

Analyse de différents niveaux de modélisation du réel dans le cadre de la mise en œuvre d'une situation d'enseignement du théorème de Thalès au collège

Éric Laguerre

Résumé

Dans un premier temps, cette communication consiste à donner une réponse à la question du sens qu'un théorème peut prendre pour des élèves dans l'enseignement secondaire de la géométrie. Cette réponse a pour caractéristique de posséder à la fois une composante intérieure aux mathématiques élaborée à partir de la théorie anthropologique du didactique, de la théorie des situations et du concept d'obstacle, et une composante extérieure fondée sur les liens qui peuvent être établis entre le méso-espace et le micro-espace. Dans un second temps, nous donnons un exemple de construction d'une situation permettant l'étude du théorème de Thalès. Nous prenons appui sur cette dernière pour illustrer le sens que nous donnons à la « modélisation du réel » dans l'enseignement, en nous fondant pour partie sur la notion de Domaine Didactique d'Expérience (Boero) et pour mettre en évidence différents niveaux de modélisation du réel.

Introduction

Ce travail est fondé en partie sur le Cahier DIDIREM n° 58 (Kuzniak, Parzysz, Vivier, 2008) qui synthétise divers travaux de recherche sur la modélisation de la réalité dans l'enseignement.

Deux approches historiques des mathématiques à enseigner peuvent se dégager (Treffers, 1987). Les tenants d'une approche décontextualisée des mathématiques fondent leur enseignement des axiomes et théorèmes qui en découlent sur une mathématisation « verticale »¹ détachée du monde. Dans le cadre d'une approche contextualisée, les résultats proviennent de l'expérience et procèdent à une mathématisation « horizontale » de la réalité. Par ailleurs, pour Freudenthal (1973), les mathématiques sont une activité humaine qui consiste à résoudre des problèmes mais cette recherche s'effectue à l'aide d'un processus de mathématisation s'appuyant sur le réel.

C'est dans ce sens que ces deux approches peuvent être considérées comme complémentaires. Nous pouvons en déduire que le sens qu'un théorème peut prendre pour des élèves possède une composante intra mathématique et une composante extra mathématique. Nous travaillons plus spécifiquement sur cette dernière. Dans cet article, le sens extra mathématique est fondé sur les liens qui peuvent être établis entre le méso-espace et le micro-espace dans le cadre de l'étude du théorème de Thalès. Il est élaboré à partir des rapports qui peuvent être établis entre les mathématiques à enseigner et la réalité.

Dans le prolongement de la Didactique des Domaines d'Expérience² (Boero & Douek, 2008) et plus précisément du contexte externe sur lequel nous prenons appui dans notre recherche, nous proposons une définition du sens que nous donnons au concept de « réalité ». À partir de cette approche, nous donnons un exemple de construction d'un problème en situation introduisant le théorème de Thalès au collège sur lequel nous nous appuyons pour mettre en évidence différents niveaux de modélisation du réel.

¹ Cf. glossaire Kuzniak *et al.* Cahier DIDIREM n°58 page 84.

² Notée D.D.E. dans la suite.

Cadre théorique

La Didactique des Domaines d'Expérience

Notre question porte sur la mathématisation du réel dans l'enseignement. Nous cherchons à comprendre l'émergence de différents niveaux de représentation de la réalité chez des élèves en classe de mathématique. Pour cela, nous étayons notre recherche grâce à la Didactique des Domaines d'Expérience (Bartolini Bussi & Douek, 2008). La DDE est relative aux relations complexes qui se développent à l'école entre :

- le contexte interne de l'élève – ses conceptions, l'ensemble de ses schèmes, représentations, émotions –, qui lui permet de faire un repérage des données pertinentes du monde réel, de formuler des hypothèses supplémentaires sur ce monde si cela est nécessaire ce qui aboutit à un choix de représentation du monde réel,
- le contexte interne de l'enseignant – ses conceptions, ses objectifs d'apprentissage, ses représentations, émotions et attentes,
- et le contexte externe – portion de la réalité, signes, objets, contraintes physiques, discussion, analyse. L'objectif est de partir des représentations des élèves d'une réalité et de les faire évoluer à partir du contexte de l'enseignant et du contexte externe.

