D.-A., 1994, le praticien réflexif, traduit par Heyneman J. et Gagnon D les éditions logique. traduit de «*the reflective practitioner*», (1983), basic book inc. U.S.A.

Étude de l'évolution des pratiques d'enseignants débutants de mathématiques

Brigitte GRUGEON-ALLYS
grugeon@club-internet.fr

Vendredi 28 mars – 17h45 à 19h

Dans cet exposé, je vais prendre en compte trois approches concernant l'étude des pratiques enseignantes, pour étudier la construction et l'évolution des pratiques professionnelles des professeurs débutants : la double approche (Robert et Rogalski 2002), l'approche anthropologique (Chevallard 1999), la théorie de la structuration du milieu (Margolinas 1995). Je commencerai par mettre en avant des éléments de complémentarités entre ces différents points de vue, sur lesquels s'appuie la problématique et la méthodologie utilisée de mes travaux en cours.

Ma position de formatrice et de coordonnatrice de la formation initiale des PLC2 au sein de l'IUFM d'Amiens m'a permis de suivre des enseignants stagiaires formés dans la filière mathématique, puis débutants sur une période continue de 3 ans.

J'illustre la méthodologie utilisée sur une étude de cas et présente les premiers résultats de cette recherche qui se centre sur les questions suivantes :

Qu'est ce qui, dans les différentes composantes, cognitive, médiative, personnelle, institutionnelle ou sociale, peut favoriser la construction de la professionnalité enseignante et une évolution plus ou moins rapide ? Peut-on observer des variabilités, des régularités voire des stabilities en germe chez les professeurs débutants ? Lesquelles ? Que dire de ces pratiques et de leur évolution au regard de l'apprentissage des élèves mais aussi de la continuité de leurs apprentissages ? Quelles relations entre ces évolutions et régularités avec les activités organisées en formation ?

Bibliographie succincte :

- Chevallard Y. (1999), L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol 19 (2) pp 73-112.
- Grugeon-Allys B. (2006), Conception et évaluation d'une formation PLC2. Dans Chiocca et Laurecot (Eds), *DVD des actes de la CORFEM*. ENFA, Toulouse, 20-21 juin 2006.
- Margolinas C. (1995), La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations. Dans *Les débats didactiques des mathématiques, annales 1993-1994*, C. Margolinas (Eds) Grenoble : La pensée sauvage.
- Robert A. (2003), *Analyse de vidéo de classe : des tâches prescrites aux activités des élèves en passant par des pratiques enseignantes de mathématiques (2nd degré)*. Document pour la formation des enseignants, Numéro 2, Publication de l'IREM de Paris 7
- Robert A., Rogalski J. (2002), Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques: une double approche. *Revue Canadienne de l'Enseignement des Sciences, des Mathématiques et des Technologies*. Vol 2 (4) pp 505-528

Séminaire National de Didactique des Mathématiques, 28 et 29 mars 2008

Apport des études comparatives aux recherches en didactique des mathématiques : le cas Viêt-nam – France

Annie BESSOT
annie.bessot@imag.fr

Claude COMITI
claudc.comiti@free.fr

Samedi 29 mars 2008 – 9h15 à 10h30

Nous présenterons brièvement le contexte dans lequel ces études comparatives se sont développées : 17 ans de coopération inter-universitaire entre l'Université Pédagogique d'Ho Chi Minh (UPHCM) et l'Université Joseph Fourier (UJF, Grenoble 1) dont l'évolution a permis la création à l'UPHCM d'un pôle vietnamien de formation de haut niveau en didactique des mathématiques (Master 2 et depuis 2008 École doctorale).

Puis nous résumerons les caractéristiques au Viêt-nam de l'organisation et du fonctionnement de l'école, de la formation des enseignants de mathématiques et de la recherche en éducation. Nous chercherons enfin à identifier, non seulement les principaux apports pour la recherche en didactique des mathématiques des analyses comparatives mais aussi les grandes questions qu'elles suscitent. Nous nous appuierons pour ce faire sur 8 thèses en cotutelle entre l'UPHCM et l'UJF, actuellement soutenues, qui ont de façon plus ou moins explicite mis en relation des analyses didactiques des deux systèmes éducatifs France et Viêt-nam.

