Enseignement des mathématiques et appui sur le réel

Paolo Boero, Alain Kuzniak, Rudolf Straesser (intervenants)
Bernard Parzysz (modérateur)

Introduction (B. Parzysz)

Ce thème recouvre en fait la question cruciale des rapports des mathématiques avec la « réalité », c'est-à-dire, en définitive, de leur « utilité ». Dans les premiers temps la question ne se posait pas, puisque les problèmes qu'on se proposait de résoudre étaient des problèmes de la « vraie vie », comme la répartition de terres, de récoltes ou de biens, ou encore la prédiction d'événements astronomiques censés influer sur le destin des individus ou des nations. Puis on a commencé à abstraire certains concepts, comme celui de « nombre » ou de « forme », à les travailler et à les enseigner, d'une part pour eux-mêmes, mais aussi pour pouvoir les utiliser à la résolution de nouveaux problèmes[1].

Mais, aujourd'hui comme hier, qui peut se vanter de pouvoir prédire à quoi pourront servir les mathématiques ? Pour introduire une note personnelle, lorsque j'étais étudiant j'avais choisi, par goût, de me spécialiser en théorie des nombres, domaine qu'on considérait alors comme le parangon des mathématiques « pures », mais au demeurant purement spéculatif et sans aucune utilité pratique. Depuis, le développement de la cryptographie, et plus particulièrement l'apparition des codes à clé publique, s'est chargé de mettre à mal cette opinion, au point que cette application sert même aujourd'hui d'illustration au chapitre d'arithmétique en spécialité de terminale scientifique, avec cette précision du document d'accompagnement : « les applications de l'arithmétique (codages, clés de contrôle…) ont remis ce domaine sous les feux de l'actualité » (p. 53).

Une autre question surgit également : du fait que la réalité est souvent trop « riche » pour être étudiée dans toute sa complexité, on est amené à « simplifier le réel » pour pouvoir l'aborder, c'est-à-dire à en négliger certains éléments, considérés comme moins importants ou peu pertinents. On élabore ainsi, de façon plus ou moins consciente, un modèle de la réalité, pour lequel il convient de se poser la question de savoir s'il rend bien compte de ce qu'on a entrepris d'étudier. Autrement dit : Jusqu'à quel point peut-on simplifier la situation initiale sans la dénaturer ? Et quelle confiance accorder au modèle ainsi élaboré ? Après tout, en astronomie, les lois de Newton ont fonctionné à la satisfaction générale jusqu'au jour où on s'est aperçu que l'orbite de Mercure n'était pas tout à fait ce qu'elle aurait dû être, les lois de la relativité générale ayant par la suite permis de rendre compte de cette « anomalie ».

Pour en venir à l'enseignement des mathématiques, le document d'accompagnement du programme de physique de Terminale S propose d'utiliser la méthode d'Euler pour étudier la chute verticale d'un solide dans un fluide. Deux modèles de frottement sont proposés, l'un « en kv » et l'autre « en kv^2 », et il s'agit de les comparer aux résultats expérimentaux. Dans ce cas, même si les résultats théoriques obtenus par la mise en œuvre de l'un de ces deux modèles (simulation) sont compatibles avec les résultats expérimentaux, on ne pourra pas pour autant assurer que le modèle en question correspond à la réalité ; on pourra seulement, plus modestement, se faire une idée de sa plus ou moins grande plausibilité.

En fait, pour l'enseignant, la démarche est souvent inverse : le modèle, objet de l'étude à entreprendre, est prédéterminé, et il s'agit pour lui d'imaginer une situation qui permettra à l'élève de le faire apparaître. Pour l'enseignant et pour l'élève, le lien entre situation et

[1] On aura bien sûr fait le lien avec la dialectique outil/objet de Régine Douady.

Ouvrier-Buffet C. & Perrin-Glorian M.J. (éd.) (2009) *Approches plurielles en didactique des mathématiques.* Laboratoire de didactique André Revuz, Université Paris Diderot. pp. 295-311.

modèle se fait donc en sens contraire, et dans les cas extrêmes on peut aboutir à un simple « habillage » plus ou moins transparent du modèle théorique, qu'on abandonnera assez rapidement pour se concentrer sur celui-ci. Néanmoins les programmes du lycée, et même ceux du collège, mettent actuellement l'accent sur la démarche de modélisation, mais ce terme est alors entendu dans une acception restreinte, à savoir retrouver, sous une situation qui est souvent déjà plus ou moins « épurée », un modèle bien identifié, dans lequel on travaillera ensuite. L'exemple des exercices basés sur des situations de la physique dans les manuels de mathématiques de Terminale scientifique à propos des équations différentielles est symptomatique à cet égard : du point de vue du physicien, les situations sont en général caricaturales, voire non viables, et surtout, une fois l'équation établie et résolue, les exercices ne proposent que très exceptionnellement un retour sur la situation d'origine, le circuit électrique ou le pendule ne servant en somme que d'alibis pour l'étude mathématique (Malonga *et al.,* 2008).

Comme le montre ce qui précède, les rapports, souvent conflictuels par essence, entre les mathématiques et la réalité posent au didacticien un certain nombre de questions importantes. Parmi celles-ci :

- Est-il possible/souhaitable/raisonnable d'établir dans l'enseignement un lien entre les mathématiques et le monde dans lesquels vivent des élèves ?
- Comment faire apparaître des mathématiques à partir de situations de la réalité qui nous entoure ?
- Étant donné la complexité du réel, est-il envisageable de le faire dès l'école primaire ?
- Le fait de s'appuyer sur l'étude de situations « réelles » est-il garant de l'implication des élèves dans les tâches mathématiques ?
- Qu'ont à nous apprendre les pratiques sociales et professionnelles des mathématiques pour leur enseignement ?
- Comment engager les professeurs dans ce type de démarche ?
- Etc.

On le voit, le sujet est vaste, et les intervenants de cette table ronde se sont efforcés d'apporter des éléments de réponse tirés de leur expérience de chercheurs à quelques-unes d'entre elles. Ainsi, Paolo Boero évoque les expérimentations à grande échelle menées depuis une vingtaine d'années par le groupe de Gênes, à l'école primaire et au collège, dans une perspective socio-constructiviste ; Alain Kuzniak, lui, appuie plus particulièrement son intervention sur le cas de la géométrie telle qu'elle est enseignée en France ; puis Rudolf Straesser propose de « déterrer » les mathématiques qui sont enfouies plus ou moins profondément dans la réalité. Enfin, quelques échos de la discussion ayant fait suite aux interventions viendront compléter ce compte rendu.

Quelques réflexions sur les rapports mathématiques - réalité dans l'enseignement-apprentissage des mathématiques entre 6 et 14 ans (P. Boero)

Introduction

Dans cette contribution je voudrais en premier lieu traiter le problème de la motivation du rapport à établir entre mathématiques et réalité dans l'enseignement des mathématiques au niveau de l'école de base (de 6 à 14-15 ans). Je voudrais montrer que cette motivation dépend des choix épistémologiques, cognitifs et même idéologiques sous-jacents à l'enseignement des mathématiques. Je voudrais ensuite présenter rapidement certains aspects des choix faits (à propos du rapport entre mathématiques et réalité à l'école) dans les Projets d'enseignement du Groupe de Gênes pour l'école primaire et l'école moyenne, et dresser un bilan des points forts et des difficultés (hélas, croissantes !) que les enseignants rencontrent quand ils veulent développer une synergie entre les progrès dans la connaissance du réel et l'apprentissage des mathématiques.