Dans ce cadre théorique, un modèle est construit à partir d'artefacts matériels (supports, matériaux, objets, signes, ordinateur...), et d'artefacts liés aux mathématiques (parallèles, rationnels...) et aux registres symboliques. Un modèle peut être également employé en tant qu'artefact et donc en tant que nouvelle réalité pour réaliser un nouveau modèle. La modélisation est alors caractérisée par la dialectique comprenant diverses étapes d'interprétation qui peut être établie entre une situation observée et ses représentations correspondant à différents modèles. Nadia Douek (1999) appelle d'ailleurs modélisation : « la dialectique entre la situation observée et ses représentations à travers différentes étapes d'interprétations (dessins). » Nous retrouvons l'approche d'un autre cadre théorique *Realistic Mathematics Education* en particulier celle de Van den Heuvel-Panhuizen (2003) qui tient compte, pour élaborer un modèle, d'un registre matériel et symbolique et d'un registre discursif qui servent à instaurer des chaînes de significations reliant des « modèles de » et des « modèles pour ».

En ce qui concerne le contexte externe qui apparaît dans la DDE, les signes, les contraintes physiques, les discussions semblent clairement définis. Mais qu'entend-on par portion de la réalité ? Nous pensons qu'une tentative de définition de ce concept pourrait, par la suite, éclairer un peu plus l'acte de modélisation du réel dans l'enseignement.

La réalité

En connexion avec la DDE, Dapuerto et Parenti (1999) considèrent que la réalité n'est pas toujours un objet matériel ou un phénomène naturel ou social mais qu'elle peut être représentée sous une forme en partie modélisée. L'idée qui est à prendre en considération est le fait qu'un modèle apparaissant à un certain niveau de la modélisation du réel constitue une nouvelle réalité ce qui correspond à la prise en compte de l'existence de méta-niveaux d'interprétations de la réalité. Un modèle peut lui-même être employé comme artefact dans le but de construire d'autres modèles.

Mais le réel n'est toujours pas clairement défini. Dans son ouvrage, Thirion (1999) cite Rosset³ qui conçoit la réalité comme un certain niveau de notre rapport au monde en tant qu'il est envisagé sous les catégories de l'événement et de la situation. Nous retenons cette définition mais afin qu'il n'y ait pas de confusion possible entre les diverses acceptions du

³ ROSSET C. (2000) La notion de réalité. *Encyclopédie philosophique universelle* T I, 97.

terme de situation et pour nous placer dans le cadre de la Didactique des Domaines d'Expérience nous le remplaçons par le mot contexte. Nous entendons par « événement » la donnée d'un lieu, d'un instant et d'interprétations de faits. Nous comprenons le mot « contexte » en tant qu'il est décrit par un environnement, du matériel et des actions. Ainsi, dans un prolongement de la DDE qui prend en compte cette approche de la réalité matérielle, nous appelons modélisation la dialectique établie entre un contexte et les événements observés et leurs représentations respectives à travers diverses étapes qui correspondent à autant de modèles. Pour être adaptés à des situations d'apprentissage, Van den Heuvel-Panhuizen (2003) considère que les modèles remplissent généralement deux conditions : ils naissent dans des contextes réalistes ou imaginables et permettent la mise en place d'une mathématisation verticale.

Nous proposons de débiter l'étude du théorème de Thalès par le problème de mesure de distances inaccessibles. Ce type de problématique n'est certes pas nouveau à ce détail près qu'au cours de l'histoire, les situations proposées, en particulier par Clairaut (1741), étaient et sont encore représentées directement dans l'espace le plus familier c'est-à-dire celui d'une feuille de papier (Laborde, 1984). Notre idée est qu'une modélisation qui assurerait précisément le passage du méso-espace au micro-espace grâce à une triple approche de la question permettant de rencontrer à la fois une problématique pratique, une problématique de modélisation et une problématique géométrique⁴ (Berthelot et Salin, 1992), contribuerait à la construction du sens d'une notion.