Bibliographie succincte :

- Bessot A., Comiti C. (2006) Some comparative Studies Between France and Vietnam Curriculums. in Leung, Graf and Lopez-Real (Eds) *Mathematics Education in different traditions: A comparative study in Asian and Western countries*. Springer : USA.
- Chaachoua H, Comiti C. (à paraître) L'analyse du rôle des manuels dans l'approche anthropologique. *Actes du 21ème congrès international sur la théorie anthropologique du didactique*, Uzès, Novembre 2007.
- Chevallard Y. (1998) Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique, *Actes de l'Université de la Rochelle*.
- Comiti C., Tran Van T., Birebent A., Bessot A. (à paraître) Comment créer les conditions d'une coopération réussie ? Une étude de cas. *Actes électroniques du colloque Espace Mathématique Francophone* 2006, Sherbrooke, Canada.

Paradigmes géométriques et formation initiale des futurs professeurs des écoles.

Françoise JORE
jore@uco.fr

Samedi 29 mars 2008 – 10h45 à 12h

A partir des travaux de Houdement-Kuzniak et de Parzysz, nous distinguons en formation de professeurs des écoles deux paradigmes de géométrie enseignée, basés notamment sur la nature des objets en jeu, le type de validation et le statut du dessin : d'une part G1 (*spatio-graphique*), dont les objets (dessins, maquettes...) sont physiques et les validations basées sur la perception, et d'autre part G2 (*proto-axiomatique*), dont les objets sont théoriques et les validations de type hypothético-déductif, le dessin n'étant alors qu'un représentant de l'objet théorique sur lequel on travaille.

Nous centrons notre travail sur les futurs professeurs des écoles en formation (PE1) qui sont amenés à faire travailler leurs élèves presque exclusivement dans G1, tandis que dans les problèmes de géométrie posés au concours de recrutement il leur est demandé (en principe) de se situer dans G2.

Notre recherche a montré que les PE1 se situent certes dans différents paradigmes, G1, G2, mais aussi dans des « pseudo-paradigmes » locaux et personnels, qui relèvent à la fois de G1 et de G2. En outre, l'« évidence de la figure », le manque de connaissances et de compétences dans G2, l'automatisation de procédures de construction qui les vide de sens, restent autant d'éléments déterminants dans le fait qu'ils ne soient pas à même de travailler dans G2 lorsque la situation l'exige (en particulier dans la préparation au concours de recrutement et, plus tard, dans la validation des productions de leurs élèves). La prise de conscience de la co-existence (voire la concurrence) de ces paradigmes est très minoritaire chez les PE1 au début de la formation ; elle peut néanmoins se mettre en place au travers d'ingénieries spécifiques. Celle que nous proposons est centrée sur la rédaction et la justification de scénarios de construction, et permet – au moins à court terme – de faire évoluer leur représentation de la géométrie et d'améliorer leurs compétences.

Bibliographie succincte :

- Houdement C., Kuzniak A. (2000) : Formation des maîtres et paradigmes géométriques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol.20. n°1. p 89-116. Ed. La Pensée Sauvage. Grenoble.
- Jore F. (2006) : *Paradigmes géométriques et formation initiale des professeurs des écoles, en environnements papier-crayon et informatique*, Thèse de doctorat de l'Université Paris 7.
- Parzysz B. (2002) : Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique en PE1, *Actes du colloque Inter-IREM des formateurs et professeurs chargés de la formation des maîtres*. Tours. Mai 2001. p 99-110. Ed Presses Universitaires d'Orléans.

Savoir pour imaginer.

Un exemple : Les livres de Olivier Keller consacrés aux origines de la géométrie.

François CONNE

francois.conne@pse.unige.ch

Samedi 29 mars 2008 – 15h15 à 16h30

J'aborde les questions d'enseignement des mathématiques dans l'esprit d'aller chercher au-delà de ce qui me semble insatisfaisant dans la situation actuelle. Pour cela, j'ai besoin d'élaborer des conceptions qui puissent m'indiquer qu'un tel au-delà existe. Ces perspectives étant ouvertes, il reste à en imaginer des formes possibles. Si l'indication des perspectives est une question qui relève de la didactique des mathématiques et d'elle seulement, par contre l'imagination des formes sous lesquelles penser ces perspectives est une toute autre affaire. Où donc puiser les ingrédients de notre imagination ? Les sources ne manquent pas : ce peut être l'observation de l'enseignement tel qu'il se tient, ce peut être l'étude de la psychologie de l'apprentissage, ce peut être l'étude des processus d'enseignement, ce peut être l'étude des progrès du savoir, etc.