Motivation du rapport entre mathématiques et réalité

Je commencerai par ce qui pourrait motiver qu'on établisse un rapport étroit entre mathématiques et réalité dans l'enseignement-apprentissage des mathématiques entre 6 et 14-15 ans. Je pense qu'il faudrait dépasser certains lieux communs qui pèsent sur les rapports entre mathématiques et réalité à l'école, pour ce qui concerne leur justification dans l'enseignement- apprentissage des mathématiques. Ces lieux communs empêchent de voir que l'enjeu est l'orientation culturelle et cognitive de l'enseignement des mathématiques :

- *Motivation de l'élève :* la motivation de l'élève concerne la dimension affective de son engagement dans le travail scolaire ; comme telle, elle peut être manœuvrée par l'enseignant, qui peut motiver l'élève par la référence à la réalité extrascolaire. Mais (selon l'âge) on pourrait aussi enseigner les mathématiques d'une façon motivée pour l'élève à travers des jeux, ou motiver le travail mathématique par des défis intellectuels, etc.
- *Meilleur apprentissage de mathématiques utiles dans la vie*, à travers un apprentissage de leur usage en prise directe sur la réalité : cette justification semble raisonnable, mais elle ne prend pas en compte la nature des apprentissages mathématiques réalisés ; si on pense que l'objectif de l'enseignement des mathématiques dépasse l'aspect utilitaire et si on considère les mathématiques utiles dans la vie comme marginales dans le cadre des mathématiques importantes, cette motivation devient très faible.
- *Facilité d'émergence de certains concepts* (surtout géométriques) si on travaille sur des réalités bien choisies : en fait la complexité des réalités concernées rend compliqué l'effort de l'enseignant de faire « émerger » les concepts visés. Et le lien des concepts – je pense encore à la géométrie – avec leurs lieux d'émergence pourrait compromettre, dans une perspective épistémologique formaliste, la qualité de la conceptualisation et des acquis conceptuels. En effet, le poids de la réalité sensible pourrait rendre difficile le jeu des généralisations, des changements d'axiomes, etc., qui sont des aspects importants si on se situe dans cette perspective.

Bien que très synthétique, cette analyse critique des motivations courantes peut suggérer que les raisons de fond pour établir un rapport étroit (ou non) entre mathématiques et réalité dans l'enseignement-apprentissage des mathématiques sont plutôt liées à des positions épistémologiques et cognitives (dans beaucoup de cas implicites et inconscientes chez les enseignants), et souvent aussi idéologiques et politiques (comme on le verra à la fin de cette contribution). Elles ont donc peu à voir avec l'efficacité didactique dans l'absolu et l'utilité objective, mais relèvent des choix culturels des *individus* et des grandes orientations culturelles et politiques des *sociétés*… ainsi que des relations très complexes et même contradictoires entre eux.

Approches diverses du rapport entre mathématiques et réalité à l'école

Les approches idéaliste, structuraliste et formaliste

Mathématiques et réalité(s) sont des mondes très difficiles à relier par une synergie suffisamment riche dans l'enseignement-apprentissage des mathématiques, si les mathématiques sont conçues comme des systèmes d'objets (« idées » ou « structures » ou « entités caractérisées par des axiomes ») abstraits organisés en forme de théories, et si la réalité est conçue comme un ensemble d'objets concrets et de relations contraignantes objectives entre ces objets. En effet, la distance posée d'emblée entre les deux domaines empêche de concevoir une synergie entre le développement du savoir mathématique et son usage (ou son émergence) dans le traitement de questions réelles. Dans ce cadre, le rapport optimal se réalise quand la réalité fonctionne comme illustration, ou bien comme situation d'application, des idées mathématiques, et éventuellement quand les idées mathématiques sont vues comme idées émergentes de l'observation de la réalité (comme dans les positions traditionnelles de l'idéalisme, toujours présentes dans l'école !). Je voudrais ajouter que dans ce cadre on tend fortement à sélectionner (ou même à fabriquer dans l'école) une « réalité » la plus proche possible des idées que l'on veut illustrer ou faire émerger, sans souci de son importance culturelle ou sociale.

Une vision idéale des mathématiques comme prototype d'une culture universelle (à travers les peuples et les domaines scientifiques) accompagne souvent ces positions épistémologiques, surtout dans l'interprétation "structuraliste" (années 1940-1960), et trouve une correspondance dans certaines théories psychologiques, celle de Piaget en premier lieu, quand elles établissent un lien entre structures universelles de la pensée et structures mathématiques dans une perspective évolutive (individuelle ou même historique).

L'approche constructiviste

Le rapport mathématiques-réalité devient plus étroit (du point de vue épistémologique) et facile à gérer (du point de vue didactique) si les mathématiques sont conçues comme "rapport personnel constructif à des objets culturels et à des théories", et si la réalité est conçue comme "rapport personnel à un environnement - source de stimulations, contraintes, etc." (dans une perspective où l'individu, ou le groupe, devient le centre du monde social et culturel). Mais rendre centrale cette subjectivité sous-entend compter sur beaucoup de travail de négociation pour arriver à des sens partagés, à des règles de raisonnement partagées, et pour établir un lien avec l'héritage culturel (surtout si les cultures d'origine sont différentes, et si l'hypothèse d'universalité des structures a une portée plus limitée que prévu par les théories psychologiques d'appui !). On comprend alors pourquoi, par cette voie, on n'arrive qu'avec difficulté au sens de la démonstration mathématique (comme pilier du système des théories mathématiques), au langage algébrique (comme outil sophistiqué et universel de représentation et de traitement de problèmes mathématiques dans des domaines très différents), etc.

Les "math wars" (« guerres mathématiques ») en cours depuis une quinzaine d'années aux États-Unis sont au moins en partie une conséquence de l'extension de l'approche « constructiviste ». Elle se reflète dans certains textes de didacticiens américains et dans certains projets d'enseignement largement adoptés dans ce pays. En effet les soucis de certains mathématiciens à propos de la baisse d'engagement et de résultats sur la démonstration et sur la maîtrise du langage algébrique dans l'école sont rattrapés par des soucis d'ordre idéologique et même politique, à propos du danger de laisser les individus ou les groupes libres de concevoir une réalité et une culture selon leurs besoins.

L'approche socio-culturelle

La perspective des rapports mathématiques-réalité à l'école change encore si on voit les mathématiques comme un système culturel où le *sens* des objets culturels dérive en premier lieu des *activités* qui les concernent (les définitions et les systèmes de théorèmes venant après), et la *réalité* est en premier lieu un *domaine d'activités*.

Dans cette vision (qui fait référence aux théories de la culture de dérivation vygotskienne - voir la définition de la culture de Hatano & Wertsch, 2001) les mathématiques ne sont pas réduites à un ensemble de théories axiomatisées (comme dans l'approche formaliste) et ne sont pas non plus des constructions plus ou moins arbitrairement négociables, mais comprennent des outils instrumentalisés (Rabardel, 1995) qui prennent du sens à travers des activités. Donc les activités (qu'elles soient internes aux mathématiques ou en relation avec d'autres domaines culturels) deviennent des éléments constitutifs cruciaux des mathématiques. Ajoutons que l'activité est socio-culturellement située, et c'est ce qui réduit l'arbitraire des constructions.

Dans cette perspective, le lien entre mathématiques et réalité s'établit au niveau des activités mathématiques qui concernent la réalité et les processus mentaux en jeu dans ces activités, comme par exemple l'instrumentalisation des outils théoriques et pratiques dans la modélisation du réel. Les aspects sémiotiques jouent alors un rôle pivot entre mathématiques et réalité : des signes qui dérivent d'activités internes aux mathématiques peuvent fonctionner comme modèles pour la description, l'interprétation et la prévision qui concernent des situations et des phénomènes de la réalité. Réciproquement, certaines formes ou relations qui organisent la connaissance de la réalité peuvent être assumées comme signes et relations de référence pour des constructions mathématiques.