Un problème en situation pour introduire le théorème de Thalès

De l'ingénierie didactique que nous avons conçue (Laguerre, 2005), nous extrayons deux problèmes qui sont en rapport avec le réel :

- la possibilité de mesurer de façon effective des distances inaccessibles dans le méso-espace, l'espace de la cour.
- la possibilité d'évoquer cette action à partir de la représentation des situations de ce domaine dans le micro-espace, l'espace de la feuille.

Nous proposons tout d'abord une analyse succincte de la séquence composée de quatre séances liées à ces deux problèmes en termes d'objectifs, de tâches et de résultats. Ensuite, ces situations nous servent à illustrer différents niveaux de modélisation du réel.

Situation (1) : visée dans le méso-espace

La classe est divisée en 15 binômes disposant tous d'une lorgnette avec laquelle ils visent une mire. Ces lorgnettes sont construites à partir de boîtes parallélépipédiques toutes différentes mais d'une telle façon qu'à la fin de la séance, trois lieux de visées se dégagent. Aussi, la tâche pour les binômes est, d'une part, de viser dans la cour avec leur lorgnette la mire composée d'une bande de papier de 1 mètre de long et de 15 centimètres de large fixée sur un tableau et, d'autre part, de marquer le lieu de visée à l'aide d'un carton d'identification (Figure 1). Pour viser, les élèves font coïncider les milieux de la fente et de la mire ainsi que leurs extrémités afin que la fente de visée soit exactement remplie. L'objectif est que les élèves se rendent compte qu'il y a trois lieux de visée distincts. Les élèves constatent

⁴ La problématique pratique est en rapport, par exemple, avec le fait de superposer un gabarit pour montrer que deux triangles sont égaux. La problématique de modélisation consisterait à prendre les mesures nécessaires sur les deux triangles et, en appliquant la formule de l'aire du triangle, à montrer qu'ils ont la même aire, mises à part les approximations liées aux calculs et à la mesure. La problématique géométrique revient à raisonner sur les aires par découpage et recomposition sans prendre de mesures sur le dessin.

effectivement qu'il y a trois lieux de visée différents. De plus un binôme émet l'idée que des lorgnettes distinctes peuvent malgré tout avoir le même lieu.

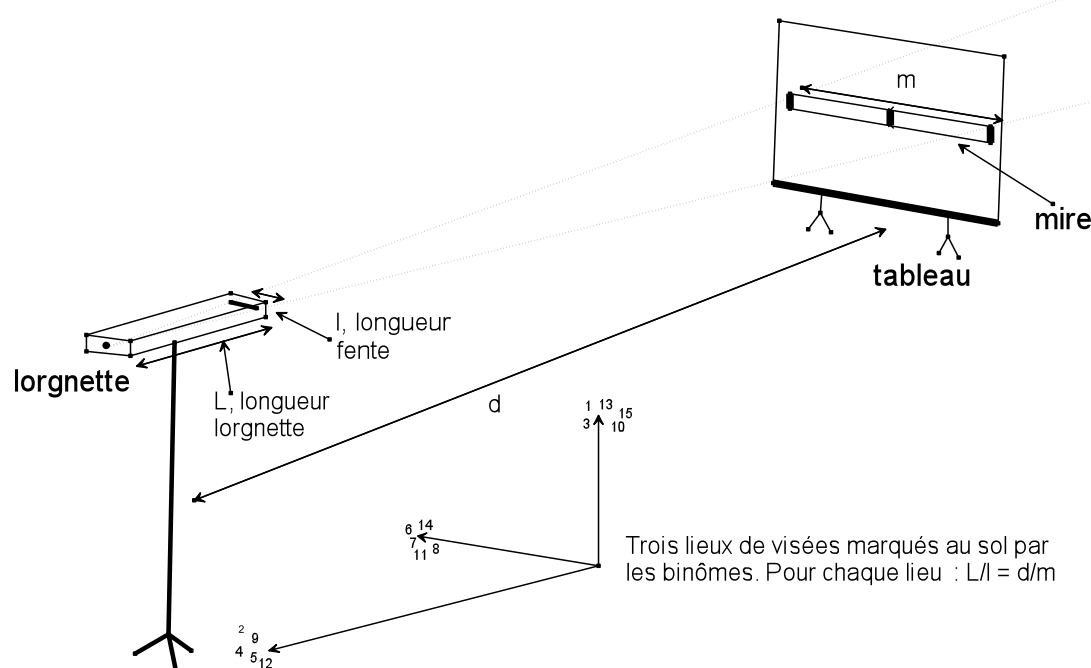


Figure 1 - Un exemple de visée avec une lorgnette et représentation des trois lieux