Trois choses sont communes à toutes ces quêtes. La première est le caractère actuel de ces démarches, il s'agit de l'imagination dont nous sommes présentement capables. La seconde est que nous tentons d'inspirer notre imagination d'un au-delà indéfini en examinant l'effort d'imagination requis à notre intelligibilité d'un en deçà déterminé, et dont nous n'avons qu'une connaissance partielle. La troisième est que dans chacun des cas le savoir y est remis en question et que notre point de référence, notre origine qui, dans cette conception que j'expose est toute autre chose que nos sources, est un savoir organisé, ce que j'ai appelé un savoir-savant (Conne 92).

Olivier Keller a publié deux livres enquêtant sur le développement historique de la géométrie en deçà de la géométrie euclidienne. C'est sur cet exemple que je ferai la promotion de telles recherches comme source d'inspiration à l'imagination didactique. J'ai déjà eu l'occasion de le faire lors de deux ateliers de 2 et 3 séances à la dernière école d'été (ee14). Même s'il semble qu'à Ste Livrade, sur scène, j'aie réussi à tenir mon pari, je ne suis pas certain d'y réussir à nouveau à Paris sur Seine (Apollinaire, 1917).

J'invite instamment à lire le texte annexé à ce résumé :

<http://ardm.asso.fr/rencontre/SemNat-Mars2008-Conne.pdf>

Bibliographie succincte :

- Apollinaire G., 1917, *Les Mamelles de Tirésias*, Ouvres complètes, I et II, La Pléiade, Gallimard, 1965.
- Conne F., 1992, Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique, *Recherches en didactique des mathématiques*, 1992, n° 12 / 2-3, pp. 221-270.
- Conne F., 1998, L'activité dans le couple enseignant / enseigné. *Actes de la IX^e école d'été de Didactique des Mathématiques*, sept. 97, Houlgate, ARDM ed.
- Keller O., 2004, *Aux origines de la géométrie. Le paléolithique. Le mode des chasseurs cueilleurs*. Vuibert 230p.
- Keller O., 2006, *La figure et le monde. Une archéologie de la géométrie. Peuples paysans sans écriture et premières civilisations*. Vuibert, 318p.

Problèmes didactiques liés au développement d'outils pour le professeur

Alain MERCIER

alain.mercier@inrp.fr

Samedi 29 mars 2008 – 16h45 à 18h

Étude de quelques cas issus du projet AMPERES, du collège au Lycée. Les tentatives de développement d'outils d'enseignement ont montré d'abord que les professeurs ne disposaient pas des moyens de gérer la succession des situations didactiques sans l'accompagnement de l'ingénieur didacticien. L'attaque de la question par la théorie anthropologique chevallardienne a conduit à passer de l'idée d'ateliers de mathématiques à celle d'activités d'étude et de recherche puis, de parcours d'étude et de recherche (PER). Qu'on attaque la question à l'aide de la TAD ou de la TSD, il s'agit toujours pour l'ingénieur didacticien de conduire le professeur à se situer plus haut dans les niveaux de détermination pour ne proposer aux élèves que l'étude de *questions mathématiquement vives*, non seulement parce qu'elles correspondent à des problèmes sociaux pouvant être mathématisés mais aussi parce qu'elles ouvrent sur des problèmes mathématiques sur lesquels les élèves peuvent, sous la direction d'un professeur, engager une enquête.

Deux questions au moins sont alors posées au didacticien : Comment déterminer de tels parcours ? et Comment y conduire les élèves ? Mais l'ingénieur a encore une autre question : Comment proposer au professeur et aux élèves des textes qui outillent leur pratique et non pas des textes définissant une utopie ? AMPERES tente, sur ces trois questions, avec l'appui de la CIREM Didactique de l'INRP et de l'UMR ADEF, une approche du type "recherche collaborative" dont les premiers résultats ont été publiés dans Petit x et seront donc étudiés dans ce séminaire.