Dans l'approche socio-culturelle, les difficultés théoriques (et pratiques aussi, si on considère certaines applications de la théorie de l'activité de Leontiev dans l'école soviétique) de l'enseignement-apprentissage des mathématiques proviennent de la mise à l'écart de la subjectivité (la finalité de l'école étant, dans cette vision, l'appropriation par les élèves des outils et des cadres culturels élaborés par l'humanité); et de la nécessité d'enseigner à développer des solutions nouvelles pour des questions nouvelles (elles proviennent donc de la réalité des sociétés complexes en évolution rapide d'aujourd'hui). En particulier, au niveau de l'école de base, les difficultés proviennent du rapport problématique entre expériences et pratiques personnelles des élèves, d'une part, et, d'autre part, pratiques « officielles » enseignées (ce sujet est marginal dans la théorie de l'activité de Leontiev, bien que central dans l'élaboration de Vygotsky (1985) : dialectique entre concepts communs et concepts scientifiques), et de la difficulté du rôle de médiation de l'enseignant entre les deux. La prise en charge de ces difficultés constitue un défi pour toutes les ingénieries didactiques qui cherchent à implémenter dans l'école l'approche socio-culturelle.

L'expérience du groupe de Gênes

Notre expérience a démarré vers la fin des années 1970 comme une expérience de construction et d'expérimentation large (ciblant surtout dans les milieux défavorisés) de deux projets d'enseignement des mathématiques, pour l'école primaire (6-11 ans) et pour l'école moyenne (11-14 ans). Les choix initiaux étaient inspirés par une vision anti-« mathématiques modernes », anti-formaliste et anti-structuraliste, mais également éloignée d'une vision constructiviste de l'enseignement/apprentissage des maths. Notre vision était proche de l'approche socio-culturelle, sans toutefois développer à ce moment d'une façon cohérente et approfondie certains présupposés de cette approche. Les élèves étaient censés apprendre des mathématiques par des activités de modélisation et de résolution de problèmes liées à des thèmes importants dans leur expérience extrascolaire (d'où leur motivation), ainsi que dans la culture extrascolaire. Le choix de thèmes concernant la connaissance du réel répondait à deux critères : efficacité dans la construction des concepts et des compétences des disciplines plus importantes visées; et importance pour l'émancipation culturelle des enfants. Dans le projet relatif à l'école primaire, qui couvrait toutes les disciplines principales tout au long du primaire, les thèmes étaient regroupés de façon assez large : économie, nature, technologie, histoire. Dans le projet pour l'école moyenne, qui couvrait les mathématiques et les sciences, les titres des domaines d'activités étaient: « L'homme et la nature » (11-12 ans), « L'homme et la société » (12-13 ans), « L'homme et la culture » (13-14 ans).

Les expérimentations dans les classes (plus de 250 classes d'école primaire et de 40 classes d'école moyenne étaient concernées au milieu des années 80) ont fait apparaître que: la motivation des élèves ne dépend pas seulement des thèmes choisis par l'enseignant pour le travail dans la classe. En effet, certains acquis mathématiques nécessaires pour la suite des études et pour le traitement de certains problèmes « réels » ne sont pas aisément accessibles à travers le seul travail dans des contextes « réels »; et d'autre part le poids de la culture d'origine des élèves (moyens langagiers, mais aussi conceptions à propos des thèmes « réels » travaillés dans la classe) se révèle très important pour le traitement mathématique de ces thèmes.

Dans notre travail d'équipe, à partir du milieu des années 80 nous avons essayé de répondre à ces difficultés et aux questions posées par les rapports entre mathématiques et réalité pour l'enseignement-apprentissage des mathématiques de base dans une perspective vygotskienne, en introduisant la notion de "domaine d'expérience". Il s'agit d'un domaine de la culture humaine que l'on développe dans la classe *(en résonance avec l'expérience des élèves et en dialogue avec la tradition culturelle portée par l'enseignant).* La médiation de l'enseignant s'appuie sur les signes, les objets et les contraintes du domaine culturel visé pour guider l'évolution des pratiques et des conceptions des élèves à propos de ce domaine selon sa culture et ses intentions. Les domaines d'expérience concernent, au début de l'école primaire, la réalité extrascolaire accessible à tous les élèves (comme par exemple la monnaie et les achats à 6 ans, ou la croissance des plantes à 7 ans). Dans les classes successives, certains domaines des mathématiques (comme l'arithmétique) deviennent aussi des domaines d'expérience pour les élèves, qui ont désormais un répertoire assez vaste de faits et de comportements mathématiques pour pouvoir développer leurs « concepts communs » mathématiques en interaction avec les « concepts scientifiques » portés par l'enseignant.

La subjectivité des élèves est assurée par la place que leurs expériences ont dans le travail en classe, vis-à-vis de la médiation de l'enseignant (témoin de la culture officielle). L'entraînement à la résolution de problèmes nouveaux à l'aide d'outils nouveaux se fait à la charnière entre certaines questions que l'enseignant pose (ou que les élèves se posent) dans le domaine d'expérience, et les outils que l'enseignant offre pour les résoudre, quand les élèves ont mis en évidence ce qui manque dans leur répertoire d'outils (voir Douek, 2003, comme élaboration récente et assez complète sur les domaines d'expérience et sur la didactique des domaines d'expérience ; voir aussi Douek, 1999, Bartolini, Boni, Ferri & Garuti, 1999 et Boero & Douek, 2008 pour des exemples et des développements ultérieurs sur la didactique des domaines d'expérience, ainsi que Dapueto & Parenti, 1999 pour un cadre théorique général)[2].

Bilan de 25 ans de travail sur le champ

Je travaille avec les enseignants selon la perspective décrite dans la partie précédente depuis environ 30 ans, avec une réflexion collective qui a sans cesse essayé de mettre en évidence les difficultés rencontrées et d'élaborer des solutions pour y faire face. Au cours de ces années, les outils pour encadrer et évaluer l'expérimentation des deux projets dans les classes sont devenus mieux adaptés (tant pour le progrès de la recherche en didactique des mathématiques au niveau international que pour l'amélioration progressive de notre préparation). Je pense donc être en mesure de dresser un bilan des points forts et des points faibles d'un

[2] Je signale au passage que les articles de Douek (1999) et Dapueto & Parenti (1999), publiés en anglais dans *Educational Studies in Mathematics,* sont présentés en français dans Du monde réel au monde mathématique (Kuzniak, Parzysz & Vivier, 2008).

enseignement-apprentissage des mathématiques conçu dans la perspective de la didactique des domaines d'expérience.

Points forts de notre approche

Les points forts de cette approche concernent surtout :

– Le passage entre domaines d'expérience de la réalité quotidienne et domaines d'expérience des mathématiques, et les rapports de synergie qui se développent entre les deux (monnaie et achats, calendrier ↔ arithmétique ; ombres du soleil ↔ géométrie ; argumentation déductive ↔ démonstration mathématique ; voir Boero, 1994)