Situation (2) : modélisation plane des lorgnettes et visée dans le micro-espace

Le premier objectif de cette séance qui se déroule dans la salle de classe est de parvenir à se mettre d'accord sur une représentation des lorgnettes dans le plan et de produire sur papier calque les rectangles attendus à l'échelle, sur lesquels sont indiquées la fente et le trou de visée (Figure 2).

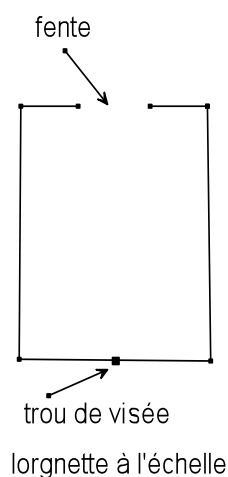


Figure 2 - Une lorgnette à l'échelle

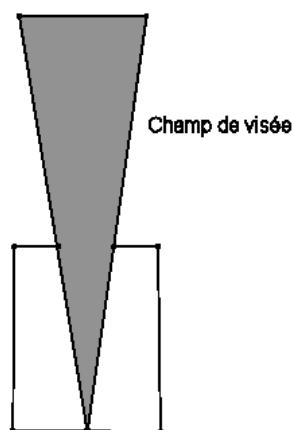


Figure 3 - Une visée représentée dans le plan

Les élèves ont pour tâche d'imaginer une façon de représenter une lorgnette sur une feuille de papier. Les résultats que nous obtenons sont liés au contexte interne des élèves. En effet,

quelques-uns sont tentés de schématiser les lorgnettes dans l'espace à trois dimensions. Certains produisent des schémas hybrides relevant à la fois du plan et de l'espace. Mais pour d'autres, une représentation rectangulaire plane est rapidement proposée. Après échanges mutuels, le schéma attendu est retenu par la classe qui admet la validité d'une telle représentation qui facilite l'accès à l'information et la compréhension de la situation de visée. S'en suit un retour à un travail en binôme pour la production des lorgnettes à l'échelle. Un écueil est en rapport avec le statut de ces représentations qui diffèrent de celui du dessin. Il s'agit ici de produire un objet spatio-graphique (Laborde et Capponi, 1994) pour lequel les imperfections de tracé sont importantes.

Le second objectif de cette séance est de dessiner l'angle de visée (Figure 3). Les élèves ont donc pour tâche de représenter des rayons lumineux immatériels ce qui constitue une difficulté conceptuelle pour eux. Ils ont dû être guidés par l'expérimentateur.

Le troisième objectif de cette séance est de procéder à une visée dans le micro-espace (Figure 3). Les élèves doivent prendre conscience que la mire ne peut pas être représentée à la même échelle que la lorgnette. Les résultats montrent que les élèves parviennent à se rendre compte qu'il est nécessaire d'employer deux échelles. De plus, ils ont bien assimilé le fait que, pour qu'une mire soit perçue à l'aide d'une lorgnette dans le micro-espace, il faut d'une part, que les milieux de la mire, de la fente et le trou de visée soient alignés et que, d'autre part, cette mire entre exactement dans le champ de visée de la lorgnette. La problématique de modélisation prend ici le relais puisqu'il s'agit d'anticiper une réponse qui pourrait être obtenue dans le méso-espace mais dont il est exigé qu'elle soit trouvée dans le modèle.

Situation (3) : anticipation d'une visée par le calcul

Le premier objectif de cette séance est la mise en évidence de l'équivalence des lorgnettes à partir de la superposition de leurs calques. Chacun des neuf groupes constitués reçoit toutes les représentations d'un des trois ensembles de lorgnettes. Les élèves doivent comprendre les raisons de leur équivalence. Il s'avère que les élèves ont l'idée de positionner les calques les uns sur les autres pour parvenir à ce résultat après avoir tracé un champ de visée.