Bibliographie succincte :

- Sensevy G., Mercier A., (Dir) (2007) *Agir Ensemble. L'action didactique conjointe des professeurs et des élèves*. Rennes : Presses Universitaires de Rennes.
- Mercier A., Les effets de l'intervention enseignante dans le milieu des situations didactiques. L'identification du milieu dans l'observation naturelle. *In* C. Margolinas (Dir.) (1994), *Les débats de didactique des mathématiques*. Grenoble, La Pensée Sauvage, pp. 157-168.
- Mercier A. La théorie des situations didactiques est-elle une théorie de la connaissance collective ? *In* F. Conne, G. Lemoyne, (Dir.) (2000), *Le cognitif en didactique des mathématiques*. Montréal : Presses Universitaires de Montréal, pp. 89-106.
- Mercier A., (2002), La transposition didactique, une théorie de l'espace didactique. Note de synthèse. *In* Vers une didactique comparée. *Revue Française de Pédagogie*, 141, pp. 135-171.
- Kryszynska M., Mercier A., Schneider M., Gestes d'instrumentation didactique de calculatrices graphiques dans l'étude de classes paramétrées de fonctions. *In* R. Floris & F. Conne (Dir.) (2006) *Environnements informatiques, enjeux pour l'enseignement des mathématiques*. Bruxelles : De Boeck, 135-160.

Programme du séminaire national de didactique des mathématiques des 18 et 19 octobre 2008

Séminaire organisé par l'Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques (ARDM)

<http://www.ardm.asso.fr/>

Les conférences se dérouleront à la Halle aux Farines sur le site PRG de l'Université Paris Diderot – Paris 7, Amphithéâtres 5C le vendredi 17, et 7C le samedi 18.

Accès et plan du bâtiment :

<http://ardm.asso.fr/rencontre/SemNat-Acces.html>

Responsables du séminaire national de didactique des mathématiques :

Lalina Coulangue

lalina.coulangue@aquitaine.iufm.fr

IUFM d'Aquitaine, 49 rue de l'École Normale - B.P. 210, 33021 Bordeaux cedex

Christophe Hache

chache@math.jussieu.fr

Université Paris 7, case courrier 7018, 75205 Paris cedex 13.

Le séminaire est organisé avec le partenariat de l'IREM de Paris 7.

Prochain séminaire :

vendredi 16 janvier (colloquium en partenariat avec la CFEM) et samedi 17 janvier

Vendredi 17 octobre 2008 – 16h-19h – Amphi 5C

16h15 à 17h30 Travaux en cours (thème « ressources »)

La documentation des professeurs de mathématiques

Ghislaine GUEUDET (CREAD, IUFM de Bretagne UBO) et Luc TROUCHE (EducTice - INRP et LEPS - Université Lyon 1)

17h45 à 19h Présentation de thèse (thème « ressources »)

Une approche anthropo-didactique du temps dans l'enseignement des mathématiques : fondements, résultats et perspectives

Marie Pierre CHOPIN (DAESL, Labo. LACES, Université V. Segalen Bordeaux 2)

Samedi 18 octobre 2008 – 9h-12h – Amphi 7C

9h15 à 10h30 Présentation de thèse (thème « ressources »)

Une étude de la genèse des pratiques de professeurs des écoles enseignant les mathématiques

Christine MANGIANTE (Université d'Artois, IUFM Nord Pas de Calais – Laboratoire de Mathématiques de Lens)

10h45 à 12h Ouverture sur... (thème « ressources »)

Le manuel scolaire : carrefour de toutes les tensions, mais aussi outil privilégié de vulgarisation des recherches en didactiques des mathématiques

Marie-lise PELTIER BARBIER (DIDIREM), Joël BRIAND (DAESL, Université Bordeaux 2)

Samedi 18 octobre 2008 – 14h-18h – Amphi 7C

14h à 15h Plage de l'ARDM

- Calendrier de renouvellement du comité et du bureau de l'ARDM

- Présentation du nouveau site web

- Positions sur la question de la maîtrise.