– Le rôle subjectif et constructif de l'élève est important dans la classe : ses « concepts communs » sont sollicités (ses « concepts communs » et ses productions affectent le travail en classe). Cette subjectivité a pour pendant une forte guidance culturelle de l'enseignant, qui apporte dans la classe les « concepts scientifiques ». Il faudrait préciser à ce propos que « concepts communs » et « concepts scientifiques » ne sont pas des objets culturels divers, mais des états en évolution dans le processus de conceptualisation (voir Douek, 2003 ; Boero & Douek 2008). Par exemple, dans le cas de la monnaie et des achats l'élève apporte dans le travail en classe ses expériences partielles, ses stratégies (parfois inconscientes), ses représentations mentales (parfois contradictoires) : à six ans il sait déjà qu'une certaine quantité de pièces de monnaie et de billets est nécessaire pour l'achat d'une marchandise, et il sait que les différents pièces de monnaie et les différents billets ont des valeurs d'achat différentes. Souvent, il a déjà l'idée que la valeur d'achat d'une pièce de monnaie est fixe et ne dépend pas de la volonté ou du choix du client ou du marchand. Mais le fait que les rapports de valeur entre les différents billets et pièces sont, eux aussi, fixes, lui échappe souvent ; comme d'ailleurs le fait que certaines caractéristiques extérieures des monnaies (comme la dimension ou la couleur) n'ont pas un rapport étroit avec la valeur. La tâche de l'enseignant est alors celle de permettre graduellement à l'enfant de saisir les règles de fonctionnement du système monétaire et de modéliser ce système avec les outils et le symbolisme de l'arithmétique. Du point de vue conceptuel, le fait qu'une pièce de monnaie de 2 € vaut 20 pièces de 10 centimes ou 10 pièces de 20 centimes est déjà inscrit dans la pratique courante des achats et dans le niveau de maîtrise commune des concepts arithmétiques en jeu dans les achats; à 7 ans tous les enfants peuvent arriver par expérience directe à ce niveau de maîtrise (comme en témoignent les études sur les enfants des rues au Brésil). Ce qu'apporte l'enseignant est le caractère scientifique du système arithmétique qui permet d'écrire $2 = 20\times0{,}10 = 10\times0{,}20$ et de rendre explicites, générales et transférables (à travers les signes de l'arithmétique) les règles de fonctionnement du système monétaire.

Dans d'autres domaines d'expérience les choses sont beaucoup plus complexes : comme Boero et al (1995) l'ont mis en évidence, dans le cas du domaine d'expérience des ombres au soleil la conceptualisation commune de la relation entre la position du soleil dans le ciel et la longueur de l'ombre (sur le sol ou sur d'autres surfaces) est affectée par plusieurs facteurs qui dérivent des perceptions et des conceptions spontanées (ou sont suggérées par la culture de l'environnement). Par exemple, certains enfants considèrent l'ombre d'une personne comme une sorte de « double » d'elle-même, et beaucoup d'enfants (et d'adultes aussi !) pensent l'ombre comme une sorte de tapis qui nous accompagne quand on est au soleil. Dans ces conceptualisations communes on trouve beaucoup de bonnes relations, parfois conscientes : l'ombre dépend de la hauteur et de la largeur de l'objet (dans le sens où un objet plus haut ou plus large qu'un autre produit une ombre plus longue ou plus large que l'autre). La transition à une modélisation géométrique cohérente et systématique nécessite l'introduction de signes géométriques (segments), de la mesure des longueurs et des propriétés du parallélisme. Dans ce cas, le passage au niveau des concepts scientifiques comporte la valorisation et l'évolution de certaines connaissances spontanées et l'abandon, ou le dépassement, de certaines autres.

Mais alors (et ceci caractérise le niveau scientifique de la maîtrise des concepts) la cohérence du système de connaissances est nécessaire : une fois intériorisé le « signe géométrique de l'ombre » (le segment qui lie le soleil, le sommet de l'objet et l'extrémité libre de son ombre) et admis (par l'observation directe) le parallélisme des rayons du soleil, la cohérence impose que la longueur de l'ombre dépende de l'inclinaison de la surface sur laquelle l'ombre est portée.

Points faibles et difficultés

Ils concernent :

– la préparation culturelle et professionnelle nécessaire à l'enseignant pour bien jouer son rôle. « Préparation culturelle » signifie avant tout le dépassement d'une conception (assez répandue, même si elle est en général plus ou moins inconsciente) des mathématiques comme système d'objets et de relations dérivant d'un processus d'abstraction et d'axiomatisation. Il faut favoriser une conception des mathématiques comme culture enracinée dans la culture humaine, où les objets culturels ont du sens (en premier lieu) en fonction des activités qui les concernent. « Préparation professionnelle » signifie que l'enseignant doit être conscient que son rôle crucial est un rôle de médiation culturelle à partir des productions des élèves dans des situations choisies d'une façon convenable, et qu'il doit être capable de gérer ce rôle vis-à-vis de la variété des niveaux de préparation et des réponses des élèves ;

– les conflits multiples avec les traditions pédagogiques dans l'école et les attentes des parents d'élèves. Les occasions de conflit sont très nombreuses : du choix des manuels (les manuels les mieux adaptés à la didactique des domaines d'expérience sont souvent très peu populaires chez les enseignants !) au fait que les parents ne reconnaissent pas (sauf à la fin d'un long travail !) le contenu mathématique de certaines activités menées en classe, et surtout s'inquiètent de la distance entre leur propre expérience scolaire et l'expérience vécue par leurs enfants ;

– mais surtout, les ruptures que les média, l'école en général, les façons de vivre (surtout en milieu urbain) créent entre le présent et le passé, entre la vie et ses représentations homologuées, entre le sujet consommateur et le sujet producteur (dans tous les domaines !). Considérons la situation de deux pays comme la France et l'Italie. En particulier,

- En considérant la situation française, je pense que plus le système scolaire est rigide et fermé sur ses propres représentations de la vie, du monde et de la culture, plus il est difficile de développer dans l'école un dialogue entre l'expérience des élèves et les objectifs culturels, surtout ceux qui dépassent la culture de l'école. Par exemple, dans le cas de la modélisation mathématique du réel (physique ou économique) on peut dire qu'en France la culture de l'école ne donne pas d'espace à de véritables processus de modélisation (les « applications des mathématiques » étant autre chose – comme adaptation d'outils mathématiques à des situations stéréotypées et déjà largement mathématisées).
- En considérant la situation italienne, je pense que plus l'éducation perd sa mission de préparer le futur en réfléchissant sur le passé et se cantonne à l'entraînement à la consommation du présent, moins il est possible de demander aux enseignants et aux élèves de payer le prix nécessaire pour connecter l'expérience et la culture, c'est-à-dire l'étude et l'effort. Il devient difficile d'aller plus loin dans les domaines disciplinaires étudiés et de les questionner dans leur rapport avec le réel. En effet, surtout au niveau 11-16 ans (« école moyenne » et début de l'« école secondaire supérieure » en Italie) les enseignants rencontrent des difficultés croissantes quand ils cherchent à mettre en jeu des connaissances mathématiques pour traiter des questions « réelles » et à montrer la nécessité de développer ces connaissances, ou quand ils cherchent à donner une image évolutive des mathématiques, en relation avec les problèmes qu'elles ont aidé à résoudre.

Mathématiques enseignées et appui sur le réel : une articulation problématique (A. Kuzniak)

À l'occasion de cette table ronde, j'apporterai un éclairage nécessairement partiel mais aussi partial sur la question des relations entre mathématique et réalité. Mon interrogation s'est appuyée sur l'impression que la communauté française, qu'elle soit mathématique ou didactique, minorait le lien entre mathématiques et réalité, quand elle ne l'ignorait pas. Et, dans le même temps, l'idée de fonder l'enseignement des mathématiques sur une relation plus étroite avec le monde réel acquérait une importance et une visibilité de plus en plus grande à l'étranger. J'ai donc conçu cette contribution en partant de ce primat et en essayant de l'analyser à la lumière de certaines approches didactiques utilisées par l'équipe DIDIREM.

Enseignement des mathématiques et monde réel : un lien conflictuel et non évident

Dans la communauté internationale semble exister une convergence des programmes d'enseignement pour promouvoir une liaison étroite entre mathématiques et réalité, justifiée par le fait que les mathématiques doivent être utiles pour le citoyen. Ce glissement vers l'utilité, en soi problématique, pose la question de la nature exacte de l'utilité qui est visée. Des précisions sur ce sujet ont été apportées par l'OCDE, qui pilote l'étude PISA et pour qui :

> La culture mathématique est l'aptitude d'un individu à identifier et à comprendre le rôle joué par les mathématiques dans le monde, à porter des jugements fondés à leur propos, et à s'engager dans des activités mathématiques, en fonction des exigences de sa vie en tant que citoyen constructif, impliqué et réfléchi (OCDE, 2003, p. 32).