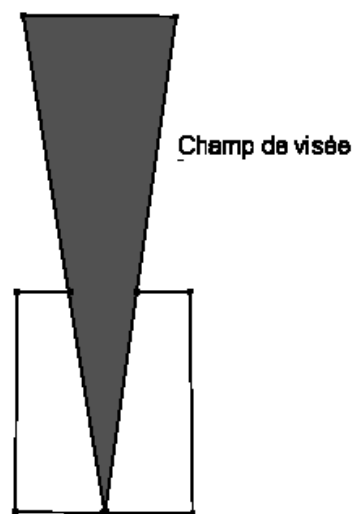


Figure 4 - Équivalence de cinq lorgnettes par superposition des calques et correspondance des champs de visée

Le second objectif de cette séance est d'émettre une conjecture en rapport avec la proportionnalité de la mesure de la longueur des lorgnettes et de la mesure de la longueur de leur fente ce qui leur permet ensuite d'anticiper une visée du méso-espace par le calcul. Pour cela, sont consignées au tableau et pour chaque lorgnette, les mesures des longueurs de la fente, de la longueur et de la largeur de la lorgnette et de la mire ainsi que les distances dans le méso-espace des trois lieux de visée à la mire. Les élèves ont pour tâche de mettre en relation ces mesures. Les caractéristiques des lorgnettes d'un des trois tas sont telles que le rapport peut être identifié ($\text{largeur fente/longueur lorgnette} = 1/10$), ce que les élèves ont d'ailleurs fait. Ils déduisent une partie de la généralisation attendue : le rapport longueur fente/longueur lorgnette est à peu près le même pour les lorgnettes d'un même tas. Par contre, ils sont guidés par l'expérimentateur pour trouver qu'à chaque fois ce rapport est celui de la longueur de la mire sur distance lorgnette-mire. Ce constat leur permet d'anticiper par le calcul une visée du méso-espace. La problématique géométrique prend place lors de la démonstration de la conjecture.

Situation (4) : retour dans le méso-espace

Cette situation a pour but de trouver dans le méso-espace une solution pratique au problème grâce à la fabrication d'un télémètre (Errard de Bar-le-Duc, 1594) qui se compose de deux règles graduées en centimètres l'une horizontale et l'autre verticale et d'une troisième branche articulée avec la règle horizontale (Figure 5).

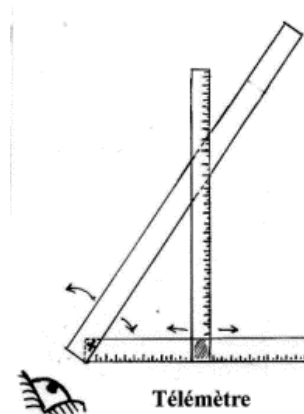


Figure 5

La verticale glisse le long de l'horizontale. On fait coïncider l'extrémité de cette dernière avec le pied de l'objet visé et l'extrémité de la partie articulée avec le sommet. On mesure alors la distance qui sépare le viseur de l'objet, par exemple 20 mètres, et l'on place la règle verticale à 20 centièmes sur horizontale. La longueur qui apparaît à l'intersection de la règle verticale et de la partie articulée donne la hauteur cherchée.

Cadre d'analyse de la modélisation en jeu dans la séquence

Avant le début de la modélisation

Contexte : dans la cour de l'établissement (environnement), les binômes visent (action) à l'aide de lorgnettes une mire fixée sur un tableau (matériel) en faisant coïncider les extrémités et le milieu de la mire avec les extrémités et le milieu de la fente de la lorgnette. (Situation 1)

Événement : dans la cour (lieu), après que tous les binômes ont procédé à la visée (instant), certains élèves remarquent que les cartons identificateurs sont regroupés en trois tas (1^{ère} interprétation du fait « équivalence ») et d'autres ont rajouté que des lorgnettes différentes peuvent avoir le même lieu de visée (2^{ème} interprétation du fait « équivalence »). (Situation 1)

Les différentes étapes de la modélisation

La modélisation du contexte initial (matériel et action)