15h15 à 16h30 Présentation de thèse

Formation initiale des professeurs du secondaire supérieur et changements de rationalité entre l'institution secondaire et l'institution universitaire. Le cas éclairant du thème des dérivées.

Emmanuelle ROUY (Université de Liège, Belgique)

16h45 à 18h Travaux en cours

Activité mathématique de lycéens dans une correspondance à propos d'un problème ouvert

Magali HERSANT (CREN, IUFM des Pays de la Loire et Université de Nantes)

Séminaire National de Didactique des Mathématiques, 17 et 18 octobre 2008

La documentation des professeurs de mathématiques

Ghislaine GUEUDET
Luc TROUCHE
 ghislaine.gueudet@bretagne.iufm.fr luc.trouche@imp.fr

Vendredi 17 octobre 2008 – 16h15-17h30

Les professeurs ont à faire avec des ensembles de ressources : un manuel scolaire, les programmes officiels, un logiciel sont, bien entendu, des ressources pour le professeur. Celles-ci relèvent de ce que les travaux anglo-saxons nomment le *curriculum material* (Remillard 2005). Mais une copie d'élève, un conseil donné par un collègue... constituent également des ressources, au sens de ce qui *re-source* l'activité et le développement professionnel (Adler 2000). Ces ressources sont à prendre en compte dans la situation du professeur comme des éléments essentiels du milieu (Margolinas 2002).

La communication s'intéressera au *travail documentaire* des enseignants : collecter des ressources, les sélectionner, les transformer, les recomposer, les partager, les mettre en œuvre, les réviser... La *documentation*, qui désigne simultanément ce travail et son produit, se déploie dans le temps et dans l'espace, hors classe comme en classe. Elle est à la fois le *résultat* et le *moteur* des interactions du professeur avec le milieu ; elle est ainsi au cœur de son développement professionnel.

Nous proposerons une approche théorique pour l'étude de cette documentation (Gueudet et Trouche, à paraître), de ses aspects individuels et de ses aspects collectifs. Y voyant des éléments précurseurs, et accélérateurs, des changements à venir, nous examinerons particulièrement les conséquences de l'essor du numérique sur les formes du travail des enseignants (Bueno-Ravel et Gueudet 2008), sur les communautés qu'ils constituent, sur la structure et la dynamique de la documentation qui en résulte (Guin et al 2008).

Bibliographie succincte :

- Adler, J. (2000). Conceptualising resources as a theme for teacher education, *Journal of Mathematics Teacher Education* 3, 205-224.
- Bueno-Ravel, L., Gueudet, G. (2008) Online resources in mathematics: teachers' genesis of use, in Pitta-Pantazi, D. and Philippou, G. *Proceedings of the fifth congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, CERME 5, Larnaca, Chypre.
- Gueudet, G., Trouche, L. (à paraître). Vers de nouveaux systèmes documentaires des professeurs de mathématiques, in I. Bloch, F. Combe (dir.), *Actes de l'Ecole d'été de didactique des mathématiques*. La pensée sauvage.
- Guin, D., Joab, M., Trouche, L. (dir.) (2008). *Conception collaborative de ressources pour l'enseignement des mathématiques, l'expérience du SfoDEM*, INRP et IREM (Université Montpellier 2).
- Margolinas, C. (2002). Situations, milieux, connaissances. L'activité du professeur, in J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot, R. Floris (eds.) *Actes de la XI^{ème} Ecole d'été de didactique des mathématiques, Corps*, (pp.141-155). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Remillard, J. T. (2005). Examining key concepts in research on teachers' use of mathematics curricula. *Review of Educational Research*, 75(2), 211-246.

Une approche anthropo-didactique du temps dans l'enseignement des mathématiques : fondements, résultats et perspectives

Marie-Pierre CHOPIN
 marie-pierre.chopin@u-bordeaux2.fr

vendredi 17 octobre 2008 – 17h45-19h

Nous présenterons notre travail de thèse sur la question du temps didactique dans l'enseignement des mathématiques. Ce concept, largement travaillé dans le champ de la didactique depuis les travaux principes de Chevallard et Mercier (1987), a été défini ici comme un processus de création et de déplacement d'hétérogénéité didactique (Sarrazy, 2002). Il a permis d'étudier le fonctionnement temporel du processus d'enseignement et d'éclairer certaines questions vives qui lui sont attachées : le traitement des hétérogénéités, la différenciation de la pédagogie, etc.