Cette vision des mathématiques orientées par l'activité citoyenne conduit à des interrogations et à une remise en question des mathématiques et de leur enseignement. C'est ainsi que, parallèlement à l'action de l'OCDE et à la même époque, Claude Thélot, haut fonctionnaire chargé d'organiser le débat national sur l'avenir de l'école, a apostrophé les représentants de l'APMEP en leur demandant de justifier l'utilité de leur discipline. Ce représentant officiel de la société leur a affirmé que « l'utilité des mathématiques pour la formation du futur citoyen n'allait pas de soi et que la démonstration [de cette utilité] restait à faire ». Et pour lui, la profession devait s'interroger sur la façon de « donner du sens aux apprentissages mathématiques ».

Pour tenter de donner ce sens et s'accorder à l'attente sociale ainsi exprimée, s'impose de plus en plus l'idée que l'enseignement des mathématiques doit être basé sur des situations issues du monde réel, ce qui permet ensuite d'appliquer plus facilement les mathématiques dans ce monde réel. Cette idée rejoint l'approche pédagogique dite bottom up qui souhaite faire construire les concepts par les élèves ; elle s'oppose à l'approche top down qui transmet a priori des notions abstraites aux élèves. Dans un cas, les connaissances et le savoir émergent et se développent par un travail constructif de l'élève tandis que dans le second, il s'agit davantage d'un travail d'appropriation. Je renvoie à notre travail récent (Kuzniak, Parzysz & Vivier, 2008) pour des illustrations sur cette question.

Des mathématiques transparentes

Si l'on veut réellement baser l'enseignement des mathématiques sur le monde réel, la recherche de situations d'enseignement initiales susceptibles d'avoir ensuite un impact social devient alors cruciale. Elle peut notamment passer par l'étude de la place des mathématiques dans le monde du travail ou alors dans les autres disciplines. De nombreuses études ont envisagé ce lien et je me bornerai simplement à signaler ici quelques travaux récents entrepris par des étudiants de notre équipe et qui illustrent, sur des points précis, la difficulté de trouver ces mathématiques encapsulées dans la réalité. Dans son travail sur la symétrie, Bulf (2008) s'est entretenue avec des tailleurs de pierre et des ébénistes. Elle montre que ces artisans utilisent de nombreuses routines pour réaliser leur travail et que, si les connaissances mathématiques sont porteuses d'autorité, elles apparaissent singulièrement vides de sens pour ces utilisateurs. C'est lorsqu'ils sont confrontés à une tâche non routinière, comme la division d'un angle ou la construction de figures non symétriques, que les mathématiques pourraient leur être utiles pour résoudre la question. Mais ils recourent alors à des procédures d'adaptation et d'approximation (même fausses) pour accomplir leur tâche. Ces résultats rejoignent ceux de Romo (thèse en cours, voir aussi Romo & Tabiou dans ce volume) qui a étudié les mathématiques dans la formation d'ingénieurs et ceux de Malonga (Malonga, 2008) qui a interrogé le lien entre mathématiques et physique dans le cas de l'enseignement des équations différentielles.

Les mathématiques que l'on rencontre dans le monde réel apparaissent « concrétisées », au sens de Simondon (1969), et amalgamées à l'objet qu'elles ont servi à créer. Les mathématiques sont ainsi totalement naturalisées et de fait transparentes.

Une entrée didactique à double tranchant : la notion d'obstacle

La réserve française par rapport aux approches de l'enseignement de type « bottom up » est souvent attribuée par nos collègues étrangers, à la forte influence de Bourbaki dans le monde des mathématiciens. Il est aussi possible de l'analyser en utilisant la notion d'obstacle épistémologique introduite par Bachelard (1938) qui énonce une opposition irréductible entre l'esprit scientifique et le réel, qualifié de nature. L'esprit scientifique se constitue contre l'opinion qui épouse les besoins du quotidien et sur ce point les affirmations de Bachelard sont nettes et percutantes.

> C'est en termes d'obstacles qu'il faut poser le problème de la connaissance scientifique. Le réel n'est jamais « ce qu'on pourrait croire » mais il est toujours ce qu'on aurait pu penser. L'opinion pense mal ; elle ne pense pas : elle traduit des besoins en connaissances. En désignant des objets par leur utilité, elle s'interdit de les connaître. (Bachelard, 1938, p. 16)

Deux relations antagonistes au savoir voient ainsi le jour : connaissant contre la connaissance naturelle, la science ne semble pas pouvoir se baser sur cette connaissance qu'elle doit combattre. Cette opposition a conduit à deux types de présentation de la connaissance que Bachelard décrit à partir de la différence de fond entre les livres scientifiques du XVIIIe siècle et les livres modernes. Dans un livre d'enseignement scientifique moderne, c'est le livre qui commande alors que les livres anciens sont enracinés dans la vie quotidienne et les soucis naturels et communs commandent. Bachelard insiste notamment sur le parasitage qu'entraîne cette inscription dans la réalité mais on peut a contrario lui opposer une démarche comme celle d'Euler, dans ses lettres à une princesse allemande, et qui vise à ne pas couper la science du monde social qui la nourrit.

On doit à Brousseau (1986) l'importation de la notion d'obstacle épistémologique en didactique des mathématiques. Le regard sur la place et le rôle des obstacles épistémologiques change : il ne s'agit plus de les éviter mais au contraire de concevoir et de promouvoir un enseignement qui s'appuie sur ces obstacles pour les dépasser. Cette approche suppose la construction de situations didactiques spécifiques nouvelles dont la conception nécessite une étude fine de l'épistémologie des notions en jeu. Et de fait, dans l'idée de Brousseau, ce dépassement d'un obstacle « met en œuvre une complète restructuration des modèles d'action, de formulation et de validation » qui débouche sur la notion de situation adidactique. Ce type de situation d'enseignement va encore plus loin dans la déstabilisation des routines et des pratiques enseignantes et ceci, d'autant plus, que ces situations doivent être le moins dépendantes possible de l'enseignant et aussi de l'élève. Pour cela, il faut viser la création d'un environnement résistant et inducteur de savoir par sa seule interaction avec l'élève. C'est cet environnement que Brousseau appelle le « milieu ». Rarement disponible tel quel dans le monde réel, il faut donc le penser puis le réaliser en s'appuyant parfois sur un milieu matériel mais aussi sur des modèles déjà-là ou sur des jeux. Cette idée rejoint celle de « modèle étendu » introduite par les chercheurs hollandais de l'Institut Freudenthal, à peu près à la même époque (Voir Kuzniak, Parzysz et Vivier, 2008). Dans leur conception de l'apprentissage basé sur une approche dite « réalistique » de l'enseignement, des supports très variés peuvent servir de modèle : matériel, dessins, situations exemplaires, schémas, diagrammes et même symboles. Pour être adaptés à des situations d'apprentissage, les modèles supports doivent remplir deux conditions : ils doivent prendre naissance dans des contextes « réalistes » ou imaginables par les élèves et ils doivent aussi être suffisamment flexibles pour être adaptés à une progression vers des concepts plus abstraits. Dans le courant le plus constructiviste, ces modèles doivent aussi être susceptibles d'être réinventés par les élèves.

Du côté des professeurs : un obstacle de type didactique ?

En France, les situations précédentes ont cristallisé de nombreuses résistances voire un rejet net de la part de nombreux enseignants. Un certain nombre de raisons techniques, socio-économiques ou institutionnelles sont souvent avancées pour justifier ce renoncement mais je voudrais ici m'attarder sur les raisons qui me semblent à la fois être expliquées et éventuellement surmontables dans le cadre de la didactique des mathématiques. En effet, ce type d'approches suppose simultanément un changement de regard sur l'objet enseigné et un changement de la façon d'enseigner avec une remise en cause du rôle traditionnel du professeur. Ainsi se crée ce que l'on peut qualifier d'obstacle didactique.