Modèle réaliste du contexte (matériel) : dans la salle organisée en ateliers, les élèves représentent les lorgnettes par des rectangles à l'échelle sur papier calque. Il s'agit d'une modélisation réaliste du matériel car des rectangles de même type percés d'un point de visée et fendus d'un segment représentant les lorgnettes dans le plan peuvent aussi apparaître dans le contexte si nous procédons à une découpe en long des lorgnettes parallélépipédiques suivant le plan défini par le trou et la fente de visée. (Situation 2, Objectif 1)

Modèle imaginable du contexte (matériel) : pour pouvoir matérialiser la visée dans le plan, les élèves tracent le champ de visée de leur lorgnette (Figure 3). Le modèle en rapport avec le contexte est imaginable car les champs sont impalpables dans le contexte initial. (Situation 2, Objectif 2)

Modèle imaginable du contexte (action) : après avoir modélisé une lorgnette et son champ de visée, l'action de visée est modélisée. Dans le plan, les milieux de la mire et de la fente sont placés sur la bissectrice de l'angle de visée et leurs extrémités respectives sont situées sur les côtés de cet angle. C'est un exemple où nous pouvons expliquer le fait que la modélisation constitue une interface entre deux interprétations de la réalité. Ce rôle de médiation est apparent grâce au lien établi entre, d'une part, le fait qu'il fallait, pour viser correctement dans la cour, être de face et que les extrémités et les milieux des deux objets devaient coïncider et, d'autre part, l'idée que dans le modèle plan, les extrémités et les milieux en question se situent respectivement sur la bissectrice et les côtés de l'angle de visée. (Situation 2, Objectif 3)

Événement dans cette réalité : le modèle imaginable du contexte correspond à une nouvelle réalité et donne lieu à l'apparition d'un nouvel événement : dans la salle de classe (lieu), après avoir représenté les lorgnettes à l'échelle sur papier calque (instant), les élèves constatent par superposition des calques la coïncidence de cinq angles. (Situation 3, Objectif 1)

La modélisation de l'événement initial

Modèle imaginable de l'événement : l'événement précédent peut aussi être interprété comme étant un événement «imaginable» dans le modèle lié à l'événement du départ : dans la salle de classe (lieu), après avoir représenté les lorgnettes à l'échelle sur papier calque (instant), les élèves constatent que l'équivalence des lorgnettes correspond au fait qu'elles ont le même champ. (1^{ère} interprétation «imaginable» dans le modèle du fait «équivalence»). La modélisation est une interface entre un événement lié au modèle et un autre en rapport avec le contexte. (Situation 3 Objectif 1)

Événement «mathématique» dans le modèle lié à l'événement : un événement «mathématique» peut être rattaché à une interprétation mathématique d'un fait : dans la salle de classe (le lieu), après avoir énoncé que les champs de visée sont équivalents (l'instant), des élèves disent : «Les lorgnettes équivalentes ont des angles de visée égaux» (1^{ère} interprétation mathématique). Ici aussi nous pouvons dire que la modélisation est une interface entre différents types d'interprétations de la réalité car un retour au contexte est inévitable si nous voulons que les élèves dépassent l'idée de l'équivalence de lorgnettes en termes de champ de visée. En quoi les lorgnettes sont-elles différentes ? Elles n'ont pas les mêmes mesures de longueurs. D'où l'apparition d'un nouvel événement «mathématique» dans le modèle : dans la salle de classe (le lieu), après avoir énoncé que les champs de visée sont équivalents (l'instant), des élèves disent : «Les lorgnettes équivalentes ont certaines mesures de longueurs

proportionnelles» (2^{ème} interprétation mathématique). Il s'agit ensuite de démontrer la conjecture.

Conclusion

L'objectif de ce texte est de tenter de cerner la notion de modélisation de la réalité dans l'enseignement des mathématiques. C'est à ce sujet que l'approche du réel que nous proposons dans le cadre de la Didactique des Domaines d'Expériences nous est utile puisqu'elle semble faciliter l'analyse de notre situation.

Nous envisageons la réalité en termes de contexte et d'événement. Le contexte se décompose selon le binôme matériel/action. Le contexte est la visée (action) d'une mire avec des lorgnettes (matériel) dans le méso-espace (environnement). Par événement, nous comprenons la donnée d'un lieu, d'un instant et d'interprétations de faits lié au contexte. Ainsi, un des premiers événements a été de constater l'empilement de cartons d'identification des lorgnettes à trois endroits de la cour.