L'étude porte sur huit classes de CM2 (N=197). Les professeurs ont dû réaliser des séquences d'enseignement sur le calcul relationnel (Vergnaud, 1990), sur des durées (temps légal) variant du simple au double. La comparaison des effets didactiques et des modes d'organisation des enseignements entre les classes permet d'établir que les contraintes agissant sur l'avancée du temps didactique sont moins liées au temps légal qu'à la nature du milieu structurant l'activité du professeur. Le concept de visibilité didactique (Chopin, 2008) a été introduit dans le but de modéliser ce milieu pour le professeur et d'expliquer, par exemple, comment les multiples injonctions à différencier la pédagogie ou à traiter l'hétérogénéité – justifiant amplement l'importance actuelle accordée à la variable temps pour la réussite de l'enseignement – peuvent paradoxalement nuire à l'avancée du temps didactique.

Bibliographie succincte :

- Chevallard, Y. & Mercier, A. (1987) *Sur la formation historique du temps didactique*. IREM d'Aix Marseille, n°8.
- Chopin, M.-P. (2008, à paraître) *La visibilité didactique : un concept pour l'étude des pratiques d'enseignement*, Éducation et Didactique.
- Sarrazy B. (2002) Les hétérogénéités dans l'enseignement des mathématiques *Educational Studies in Mathematics*, 49, 89-117.
- Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels, *Recherches en didactique des mathématiques*, 10(23), 133-170.

Séminaire National de Didactique des Mathématiques, 17 et 18 octobre 2008

Une étude de la genèse des pratiques de
professeurs des écoles enseignant les mathématiques

Christine MANGIANTE

christine.mangiante@laposte.net

samedi 18 octobre 2008 – 9h15-10h30

Grâce à une méthodologie qui emprunte à la fois à la didactique des mathématiques et à la psychologie ergonomique, nous proposons une étude de la genèse des pratiques de trois professeurs des écoles lors de leur année de formation professionnelle puis lors de leur première année d'exercice.

Le modèle d'analyse mis au point permet de décrire l'activité du maître comme un processus de modifications de la tâche prescrite. L'étude de séances menées dans le cadre d'Ateliers d'Analyse de Pratiques Professionnelles (dispositif de formation centrée sur l'analyse des pratiques effectives des professeurs novices) complétée par celle de séances menées au cours de la première année d'exercice rend compte de la trajectoire personnelle de chacun des enseignants suivis et permet d'approcher la cohérence en germe dans ses pratiques.

Cette cohérence se manifeste à travers des régularités intrapersonnelles dans la façon de modifier la tâche prescrite à différents niveaux : ceux de la représentation, de la redéfinition ou de la réalisation de la tâche. De l'élaboration du projet jusqu'à sa mise en œuvre, chaque enseignant puise des informations. La façon dont chacun des trois enseignants prend en compte et analyse les trois sources d'aides et de contraintes que sont les prescriptions institutionnelles, l'activité du maître et l'activité de l'élève caractérise les pratiques de chacun.

L'analyse de l'évolution des pratiques observées permet de mieux comprendre comment ces pratiques sont marquées par des éléments prédéterminés qui conditionnent l'activité de l'enseignant mais aussi son évolution.

Bibliographie succincte :

- Brousseau G. (1986), Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol 7-2, pp.33-115, Grenoble, La Pensée Sauvage éditions.
- Butten D. (2004), *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire. Des difficultés des élèves de milieux populaires aux stratégies de formation des professeurs des écoles*, HDR, Université de Paris 8.
- Leplat J. (1997), *Regards sur l'activité en situation de travail. Contribution à la psychologie ergonomique*, Paris, PUF.
- Robert A. et Rogalski J. (2002), Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche, *La revue canadienne des sciences, des mathématiques et des technologies*, Vol 2, n°4, pp.505-528, Toronto.