Fondamentalement, la question est de savoir comment engager les professeurs dans un processus didactique nouveau quand leur épistémologie spontanée est en contradiction avec l'épistémologie à l'œuvre dans l'approche didactique qui leur est proposée. L'idée que j'avance, est que la conception spontanée des mathématiques des professeurs de mathématiques les pousse à défendre un modèle d'enseignement de type « top down ». De plus, ce modèle est conforme à celui qu'ils ont suivi en tant qu'étudiant en mathématiques *avancées* dans l'enseignement supérieur. Adopter le modèle « bottom up » qui s'appuie sur le réel, nécessite un changement de vision sur les mathématiques qui doivent être, sous un certain aspect, considérées comme une science empirique et aussi comme une discipline de service retrouvant ainsi le statut, maintenant oublié, des mathématiques mixtes.

La voie des paradigmes

Si l'on garde en perspective, l'idée de bâtir un enseignement des mathématiques davantage articulé sur la réalité, il devient alors nécessaire de surmonter l'obstacle didactique précédent en l'affrontant et sans le contourner. L'hypothèse que nous faisons, est que la sensibilisation aux enjeux épistémologiques peut permettre d'éviter certains malentendus et clarifier les choix didactiques. Pour cela, avec Houdement (Houdement & Kuzniak, 2000), nous avons introduit, dans le champ de la didactique de la géométrie, la notion de paradigme mais avec le sens bien précis que lui attribue Kuhn (1962). On sait, en effet, la grande polysémie et les emplois variés de ce terme dans les domaines les plus divers. Dans un sens global, le mot de paradigme désigne alors :

> L'ensemble des croyances, des techniques et des valeurs que partage un groupe scientifique. Il fixe la manière correcte de poser et d'entreprendre la résolution d'un problème. Dans ce sens, Kuhn parle aussi de matrice disciplinaire qui permet de regrouper les théories et plus

> généralement les connaissances d'un groupe qui travaille sur le même sujet. (Houdement et Kuzniak, 2006, p. 178)

Dans le cas de la géométrie élémentaire, les différents paradigmes géométriques peuvent se distinguer par une organisation de la géométrie dépendant de sa relation à la réalité et de son horizon de travail. Reprenons ici, sans les détailler mais en insistant sur le lien avec le monde réel, les différents paradigmes géométriques que nous avons retenus dans le cadre de l'enseignement. Il s'agit de :

- La Géométrie I ou une géométrie des objets réels et fondée sur l'approximation.
- La Géométrie II ou une géométrie vue comme schéma de la réalité avec un système de preuve interne au modèle et une visée axiomatique.
- La Géométrie III ou une géométrie indépendante du monde réel avec une prééminence du modèle source et créateur de la réalité[3].

Du fait de leurs études initiales et de leur pratique des mathématiques à l'Université, les enseignants de mathématiques sont logiquement conduits à privilégier et à favoriser les paradigmes II ou III (et à vrai dire plutôt le niveau III) qui tous deux conçoivent la réalité comme subordonnée à la théorie. Les concepts de la géométrie III ne sont pas empiriques et l'organisation axiomatique de cette géométrie appelle « naturellement » un enseignement de type magistral où les notions se déduisent clairement de quelques principes initiaux. Nous retrouvons ici *l'illusion de transparence* qui laisse penser qu'une présentation claire et logique des faits suffit à convaincre.

Dépasser l'obstacle didactique par un point de vue éclairé sur les mathématiques élémentaires

Les différents niveaux de paradigmes peuvent se retrouver dans d'autres domaines des mathématiques comme celui des probabilités comme l'a montré Henry (1999), mais aussi dans le domaine numérique (Souchard, 2008) ou celui de l'analyse. Dans le cadre de la formation des enseignants, nous avons conçu avec Rauscher (Kuzniak & Rauscher, 2003 et 2004) des ingénieries de formation d'enseignants basées sur la notion de paradigme, avec l'idée que les diverses approches paradigmatiques ne sont pas hiérarchisées : chacune d'elles apporte un éclairage nouveau et permet de résoudre des problèmes de nature différente avec des méthodes adéquates. Il y a là une différence radicale avec la notion développée par Kuhn dans le cadre des révolutions scientifiques où un nouveau paradigme éliminait l'ancien. Il faut également ajouter que l'entrée dans certains paradigmes est plus facile que d'autres ce qui peut justifier les approches s'appuyant sur le monde réel. Cette entrée peut aussi nécessiter la connaissance préalable des autres paradigmes, cette considération explique, en partie, l'échec d'une entrée rapide dans la Géométrie III prônée à l'époque des mathématiques modernes.

En optant pour la prise de conscience de l'existence des paradigmes dans la formation des enseignants, nous choisissons une stratégie de dévoilement des enjeux épistémologiques destinée à lever des malentendus didactiques. Les études menées par notre équipe montrent la complexité du phénomène et la grande diversité des sensibilités des enseignants sur ce type d'enjeux.

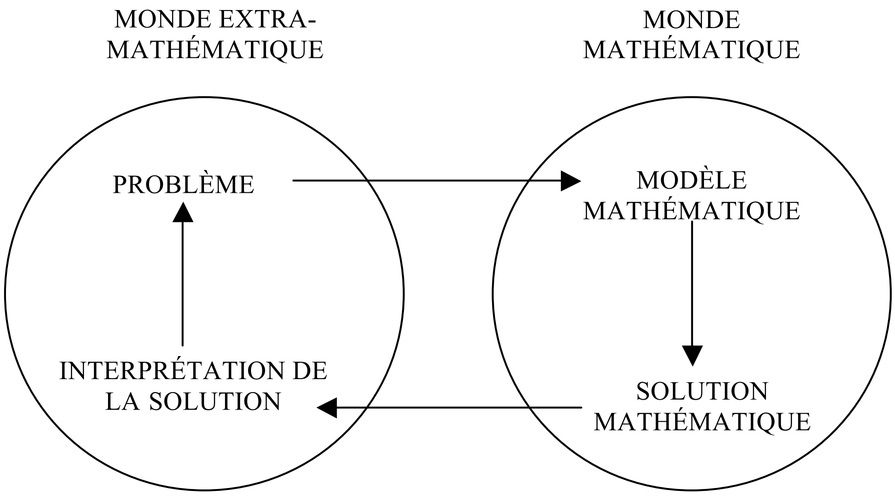
Pour convaincre les professeurs de mathématiques d'envisager d'autres formes d'enseignement qui s'intègrent davantage dans le champ social et qui privilégient des contenus plus empiriques, il est nécessaire d'étayer le paradigme délaissé par la tradition mathématique surtout lorsque le nouveau modèle privilégié par l'institution éducative s'éloigne des modèles classiques comme c'est le cas aujourd'hui avec l'accent mis sur un enseignement des mathématiques basé sur la réalité pour comprendre cette réalité. Dans le cas

[3] Il arrive que parfois cette réalité créée retrouve la réalité sensible.

de la géométrie, il faut développer des contenus mathématiques qui enrichissent la Géométrie I pour qu'elle n'apparaisse pas comme une géométrie au rabais. Il est notamment possible de développer la notion d'approximation (Houdement & Kuzniak 2002) ou un usage plus subtil des logiciels de géométrie dynamique (Dahan 2005). Il s'agit en quelque sorte de retrouver l'esprit de Klein (1903) lorsqu'il se penchait sur les mathématiques élémentaires avec un point de vue avancé. Cette approche se doit aussi d'intégrer toutes les connaissances didactiques modernes sur la manière d'apprendre des élèves et la façon d'enseigner des professeurs pour éviter l'illusion de transparence que j'évoquais plus haut et que toute la vie sociale et politique invalide constamment.