La modélisation concerne tous les différents mouvements par allers et retours que les élèves instaurent entre, d'une part, un contexte et un événement qui lui est rattaché et, d'autre part, les diverses représentations de ce contexte et de cet événement engendrant de nouvelles interprétations à leur sujet ou générant à leur tour de nouveaux contextes/événements.

Le contexte et l'événement peuvent faire l'objet d'une modélisation réaliste ou d'une modélisation imaginable au sens de la RME. Dans notre travail, la première est liée à une réalité matérielle (les lorgnettes) et la seconde à une réalité physique (champs de visée). Modéliser le contexte consiste à modéliser les objets, le matériel et l'action.

La modélisation favorise des anticipations dans le modèle des actions du réel. Elle permet aussi de donner du sens à l'articulation qui peut être établie entre le monde réel matériel, le monde physique et le monde mathématique.

Le raccourci entre les divers niveaux de modélisation peut être incarné par la situation historique de l'utilisation du télémètre dans le méso-espace pour trouver directement la solution au problème sans aucun calcul. Mais derrière cette simple manipulation existe une mathématisation qui la légitime.

Dans le cadre de l'enseignement, il semble important de se poser les questions suivantes pour une situation de modélisation de la réalité qui serait mise en place en classe :

- Les élèves doivent-ils être amenés à modéliser eux-mêmes tout ou une partie du matériel et des actions ?
- Dans quel but et pour quels apprentissages ?
- Doivent-ils travailler uniquement sur les représentations mathématiques des contextes ?

À l'avenir, nous chercherons à savoir si notre approche de la modélisation de la réalité est généralisable à l'enseignement de la géométrie voire à l'enseignement des mathématiques.

Éric Laguerre

Université de Cergy-Pontoise, Laboratoire de didactique André Revuz

eric.laguerre@versailles.iufm.fr

Références

- Bartolini Bussi M. & Boero P. (1998). Teaching and Learning Geometry in Contexts, Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century. *ICMI study*. Dordrecht: Kluwer 52-62.
- Boero P. & Douek N. (2008). La Didactique des Domaines d'Expérience. *Carrefour de l'Éducation*. 26, 103-119.

- Berthelot & Salin M-H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*. Thèse de doctorat. Université Bordeaux I.
- Clairaut A.C. (1741). *Éléments de géométrie* (1861) Paris : Hachette.
- Dapueto C. & Parenti L. (1999). Contributions and obstacles of contexts in the development of mathematical knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 39, 1-21.
- Douek N. (1999). Argumentation and conceptualization in context : a case study on sun shadows in primary school. *Educational Studies in Mathematics*. 39, 89 -110.
- Errard de Bar-le-Duc I. (1594). *La géométrie et pratique d'icelle* (1619). Paris : Michel Daniel.
- Freudenthal H. (1973). *Mathematics as an Educational Task* Dordrecht Riedel Publishing Company.
- Kuzniak A., Parzysz B., Vivier L. (2008). *Du monde réel au monde mathématique. Un parcours bibliographique et didactique*. IREM Université Paris Diderot Paris 7.
- Laborde C. (1984). Exposé sur la géométrie. In (Balacheff N. éd.) *Recueil des textes et comptes rendus de la 3^{ème} école d'été de didactique des mathématiques et de l'informatique*. IMAG, Université J. Fourier. Grenoble 1.
- Laborde C. & Capponi B. (1994). Cabri-Géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14/1.2, 165-210.
- Laguerre E. (2005). *Une ingénierie didactique pour l'apprentissage du théorème de Thalès au collège*. Thèse de Doctorat. Université Paris Diderot-Paris7.
- Thirion M. (1999). *Les mathématiques et le réel*. Paris : Ellipse.
- Treffers A. (1987). *Three dimensions: a model of goal and theory description in mathematics instruction – the Wiskobas Project*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Van Den Heuvel-Panhuizen M. (2003). The didactical use of models in Realistic Mathematics Education: An example from longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics*, 54, 9-35.