Le manuel scolaire : carrefour de toutes les tensions, mais aussi outil privilégié de
vulgarisation des recherches en didactiques des mathématiques

Marie-lise PELTIER BARBIER

mlpeltier@yahoo.fr

Joël BRIAND, DAESL

briandjoel@free.fr

samedi 18 octobre 2008 – 10h45-12h

Le manuel scolaire est une interface entre des plusieurs institutions : ministère comme donneur d'ordre de programmes, éditeurs comme vendeurs, enseignants décideurs d'achat, donc vu comme « clients » par l'éditeur et comme professionnels par les auteurs, IUFM et circonscriptions comme institutions d'analyse, et enfin parents souvent contradictoires.

En tant que tel, il est donc au carrefour d'injonctions et d'attentes souvent contradictoires. S'appliquer, en tant que didacticien, à la conception d'un tel ouvrage relève donc d'un défi. Nous relaterons dans cette intervention notre propre expérience.

Dans un premier temps nous exposerons rapidement les différentes contraintes auxquelles sont soumis les auteurs de manuels. Nous dégagerons ensuite les différences importantes qui subsistent entre les manuels scolaires de mathématiques du primaire et ceux du secondaire. Puis nous présenterons en quoi consiste, pour nous, la tâche de conception d'un manuel scolaire et du livre pour le professeur qui lui est associé, en précisant les marges de manœuvre dont nous disposons ainsi que nos propres choix. Nous illustrerons notre propos par quelques exemples.

Mais un livre ne fait pas tout : à partir d'une même page de manuel, nous présenterons trois scénarios possibles de mise en œuvre dans lesquels l'activité mathématique des élèves, la prise en compte des savoirs, le travail de l'enseignant et son rôle sont radicalement différents. Nous conclurons en justifiant pourquoi la conception et l'écriture de manuels scolaires nous semblent être un maillon déterminant dans la transposition des savoirs mathématiques à enseigner et à ce titre sont une « niche » privilégiée pour les didacticiens dans le nécessaire travail de vulgarisation des résultats de recherches en didactique des mathématiques.

Bibliographie succincte :

- Briand, J., Peltier M.L. (2000) Des écrits didactiques aux manuels scolaires : une étude de la soustraction avec les PE2 in *Les Cahiers du formateurs* tome 4, pp 9-28, COPIRELEM, IREM Paris 7.
- Briand, J., Peltier M.L. (2000) L'anère leçon du lendemain in *Les cahiers du formateur* tome 4, pp 103-113, COPIRELEM, IREM Paris 7.
- Chevallard Y. Bosch M. Gascon J. (2002) Organiser l'étude in *Actes de la XIème école d'été de didactique des mathématiques Corps*. pp 3-56. Ed. La pensée Sauvage. Grenoble.
- Hache, C. (2008), Le cas des manuels dans l'enseignement des mathématiques in Vandebrouck F. (dir) 2008 *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*, Octarès éditions. Toulouse.
- Margolinas, C. (2002). Situations, milieux, connaissances. L'activité du professeur, in J.L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot, R. Floris (eds.) *Actes de la XIème Ecole d'été de didactique des mathématiques, Corps*, pp.141-155. Ed. La Pensée Sauvage. Grenoble.
- Peltier M-L. (1998), Histoire d'un manuel scolaire, in *Grand N*, n° 62, IREM de Grenoble.

Séminaire National de Didactique des Mathématiques, 17 et 18 octobre 2008

Formation initiale des professeurs du secondaire supérieur et changements de rationalité entre l'institution secondaire et l'institution universitaire.

Le cas éclairant du thème des dérivées

Emmanuelle ROUY

erouy@ulg.ac.be

samedi 18 octobre 2008 – 15h15-16h30

Ce travail étudie les difficultés éprouvées par les étudiants en formation initiale à passer du statut d'étudiant universitaire à celui de professeur du secondaire. En analysant leurs pratiques et leurs discours à propos de l'enseignement de la dérivée et du critère de croissance, nous montrerons comment ils adoptent spontanément des pratiques d'ostension déguisée pour pallier l'absence de discours technologique, c'est-à-dire de discours rationnel et justificatif. Sur base d'une analyse spécifique du thème mathématique concerné et de ses transpositions, nous caractériserons deux niveaux de rationalité. Le premier correspond à la modélisation mathématique d'un système formé d'objets mentaux (ici, la détermination de grandeurs), et le second concerne un travail d'organisation déductive du modèle ainsi créé (ici, l'analyse réelle) et de ses propriétés. A ces deux niveaux de rationalité peuvent alors être associés des niveaux de discours qui leur sont spécifiques et qui nous serviront à analyser les pratiques et discours des élèves-professeurs.