« Déterrer » les mathématiques de la réalité (R. Straesser)

Dans la recherche internationale sur l'usage des mathématiques, sur l'appui des mathématiques sur le réel dans l'enseignement des mathématiques, on parle beaucoup d'un cercle « problème - modèle mathématique - solution mathématique - interprétation de la solution en vue du problème ». Ce « cercle de modélisation » est souvent décrit de la façon suivante (voir schéma ci-dessous) :

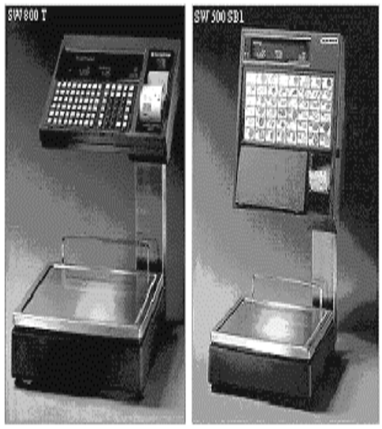


D'après Blum *et al.,* 2007, p. 4

On part d'un problème du monde extérieur aux mathématiques, on crée un modèle mathématique pour trouver une solution. Si on est arrivé à une solution mathématique, il faut l'interpréter comme une solution au problème initial, c'est-à-dire qu'il faut se poser la question de savoir si la solution mathématique est une solution au problème initial. Sinon, on réitère la procédure, on fait un effort pour changer de modèle mathématique, on s'efforce de trouver une solution mathématique différente, ou répondant au modèle modifié, pour pouvoir interpréter la solution dans le monde extra-mathématique, qui soit plus acceptable que la première solution (pour les détails voir par ex. Blum & Niss 1991, et, pour l'étude 14 de la CIEM (ICMI Study) : Blum *et al.* 2007).

Malheureusement, ces idées pour comprendre l'usage des mathématiques ne répondent pas à quelques questions importantes liées à l'appui des mathématiques sur le réel : Quels liens existent entre les mathématiques comme système de « savoirs disciplinaires mathématiques » et les mathématiques comme « activités culturelles » dans les divers milieux où on « fait » et/ou « utilise » les mathématiques ? L'intervention de Paolo Boero a répondu à cette question, au moins partiellement. Pour une deuxième question, il me faut décrire un phénomène un peu complexe : Beaucoup de politiciens, d'idéologues, « Monsieur tout le monde », parlent du fait qu'aujourd'hui on a besoin des mathématiques, qu'on les utilise toujours et partout. La consultation d'un programme scolaire de mathématiques suffit normalement pour illustrer cette opinion publique. Au contraire, dans les recherches effectuées sur les mathématiques dans la vie quotidienne ou professionnelle, on a des difficultés à identifier les mathématiques. De plus, les enquêtes menées auprès des citoyens « dans la rue », ainsi que dans le monde du travail, produisent un résultat assez décevant : dans la plupart des situations quotidiennes et professionnelles, on n'utilise guère que l'arithmétique élémentaire, « on ne voit pas les mathématiques ». Seule une recherche intensive montre que, en dehors de l'arithmétique élémentaire, les mathématiques plus spécialisées ne sont qu'utilisées localement et rarement. Pourquoi, aujourd'hui, ne voit-on pas les mathématiques dans la vie quotidienne?

Pour mieux comprendre ce phénomène, je reprends une étude de cas que j'ai déjà présentée il y a quelques années (*cf.* Straesser, 2007). Si on examine la question des procédures de pesée, on peut distinguer trois phases dans l'histoire récente :



Jadis (et encore quelquefois aujourd'hui sur les marchés), on utilisait la balance « Roberval », qui demande l'addition des poids pour peser n'importe quel objet. La balance du milieu (en allemand « Fächerkopfwaage »[4]) épargne ces additions, parce qu'elle indique directement le poids de l'objet – et peut même donner son prix si elle est utilisée de façon correcte. La balance électronique, à droite, ne donne pas seulement le poids, mais produit immédiatement un ticket autocollant qui indique aussi le prix de la marchandise. En plus, dans les dispositifs les plus sophistiqués, elle est reliée à un système de contrôle des marchandises, qui commande automatiquement la livraison de l'approvisionnement du magasin si nécessaire. Dans la phase finale, les mathématiques sont donc « cachées » par les instruments. Des algorithmes pour contrôler le flux des marchandises sont installés dans les machines, l'organisation du travail et les technologies de la communication, mais seuls « les experts », les professionnels de la programmation font des mathématiques.

Cette étude de cas présente au moins une occasion de voir comment s'opère la disparition des mathématiques de la vie quotidienne et professionnelle : les mathématiques sont cachées par les instruments et dans les niveaux élevés de la hiérarchie professionnelle. Les didacticiens des mathématiques doivent analyser de plus près la disparition des mathématiques de la vue des gens. Pour l'éducation (non seulement mathématique), on est confronté à une alternative : ou bien l'individu gravit l'échelle de la hiérarchie professionnelle en ignorant les mathématiques cachées derrière les artefacts et des organisations de plus en plus sophistiquées. Ou bien l'enseignement fait l'effort de « fabriquer » suffisamment de professionnels comprenant les idées cachées dans les instruments et pouvant même gérer les situations de dysfonctionnement des instruments, faire avancer les technologies et être des

[4] Littéralement « balance à tête en éventail ».

citoyens compétents. Dans ce cas, il faut en outre « déterrer », les mathématiques, ce qui implique pour l'enseignant d'avoir des connaissances, non seulement en mathématiques, mais aussi sur le(s) problème(s) « hors mathématiques ».

En guise de conclusion : quelques réflexions émanant de la discussion

Réactions des intervenants après les exposés

L'utilité n'est pas un critère pour s'appuyer sur la réalité ; le problème est plutôt d'identifier des champs d'expérience dans lesquels une véritable activité mathématique a sa place. C'est par exemple le cas pour les probabilités, avec les jeux. (P. Boero)

En Allemagne, dans l'enseignement professionnel, on ne forme pas seulement les gens à faire fonctionner une machine, mais aussi à être capables de la réparer en cas de panne, c'est-à-dire à gérer les situations imprévues. Et ceci implique des savoirs mathématiques. Comprendre la société moderne implique également des connaissances mathématiques, car les mathématiques constituent la technologie la plus fondamentale. (R. Straesser)

Mais quand on parle de la culture ambiante, il ne s'agit pas nécessairement des technologies. On peut sans doute trouver des domaines hors technologie qui pourraient être source d'activité mathématique, par exemple dans l'histoire. (B. Parzysz)

Il ne suffit pas de prôner l'utilité des mathématiques pour sauver leur enseignement ; si on s'oriente dans cette direction, on a déjà perdu le combat. (R. Straesser)

Réactions de la salle

Qu'est-ce que l'« utilité » des mathématiques ? Utilité pour quoi ? Pour la vie pratique ? Pour l'appréhension du monde ? À l'école élémentaire, il faut « déterrer » les mathématiques, même si c'est coûteux. Il nous faut donc réfléchir sur ce qu'il faut déterrer pour donner du sens aux mathématiques tout en minimisant le coût, surtout en temps passé. (M.-J. Perrin)

Il faut effectivement essayer de « déterrer » les mathématiques dans les instruments, mais encore faut-il parvenir à faire faire des mathématiques aux élèves, qui ont du mal à dépasser l'aspect « anecdotique » de la situation. (J.-B. Lagrange)

Si on « déterre » les mathématiques, il faut privilégier les grandeurs par rapport aux nombres. (R. Straesser)

L'introduction d'éléments d'informatique dans les programmes du lycée ne va-t-elle pas nous priver d'une source de problèmes et d'activités ? (R. Cori)