En confrontant les élèves-professeurs à des projets d'enseignement relevant de ces différents niveaux, nous mettrons alors en évidence comment l'absence d'identification du premier niveau, comme l'impossibilité à comprendre le milieu effectivement proposé aux élèves, amène les élèves-professeurs à mettre en place un discours hybride tentant de faire cohabiter des arguments de nature visuelle sur les objets mentaux avec des énoncés directement extraits de la théorie.

Nous en dégagerons des perspectives concernant l'enseignement du thème mathématique choisi, mais aussi les enjeux de la formation initiale et de la recherche en didactique sur cette formation.

Bibliographie succincte :

- Margolinas, C. (2005) La situation du professeur et les connaissances en jeu au cours de l'activité mathématique en classe. In E. Simmt and B. Davis (Eds), *Proceedings of the 2004 Annual Meeting of the Canadian Mathematic Education Study*, AB : CMESG/CGEDM
- Salin, MH. (2002) Les pratiques ostensives dans l'enseignement des mathématiques comme objet d'analyse du travail du professeur. In O. Venturini, C. Amade-Escot, A. Terrisse (éds), *Etude des pratiques effectives : l'approche des didactiques*. Grenoble, La Pensée Sauvage
- Schneider, M. (2007) *Entre recherche et développement : quel choix de valeurs pour l'ingénierie curriculaire ?* Conférence INRP.
- Schneider, M. (2008) Entre didactique et épistémologie : une formation qui prépare les élèves-professeurs à devenir des praticiens réflexifs. Communication au colloque « *Les didactiques et leur rapport à l'enseignement et à la formation. Quels statuts épistémologiques de leurs modèles et de leurs résultats ?* ». Bordeaux, 18-20 septembre 2008.

Activité mathématique de lycéens dans une correspondance à propos d'un problème-ouvert

Magali HERSANT

magali.hersant@univ-nantes.fr

samedi 18 octobre 2008 – 16h45-18h

Les enseignants de l'Université déplorent souvent que leurs étudiants ne savent pas chercher un problème de mathématiques. Lithner (Lithner, 2008) montre que leurs raisonnements relèvent plus de l'imitation que de la création. Il explique ce phénomène par l'influence des conditions d'apprentissage des mathématiques dans la scolarité, en référence aux exercices proposés dans les manuels, au contrat didactique et au milieu (Brousseau, 1997). Lorsqu'on lève certaines contraintes de milieu et de contrat didactique que signifie « résoudre un problème » pour un élève à la charnière lycée – lycée ? quels démarches et raisonnements utilisent effectivement les élèves pour résoudre un problème ?

Dans la recherche « ECCE » en cours (recherche INRP, IREM de Nantes et IUFM des Pays de la Loire), nous avons développé un dispositif pédagogique particulier - la correspondance mathématique - qui permet d'engager les élèves dans une activité consistante, à l'abri de certaines contraintes du contexte scolaire. Je présenterai d'abord les origines et caractéristiques de ce dispositif qui consiste en un échange épistolaire entre deux pairs à propos d'un problème-ouvert (Arsac, Germain, Mante, 1988). J'analyserai ensuite quelques correspondances lycéen – étudiant pour en dégager des caractéristiques des points de vue scientifique et mathématique. Dans cette analyse, je ferai notamment référence au cadre de la problématisation (Orange, 2005) et au concept de schème (Vergnaud, 1990).

Bibliographie succincte :

- Arsac, G., Germain, G. & Mante M. (1988) *Problème ouvert et situation-problème*, Lyon, IREM de Lyon.
- Brousseau G. (1997) *La théorie des situations didactiques*, Grenoble, La pensée sauvage
- Lithner J. (2008) A research framework for creative and imitative reasoning, *Educational Studies in mathematics* 65, 255-276
- Orange C. (2005) Problème et problématisations dans l'enseignement scientifique, *ASTER* 40, 3-11.
- Vergnaud, G. (1990) La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 10/2-3, 133-170.