On voit de plus en plus les mathématiques intervenir au niveau du contrôle de l'activité, par exemple des éléments du contrôle de l'activité, ou des éléments de cinématique et de dynamique pour l'apprentissage de la conduite automobile. L'impact des campagnes de sécurité est biaisé si les gens à qui elles s'adressent n'ont pas les connaissances leur permettant de les entendre. C'est la même chose pour ce qui concerne la notion de risque. Il convient donc de donner à nos élèves les moyens de décoder ces informations. (J. Rogalski)

Quels outils, méthodes et concepts pouvons-nous apporter là-dessus ? (A. Kuzniak)

Les professionnels ont des ressources qui minimisent beaucoup le niveau de mathématiques qui intervient par rapport à ce que nous, nous utiliserions. Donc, concilier les exigences de la formation professionnelle et celles de la formation mathématique n'est pas forcément évident. Mais il ne faut pas priver nos élèves de potentialités. (C. Castela)

Beaucoup de connaissances mathématiques des élèves et des adultes ne sont pas disponibles, même si elles sont mobilisables, donc la question ne se pose pas en termes d'utilité. (P. Boero)

Les mathématiques ont 6000 ou 7000 ans. Les Éléments d'Euclide sont l'un des trois livres les plus réédités dans le monde. Il y a une donnée culturelle fondamentale dans les mathématiques. Il faut aussi penser « utilité culturelle ». Un bon nombre des situations du réel ne pourraient-elles pas être extraites du passé, où elles ont beaucoup motivé les progrès des mathématiques ? (M. Rogalski)

Paolo Boero
Dipartimento di Matematica dell'Università
boero@dima.unige.it

Alain Kuzniak
Université d'Orléans, Laboratoire de didactique André Revuz
alain.kuzniak@orleans-tours.iufm.fr

Rudolf Sträßer (ou Straesser)
Institut für Didaktik der Mathematik, Justus-Liebig-Universität Giessen
rudolf.straesser@uni-giessen.de

Bernard Parzysz
Université d'Orléans, Laboratoire de didactique André Revuz
parzysz.bernard@wanadoo.fr

Références

Bachelard G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique.* Paris : Vrin.

Bartolini Bussi M. G., Boni M., Ferri F., & Garuti R. (1999). Early approach to theoretical thinking: Gears in primary school. *Educational Studies in Mathematics,* 39, 67-87.

Blomhoj M., & Jensen T. H. (2003). Developing mathematical modelling competence: conceptual clarification and educational planning. *Teaching Mathematics and its Applications,* 22(3), 123-139.

Blum W. *et al.* (2002). ICMI Study 14: Applications and Modelling in Mathematics Education - Discussion Document. *Educational Studies in Mathematics,* 51(1/2), 149-171.

Blum W., Galbraith P. L., Henn, H.-W., & Niss M. (Eds.). (2007). *Modelling and Applications in Mathematics Education.* New York : Springer.

Blum W., & Niss M. (1991). Applied Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications and Links to Other Subjects - State, Trends and Issues in Mathematics Instruction. *Educational Studies in Mathematics,* 22(1/2), 37-68.

Boero P. (1994). Experience fields as a tool to plan mathematics teaching from 6 to 11, in L. Bazzini & H.G. Steiner (Eds.) *Proceedings of the Second Italian German Bilateral Symposium on Didactics of Mathematics* (pp. 45-62). Bielefeld: IDM.

Boero P., Dapueto C., Ferrari P., Ferrero E., Garuti R., Lemut E., Parenti L., Scali E. (1995). Aspects of the Mathematics-Culture Relationship in Mathematics Teaching-Learning in Compulsory School. *Proceedings of PME-XIX,* vol. 1 (pp. 151-166). Recife.

Boero, P., Douek, N. (2008). La didactique des domaines d'expérience dans le cadre de la théorie des champs conceptuels et de la dialectique concepts scientifiques- concepts communs. *Carrefours de l'éducation,* 26, 103-119.

Brousseau G. (1986) Problèmes de l'enseignement des décimaux. *Recherches en didactique des mathématiques,* 7(2), 33-115.

Bulf C. (2008). *Effet des études de la symétrie axiale sur la conceptualisation des isométries planes et sur la nature du travail géométrique au collège.* Thèse de doctorat de l'Université Paris-Diderot.

Dahan J.M. (2003). *La démarche de découverte expérimentalement médiée par Cabri-Géomètre en mathématiques: un essai de formalisation à partir de l'analyse de démarches de résolutions de problèmes de boîtes noires.* Thèse de doctorat de l'Université Joseph Fourier Grenoble.

Dapueto C., Parenti L. (1999). Contributions and obstacles of contexts in the development of mathematics knowledge. *Educational Studies in Mathematics,* 39, 1-21.

Douek N. (1999). Argumentation and Conceptualisation in Context. A Case Study on Sun Shadows in Primary School. *Educational Studies in Mathematics.* 39, 89-110.

Douek N. (2003). *Les rapports entre argumentation et conceptualisation dans la didactique des domaines d'expérience.* Thèse, Université R. Descartes, Paris V.

Hatano G., Wertsch J. V. (2001), Sociocultural approaches to Cognitive Development: The Constitution of Culture in Mind. *Human Development,* 44, 77-83.

Henry M. (1999). L'introduction des probabilités au lycée : un processus de modélisation comparable à celui de la géométrie. *Repères-IREM* 36, 15-34.

Houdement C. & Kuzniak A. (2000). Formations des maîtres et paradigmes géométriques. *Recherches en didactique des mathématiques,* 20(1), 89-116.

Houdement C. & Kuzniak A. (2002), Approximations géométriques. *L'ouvert,* 105, 19-28.

Houdement C. & Kuzniak A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives,* 11, 175-216

Klein F. (1903), *Elementarmathematik von höheren Standpunkte aus.* (Troisième édition 1928). Berlin: Springer.

Kuhn T.S. (1962). *The structure of scientific revolutions,* (Second edition 1970). Chicago: University of Chicago Press.

Kuzniak, A., Parzysz, B., & Vivier, L. (éd.) (2008). Du monde réel au monde mathématique. Un parcours bibliographique. *Cahier Didirem n°58*. Paris : IREM Paris-Diderot.

Kuzniak, A. & Rauscher, J.C. (2003) Autour de quelques situations de formation en géométrie pour les professeurs d'école. *Actes du colloque sur la formation des maîtres.* La Roche sur Yon. Université de Nantes pp 271-290.

Kuzniak, A., & Rauscher J.C. (2004). Formation des PE1 et anamnèse géométrique *Actes du colloque sur la formation des maîtres*. Avignon Université d'Avignon. pp 231-248.

Malonga, F. (2008). *Interactions entre les mathématiques et la physique dans l'enseignement secondaire en France. Cas des équations différentielles du premier ordre.* Thèse de doctorat (dir. B. Parzysz & D. Beaufils). Université Paris-Diderot.

Malonga F., Beaufils D. & Parzysz B. (2008). Les équations différentielles du premier ordre en physique en terminale S. Le lien avec les mathématiques en question. *Bulletin de l'Union des Professeurs de Physique et de Chimie,* 904, 647-666.

OCDE (2003). *Cadre d'évaluation de PISA 2003 – Connaissances et compétences en mathématiques, lecture, sciences et résolution de problèmes.* Site Web de l'OCDE.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies. Approche cognitive des instruments contemporains.* Paris : Armand Colin.

Simondon, G. (1969). *Du mode d'existence des objets techniques.* Paris : Aubier.

Souchard L. (2008). Les espaces de Travail Calculatoires (Communication personnelle).

Straesser, R. (2007). Everyday Instruments: On the Use of Mathematics. In Blum, W., Galbraith P. & Henn H.W. (eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education* 171-178. Heidelberg - New York: Springer.

Vygotsky, L. S. (1985). *Pensée et langage.* Paris : Éditions Sociales.